Chapitre 16

Moyennes de Cesàro, d'Euler et de Toeplitz

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé réel non réduit à $\{0\}$.

16.1 Moyennes de Cesàro

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E qui converge vers $\ell \in E$, les u_n seront proches de ℓ pour n assez grand et il semble naturel qu'il en soit de même des moyennes arithmétiques $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$. C'est ce que nous dit un théorème de Cesàro.

On se donne une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, on associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses moyennes pondérées de Cesàro définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{A_n}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k$$

où on a noté $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 16.1. Cesàro

Avec les notations qui précèdent, la condition $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$ équivaut à dire que pour toute suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses moyennes pondérées de Cesàro converge vers la même limite.

Preuve. Supposons que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E convergente vers $\ell \in E$, on a alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \mid \forall n \geq n_\varepsilon,\ \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

ce qui nous donne pour tout entier $n \geq n_\varepsilon + 1$:

$$\begin{aligned}\|v_n - \ell\| &= \frac{1}{A_n}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\left(u_k - \ell\right)\right\| \leq \frac{1}{A_n}\left\|\sum_{k=0}^{n_\varepsilon-1}\alpha_k\left(u_k-\ell\right)\right\| + \frac{1}{A_n}\sum_{k=n_\varepsilon}^{n-1}\alpha_k\|u_k-\ell\| \\ &\leq \frac{C_\varepsilon}{A_n} + \frac{1}{A_n}\sum_{k=n_\varepsilon}^{n-1}\alpha_k\varepsilon \leq \frac{C_\varepsilon}{A_n} + \varepsilon\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n = +\infty$, ce qui implique l'existence de $m_\varepsilon \geq n_\varepsilon + 1$ tel que $\|v_n - \ell\| \leq 2\varepsilon$ pour tout $n \geq m_\varepsilon$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \ell$.

Réciproquement, supposons que pour toute suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite. Si $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n < +\infty$, en se donnant $x \in E \setminus \{0\}$ et en considérant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha_n x)_{n\in\mathbb{N}}$, on a alors $v_n = \frac{1}{A_n}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k^2\right)x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A > \alpha_0 > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n < +\infty$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = 0$), ce qui implique que $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n^2\right)x = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k^2\right)x = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n v_n = 0$ ou encore $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n^2 = 0$, ce qui est impossible car les α_n sont tous non nuls. On a donc nécessairement $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n = +\infty$. □

La condition nécessaire du théorème de Cesàro est valable pour les suites réelles divergentes vers $\pm\infty$, c'est-à-dire que si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n = +\infty$, alors pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ (exercice 16.1).

Ce théorème est souvent utilisé en considérant les moyennes arithmétiques, c'est-à-dire avec la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire sur 1. Précisément, on a :

$$\left(\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \ell\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right) = \ell\right)$$

Dans le cas des suites réelles positives, on déduit du théorème de Cesàro que la convergence au sens usuel entraîne la convergence en moyennes arithmétique, géométrique et harmonique.

Corollaire 16.1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}^+$, alors les suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$*

des moyennes arithmétiques, $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} u_k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *des moyennes géométriques et* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{n}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *des moyennes harmoniques convergent vers* ℓ.

Preuve. Le cas des moyennes arithmétiques est déjà traité avec le théorème de Cesàro.

Si $\lim_{n\to+\infty} (u_n) = \ell \geq 0$, on a alors $\lim_{n\to+\infty} (\ln (u_n)) = \ln (\ell) \in [-\infty, +\infty[$ et le théorème de Cesàro nous dit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\ln \left(\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} u_k}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln (u_k)\right) = \mu$$

avec $\mu = \ln (\ell)$ pour $\ell > 0$ ou $\mu = -\infty$ pour $\ell = 0$, ce qui nous donne au final $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} u_k}\right) = e^{\mu} = \ell$.

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \mu$ avec $\mu = \frac{1}{\ell}$ pour $\ell > 0$ ou $\mu = +\infty$ pour $\ell = 0$ et le théorème de Cesàro nous dit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{\ell}$, ou encore que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}} = \ell$. $\square$

En utilisant l'encadrement $H_n \leq G_n \leq A_n$ (théorème 8.25), la convergence de $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers ℓ peut aussi se déduire de celle des suites $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers ℓ.

Corollaire 16.2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels strictement positifs. Si* $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ell$, *on a alors* $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \ell$.

Preuve. Du corollaire précédent, on déduit que si $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ell$, on a alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}}\right) = \ell$ ($\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{u_0}\right) = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(u_0)}{n}} = 1$). $\square$

La réciproque du corollaire précédent est fausse comme le montre l'exemple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{2n} = u_{2n+1} = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, on a $\sqrt[2n]{u_{2n}} = \sqrt{2}$ et $\sqrt[2n+1]{u_{2n+1}} = 2^{\frac{n}{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{2}$, donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \sqrt{2}$, alors que $\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = 1$ et $\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = 2$, donc $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Définition 16.1. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $(E,\|\cdot\|)$ converge au sens de Cesàro *vers* $\ell \in E$, *si la suite* $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente vers* ℓ.

Le théorème de Cesàro nous dit en particulier qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E convergente est convergente au sens de Cesàro. En considérant les suites réelles définies par $u_n = (-1)^n$ ou plus généralement par $u_n = e^{in\theta}$ où $\theta \in]0, 2\pi[$, on voit que la réciproque de ce résultat est fausse (exercice 16.2).

Dans le cas des suites réelles monotones, la convergence est équivalente à la convergence au sens de Cesàro (exercice 16.4). Les deux théorèmes qui suivent nous donnent des exemples de situations où cette équivalence est encore vraie.

Théorème 16.2. Hardy faible

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* E *telle que* $u_n - u_{n-1} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ *est convergente si, et seulement si, elle est convergente au sens de Cesàro.*

Preuve. La condition nécessaire est déjà prouvée (que la suite $(n(u_n - u_{n-1}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ou non).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)u_k = n\left(u_n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)$$

(transformation d'Abel), soit $u_n - v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1})$ et en appliquant le théorème de Cesàro à la suite $(n(u_n - u_{n-1}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (qui converge vers 0 par hypothèse), on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ et dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers $\ell \in E$, il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. □

Le théorème précédent est encore valable pour une suite réelle divergente vers $-\infty$ ou $+\infty$.

Le théorème précédent est un cas particulier du théorème suivant.

Théorème 16.3. Hardy

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $(E,\|\cdot\|)$ *telle que* $u_n - u_{n-1} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ *est convergente si, et seulement si, elle est convergente au sens de Cesàro.*

Preuve. On a déjà la condition nécessaire (que $(n(u_n - u_{n-1}))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée ou non).

En notant $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour $m > n$:

$$v_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1} u_k + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} u_k = \frac{n}{m} v_n + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} u_k$$

et :

$$\begin{aligned} u_m - v_m &= u_m - \frac{n}{m} v_n - \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} u_k \\ &= u_m - \frac{n}{m} v_n - \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} (u_k - u_m) - \frac{m-n}{m} u_m \\ &= \frac{n}{m}(u_m - v_n) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} (u_m - u_k) \end{aligned}$$

soit $u_m - v_m = \frac{n}{m}(u_m - v_m) + \frac{n}{m}(v_m - v_n) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} (u_m - u_k)$, ou encore :

$$\frac{m-n}{m}(u_m - v_m) = \frac{n}{m}(v_m - v_n) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1} (u_m - u_k)$$

donc $u_m - v_m = \frac{n}{m-n}(v_m - v_n) + \frac{1}{m-n}\sum_{k=n}^{m-1} (u_m - u_k)$.

Dire que $u_n - u_{n-1} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie que la suite $\left(n\left(u_n - u_{n-1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et en notant $M = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} n\left(u_n - u_{n-1}\right)$, on a pour $m > n$ et k compris entre n et $m-1$:

$$\|u_m - u_k\| \leq \sum_{j=k+1}^{m} \|u_j - u_{j-1}\| \leq M \sum_{j=k+1}^{m} \frac{1}{j} \leq M\frac{m-k}{k+1} \leq M\frac{m-n}{n+1}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \|u_m - v_m\| &\leq \frac{n}{m-n}\|v_m - v_n\| + \frac{M}{m-n}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{m-n}{n+1} \\ &\leq \frac{n}{m-n}\|v_m - v_n\| + M\frac{m-n}{n+1} \end{aligned}$$

Dans le cas où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est en particulier de Cauchy, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ (ce choix sera justifié plus loin) tel que :

$$\forall m > n \geq n_\varepsilon,\ \|v_m - v_n\| < \varepsilon^2$$

ce qui donne :

$$\forall m > n \geq n_\varepsilon,\ \|u_m - v_m\| \leq \frac{n}{m-n}\varepsilon^2 + M\frac{m-n}{n+1}$$

Pour $m > n_\varepsilon$ assez grand, on cherche un entier n compris entre n_ε et m tel que $\frac{n}{m-n} < \frac{1}{\varepsilon}$ et $\frac{m-n}{n+1} < \varepsilon$, ou encore $\frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} < n < \frac{m}{\varepsilon+1}$. Pour ce faire, il suffit de prendre n tel que $n = E\left(\frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) + 1$ où m est choisi tel que $m > n_\varepsilon + \varepsilon\,(n_\varepsilon + 1)$. En effet, on a $n - 1 \leq \frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} < n$, donc $n \leq \frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} + 1 = \frac{m+1}{\varepsilon+1} < m$ puisque $m > n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ et $n > \frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} \geq n_\varepsilon$ si $m > \varepsilon\,(n_\varepsilon + 1) + n_\varepsilon$. On a donc pour $\varepsilon > 0$ donné et $m > n_\varepsilon + \varepsilon\,(n_0 + 1)$, en prenant $n = E\left(\frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) + 1$:

$$\|u_m - v_m\| \leq \frac{n}{m-n}\varepsilon^2 + M\frac{m-n}{n+1} < (M+1)\,\varepsilon$$

On a ainsi prouvé que $\lim\limits_{m\to+\infty}(u_m - v_m) = 0$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} u_m = \lim\limits_{m\to+\infty} v_m = \ell$. □

Le théorème précédent est encore valable pour une suite réelle divergente vers $-\infty$ ou $+\infty$.

Définition 16.2. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$* conserve la convergence au sens de Cesàro*, si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge au sens de Cesàro vers ℓ, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers $f(\ell)$.*

Théorème 16.4.

Les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui conservent la convergence au sens de Cesàro sont les fonctions affines.

Preuve. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui conserve la convergence au sens de Cesàro. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{2k} = x$ et $u_{2k+1} = y$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Avec :

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} u_k = \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1}\right) = \frac{x+y}{2}$$

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} u_k = \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} u_{2k} + \sum_{k=0}^{n} u_{2k+1}\right) = \frac{n\,(x+y)}{2n+1} + \frac{y}{2n+1}$$

on déduit que cette suite converge au sens de Cesàro vers $\frac{x+y}{2}$ (voir aussi l'exercice 16.3), donc la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, ce qui implique que :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f(u_k) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

c'est-à-dire que f vérifie l'équation fonctionnelle de Jensen $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ et en conséquence est affine puisque continue (théorème 8.11). Réciproquement, il est clair que les fonctions affines conservent la convergence au sens de Cesàro. □

16.2 Quelques applications du théorème de Cesàro

Le résultat qui suit est souvent utilisé pour obtenir des équivalents ou des développements asymptotiques de certaines suites numériques (voir les exercices 16.5 et 16.6 et la fin de ce paragraphe).

Théorème 16.5. Stolz

Si $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle strictement croissante non majorée avec $\gamma_0 > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\gamma_{n+1}-\gamma_n}(u_{n+1}-u_n)\right) = \ell$ (avec ℓ éventuellement infini pour une suite réelle), on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\gamma_n}u_n\right) = \ell$.

Preuve. La suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante avec $\gamma_0 > 0$, les suites $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\gamma_{n+1}-\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs strictement positives. Si de plus la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, elle diverge alors vers $+\infty$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right) = \lim_{n\to+\infty}(\gamma_{n+1}-\gamma_0) = +\infty$$

En écrivant que :

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_k}{\gamma_{k+1}-\gamma_k}(u_{k+1}-u_k) = \frac{1}{\gamma_n-\gamma_0}(u_n-u_0)$$

on déduit du théorème de Cesàro que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\gamma_{n+1}-\gamma_n}(u_{n+1}-u_n)\right) = \ell$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\gamma_n-\gamma_0}(u_n-u_0) = \ell$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\gamma_n-\gamma_0}u_n = \ell$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma_n = +\infty$. Avec $\dfrac{1}{\gamma_n-\gamma_0}u_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} \dfrac{1}{\gamma_n}u_n$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\gamma_n}u_n\right) = \ell$. □

Corollaire 16.3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\ell$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}u_n=\ell$ (avec ℓ éventuellement infini pour une suite réelle).*

Preuve. Il suffit de prendre $\gamma_n=n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ dans le théorème de Stolz. □

Pour ce qui suit, on se donne une fonction continue $f:[0,1[\,\to[0,1[$ admettant au voisinage de 0 un développement asymptotique de la forme :

$$f(x)=x-ax^{\alpha+1}-bx^{2\alpha+1}+\underset{x\to0^+}{o}\left(x^{2\alpha+1}\right)$$

où a et α sont deux réels strictement positifs et b est un réel non nul.

L'intervalle $[0,1[$ étant stable par la fonction f, on peut définir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0\in[0,1[$ et $x_{n+1}=f(x_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Lemme 16.1 *Il existe un réel $\eta\in\,]0,1[$ tel que pour tout $x_0\in\,]0,\eta[$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.*

Preuve. La fonction f étant continue sur $[0,1[$, on a :

$$f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x\left(1-ax^\alpha+\underset{x\to0^+}{o}(x^\alpha)\right)=0$$

Avec $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-x}{x^{\alpha+1}}=-a<0$, on déduit qu'il existe un réel $\eta\in\,]0,1[$ tel que $0<f(x)<x\leq\eta$ pour tout $x\in\,]0,\eta]$. Le segment $[0,\eta]$ est donc stable par f (on a $f(0)=0$), ce qui implique que pour tout $x_0\in\,]0,\eta[$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,\eta[$ et strictement décroissante minorée par 0, donc convergente vers un point fixe de f sur $[0,\eta]$, soit vers 0 puisque c'est l'unique point fixe de f dans $[0,\eta]$. □

Lemme 16.2 *Pour tout $x_0\in\,]0,\eta[$, on a $x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{(\alpha a)^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$.*

Preuve. Pour tout réel non nul δ et tout $x\in\,]0,\eta[$, on a $f(x)>0$ et :

$$\begin{aligned}(f(x))^\delta-x^\delta&=x^\delta\left(\left(1-ax^\alpha+\underset{x\to0^+}{o}(x^\alpha)\right)^\delta-1\right)=x^\delta\left(-\delta ax^\alpha+\underset{x\to0^+}{o}(x^\alpha)\right)\\&=-x^{\delta+\alpha}\left(\delta a+\underset{x\to0^+}{o}(1)\right)\underset{x\to0^+}{\backsim}-\delta ax^{\delta+\alpha}\end{aligned}$$

Prenant $\delta=-\alpha$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{(f(x))^\alpha}-\frac{1}{x^\alpha}\right)=\alpha a$, ce qui implique compte tenu de la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 pour $x_0\in\,]0,\eta[$, que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^\alpha}-\frac{1}{x_n^\alpha}\right)=\alpha a$. Le théorème de Cesàro nous dit alors que :

$$\alpha a=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}^\alpha}-\frac{1}{x_k^\alpha}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_n^\alpha}-\frac{1}{x_0^\alpha}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{nx_n^\alpha}\right)$$

soit $x_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\alpha a}$, ou encore $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha a)^{\frac{1}{\alpha}}}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$. □

Du lemme précédent, on déduit que pour $\alpha \in \left]0,1\right[$, la série $\sum x_n$ est convergente et pour $\alpha \geq 1$, elle est divergente.

Théorème 16.6.

En notant $c = \dfrac{b}{a} + \dfrac{\alpha+1}{2}a$, *on* $\dfrac{1}{x_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{x_n^\alpha} - \alpha a \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{c}{n}$ *et le développement asymptotique :*

$$x_n = \frac{1}{(\alpha a)^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{c}{\alpha}\frac{1}{(\alpha a)^{1+\frac{1}{\alpha}}}\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)$$

Preuve. En utilisant le développement asymptotique :

$$f(x) = x\left(1 - ax^\alpha - bx^{2\alpha} + \underset{x\to 0^+}{o}\left(x^{2\alpha}\right)\right) = x\left(1-u(x)\right)$$

on obtient en posant $c = \dfrac{b}{a} + \dfrac{\alpha+1}{2}a$:

$$\frac{1}{(f(x))^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}\left(1-u(x)\right)^{-\alpha}$$

$$= \frac{1}{x^\alpha}\left(1 + \alpha x^\alpha\left(a+bx^\alpha\right) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}x^{2\alpha}\left(a+bx^\alpha\right)^2 + \underset{x\to 0^+}{o}\left(x^{2\alpha}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x^\alpha}\left(1 + \alpha a x^\alpha + \alpha a\left(\frac{b}{a} + \frac{\alpha+1}{2}a\right)x^{2\alpha} + \underset{x\to 0^+}{o}\left(x^{2\alpha}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x^\alpha} + \alpha a + \alpha a c x^\alpha + \underset{x\to 0^+}{o}\left(x^\alpha\right)$$

soit $\dfrac{1}{(f(x))^\alpha} - \dfrac{1}{x^\alpha} - \alpha a = \alpha a c x^\alpha + \underset{x\to 0^+}{o}\left(x^\alpha\right)$ et :

$$\frac{1}{x_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{x_n^\alpha} - \alpha a = \alpha a c x_n^\alpha\left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha a c x_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{c}{n}$$

La série $\sum \dfrac{1}{n}$ étant divergente, on a l'équivalence des sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{x_n^\alpha} - \alpha a\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} c\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} c\ln(n)$$

soit $\dfrac{1}{x_n^\alpha} - \dfrac{1}{x_1^\alpha} - (n-1)\alpha a \underset{n\to+\infty}{\sim} c\ln(n)$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{nx_n^\alpha} = \alpha a + \left(\frac{1}{x_1^\alpha} - \alpha a\right)\frac{1}{n} + c\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

$$= \alpha a + c\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = \alpha a\left(1 + \frac{c}{\alpha a}\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$$

ou encore :

$$nx_n^{\alpha} = \frac{1}{\alpha a}\left(1+\frac{c}{\alpha a}\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\alpha a}\left(1-\frac{c}{\alpha a}\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$$

soit :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{(\alpha a n)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(1-\frac{c}{\alpha a}\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \frac{1}{(\alpha a n)^{\frac{1}{\alpha}}}\left(1-\frac{c}{\alpha^2 a}\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha a n)^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{c}{\alpha}\frac{1}{(\alpha a)^{1+\frac{1}{\alpha}}}\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right) \end{aligned}$$

□

Exemples 16.1 *Pour* $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, *on a* $a = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $b = -\frac{1}{3}$, *et* $c = -\frac{1}{6}$ *ce qui nous donne pour* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $x_0 \in \mathbb{R}^{+,*}$ *et* $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$ *:*

$$x_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{3}\frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Pour $f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$, *on a* $a = \frac{1}{3!}$, $\alpha = 2$, $b = -\frac{1}{5!}$, *et* $c = \frac{1}{5}$ *ce qui nous donne pour* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $x_0 \in \mathbb{R}^{+,*}$ *et* $x_{n+1} = \sin(x_n)$ *:*

$$x_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

16.3 Moyennes d'Euler

À tout couple (a,b) de réels non nuls tels que $a+b \neq 0$, on associe l'opérateur d'Euler $T_{a,b}$ qui associe à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $T_{a,b}(u) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses *moyennes d'Euler* de paramètre (a,b) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{(a+b)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}u_k$$

En écrivant que $v_n = \frac{b^n}{(a+b)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{a}{b}\right)^k u_k = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}+1\right)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{a}{b}\right)^k u_k$, on constate que $T_{a,b} = T_{\lambda,1}$, où $\lambda = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$, ce qui nous ramène à l'étude de l'opérateur que nous noterons plus simplement T_λ qui associe à toute suite

$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $T_\lambda(u) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des moyennes d'Euler de paramètre $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{(\lambda+1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k u_k$$

Dans un premier temps, on se place dans le cadre des suites réelles en désignant par $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles.

