Agrégation Externe

Anneaux et idéaux

On pourra consulter les ouvrages suivants.

N. Bourbaki : *Éléments de Mathématiques, XXX, Algèbre commutative, Chapitres 5,6.* Hermann (1964).

F. Combes. *Algèbre et géométrie.* Bréal (2003).

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas : *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Algèbre 1.* Cassini (2001).

S. Francinou, H. Gianella. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Algèbre 1.* Masson (1994).

R Goblot. *Algèbre commutative.* Masson (1996).

S. Gonnord, N. Tosel. *Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses (1996).

D. Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses (1996).

E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux. *Algèbre. Exercices avec solutions* Masson (1988).

J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L2.* Dunod. (2014).

A. Szpirglas. *Mathématiques L3. Algèbre.* Pearson (2009).

Dans les exercices qui suivent, $\mathbb{A}$ désigne un anneau commutatif unitaire, $\mathbb{A}^* = \mathbb{A} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{A}^\times$ est le groupe multiplicatif des éléments inversibles (ou des unités) de $\mathbb{A}$.

Pour $\mathbb{A}$ intègre, un élément p de $\mathbb{A}^* \setminus \mathbb{A}^\times$ est dit irréductible si :

$$(p = uv) \Rightarrow \left(u \in \mathbb{A}^\times \text{ ou } v \in \mathbb{A}^\times\right)$$

(les seuls diviseurs de p sont les éléments inversibles ou les éléments de $\mathbb{A}$ associés à p).

Pour $\mathbb{A}$ intègre, un élément p de $\mathbb{A}^* \setminus \mathbb{A}^\times$ est dit premier si :

$$(p \text{ divise } uv) \Rightarrow (p \text{ divise } u \text{ ou } p \text{ divise } v)$$

Pour toute famille $(a_k)_{1\leq k\leq p}$ d'éléments de $\mathbb{A}$, l'ensemble :

$$(a_1, \cdots, a_p) = \left\{ \sum_{k=1}^{p} q_k a_k \mid (q_1, \cdots, q_p) \in \mathbb{A}^p \right\}$$

est l'idéal de type fini engendré par $a_1, \cdots, a_p$.

Un idéal I de $\mathbb{A}$ est dit premier s'il est distinct de $\mathbb{A}$ et si $ab \in I$ équivaut à $a \in I$ ou $b \in I$.

Un idéal I de $\mathbb{A}$ est dit maximal s'il est distinct de $\mathbb{A}$ et si I et $\mathbb{A}$ sont les seuls idéaux de $\mathbb{A}$ qui contiennent I.

Un anneau commutatif unitaire est dit factoriel s'il est intègre et si tout élément non nul et non inversible s'écrit de manière unique (à permutation et association près) comme produit d'éléments irréductibles.

Soient $r \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $a_1, \cdots, a_r$ dans $\mathbb{A}^*$. On dit que ces éléments admettent un plus grand commun diviseur s'il existe $\delta \in \mathbb{A}^*$ tel que :

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \cdots, r\}, \ \delta \text{ divise } a_k \\ \text{tout diviseur commun à } a_1, \cdots, a_r \text{ divise } \delta \end{cases}$$

On dit que $\mathbb{A}$ est un anneau à pgcd si deux éléments quelconques a, b de $\mathbb{A}^*$ admettent un pgcd.

Exercice 1 *La notion d'idéal est utilisée pour démontrer qu'un anneau principal est un anneau à* pgcd, *pour caractériser les anneaux factoriels et pour démontrer le résultat important suivant : « un anneau principal est factoriel ». Ce résultat étant essentiel en arithmétique.*
On suppose que l'anneau $\mathbb{A}$ est intègre.

