L3 A, intégration : M363

– I – Exercices préliminaires

On présente ici quelques méthodes de raisonnement qui seront utilisées en théorie de la mesure.

Exercice 1 *Pour tout entier naturel non nul n, on définit les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_{n,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, l'entier k étant compris entre 0 et n, par :*

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sigma_{n,k}(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \\ \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k} \text{ si } k \in \{1, \cdots, n\} \end{cases}$$

Soit $P(X) = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$ un polynôme scindé unitaire de degré $n \geq 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que l'on a $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$ avec :

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\},\ a_k = (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

Solution. Ces expressions sont qualifiées de symétriques, car pour toute permutation τ de $\{1, \cdots, n\}$, on a :

$$\sigma_{n,k}\left(\alpha_{\tau(1)}, \cdots, \alpha_{\tau(n)}\right) = \sigma_{n,k}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

On procède par récurrence sur $n = \deg(P) \geq 1$.
Pour $n = 1$, on a $P(X) = X - \alpha_1 = a_0 X + a_1$ avec $a_0 = 1 = \sigma_{1,0}(\alpha_1)$ et $a_1 = -\alpha_1 = -\sigma_{1,1}(\alpha_1)$.
Supposons le résultat acquis pour les polynômes scindés unitaires de degré $n - 1 \geq 1$ et soit $P(X) = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$ un polynôme scindé unitaire de degré n.
En notant $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a :

$$\sigma_{n,0}(\alpha) = \sigma_{n-1,0}\left(\alpha'\right) = 1$$

$$\sigma_{n,n}(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_n \sigma_{n-1,n-1}\left(\alpha'\right)$$

et pour k compris entre 1 et $n - 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{n,k}(\alpha) &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k} + \alpha_n \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq n-1} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_{k-1}} \\ &= \sigma_{n-1,k}\left(\alpha'\right) + \alpha_n \sigma_{n-1,k-1}\left(\alpha'\right) \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\prod_{k=1}^{n-1} (X - \alpha_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k X^{n-1-k}$$

avec $a'_k = (-1)^k \sigma_{n-1,k}(\alpha')$ pour $0 \leq k \leq n-1$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
P(X) &= (X-\alpha_n)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\alpha_k) = (X-\alpha_n)\sum_{k=0}^{n-1} a'_k X^{n-1-k} \\
&= (X-\alpha_n)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sigma_{n-1,k}\left(\alpha'\right) X^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sigma_{n-1,k}\left(\alpha'\right) X^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\alpha_n\sigma_{n-1,k}\left(\alpha'\right) X^{n-(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sigma_{n-1,k}\left(\alpha'\right) X^{n-k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\alpha_n\sigma_{n-1,k-1}\left(\alpha'\right) X^{n-k} \\
&= X^n + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left(\sigma_{n-1,k}\left(\alpha'\right)+\alpha_n\sigma_{n-1,k-1}\left(\alpha'\right)\right) X^{n-k} + (-1)^n \alpha_n\sigma_{n-1,n-1}\left(\alpha'\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha) X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}
\end{aligned}$$

avec $a_k = (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha)$ pour tout k compris entre 0 et n.

Exercice 2 *Soit Ω un ensemble non vide.*
À toute partie A de Ω, on associe la fonction indicatrice (ou caractéristique) de A définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{1}_A : & \Omega & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array}\right. \end{array}$$

On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω.

1. *Montrer que l'application qui associe à une partie A de Ω sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ réalise une bijection de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $\{0,1\}^{\Omega}$ (ensemble des applications de Ω dans $\{0,1\}$). Préciser son inverse.*
2. *Soient A, B deux parties de Ω. Exprimer $\mathbf{1}_{\Omega \setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\cap B}$, $\mathbf{1}_{AUB}$, $\mathbf{1}_{B\setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\Delta B}$, en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.*
3. *Plus généralement, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ de parties de Ω, exprimer $\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k}$ et $\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_k}$.*
4. *Montrer qu'il n'existe pas de bijection de Ω sur $\mathcal{P}(\Omega)$ (théorème de Cantor).*
   On en déduit en particulier que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.
5. *Soient $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite finie de parties de Ω et A une partie de Ω. Montrer que :*

$$\left((A_k)_{1\leq k\leq n} \text{ est une partition de } A\right) \Leftrightarrow \left(\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}\right)$$

Solution. Les fonctions indicatrices permettent de transformer des opérations ensemblistes en opérations algébriques sur des fonctions.

