Correction de la feuille 4 sur le calcul d'intégrales

Exercice 1 Les trois fonctions sont des dérivées immédiates. On peut faire le changement de variables $y = x^2$ si on ne le voit pas directement.

$$\int x\sqrt{x^2+4}dx = \frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}},\ \int \frac{x}{(x^2+1)^{1/3}}dx = \frac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{2}{3}},\ \int x\exp(-x^2)dx = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)$$

Exercice 2 Les changements de variables sautent aux yeux :

$$\int \frac{dx}{x^2+16} = \frac{1}{4}\arctan(x/4),\ \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \arctan(e^x),\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\sqrt{1-x},$$

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{16-e^{2x}}} = \arcsin(e^x/4),\ \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin(x^2),\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\arctan(\sqrt{x})$$

Exercice 3 Pour $n \neq -1$:

$$\int x^n \ln(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \int \frac{x^n}{n+1}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int udu = \frac{u^2}{2} = \frac{(\ln(x))^2}{2}.$$

Pour l'intégrale $\int e^{-x}(\cos x)^2 dx$ remplacer le cosinus en fonction de sa forme exponentielle(=linéariser), puis regarder la partie réelle de l'expression :

$$\int exp(-x)(\cos x)^2 dx = -\frac{1}{10}exp(-x)\cos(2x) + \frac{1}{5}exp(-x)\sin(2x) - \frac{1}{2}\exp(-x).$$

Dernière intégrale faite en TD.

Exercice 4 Si $n \neq 1$:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}.$$

Si $n = 1$ poser $\alpha = a + ib$. Si $b \neq 0$:

$$\int \frac{dx}{x-a-ib} = \int \frac{(x-a+ib)dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) + i\arctan((x-a)/b),$$

et si $b = 0$, $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|$.

Exercice 5 Fait en TD.

Exercice 6

$$\int \frac{dx}{49-4x^2} = \int \frac{1}{14}\left(\frac{1}{7-2x} - \frac{1}{7+2x}\right)dx = \frac{1}{28}\ln\left|\frac{7+2x}{7-2x}\right|.$$

$$\int \frac{5x-12}{x(x-4)}dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x-4}\right)dx = 3\ln|x| + 2\ln|x-4|.$$

$$\int \frac{37x-11}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx = \int \left(\frac{4}{x+1} - \frac{5}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)dx = 4\ln|x+1| - 5\ln|x-2| + \ln|x-3|.$$

$$\int \frac{2x^2-15x+33}{(x+1)(x-5)}dx = \int \left(\frac{-25/3}{x+1} + \frac{4/3}{x-5} + 2\right)dx = -\frac{25}{3}\ln|x+1| + \frac{4}{3}\ln|x-5| + 2x,$$

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{(y-\sqrt{3})dy}{y^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} = \int \frac{dx}{((x+2)^2+1)^2} = \int \frac{(1+\tan^2\theta)d\theta}{(1+\tan^2\theta)^2} = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} = \frac{1}{2}\arctan(x+2) + \frac{(x+2)/2}{1+(x+2)^2}.$$

Exercice 7 Première et deuxième intégrale: $y = \cos(x)$, dernière: (faite en TD) $y = \tan(x/2)$.

$$\int (\sin x)^3 dx = \int (y^2-1)dy = \frac{1}{3}y^3 - y = \frac{1}{3}(\cos x)^3 - \cos(x).$$

$$\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^2}dx = \int \frac{-dy}{(2+y)^2} = \frac{1}{2+y} = \frac{1}{2+\cos(x)}$$

Exercice 8 Formule du binôme, moivre, et prendre la partie réelle. La seconde s'obtient facilement à partier de la première en posant $\theta = t + \pi/2$.

$$\int (\cos\theta)^n d\theta = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{2^n} \frac{\sin(2k-n)\theta}{(2k-n)},$$

Exercice 9 Fait en TD, poser $x = \tan\theta$ et on est ramené à l'exo 8.

Exercice 10 Première intégrale: changement de variables $x = \cos(t)$ ($t \in]0,\pi[$) puis $y = \tan(t/2)\dots$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{-\sin(t)dt}{(1-\cos t)\sin(t)} = \int \frac{\frac{2}{1+y^2}dy}{\frac{1-y^2}{1+y^2}-1} \\ &= \int -\frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{y} = \frac{1}{\tan(t/2)} = \frac{1+\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Deuxième intégrale : poser $y = 2x-3$ puis $y = ch(t)$. On a $t = argch(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1})\dots$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-3x+2}dx &= \frac{1}{4}\int \sqrt{y^2-1}dy = \frac{1}{4}\int (sht)^2 dt = \frac{1}{16}\int (e^{2t}+e^{-2t}-2)dt \\ &= \frac{1}{32}\left(e^{2t}-e^{-2t}\right) - \frac{t}{8} = \frac{1}{8}y\sqrt{y^2-1} - \frac{1}{8}\ln(y+\sqrt{y^2-1}) \\ &= \frac{1}{4}(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2} - \frac{1}{8}\ln\left(2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2.}\right)\end{aligned}$$

Pour la suivante même technique avec $y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ et $y = sh(t)$, $t = \ln(y+\sqrt{y^2+1})$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+x+1}dx &= \frac{3}{4}\int \sqrt{y^2+1}dy = \frac{3}{8}\left(y\sqrt{y^2+1} + \ln(y+\sqrt{y^2+1})\right) \\ &= \frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right).\end{aligned}$$

Pour la dernière poser $y = \frac{2x-1}{\sqrt{5}}$ et $y = \cos(t)\dots\dots$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{-x^2+x+1} &= \frac{5}{4}\int \sqrt{1-y^2}dy = \frac{5}{8}\left(y\sqrt{1-y^2} - arccos(y)\right) \\ &= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{-x^2+x+1} - \frac{5}{8}arccos\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right).\end{aligned}$$

Exercice 11 Poser donc $y = \sqrt{x}\dots$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}dx}{(x-1)^2} &= \int \frac{2y^2}{(y^2-1)^2}dy = \int \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{(y-1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2}\right)dy \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \frac{y}{y^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| - \frac{\sqrt{x}}{x-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x\sqrt{x}dx}{(x+1)^2} &= \int \frac{2y^4dy}{(y^2+1)^2} = \int \left(2 - \frac{4}{y^2+1} + \frac{2}{(1+y^2)^2}\right)dy \\ &= 2y - 3\arctan(y) + \frac{y}{y^2+1} = 2\sqrt{x} - 3\arctan(\sqrt{x}) + \frac{\sqrt{x}}{x+1}.\end{aligned}$$