Théorème 16.7. Une formule d'inversion

Pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, l'application T_λ réalise un automorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ d'inverse $T_{-(\lambda+1)}$, ce qui nous dit que pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a l'équivalence :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{(\lambda+1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k u_k\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (\lambda+1)^k v_k\right)$$

Preuve. Il est clair que l'application T_λ est un un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

En notant $\mu = \dfrac{1}{\lambda+1}$, $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V_{n+1} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, l'égalité $v = T_\lambda(u)$ se traduit par $V_{n+1} = P_{n+1} U_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où P_{n+1} est la matrice réelle d'ordre $n+1$ définie par :

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= \begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\mu\binom{1}{0} & \mu\binom{1}{1}\lambda & 0 & \cdots & 0 \\
\mu^2\binom{2}{0} & \mu^2\binom{2}{1}\lambda & \mu^2\binom{2}{2}\lambda^2 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\mu^n\binom{n}{0} & \mu^n\binom{n}{1}\lambda & \cdots & \mu^n\binom{n}{n-1}\lambda^{n-1} & \mu^n\binom{n}{n}\lambda^n
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \mu & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \mu^2 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \mu^n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1}\lambda & 0 & \cdots & 0 \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1}\lambda & \binom{2}{2}\lambda^2 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1}\lambda & \cdots & \binom{n}{n-1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{n}\lambda^n
\end{pmatrix} \\
&= D_{n+1}(\mu)\, Q_{n+1}(\lambda)
\end{aligned}$$

avec des notations évidentes.

Comme $\det(P_{n+1}) = \mu^{\frac{n(n+1)}{2}} \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \neq 0$, la matrice P_{n+1} est inversible et on a la formule d'inversion $U_{n+1} = P_{n+1}^{-1} V_{n+1}$ qui nous dit que

T_λ est un automorphisme (pour toute suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'égalité $T_\lambda(u) = v$ équivaut à $V_{n+1} = P_{n+1}U_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui nous donne pour unique solution la suite u définie par $U_{n+1} = P_{n+1}^{-1}V_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Il s'agit alors de calculer l'inverse de $Q_{n+1}(\lambda)$ pour tout réel non nul λ, l'inverse de $D_{n+1}\left(\dfrac{1}{\lambda+1}\right)$ étant $D_{n+1}(\lambda+1)$.

Les égalités $(\lambda X+1)^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^j X^j$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ pour k compris entre 0 et n nous disent que la transposée de $Q_{n+1}(\lambda)$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0 = \left(X^k\right)_{0\le k\le n}$ à la base $\mathcal{B}_1 = \left((\lambda X+1)^k\right)_{0\le k\le n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et on en déduit que l'inverse de ${}^tQ_{n+1}(\lambda)$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_0$ qui s'obtient avec les égalités $\lambda^k X^k = (\lambda X+1-1)^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(\lambda X+1)^j$ pour k compris entre 0 et n. On a donc :

$$
{}^tQ_{n+1}^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & -\frac{1}{\lambda}\binom{1}{0} & \frac{1}{\lambda^2}\binom{2}{0} & \cdots & (-1)^n\frac{1}{\lambda^n}\binom{n}{0} \\
0 & \frac{1}{\lambda}\binom{1}{1} & -\frac{1}{\lambda^2}\binom{2}{1} & \cdots & (-1)^{n-1}\frac{1}{\lambda^n}\binom{n}{1} \\
0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2}\binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\lambda^n}\binom{n}{n-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda^n}\binom{n}{n}
\end{pmatrix}
$$

soit :

$$
Q_{n+1}^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
-\binom{1}{0}\frac{1}{\lambda} & \binom{1}{1}\frac{1}{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\
\binom{2}{0}\frac{1}{\lambda^2} & -\binom{2}{1}\frac{1}{\lambda^2} & \binom{2}{2}\frac{1}{\lambda^2} & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
(-1)^n\binom{n}{0}\frac{1}{\lambda^n} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\frac{1}{\lambda^n} & \cdots & -\binom{n}{n-1}\frac{1}{\lambda^n} & \binom{n}{n}\frac{1}{\lambda^n}
\end{pmatrix}
$$

et :

$$
P_{n+1}^{-1} = Q_{n+1}^{-1}(\lambda)\,D_{n+1}^{-1}\left(\frac{1}{\lambda+1}\right) = Q_{n+1}^{-1}(\lambda)\,D_{n+1}(\lambda+1)
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
-\binom{1}{0}\frac{1}{\lambda} & \binom{1}{1}\frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\
\binom{2}{0}\frac{1}{\lambda^2} & -\binom{2}{1}\frac{\lambda+1}{\lambda^2} & \binom{2}{2}\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2} & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
(-1)^n\binom{n}{0}\frac{1}{\lambda^n} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\frac{\lambda+1}{\lambda^n} & \cdots & -\binom{n}{n-1}\frac{(\lambda+1)^{n-1}}{\lambda^n} & \binom{n}{n}\frac{(\lambda+1)^n}{\lambda^n}
\end{pmatrix}
$$

ce qui nous dit que $u_n = \dfrac{1}{\lambda^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(\lambda+1)^k v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit que $u = T_{-(\lambda+1)}(v)$. On a donc $T_\lambda^{-1} = T_{-(\lambda+1)}$. □

Cette formule d'inversion est en fait valable pour les suites d'éléments de E, ce qui peut se voir par la simple vérification dans E :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(\lambda+1)^k v_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^j u_j$$
$$=\sum_{0\leq j\leq k\leq n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}\lambda^j u_j=\sum_{0\leq j\leq k\leq n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{j!\,(k-j)!}\lambda^j u_j$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!}\left(\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!\,(k-j)!}\right)\lambda^j u_j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^i\binom{n-j}{i}\right)\lambda^j u_j$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1-1)^{n-j}\lambda^j u_j=\lambda^n u_n$$

Pour $\lambda=-\dfrac{1}{2}$, on a $-(\lambda+1)=\lambda$, soit $T_{-\frac{1}{2}}^{-1}=T_{-\frac{1}{2}}$, ce qui signifie que l'opérateur d'Euler $T_{-\frac{1}{2}}$ défini par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^{n-k}u_k$$

est involutif.

Théorème 16.8.

Pour tout réel strictement positif λ et toute suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses moyennes d'Euler de paramètre λ converge vers la même limite.

Preuve. En notant ℓ la limite dans E de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe pour tout réel $\varepsilon>0$, un entier $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que $\|u_n-\ell\|<\varepsilon$ pour tout $n\geq n_\varepsilon$, ce qui nous donne pour tout $n>n_\varepsilon$, compte tenu de l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k=(\lambda+1)^n$:

$$\begin{aligned}\|v_n-\ell\|&=\frac{1}{(\lambda+1)^n}\left\|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k(u_k-\ell)\right\|\\&\leq\frac{1}{(\lambda+1)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\binom{n}{k}\lambda^k\|u_k-\ell\|+\frac{\varepsilon}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\\&\leq\frac{1}{(\lambda+1)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\binom{n}{k}\lambda^k\|u_k-\ell\|+\varepsilon\end{aligned}$$

avec $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\leq n(n-1)\cdots(n-k+1)\leq n^k$. En notant $M=\displaystyle\sup_{0\leq k\leq n_\varepsilon}\|u_k-\ell\|$, on en déduit que pour tout $n>m_\varepsilon=\max\left(n_\varepsilon,\dfrac{2}{\lambda}\right)$ (de sorte que $n\lambda - 1 > 1$), on a :

$$\|v_n - \ell\| \leq \frac{M}{(\lambda+1)^n} \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} (n\lambda)^k = \frac{M}{(\lambda+1)^n} \frac{(n\lambda)^{n_\varepsilon+1} - 1}{n\lambda - 1} < \varepsilon_n = \frac{M}{(\lambda+1)^n} (n\lambda)^{n_\varepsilon+1}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \dfrac{1}{\lambda+1} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n_\varepsilon+1} = \dfrac{1}{\lambda+1} < 1$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$. □

Le théorème précédent est valable dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui converge vers $\pm\infty$ (exercice 16.9).

Pour $\lambda = 1$, ce théorème nous dit que :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k = \ell\right)$$

La convergence au sens d'Euler n'entraîne pas nécessairement la convergence au sens usuel. Par exemple si $\lambda = 1$ et $u_n = (-1)^n$, on a alors pour tout $n \geq 1$, $v_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Dans le cas des suites réelles monotones, la convergence est équivalente à la convergence au sens de d'Euler (exercice 16.10).

Théorème 16.9.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses moyennes d'Euler de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{+,*}$. Si la série $\sum u_n$ est convergente, il en est alors de même de la série $\sum v_n$ et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \frac{\lambda+1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Preuve. On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et par $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la transformée d'Euler correspondante.

On vérifie tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sigma_{n+1} - \sigma_n = \dfrac{\lambda}{\lambda+1} v_n$.

Pour $n = 0$, on a $\sigma_0 = S_0 = 0$, $v_0 = u_0$ et :

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \sigma_1 = \frac{\lambda}{\lambda+1} S_1 = \frac{\lambda}{\lambda+1} u_0 = \frac{\lambda}{\lambda+1} v_0$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sigma_n = \frac{1}{(\lambda+1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k S_k = \frac{1}{(\lambda+1)^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k S_k$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}-\sigma_n &= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\lambda^k S_k-(\lambda+1)\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k S_k\right)\\
&= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1}{k}-(\lambda+1)\binom{n}{k}\right)\lambda^k S_k+\lambda^{n+1}S_{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}\right)\lambda^k S_k-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1} S_k+\lambda^{n+1}S_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

avec $\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}$ pour k compris entre 1 et n (triangle de Pascal), donc :

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}-\sigma_n &= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\lambda^k S_k-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1} S_k+\lambda^{n+1}S_{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\lambda^{j+1} S_{j+1}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1} S_k+\lambda^{n+1}S_{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}\left(S_{k+1}-S_k\right)+\lambda^{n+1}\left(S_{n+1}-S_n\right)\right)\\
&= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}\left(S_{k+1}-S_k\right)\\
&= \frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{1}{(\lambda+1)^{n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k}u_k=\frac{\lambda}{\lambda+1}v_n
\end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k=\frac{\lambda+1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sigma_{k+1}-\sigma_k\right)=\frac{\lambda+1}{\lambda}\sigma_n$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$ d'après le théorème de Cesàro, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}v_k=\dfrac{\lambda+1}{\lambda}S$, soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}v_n=\dfrac{\lambda+1}{\lambda}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$. □

Corollaire 16.4. *Soient $R\in\mathbb{R}^{+,*}$ et $f : x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$, les a_n étant réels. Pour tout réel $x\in]0,R[$, on a :*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right)\frac{x^n}{(1+x)^{n+1}}$$

Preuve. En désignant, pour tout $x \in \left]0, R\right[$, par $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des moyennes d'Euler de paramètre $\frac{1}{x}$ de la suite $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n(x) = \frac{x^n}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = b_n\frac{x^n}{(1+x)^n}$$

en notant $b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$ et du théorème précédent, on déduit que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n = \frac{1}{1+x}\sum_{n=0}^{+\infty}v_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}b_n\frac{x^n}{(1+x)^{n+1}}$$

□

Exemples 16.2

1. *Pour tout* $x \in \left]0,1\right[$, *on a* $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ *où* $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ *et :*

$$\begin{aligned}b_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1 t^k dt\\ &= \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t)^k\right)dt = \int_0^1(1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

ce qui nous donne $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}$. *La série de fonctions du second membre étant uniformément convergente sur* $[0,1]$, *ce résultat est aussi valable pour* $x = 1$ *par continuité, ce qui nous donne* $\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ *avec une convergence plus rapide que celle de la classique série* $\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. *L'égalité précédente s'écrit aussi :*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^{n+1} = -\ln\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

2. Pour tout $x \in \left]0,1\right[$, *on a* $\dfrac{\arctan(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} = xf(x^2)$ *en notant* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *avec* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ *et :*

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-t^2)^k \right) dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t) \, dt = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \end{aligned}$$

(voir le théorème **??** *sur les intégrales de Wallis), ce qui nous donne :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \frac{x^n}{(1+x)^{n+1}}$$

et :

$$\arctan(x) = xf(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}}$$

La série de fonctions du second membre étant uniformément convergente sur $[0,1]$, *ce résultat est aussi valable pour* $x = 1$ *par continuité, ce qui nous donne* $\dfrac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^{n-1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$, *ou encore* $\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n!}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$.

16.4 Moyennes de Toeplitz

On se donne une suite double $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq n}$ de réels telle que :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,k} = 0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1$;
- il existe un réel $C > 0$ tel que $\sum_{k=0}^{n} |a_{n,k}| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas où les $a_{n,k}$ sont tous positifs, la troisième condition est inutile car conséquence de la deuxième.

On associe à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses *moyennes de Toepliz* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} u_k$$

Théorème 16.10. Toeplitz

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers la la même limite.

Preuve. Notons ℓ la limite dans E de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En exploitant le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n,k}=1$, il existe pour tout réel $\varepsilon>0$, un entier $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que $\left|\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n,k}-1\right|<\varepsilon$ et $\|u_n-\ell\|<\varepsilon$ pour tout $n\geq n_\varepsilon$, ce qui nous donne pour tout $n>n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\|v_n-\ell\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\left(u_k-\ell\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}-1\right)\ell\right\|\\ &\leq \sum_{k=0}^{n_\varepsilon}|a_{n,k}|\,\|u_k-\ell\|+\varepsilon\left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n}|a_{n,k}|+\|\ell\|\right)\\ &\leq \sum_{k=0}^{n_\varepsilon}|a_{n,k}|\,\|u_k-\ell\|+\varepsilon\left(C+\|\ell\|\right)\leq M\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}|a_{n,k}|+\varepsilon\left(C+\|\ell\|\right)\end{aligned}$$

en notant $M=\sup\limits_{0\leq k\leq n_\varepsilon}\|u_k-\ell\|$. Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n,k}=0$ pour tout entier k compris entre 0 et n_ε, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n_\varepsilon}|a_{n,k}|=0$ et il existe un entier $m_\varepsilon>n_\varepsilon$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n_\varepsilon}|a_{n,k}|<\varepsilon$ pour tout $n\geq m_\varepsilon$, ce qui donne au final $\|v_n-\ell\|\leq\left(M+C+\|\ell\|\right)\varepsilon$ pour tout $n\geq m_\varepsilon$. On a donc ainsi prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell$. □

Dans le cas où la suite $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq n}$ est à valeurs strictement positives, le résultat précédent est valable pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$], ce qui est faux sans hypothèse de positivité des $a_{n,k}$ (exercice 16.11).

Le théorème de Cesàro et le théorème 16.8 peuvent se déduire du théorème précédent (exercice 16.12).

Le théorème de Toeplitz peut se généraliser comme suit.

On se donne une suite double de réels $(b_{n,k})_{n\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq n}$ telle que :

- pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}b_{n,k}=b_k$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}b_{n,k}=B$;
- il existe un réel $D>0$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n}|b_{n,k}|\leq D$ pour tout $n\in\mathbb{N}$;

et on associe à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} u_k$$

Lemme 16.3 *Avec les hypothèses précédentes, la série* $\sum b_k$ *est absolument convergente.*

Preuve. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \geq m$, on a :

$$\sum_{k=0}^{m} |b_{n,k}| \leq \sum_{k=0}^{n} |b_{n,k}| \leq D$$

ce qui nous donne en faisant tendre n vers l'infini, $\sum_{k=0}^{m} |b_k| \leq D$ et cela implique que la série $\sum b_n$ est absolument convergente. □

On note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

Théorème 16.11.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E vers ℓ, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} u_k = (B - S)\,\ell + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n$$

Preuve. Si $S \neq B$, en posant $a_{n,k} = \dfrac{b_{n,k} - b_k}{B - S}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et k entiers compris entre 0 et n, on a $\lim_{n\to+\infty} a_{n,k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \frac{1}{B - S} \left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k \right) = 1$$

avec la domination $\sum_{k=0}^{n} |a_{n,k}| \leq \dfrac{1}{|B - S|} \left(\sum_{k=0}^{n} |b_{n,k}| + \sum_{k=0}^{n} |b_k| \right) \leq \dfrac{2D}{|B - S|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de Toeplitz nous dit alors que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} u_k = \ell$. De plus, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle est bornée et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|b_n u_n\| \leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| \right) |b_n|$ avec $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| < +\infty$, ce qui implique que la série $\sum b_n u_n$ est normalement convergente dans E, donc convergente. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} u_k = (B - S)\,\ell + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n$$

Dans le cas où $S = B$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left\| w_n - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k u_k \right\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} (b_{n,k} - b_k)\, u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k u_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=0}^{n} (b_{n,k} - b_k)\,(u_k - \ell) + \sum_{k=0}^{n} (b_{n,k} - b_k)\,\ell - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k u_k \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} |b_{n,k} - b_k|\, \|u_k - \ell\| + \left| \sum_{k=0}^{n} (b_{n,k} - b_k) \right| \|\ell\| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |b_k|\, \|u_k\|\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |b_k|\, \|u_k\| = 0$ puisque $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |b_n|\, \|u_n\| < +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (b_{n,k} - b_k) = B - S = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\| = 0$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} |b_k|\, \|u_k\| < \varepsilon$ et $\left| \sum\limits_{k=0}^{n} (b_{n,k} - b_k) \right| < \varepsilon$ pour tout entier $n > n_\varepsilon$, ce qui nous donne en notant $M = \sup\limits_{0\leq k\leq n_\varepsilon} \|u_k - \ell\|$:

$$\left\| v_n - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k u_k \right\| \leq M \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |b_{n,k} - b_k| + \varepsilon \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |b_{n,k} - b_k| + 2\varepsilon$$

avec $\sum\limits_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |b_{n,k} - b_k| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} |b_{n,k}| + \sum\limits_{k=0}^{n} |b_k| \leq 2D$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n_\varepsilon} |b_{n,k} - b_k| = 0$, donc il existe un entier $m_\varepsilon > n_\varepsilon$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n_\varepsilon} |b_{n,k} - b_k| < \varepsilon$ pour tout $n \geq m_\varepsilon$, ce qui nous donne $\left\| v_n - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k u_k \right\| \leq (M + 2D + 2)\,\varepsilon$ pour tout $n \geq m_\varepsilon$. On a donc ainsi prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n u_n$.