1. Notons :

$$\begin{array}{rccc} \chi : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & \{0,1\}^{\Omega} \\ & A & \mapsto & \mathbf{1}_A \end{array}$$

Si A, B dans $\mathcal{P}(\Omega)$ sont tels que $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$, on a alors pour tout $x \in \Omega$:

$$(x \in A) \Leftrightarrow (\mathbf{1}_A(x) = 1) \Leftrightarrow (\mathbf{1}_B(x) = 1) \Leftrightarrow (x \in B)$$

soit, $A = B$.
L'application χ est donc injective.
Pour toute application $\gamma \in \{0,1\}^\Omega$, en notant $A = \gamma^{-1}\{1\}$, on a $\mathbf{1}_A = \gamma$, donc χ est surjective.
En conclusion, χ est bijective d'inverse :

$$\chi^{-1} : \begin{array}{ccc} \{0,1\}^\Omega & \to & \mathcal{P}(\Omega) \\ \gamma & \mapsto & \gamma^{-1}\{1\} \end{array}$$

2. De la partition $\Omega = A \cup (\Omega \setminus A)$, on déduit que pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_{\Omega \setminus A}(x) = 1$$

donc $\mathbf{1}_{\Omega \setminus A} = 1 - \mathbf{1}_A$.
Pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \text{ et } x \in B \\ 0 \text{ si } x \notin A \text{ ou } x \notin B \end{array} \right. = \mathbf{1}_A(x)\,\mathbf{1}_B(x) = \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x))$$

donc $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.
De ces deux formules, on déduit toutes les autres.
Avec :

$$\Omega \setminus (AUB) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$$

on déduit que :

$$\mathbf{1}_{\Omega \setminus (AUB)} = \mathbf{1}_{\Omega \setminus A} \mathbf{1}_{\Omega \setminus B}$$

soit :

$$1 - \mathbf{1}_{AUB} = (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B)$$

ou encore :

$$\mathbf{1}_{AUB} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$$

Avec :

$$B \setminus A = (\Omega \setminus A) \cap B$$

on déduit que :

$$\mathbf{1}_{B \setminus A} = \mathbf{1}_B (1 - \mathbf{1}_A) = \max(\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A, 0)$$

Avec :

$$A \Delta B = (AUB) \setminus A \cap B$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A \Delta B} &= \mathbf{1}_{AUB}(1 - \mathbf{1}_{A \cap B}) = (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B)(1 - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \\
&= (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2 = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|
\end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k}(x) = 1\right) &\Leftrightarrow \left(x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \cdots, n\},\ x \in A_k) \\
&\Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \cdots, n\},\ \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1) \\
&\Leftrightarrow \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1\right) \Leftrightarrow \left(\min_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1\right)
\end{aligned}$$

donc :

$$\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} = \min_{1\leq k\leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

puisque ces fonctions sont à valeurs dans $\{0,1\}$.
Avec :

$$\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k)$$

on déduit que :

$$1 - \mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \min_{1\leq k\leq n} (1 - \mathbf{1}_{A_k}) = 1 - \max_{1\leq k\leq n} \mathbf{1}_{A_k}(x)$$

soit :

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \max_{1\leq k\leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

On peut aussi généraliser la formule $\mathbf{1}_{AUB} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ en utilisant l'exercice **??**.
Avec :

$$\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k)$$

on déduit que :

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{1}_{A_k})$$

avec :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{1}_{A_k}) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1}} \mathbf{1}_{A_{i_2}} \cdots \mathbf{1}_{A_{i_k}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots A_{i_k}}\end{aligned}$$

ce qui nous donne la formule de Poincaré :

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots A_{i_k}}$$

4. Supposons qu'il existe une surjection φ de Ω sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
   Le sous-ensemble A de Ω défini par :

   $$A = \{x \in \Omega \mid x \notin \varphi(x)\}$$

   a alors un antécédent x_0 par φ et on a :

   $$(x_0 \in A) \Leftrightarrow (x_0 \in \varphi(x_0)) \Leftrightarrow (x_0 \notin A)$$

   ce qui n'est pas possible.
   En particulier, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas équipotent à $\mathbb{N}$ et il en est de même de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ qui est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
   On peut aussi vérifier, en utilisant les développements dyadiques (en base 2), que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $[0,1[$.

5. Supposons que $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ soit une partition de A, c'est-à-dire que $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, les A_k étant deux à deux disjoints.

