Chapitre 1

# Le corps des nombres réels

On suppose connus l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

## 1.1 Corps totalement ordonnés

On rappelle qu'une *relation d'ordre* sur un ensemble non vide $E$ est une relation, que l'on notera $\leq$, telle que :

- pour tout $x \in E$, on a $x \leq x$ (*réflexivité*) ;
- si $x, y$ dans $E$ sont tels que $x \leq y$ et $y \leq x$, on a alors $x = y$ (*anti-symétrie*) ;
- si $x, y, z$ dans $E$ sont tels que $x \leq y$ et $y \leq z$, on a alors $x \leq z$ (*transitivité*).

Si de plus, on a pour tous $x, y$ dans $E$, $x \leq y$ ou $y \leq x$, on dit alors que la relation d'ordre est *totale*.

Un ensemble non vide $E$ muni d'une relation d'ordre [resp. d'ordre total] est dit *ordonné* [resp. *totalement ordonné*].

Si $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné, on notera respectivement, pour tous $x, y$ dans $E$ :

- $y \geq x$ pour $x \leq y$ (relation d'ordre inverse associée à $\leq$) ;
- $x < y$ pour $x \leq y$ et $x \neq y$ (ordre strict associé à $\leq$) ;
- $x > y$ pour $y < x$.

**Définition 1.1.** Un *corps totalement ordonné* est un corps commutatif $\mathbb{K}$ muni d'une relation d'ordre total $\leq$ compatible avec les opérations d'addition et de multiplication, c'est-à-dire telle que :

$$\big((x, y, z, t) \in \mathbb{K}^3,\ x \leq y \text{ et } t \geq 0\big) \Rightarrow (x + z \leq y + z \text{ et } xt \leq yt)$$

Si $(\mathbb{K}, \leq)$ est un corps totalement ordonné, on note alors :

$$\mathbb{K}^+ = \{x \in \mathbb{K}\ ;\ x \geq 0\}\,,\ \mathbb{K}^- = \{x \in \mathbb{K}\ ;\ x \leq 0\}$$

Les éléments de $\mathbb{K}^+$ sont dits positifs et ceux de $\mathbb{K}^-$ négatifs. Dans un tel corps, on a les « *règles des signes* » suivantes :

- $x \leq 0$ et $x \geq 0$ équivaut à $x = 0$ (anti-symétrie de $\leq$) ;
- $x \leq 0$ équivaut à $-x \geq 0$ (si $x \leq 0$, alors $0 = x + (-x) \leq -x$, si $-x \geq 0$, alors $0 = x + (-x) \geq x$) ;
- si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \geq 0$ (on multiplie par $y$ la première inégalité) ;
- si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $xy \geq 0$ ($-x \geq 0$, $-y \geq 0$, donc $xy = (-x)(-y) \geq 0$) ;
- $1 > 0$ ($1 \neq 0$ et $1 = 1^2 \geq 0$ d'après les deux points précédents) ;
- si $x \leq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \leq 0$ ($-x \geq 0$, donc $-xy = (-x)\,y \geq 0$ et $xy \leq 0$) ;
- si $x > 0$, alors $\dfrac{1}{x} > 0$ ($\dfrac{1}{x} \leq 0$ donnerait $1 = x\dfrac{1}{x} \leq 0$) ; si $x < 0$, alors $\dfrac{1}{x} < 0$.

**Exemples 1.1** *Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont totalement ordonnés par la relation d'ordre usuelle $\leq$ et $\mathbb{Q}$ est un corps totalement ordonné.*

**Lemme 1.1** *Soit $(\mathbb{K}, \leq)$ un corps totalement ordonné. Pour tout entier $n \geq 1$ et toute famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, tous les $x_i$ sont nuls.*

**Démonstration** On procède par récurrence sur l'entier $n \geq 1$. Pour $n = 1$, il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a $x^2 \geq 0$, ce qui se déduit des règles de signes précédentes. Supposons le résultat acquis au rang $n \geq 1$ et soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. En ajoutant $x_{n+1}^2$ aux deux membres de l'inégalité $0 \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, on obtient $0 \leq x_{n+1}^2 \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$. Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ est telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$, on a alors $0 \leq x_j^2 \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ pour tout entier $j$ compris entre 1 et $n$, ce qui implique que $x_j^2 = 0$, soit que $x_j = 0$ (on est dans un corps). ■

Dans le cas particulier où tous les $x_i$ sont égaux à 1 dans le lemme précédent, on a $n = n \cdot 1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1^2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Du théorème précédent, on déduit qu'un corps algébriquement clos ne peut être totalement ordonné (exercice 1.1). C'est le cas en particulier pour le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes (le corps des réels et celui des complexes étant supposés construits).

**Théorème 1.1.**

*Un corps totalement ordonné est de caractéristique nulle.*

**Démonstration** Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $p \geq 2$ (un nombre premier). Si $\mathbb{K}$ est totalement ordonné, on a alors $0 \leq 1 \leq p \cdot 1 = 0$ et $1 = 0$, ce qui est impossible dans un corps. ■

Il résulte du théorème précédent que l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels s'injectent dans tout corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ et un tel corps est en particulier infini. Le *sous-corps premier* de $\mathbb{K}$ (à savoir le plus petit sous corps de $\mathbb{K}$) est identifié à $\mathbb{Q}$.

Pour toutes parties non vides $A$ et $B$ d'un corps commutatif $\mathbb{K}$, on note :

$$-A = \{-x,\ x \in A\}\,,\ A + B = \{x + y,\ (x, y) \in A \times B\}$$

$$A \cdot B = \{xy,\ (x, y) \in A \times B\}$$

**Théorème 1.2.**

*Un corps commutatif $\mathbb{K}$ est totalement ordonné si, et seulement si, il existe une partie $P$ de $\mathbb{K}$ telle que :*

$$\begin{cases} P \cap (-P) = \{0\}\,,\ P \cup (-P) = \mathbb{K} \\ P + P \subset P,\ P \cdot P \subset P \end{cases} \tag{1.1}$$

*En cas d'existence d'une telle partie $P$, la relation $\leq$ définie sur $\mathbb{K}$ par :*

$$(x \leq y) \Leftrightarrow (y - x \in P)$$

*est une relation d'ordre total compatible avec la structure de corps de $\mathbb{K}$.*

**Démonstration** Si $(\mathbb{K}, \leq)$ est un corps totalement ordonné, on vérifie alors que l'ensemble $P = \mathbb{K}^+$ des éléments positifs de $\mathbb{K}$ vérifie les propriétés (1.1). Si $x \in P \cap (-P)$, on a alors $x \geq 0$ et $x \leq 0$, soit $x = 0$. Réciproquement 0 est bien dans $P \cap (-P)$. Soit $x \in \mathbb{K}$. On a soit $x \in P$, soit $x \notin P$ et dans ce cas $x \leq 0$ (l'ordre est total), $y = -x \in P$ et $x = -y \in -P$. On a donc bien $P \cup (-P) = \mathbb{K}$ (l'inclusion $P \cup (-P) \subset \mathbb{K}$ étant évidente). Si $x$ et $y$ sont dans $P$, on a alors $x \geq 0$ et $y \geq 0$, donc $x + y \geq 0$ et $xy \geq 0$. On a donc bien $P + P \subset P$ et $P \cdot P \subset P$. Réciproquement supposons qu'il existe une partie $P$ de $\mathbb{K}$ vérifiant les propriétés (1.1). On définit la relation $\leq$ sur $\mathbb{K}$ par :

$$(x \leq y) \Leftrightarrow (y - x \in P)$$

et on vérifie que c'est une relation d'ordre total compatible avec la structure de corps de $\mathbb{K}$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$ on a $x - x = 0 \in P$, donc $x \leq x$. La relation est réflexive. Si $x, y$ dans $\mathbb{K}$ sont tels que $x \leq y$ et $y \leq x$, on a alors $y - x \in P$ et $x - y \in P$, donc $y - x = -(x - y) \in P \cap (-P)$ et $y = x$. La relation est anti-symétrique. Si $x$, $y$ et $z$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $x \leq y$ et $y \leq z$, on a alors $z - x = (y - x) + (z - y) \in P$, c'est-à-dire que $x \leq z$. La relation est transitive. Avec $P \cup (-P) = \mathbb{K}$ on déduit que l'ordre est total. Si $x \leq y$ dans $\mathbb{K}$, on a alors $(y + z) - (x + z) \in P$ pour tout $z$ dans $\mathbb{K}$, donc $x + z \leq y + z$. Si $x \leq y$ et $0 \leq z$ dans $\mathbb{K}$, avec $P \cdot P \subset P$ on déduit que $z(y - x) \in P$ et $xz \leq yz$. ∎

***Corollaire 1.1.*** *Il existe une unique relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}$ compatible avec sa structure de corps.*

**Démonstration** $\mathbb{Q}$ est déjà totalement ordonné avec l'ordre usuel. Soit $\precsim$ une relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}$ compatible avec sa structure de corps. Le lemme 1.1

nous dit que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+ = \{r \in \mathbb{Q},\ 0 \precsim r\}$, ce qui implique que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \cdot 1 \in \mathbb{Q}^+$ Avec $\mathbb{Q}^+ \cdot \mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Q}^+$, on déduit que :

$$P = \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}^*,\ p \wedge q = 1\right\} \subset \mathbb{Q}^+$$

Réciproquement si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, $p = qr$ est alors dans $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}^+ = \mathbb{N}$ (en effet si $p$ est négatif, on a alors $-p \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+$ et $-r = \frac{1}{q}(-p) \in \mathbb{Q}^+$, ce qui impose $r = 0$). On a donc $P = \mathbb{Q}^+$, ce qui détermine de manière unique l'ordre compatible sur $\mathbb{Q}$. ∎

***Corollaire 1.2.*** *Si $(\mathbb{K}, \leq)$ est un corps totalement ordonné, alors tout sous-corps de $\mathbb{K}$ est totalement ordonné par $\leq$ et tout corps isomorphe à $\mathbb{K}$ est totalement ordonné.*

**Démonstration** Soit $(\mathbb{K}, \leq)$ un corps totalement ordonné. Si $\mathbb{L}$ est un sous corps de $\mathbb{K}$, le sous-ensemble $P = \mathbb{L} \cap \mathbb{K}^+$ de $\mathbb{L}$ vérifie alors les propriétés (1.1) du théorème 1.2 et il en résulte que le corps $\mathbb{L}$ est totalement ordonnable par $\leq$ . Soit $\sigma$ un isomorphisme de $\mathbb{K}$ sur un corps commutatif $\mathbb{L}$. On vérifie facilement que le sous-ensemble $P = \sigma(\mathbb{K}^+)$ de $\mathbb{L}$ vérifie les propriétés (1.1) du théorème 1.2, ce qui implique que le corps $\mathbb{L}$ est totalement ordonnable par la relation :

$$(x \precsim y) \Leftrightarrow \left(y - x \in \sigma\left(\mathbb{K}^+\right)\right)$$

En écrivant que $x = \sigma(u)$ , $y = \sigma(v)$ avec $u, v$ uniquement déterminés dans $\mathbb{K}$, la condition $y - x = \sigma(w)$ avec $w$ dans $\mathbb{K}^+$ équivaut à $v - u = w \in \mathbb{K}^+$, soit à $u \leq v$. La relation d'ordre sur $\mathbb{L}$ est donc naturellement définie par :

$$(x \precsim y \text{ dans } \mathbb{L}) \Leftrightarrow \left(\sigma^{-1}(x) \leq \sigma^{-1}(y) \text{ dans } \mathbb{K}\right)$$

∎

Le théorème qui suit nécessite le lemme (ou l'axiome de *Zorn*) que nous rappelons.