On a donc, dans tous les cas $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} b_{n,k} u_k = (B - S)\,\ell + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n u_n$. □

16.5 Exercices

Exercice 16.1. *Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle divergente* *vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$], on a alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sum\limits_{0\leq k\leq n-1} \alpha_k} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k = +\infty$ *[resp.* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sum\limits_{0\leq k\leq n-1} \alpha_k} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k = -\infty$*].*

Solution. Quitte à remplacer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = +\infty$. On a alors :

$$\forall M > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \mid \forall n \geq n_\varepsilon,\ u_n > M$$

ce qui nous donne pour tout entier $n \geq n_\varepsilon + 1$, en notant $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k$:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k = \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n_\varepsilon-1} \alpha_k u_k + \frac{1}{A_n} \sum_{k=n_\varepsilon}^{n-1} \alpha_k u_k \\ &> \frac{C_\varepsilon}{A_n} + \frac{A_n - A_{n_\varepsilon}}{A_n} M = M + \frac{C_\varepsilon - A_{n_\varepsilon} M}{A_n} \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{C_\varepsilon - A_{n_\varepsilon} M}{A_n} \right) = 0$ et on peut alors trouver un entier $m_\varepsilon \geq n_\varepsilon + 1$ tel que $\dfrac{C_\varepsilon - A_{n_\varepsilon} M}{A_n} > -\dfrac{M}{2}$ pour tout $n \geq m_\varepsilon$, ce qui nous donne $v_n > \dfrac{M}{2}$ pour tout $n \geq m_\varepsilon$, et le résultat annoncé.

Exercice 16.2.

1. *Soient $\theta \in \left]0, 2\pi\right[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite complexe définie par $u_n = e^{in\theta}$. Étudier la convergence au sens usuel et au sens de Cesàro de cette suite.*
2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence au sens usuel et au sens de Cesàro de cette suite.*

Solution.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_{n+1} - u_n| = \left|e^{i\theta} - 1\right| = \left|e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right| = \frac{1}{n}\left|\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| = \frac{1}{n}\left|e^{i\frac{n-1}{2}\theta}\frac{\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right| \leq \frac{1}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

(pour $\theta \in \left]0, 2\pi\right[$ on a $e^{i\theta} \neq 1$ et $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$) ce qui implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers 0.

2. Une suite périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ converge si, et seulement si, elle est constante, ce qui revient à dire que $p = 1$ (exercice 1.7). On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des moyennes de Cesàro de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on se donne un entier $n = pq + r$, où $q \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{0, \cdots, p-1\}$. Pour $r = 0$, on a :

$$\begin{aligned} v_{pq} &= \frac{1}{pq}\left(\sum_{k=0}^{p-1} u_k + \sum_{k=p}^{2p-1} u_k + \cdots + \sum_{k=(q-1)p}^{qp-1} u_k\right) \\ &= \frac{1}{pq}\left(\sum_{k=0}^{p-1} u_k + \sum_{k=0}^{p-1} u_{k+p} + \cdots + \sum_{k=0}^{p-1} u_{k+(q-1)p}\right) = \frac{1}{pq} q \sum_{k=0}^{p-1} u_k = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_k = \ell \end{aligned}$$

et pour $r \in \{1, \cdots, p-1\}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{pq+r} &= \frac{1}{pq+r}\left(\sum_{k=0}^{qp-1} u_k + \sum_{k=qp}^{qp+r-1} u_k\right) = \frac{pq}{pq+r} v_{qp} + \frac{1}{pq+r}\sum_{k=0}^{r-1} u_{qp+k} \\ &= \frac{pq}{pq+r}\ell + \frac{1}{pq+r}\sum_{k=0}^{r-1} u_k \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\|v_{pq+r} - \ell\| = \left\| \frac{1}{pq+r}\sum_{k=0}^{r-1} u_k - \frac{r}{pq+r}\ell \right\| \leq \frac{1}{pq+r}\sum_{k=0}^{r-1} \|u_k\| + \frac{p-1}{pq+r}\|\ell\|$$

soit $\|v_{pq+r} - \ell\| \leq \frac{a}{pq+r}$, où $a = \sum_{k=0}^{p-1} \|u_k\| + (p-1)\|\ell\|$, cette dernière inégalité étant aussi valable pour $r = 0$. On a donc au final $\|v_n - \ell\| \leq \frac{a}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_k$, soit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers ℓ.

Exercice 16.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell_1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell_2$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers $\frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)$.*

Solution. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{2n} = u_{2n} - \ell_1$ et $x_{2n+1} = u_{2n+1} - \ell_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est telle que $\lim_{n\to+\infty} x_{2n} = \lim_{n\to+\infty} x_{2n+1} = 0$, donc cette suite converge au sens usuel et au sens de Cesàro vers 0. Ses moyennes de Cesàro y_n sont données, en notant v_n celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par :

$$\begin{aligned} y_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k = \frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{n-1}(u_{2j}-\ell_1) + \frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{n-1}(u_{2j+1}-\ell_2) \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} u_k - \frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2) = v_{2n} - \frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} y_{2n-1} &= \frac{1}{2n-1}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k = \frac{1}{2n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(u_{2j}-\ell_1) + \frac{1}{2n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(u_{2j+1}-\ell_2) \\ &= \frac{1}{2n-1}\sum_{k=0}^{2n-1} u_k - \frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2) = v_{2n-1} - \frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2) \end{aligned}$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(y_n + \frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2)\right) = \frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2)$.

Exercice 16.4. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle monotone et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de ses moyennes de Cesàro définie par $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone de même sens de variation que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty+\infty\}$ si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.*

Solution. Remplaçant éventuellement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que cette suite est croissante.

1. On a $v_{n+1} = \frac{n}{n+1}v_n + \frac{u_n}{n+1} = v_n + \frac{1}{n+1}(u_n - v_n)$, soit :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1}(u_n - v_n) = \frac{1}{n+1}\left(u_n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(nu_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) = \frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(u_n - u_k)\right) \geq 0 \end{aligned}$$

   ce qui signifie que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. La condition nécessaire est le théorème de Cesàro. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante elle a une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a la même limite (théorème de Cesàro) et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ entraîne $\ell = \ell'$.

Exercice 16.5. *Soient $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{n+1}^{\alpha+1} - u_n^{\alpha+1}\right) = \alpha + 1$, puis donner un équivalent de u_n à l'infini.*

Solution. On vérifie facilement par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs strictement positives. Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^\alpha} > u_n$, ce qui signifie que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Si elle était bornée, elle serait alors convergente de limite ℓ vérifiant $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell^\alpha} > \ell$, ce qui est impossible. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ce qui nous permet d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{\alpha+1} &= u_n^{\alpha+1}\left(1 + \frac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)^{\alpha+1} = u_n^{\alpha+1}\left(1 + \frac{\alpha+1}{u_n^{\alpha+1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)\right) \\ &= u_n^{\alpha+1} + \alpha + 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \end{aligned}$$

et cela implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{n+1}^{\alpha+1} - u_n^{\alpha+1}\right) = \alpha + 1$. En utilisant le corollaire 16.3 du théorème de Stolz, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^{\alpha+1}}{n} = \alpha + 1$, ce qui signifie que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} ((\alpha+1)\,n)^{\frac{1}{\alpha+1}}$.

Exercice 16.6. *Pour tout réel $\alpha > -1$ et tout entier $n \geq 1$, on note $S_\alpha(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$. Montrer que $S_\alpha(n) \underset{n\to+\infty}{\backsim} \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.*

Solution. Pour tout réel α, la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $u_{n+1} - u_n = (n+1)^\alpha = n^\alpha \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $\alpha > -1$, la suite réelle $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(n^{\alpha+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante non majorée telle que :

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n = (n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} &= n^{\alpha+1}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right) \\ &= n^{\alpha+1}\left(\frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^\alpha\left(\alpha + 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\gamma_{n+1} - \gamma_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha}{\alpha + 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{\alpha+1}$$

et le théorème de Stolz dit qu'on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\gamma_n} u_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{S_\alpha(n)}{n^{\alpha+1}}\right) = \dfrac{1}{\alpha+1}$, soit $S_\alpha(n) \underset{n\to+\infty}{\backsim} \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Pour α entier naturel, on peut procéder par récurrence sur $\alpha \geq 1$ sans utiliser le théorème de Stolz. Pour $\alpha = 0$, on a $S_0(n) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$ et pour $\alpha = 1$, on a $S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2} \underset{n \to +\infty}{\backsim} \dfrac{n^2}{2}$. Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $\alpha - 1 \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
S_{\alpha+1}(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\alpha+1} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{j} k^j = \sum_{j=0}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{j} \sum_{k=0}^{n} k^j \\
&= \sum_{j=0}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{j} S_j(n) = S_{\alpha+1}(n) + (\alpha+1) S_\alpha(n) + \sum_{j=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha+1}{j} S_j(n)
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
(\alpha+1) S_\alpha(n) &= S_{\alpha+1}(n+1) - S_{\alpha+1}(n) - \sum_{j=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha+1}{j} S_j(n) \\
&= (n+1)^{\alpha+1} - \sum_{j=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha+1}{j} S_j(n)
\end{aligned}$$

avec $S_j(n) \underset{n \to +\infty}{\backsim} \dfrac{n^{j+1}}{j+1}$ pour tout j compris entre 0 et $\alpha - 1$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha+1}{j} S_j(n) = \sum_{j=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha+1}{j} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\alpha-j}} \frac{S_j(n)}{n^{j+1}} = 0$$

et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{(\alpha+1) S_\alpha(n)}{n^{\alpha+1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} = 1$, soit $S_\alpha(n) \underset{n \to +\infty}{\backsim} \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Exercice 16.7. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E. Montrer que si $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} u_k = \ell$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge au sens de Cesàro vers 0.*

Solution. En notant $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} u_k$ pour $n \geq 1$, on a $w_1 = u_1$, $w_n - w_{n-1} = \frac{1}{n} u_n$ pour tout entier $n \geq 2$ et :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k &= \frac{1}{n} \left(w_1 + \sum_{k=2}^{n} k (w_k - w_{k-1}) \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} k w_k - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) w_k \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(n w_n - \sum_{k=1}^{n-1} w_k \right) = w_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} w_k + \frac{1}{n} w_n \underset{n \to +\infty}{\to} \ell - \ell + 0 = 0
\end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Cesàro à la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 16.8. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'. Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$.*

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en notant $w_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}$:

$$\begin{aligned}
|w_n - \ell\ell'| &= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}(u_kv_{n-k} - \ell\ell')\right| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k(v_{n-k}-\ell') + \ell'(u_k-\ell))\right| \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k|\,|v_{n-k}-\ell'| + \frac{|\ell'|}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k-\ell| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|\,\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|v_k-\ell'| + |\ell'|\,\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k-\ell|
\end{aligned}$$

(la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée puisque convergente). On conclut alors avec le théorème de Cesàro.

Exercice 16.9. *Soit λ un réel strictement positif. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle divergente vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$], on a alors en notant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{(1+\lambda)^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses moyennes d'Euler de paramètre λ, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ [resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$].*

Solution. Quitte à remplacer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$. On a alors dans ce cas :

$$\forall M > 1,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_\varepsilon,\ u_n > M$$

donc pour tout $n > n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\binom{n}{k}\lambda^k u_k + \frac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k u_k \\
&> \frac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\binom{n}{k}\lambda^k u_k + \frac{M}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k \\
&> \frac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\binom{n}{k}\lambda^k u_k + M\left(1 - \frac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\binom{n}{k}\lambda^k\right) \\
&> M + \frac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\binom{n}{k}\lambda^k(u_k - 1) = M + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

avec $0 < |\varepsilon_n| \leq \dfrac{M'}{(1+\lambda)^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} (n\lambda)^k \leq \dfrac{M'}{(1+\lambda)^n} (n\lambda)^{n_\varepsilon+1}$ pour tout entier naturel $n > m_\varepsilon = \max\left(n_\varepsilon, \dfrac{2}{\lambda}\right)$ en notant $M' = \displaystyle\sup_{0\leq k\leq n_\varepsilon} |u_k - 1|$, ce qui implique que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

> ***Exercice 16.10.*** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle monotone et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses moyennes d'Euler de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{+,*}$.*
>
> 1. *Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone de même sens de variation que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
> 2. *Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty+\infty\}$ si, et seulement si, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.*

Solution. Remplaçant éventuellement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que cette suite est croissante.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$
\begin{aligned}
(\lambda+1)^{n+1}(v_{n+1}-v_n) &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\lambda^k u_k - (\lambda+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k u_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}\right)\lambda^k u_k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}u_k + \lambda^{n+1}u_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\lambda^k u_k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}u_k + \lambda^{n+1}u_{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\lambda^{j+1}u_{j+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}u_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}(u_{k+1}-u_k) \geq 0
\end{aligned}
$$

   ce qui signifie que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. La condition nécessaire est le théorème 16.8. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante elle a une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a la même limite (théorème théorème 16.8 et exercice 16.9) et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ entraîne $\ell = \ell'$.

> ***Exercice 16.11.*** *Dans le cas où $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq n}$ est une suite à valeurs réelles strictement positives, montrer que le théorème 16.10 est valable pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$]. Qu'en-est-il sans hypothèse de positivité des $a_{n,k}$?*

Solution.

1. Supposons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (en remplaçant u_n par $-u_n$, on peut se ramener à ce cas). En exploitant l'hypothèse $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1$, il existe pour tout réel

$M > 0$ un entier $n_0 \geq 1$ tel que $\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} > \frac{1}{2}$ et $u_n > M$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui nous donne pour tout $n \geq n_0 + 1$, compte tenu de la positivité des $a_{n,k}$:

$$\begin{aligned} v_n &\geq \sum_{k=0}^{n_0} a_{n,k} u_k + M \sum_{k=n_0+1}^{n} a_{n,k} \geq \sum_{k=0}^{n_0} a_{n,k} u_k + M \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{n_0} a_{n,k} \right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{n_0} a_{n,k} (u_k - M) + \frac{M}{2} \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n,k} = 0$ pour tout $k \in \{0, \cdots, n_0\}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n_0} a_{n,k} (u_k - M) = 0$ et il existe $n_1 > n_0$ tel que $\sum_{k=0}^{n_0} a_{n,k} (u_k - M) > -\frac{M}{4}$ pour tout $n \geq n_1$, ce qui nous donne $v_n \geq -\frac{M}{4} + \frac{M}{2} = \frac{M}{4}$. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

2. Pour $a_{n,k} = \frac{(-1)^k}{n}$ où $0 \leq k \leq n$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_{n,k}| = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ pour tout entier k compris entre 1 et n, $\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \in \left\{ 0, -\frac{1}{n} \right\}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1$ et $\sum_{k=0}^{n} |a_{n,k}| = \frac{n+1}{n} \leq 2$. Les hypothèses du théorème de Toeplitz sont donc satisfaites. Prenant $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et :

$$v_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} (2j - (2j - 1)) = \frac{1}{2}$$

donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne diverge pas vers l'infini.

> ***Exercice 16.12.*** *Retrouver le théorème de Cesàro et le théorème 16.8 en utilisant celui de Toeplitz.*

Solution.

1. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$. En notant $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_{n,k} = \frac{\alpha_k}{A_{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier k compris entre 0 et n, on a $\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \frac{1}{A_{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n,k} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\alpha_k}{A_{n+1}} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} A_{n+1} = +\infty$.

Les hypothèses du théorème de Toeplitz sont donc vérifiées et il en résulte alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{A_n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}u_k = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

2. Soit λ un réel strictement positif. En notant $a_{n,k} = \dbinom{n}{k}\dfrac{\lambda^k}{(\lambda+1)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier k compris entre 0 et n, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} = \dfrac{1}{(\lambda+1)^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}\lambda^k = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,k} = \dfrac{\lambda^k}{k!}\lim\limits_{n\to+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\left(\dfrac{1}{\lambda+1}\right)^n = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puisque :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,x^{n-k} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, donc en particulier pour $x = \dfrac{1}{\lambda+1}$. Les hypothèses du théorème de Toeplitz sont donc vérifiées et on alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{(\lambda+1)^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}\lambda^k u_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

Exercice 16.13. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergente vers $\ell \in E$.*

1. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n} k u_k = \dfrac{1}{2}\ell$.*
2. *Montrer que, pour tout réel $\alpha > -1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\sum\limits_{k=0}^{n} k^\alpha u_k = \dfrac{1}{\alpha+1}\ell$.*
3. *Que peut-on dire pour $\alpha = -1$?*

Solution.

1. Prenant $a_{n,k} = \dfrac{2k}{n^2}$ pour $0 \le k \le n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et :

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

donc le théorème de Toeplitz nous dit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}u_k = \ell$, ou encore que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n} k u_k = \dfrac{1}{2}\ell$.

2. Prenant $a_{n,k} = \dfrac{(\alpha+1)\,k^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}$ pour $0 \leq k \leq n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et, en notant $S_{\alpha}(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}} S_{\alpha}(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

(exercice 16.6), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} u_k = \ell$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}} \sum\limits_{k=0}^{n} k^{\alpha} u_k = \dfrac{1}{p+1}\ell$. Pour $\alpha = 0$, on retrouve le théorème de Cesàro, pour $\alpha = 1$, on retrouve $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k u_k = \dfrac{1}{2}\ell$ et pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k} u_k = 2\ell$.

3. Pour $\alpha = -1$, en notant $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, le théorème de Cesàro nous dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{H_n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} u_k = \ell$ et sachant que $H_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} \ln(n)$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} u_k = \ell$.

Chapitre 17

Intégrales de Wallis et formule de Stirling

17.1 Définition et calcul des intégrales de Wallis

Nous commençons par une présentation classique des intégrales de Wallis. Ces intégrales nous seront utiles pour la démonstration d'une formule de Stirling. Dans le chapitre suivant, en relation avec les fonctions eulériennes gamma et bêta, nous généraliserons ces intégrales.