1. *Montrer qu'un anneau principal est un anneau à* pgcd .
2. *Montrer qu'un élément premier dans $\mathbb{A}$ est irréductible.*
3. *Montrer que dans un anneau factoriel $\mathbb{A}$, un élément p de $\mathbb{A}^* \backslash \mathbb{A}^\times$ est irréductible si, et seulement si, il est premier.*
4. *On se donne un entier naturel $n \geq 1$ et on note :*

$$\mathbb{Z}\left[i\sqrt{n}\right] = \left\{a + ib\sqrt{n} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

   Pour $n = 1$, il s'agit de l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

   (a) *Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ est un sous anneau de $\mathbb{C}$ stable par l'opération de conjugaison complexe.*
   (b) *Déterminer l'ensemble $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]^\times$ des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$.*
   (c) *Quels sont les entiers naturels $p \geq 2$ qui sont premiers dans $\mathbb{Z}$ et réductibles dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$?*
   (d) *Montrer que, pour $n \geq 3$, 2 est irréductible non premier dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$.*

5. *Montrer que si $a \in \mathbb{A}^* \setminus \mathbb{A}^\times$ n'admet pas de diviseurs irréductibles, il existe alors une suite strictement croissante d'idéaux principaux de $\mathbb{A}$:*

$$(a_0) = (a) \underset{\neq}{\subset} (a_1) \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} (a_n) \underset{\neq}{\subset} \cdots$$

6. *On suppose que $\mathbb{A}$ est factoriel.*
   Montrer que toute suite croissante d'idéaux principaux de $\mathbb{A}$ est stationnaire.
7. *On suppose que toute suite croissante d'idéaux principaux de $\mathbb{A}$ est stationnaire.*
   Montrer que tout élément de $\mathbb{A}^* \setminus \mathbb{A}^\times$ admet une décomposition en facteurs irréductibles.
8. *Montrer que $\mathbb{A}$ est factoriel si, et seulement si :*

   (a) *toute suite croissante d'idéaux principaux de $\mathbb{A}$ est stationnaire ;*
   (b) *tout élément irréductible de $\mathbb{A}$ est premier.*

9. *Montrer qu'un anneau principal est factoriel.*

Exercice 2 *Les idéaux peuvent être utilisés pour caractériser les anneaux commutatifs unitaires qui sont des corps.*

1. *Montrer que $\mathbb{A}$ est un corps si, et seulement si, ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et $\mathbb{A}$.*
2. *Montrer que $\mathbb{A}$ est un corps si, et seulement si, tous ses idéaux sont premiers.*
3. *Montrer que $\mathbb{A}$ est un corps si, et seulement si, il est intègre avec un nombre fini d'idéaux.*
4. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Montrer qu'un morphisme d'anneaux de $\mathbb{K}$ dans un anneau $\mathbb{A}$ est nécessairement injectif.*
5. *Soit I un idéal de $\mathbb{A}$. Montrer que l'anneau quotient $\dfrac{\mathbb{A}}{I}$ est un corps si, et seulement si, l'idéal I est maximal.*
6. *On suppose que l'anneau $\mathbb{A}$ est principal et on se donne $p \in \mathbb{A}^*$. Montrer que :*

$$(p \text{ irréductible}) \Leftrightarrow \left(\frac{\mathbb{A}}{(p)} \text{ est un corps}\right)$$

Exercice 3 *Les idéaux de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$ sont utilisés dans cet exercice pour définir le polynôme minimal d'un nombre algébrique et étudier quelques propriétés de ces nombres.*

Soient $\mathbb{L}$ un corps commutatif et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$ ($\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$).
On dit qu'un élément α de $\mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ s'il existe un polynôme non nul P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.
Un élément α de $\mathbb{L}$ qui n'est pas algébrique sur $\mathbb{K}$ est dit transcendant.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{L}$, on note :

$$\mathbb{K}[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

et on désigne par $\mathbb{K}(\alpha)$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{L}$ qui contient $\mathbb{K}$ et α.

1. *Soit $\alpha \in \mathbb{L}$ algébrique sur $\mathbb{K}$.*
   (a) *Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P_\alpha \in \mathbb{K}[X]$ tel que :*

   $$\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\} = (P_a)$$

   On dit que P_α est le polynôme minimal de α.