Si $(E, \prec)$ est un ensemble ordonné et $A$ une partie de $E$, on dit alors qu'un élément $m$ de $E$ est un *majorant* de $A$, si on a $x \prec m$ pour tout $x \in A$.

On dit que $(E, \prec)$ est *inductif* si toute partie non vide et totalement ordonnée de $E$ admet un majorant.

On dit qu'un élément $m$ d'une partie non vide $A$ de $E$ est *maximal* si, pour tout $x \in A$, la condition $m \prec x$ entraîne $x = m$.

Le lemme de Zorn affirme que tout ensemble non vide, ordonné et inductif admet un élément maximal. Ce lemme (qui peut être pris comme un axiome) est équivalent à l'axiome du choix ou à l'axiome de Zermelo.

**Théorème 1.3.**

*Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2, $C_2 = \left\{x^2,\ x \in \mathbb{K}\right\}$ l'ensemble des carrés de $\mathbb{K}$ et $\sum_2$ le sous-ensemble de $\mathbb{K}$ dont les éléments peuvent s'écrire comme somme finie de carrés. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathbb{K}$ est totalement ordonné ;*
2. *$\mathbb{K} \neq \sum_2$ ;*
3. *$-1$ n'est pas somme de carrés dans $\mathbb{K}$ ;*
4. *une somme de carrés $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ est nulle dans $\mathbb{K}$ si, et seulement si, tous les $x_i$ sont nuls ;*
5. *il existe une partie $P$ de $\mathbb{K}$ telle que $C_2 \subset P$, $P + P \subset P$, $P \cdot P \subset P$ et $P \cap (-P) = \{0\}$.*

**Démonstration**

(*1*) $\Rightarrow$ (*2*) On suppose que $(\mathbb{K}, \leq)$ est totalement ordonné. De $C_2 \subset \mathbb{K}^+$ (lemme 1.1) et $\mathbb{K}^+ + \mathbb{K}^+ \subset \mathbb{K}^+$, on déduit que $\sum_2 \subset \mathbb{K}^+$ et comme $\mathbb{K}^+ \subsetneq \mathbb{K}$ ($-1 \notin \mathbb{K}^+$ car $\mathbb{K}^+ \cap (-\mathbb{K}^+) = \{0\}$), il en résulte que $\sum_2 \subsetneq \mathbb{K}$.

(*2*) $\Rightarrow$ (*3*) Supposons que $\sum_2 \subsetneq \mathbb{K}$. Si $-1 \in \sum_2$, on a alors pour tout $x \in \mathbb{K}$, $(-1)\left(1 - \dfrac{x+1}{2}\right)^2 \in \sum_2$ ($\mathbb{K}$ étant de caractéristique différente de 2, on peut diviser par 2 dans ce corps) et $x = -\left(1 - \dfrac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 \in \sum_2$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

(*3*) $\Rightarrow$ (*4*) Supposons que $-1 \notin \sum_2$ et soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$. Si $j$ est un indice tel que $x_j \neq 0$, on a alors $-1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)^2 \in \sum_2$ (pour $n = 1$, le résultat est trivial), ce qui contredit l'hypothèse de départ. Les $x_j$ sont donc tous nuls.

(*4*) $\Rightarrow$ (*5*) On suppose que 0 n'est pas somme de carrés non tous nuls. Pour $P = \sum_2$, on a facilement $C_2 \subset P$, $P + P \subset P$ et $P \cdot P \subset P$. Si $x \in P \cap (-P)$, il s'écrit alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = -\sum_{j=1}^{m} y_j^2$ et on a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{j=1}^{m} y_j^2 = 0$, ce qui entraîne que tous les $x_i$ et tous les $y_j$ sont nuls, soit que $x = 0$.

(*5*) $\Rightarrow$ (*1*) Pour cette implication, nous avons besoin du lemme de Zorn. Soit :

$$E = \{Q \subset \mathbb{K}\ ;\ C_2 \subset Q,\ Q + Q \subset Q,\ Q \cdot Q \subset Q,\ Q \cap (-Q) = \{0\}\}$$

L'hypothèse (5) nous dit que $E$ est non vide. Il est partiellement ordonné par $\subset$ et est inductif. En effet si $A$ est une partie non vide totalement ordonnée de $E$, on montre alors que $M = \bigcup_{Q \in A} Q$ est dans $E$ et majore $A$. $C_2$ qui est contenu dans tous les $Q \in A$ est aussi contenu dans $M$. Si $x, y$ sont dans $M$ on a $x \in Q$ et $y \in Q'$ avec $Q \subset Q'$ ou $Q' \subset Q$ ($A$ est totalement ordonné), donc $x + y$ est dans $Q' + Q' \subset Q'$ ou dans $Q + Q \subset Q$, soit dans les deux cas $x + y \in M$. On voit de manière analogue que $M \cdot M \subset M$. Enfin si $x \in M \cap (-M)$, on a $x \in Q$ et $-x \in Q'$, donc $x$ est dans $Q \cap (-Q)$ ou dans $Q' \cap (-Q')$ et il est nul. Le lemme de Zorn nous dit alors que $E$ admet un élément maximal $P$. Si on montre que $P \cup (-P) = \mathbb{K}$ on aura montré que $\mathbb{K}$ est totalement ordonnable (théorème 1.2). Soit donc $x \in \mathbb{K}$ et supposons que $x \notin P$. Montrons que $Q = P - xP = \left\{y - xz,\ (y, z) \in P^2\right\}$ est dans $E$. On a $C_2 \subset P \subset Q$. Avec $P + P \subset P$, on déduit que $Q + Q \subset Q$. Si $u_1 = y_1 - xz_1$ et $u_2 = y_2 - xz_2$ sont dans $Q$, on a alors $u_1 u_2 = y_3 - xz_3$ avec $y_3 = y_1 y_2 + z_1 z_2 x^2 \in P \cdot P + P \cdot P \cdot C_2 \subset P$ et $z_3 = z_1 y_2 + y_1 z_2 \in P \cdot P + P \cdot P \subset P$ puisque $C_2 \subset P$, $P \cdot P \subset P$ et $P + P \subset P$. On a donc $Q \cdot Q \subset Q$. Si $u \in Q \cap (-Q)$, on a alors $u = y_1 - xz_1 = -(y_2 - xz_2)$ et $y_1 + y_2 = x(z_1 + z_2)$. Si $z_1 + z_2 = 0$, on a alors $y_1 + y_2 = 0$, ce qui implique que $y_1 = -y_2$ et $z_1 = -z_2$ sont dans $P \cap (-P) = \{0\}$ et $u = 0$. Si $z_1 + z_2 \neq 0$, alors $x = \left(\dfrac{1}{z_1 + z_2}\right)^2 (y_1 + y_2)(z_1 + z_2)$ est dans $C_2 \cdot P \cdot P \subset P$, ce qui contredit $x \in P$. On a donc $Q \cap (-Q) = \{0\}$. Au final, on a $Q \in E$ avec $P \subset Q$ et $P$ maximal, ce qui implique $Q = P$ et $-x \in Q \subset P$, soit $x \in -P$. ■

**Théorème 1.4. Artin-Schreier**

*Un corps commutatif $\mathbb{K}$ est totalement ordonné si, et seulement si, $-1$ n'est pas somme de carrés dans $\mathbb{K}$.*

**Démonstration** Si $\mathbb{K}$ est totalement ordonné, il est alors de caractéristique nulle et le théorème précédent nous dit que $-1$ n'est pas somme de carrés dans $\mathbb{K}$. Réciproquement, si $-1$ n'est pas somme de carrés dans $\mathbb{K}$, le corps $\mathbb{K}$ est alors de caractéristique différente de 2 (on a $-1 = 1^2$ dans un corps de caractéristique 2) et le théorème précédent nous dit que $\mathbb{K}$ est totalement ordonnable. ■

## 1.2 Minorants et majorants dans un corps totalement ordonné

Pour ce paragraphe $(\mathbb{K}, \leq)$ désigne un corps totalement ordonné. Ce corps est de caractéristique nulle et $\mathbb{Q}$ en est un sous corps (plus précisément, le sous-corps premier de $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$). On note :

$$\mathbb{K}^{+,*} = \mathbb{K}^+ \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{K},\ x > 0\}$$

et les éléments de $\mathbb{K}^{+,*}$ sont dits strictement positifs.

Pour tous $a \leq b$ dans $\mathbb{K}$, on définit les ensembles :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{K},\ a \leq x \leq b\}\,,\ [a, b[ = \{x \in \mathbb{K},\ a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{K},\ a < x \leq b\}\,,\ ]a, b[ = \{x \in \mathbb{K},\ a < x < b\}$$

Pour $a = b$, on a $[a, b] = \{a\}$ et $[a, b[ = ]a, b] = ]a, b[ = \emptyset$.

Ces ensembles sont appelés *intervalles* et un ensemble du type $[a, b]$ est appelé *segment*.

On peut définir sur $(\mathbb{K}, \leq)$ les notions de minorant, majorant, bornes inférieure et supérieure.

**Définition 1.2.** Soit $X$ une partie non vide de $\mathbb{K}$. On dit que $m \in \mathbb{K}$ [resp. $M \in \mathbb{K}$] est un *minorant* [resp. est un *majorant*] de $X$ si on a $m \leq x$ [resp. $x \leq M$] pour tout $x \in X$. On dit que $m \in \mathbb{K}$ est une *borne inférieure* [resp. est une *borne supérieure*] de $X$ si $m$ est un minorant [resp. $M$ est un majorant] de $X$ et si tout $m' > m$ [resp. tout $M' < M$] dans $\mathbb{K}$ n'est pas minorant [resp. n'est pas majorant] de $X$.

Dire que $m \in \mathbb{K}$ est une borne inférieure [resp. est une borne supérieure] de $X \subset \mathbb{K}$ équivaut à dire que :

$$\forall x \in X,\ m \leq x \text{ [resp. } x \leq M\text{]}$$

et :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*},\ \exists x \in X\ ;\ m \leq x < m + \varepsilon \text{ [resp. } M - \varepsilon < x \leq M\text{]}$$

ce qui peut aussi s'exprimer en disant que $m$ [resp. $M$] est le plus grand des minorants [resp. le plus petit des majorants] de $X$.

Un sous-ensemble non vide d'un corps totalement ordonné qui admet un minorant [resp. un majorant] est dit *minoré* [resp. *majoré*]. On dit qu'il est *borné* s'il est minoré et majoré.