On note $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des intégrales de Wallis (trigonométriques) et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^n(t)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des intégrales de Wallis hyperboliques.

On a $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt = 1$.

Lemme 17.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt = 2\int_0^1 \frac{\left(1-x^2\right)^n}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}dx = F_{n+1}$$

Preuve. Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - \theta$ donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\,d\theta$$

Le changement de variable $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donne $dx = \frac{1+x^2}{2}dt$, $\cos(t) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $W_n = 2\int_0^1 \frac{\left(1-x^2\right)^n}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}dx$, puis le changement de variable $x = \operatorname{th}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ donne $dx = \frac{1-x^2}{2}d\theta$, $\operatorname{ch}(\theta) = 2\operatorname{ch}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

et :

$$W_n = \int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{n+1} \frac{2dx}{1-x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d\theta}{\operatorname{ch}^{n+1}(\theta)} = F_{n+1}$$

$\square$

Exemple 17.1 *On a* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t)} = \frac{\pi}{2}$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^2(t)} = 1$.

Le résultat qui suit nous dit qu'il nous suffit de calculer les intégrales de Wallis W_n pour n pair ou pour n impair.

Lemme 17.2 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$ *et* $(n+1) W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

Preuve. Une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\left(1-\sin^2(t)\right) dt = W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n(t)\sin(t))\sin(t)\, dt \\ &= W_n - \left[-\sin(t)\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\, dt = W_n - \frac{W_{n+2}}{n+1} \end{aligned}$$

soit $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$. En notant $u_n = (n+1) W_n W_{n+1}$, on a :

$$u_{n+1} = (n+2) W_{n+1} W_{n+2} = (n+2) W_{n+1} \frac{n+1}{n+2} W_n = u_n$$

donc $u_n = u_0 = W_0 W_1 = \dfrac{\pi}{2}$, soit $W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1}{(n+1) W_n}$. $\square$

Théorème 17.1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a* $W_{2n} = \dfrac{\pi}{2^{2n+1}} \dbinom{2n}{n}$ *et* $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

Preuve. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\cos(t))^n = \frac{\left(e^{it}+e^{-it}\right)^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{ikt} e^{-i(n-k)t} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{i(2k-n)t}$$

donc $(\cos(t))^n = \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{i(2k-n)t}\right) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((2k-n)t)$, ce qui nous donne :

$$W_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\, dt = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2(k-n))t)\, dt = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$$

et $W_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{(2n+1) W_{2n}} = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$. $\square$

En prime, on a les intégrales de Wallis hyperboliques pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}^{2n+1}(t)} = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}^{2n+2}(t)} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Le calcul de W_{2n} et W_{2n+1} peut aussi se faire, de façon plus classique, par récurrence sur $n \geq 0$ en exploitant la relation $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$. Cette méthode est moins élégante car elle suppose connues les expressions de W_{2n} et W_{2n+1}, ce qui est possible par intuition.

Pour $n = 0$, on a $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$. Supposant les formules obtenues au rang $n - 1 \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2n} \frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \\ &= \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!} = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2^{2n-2}}{(2n-1)\binom{2n-2}{n-1}} \\ &= \frac{2^{2n-1} n!\,(n-1)!}{(2n+1)(2n-1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \end{aligned}$$

Corollaire 17.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

Preuve. Le changement de variable $x = \sin(t)$, nous donne :

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2(t)\right)^n \cos(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} \end{aligned}$$

et l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$. □

Corollaire 17.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a* $\displaystyle\int_0^{\pi} (1 + \cos(t))^n\, dt = \frac{\pi}{2^n} \binom{2n}{n}$ *et* $\displaystyle\binom{2n}{n} \geq \frac{\pi}{n+1} 2^{2n+1}$.

Preuve. On a :

$$\int_0^{\pi} (1+\cos(t))^n \, dt = 2^n \int_0^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\, dx$$
$$= 2^{n+1} W_{2n} = \frac{\pi}{2^n} \binom{2n}{n}$$

avec :

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n dt \geq \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n \sin(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^n dx = \frac{2}{n+1}$$

ce qui nous donne $\dbinom{2n}{n} \geq \dfrac{2^{2n+1}}{\pi(n+1)}$. □

Lemme 17.3 *La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant strictement vers* 0.

Preuve. Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $0 < \cos(t) < 1$, donc $0 < \cos^{n+1}(t) < \cos^n(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par intégration de fonctions continues, on en déduit que l'on a $0 < W_{n+1} < W_n$. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante minorée par 0 et en conséquence, convergente vers un réel $\lambda \geq 0$. De la relation $W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$, on déduit en passant à la limite quand n tend vers l'infini que $\lambda^2 = 0$, soit que $\lambda = 0$. □

La convergence vers 0 de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut aussi se prouver en utilisant le théorème de convergence dominée. En effet, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $0 < \cos(t) < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n(t) = 0$. On peut aussi se passer du théorème de convergence dominée en disant que pour tout réel $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq W_n = \int_0^{\varepsilon} \cos^n(t)\, dt + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt \leq \int_0^{\varepsilon} dt + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\varepsilon)\, dt \leq \varepsilon + \frac{\pi}{2}\cos^n(\varepsilon)$$

(sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \cos(t) \leq 1$ et cos est décroissante) avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n(\varepsilon) = 0$ (puisque $0 < \cos(\varepsilon) < 1$ pour $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$), il existe donc un entier naturel n_ε tel que $\frac{\pi}{2}\cos^n(\varepsilon) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui nous donne $0 \leq W_n < 2\varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$.

De manière un peu plus précise, on a le résultat suivant.

Théorème 17.2.

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Preuve. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, on a :

$$1 \leq \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n+1)(W_{2n})^2} \leq \frac{W_{2n+2}}{W_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n+1)(W_{2n})^2} = 1$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1}W_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, ou encore $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2n}}$. Puis de l'égalité $W_{2n+1} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n+1)W_{2n}}$, on déduit que $W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. □

L'équivalent $W_{2n} = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2n}}$ se traduit par la formule de Wallis, $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

Le théorème précédent peut être utilisé pour calculer l'intégrale de Gauss déjà calculée par une autre méthode au paragraphe 9.4.3.

Corollaire 17.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $W_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.*

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(\theta)$, nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2(\theta)\right)^n \cos(\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta)\,d\theta \\ &= W_{2n+1}\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\int_0^{+\infty} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathbf{1}_{]0,\sqrt{n}[}(t)\,dt = \sqrt{n}W_{2n+1}$$

chaque fonction $f_n : t \mapsto \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathbf{1}_{]0,\sqrt{n}[}(t)$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe un entier $n_t \in \mathbb{N}^*$ tel que $t \in [0,\sqrt{n}[$ pour tout $n \geq n_t$, donc on a $f_n(t) = \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n > 0$ et $\ln(f_n(t)) = n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -t^2$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t^2}$. De plus avec l'inégalité $\ln(1-x) \leq -x$ pour tout $x \in [0,1[$, on déduit que $\ln(f_n(t)) \leq -t^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $t \in [0,\sqrt{n}[$, ce qui nous donne $f_n(t) \leq e^{-t^2}$, cette inégalité étant encore valable pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n} \leq t$ puisque $f_n(t) = 0$ dans ce cas. On a donc $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque $e^{-t^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\frac{1}{1+t^2}$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}W_{2n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

puisque $\sqrt{n}W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

Sachant que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum W_n x^n$ est égal à 1. Comme la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, le théorème des séries alternées nous dit que la série numérique $\sum (-1)^n W_n$ est convergente. La série $\sum W_n$ est divergente comme $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Pour fixé dans $x \in]-1,1[$ et tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $|\cos^n(t)\, x^n| \leq |x|^n$ avec $\sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n < +\infty$, ce qui nous assure de la convergence normale de la série de fonctions $\sum \cos^n(t)\, x^n$ et nous permet d'écrire que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (\cos(t)\, x)^n\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos(t)}$$

Le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donne $du = \frac{1+u^2}{2}dt$, $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^1 \frac{2du}{(1+u^2)\left(1 - x\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} = 2\int_0^1 \frac{du}{1 - x + u^2(1+x)} \\
&= \frac{2}{1-x}\int_0^1 \frac{du}{1 + \left(u\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2} = \frac{2}{1-x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\int_0^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \frac{dv}{1+v^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)
\end{aligned}$$

La série entière $\sum W_n x^n$ étant convergente pour $x = -1$, le théorème d'Abel nous dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n W_n = \lim_{x\to -1^+} f(x)$ avec $f(x) \underset{x\to-1^+}{\sim} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{1-x}$, ce qui nous donne $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n W_n = 1$.

17.2 Intégrales de Wallis et volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$

L'espace $\mathbb{R}^n$, pour $n \geq 2$, étant muni de sa structure euclidienne usuelle, on désigne pour tout réel $R \in \mathbb{R}^{+,*}$ par $V_n(R)$ le volume de la boule $B_n(0,R)$ de centre 0 et de rayon R.

Le changement de variable $x = Ry$ nous donne :

$$V_n(R) = \int_{B_n(0,R)} dx = \int_{B_n(0,1)} R^n dy = R^n V_n(1)$$

On note $V_0 = 1$, $V_1 = 2$ (longueur du segment $[-1, 1]$) et $V_n = V_n(1)$ pour $n \geq 2$. Il est connu que $V_2 = \pi$ est l'aire du disque unité dans le plan.

Théorème 17.3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+2} = \dfrac{2\pi}{n+2} V_n$, ce qui implique que $V_{2n} = \dfrac{\pi^n}{n!}$ et $V_{2n+1} = \dfrac{2^{2n+1} n!}{(2n+1)!} \pi^n$.

Preuve. Pour $n = 0$, on a $V_2 = \pi = \dfrac{2\pi}{2} V_0$.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^{n+2}$, on a en notant $B_n = B_n(0, 1)$:

$$\begin{aligned}(x \in B_{n+2}) &\Leftrightarrow \left(x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \text{ et } \sum_{k=3}^{n+2} x_k^2 \leq 1 - \left(x_1^2 + x_2^2\right) \right) \\ &\Leftrightarrow \left((x_1, x_2) \in B_2 \text{ et } (x_3, \cdots, x_{n+2}) \in B_n\left(0, \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}\right) \right)\end{aligned}$$

ce qui nous donne en utilisant le théorème de Tonelli-Fubini :

$$\begin{aligned}V_{n+2} &= \int_{B_n} dx = \int_{B_2} \left(\int_{B_n\left(0, \sqrt{1-\left(x_1^2+x_2^2\right)}\right)} dx_3 \cdots dx_{n+2} \right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{B_2} V_n \left(\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \right) dx_1 dx_2 = V_n \int_{B_2} \left(1 - \left(x_1^2 + x_2^2\right)\right)^{\frac{n}{2}} dx_1 dx_2\end{aligned}$$

puis en utilisant un passage en coordonnées polaires, on a :

$$\begin{aligned}\int_{B_2} \left(1 - \left(x_1^2 + x_2^2\right)\right)^{\frac{n}{2}} dx_1 dx_2 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1 - r^2\right)^{\frac{n}{2}} r dr d\theta \\ &= \pi \int_0^1 (1 - t)^{\frac{n}{2}} dt = \frac{2\pi}{n+2}\end{aligned}$$

donc $V_{n+2} = \dfrac{2\pi}{n+2} V_n$.

On a alors $V_{2n+2} = \dfrac{\pi}{n+1} V_{2n}$ et $V_{2n+3} = \dfrac{2\pi}{2n+3} V_{2n+1}$, ce qui permet de vérifier par récurrence sur $n \geq 0$ que :

$$V_{2n} = \frac{\pi}{n} \frac{\pi}{n-1} \cdots \frac{\pi}{1} V_0 = \frac{\pi^n}{n!} \text{ et } V_{2n+1} = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{2\pi}{2n-1} \cdots \frac{2\pi}{3} V_1 = \frac{2^{2n+1} n!}{(2n+1)!} \pi^n$$

En effet, c'est vrai pour $n = 0$ ($V_2 = \pi$ et $V_1 = 2$) et supposant le résultat acquis au rang $n \geq 0$, on a :

$$V_{2(n+1)} = \frac{\pi}{n+1} V_{2n} = \frac{\pi}{n+1} \frac{\pi^n}{n!} = \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

et :

$$V_{2(n+1)+1} = \frac{2\pi}{2n+3} V_{2n+1} = \frac{2\pi}{2n+3} \frac{2^{2n+1} n!}{(2n+1)!} \pi^n = \frac{2^{2(n+1)+1} (n+1)!}{(2n+3)!} \pi^{n+1}$$

□

Le lien entre les intégrales de Wallis W_n et les volumes V_n est donné par le résultat suivant.

Théorème 17.4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+2} = 2V_{n+1}W_{n+2}$ et pour tout $n \geq 2$, on a $V_n = \dfrac{2^n}{n} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-2} W_k$.

Preuve. Pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^{n+2}$, on a :

$$\begin{aligned}
(x \in B_{n+2}) &\Leftrightarrow \left(x_1^2 \leq 1 \text{ et } \sum_{k=2}^{n+2} x_k^2 \leq 1 - x_1^2 \right) \\
&\Leftrightarrow \left(-1 \leq x_1 \leq 1 \text{ et } (x_2, \cdots, x_{n+2}) \in B_{n+1}\left(0, \sqrt{1 - x_1^2}\right) \right)
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
V_{n+2} &= \int_{B_{n+2}} dx = \int_{-1}^{1} \left(\int_{B_{n+1}\left(0,\sqrt{1-x_1^2}\right)} dx_2 \cdots dx_{n+2} \right) dx_1 \\
&= 2 \int_{0}^{1} \left(\int_{B_{n+1}\left(0,\sqrt{1-x_1^2}\right)} dx_2 \cdots dx_{n+2} \right) dx_1 \\
&= 2 \int_{0}^{1} V_{n+1} \left(\sqrt{1 - x_1^2} \right) dx_1 = 2V_{n+1} \int_{0}^{1} \left(1 - x_1^2\right)^{\frac{n+1}{2}} dx_1
\end{aligned}$$

avec :

$$\int_{0}^{1} \left(1 - x_1^2\right)^{\frac{n+1}{2}} dx_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2(t)\right)^{\frac{n+1}{2}} \sin(t)\, dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\, dt = W_{n+2}$$

donc $V_{n+2} = 2V_{n+1}W_{n+2}$.

Pour $n = 2$, on a $V_2 = \pi = \dfrac{2^2}{2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2^2}{2} W_0$. Supposant que $V_{n-1} = \dfrac{2^{n-1}}{n-1} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-3} W_k$ pour $n \geq 3$, on a :

$$\begin{aligned}
V_n &= 2V_{n-1}W_n = 2\frac{2^{n-1}}{n-1} \left(\prod_{k=0}^{n-3} W_k \right) W_n = \frac{2^n}{n-1} \left(\prod_{k=0}^{n-3} W_k \right) \frac{n-1}{n} W_{n-2} \\
&= \frac{2^n}{n} \left(\prod_{k=0}^{n-2} W_k \right)
\end{aligned}$$

□

Avec le théorème précédent et la relation $(n+1) W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$, on retrouve la relation de récurrence :

$$V_{n+2} = 2V_{n+1}W_{n+2} = 4V_n W_{n+1} W_{n+2} = 4V_n \frac{\pi}{2(n+2)} = \frac{2\pi}{n+2} V_n$$

De la relation $V_{n+2} = 2V_{n+1}W_{n+2}$ et des expressions de V_{2n} et V_{2n+1}, on retrouve les expressions de W_{2n} et W_{2n+1}, à savoir :

$$W_{2n} = \frac{1}{2}\frac{V_{2n}}{V_{2n-1}} = \frac{1}{2}\frac{\frac{\pi^n}{n!}}{\frac{2^{2n-1}(n-1)!}{(2n-1)!}\pi^{n-1}} = \frac{\pi}{2^{2n}}\frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!} = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$$

et :

$$W_{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{V_{2n+1}}{V_{2n}} = \frac{1}{2}\frac{\frac{2^{2n+1}n!}{(2n+1)!}\pi^n}{\frac{\pi^n}{n!}} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Inversement, on peut déduire V_{2n} et V_{2n+1}, de la connaissance W_{2n} et W_{2n+1}. Précisément, on a :

$$V_{2n} = \frac{2^{2n}}{2n}\prod_{k=0}^{2n-2} W_k = \frac{2^{2n-1}}{n} W_0 \prod_{k=1}^{n-1} W_{2k-1}W_{2k} = \frac{2^{2n-2}}{n}\pi \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\pi}{2^2 k} = \frac{\pi^n}{n!}$$

et :

$$\begin{aligned} V_{2n+1} &= \frac{2^{2n+1}}{2n+1}\prod_{k=0}^{2n-1} W_k = \frac{2^{2n+1}}{2n+1}\prod_{k=0}^{n-1} W_{2k}W_{2k+1} \\ &= \frac{2^{2n+1}}{2n+1}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\pi}{2(2k+1)} = \frac{2^{2n+1}n!}{(2n+1)!}\pi^n \end{aligned}$$

De l'égalité $V_{n+1} = 2V_n W_{n+1}$, on déduit que $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = 2W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V_{n+1}}{V_n} = 0$.

La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, on a pour $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé et tout $n \geq n_0$, $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = 2W_{n+1} \leq 2W_{n_0+1}$ avec $W_1 = 1$, $W_2 = \dfrac{\pi}{2^2}$, $W_4 = \dfrac{3\pi}{2^4} \backsimeq 0.589\,05$ et $W_6 = \dfrac{5\pi}{2^5} \backsimeq 0.490\,87$, donc la suite $(V_n)_{n\geq 6}$ est décroissante. Cette suite étant minorée par 0, elle est convergente vers un réel $\ell \geq 0$. De l'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = 0$, on déduit que $\ell = 0$.

Avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} V_{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\pi^n}{n!} = e^\pi$ et la décroissance de $(V_n)_{n\geq 6}$, on retrouve le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante jusqu'à 5 puis décroissante, on en déduit que $\max\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n = V_5 = \dfrac{8\pi^2}{15} \backsimeq 5.263\,8$.