   (b) *Montrer que le polynôme minimal de α est l'unique polynôme unitaire irréductible de $\mathbb{K}[X]$ qui annule α.*

   (c) *Montrer que $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ isomorphe à $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{(P_\alpha)}$ et que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\alpha]) = \deg(P_\alpha)$.*

2. *Soit $\alpha \in \mathbb{L}$. Montrer l'équivalence des trois assertions :*
   (a) *α est algébrique sur $\mathbb{K}$;*
   (b) *$\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$;*
   (c) *$\mathbb{K}[\alpha]$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{L}$.*

3.
   (a) *Soient α, β dans $\mathbb{L}$ algébriques sur $\mathbb{K}$, $P_\alpha(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ le polynôme minimal de α et $P_\beta(X) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k X^k$ celui de β avec $a_n = b_m = 1$. On note :*

   $$\left\{\alpha^i \beta^j \mid 0 \leq i \leq n-1,\ 0 \leq j \leq m-1\right\} = \{\gamma_k \mid 1 \leq k \leq p\}$$

   où $p = nm$ et $\gamma_1 = \alpha^0\beta^0 = 1$. On désigne par v le vecteur de $\mathbb{L}^p$ de composantes $\gamma_1, \cdots, \gamma_p$. Montrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre p, A et B, à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que $Av = \alpha v$ et $BV = \beta v$.

   (b) *Montrer que l'ensemble $\mathbb{A}$ des éléments de $\mathbb{L}$ algébriques sur $\mathbb{K}$ est un corps.*

Exercice 4 *Avec cet exercice, on utilise la notion d'idéal pour caractériser les fermés d'un espace métrique et les espaces métriques compacts.*
On se donne un espace métrique (E, d) et pour toute partie non vide K de E, on désigne par $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$

Pour tout idéal I de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$, on note :

$$Z(I) = \{x \in K \mid \forall f \in I,\ f(x) = 0\}$$

1. *Le but de cette question est de montrer que les fermés de E, sont les les $Z(I)$.*
   (a) *Soit I un idéal de $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$. Montrer que $Z(I)$ est fermé.*

(b) *Réciproquement, soit $\mathcal{F}$ un fermé de E. Montrer qu'il existe un idéal I de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F} = Z(I)$.*

2. *On suppose que $I = (f_1, \cdots, f_p)$ est un idéal de type fini de $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$.*
   Montrer que :
$$(Z(I) = \emptyset) \Leftrightarrow \left(I = \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})\right)$$

3. *On suppose que l'espace métrique E est compact et I est un idéal de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.*
   Montrer que :
$$(Z(I) = \emptyset) \Leftrightarrow \left(I = \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})\right)$$

4. *Réciproquement, montrer que si $Z(I) \neq \emptyset$ pour tout idéal propre de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ (i. e. $I \neq \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$), l'espace métrique E est alors compact.*

Exercice 5 *Avec cet exercice, on décrit les idéaux maximaux de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$, où E est un espace métrique compact et on en déduit la forme des automorphismes de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.*

On se donne un espace métrique compact (E,d) et $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ est l'anneau des fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in E$, on désigne par δ_x l'application définie sur $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(E,\mathbb{R}),\ \delta_x(f) = f(x)$$

(masse de Dirac en x_0).

1. *Montrer que, pour tout $x \in E$, l'application δ_x est un morphisme d'anneaux de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et que, réciproquement, pour tout morphisme d'anneaux φ de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique $x \in E$ tel que $\varphi = \delta_x$.*
2. *Montrer que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $I_x = \ker(\delta_x)$ est un idéal maximal de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.*
3. *Montrer que, pour tout $x \in E$, l'idéal $I_x = \ker(\delta_x)$ n'est pas principal (l'anneau $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ n'est pas principal puisque non intègre).*
4. *Montrer que, pour tout idéal maximal I de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$, il existe un unique $x \in E$ tel que $I = I_x$.*
5. *Soit φ un automorphisme de l'anneau $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.*
   (a) *Montrer que l'image par φ d'un idéal maximal de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ est un idéal maximal.*
   (b) *Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in E$ tel que $\delta_x \circ \varphi = \delta_y$, puis que la fonction $\psi : x \mapsto y$ est un homéomorphisme de E.*
   (c) *En déduire que les automorphismes de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$ sont les application $f \mapsto f \circ \psi$, où ψ est un homéomorphisme de E.*