**Théorème 1.5.**

*Soit $X$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{K}$. Si $X$ admet une borne inférieure [resp. une borne supérieure], elle est alors unique.*

**Démonstration** Supposons que $X$ admette deux bornes supérieures $M' < M$. Pour $\varepsilon = M - M' \in \mathbb{K}^{+,*}$, on peut trouver $x \in X$ tel que $M' = M - \varepsilon < x \leq M$, ce qui contredit l'inégalité $x \leq M'$. L'ensemble $X$ admet donc au plus une borne supérieure. On procède de manière analogue pour la borne inférieure. ■

En cas d'existence, on peut donc noter $m = \inf(X)$ la borne inférieure de $X$ et $M = \sup(X)$ sa borne supérieure et on a $\inf(X) \leq \sup(X)$.

Avec l'exercice 1.2 on donne quelques propriétés élémentaires, mais souvent utiles, des bornes inférieure et supérieure.

La borne inférieure ou supérieure de $X$ quand elle existe n'est pas nécessairement un élément de $X$. Si $\inf(X)$ [resp. $\sup(X)$] existe et est dans $X$, on dit alors que $\inf(X)$ [resp. $\sup(X)$] est le *plus petit élément* [resp. le *plus grand élément*] de $X$ et on le note $\min(X)$ [resp. $\max(X)$].

**Exemples 1.2**

1. *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément et toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.*

2. *Dans le cas où $X$ est une partie finie de $\mathbb{K}$, ses éléments peuvent être rangés dans l'ordre croissant $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ (l'ordre est total) et l'existence des plus petit et plus grand élément est assurée.*
3. *Le sous-ensemble $X = \{r \in \mathbb{Q},\ r^2 < 2\}$ de $\mathbb{Q}$ est non vide et majoré, mais n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (exercice 1.3).*

Dans $(\mathbb{K}, \leq)$, on définit la *valeur absolue* d'un élément $x$ par :

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Cette valeur absolue vérifie les propriétés suivantes, où $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ :

- $|x| \in \mathbb{K}^+$ ; $|-x| = |x|$ ; $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$ ; $|x| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$ ;
- $|xy| = |x|\,|y|$ ; $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ (*inégalités triangulaires*) ;
- pour $\alpha \in \mathbb{K}^+$, $|x| \leq \alpha$ équivaut à $-\alpha \leq x \leq \alpha$ ou encore à $x \in [-\alpha, \alpha]$ ;
- $\min(x, y) = \dfrac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ et $\max(x, y) = \dfrac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ (on distingue les cas $x \geq y$ et $x \leq y$).

**Lemme 1.2** *Un élément $x$ de $\mathbb{K}$ est nul si, et seulement si, on a $|x| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$.*

**Démonstration** Pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, on a $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2} \in \mathbb{K}^{+,*}$ et l'inégalité $|x| < \varepsilon$ ne peut être réalisée (elle équivaut à $2|x| < |x|$, soit à $|x| < 0$, ce qui n'est pas). La condition nécessaire est claire. ■

## 1.3 Suites à valeurs dans un corps totalement ordonné

$(\mathbb{K}, \leq)$ désigne un corps totalement ordonné.

Une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ (ou à valeurs dans $\mathbb{K}$) est une application définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On se limite pour ce paragraphe aux suites définies sur $\mathbb{N}$ (on peut toujours s'y ramener par changement d'indice) et on note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite. L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative et unitaire pour les opérations classiques d'addition interne et de multiplications interne et externe, à savoir pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ :

$$u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \lambda \cdot u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ u \cdot v = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

**Définition 1.3.** Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite extraite* (ou une *sous suite*) de $u$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vérifie facilement par récurrence que si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante, on a alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Définition 1.4.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *minorée* [resp. est *majorée*], si l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de ses valeurs est minoré [resp. est majoré], ce qui revient à dire qu'il existe $m \in \mathbb{K}$ tel que $u_n \geq m$ [resp. $u_n \leq M$] pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'elle est *bornée*, si elle est minorée et majorée.

Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est bornée revient aussi à dire qu'il existe $M \in \mathbb{K}^+$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

**Définition 1.5.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *convergente*, s'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*},\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Dans la définition précédente, les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges et la condition $|u_n - \ell| < \varepsilon$ peut être remplacée par $|u_n - \ell| < \alpha\varepsilon$ où $\alpha \in \mathbb{K}^{+,*}$ est donné (si pour tout $\varepsilon' \in \mathbb{K}^{+,*}$, on a $|u_n - \ell| < \alpha\varepsilon'$ pour tout $n \geq n_{\varepsilon'}$, on en déduit que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, en prenant $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$, on a $|u_n - \ell| < \alpha\varepsilon' = \varepsilon$ pour tout $n \geq n_{\varepsilon'}$).

Une suite non convergente est dite *divergente*.

En utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$, on vérifie qu'une suite convergente est bornée. Il en résulte qu'une suite non bornée est divergente.

**Théorème 1.6.**

*Si une suite converge dans $\mathbb{K}$, sa limite est alors uniquement déterminée.*

**Démonstration** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ et $\ell'$ dans $\mathbb{K}$, on peut alors trouver pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$ un entier $n_\varepsilon$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on ait :

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - u_n) + (u_n - \ell')| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon$$

ce qui équivaut à $\ell - \ell' = 0$ (lemme 1.2). ■

L'unicité de la limite permet d'écrire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$.

**Théorème 1.7.**

*Si une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente, toute suite extraite converge alors vers la même limite.*

**Démonstration** Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui implique que pour toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ (puisque $\varphi(n) \geq n \geq n_\varepsilon$). La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers $\ell$. ■

Pour vérifier qu'une suite est divergente, il suffit d'après le théorème précédent d'en extraire une sous-suite divergente ou deux sous-suites convergentes vers des limites distinctes.

**Exemples 1.3**

1. *La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge car la suite $\left((-1)^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-1$ et la suite $\left((-1)^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1 \neq -1$ dans $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle.*
2. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. En effet, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ dans $\mathbb{K}$, on a alors $1 = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell - \ell = 0$, ce qui est impossible dans un corps.*
3. *Contrairement à ce que l'on pourrait espérer, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement convergente dans un corps totalement ordonné (voir le théorème 1.12 et l'exercice 1.5).*

**Théorème 1.8.**

*L'ensemble $\mathrm{Co}(\mathbb{K})$ des suites convergentes d'éléments de $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \ell' \neq 0$, il existe alors un entier $n_0$ tel que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ soit définie et cette suite converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.*

**Démonstration** La suite constante égale à 1 est convergente vers 1. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \ell'$. Ces suites étant bornées, il existe $M \in \mathbb{K}^{+,*}$ tel que $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et $|v_n - \ell'| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ dans $\mathbb{N}$, ce qui nous donne :

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < 2\varepsilon$$

et :

$$\begin{aligned}|u_n v_n - \ell\ell'| &\leq |(u_n - \ell)\, v_n| + |\ell\,(v_n - \ell')| \\ &\leq M\,|u_n - \ell| + |\ell|\,|v_n - \ell'| \leq (M + |\ell|)\,\varepsilon\end{aligned}$$

ce qui signifie que les suite $u + v$ et $u \cdot v$ convergent respectivement vers $\ell + \ell'$ et vers $\ell \cdot \ell'$. Prenant $v$ constante égale à $\lambda$, on en déduit que $\lambda v$ converge vers $\lambda\ell$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \ell' \neq 0$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(|v_n|) = |\ell'| > 0$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n| > \frac{|\ell'|}{2}$ pour $n \geq n_0$, donc $\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \left|\frac{\ell' - v_n}{\ell' v_n}\right| \leq \frac{2}{|\ell'|^2}|v_n - \ell'|$

pour tout $n \geq n_0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{v_n}\right) = \dfrac{1}{\ell'}$. Le résultat sur le produit nous donne $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{\ell}{\ell'}$. ■

La démonstration du théorème précédent nous dit aussi que l'application qui associe à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Co}(\mathbb{K})$ sa limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \in \mathbb{K}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Avec les théorèmes qui suivent, on résume quelques propriétés des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ en relation avec l'ordre.

**Théorème 1.9.**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.*

1. *S'il existe $\ell \in \mathbb{K}$, une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^+)^{\mathbb{N}}$ et un entier naturel $n_0$ tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$ et $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$ pour tout entier $n \geq n_0$, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.*
2. *Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \ell$, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (|u_n|) = |\ell|$.*
3. *Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite bornée, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n v_n) = 0$.*

**Démonstration**

**1.** Résulte de :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*},\ \exists n_\varepsilon \geq n_0 \ ;\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon_n < \varepsilon$$

**2.** De $||u_n| - |\ell|| \leq \varepsilon_n = |u_n - \ell|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$ (qui résulte de la définition de la convergence), on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (|u_n|) = |\ell|$.

**3.** En désignant par $M$ un majorant de la suite $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit des inégalités $|u_n v_n| \leq M |u_n|$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} (|u_n|) = 0$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n v_n) = 0$. ■

**Théorème 1.10.**

*Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = \ell'$.*

1. *Si $\ell > \ell'$ [resp. si $\ell < \ell'$], on a alors $u_n > v_n$ [resp. $u_n < v_n$] à partir d'un certain rang.*
2. *Si $u_n \leq v_n$ [resp. si $u_n \geq v_n$] à partir d'un certain rang, on a alors $\ell \leq \ell'$ [resp. $\ell \geq \ell'$].*
3. *Si $M$ est un majorant [resp. si $m$ est un minorant] de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a alors $\ell \leq M$ [resp. $\ell \geq m$].*

4. *Les suites* $(\min(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\max(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent respectivement vers* $\min(\ell, \ell')$ *et* $\max(\ell, \ell')$.
5. *Si* $\ell = \ell'$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *est telle que* $u_n \leq w_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang, on a alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = \ell$.

**Démonstration**

**1.** Si $\ell > \ell'$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \ell - \ell' \in \mathbb{K}^{+,*}$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $-\dfrac{\ell-\ell'}{2} + \ell - \ell' < u_n - v_n < \dfrac{\ell-\ell'}{2} + \ell - \ell'$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui nous donne $u_n - v_n > \dfrac{\ell-\ell'}{2} > 0$ pour tout $n \geq n_0$, soit $u_n > v_n$. Pour $\ell < \ell'$, on travaille avec la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**2.** Se déduit facilement du point précédent en raisonnant par l'absurde.

**3.** Se déduit facilement du point précédent en prenant pour suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [resp. pour suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$] la suite constante égale à $M$ [resp. égale à $m$].

**4.** Se déduit de $\min(x, y) = \dfrac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ et $\max(x, y) = \dfrac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

**5.** Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq w_n \leq v_n \leq \ell + \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui nous dit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$. ∎

**Définition 1.6.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*},\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall m \geq n_\varepsilon,\ |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Là encore, les trois dernières inégalités peuvent être strictes ou larges et la condition $|u_n - u_m| < \varepsilon$ peut être remplacée par $|u_n - u_m| < \alpha\varepsilon$ où $\alpha \in \mathbb{K}^{+,*}$ est donné.

Une suite de Cauchy est bornée et une suite convergente est de Cauchy. Mais une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente dans $\mathbb{K}$ (voir l'exercice 1.4 pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$).