17.3 Formule de Stirling

Lemme 17.4 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels tous strictement positifs. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$, alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel ℓ strictement positif.*

Preuve. Des hypothèses, on déduit que les suites $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes (la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$), donc convergentes vers un même réel α (théorème 4.9), ce qui implique par continuité de la fonction exp que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers $\ell=e^{\alpha}\in\mathbb{R}^{+,*}$. □

Lemme 17.5 *Pour tout $x\in\mathbb{R}^{+,*}$, on a $0<(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-2<\frac{1}{6x(x+1)}$.*

Preuve. En notant φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $\varphi(x)=(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}^{+,*}$:

$$\varphi'(x)=2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+(2x+1)\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

et :

$$\varphi''(x)=-\frac{2}{x(x+1)}-\frac{2x(x+1)-(2x+1)^2}{x^2(x+1)^2}=\frac{1}{x^2(x+1)^2}>0$$

donc φ' est strictement croissante et on a $\varphi'(x)<\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi'(x)=0$, ce qui implique que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et qu'on a $\varphi(x)>\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=2$ (puisque $\varphi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}2x\frac{1}{x}=2$). En notant $\psi(x)=\varphi(x)-\frac{1}{6x(x+1)}$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}^{+,*}$:

$$\begin{aligned}\psi''(x)&=\varphi''(x)-\frac{3x^2+3x+1}{3x^3(x+1)^3}=\frac{1}{x^2(x+1)^2}\left(1-\frac{3x^2+3x+1}{3x(x+1)}\right)\\&=-\frac{1}{3x^3(x+1)^3}<0\end{aligned}$$

donc $\psi'(x)>\lim\limits_{x\to+\infty}\psi'(x)=0$ et $\psi(x)<\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=2$. En conclusion, on a $0<\varphi(x)-2<\frac{1}{6x(x+1)}$ pour tout $\mathbb{R}^{+,*}$. □

Théorème 17.5. Stirling

Les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ et $v_n=u_ne^{\frac{1}{12n}}$ convergent vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, donc $n!\underset{n\to+\infty}{\backsim}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}{\frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\left((2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-2\right)} > 1$$

et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}e^{-\frac{1}{12n(n+1)}} = e^{\frac{1}{2}\left((2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-2-\frac{1}{6n(n+1)}\right)} < 1$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement décroissante. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{12n}} = 1$, on en déduit que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel $\ell > 0$.

L'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}^{+,*}$ se traduit aussi par $n! \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\sqrt{n}}{\ell}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Il en résulte que $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{\sqrt{2n}}{\ell}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\frac{n}{\ell^2}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \ell\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\sqrt{2}$ et d'autre part, on a vu que $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$ (formule de Wallis), donc $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. □

En utilisant le lemme suivant, on peut donner une autre version du théorème de Stirling.

Lemme 17.6 *Pour tout entier $p \geq 3$ et tout réel $x \in]0,1]$, on a $e^x < (1+x)^p$.*

Preuve. En notant $f(x) = (1+x)^p - e^x$, on a pour $x \in]0,1]$ et $p \geq 3$:

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1} - e^x > p - e > 0$$

donc $f(x) > f(0) = 0$. □

Théorème 17.6. Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n < \ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < v_n = u_n e^{\frac{1}{12n}} < \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

(on a $e^{\frac{1}{n}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{12}$ pour $n \geq 1$), soit $\frac{\sqrt{n}}{\ell}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \frac{\sqrt{n}}{\ell}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
□

17.4 Polynômes de Bernoulli et formule d'Euler-Maclaurin

En analysant les choses un peu plus finement, on peut obtenir des développements limités en $\frac{1}{n}$ de $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, puis des développements asymptotiques de

$n!$ Pour ce faire, nous utiliserons une formule d'Euler-Maclaurin qui appliquée à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ nous fournit des développements limités en $\frac{1}{n}$ de $\ln(u_n)$.

Lemme 17.7 *Toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ admet une unique primitive F telle que $\int_0^1 F(x)\,dx = 0$.*

Preuve. Soit $F_0 : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ la primitive de f nulle en 0. Toute primitive F de f est de la forme $F_0 + \lambda$ et la condition $\int_0^1 F_0(x)\,dx + \lambda = 0$ détermine la constante λ de manière unique. □

Le lemme précédent permet de définir la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Bernoulli par $B_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 1,\ B_n' = nB_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(x)\,dx = 0 \tag{17.1}$$

On vérifie facilement que chaque B_n est un polynôme unitaire de degré n. À cette suite de polynômes, on associe la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (B_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de Bernoulli.

Une autre expression de ces polynômes est donnée par $B_n(x) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{xz}}{e^z - 1}\frac{dz}{z^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\mathcal{C}$ est le cercle unité du plan complexe parcouru une fois dans le sens direct (exercice 17.5). De ce résultat, on déduit que pour tout z dans le disque ouvert $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\pi\}$, on a $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^k$.

Exemples 17.1 *On a $B_0(X) = 1$, $b_0 = 1$; $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$, $b_1 = -\frac{1}{2}$; $B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$, $b_2 = \frac{1}{6}$; $B_3(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$, $b_3 = 0$; $B_4(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$. Les instructions Maple : for n from 5 to 9 do bernoulli(n,x) ; bernoulli(n) ; od ; permettent de calculer les polynômes et nombres de Bernoulli pour n compris entre 5 et 9. Les résultats sont les suivant :*

n	$B_n(X)$	b_n
5	$X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{6}X$	0
6	$X^6 - 3X^5 + \frac{5}{2}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}$
7	$X^7 - \frac{7}{2}X^6 + \frac{7}{2}X^5 - \frac{7}{6}X^3 + \frac{1}{6}X$	0
8	$X^8 - 4X^7 + \frac{14}{3}X^6 - \frac{7}{3}X^4 + \frac{2}{3}X^2 - \frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$
9	$X^9 - \frac{9}{2}X^8 + 6X^7 - \frac{21}{5}X^5 + 2X^3 - \frac{3}{10}X$	0

Théorème 17.7.

Les polynômes de Bernoulli vérifient les propriétés suivantes :

1. $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$ *et* $(-1)^k B_n^{(k)}(1-X) = (-1)^n B_n^{(k)}(X)$ *pour tous* $n \in \mathbb{N}$ *et* $0 \leq k \leq n$ *;*
2. $B_n(1) = B_n(0)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *;*
3. $b_{2p+1} = 0$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$ *;*
4. $B_n^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$ *pour tous* $n \in \mathbb{N}$ *et* $0 \leq k \leq n$*, avec en particulier,* $B_n^{(n)} = n!$ *;*
5. $B_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *;*
6. $B_n^{(n-1)}(1) = -B_n^{(n-1)}(0) = \dfrac{n!}{2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *;*
7. $B_n^{(k)}(0) = B_n^{(k)}(1) = \dfrac{n!}{(n-k)!} b_{n-k}$ *pour tous* $n \geq 2$ *et* $0 \leq k \leq n-2$ *;*
8. $b_n = -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

Preuve.

1. La suite de polynômes $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ est solution de la même équation de récurrence que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, pour $n = 0$, on a $C_0 = B_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$C_n'(X) = (-1)^{n+1} B_n'(1-X) = n(-1)^{n-1} B_{n-1}(1-X) = nC_{n-1}(X)$$
et $\displaystyle\int_0^1 C_n(x)\,dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-x)\,dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$. Par unicité d'une telle solution, on déduit que $C_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Dérivant cette égalité k fois pour $0 \leq k \leq n$, on obtient $(-1)^k B_n^{(k)}(1-X) = (-1)^n B_n^{(k)}(X)$.
2. Pour $n = 0$, on a $B_0(1) = B_0(0) = 1$ et pour $n \geq 2$, on a :
$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(x)\,dx = n\int_0^1 B_{n-1}(x)\,dx = 0$$
Pour $n = 1$, on a $B_n(1) = \dfrac{1}{2} = -B_n(0)$.
3. Des égalités $B_{2p+1}(1-X) = -B_{2p+1}(X)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, on déduit par évaluation en 0 que $B_{2p+1}(0) = B_{2p+1}(1) = -B_{2p+1}(0)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$, ce qui implique que $b_{2p+1} = B_{2p+1}(0) = 0$.
4. Pour $n = 0$, il n'y a rien à montrer et pour $n = 1$, on a $B_1(X) = X - \dfrac{1}{2}$, $B_1'(X) = 1 = B_0$. Pour $n \geq 2$, on a $B_n' = nB_{n-1}$, $B_n'' = n(n-1)B_{n-2}$ et par récurrence finie sur k compris entre 0 et n, on aboutit à :
$$B_n^{(k)} = n \cdots (n-k+1) B_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$$

En particulier, pour $k=n$, on a $B_n^{(n)} = n!B_0 = n!$ ce qui se déduit aussi du fait que B_n est unitaire de degré n.

5. La formule de Taylor pour les polynômes nous donne alors :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

6. L'évaluation en 0 dans l'égalité $(-1)^{n-1} B_n^{(n-1)}(1-X) = (-1)^n B_n^{(n-1)}(X)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous donne $B_n^{(n-1)}(1) = -B_n^{(n-1)}(0) = -n!B_1(0) = \dfrac{n!}{2}$.

7. L'évaluation en 0 dans l'égalité $(-1)^k B_n^{(k)}(1-x) = (-1)^n B_n^{(k)}(x)$ pour $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-2$, nous donne :

$$B_n^{(k)}(1) = (-1)^{n-k} B_n^{(k)}(0) = \frac{(-1)^{n-k} n!}{(n-k)!} B_{n-k}(0) = \frac{(-1)^{n-k} n!}{(n-k)!} b_{n-k}$$

avec $b_{n-k} = 0$ pour k tel que $n-k \geq 2$ soit impair, ce qui peut aussi s'écrire $B_n^{(k)}(1) = B_n^{(k)}(0) = \dfrac{n!}{(n-k)!} b_{n-k}$.

8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on déduit de $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$ avec $B_n(t) = b_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} t^k$ que :

$$b_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{(k+1)!} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!} b_{n-k}$$

et tenant compte de :

$$\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k+1} b_{n-k} = -\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{n+1-j} b_j \\ &= -\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j} b_j \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que pour $n \geq 2$, de :

$$b_n = B_n(0) = B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = b_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$$

on déduit que $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}=0$ ou encore $\binom{n}{1}b_{n-1}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}=0$ et $b_{n-1}=-\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}b_{n-k}$, ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k}b_{n+1-k} = -\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+1}{j+2}b_{n+1-(k+j)} \\
&= -\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+1}{n-1-j}b_{n-1-j} = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}b_k
\end{aligned}$$

pour $n \geq 1$.

□

Exemple 17.2 $b_4=-\frac{1}{5}\left(b_0+\binom{5}{1}b_1+\binom{5}{2}b_2\right)=-\frac{1}{5}\left(1-\frac{5}{2}+\frac{10}{6}\right)=-\frac{1}{30}.$

Théorème 17.8.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2p}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\,dt &= \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\frac{f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)}{(2k)!} \\
&\quad + \int_0^1 B_{2p}(t)\frac{f^{(2p)}(t)}{(2p)!}dt
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant la formule d'intégration par parties itérée (lemme 15.12), on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_{2p}(t)\,f^{(2p)}(t)\,dt &= \left[\sum_{k=0}^{2p-1}(-1)^k B_{2p}^{(k)} f^{(2p-1-k)}\right]_0^1 + \int_0^1 B_{2p}^{(2p)}(t)\,f(t)\,dt \\
&= \left[\sum_{k=0}^{2p-1}(-1)^k B_{2p}^{(k)} f^{(2p-1-k)}\right]_0^1 + (2p)!\int_0^1 f(t)\,dt
\end{aligned}$$

avec $B_{2p}^{(2p-1)}(1)=-B_{2p}^{(2p-1)}(0)=\frac{(2p)!}{2}$ et $B_{2p}^{(k)}(1)=B_{2p}^{(k)}(0)=\frac{(2p)!}{(2p-k)!}b_{2p-k}$ pour $0\leq k\leq 2p-2$, les b_{2p-k} étant nuls pour k impair, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_{2p}(t)\,f^{(2p)}(t)\,dt &= \sum_{j=0}^{p-1}\frac{(2p)!}{(2(p-j))!}b_{2(p-j)}\left(f^{(2(p-j)-1)}(1)-f^{(2(p-j)-1)}(0)\right) \\
&- \frac{(2p)!}{2}(f(0)+f(1)) + (2p)!\int_0^1 f(t)\,dt \\
&= \sum_{k=1}^{p}\frac{(2p)!}{(2k)!}b_{2k}\left(f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)\right) - \frac{(2p)!}{2}(f(0)+f(1)) + (2p)!\int_0^1 f(t)\,dt
\end{aligned}$$

ou encore :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{p} b_{2k} \frac{f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)}{(2k)!} + \int_0^1 B_{2p}(t)\,\frac{f^{(2p)}(t)}{(2p)!}dt$$

□

Théorème 17.9. Formule d'Euler-Maclaurin

Soient n, p deux entiers naturels non nuls et $f : [0, n] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2p}$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(t)\,dt + \frac{f(n)-f(0)}{2} + \sum_{j=1}^{p} b_{2j} \frac{f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(0)}{(2j)!} - \int_0^n \widetilde{B_{2p}}(t)\,\frac{f^{(2p)}(t)}{(2p)!}dt$$

où $\widetilde{B_{2p}}$ est la fonction 1-périodique qui coïncide avec B_{2p} sur $[0, 1]$ (on a $B_{2p}(1) = B_{2p}(0)$).

Preuve. Pour $n = 1$, c'est le théorème précédent. Pour $n \geq 2$ et k compris entre 0 et $n-1$, on a :

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_0^1 f(k+t)\,dt = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}\left(f^{(2j-1)}(k+1) - f^{(2j-1)}(k)\right)}{(2j)!} + \int_0^1 \frac{B_{2p}(t)}{(2p)!} f^{(2p)}(k+t)\,dt$$

ou encore :

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(k+1) - f^{(2j-1)}(k)\right) + \int_k^{k+1} \frac{\widetilde{B_{2p}}(x)}{(2p)!} f^{(2p)}(x)\,dx$$

ce qui nous donne en sommant :

$$\int_0^n f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)!} \sum_{k=0}^{n-1}\left(f^{(2j-1)}(k+1) - f^{(2j-1)}(k)\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{\widetilde{B_{2p}}(x)}{(2p)!} f^{(2p)}(x)\,dx$$

soit :

$$\int_0^n f(x)\,dx = \frac{f(0)-f(n)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(0)\right) + \int_0^n \frac{\widetilde{B_{2p}}(x)}{(2p)!} f^{(2p)}(x)\,dx$$

Dans cette formule, on a $\widetilde{B_{2p}}(x) = B_{2p}(x - [x])$. □

En appliquant la formule d'Euler-Maclaurin à la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \ln(1+x)$, on a pour tout entier $n \geq 2$:

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1+k) = \int_0^{n-1} f(t)\,dt + \frac{f(n-1) - f(0)}{2}$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)!} \left(f^{(2j-1)}(n-1) - f^{(2j-1)}(0) \right) - \int_0^{n-1} \frac{\widetilde{B_{2p}}(t)}{(2p)!} f^{(2p)}(t)\,dt$$

avec $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\int_0^{n-1} f(t)\,dt = \int_1^n \ln(t)\,dt = n\ln(n) - n + 1$, ce qui nous donne :

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + 1 + \frac{\ln(n)}{2}$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)(2j-1)} \left(\frac{1}{n^{2j-1}} - 1 \right) + \frac{1}{2p} \int_0^{n-1} \frac{\widetilde{B_{2p}}(t)}{(1+t)^{2p}} dt$$
$$= \ln\left(\sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right) + 1 + \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)(2j-1)} \left(\frac{1}{n^{2j-1}} - 1 \right) + \frac{1}{2p} \int_0^{n-1} \frac{\widetilde{B_{2p}}(t)}{(1+t)^{2p}} dt$$

ou encore :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right) = \lambda_p - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)(2j-1)} \frac{1}{n^{2j-1}} - \frac{1}{2p} \int_0^{n-1} \frac{\widetilde{B_{2p}}(t)}{(1+t)^{2p}} dt$$

où on a noté $\lambda_p = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)(2j-1)} - 1$.

La fonction $\widetilde{B_{2p}}$ qui est continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\left| \dfrac{\widetilde{B_{2p}}(t)}{(1+t)^{2p}} \right| \leq \dfrac{\left\| \widetilde{B_{2p}} \right\|_\infty}{(1+t)^{2p}}$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\left| \widetilde{B_{2p}}(t) \right|}{(1+t)^{2p}} dt < +\infty$. De plus, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\int_{n-1}^{+\infty} \frac{\left| \widetilde{B_{2p}}(t) \right|}{(1+t)^{2p}} dt \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\left\| \widetilde{B_{2p}} \right\|_\infty}{(1+t)^{2p}} dt = \frac{\left\| \widetilde{B_{2p}} \right\|_\infty}{2p-1} \frac{1}{n^{2p-1}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{2p-2}} \right)$$

donc $\displaystyle\int_{n-1}^{+\infty} \frac{\widetilde{B_{2p}}(t)}{(1+t)^{2p}} dt \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{2p-2}} \right)$.

En notant $\mu_p = \lambda_p - \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\widetilde{B_{2p}}(t)}{(1+t)^{2p}}dt$, le développement précédent s'écrit :

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= \mu_p - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)(2j-1)} \frac{1}{n^{2j-1}} + \frac{1}{2p}\int_{n-1}^{+\infty} \frac{\widetilde{B_{2p}}(t)}{(1+t)^{2p}}dt \\ &= \mu_p - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)(2j-1)} \frac{1}{n^{2j-1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{2p-2}}\right) \\ &= \mu_p - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{b_{2j}}{(2j)(2j-1)} \frac{1}{n^{2j-1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{2p-2}}\right)\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\dfrac{\ln(2\pi)}{2} = \mu_p$, ce qui nous donne le développement asymptotique en $\dfrac{1}{n}$ à l'ordre $2p-2$ de $\ln(u_n)$:

$$\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{b_{2j}}{(2j)(2j-1)} \frac{1}{n^{2j-1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{2p-2}}\right)$$

Pour $p=2$, cela donne :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{b_2}{2}\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{12n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}n! &= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 - \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-1} \\ &= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \qquad (17.2)\end{aligned}$$

Pour $p=3$, cela donne :

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{b_2}{2}\frac{1}{n} - \frac{b_4}{4\cdot 3}\frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{12n} + \frac{1}{360n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{12n}+\frac{1}{360n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1}{12n}+\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{288n^2}-\frac{1}{10368n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\frac{139}{51\,840}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)
\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
n! &= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1-\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\frac{139}{51\,840}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^{-1} \\
&= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288}\frac{1}{n^2}-\frac{139}{51\,840}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \qquad (17.3)
\end{aligned}$$

17.5 Exercices

Exercice 17.1. *Soient $n \geq 2$ un entier et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de n réels strictement positifs. Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{a_i^2}\leq 1$ dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^n$.*

Solution. Effectuant le changement de variables $x_i = a_i t_i$ de jacobien $J = \prod_{i=1}^{n} a_i$, on déduit que le volume de l'ellipsoïde d'équation $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{a_i^2}\leq 1$ est :

$$V = \int_{\sum\limits_{1\leq i\leq n}\frac{x_i^2}{a_i^2}\leq 1} dx_1\cdots dx_n = \prod_{i=1}^{n} a_i \int_{\sum\limits_{1\leq i\leq n} t_i^2\leq 1} dt_1\cdots dt_n = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) V_n$$

où V_n est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 17.2. *Donner un équivalent à l'infini du volume V_n de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.*

Solution. Utilisant la formule de Stirling, on obtient $V_{2n} = \frac{\pi^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\pi^n e^n}{\sqrt{2\pi n} n^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{2e\pi}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}}$, puis en exploitant l'équivalent $W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$, il vient :

$$V_{2n+1} = 2V_{2n}W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\,\pi}}\left(\frac{2e\pi}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{\sqrt{e}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

avec $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ (car $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\underset{n\to+\infty}{\backsim}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2n}\underset{n\to+\infty}{\backsim}\frac{1}{2}$), ce qui nous donne $V_{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\backsim}\frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}\left(\frac{2e\pi}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}}$. On a donc au final, $V_n\underset{n\to+\infty}{\backsim}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2e\pi}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ et on retrouve le fait que $\lim_{n\to+\infty}V_n=0$ (car $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\left(\ln(2e\pi)-\ln(n)\right)=-\infty$).