**Lemme 1.3** *Une suite de Cauchy d'éléments de* $\mathbb{K}$ *est convergente si, et seulement si, on peut en extraire une sous-suite convergente.*

**Démonstration** La condition nécessaire est évidente. Réciproquement, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dont on peut extraire une sous-suite convergente $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $\ell$. On peut trouver pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$ un entier $n_\varepsilon$ tel que $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \varepsilon$ et $|u_m - u_n| \leq \varepsilon$ pour tous $n \geq n_\varepsilon$ et $m \geq n_\varepsilon$. Il en résulte que :

$$|u_m - \ell| \leq \left|u_m - u_{\varphi(n_\varepsilon)}\right| + \left|u_{\varphi(n_\varepsilon)} - \ell\right| \leq 2\varepsilon$$

pour tout $m \geq n_\varepsilon$ (puisque $\varphi(n_\varepsilon) \geq n_\varepsilon$). ∎

**Définition 1.7.** Un corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ est dit *complet*, si toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente.

L'exercice 1.4 nous dit que le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'est pas complet (pour l'ordre usuel).

**Théorème 1.11.**

*L'ensemble* $\mathrm{Ca}(\mathbb{K})$ *des suites de Cauchy d'éléments de* $\mathbb{K}$ *est une sous-algèbre de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *stable par la valeur absolue.*

**Démonstration** La suite constante égale à 1 est de Cauchy. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy. Ces suites étant bornées, il existe $M \in \mathbb{K}^{+,*}$ tel que $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - u_m| < \varepsilon$ et $|v_n - v_m| < \varepsilon$ pour tous $n \geq n_\varepsilon$ et $m \geq n_\varepsilon$ dans $\mathbb{N}$, ce qui donne $|(u_n + v_n) - (u_m + v_m)| < 2\varepsilon$ et $|u_n v_n - u_m v_m| \leq |u_n (v_n - v_m)| + |(u_n - u_m) v_m| \leq 2M\varepsilon$, ce qui nous dit que $u + v$ et $u \cdot v$ sont de Cauchy. Prenant $v$ constante égale à $\lambda$, on en déduit que $\lambda v$ est aussi de Cauchy. En utilisant l'inégalité triangulaire $||x| - |y|| \leq |x - y|$, on vérifie que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. ■

L'algèbre $\mathrm{Co}(\mathbb{K})$ des suites convergentes d'éléments de $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de $\mathrm{Ca}(\mathbb{K})$.

Le lemme qui suit nous sera utile pour construire le corps des réels à partir des suites de Cauchy de rationnels (paragraphe 1.5).

**Lemme 1.4** *L'ensemble* $Z(\mathbb{K})$ *des suites d'éléments de* $\mathbb{K}$ *qui convergent vers* $0$ *est un idéal de l'anneau* $\mathrm{Ca}(\mathbb{K})$ *des suites de Cauchy.*

**Démonstration** L'ensemble $Z(\mathbb{K})$ des suites convergentes vers 0 qui est le noyau du morphisme d'anneaux $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Co}(\mathbb{K}) \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{K}$ est un idéal de $\mathrm{Co}(\mathbb{K})$, ce dernier anneau étant contenu dans $\mathrm{Ca}(\mathbb{K})$, on en déduit que $Z(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Ca}(\mathbb{K})$. Une suite de Cauchy étant bornée, on déduit du théorème 1.9 que pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z(\mathbb{K})$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ca}(\mathbb{K})$, on a $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z(\mathbb{K})$. L'ensemble $Z(\mathbb{K})$ est donc un idéal de $\mathrm{Ca}(\mathbb{K})$. ■

**Définition 1.8.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *croissante* [resp. *décroissante*], si elle est telle que $u_{n+1} \geq u_n$ [resp. $u_{n+1} \leq u_n$] pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'elle est *monotone*, si elle est croissante ou décroissante.

**Lemme 1.5** *De toute suite d'éléments de* $\mathbb{K}$, *on peut extraire une sous-suite monotone.*

**Démonstration** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $A = \{n \in \mathbb{N} \,;\, \forall m > n,\ u_m \leq u_n\}$. Si l'ensemble $A$ est fini, il admet alors un plus grand élément $n_0 \in A$ et il existe un entier $n_1 > n_0 + 1$ tel que $u_{n_1} > u_{n_0+1}$ ($n_0 + 1 \notin A$). Comme $n_1 \notin A$, il existe un entier $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} > u_{n_1}$ et ainsi de suite, on construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $u_{n_{k+1}} > u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. La suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est alors extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et strictement croissante. Si $A$ est infinie, on peut alors ranger ses éléments dans l'ordre strictement croissant, soit $A = \{n_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ avec $n_k < n_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par construction, on a $u_{n_{k+1}} \leq u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et décroissante. ■

**Définition 1.9.** Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ sont dites *adjacentes*, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

**Lemme 1.6** *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ adjacentes, on a alors $u_n \leq v_m$ pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$.*

**Démonstration** Supposons qu'il existe deux entiers $n$ et $m$ tels que $u_n > v_m$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout entier $k \geq \max(n,m)$, $u_k \geq u_n$ et $v_k \leq v_m$, donc $u_k - v_k \geq u_n - v_m > 0$ et en conséquence $0 = \lim\limits_{k\to+\infty} (u_k - v_k) \geq u_n - v_m > 0$, ce qui est impossible. ■

## 1.4 Corps totalement ordonnés archimédiens

$(\mathbb{K}, \leq)$ désigne un corps totalement ordonné.

**Définition 1.10.** On dit que $\mathbb{K}$ est *archimédien*, s'il est tel que :

$$\forall a \in \mathbb{K}^{+,*},\ \forall b \in \mathbb{K}^{+},\ \exists n \in \mathbb{N}\ ;\ na > b$$

**Exemple 1.1** *Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est archimédien. Il en résulte qu'entre deux rationnels distincts, il y a une infinité de rationnels.*

**Définition 1.11.** On dit qu'une partie non vide $D$ de $\mathbb{K}$ est *dense* dans $\mathbb{K}$, si pour tous $x < y$ dans $\mathbb{K}$, il existe $r \in D$ tel que $x < r < y$.

**Théorème 1.12.**

*Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathbb{K}$ est archimédien ;*
2. *la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 dans $\mathbb{K}$ ;*
3. *la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente dans $\mathbb{K}$ ;*

*4. pour tout $x \in \mathbb{K}$ il existe un unique entier relatif $n$ tel que $n \leq x < n+1$ ;*
*5. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$.*

**Démonstration**

(*1*) $\Rightarrow$ (*2*) On suppose que $\mathbb{K}$ est archimédien. Dans ce cas pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n_\varepsilon \varepsilon > 1$, ce qui nous donne $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$ et prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ dans $\mathbb{K}$.

(*2*) $\Leftrightarrow$ (*3*) La condition nécessaire est évidente. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \ell \neq 0$ dans $\mathbb{K}$, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{\ell}$, ce qui est impossible (exemples 1.3), donc si la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{K}$, c'est nécessairement vers 0.

(*3*) $\Rightarrow$ (*4*) On suppose que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{K}$, donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ dans $\mathbb{K}$ et on se donne $x \in \mathbb{K}$. Pour $x \in \mathbb{Z}$, il suffit de prendre $n = x$. On suppose donc $x$ non entier et dans un premier temps on suppose qu'il est dans $\mathbb{K}^{+,*}$. Dans ce cas, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{m} < \frac{1}{x}$, soit tel que $m > x$, donc l'ensemble des entiers $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $m > x$ est non vide et en conséquence admet un plus petit élément $p$ qui vérifie $p > x$ et $p - 1 \leq x$. Il suffit alors de poser $n = p - 1$. Pour $x \in \mathbb{K}^-$ en raisonnant avec $-x \in \mathbb{K}^+$ on aboutit à l'existence d'un entier $p$ vérifiant $p \leq -x < p + 1$, soit $-(p+1) < x < p$ et $n = -(p+1)$ convient. S'il existe deux entiers $n$ et $p$ tels que $n \leq x < n+1$ et $p \leq x < p+1$, on a alors $n - p < 1$, soit $n - p \leq 0$ et $n - p > -1$, soit $n - p \geq 0$ et nécessairement $n = p$. D'où l'unicité de $n$ tel que $n \leq x < n + 1$. On note $[x]$ cet entier.

(*4*) $\Rightarrow$ (*5*) On suppose (4) vérifiée et on se donne $x < y$ dans $\mathbb{K}$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq \frac{1}{y - x} < n + 1$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq (n+1)|x| < m + 1$, ce qui nous donne $(n+1)(y-x) > 1$ et $\frac{m+1}{n+1} > |x|$. Il en résulte que $E = \left\{k \in \mathbb{Z},\ \frac{k}{n+1} \leq x\right\}$ est non vide (on a $-\frac{m+1}{n+1} < -|x| \leq x$, donc $-(m+1) \in E$) et majoré par $m+1$ (pour $k \in E$, on a $\frac{k}{n+1} \leq |x| < \frac{m+1}{n+1}$, donc $k \leq m+1$). Cet ensemble $E$ admet donc un plus grand élément $p$ qui est tel que $\frac{p}{n+1} \leq x < \frac{p+1}{n+1}$. Enfin avec $(n+1)(y-x) > 1$, on déduit que $y > \frac{1}{n+1} + x \geq \frac{1}{n+1} + \frac{p}{n+1}$ et $x < \frac{p+1}{n+1} < y$.

(*5*) $\Rightarrow$ (*1*) On suppose que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$ et on se donne $(a, b) \in \mathbb{K}^{+,*} \times \mathbb{K}^+$. Il existe alors un rationnel $r = \frac{n}{m}$, où $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $0 \leq \frac{b}{a} < \frac{n}{m} < \frac{b}{a} + 1$, ce qui implique que $na > mb \geq b$. Le corps $\mathbb{K}$ est donc archimédien. ■

**Exemple 1.2** *Pour $\mathbb{K}$ totalement ordonné, en munissant le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ de la relation définie par :*

$$\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k}{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k X^k} \geq 0\right) \Leftrightarrow (a_n \geq 0)$$

*(pour $a_n \neq 0$ et $b_m = 1$) on définit un corps totalement ordonné non archimédien et dans ce corps la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers $0$ (exercice 1.5).*

**Définition 1.12.** Avec les notations de la propriété (4) du théorème précédent, l'entier $n$ est appelé la *partie entière* de $x$.

Pour $\mathbb{K}$ archimédien, la partie entière de $x \in \mathbb{K}$ peut être notée $[x]$, $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$. Nous opterons pour la notation $[x]$.

Pour $\mathbb{K}$ archimédien, la densité peut se traduire de façon séquentielle comme suit.

**Théorème 1.13.**

*Pour $\mathbb{K}$ archimédien, une partie non vide $D$ de $\mathbb{K}$ est dense dans $\mathbb{K}$ si, et seulement si, tout élément de $\mathbb{K}$ est limite d'une suite d'éléments de $D$.*

**Démonstration** Si $D$ est dense dans $\mathbb{K}$, alors pour tous $x \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $r_n \in D$ tel que $x < r_n < x + \frac{1}{n}$ et de cet encadrement dans $\mathbb{K}$ archimédien, on déduit que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$. Réciproquement, si tout élément de $\mathbb{K}$ est limite d'une suite d'éléments de $D$, alors pour tous $x < y$ dans $\mathbb{K}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D$ qui converge vers $\frac{1}{2}(x+y)$ et de $x < \frac{1}{2}(x+y) < y$ on déduit que pour $n$ assez grand, on aura $x < r_n < y$ (point 1 du théorème 1.10), ce qui implique que $D$ est dense dans $\mathbb{K}$. ■

Le théorème qui suit est essentiel dans le cas particulier du corps des réels dont une construction fait l'objet du paragraphe 1.5. La démonstration de ce théorème nécessite le lemme qui suit.

**Lemme 1.7** *Soit $X$ une partie non vide majorée d'un corps totalement ordonné et archimédien $\mathbb{K}$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$ et tout majorant $M$ de $X$, il existe $x \in X$ et un majorant $M_\varepsilon \in \mathbb{K}$ de $X$ tels que $M_\varepsilon \leq M$ et $0 \leq M_\varepsilon - x < \varepsilon$.*

**Démonstration** On se donne $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$. Si $M \in \mathbb{K}$ est un majorant de $X$, l'ensemble $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N},\ M - n\varepsilon \text{ majore } X\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (elle contient $0$). Pour $x_0$ donné dans $X$ ($X$ est non vide), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\varepsilon \geq M - x_0$ (le corps $\mathbb{K}$ est archimédien), de sorte que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $n\varepsilon \geq n_0\varepsilon \geq M - x_0$, soit $x_0 \geq M - n\varepsilon$ et $n \notin A_\varepsilon$. L'ensemble $A_\varepsilon$ est donc

majoré dans $\mathbb{N}$ et en conséquence admet un plus grand élément $n_\varepsilon$. Il en résulte que $M_\varepsilon = M - n_\varepsilon \varepsilon \leq M$ est un majorant de $X$ tel que $M_\varepsilon - \varepsilon = M - (n_\varepsilon + 1)\varepsilon$ ne majore pas $X$, donc il existe $x \in X$ tel que $M_\varepsilon - \varepsilon < x \leq M_\varepsilon$, soit $0 \leq M_\varepsilon - x < \varepsilon$.
■

**Théorème 1.14.**

*Pour $\mathbb{K}$ totalement ordonné, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *toute partie non vide et majorée de $\mathbb{K}$ admet une borne supérieure ;*
2. *toute partie non vide et minorée de $\mathbb{K}$ admet une borne inférieure ;*
3. *toute suite croissante majorée d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente ;*
4. *toute suite décroissante minorée d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente ;*
5. *de toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$ on peut extraire une sous-suite convergente ;*
6. *$\mathbb{K}$ est archimédien et complet ;*
7. *$\mathbb{K}$ est archimédien et deux suites adjacentes d'éléments de $\mathbb{K}$ convergent vers la même limite ;*
8. *$\mathbb{K}$ est archimédien et pour toute suite $([u_n, v_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés dans $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire telle que $u_n < v_n$ et $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset [u_n, v_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$, il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [u_n, v_n] = \{\ell\}$.*

**Démonstration**

*(1)* $\Leftrightarrow$ *(2)* Supposons que (1) soit vérifiée. Si $X$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{K}$, l'ensemble $-X$ est alors non vide majorée, donc admet une borne supérieure $M$ et $m = -M$ est une borne inférieure de $X$, ce qui prouve que (1) $\Rightarrow$ (2) avec $\sup(-X) = -\inf(X)$. De manière analogue, on vérifie que (2) $\Rightarrow$ (1).

*(2)* $\Rightarrow$ *(3)* Si (2) est vérifiée, il en est alors de même de (1). Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée d'éléments de $\mathbb{K}$, l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ qui est non vide et majoré admet alors une borne supérieure $\ell$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon \leq u_{n_\varepsilon} \leq \ell$, ce qui implique que $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell$, soit $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, pour tout $n \geq n_\varepsilon$ puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\ell$ majore cette suite. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_n)$.

*(3)* $\Leftrightarrow$ *(4)* Supposons (3) vérifiée. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée d'éléments de $\mathbb{K}$, la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors croissante et majorée, donc convergente vers $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (-u_n)$, ce qui implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\ell = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_n)$. De manière analogue, on vérifie que (4) $\Rightarrow$ (3).

*(4)* $\Rightarrow$ *(5)* Si (4) est vérifiée, il en est alors de même de (3). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$. En utilisant le lemme 1.5, on peut extraire de cette suite une sous-suite monotone $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et cette suite est alors croissante majorée ou décroissante minorée, donc convergente.

*(5)* $\Rightarrow$ *(6)* Supposons (5) vérifiée. Si $\mathbb{K}$ n'est pas archimédien, il existe alors $a \in \mathbb{K}^{+,*}$ et $b \in \mathbb{K}^{+}$ tels que $0 \leq na < b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(na)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors bornée et on peut en extraire une sous-suite convergente $(\varphi(n)\, a)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\varphi(n+1) - \varphi(n))\, a = 0$ avec $\varphi(n+1) - \varphi(n) \geq 1$ ($\varphi$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) soit $(\varphi(n+1) - \varphi(n))\, a \geq a$, ce qui est impossible (à partir d'un certain rang, on aurait $0 \leq (\varphi(n+1) - \varphi(n))\, a < a$). Le corps $\mathbb{K}$ est donc archimédien. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$, elle est alors bornée et on peut en extraire une sous-suite convergente $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui implique d'après le lemme 1.3 qu'elle converge. Le corps $\mathbb{K}$ est donc complet.

*(6)* $\Rightarrow$ *(7)* On suppose que $\mathbb{K}$ est archimédien et complet et on se donne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ adjacentes. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq v_{n_\varepsilon} - u_{n_\varepsilon} < \varepsilon$. En utilisant le lemme 1.6, on a pour $m > n \geq n_\varepsilon$, $u_m \leq v_{n_\varepsilon}$ et $u_{n_\varepsilon} \leq v_m$, ce qui nous donne compte tenu de la croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la décroissance de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

$$0 \leq u_m - u_n \leq v_{n_\varepsilon} - u_{n_\varepsilon} < \varepsilon \text{ et } 0 \leq v_n - v_m \leq v_{n_\varepsilon} - u_{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

soit $|u_m - u_n| < \varepsilon$ et $|v_m - v_n| < \varepsilon$, ce qui nous dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy, donc convergentes. De $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$, on déduit que ces suites convergent vers la même limite.

*(7)* $\Leftrightarrow$ *(8)* Supposons que (7) soit vérifiée. Des inclusions $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset [u_n, v_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus l'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$ nous dit que ces suites sont adjacentes, donc convergentes vers une même limite $\ell$. On a alors $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [u_n, v_n]$. Si $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [u_n, v_n]$, on a alors $u_n \leq x \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et faisant tendre $n$ vers l'infini, il en résulte que $x = \ell$. Au final, on a $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [u_n, v_n] = \{\ell\}$. Réciproquement, on suppose que (8) est vérifiée et on se donne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ adjacentes. La suite $([u_n, v_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite de segments emboîtés dans $\mathbb{K}$ (on a $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$, donc $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [u_n, v_n] = \{\ell\}$. S'il existe $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$ tel que $u_n \leq \ell - \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_n \leq \ell - \varepsilon < \ell \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\ell - \varepsilon \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [u_n, v_n]$ avec $\ell - \varepsilon \neq \ell$, ce qui n'est pas possible. Donc pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_\varepsilon}$, ce qui implique que $\ell - \varepsilon < u_n$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. De manière analogue, on vérifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

(8) $\Rightarrow$ (1) Soit $X_1$ une partie non vide majorée de $\mathbb{K}$. Le lemme 1.7 nous dit qu'il existe $u_1 \in X_1$ et un majorant $v_1 \in \mathbb{K}$ de $X_1$ tels $0 \leq v_1 - u_1 < 1$. L'ensemble $X_2 = \{x \in X_1,\ x \geq u_1\}$ étant non vide majoré par $v_1$, le lemme 1.7 nous dit aussi qu'il existe $u_2 \in X_2$ et un majorant $v_2 \in \mathbb{K}$ de $X_2$ tels $v_2 \leq v_1$ et $0 \leq v_2 - u_2 < \frac{1}{2}$. Supposons construits pour $n \geq 2$, $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n$ dans $X_1$ et $v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que pour tout $k$ compris entre 2

et $n$, $v_k$ soit un majorant de $X_k = \{x \in X,\ x \geq u_{k-1}\}$ et $0 \leq v_k - u_k < \dfrac{1}{k}$. L'ensemble $X_{n+1} = \{x \in X,\ x \geq u_n\} \subset X_n$ est alors non vide majoré par $v_n$, donc le lemme 1.7 nous dit qu'il existe $u_{n+1} \in X_{n+1}$ et un majorant $v_{n+1} \in \mathbb{K}$ de $X_n$ tels $v_{n+1} \leq v_n$ et $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} < \dfrac{1}{n+1}$. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont alors adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite $M$. De plus $v_1$ majore $X$ et pour $n \geq 2$, $v_n$ qui majore $X_n = \{x \in X,\ x \geq u_{n-1}\}$ majore aussi $X$ (pour $x \in X$, on a soit $x \geq u_{n-1}$ et $x \leq v_n$, soit $x \leq u_{n-1} \leq v_n$), donc $M = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ majore $X$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $M - \varepsilon < u_{n_\varepsilon}$ (on a aussi $M = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$), donc $M - \varepsilon$ ne majore pas $X$. Au final $M$ est la borne supérieure de $X$. ∎

Du théorème précédent, on déduit que dans un corps totalement ordonné archimédien et complet tout élément positif admet une racine carrée. Précisément, on a le résultat suivant.

***Corollaire 1.3.*** *Soit $\mathbb{K}$ un corps totalement ordonné archimédien et complet. Pour tout $y \in \mathbb{K}^+$, il existe $x \in \mathbb{K}$ tel que $y = x^2$.*

**Démonstration** Pour $y \in \mathbb{K}^+$, l'ensemble $E = \left\{z \in \mathbb{K}^+,\ z^2 \leq y\right\}$ est non vide (il contient 0) et majoré par $\max(1, y)$ (pour $0 \leq y \leq 1$ et $z > 1$, on a $z^2 > 1$ et $z \notin E$, donc $E \subset [0,1]$ ; pour $y > 1$ et $z > y$, on a $z^2 > y^2 > y$ et $z \notin E$, donc $E \subset [0, y]$), donc cet ensemble admet une borne supérieure $x \in \mathbb{K}^+$ (comme $0 \in E$, on a $x \geq 0$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe par définition de la borne supérieure un élément $x_n$ de $E$ tel que $x - \dfrac{1}{n} < x_n \leq x$, donc :

$$x^2 < \left(\frac{1}{n} + x_n\right)^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{2x_n}{n} + x_n^2 \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2x}{n} + y$$

et faisant tendre $n$ vers l'infini, on en déduit que $x^2 \leq y$ (dans $\mathbb{K}$ archimédien, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$). Si $x^2 < y$, de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(x + \dfrac{1}{n}\right)^2 = x^2$, on déduit que pour $n$ assez grand on aura $\left(x + \dfrac{1}{n}\right)^2 < y$, soit que $x + \dfrac{1}{n} \in E$ avec $x = \sup(E)$, ce qui est impossible. Au final, on a $x^2 = y$. ∎

Pour $y = 0$, l'unique solution de $x^2 = y$ est 0 et pour $y > 0$, on a deux solutions $x$ et $-x$ ($x^2 = z^2$ équivaut à $(z - x)(z + x) = 0$, soit à $z = \pm x$). La solution positive $x$ de l'équation $y = x^2$ est la *racine carrée* de $y$ notée $\sqrt{y}$.