Solution. $\frac{V_{n+1}}{V_n}=2W_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$

Exercice 17.3. *Une démonstration probabiliste de la formule de Stirling.*

1. *Soient $X_1,\cdots,X_n$ une suite de $n\geq 2$ variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. Montrer que la variable aléatoire $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$.*
2. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi de Poisson de paramètre 1. On lui associe les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies par $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ et $T_n=\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}$.*
   (a) *Justifier pour tout réel x, l'égalité :*
   $$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(T_n\leq x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$
   (b) *En exploitant la question précédente, montrer que $\lim_{n\to+\infty}e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2}$.*
   (c) *Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :*
   $$\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(T_n>t)\,dt=\frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
   (d) *Montrer que :*
   $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(T_n>t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right)dx$$
   puis en déduire la formule de Stirling.

Solution.

1. On procède par récurrence sur $n \geq 2$. Pour $n = 2$, la variable aléatoire S_2 est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a du fait de l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_2 = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{k}(X_1 = j) \cap (X_2 = k-j)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(X_1 = j)\,\mathbb{P}(X_2 = k-j) = \sum_{j=0}^{k}\frac{\lambda_1^j}{j!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\lambda_2} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda_1^j\lambda_2^{k-j} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k\end{aligned}$$

donc $S_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$. Supposant le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 2$, pour $X_1, \cdots, X_n$ indépendantes suivant une loi de Poisson, la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n-1} X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k$ et est indépendante de X_n, donc $\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$ d'après le cas $n = 2$.

2.

(a) Les variables aléatoires indépendantes X_n suivant une même loi d'espérance $\mu = 1$ et d'écart type $\sigma = 1$, le théorème de la limite centrale nous dit que $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k - n\mu\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire que, pour tout réel x, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(T_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n suit une loi de Poisson de paramètre n (question **1**) et on a :

$$\mathbb{P}(T_n \leq 0) = \mathbb{P}(S_n \leq n) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n = k) = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$$

ce qui nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(T_n \leq 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2}$$

(question **??**).

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire S_n et par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \mathbb{P}(T_n > x) = \mathbb{P}\left(S_n > n + \sqrt{n}x\right) = 1 - F_n\left(n + \sqrt{n}x\right)$$

la fonction F_n étant en escalier définie par :

$$F_n(t) = \mathbb{P}(S_n \leq t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(S_n = j) \text{ si } t \in [k, k+1[\text{ pour } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ces fonctions f_n sont donc continues par morceaux et on a :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > x)\, dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(S_n > n + \sqrt{n}x\right) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{+\infty} \mathbb{P}(S_n > t)\, dt$$

(changement de variable $t = n + \sqrt{n}x$) avec :

$$\begin{aligned}
\int_n^{+\infty} \mathbb{P}(S_n > t)\, dt &= \sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \mathbb{P}(S_n > t)\, dt = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \mathbb{P}(S_n > k)\, dt \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n > k) = e^{-n} \sum_{k=n}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{n^j}{j!} \\
&= e^{-n} \sum_{n \leq k < j} \frac{n^j}{j!} = e^{-n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{j-1} \frac{n^j}{j!} = e^{-n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} (j-n) \frac{n^j}{j!} \\
&= e^{-n} \left(n \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{n^{j-1}}{(j-1)!} - n \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{n^j}{j!} \right) \\
&= e^{-n} \left(n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} - n \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{n^j}{j!} \right) = e^{-n} n \frac{n^n}{n!}
\end{aligned}$$

ce qui nous donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > x)\, dx = \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on note $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}^+$ (d'après **2a** sachant que $f_n(x) = 1 - \mathbb{P}(T_n \leq x)$) et en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $f_n(x) \leq \mathbb{P}(|T_n| > x) \leq \dfrac{\mathbb{V}(T_n)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$ pour tout réel $x \geq 1$ (pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $(T_n > x) \subset (|T_n| > x)$ et $\mathbb{E}(T_n) = 0$), ce qui nous donne $0 \leq f_n(x) \leq g(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \dfrac{1}{x^2} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$, la fonction g étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(T_n>x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_{\frac{x}{\sqrt{2}}}^{+\infty}e^{-\theta^2}d\theta\right)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}F\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)dx$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}F(y)\,dy=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

(d'après **??**), soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n!}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, ou encore $n!\underset{n\to+\infty}{\backsim}\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 17.4. *On se propose de retrouver les développements asymptotique* (15.12) *et* (17.2) *sans utiliser la formule d'Euler-Maclaurin. Pour ce faire, nous aurons besoin de quelques informations sur le comportement asymptotique des restes de séries de type Riemann* $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2j+1)^\alpha}$. *Pour tous* $\alpha\in\,]1,+\infty[$ *et* $n\in\mathbb{N}$, *on note* $R_n(\alpha)=\sum\limits_{j=n}^{+\infty}\dfrac{1}{(2j+1)^\alpha}$ *le reste d'ordre* n *de la série* $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2j+1)^\alpha}$.

1. *Préciser* $R_0(\alpha)$.
2. *Montrer que pour tout* $\alpha\in\,]1,+\infty[$, *on a :*
$$R_n(\alpha)=\frac{1}{(\alpha-1)\,2^\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$
3. *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, *la série* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\dfrac{R_n(2k)}{2k+1}$ *est convergente et pour tout* $p\in\mathbb{N}^*$, *on a* $\sum\limits_{k=p}^{+\infty}\dfrac{R_n(2k)}{2k+1}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{2p-2}}\right)$.
4. *Montrer que pour tout* $x\in\mathbb{R}^{+,*}$, *on a :*
$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k+1}}\tag{17.4}$$
5. *Montrer que pour tout* $n\geq 2$, *on a* $\ln(u_n)=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{R_n(2k)}{2k+1}$.
6. *Soit* $p\in\mathbb{N}^*$. *Montrer que si, chaque suite* $(R_n(2k))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *pour* $1\leq k\leq p$ *admet un développement limité en* $\dfrac{1}{n}$ *à l'ordre* $2p$, *alors la suite*

$(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ en possède aussi un et que celui-ci est égal à celui de la suite $\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \sum_{k=1}^{p} \frac{R_n(2k)}{2k+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7. *Montrer que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède un développement limité en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2. En déduire celui de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à cet ordre, puis que :*
$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
8. *Donner le développement limité en $\frac{1}{n}$ de $n!$ à l'ordre 3.*

Solution.

1. Avec $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^\alpha} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(2j)^\alpha} = R_0(\alpha) + \frac{1}{2^\alpha}\zeta(\alpha)$, on déduit que $R_0(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)\zeta(\alpha)$.
2. Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \geq n$, on a :
$$\int_j^{j+1} \frac{dt}{(2t+1)^\alpha} \leq \frac{1}{(2j+1)^\alpha} \leq \int_{j-1}^{j} \frac{dt}{(2t+1)^\alpha}$$
ce qui nous donne en sommant de n à l'infini :
$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{(2t+1)^\alpha} \leq R_n(\alpha) \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{(2t+1)^\alpha}$$
avec $\int_k^{+\infty} \frac{dt}{(2t+1)^\alpha} = \frac{1}{2(\alpha-1)}\frac{1}{(2k+1)^{\alpha-1}}$, on obtient :
$$\frac{1}{2(\alpha-1)}\frac{1}{(2n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{2(\alpha-1)}\frac{1}{(2n-1)^{\alpha-1}}$$
ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1}R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)2^\alpha}$, soit $R_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{(\alpha-1)2^\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ ou encore que $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)2^\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$.
3. Des encadrements précédents, on déduit que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a en prenant $\alpha = 2k$:
$$0 \leq \frac{R_n(2k)}{2k+1} \leq \frac{1}{2(4k^2-1)}\frac{1}{(2n-1)^{2k-1}} \leq \frac{1}{4k^2-1}$$
la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{4k^2-1}$ étant convergente, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{R_n(2k)}{2k+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $S_p(n) = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{R_n(2k)}{2k+1}$ pour $p \geq 1$ et

$n \geq 2$, on a :

$$0 \leq n^{2p-2} S_p(n) \leq n^{2p-2} \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{2(4k^2-1)} \frac{1}{(2n-1)^{2k-1}}$$
$$\leq \frac{n^{2p-2}}{2(2n-1)^{2p-1}} \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui signifie que $S_p(n) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{2p-2}}\right)$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, on a $t = \frac{1}{2x+1} \in]0,1[$, $x = \frac{1-t}{2t}$ et :

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{2t}{1-t}\right) = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \ln(1+t) - \ln(1-t)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k+1}}$$

Le développement précédent permet de retrouver l'encadrement du lemme 17.5. En effet, de (17.4), on déduit que :

$$\varphi(x) = (2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k}} > 2$$

et $\varphi(x) - 2 < \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^{2k}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{(2x+1)^2}} - 1\right) = \frac{1}{6x(x+1)}$.

5. Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_1}\right) = \ln(u_n) - \ln(u_1) = \sum_{j=1}^{n-1} (\ln(u_{j+1}) - \ln(u_j)) = \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(\frac{u_{j+1}}{u_j}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{j}\right)^{j+\frac{1}{2}}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{j}\right) - 1\right)$$

avec $\left(j+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{j}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)(2j+1)^{2k}}$ pour tout $j \geq 1$, ce qui nous donne :

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_1}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)(2j+1)^{2k}} - 1\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)(2j+1)^{2k}}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k+1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(2j+1)^{2k}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k+1}(R_1(2k) - R_n(2k))\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R_1(2k)}{2k+1} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R_n(2k)}{2k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R_1(2k)}{2k+1} - \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

chaque série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{R_n(2k)}{2k+1}$ étant convergente. Il en résulte que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R_1(2k)}{2k+1} = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_n}{u_1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) - \ln(u_1) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + 1$$

et $\ln\left(\frac{u_n}{u_1}\right) = \ln(u_n) + 1 = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R_n(2k)}{2k+1}$, soit :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R_n(2k)}{2k+1}$$

6. Pour $p \geq 1$ et $n \geq 2$, on peut écrire que :

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \sum_{k=1}^{p} \frac{R_n(2k)}{2k+1} - \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{R_n(2k)}{2k+1} \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \sum_{k=1}^{p} \frac{R_n(2k)}{2k+1} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\end{aligned}$$

donc si chaque $R_n(2k)$, pour $1 \leq k \leq p$, admet un développement asymptotique en $\frac{1}{n}$ à l'ordre $2p$, il en est alors de même de $\ln(u_n)$.

7. Pour $p = 1$, cela nous donne $\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{R_n(2)}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ avec $R_n(2) = \frac{1}{4n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ (question 2). Pour obtenir un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$ de $R_n(2)$, on écrit que :

$$\begin{aligned}R_n(2) - \frac{1}{4n} &= \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{j=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) \\ &= \sum_{j=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2j+1)^2} - \frac{1}{4j(j+1)}\right) = -\frac{1}{4}\sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2 j(j+1)}\end{aligned}$$

en remarquant que :

$$n^2 \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2 j(j+1)} \leq \frac{n^2}{(2n+1)^2} \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui nous dit que $R_n(2) - \frac{1}{4n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{12n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le développement de $n!$ s'en déduit comme en fin de paragraphe 17.4.

8. Pour $p = 2$, on a $\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{R_n(2)}{3} - \frac{R_n(4)}{5} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$ avec $R_n(4) = \frac{1}{3\cdot 2^4}\frac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{R_n(2)}{3} - \frac{1}{240n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

avec $R_n(2) - \frac{1}{4n} = -\frac{\rho_n}{4}$ en notant $\rho_n = \sum_{j=n}^{+\infty}\frac{1}{(2j+1)^2 j(j+1)}$. En utilisant les encadrements :

$$\int_j^{j+1}\frac{dt}{(2t+1)^2 t(t+1)} \leq \frac{1}{(2j+1)^2 j(j+1)} \leq \int_{j-1}^{j}\frac{dt}{(2t+1)^2 t(t+1)}$$

pour $j \geq n \geq 2$ et en sommant de n à l'infini, on obtient $I_n \leq \rho_n \leq I_{n-1}$, où :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_n^{+\infty}\frac{dt}{(2t+1)^2 t(t+1)} = \int_n^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{4}{(2t+1)^2}\right)dt \\ &= \left[\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + \frac{2}{2t+1}\right]_n^{+\infty} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

ce qui nous donne $\frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \leq \rho_n \leq \frac{1}{12(n-1)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, ou encore :

$$\frac{1}{48}\frac{(n-1)^3 - n^3}{n^3(n-1)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \leq R_n(2) - \frac{1}{4n} + \frac{1}{48n^3} \leq o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc $\lim_{n\to+\infty} n^3\left(R_n(2) - \frac{1}{4n} + \frac{1}{48n^3}\right) = 0$, soit $R_n(2) = \frac{1}{4n} - \frac{1}{48n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et :

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{R_n(2)}{3} - \frac{1}{240n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{12n} + \frac{1}{144n^3} - \frac{1}{240n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{12n} + \frac{1}{360n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

Le développement de $n!$ s'en déduit comme en fin de paragraphe 17.4.

Exercice 17.5. *On note $\mathcal{C}$ le cercle unité du plan complexe parcouru une fois dans le sens direct et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par β_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\beta_n(x) = \dfrac{n!}{2i\pi}\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{xz}}{e^z - 1}\frac{dz}{z^n}$.*

1. *Soit $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} z^k f(z)\,dz$.*
2. *Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale curviligne $I_k = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{z^k}{e^z - 1}dz$.*
3. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction β_n est polynomiale unitaire de degré égal à n.*
4. *Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\beta_n(x+1) - \beta_n(x) = nx^{n-1}$, puis que pour tout entier $n \geq 2$, on a $\beta_n(1) = \beta_n(0)$.*
5. *Montrer que les β_n sont les polynômes de Bernoulli.*
6. *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(0) = 1$ et $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ pour $z \neq 0$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$. Préciser pour quelles valeurs de z cette fonction s'annule.*
7. *Montrer que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière sur le disque ouvert $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\pi\}$, puis que pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a $\dfrac{z}{e^z - 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^k$, où les b_n sont les nombres de Bernoulli.*

Solution.

1. Pour tous $k \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|a_n z^{n+k}\right| = |a_n|$, la série $\sum |a_n|$ étant convergente (puisque $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence infini), donc la série de fonction $\sum a_n z^{n+k}$ converge uniformément sur le compact $\mathcal{C}$ et on peut écrire que $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} z^k f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{\mathcal{C}} z^{n+k}dz$ avec $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} z^{n+k}dz = \int_0^{2\pi} ie^{i(n+k+1)t}dt = 0$ pour $n+k+1 \neq 0$ et $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} z^{n+k}dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}dt = 2i\pi$ pour $n+k+1 = 0$, ce qui nous donne $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} z^k f(z)\,dz = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} z^k f(z)\,dz = 2i\pi a_{-k-1}$ pour $k \in \mathbb{Z}^{-,*}$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z - 1 = z + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = z\left(1 + z\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^{n-2}}{n!}\right) = z(1 + z\varphi(z))$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $I_k = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} z^{k-1}(1 + z\varphi(z))\,dz = 0$ d'après la question précédente. Pour tout $z \in \mathcal{C}$, on a $|z\varphi(z)| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 2 < 1$, ce qui nous permet d'écrire que $\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z(1 + z\varphi(z))} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{n-1} (\varphi(z))^n$, la convergence étant uniforme sur $\mathcal{C}$ (puisque $\left|(-1)^n z^{n-1} (\varphi(z))^n\right| \leq (e-2)^n$ pour tout $z \in \mathcal{C}$ avec $\sum_{n=0}^{+\infty} (e-2)^n = \frac{1}{3-e} < +\infty$), ce qui implique que $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{e^z - 1} dz = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathcal{C}} z^{n-1} (\varphi(z))^n dz$ avec $\int_{\mathcal{C}} z^{n-1} (\varphi(z))^n dz = 0$ pour $n \geq 1$ (puisque φ^n est développable en série entière sur $\mathbb{C}$), ce qui nous donne $I_0 = \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{e^z - 1} = \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = 2i\pi$.

3. Avec les notations de la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\beta_n(x) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{xz}}{e^z - 1} \frac{dz}{z^n} = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{z^{k-n}}{e^z - 1} \right) dz$$
avec $\left| \frac{x^k}{k!} \frac{z^{k-n}}{e^z - 1} \right| = \frac{|x|^k}{k!} \frac{1}{|1 + z\varphi(z)|} \leq \frac{1}{1 - |\varphi(z)|} \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{1}{3-e} \frac{|x|^k}{k!}$ pour tout $z \in \mathcal{C}$, où $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|}$, ce qui nous permet d'écrire que :
$$\beta_n(x) = \frac{n!}{2i\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \int_{\mathcal{C}} \frac{z^{k-n}}{e^z - 1} dz$$
avec $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^{k-n}}{e^z - 1} dz = 0$ pour $k \geq n + 1$ et nous donne :
$$\beta_n(x) = \frac{n!}{2i\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \int_{\mathcal{C}} \frac{z^{k-n}}{e^z - 1} dz = \frac{n!}{2i\pi} \sum_{k=0}^{n} I_{k-n} \frac{x^k}{k!}$$
avec $I_0 = 2i\pi$. La fonction β_n est donc bien polynomiale unitaire de degré égal à n. Pour $n = 0$, on a $\beta_0 = 1$.

4. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a en exploitant la convergence normale sur tout compact de $\mathbb{C}$ de la série de fonctions $\sum \frac{z^n}{n!}$:
$$\begin{aligned}
\beta_n(x+1) - \beta_n(x) &= \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{xz}(e^z - 1)}{e^z - 1} \frac{dz}{z^n} = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{xz} \frac{dz}{z^n} \\
&= \frac{n!}{2i\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{\mathcal{C}} z^{k-n} dz \right) x^k \\
&= \frac{n!}{2i\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_0^{2\pi} i e^{i(k-n+1)t} dt \right) x^k = n x^{n-1}
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$ et $x = 0$, on obtient $\beta_n(1) - \beta_n(0) = 0$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x, on a :

$$\beta_n'(x) = \frac{n!}{2i\pi} \sum_{k=1}^{n} I_{k-n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = n \frac{(n-1)!}{2i\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{I_{j-(n-1)}}{j!} x^j = n\beta_{n-1}(x)$$

ce qui nous permet de déduire par récurrence que l'on a $\beta_n = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$ et supposant le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 0$, on a $\beta_n'(x) - B_n'(x) = n(\beta_{n-1}(x) - B_{n-1}(x)) = 0$ pour tout réel x, donc $\beta_n(x) = B_n(x) + \lambda$. En utilisant la condition $\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$, on déduit que $\lambda = \int_0^1 \beta_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1} = \int_0^1 \beta_{n+1}'(x)\,dx = \beta_{n+1}(1) - \beta_{n+1}(0) = 0$ et $\beta_n = B_n$.

6. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}$, cette égalité étant aussi valable pour $z = 0$. La fonction f est donc développable en série entière sur $\mathbb{C}$. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, l'égalité $f(z) = 0$ est réalisée si, et seulement si, on a $e^z = e^x e^{iy} = 1$, ce qui impose $|e^z| = e^x = 1$, soit $x = 0$ et $e^{iy} = 1$, soit $y = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a donc $f(z) = 0$ si, et seulement si, $z = 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

7. La fonction f étant développable en série entière sur le disque ouvert $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\pi\}$ telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathcal{D}$, on en déduit que la fonction $\frac{1}{f}$ est aussi développable en série entière sur $\mathcal{D}$ et en écrivant que $\frac{1}{f(z)} = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} b_n = \beta_n(0) &= \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{e^z - 1} \frac{dz}{z^n} = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{k-n-1} \right) dz \\ &= \frac{n!}{2i\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_{\mathcal{C}} z^{k-n-1} dz = n! a_n \end{aligned}$$

(convergence uniforme de $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{k-n-1}$ sur le compact $\mathcal{C}$). On a donc au final l'égalité $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^k$ pour tout $z \in \mathcal{D}$.

Chapitre 18

Quelques fonctions spéciales

18.1 Développement en produit infini de $\sin(z)$

On propose ici plusieurs preuves du développement eulérien $\sin(z) = z\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$ sur $\mathbb{C}$.

18.1.1 Théorèmes de convergence dominée pour les séries et les produits infinis

À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes, on associe la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses produits partiels définie par $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 18.1. *On dit que le produit infini $\prod u_n$ est* convergent*, si la suite $(P_n)_{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ est convergente et dans ce cas, la limite de cette suite est notée $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Théorème 18.1.

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes telle que la série $\sum v_n$ soit absolument convergente, le produit infini $\prod(1+v_n)$ est alors convergent.

Preuve. En utilisant l'inégalité de convexité $1 + x \leq e^x$ valable pour tout réel x, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+v_k)$:

$$|P_n| \leq \prod_{k=0}^{n}(1+|v_k|) \leq \prod_{k=0}^{n} e^{|v_k|} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n}|v_k|\right) \leq M = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|v_n|\right) < +\infty$$

ce qui nous donne $|P_n - P_{n-1}| = |P_{n-1}v_n| \leq M|v_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum |v_n|$ étant convergente, ce qui implique l'absolue convergence de la série $\sum (P_n - P_{n-1})$ et la convergence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque cette dernière est de même nature que la série $\sum (P_n - P_{n-1})$. □

Avec les notations et hypothèses du théorème précédent, on a plus précisément :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + v_n) = \lim_{n\to+\infty} P_n = P_0 + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (P_k - P_{k-1}) = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (P_n - P_{n-1})$$

et aussi pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \left| \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + v_n) - P_n \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (P_k - P_{k-1}) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |P_k - P_{k-1}| \leq \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| \right) \sum_{k=n+1}^{+\infty} |v_k| \end{aligned}$$

Exemple 18.1 *De l'absolue convergence de la série* $\sum \frac{z^2}{n^2\pi^2}$ *pour tout nombre complexe* z*, on déduit la convergence du produit infini* $\prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$. *On peut constater que la convergence de ce produit infini est uniforme sur tout compact de* $\mathbb{C}$*. En effet, en notant* $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (1 - v_k(z))$ *et* $P(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - v_n(z))$*, où* $v_k(z) = \frac{z^2}{k^2\pi^2}$*, on a pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, tout* $R \in \mathbb{R}^{+,*}$ *et tout nombre complexe* z *dans le disque* $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq R\}$ *:*

$$\begin{aligned} |P(z) - P_n(z)| &\leq \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^2}{n^2\pi^2} \right) \sum_{k=n+1}^{+\infty} |v_k(z)| = e^{\frac{|z|^2}{6}} \frac{|z|^2}{\pi^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\ &\leq \varepsilon_n = e^{\frac{R^2}{6}} \frac{R^2}{\pi^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *étant convergente, ce qui implique la convergence uniforme de la suite* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* $D(0,R)$.

Théorème 18.2. Convergence dominée pour les séries numériques

Soit $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ *une suite double de nombres complexes telle que :*

- *pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, la suite* $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un nombre complexe* u_k *;*
- *il existe une suite* $(\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels positifs ou nuls telle que la série* $\sum \alpha_k$ *soit convergente et* $|u_{n,k}| \leq \alpha_k$ *pour tout* $(n,k) \in \mathbb{N}^2$.

Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *la série* $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{n,k}$ *converge absolument vers un nombre complexe* S_n, *la série* $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ *converge absolument vers un nombre complexe* S *et la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* S, *ce qui se traduit par* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} u_{n,k}$.

Preuve. Des conditions $|u_{n,k}| \leq \alpha_k$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ on déduit en faisant tendre n vers l'infini pour $k \in \mathbb{N}$ fixé que $|u_k| = \lim_{n\to+\infty} |u_{n,k}| \leq \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La convergence de $\sum \alpha_k$ entraîne alors l'absolue convergence des séries $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{n,k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$. En notant S_n et S les sommes respectives de ces séries, on a pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$:

$$|S_n - S| \leq \sum_{k=0}^{m} |u_{n,k} - u_k| + \sum_{k=m+1}^{+\infty} (|u_{n,k}| + |u_k|) \leq \sum_{k=0}^{m} |u_{n,k} - u_k| + 2 \sum_{k=m+1}^{+\infty} \alpha_k$$

et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier m tel que $\sum_{k=m+1}^{+\infty} \alpha_k < \varepsilon$ (convergence de $\sum \alpha_k$). Pour ε et m ainsi choisis, on a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} |u_{n,k} - u_k| = 0$, donc il existe un entier n_0 tel que $\sum_{k=0}^{m} |u_{n,k} - u_k| < \varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_0$, ce qui nous donne $|S_n - s| < 3\varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers S. □

Le théorème qui suit nous donne un énoncé du théorème de convergence dominée pour les produits infinis.

Théorème 18.3. Convergence dominée pour les produits infinis

Soit $(v_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ *une suite double de nombres complexes telle que :*

- *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *la suite* $(v_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un nombre complexe* v_k *;*
- *il existe une suite* $(\alpha_k)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels positifs ou nuls telle que la série* $\sum \alpha_k$ *soit convergente et* $|v_{n,k}| \leq \alpha_k$ *pour tout* $(n,k) \in \mathbb{N}^2$.

Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *le produit infini* $\prod_{k\in\mathbb{N}} (1 + v_{n,k})$ *converge vers un nombre complexe* T_n, *le produit infini* $\prod_{k\in\mathbb{N}} (1 + v_k)$ *converge vers* *un nombre complexe T et la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T, soit :*

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{+\infty}(1+v_{n,k})=\prod_{k=0}^{+\infty}\left(1+\lim_{n\to+\infty}v_{n,k}\right)$$

Preuve. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $|v_k|=\lim\limits_{n\to+\infty}|v_{n,k}|\leq\alpha_k$. Du théorème 18.1, on déduit que les produits infinis $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}}(1+v_{n,k})$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}}(1+v_k)$ convergent respectivement vers T_n et T. En notant respectivement :

$$(P_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}=\left(\prod_{j=0}^{k}(1+v_{n,j})\right)_{k\in\mathbb{N}}\quad\text{et}\quad(P_k)_{k\in\mathbb{N}}=\left(\prod_{j=0}^{k}(1+v_j)\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

les suites de produits partiels de ces produits infinis, on a :

$$\begin{aligned}T_n&=\prod_{k=0}^{+\infty}(1+v_{n,k})=\lim_{k\to+\infty}P_{n,k}=P_{n,0}+\sum_{k=1}^{+\infty}(P_{n,k}-P_{n,k-1})\\&=(1+v_{n,0})+\sum_{k=1}^{+\infty}P_{n,k-1}v_{n,k}\end{aligned}$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$ et :

$$T=\prod_{k=0}^{+\infty}(1+v_k)=\lim_{k\to+\infty}P_k=P_0+\sum_{k=1}^{+\infty}(P_k-P_{k-1})=(1+v_0)+\sum_{k=1}^{+\infty}P_{k-1}v_k$$

avec :

$$|P_{n,k-1}v_{n,k}|\leq|v_{n,k}|\prod_{j=0}^{k-1}(1+|v_{n,j}|)\leq\alpha_k\exp\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|v_{n,j}|\right)\leq\alpha_k\exp\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\alpha_j\right)$$

la série $\sum\alpha_j$ étant convergente. On déduit alors du théorème de convergence dominée pour les séries que $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=T$, soit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{+\infty}(1+v_{n,k})=\prod_{k=0}^{+\infty}\left(1+\lim_{n\to+\infty}v_{n,k}\right)$$

□

18.1.2 Une élégante et courte preuve

D'après Bourbaki, livre IV, fonctions d'une variable réelle.

Théorème 18.4.

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $z \in \mathbb{C}$, *on a* $\sin(nz) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(z + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Preuve. En exploitant la factorisation $Z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(Z - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ pour $Z = e^{2iz}$, on a $e^{2inz} - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{2iz} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$, ce qui nous donne après multiplication par e^{-inz} :

$$\begin{aligned}
2i\sin(nz) &= e^{inz} - e^{-inz} = e^{-inz} \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{2iz} - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{iz} - e^{\frac{2ik\pi}{n} - iz}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{iz - \frac{ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n} - iz}\right) = \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\left(z - \frac{k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(z - \frac{k\pi}{n}\right)}\right) \\
&= \exp\left(\frac{i\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k\right) \prod_{k=0}^{n-1} 2i\sin\left(z - \frac{k\pi}{n}\right) = e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}} 2^n i^n \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(z - \frac{k\pi}{n}\right) \\
&= i^{2n-1} 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(z - \frac{k\pi}{n}\right) = i(-1)^{n-1} 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(z - \frac{k\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

et cela implique que $\sin(nz) = (-1)^{n-1} 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(z - \frac{k\pi}{n}\right)$. La formule annoncée s'en déduit en écrivant que :

$$\sin(nz) = -\sin(-nz) = (-1)^n 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(-z - \frac{k\pi}{n}\right) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(z + \frac{k\pi}{n}\right)$$

□

Corollaire 18.1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $\prod_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n+1}{2^{2n}}$.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$n = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} = 2^{n-1} \lim_{x \to 0} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(z + \frac{k\pi}{n}\right) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Remplaçant n par $2n+1$ où $n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2n+1 = 2^{2n} \prod_{k=1}^{2n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) &= 2^{2n} \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{(2n+1-k)\,\pi}{2n+1}\right) \\ &= 2^{2n} \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right) = 2^{2n} \prod_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

□

Corollaire 18.2. *Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\sin((2n+1)\,z) = (2n+1)\sin(z) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2(z)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \tag{18.1}$$

Preuve. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, le changement d'indice $k = 2n+1-j$ pour $n+1 \leq k \leq 2n$ nous donne :

$$\begin{aligned} \sin((2n+1)\,z) &= 2^{2n} \prod_{k=0}^{2n} \sin\left(z + \frac{k\pi}{2n+1}\right) \\ &= 2^{2n} \prod_{k=0}^{n} \sin\left(z + \frac{k\pi}{2n+1}\right) \prod_{k=n+1}^{2n} \sin\left(z + \frac{k\pi}{2n+1}\right) \\ &= 2^{2n} \prod_{k=0}^{n} \sin\left(z + \frac{k\pi}{2n+1}\right) \prod_{j=1}^{n} \sin\left(z - \frac{j\pi}{2n+1} + \pi\right) \\ &= (-1)^n\, 2^{2n} \sin(z) \prod_{k=1}^{n} \sin\left(z + \frac{k\pi}{2n+1}\right) \sin\left(z - \frac{k\pi}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

avec $\sin(z+\theta)\sin(z-\theta) = \dfrac{\cos(2\theta) - \cos(2z)}{2} = \sin^2(z) - \sin^2(\theta)$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \sin((2n+1)\,z) &= (-1)^n\, 2^{2n} \sin(z) \prod_{k=1}^{n} \left(\sin^2(z) - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \\ &= 2^{2n} \sin(z) \prod_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \left(1 - \frac{\sin^2(z)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\ &= 2^{2n} \sin(z) \frac{2n+1}{2^{2n}} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2(z)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\ &= (2n+1)\sin(z) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2(z)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \end{aligned}$$

□

Le résultat précédent peut aussi se montrer directement comme suit.
Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
2i \sin((2n+1)z) &= e^{(2n+1)iz} - e^{-(2n+1)iz} \\
&= (\cos(z) + i\sin(z))^{2n+1} - (\cos(z) - i\sin(z))^{2n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^{2n+1-k}(z) \sin^k(z) \left(i^k - (-i)^k\right) \\
&= 2i \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \cos^{2(n-k)}(z) \sin^{2k+1}(z) \\
&= 2i \sin(z) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \left(1 - \sin^2(z)\right)^{n-k} \sin^{2k}(z)
\end{aligned}$$

soit $\sin((2n+1)z) = \sin(z) P_n\left(\sin^2(z)\right)$, où :

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} (1-X)^{n-k} X^k$$

est un polynôme de degré n (le coefficient de X^n est $\alpha_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}$).
Pour $1 \leq k \leq n$, on a $\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \neq 0$ puisque $\frac{k\pi}{2n+1} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et :

$$0 = \sin\left((2n+1)\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) P_n\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

ce qui implique que $P_n\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) = 0$. Les réels $\frac{k\pi}{2n+1}$ sont donc les n racines distinctes de P_n et en conséquence, on a $P_n(X) = \alpha_n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$.
Avec $2n+1 = P_n(0) = (-1)^n \alpha_n \prod_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, on peut écrire que :

$$\begin{aligned}
P_n(X) &= (-1)^n \alpha_n \prod_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{X}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\
&= (2n+1) \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{X}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)
\end{aligned}$$

ce qui nous donne au final $\sin((2n+1)z) = (2n+1)\sin(z) \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2(z)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$.

Théorème 18.5. Euler

Pour tout nombre complexe z, on a $\sin(z) = z\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$, *la convergence étant uniforme sur tout compact de* $\mathbb{C}$.

Preuve. En remplaçant z par $\frac{z}{2n+1}$, la formule (18.1) devient :

$$\sin(z) = (2n+1)\sin\left(\frac{z}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{z}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

En notant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n,k}(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\left(\frac{z}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \text{ si } 1 \leq k \leq n \\ 0 \text{ si } k \geq n+1 \end{cases}$$

on a :

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \lim_{n\to+\infty}(2n+1)\sin\left(\frac{z}{2n+1}\right)\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-v_{n,k}(z)\right)\\ &= z\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-v_{n,k}(z)\right)\end{aligned}$$

avec $\lim_{n\to+\infty} v_{n,k}(z) = \frac{z^2}{k^2\pi^2}$ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$. On déduit alors du théorème de convergence dominée pour les produits infinis que :

$$\sin(z) = \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1-\lim_{n\to+\infty} v_{n,k}(z)\right) = z\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

la convergence du produit infini étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$ (exemple 18.1). □

Pour $z = \frac{\pi}{2}$, le théorème d'Euler nous donne $1 = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{4k^2-1}{4k^2}$, soit $\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{+\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1}$ (continuité de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$). Cette formule est due à Wallis.

Du développement eulérien de $\sin(z)$, on déduit que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\operatorname{sh}(z) = -i\sin(iz) = -i\left(iz\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{(iz)^2}{n^2\pi^2}\right)\right) = z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Prenant $z=\pi$, on obtient $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\operatorname{sh}(\pi)}{\pi}$.

Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a :

$$\sin(2z)=2z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{4z^2}{n^2\pi^2}\right)=2z\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{2n+1}\left(1-\frac{4z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

soit :

$$\begin{aligned}\sin(z)\cos(z)&=z\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{4z^2}{4k^2\pi^2}\right)\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{4z^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)\\&=\sin(z)\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{4z^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right)\end{aligned}$$

avec $\sin(z)\neq 0$ pour $z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$, ce qui nous donne :

$$\cos(z)=\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)$$

cette égalité étant encore valable pour $z\in\pi\mathbb{Z}$ par continuité (convergence uniforme sur tout compact du produit infini).

Du développement précédent, on déduit que pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a :

$$\operatorname{ch}(z)=\cos(iz)=\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{4z^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)$$

Prenant $z=\pi$, on obtient $\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{4}{(2n+1)^2}\right)=\operatorname{ch}(\pi)$.

18.1.3 Une deuxième preuve

Pour cette preuve, on utilise l'égalité $\sin(z)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iz}{n}\right)^n-\left(1-\frac{iz}{n}\right)^n\right)$.

La fonction exponentielle complexe étant définie sur $\mathbb{C}$ par $e^z=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$, on peut utiliser le théorème 18.2 de convergence dominée pour les séries numériques pour prouver le résultat suivant.

Corollaire 18.3. *Pour tout* $z\in\mathbb{C}$, *on a* $e^z=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Preuve. Pour tous $z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}=\sum_{k=0}^{+\infty}u_{n,k}(z)$ en notant pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$u_{n,k}(z)=\begin{cases}\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}\text{ si }0\leq k\leq n\\ 0\text{ si }k\geq n+1\end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et tout $n \geq k+1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n,k}(z) &= \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!n^k} z^k \\ &= \frac{z^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} u_k(z) = \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

avec $|u_{n,k}(z)| \leq \alpha_k(z) = \dfrac{|z|^k}{k!}$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k(z)$ étant convergente (vers $e^{|z|}$). On déduit alors du théorème de convergence dominée pour les séries numériques que :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_{n,k}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(z) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z \end{aligned}$$

□

On peut vérifier que la convergence de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{C}$ par $u_n(z) = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ est uniforme sur tout compact. Pour ce faire, on étudie tout d'abord cette suite de fonctions sur $\mathbb{R}^+$. Dans ce cas, la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}^+$ est une conséquence du théorème de Dini qui suit

Théorème 18.6. Dini

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions à valeurs réelles continues sur un segment $[a,b]$ (avec $a<b$) qui converge simplement vers une fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, la convergence est alors uniforme.