De l'existence de la racine carrée, on déduit que tout morphisme de corps $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ entre deux corps totalement ordonnés archimédiens et complets est croissant dans le sens où $x \leq y$ dans $\mathbb{K}$ entraîne $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ dans $\mathbb{L}$. En effet, comme $y - x$ est positif, il existe $z \in \mathbb{K}^+$ tel que $y - x = z^2$, ce qui implique que $\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y - x) = \varphi\left(z^2\right) = (\varphi(z))^2 \in \mathbb{L}^+$ (lemme 1.1). Un tel isomorphisme est dit *isomorphisme de corps ordonnés*.

## 1.5 Une construction du corps des réels

L'ensemble $Z(\mathbb{Q})$ des suites de nombres rationnels qui convergent vers 0 étant un idéal de l'anneau $\mathrm{Ca}(\mathbb{Q})$ des suites de Cauchy de nombres rationnels (lemme 1.4), on peut définir l'anneau quotient $\dfrac{\mathrm{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$, cet anneau étant commutatif et unitaire. On notera $\overline{r}$ la classe d'équivalence d'une suite $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ca}(\mathbb{Q})$ modulo l'idéal $Z(\mathbb{Q})$. On rappelle qu'une suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ca}(\mathbb{Q})$ est dans la classe d'équivalence $\overline{r}$ si, et seulement si, la suite $(s_n - r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On rappelle également que les opérations d'addition et de multiplication sur $\dfrac{\mathrm{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$ sont définies par $\overline{r}+\overline{s} = \overline{r+s}$ et $\overline{r}\cdot\overline{s} = \overline{r\cdot s}$ pour $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathrm{Ca}(\mathbb{Q})$, où $r+s = (r_n+s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $r\cdot s = (r_n s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Lemme 1.8** *L'ensemble $\mathrm{Ca}(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$ des suites de Cauchy de nombres rationnels non convergentes vers 0 est contenu dans l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels qui ne s'annulent jamais à partir d'un certain rang.*

**Démonstration** Soit $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ca}(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$. Comme $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, il existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}^{+,*}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi(n) \geq n$ tel que $\left|r_{\varphi(n)}\right| \geq 2\varepsilon_0$. La suite $r$ étant de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|r_n - r_m| < \varepsilon_0$ pour tout $m \geq n \geq n_0$. Dans le cas où $r_{\varphi(n_0)} \geq 2\varepsilon_0$, on a $r_m > r_{\varphi(n_0)} - \varepsilon_0 \geq \varepsilon_0 > 0$ pour tout $m \geq n_0$ et dans le cas où $r_{\varphi(n_0)} \leq -2\varepsilon_0$, on a $r_m < r_{\varphi(n_0)} + \varepsilon_0 \leq -\varepsilon_0 < 0$ pour tout $m \geq n_0$, ce qui nous dit que dans tous les cas on a $|r_m| > \varepsilon_0 > 0$ pour tout $m \geq n_0$. ■

La suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, ne s'annule jamais, mais ce n'est pas un élément de $\mathrm{Ca}(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$.

**Théorème 1.15.**

*L'anneau quotient $\dfrac{\mathrm{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$ est un corps commutatif.*

**Démonstration** Il s'agit de vérifier que tout élément non nul de l'anneau $\dfrac{\mathrm{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$ est inversible, ce qui signifie que si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres rationnels qui ne converge pas vers 0, il existe alors une suite de Cauchy $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels telle que la suite $(r_n s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit équivalente à la suite constante égale à 1 modulo l'idéal $Z(\mathbb{Q})$, ce qui signifie que $(r_n s_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Le lemme 1.8 nous dit qu'il existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}^{+,*}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels $|r_n| > \varepsilon_0 > 0$ pour tout $n \geq n_0$. Il en résulte que pour tout $n \geq n_0$ et tout $m \geq n_0$, on a $\left|\dfrac{1}{r_n} - \dfrac{1}{r_m}\right| = \dfrac{|r_n - r_m|}{|r_n|\,|r_m|} \leqslant \dfrac{|r_n - r_m|}{\varepsilon_0^2}$, ce qui implique que la suite $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = 0$ pour $n < n_0$ et $s_n = \dfrac{1}{r_n}$ pour $n \geqslant n_0$ est de Cauchy telle que $r_n s_n = 1$ pour tout $n \geq n_0$, donc telle que $(r_n s_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. ■

Le corps $\dfrac{\mathrm{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$ est noté $\mathbb{R}$ et on dit que c'est le *corps des réels*. Un réel $x$ est donc la classe d'équivalence d'une suite $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ca}(\mathbb{Q})$ modulo l'idéal $Z(\mathbb{Q})$.

L'application qui associe à un nombre rationnel $r$ la classe d'équivalence de la suite constante égal à $r$ dans $\mathbb{R}$ ($\overline{r}$ est l'ensemble de toutes les suites rationnelles de Cauchy qui converge vers $r$) réalise une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui permet d'identifier $\mathbb{Q}$ à un sous-corps de $\mathbb{R}$. Le corps $\mathbb{R}$ est donc de caractéristique nulle.

Un élément de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dit *irrationnel*.

L'exercice 1.4 nous donne un exemple de nombres réel (i. e. un élément de $\dfrac{\mathrm{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$) qui est irrationnel, à savoir la classe d'équivalence de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

## 1.6 Le corps totalement ordonné $\mathbb{R}$

On peut munir $\mathbb{R}$ d'une relation d'ordre total prolongeant celle de $\mathbb{Q}$ et compatible avec la structure de corps. Pour ce faire, on note $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$ [resp. $\mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})$] l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnels $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*}$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $r_n \geq -\varepsilon$ [resp. $r_n \leq \varepsilon$] pour tout $n \geq n_\varepsilon$.

Reprenant la preuve du lemme 1.8, on vérifie que l'ensemble $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$ [resp. $\mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$] est contenu dans l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels qui sont à valeurs strictement positives [resp. à valeurs strictement négatives] à partir d'un certain rang.

**Lemme 1.9** *On a* $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q}) = Z(\mathbb{Q})$ *et* $\mathrm{Ca}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cup \mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})$.

**Démonstration** Une suite $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*}$ il existe un entier naturel $n_\varepsilon$ tel que $r_n \geq -\varepsilon$ et $r_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui équivaut à $|r_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et revient à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, soit que $r \in Z(\mathbb{Q})$. On a donc l'égalité $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q}) = Z(\mathbb{Q})$.
Soit $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ca}(\mathbb{Q})$. Si $r \in Z(\mathbb{Q})$, elle est alors dans $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$ et dans $\mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})$. Sinon, avec la démonstration du lemme 1.8 on a vu qu'il existe un entier $n_0$ tel que les $r_n$ sont tous non nuls et de même signe à partir du rang $n_0$. Dans le cas où $r_n > 0$ [resp. $r_n < 0$] pour tout $n \geq n_0$, on a $r_n \geq -\varepsilon$ [resp. $r_n \leq -\varepsilon$] pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*}$ et tout $n \geq n_0$, soit $r \in \mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$ [resp. $r \in \mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})$]. ■

Le lemme qui suit nous dit que la définition de $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$ [resp. de $\mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})$] est compatible avec la relation d'équivalence modulo $Z(\mathbb{Q})$.

**Lemme 1.10** *Soit* $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy dans* $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$ *[resp. dans* $\mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})$*]. Toute suite* $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ca}(\mathbb{Q})$ *équivalente à* $r$ *modulo* $Z(\mathbb{Q})$ *est également dans* $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$ *[resp. dans* $\mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})$*].*

**Démonstration** Pour $r \in \mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$ et $s \in \overline{r}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n - r_n) = 0$, donc pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $r_n \geq -\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|s_n - r_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui nous donne $s_n = r_n + s_n - r_n \geq r_n - |s_n - r_m| \geq -\varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et signifie que $s \in \mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$. On procède de manière analogue pour $r \in \mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})$. ∎

Le lemme précédent légitime la définition qui suit.

**Définition 1.13.** Un réel $x = \overline{r}$ est dit positif [resp. négatif] si $r \in \mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$ [resp. $r \in \mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})$].

En notant $\pi$ la surjection canonique de $\mathrm{Ca}(\mathbb{Q})$ sur $\dfrac{\mathrm{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$, l'ensemble des réels positif [resp. des réels négatif] est $\mathbb{R}^+ = \pi\left(\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})\right)$ [resp. $\mathbb{R}^- = \pi\left(\mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})\right)$].

**Définition 1.14.** Soient $x, y$ deux réels. On dit que $x$ est inférieur ou égal à $y$, si $y - x \in \mathbb{R}^+$, ce que l'on note $x \leq y$.

**Théorème 1.16.**

*La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$ compatible avec les opérations d'addition et de multiplication ($\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné).*

**Démonstration** Il nous suffit de vérifier que l'ensemble $P = \mathbb{R}^+$ vérifie les conditions (1.1) du théorème 1.2. On a $-\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) = \mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})$, donc :

$$P \cap (-P) = \pi\left(\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})\right) = \pi(Z(\mathbb{Q})) = \left\{\overline{0}\right\}$$

De $\mathrm{Ca}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cup \mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})$, on déduit que :

$$P \cup (-P) = \pi\left(\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) \cup \mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})\right) = \pi(\mathrm{Ca}(\mathbb{Q})) = \mathbb{R}$$

Du fait que $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) + \mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) = \mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$, on déduit que :

$$P + P = \pi\left(\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) + \mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})\right) = \pi\left(\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})\right) = \mathbb{R}^+$$

Il reste enfin à montrer que $P \cdot P \subset P$. Soient donc $x, y$ dans $P$. Si $x = 0$ ou $y = 0$, on a alors $xy = 0 \in P$. Si $x$ et $y$ sont non nuls, ils sont alors représentés par $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_n > 0$, $s_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*}$, on a $r_n s_n > 0 > -\varepsilon$, ce qui nous dit que $xy \in P$. ∎

La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ prolonge bien celle que l'on connaît sur $\mathbb{Q}$. En effet, pour $r \leq s$ sur $\mathbb{Q}$, on a $s - r \in \mathbb{Q}^+ \subset \mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$, donc $\overline{s} - \overline{r} = \overline{s - r} \in \mathbb{R}^+$ et $\overline{r} \leq \overline{s}$ dans $\mathbb{R}$.

Sur le corps totalement ordonné $\mathbb{R}$ on peut donc définir la valeur absolue par $|x| = \max(x, -x)$.

**Lemme 1.11** *Pour tout réel $x = \overline{r}$, où $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de nombres rationnels, on a $|x| = \overline{|r|}$ où on a noté $|r| = (|r_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.*

**Démonstration** La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, il en est de même de la suite $(|r_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ (théorème 1.11). Précisément, cette suite est dans $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$. Si $r \in Z(\mathbb{Q})$, on a alors $x = 0$ et $|r| \in Z(\mathbb{Q})$ (théorème 1.9), donc $|x| = \overline{0} = \overline{|r|}$. Si $r \in \mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, donc $|r_n| - r_n = 0$ pour tout $n \geq n_0$ et $|r| - r \in Z(\mathbb{Q})$, soit $|x| = x = \overline{r} = \overline{|r|}$ ($x$ est positif car $r \in \mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$, donc $|x| = x$). Si $r \in \mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q}) \setminus Z(\mathbb{Q})$, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_n < 0$ pour tout $n \geq n_0$, donc $|r_n| + r_n = 0$ pour tout $n \geq n_0$ et $|r| + r \in Z(\mathbb{Q})$, soit $|x| = -x = \overline{-r} = \overline{|r|}$ ($x$ est négatif car $r \in \mathrm{Ca}^-(\mathbb{Q})$, donc $|x| = -x$). ∎

**Théorème 1.17.**

*Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est archimédien.*

**Démonstration** Soient $a \in \mathbb{R}^{+,*}$, $b \in \mathbb{R}^+$ et $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ca}(\mathbb{Q})$ un représentant du réel $\frac{b}{a}$. La suite $r$ qui est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ est bornée dans ce corps, ce qui signifie qu'il existe un rationnel $M = \frac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $-M \leq r_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(M - r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels positifs étant dans $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$, le réel $M - \frac{b}{a}$ qu'elle représente est positif, donc $M = \frac{p}{q} \geq \frac{b}{a}$, soit $pa \geq qb \geq b$ et $(p+1)\,a > b$. ∎

Du théorème 1.12 et du précédent, on déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On en déduit également que pour tout réel $x$ il existe un unique entier relatif $n$ tel que $n \leq x < n+1$, cet entier $n$ est la partie entière de $x$.

**Théorème 1.18.**

*Toute suite de Cauchy de nombres rationnels converge dans $\mathbb{R}$.*

**Démonstration** Soit $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de nombres rationnels, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{Ca}(\mathbb{Q})$ et $x = \overline{r}$ le réel qu'elle représente. Nous allons montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou plus précisément $(\overline{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$) converge vers $x$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\delta \in \mathbb{Q}^{+,*}$, il existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tel que $|r_m - r_n| < \delta$ pour tout $n \geq n_\delta$ et tout $m \geq n_\delta$ dans $\mathbb{N}$. Pour $m \geq n_\delta$ donné, on a $x - \overline{r_m} = \overline{r - r_m} = \overline{(r_n - r_m)_{n\in\mathbb{N}}}$ et :

$$|x - \overline{r_m}| = \left|\overline{(r_n - r_m)_{n\in\mathbb{N}}}\right| = \overline{(|r_m - r_n|)_{n\in\mathbb{N}}} < \delta$$

(pour $n \geq n_\delta$, on a $\delta - |r_m - r_n| > 0$ pour tout $n \geq n_\delta$, donc la suite $(\delta - |r_m - r_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathrm{Ca}^+(\mathbb{Q})$). Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $\delta_\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+,*}$ tel que $0 < \delta < \varepsilon$ et $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|x - \overline{r_m}| < \delta < \varepsilon$ pour tout $m \geq n_\varepsilon$, ce qui nous dit que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \overline{r_n}$ dans $\mathbb{R}$. ∎

**Théorème 1.19.**

*Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est complet.*

**Démonstration** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ un rationnel $r_n \in \mathbb{Q}$ tel que $|u_n - r_n| < \dfrac{1}{n+1}$. Pour tous $m > n$ dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} |r_m - r_n| &\leq |r_m - u_m| + |u_m - u_n| + |u_n - r_n| \\ &\leq \frac{1}{m+1} + |u_m - u_n| + \frac{1}{n+1} \leq \frac{2}{n+1} + |u_m - u_n| \end{aligned}$$

ce qui implique que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels est de Cauchy, donc convergente vers un réel $\ell$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a alors :

$$|\ell - u_n| \leq |\ell - r_n| + |r_n - u_n| \leq |\ell - r_n| + \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ dans $\mathbb{R}$. ∎

En résumé, on a le résultat suivant.

**Théorème 1.20.**

*Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est totalement ordonné, archimédien et complet.*

De ce théorème et du théorème 1.14, on déduit les propriétés suivantes de $\mathbb{R}$ :

- pour tout réel $x$ il existe un unique entier relatif $n$ tel que $n \leq x < n+1$ ($n = [x]$ est la partie entière de $x$) ;
- tout réel strictement positif admet deux racines carrées opposées (remarque après le corollaire 1.3) ;
- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ;
- toute partie non vide et majorée [resp. minorée] de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure [resp. une borne inférieure].

Les résultats sur les suites d'éléments d'un corps totalement ordonné sont bien entendu valables pour les suites réelles. En résumé, on a les résultats suivants :

- toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite ;
- $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ entraînent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$ entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} (|u_n|) = |\ell|$ ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) > \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)$ entraîne $u_n > v_n$ à partir d'un certain rang ;
- $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang entraîne $\ell \leq \ell'$ ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)$ et $u_n \leq w_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang entraînent $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_n) = \ell$ ;

- de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone ;
- une suite de Cauchy réelle est convergente si, et seulement si, on peut en extraire une sous-suite convergente.

Avec de plus le caractère archimédien et complet de $\mathbb{R}$, on a les résultats suivants :

- toute suite réelle croissante majorée [resp. minorée] est convergente ;
- **théorème des suites adjacentes** : deux suites réelles adjacentes convergent vers la même limite ;
- **théorème des segments emboîtés** : pour toute suite $([u_n, v_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, il existe un unique réel $\ell$ tel que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [u_n, v_n] = \{\ell\}$ ;
- **théorème de Bolzano-Weierstrass** : de toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Le théorème des segments emboîtés peut être utiliser pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

**Théorème 1.21.**

*$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

**Démonstration** Il suffit de montrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable. Dans le cas contraire, il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to [0, 1]$. En coupant $I = [0, 1]$ en trois segments de même longueur, il en existe un que l'on note $I_0$ qui ne contient pas $\varphi(0)$. On coupe ensuite $I_0$ en trois segments de même longueur en notant $I_1$ l'un de ces segments qui ne contient par $\varphi(1)$. Par récurrence, on construit ainsi une suite de segments emboîtés $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n$ ne contient pas $\varphi(n)$ et $I_n$ est de longueur $\frac{1}{3^n}$, on déduit alors du théorème des segments emboîtés que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$ avec $x \in [0, 1]$ et $x \neq \varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit la définition de $\varphi$. ■

Parmi les suites réelles divergentes, on traite à part celles qui tendent vers l'infini.

**Définition 1.15.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$], si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq n_0,\ u_n > M$$

$$[\text{resp. } \forall m \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq n_0,\ u_n < m]$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ [resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$].

Une suite qui tend vers l'infini (i. e. vers $+\infty$ ou $-\infty$) est non bornée donc divergente. Une suite qui tend vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$] est nécessairement positive [resp. négative] à partir d'un certain rang.

Si $u_n = \frac{1}{v_n}$ avec $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ si, et seulement si, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

## 1.7 Unicité du corps des réels

Un corps de nombres réels totalement ordonné archimédien et complet, peut être construit de diverses manières. On peut utiliser les coupures de Dedekind (voir [2]) ou les nombres décimaux (voir [9]). Le corps obtenu est dans tous les cas isomorphe à celui que nous avons obtenu à partir des suites de Cauchy de nombres rationnels. Pour prouver ce résultat, nous aurons besoin du lemme qui suit.

**Lemme 1.12** *L'identité est l'unique morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans lui même.*

**Démonstration** Si $f$ est un morphisme du corps $\mathbb{R}$ dans lui même, il est alors impair (puisqu'un morphisme de groupes additifs est impair) et croissant (conséquence du corollaire 1.3). De $f(1) = 1$, on déduit par récurrence sur $n$ que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En écrivant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que $1 = f\left(n\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, on déduit que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Il en résulte que pour tout rationnel positif $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a $f(r) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q}$. Enfin avec l'imparité de $f$, on déduit que ce dernier résultat est encore vrai pour les rationnels négatifs. On a donc $f(r) = r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ on peut trouver pour tout réel $x$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ des rationnels $r_n$ et $s_n$ tels que $x - \frac{1}{n} < r_n < x < s_n < x + \frac{1}{n}$, ce qui nous donne par croissance de $f$, $f(x) - \frac{1}{n} \leq r_n \leq s_n \leq f(x) + \frac{1}{n}$ et faisant tendre $n$ vers l'infini, on en déduit que $f(x) = x$. ■

**Théorème 1.22.**

*Si $\mathbb{K}$ est un corps totalement ordonné archimédien et complet, il existe alors un unique isomorphisme de corps ordonnés de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{R}$.*

**Démonstration** On rappelle que le sous-corps premier d'un corps totalement ordonné est identifié à $\mathbb{Q}$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné archimédien et complet. Du caractère archimédien de $\mathbb{K}$, on déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$ (théorème 1.12), donc pour tout $x \in \mathbb{K}$ il existe une suite $r = (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels telle que $x = \lim\limits_{n \to +\infty} r_n$ dans $\mathbb{K}$. Si $r' = (r'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite de nombres rationnels qui converge vers $x$, la suite $r' - r$ est de limite nulle, donc dans $Z(\mathbb{Q})$ et on a $\overline{r} = \overline{r'}$ dans $\mathbb{R} = \frac{\mathrm{Ca}(\mathbb{Q})}{Z(\mathbb{Q})}$ (les suites $r$ et $r'$ qui sont convergentes sont de

Cauchy). On peut donc définir l'application $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \overline{r}$ et on vérifie facilement que c'est un morphisme de corps et comme tout morphisme de corps, il est injectif (son noyau est un idéal strict de $\mathbb{K}$ car $\varphi$ est non nul et le seul idéal strict d'un corps est $\{0\}$). Un tel morphisme est également croissant. Pour tout $y = \overline{r} \in \mathbb{R}$ où $r \in \mathrm{Ca}(\mathbb{Q})$, la suite $r$ de nombres rationnels qui est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ l'est également dans $\mathbb{K}$. En effet, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $\delta \in \mathbb{Q}^{+,*}$ tel que $0 < \delta < \varepsilon$ (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{K}$) et $n_\delta \in \mathbb{N}$ tel que $|r_m - r_n| < \delta < \varepsilon$ pour tous les entiers $m > n > n_\delta$. Comme $\mathbb{K}$ est complet, la suite $r$ converge dans $\mathbb{K}$ vers un élément $x$ qui est tel que $y = \varphi(x)$. Le morphisme $\varphi$ est donc surjectif et c'est un isomorphisme de corps ordonnés de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{R}$. Si $\psi$ est un isomorphisme de corps de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{R}$, la composée $\varphi \circ \psi^{-1}$ est alors un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans lui même, soit l'identité d'après le lemme 1.12, ce qui signifie que $\psi = \varphi$. ■

## 1.8 Exercices

***Exercice 1.1.*** *Montrer qu'un corps algébriquement clos ne peut être totalement ordonné.*

**Solution.** Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et $i$ une racine du polynôme $X^2 + 1 = 0$. Supposons que $\mathbb{K}$ soit totalement ordonné. Dans le cas où $i \geq 0$ [resp. où $i \leq 0$], on a $0 = 0 \cdot i \leq i^2 = -1$ [resp. $-i \geq 0$ et $0 = 0 \cdot (-i) \leq (-i)^2 = -1$] et $1 = 1 + 0 \leq 1 + (-1) = 0$, ce qui est impossible.