Preuve. L'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Pour tout $x \in [a,b]$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. On a donc $f(x) - f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$. De la continuité des f_n, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in [a,b] \mid \|f-f_n\|_\infty = f(x_n) - f_n(x_n)$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|f-f_{n+1}\|_\infty = f(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) \leq \|f-f_n\|_\infty$$

c'est-à-dire que la suite $(\|f-f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Elle converge donc vers un réel $\lambda \geq 0$ et il s'agit de montrer que $\lambda = 0$. Dans le compact $[a,b]$, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in [a,b]$. Soit p un entier positif. La fonction φ étant strictement croissante de

$\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on peut trouver un entier n_p tel que $\varphi(n) \geq p$ pour tout $n \geq n_p$. On a alors pour tout $n \geq n_p$:

$$0 \leq \lambda \leq \left\| f - f_{\varphi(n)} \right\|_\infty = f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right) \leq f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_p\left(x_{\varphi(n)}\right)$$

En faisant tendre n vers l'infini (à p fixé) et en utilisant la continuité de f, on déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leq \lambda \leq f(x) - f_p(x)$$

Enfin, en faisant tendre p vers l'infini, en utilisant la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f(x)$, on déduit que $\lambda = 0$. □

Lemme 18.1 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ *la suite* $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement croissante et la convergence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *vers la fonction* exp *est uniforme sur tout segment* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}^+$.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs strictement positives et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, on a $u_n'(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{n-1} = \dfrac{n}{n+x} u_n(x)$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)'(x) &= \frac{u_{n+1}'(x)\, u_n(x) - u_{n+1}(x)\, u_n'(x)}{u_n^2(x)} \\ &= \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \left(\frac{n+1}{n+1+x} - \frac{n}{n+x}\right) = \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \frac{x}{(n+x)(n+1+x)} > 0\end{aligned}$$

et signifie que la fonction $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, on a $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} > \dfrac{u_{n+1}(0)}{u_n(0)} = 1$, c'est-à-dire que la suite $(u_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.

Pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}^+$, on a donc une suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement sur ce segment vers la fonction continue exp et le théorème de Dini nous dit alors que la convergence est uniforme sur $[a,b]$. □

Théorème 18.7.

La convergence de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie sur* $\mathbb{C}$ *par* $u_n(z) = \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ *est uniforme sur tout compact.*

Preuve. Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}|e^z - u_n(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right) z^k - \sum_{k=n+1}^{m} \frac{z^k}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \right| |z|^k + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{|z|^k}{k!}\end{aligned}$$

avec $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!n^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1}{k!}$ pour tout entier k compris entre 0 et n, ce qui nous donne :

$$|e^z - u_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)|z|^k + \sum_{k=n+1}^{m}\frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|} - u_n(|z|)$$

De la convergence uniforme de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur tout segment $[0, R]$, on en déduit alors la convergence uniforme de la suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur tout compact de $\mathbb{C}$. $\square$

Du corollaire 18.3, on déduit que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \lim_{n\to+\infty} P_n(z)$$

où $P_n(z) = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iz}{n}\right)^n - \left(1-\frac{iz}{n}\right)^n\right)$. La fonction sin étant impaire, on préfère écrire que $\sin(z) = \lim_{n\to+\infty} P_{2n+1}(z)$, où :

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(z) &= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\frac{1}{(2n+1)^k}\left(1-(1)^k\right)(iz)^k \\ &= z\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\frac{(-1)^k}{(2n+1)^{2k+1}}z^{2k} \end{aligned}$$

est une fonction polynomiale impaire de degré $2n+1$ avec 1 pour coefficient de z et $\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}}$ pour coefficient dominant.

Un nombre complexe z est racine de P_{2n+1} si, et seulement si, $1-\frac{iz}{2n+1} \neq 0$ et $w = \frac{1+\frac{iz}{2n+1}}{1-\frac{iz}{2n+1}}$ est racine $2n+1$-*ième* de l'unité, ce qui équivaut à dire que $\frac{2n+1+iz}{2n+1-iz} = e^{i\theta_k}$ où $\theta_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ avec k compris entre $-n$ et n, ce qui nous donne $z = \frac{2n+1}{i}\frac{e^{i\theta_k}-1}{e^{i\theta_k}+1} = (2n+1)\tan\left(\frac{\theta_k}{2}\right)$, soit les $2n+1$ racines réelles distinctes $x_k = (2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ où k est compris entre $-n$ et n (les $\frac{k\pi}{2n+1}$ sont dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction tan est injective sur cet intervalle). On a donc :

$$P_{2n+1}(z) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}}\prod_{k=-n}^{n}(z-x_k) = \frac{z}{(2n+1)^{2n+1}}\prod_{k=1}^{n}\left(x_k^2-z^2\right)$$

(puisque $x_0 = 0$ et $x_{-k} = x_k$ pour $1 \leq k \leq n$), ce qui peut aussi s'écrire :

$$P_{2n+1}(z) = \frac{z}{(2n+1)^{2n+1}}\prod_{k=1}^{n}x_k^2\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{x_k^2}\right)$$

avec $1 = \dfrac{1}{(2n+1)^{2n+1}} \prod_{k=1}^{n} x_k^2$ (c'est le coefficient de z), soit :

$$P_{2n+1}(z) = z \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

et $\sin(z) = z \lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$.

Théorème 18.8. Euler

Pour tout nombre complexe z, on a $\sin(z) = z \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Preuve. En notant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n,0}(z) = z - 1$ et :

$$v_{n,k}(z) = \begin{cases} -\dfrac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 0 \text{ si } k \geq n+1 \end{cases}$$

on a $\sin(z) = \lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=0}^{+\infty} (1 + v_{n,k}(z))$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n,k}(z) = v_k(z)$ pour tout k dans $\mathbb{N}$, où $v_0(z) = z - 1$, $v_k(z) = -\dfrac{z^2}{k^2\pi^2}$ pour $k \geq 1$ et $|v_{n,k}(z)| \leq \alpha_k(z)$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, où $\alpha_0(z) = |z-1|$ et $\alpha_k(z) = \dfrac{|z|^2}{k^2\pi^2}$ pour $k \geq 1$ (en utilisant l'encadrement $0 < t < \tan(t)$ valable pour tout réel $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$). On déduit alors du théorème 18.3 de convergence dominée pour les produits infinis que :

$$\sin(z) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \lim_{n \to +\infty} v_{n,k}(z)\right) = \prod_{k=0}^{+\infty} (1 + v_k(z)) = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

□

18.2 Une troisième preuve utilisant les séries de Fourier

18.3 Fonctions gamma, bêta et une généralisation des intégrales de Wallis

On note $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Lemme 18.2 *Soit z un nombre complexe. L'intégrale de la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est absolument convergente sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $z \in \mathcal{H}$.*

Preuve. Pour tout nombre complexe z, la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t} = e^{(z-1)\ln(t)-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ telle que $\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ converge absolument.

Avec $\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-\mathrm{Re}(z)}}$, on déduit que l'intégrale $\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt$ converge absolument si, et seulement si, $\mathrm{Re}\,(z) > 0$. En conclusion, $\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ est absolument convergente si, et seulement si, $z \in \mathcal{H}$. □

Ce lemme nous permet de donner la définition suivante.

Définition 18.2. *La fonction gamma d'Euler est la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$.*

On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ et en effectuant le changement de variable $t = x^2$, le calcul de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ se ramène au calcul de l'intégrale de Gauss :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

(voir le paragraphe 9.4.3 ou le corollaire 17.3).

Théorème 18.9.

La fonction gamma vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ pour tout $z \in \mathcal{H}$.

Preuve. Une intégration par parties nous donne pour $z \in \mathcal{H}$ et $0 < \varepsilon < R$:

$$\int_\varepsilon^R t^z e^{-t}dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_\varepsilon^R + z\int_\varepsilon^R t^{z-1}e^{-t}dt$$

puis le passage à la limite quand (ε, R) tend vers $(0, +\infty)$ donne $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
□

Au paragraphe 13.9 nous avons défini la fonction Γ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et montré que c'est l'unique fonction log-convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$ qui vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ avec la condition $\Gamma(1) = 1$ (théorème de Bohr-Mollerup).

Corollaire 18.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on a $\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots z\Gamma(z)$, ce qui nous donne en particulier, $\Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.*

Preuve. De l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, on déduit facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots z\Gamma(z)$. Pour $z = 1$, cela donne $\Gamma(n+1) = n!$ et pour $z = \frac{1}{2}$, cela donne :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

□

La formule d'Euler démontrée dans le cadre réel au paragraphe 13.9 est encore valable sur le demi-plan complexe $\mathcal{H}$, la démonstration étant analogue.

Théorème 18.10. Euler

Pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$.

Preuve. Pour $z \in \mathcal{H}$ fixé, on désigne par $(f_n)_{ns\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\mathbf{1}_{]0,n[}$. Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+,*}, \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n>t}} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} = e^{-t}t^{z-1} \\ \forall n \geq 1,\ |f_n(t)| \leq f(t) = e^{-t}t^{\mathrm{Re}(z)-1} \end{cases}$$

la fonction f étant continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$, donc le théorème de convergence dominée nous dit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = \Gamma(z)$$

avec :

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = n^z \int_0^1 (1-x)^n x^{z-1}dt = n^z I_n(z)$$

Une intégration par parties nous donne la relation de récurrence :

$$I_n(z) = \left[(1-x)^n \frac{x^z}{z}\right]_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 (1-x)^{n-1} x^z dt = \frac{n}{z} I_{n-1}(z+1)$$

de laquelle on déduit que :

$$I_n(z) = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} I_0(z+n) = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

Il en résulte que $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^z I_n(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$. □

Pour $z = \dfrac{1}{2}$, on obtient :

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\sqrt{n}}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}\sqrt{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}$$

et on retrouve l'équivalent la formule de Wallis $\dbinom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

En utilisant le produit eulérien $\sin(\pi z) = \pi z \prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{z^2}{k^2}\right)$, on déduit du théorème précédent le résultat suivant.

Théorème 18.11. Formule des compléments

Pour tout $z \in \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$, *on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Preuve. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathcal{D}$, on a en notant $\Gamma_n(z) = \dfrac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$:

$$\Gamma_n(z)\Gamma_n(1-z) = \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}\frac{n!n^{1-z}}{(1-z)(2-z)\cdots(n+1-z)}$$
$$= \frac{1}{z\prod\limits_{1\le k\le n}\left(1+\frac{z}{k}\right)}\frac{1}{\prod\limits_{1\le k\le n}\left(1-\frac{z}{k}\right)}\frac{n}{n+1-z} = \frac{1}{z\prod\limits_{1\le k\le n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)}\frac{n}{n+1-z}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \lim_{n\to+\infty}\Gamma_n(z)\Gamma_n(1-z)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{z\prod\limits_{1\le k\le n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)}\frac{n}{n+1-z} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\end{aligned}$$

□

De la formule des compléments, on déduit que la fonction Γ ne s'annule jamais sur $\mathcal{H}$. Pour $z = n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(z) = (n-1)! \neq 0$ et pour $z \in \mathcal{D}$ l'égalité $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ nous assure que $\Gamma(z) \neq 0$. S'il existe $z \in \mathcal{H} \setminus (\mathbb{N}^* \cup \mathcal{D})$ tel que $\Gamma(z) = 0$, en désignant par $n \in \mathbb{N}^*$ la partie entière de $\operatorname{Re}(z)$, on a alors $n < \operatorname{Re}(z) < n+1$, donc $z' = z - n \in \mathcal{D}$ et de l'égalité :

$$\Gamma(z) = \Gamma(z'+n) = (z'+n-1)\cdots z'\Gamma(z') = (z-1)\cdots(z-n)\Gamma(z')$$

on déduit que $\Gamma(z') = 0$ avec $z' \in \mathcal{D}$, ce qui n'est pas possible.

Lemme 18.3 *Soit* $(u,v) \in \mathbb{C}^2$. *L'intégrale de la fonction* $t \mapsto t^{u-1}(1-t)^{v-1}$ *est absolument convergente sur* $]0,1[$ *si, et seulement si,* $(u,v) \in \mathcal{H}^2$.

Preuve. On a $\left|t^{u-1}(1-t)^{v-1}\right| \underset{t\to 0^+}{\backsim} t^{\mathrm{Re}(u)-1}$ et $\int_0^1 t^{\mathrm{Re}(u)-1}dt < +\infty$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(u) > 0$. De manière analogue, on a $\left|t^{u-1}(1-t)^{v-1}\right| \underset{t\to 1^-}{\backsim} (1-t)^{\mathrm{Re}(v)-1}$ et $\int_0^1 (1-t)^{\mathrm{Re}(v)-1} dt < +\infty$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(v) > 0$. □

Ce lemme nous permet de donner la définition suivante.

Définition 18.3. *La fonction bêta (ou fonction de Bessel de seconde espèce) est la fonction définie sur $\mathcal{H}^2$ par :*

$$\forall (u,v) \in \mathcal{H}^2,\ B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$$

Pour $(u,v) \in \mathcal{H}^2$ donné, le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$ nous donne :

$$\begin{aligned} B(u,v) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2(\theta)\right)^{u-1}\left(1-\sin^2(\theta)\right)^{v-1}\cos(\theta)\sin(\theta)\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2u-1}(\theta)\cos^{2v-1}(\theta)\,d\theta \end{aligned}$$

Les intégrales $W(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a(\theta)\cos^b(\theta)\,d\theta$, où $(a,b) = (2u-1, 2v-1)$ dans $\mathbb{C}^2$ est tel que $\mathrm{Re}(a) > -1$ et $\mathrm{Re}(b) > -1$, sont les intégrales de Wallis généralisées. Pour $a = n \in \mathbb{N}$ et $b = 0$, on retrouve les classiques intégrales de Wallis.

Lemme 18.4 *Pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a $B(u,v) = B(v,u)$, $B(u,v+1) = \dfrac{v}{u+v}B(u,v)$ et $\Gamma(u) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^u B(u, v+n+1)$.*

Preuve. Le changement de variable $t = 1-x$ nous donne :

$$B(u,v) = \int_0^1 (1-x)^{u-1}x^{v-1}dx = B(v,u)$$

La deuxième identité est équivalente à $uB(u,v+1) = v(B(u,v) - B(u,v+1))$, soit à :

$$\begin{aligned} u\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^v\,dt &= v\left(\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}(1-(1-t))\,dt\right) \\ &= v\int_0^1 t^u(1-t)^{v-1}\,dt \end{aligned}$$

ce qui résulte d'une intégration par parties qui nous donne pour $[a,b] \subset]0,1[$:

$$v\int_a^b t^u(1-t)^{v-1}\,dt = \left[-t^u(1-t)^v\right]_a^b + u\int_a^b t^{u-1}(1-t)^v\,dt$$

puis le résultat annoncé en faisant tendre (a,b) vers $(0,1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable $t = \dfrac{x}{n}$ nous donne :

$$B(u, v+n+1) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v+n}\,dt = \frac{1}{n^u}\int_0^n x^{u-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{v+n} dx$$

En désignant, pour $(u, v) \in \mathcal{H}^2$ donné, par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $f_n(x) = x^{u-1}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{v+n}\mathbf{1}_{]0,n[}(x)$, chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\forall x \in]0, +\infty[\,, \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}x^{u-1} \\ \forall n \geq 1,\ |f_n(x)| \leq e^{-x}x^{\mathrm{Re}(u)-1} = f(x) \end{cases}$$

(on a $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n>x}}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^v = 1$ et, pour $x \in]0, n[\,$, $\left|\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^v\right| = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{\mathrm{Re}(v)} \leq 1$), la fonction f étant continue et intégrable sur $]0, +\infty[$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} n^u B(u, v+n+1) &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^n x^{u-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{v+n} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{u-1}dx = \Gamma(u) \end{aligned}$$

□

Théorème 18.12.

Pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a $B(u, v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$.

Preuve. De la relation $B(u, v+1) = \dfrac{v}{u+v}B(u, v)$, on déduit par récurrence que :

$$B(u, v+n+1) = \frac{(v+n)(v+n-1)\cdots v}{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)}B(u, v)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \frac{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)}{(v+n)(v+n-1)\cdots v}B(u, v+n+1) \\ &= \frac{n!n^v}{v(v+1)\cdots(v+n)}\,\frac{(u+v)(u+v+1)\cdots(u+v+n)}{n!n^{u+v}}n^u B(u, v+n+1) \end{aligned}$$

avec $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$ pour tout $z \in \mathcal{H}$, ce qui nous donne l'égalité $B(u, v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ en faisant tendre n vers l'infini, sachant que Γ ne s'annule jamais sur $\mathcal{H}$. □

Le théorème précédent nous permet de donner une expression des intégrales de Wallis généralisées $W(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a(\theta)\cos^b(\theta)\,d\theta$ pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\mathrm{Re}(a) > -1$ et $\mathrm{Re}(b) > -1$, à savoir :

$$W(a,b) = \frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{(a+b)\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

Pour $a = n \in \mathbb{N}$ et $b = 0$, on retrouve les intégrales de Wallis usuelles :

$$W_n = W(n,0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Pour $n = 2p$, on obtient :

$$W_{2p} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{2p\Gamma(p)} = \sqrt{\pi}\frac{\frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}}{2p!} = \frac{\pi}{2}\frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}$$

et pour $n = 2p+1$, on obtient :

$$W_{2p+1} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(p+1)}{(2p+1)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi}\frac{p!}{(2p+1)\frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}} = \frac{2^{2p}}{(2p+1)\binom{2p}{p}}$$

18.4 A SUIVRE

18.5 Exercices

Exercice 18.1. *Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\cos(nz) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(z+\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)$$

Solution. Du théorème 16.1, on déduit que pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\cos(nz) = \sin\left(nz+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\left(z+\frac{\pi}{2n}\right)\right) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(z+\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)$$

Exercice 18.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\cos((2n+1)z) = (-1)^n 2^{2n}\prod_{k=0}^{2n}\cos\left(z+\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

puis que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\dfrac{\pi}{2n+1}$*, on a :*

$$\operatorname{cotg}\left((2n+1)\,z\right) = (-1)^n \prod_{k=0}^{2n} \operatorname{cotg}\left(z + \frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

Solution. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sin\left((2n+1)\left(z + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin\left((2n+1)\,z + \frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n \cos\left((2n+1)\,z\right),$$

donc :

$$\begin{aligned}\cos\left((2n+1)\,z\right) &= (-1)^n \sin\left((2n+1)\left(z + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= (-1)^n\, 2^{2n} \prod_{k=0}^{2n} \sin\left(z + \frac{k\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n\, 2^{2n} \prod_{k=0}^{2n} \cos\left(z + \frac{k\pi}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

Il en résulte que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\dfrac{\pi}{2n+1}$, on a :

$$\operatorname{cotg}\left((2n+1)\,z\right) = \frac{\cos\left((2n+1)\,z\right)}{\sin\left((2n+1)\,z\right)} = (-1)^n \prod_{k=0}^{2n} \operatorname{cotg}\left(z + \frac{k\pi}{2n+1}\right)$$