***Exercice 1.2.*** *Soient $A, B$ deux parties non vide d'un corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ admettant des bornes inférieure et supérieure. Montrer que $-A$, $A \cup B$ et $A + B$ admettent des bornes inférieure et supérieure et qu'on a :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup(-A) = -\inf(A),\ \inf(-A) = -\sup(A) \\ \sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B)),\ \inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B)) \\ A \subset B \Rightarrow \inf(B) \leq \inf(A) \ \ et\ \ \sup(A) \leq \sup(B) \\ \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B),\ \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B) \end{array} \right.$$

**Solution.**

1. Pour tout $y = -x \in -A$ où $x \in A$, on a $-y \geq \inf(A)$, soit $y \leq -\inf(A)$, ce qui nous dit que $-\inf(A)$ est un majorant de $-A$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $x \in A$ tel que $\inf(A) \leq x < \inf(A) + \varepsilon$, donc $-x \in -A$ est tel que $-\inf(A) - \varepsilon < -x \leq -\inf(A)$ et $-\inf(A)$ est la borne supérieure de $-A$. De manière analogue, on vérifie que $-\sup(A)$ est la borne inférieure de $-A$.
2. On suppose que $\max(\sup(A), \sup(B)) = \sup(B)$ (l'ordre est total). Pour tout $x \in A \cup B$, on a soit $x \in A$ et $x \leq \sup(A) \leq \sup(B)$, soit $x \in B$ et $x \leq \sup(B)$, donc $\sup(A \cup B) \leq \sup(B)$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, il existe $x \in B \subset A \cup B$ tel que $\sup(B) - \varepsilon < x \leq \sup(B)$, donc $\sup(A \cup B) = \sup(B)$. On montre de manière analogue que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.

3. Pour tout $x \in A \subset B$, on a $\inf(B) \leq x \leq \sup(B)$, ce qui entraîne par définition des bornes inférieure et supérieure que $\inf(B) \leq \inf(A)$ et $\sup(A) \leq \sup(B)$.
4. Notons $M = \sup(A)$ et $M' = \sup(B)$. Pour tout $z = x+y$ avec $(x, y) \in A \times B$, on a $z \leq M + M'$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+,*}$, on peut trouver $x \in A$ et $y \in B$ tels que $M - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq M$ et $M' - \frac{\varepsilon}{2} < y \leq M'$, donc $z = x + y \in A + B$ est tel que $M + M' - \varepsilon < z \leq M + M'$. Le réel $M + M'$ est donc la borne supérieure de $A + B$. De manière analogue, on vérifie que $\inf(A) + \inf(B)$ est la borne inférieure de $A + B$.

***Exercice 1.3.*** *Montrer que le sous-ensemble $X = \left\{r \in \mathbb{Q},\ r^2 < 2\right\}$ de $\mathbb{Q}$ est non vide et majoré, mais n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ muni de l'ordre usuel.*

**Solution.** Il est clair que $X$ est non vide (par exemple $0 \in X$) et majoré (pour $r \in X$, on a $r \leq 2$ car $r > 2$ donne $r^2 > 4$). Si $X$ admet une borne supérieure $M \in \mathbb{Q}$, on a alors $M \geq 1$ (car $1 \in X$) et pour tout entier $n \geq 1$, il existe $r \in X$ tel que $0 \leq M - \frac{1}{n} < r \leq M$, donc $\left(M - \frac{1}{n}\right)^2 < r^2 < 2$, ce qui nous donne $M^2 - 2 < \frac{2M}{n} - \frac{1}{n^2}$. Faisant tendre $n$ vers l'infini, on en déduit que $M^2 \leq 2$. D'autre part, comme $M$ est majorant de $X$, on a $M + \frac{1}{n} \notin X$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\left(M + \frac{1}{n}\right)^2 \geq 2$ et faisant tendre $n$ vers l'infini, on en déduit que $M^2 \geq 2$. Au final, on a $M \in \mathbb{Q}$ et $M^2 = 2$, ce qui n'est pas possible. En effet, en écrivant $M = \frac{p}{q}$ avec $p, q$ entiers naturels non nuls premiers entre eux, on a $p^2 = 2q^2$ qui entraîne que $p$ est pair, soit $p = 2p_1$ et $q^2 = 2p_1^2$ entraîne $q$ pair, ce qui contredit le fait que $p$ et $q$ sont premiers entre eux.

***Exercice 1.4.*** *Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels est de Cauchy, mais non convergente dans $\mathbb{Q}$.*

**Solution.** On vérifie facilement que cette suite est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Pour $m > n > 2$, on a :

$$\begin{aligned}
|r_m - r_n| &= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(m-1)\,m}\right) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{1}{(n+2)^k} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)^2\, n!} \leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

ce qui implique que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Supposons qu'elle soit convergente vers un rationnel $r = \frac{p}{q}$ où $p, q$ sont deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Pour tout $n > q$, le nombre $p_n = n!\,(r - r_n) = n! \lim\limits_{m \to +\infty} (r_m - r_n)$ est un entier strictement positif avec $0 < n!\,(r_m - r_n) \leq \dfrac{n+2}{(n+1)^2} \leq \dfrac{1}{2}$ pour $m > n \geq 2$, ce qui implique $0 < p_n < 1$ dans $\mathbb{N}$, soit une impossibilité. La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc non convergente dans $\mathbb{Q}$.

**Exercice 1.5.** *Soit $(\mathbb{K}, \leq)$ un corps totalement ordonné. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on note :*

$$d(P) = \begin{cases} 0 \ \text{si } P = 0 \\ a_n \ \text{si } P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ est de degré } n \end{cases}$$

*On écrit toute fraction rationnelle $R$ dans $\mathbb{K}(X)$ sous la forme $R = \dfrac{P}{Q}$ avec $P, Q$ dans $\mathbb{K}[X]$ et $Q$ non nul unitaire. On définit la relation $\leq$ sur $\mathbb{K}(X)$ par :*

$$\left(\frac{P_1}{Q_1} \leq \frac{P_2}{Q_2}\right) \Leftrightarrow (d(Q_1P_2 - P_1Q_2) \geq 0)$$

*Montrer que cette relation est bien définie et que $(\mathbb{K}(X), \leq)$ un corps totalement ordonné non archimédien.*

**Solution.**

1. Pour vérifier que la relation $\leq$ est bien définie, il s'agit de montrer que sa définition ne dépend pas des choix des numérateurs et dénominateurs des fractions rationnelles concernées. Soient $R_1 = \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{U_1}{V_1}$ et $R_2 = \dfrac{P_2}{Q_2} = \dfrac{U_2}{V_2}$ dans $\mathbb{K}(X)$. Supposons que $d(Q_1P_2 - P_1Q_2) \geq 0$. Les polynômes $Q_1Q_2$ et $V_1V_2$ étant unitaires, on a compte tenu des égalités $P_1V_1 = U_1Q_1$ et $P_2V_2 = U_2Q_2$ :

$$\begin{aligned} d(V_1U_2 - V_2U_1) &= d(Q_1Q_2(V_1U_2 - V_2U_1)) = d(Q_1V_1U_2Q_2 - Q_2V_2U_1Q_1) \\ &= d(Q_1V_1P_2V_2 - Q_2V_2P_1V_1) \\ &= d(V_1V_2(Q_1P_2 - P_1Q_2)) = d(Q_1P_2 - P_1Q_2) \geq 0 \end{aligned}$$

   La relation $\leq$ est donc bien définie.

2. Cette relation est d'ordre. En effet, on a :
   - $\dfrac{P}{Q} \leq \dfrac{P}{Q}$ car $d(0) = 0$ ;
   - si $\dfrac{P_1}{Q_1} \leq \dfrac{P_2}{Q_2}$ et $\dfrac{P_2}{Q_2} \leq \dfrac{P_1}{Q_1}$, on a alors $0 \leq d(Q_1P_2 - P_1Q_2) \leq 0$, donc $Q_1P_2 - P_1Q_2 = 0$, soit $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ ;
   - si $\dfrac{P_1}{Q_1} \leq \dfrac{P_2}{Q_2}$ et $\dfrac{P_2}{Q_2} \leq \dfrac{P_3}{Q_3}$ alors

$$\begin{cases} d(Q_3(Q_1P_2 - P_1Q_2)) = d(Q_1P_2 - P_1Q_2) \geq 0 \\ d(Q_1(Q_2P_3 - P_2Q_3)) = d(Q_2P_3 - P_2Q_3) \geq 0 \end{cases}$$

($Q_1$ et $Q_2$ sont unitaires) et en ajoutant on obtient :

$$d\left(Q_1 P_3 - P_1 Q_3\right) = d\left(Q_2\left(Q_1 P_3 - P_1 Q_3\right)\right) \geq 0$$

(la somme de deux polynômes de coefficient dominant positif est un polynôme de même nature), ce qui équivaut à $\dfrac{P_1}{Q_1} \leq \dfrac{P_3}{Q_3}$.

3. L'ordre est total puisqu'il est total sur $\mathbb{K}$.
4. Si $\dfrac{P_1}{Q_1} \leq \dfrac{P_2}{Q_2}$ et $\dfrac{P_3}{Q_3} \in \mathbb{K}\left(X\right)$, on a alors $\dfrac{P_j}{Q_j} + \dfrac{P_3}{Q_3} = \dfrac{P_j Q_3 + P_3 Q_j}{Q_j Q_3}$ pour $j = 1, 2$ et :

$$\begin{aligned} & d\left(Q_1 Q_3\left(P_2 Q_3 + P_3 Q_2\right) - Q_2 Q_3\left(P_1 Q_3 + P_3 Q_1\right)\right) \\ & = d\left(Q_1\left(P_2 Q_3 + P_3 Q_2\right) - Q_2\left(P_1 Q_3 + P_3 Q_1\right)\right) \\ & = d\left(Q_1 P_2 Q_3 - Q_2 P_1 Q_3\right) = d\left(Q_1 P_2 - Q_2 P_1\right) \geq 0 \end{aligned}$$

De même pour $\dfrac{P_3}{Q_3} \geq 0$, on a $\dfrac{P_j}{Q_j}\dfrac{P_3}{Q_3} = \dfrac{P_j P_3}{Q_j Q_3}$ pour $j = 1, 2$ et :

$$d\left(P_2 P_3 Q_1 Q_3 - P_1 P_3 Q_2 Q_3\right) = d\left(P_3\right) d\left(P_2 Q_1 - P_1 Q_2\right) \geq 0$$

puisque $d\left(P_3\right) \geq 0$. L'ordre est donc bien compatible avec la structure de corps de $\mathbb{K}\left(X\right)$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $d\left(X - n\right) = 1 > 0$, donc $X > n$, soit $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{X}$ avec $\dfrac{1}{X}$ dans $\left(\mathbb{K}\left(X\right)\right)^{+,*}$. La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne peut donc converger vers 0 et en conséquence, $\mathbb{K}\left(X\right)$ n'est pas archimédien.