Dans ce ce cas, pour tout entier k compris entre 2 et n et tout multi-indice $(i_1, \cdots, i_k)$ tel que $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, l'intersection $A_{i_1 \cap} A_{i_2} \cdots A_{i_k}$ est vide, ce qui nous donne :

$$\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$$

Réciproquement supposons que $\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$.
Les A_k sont alors deux à deux disjoints.
En effet, s'il existe $k \neq j$ tels que $A_k \cap A_j \neq \emptyset$, on a alors pour $x \in A_k \cap A_j$:

$$\mathbf{1}_A (x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} \geq \mathbf{1}_{A_k} (x) + \mathbf{1}_{A_j} (x) = 2$$

ce qui est impossible.
Si $x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, il existe alors un indice j compris entre 1 et n tel que $x \in A_j$, donc $\mathbf{1}_A (x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} (x) \geq \mathbf{1}_{A_j} (x) = 1$, ce qui impose $\mathbf{1}_{A_k} (x) = 0$ pour $k \neq j$ et $\mathbf{1}_A (x) = \mathbf{1}_{A_j} (x) = 1$, ce qui prouve que $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$.
Pour $x \in A$, on a $1 = \mathbf{1}_A (x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} (x)$, donc il existe un unique j compris entre 1 et n tel que $\mathbf{1}_{A_j} (x) = 1$, ce qui signifie que x est dans A_j et $x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, donc $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et on a l'égalité $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, les A_k étant deux à deux disjoints.

Exercice 3 *On dit qu'une série numérique (réelle ou complexe) $\sum u_n$ est commutativement convergente si, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.*
Montrer qu'une série $\sum u_n$ absolument convergente est commutativement convergente et que pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (cela justifie l'écriture $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ dans le cas d'une série absolument convergente, ce qui est utilisé implicitement dans la définition d'une mesure).

Solution. Soient $\sum u_n$ une série absolument convergente et σ une permutation de $\mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $\varphi (n) = \max_{0 \leq k \leq n} \sigma (k)$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \left| u_{\sigma(k)} \right| \leq \sum_{j=0}^{\varphi(n)} |u_j| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = S$$

donc la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.
Il reste à montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
On montre tout d'abord le résultat pour les séries réelles à termes positifs.
On vient de voir que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

En appliquant le résultat précédent à la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ et à la permutation σ^{-1}, on a aussi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_{\sigma^{-1}(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(\sigma^{-1}(n))} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

ce qui nous donne l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Pour le cas général d'une série réelle ou complexe, on a déjà $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|u_{\sigma(n)}\right| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

En utilisant les notations précédentes, on a $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$\left| \sum_{j=0}^{\varphi(n)} u_j - \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \right| = \left| \sum_{j \in E_n} u_j \right| \leq R_n = \sum_{j \in E_n} |u_j|$$

où on a noté :

$$E_n = \{0, 1, \cdots, \varphi(n) - 1, \varphi(n)\} \setminus \{\sigma(0), \cdots, \sigma(n)\}$$

avec :

$$R_n = \sum_{j=0}^{\varphi(n)} |u_j| - \sum_{k=0}^{n} \left|u_{\sigma(k)}\right| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

L'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ s'en déduit alors.

Exercice 4

1. *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels positifs ou nuls indexée par (n, m) dans $\mathbb{N}^2$.*
   On suppose que :
   – *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_m u_{n,m}$ est convergente de somme S_n ;*
   – *la série $\sum\limits_n S_n$ étant convergente de somme S.*
   Montrer alors que dans ces conditions :
   – *pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_n u_{n,m}$ est convergente de somme T_m ;*
   – *la série $\sum\limits_m T_m$ est convergente de somme S, soit :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$$

   Dans le cas où l'une des sommes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ ou $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ est finie, on dit que la série double $\sum u_{n,m}$ est convergente et on note $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$ la valeur commune de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ et $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$.
   Étant donnée une suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes, on dit que la série double $\sum u_{n,m}$ est absolument convergente (ou que la suite $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable) si la série double $\sum |u_{n,m}|$ est convergente.

2. *Soit* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ *une suite double telle que la série double* $\sum u_{n,m}$ *soit absolument convergente.*
Montrer alors que dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *[resp. pour tout* $m \in \mathbb{N}$*], la série* $\sum\limits_{m} u_{n,m}$ *[resp.* $\sum\limits_{n} u_{n,m}$*] est absolument convergente et en notant* S_n *[resp.* T_m*] la somme de cette série, la série* $\sum S_n$ *[resp.* $\sum T_m$*] est absolument convergente et on a* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} T_m$*, soit :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$
3. *En justifiant la convergence, calculer la somme* $\sum\limits_{m=2}^{+\infty}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^m}$.
4. *Soit* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ *la suite double définie par :*
$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ u_{n,m} = \begin{cases} 0 \text{ si } n = m \\ \dfrac{1}{n^2 - m^2} \text{ si } n \neq m \end{cases}$$
Montrer, en les calculant, que les sommes $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ *et* $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ *sont définies et différentes.*

Solution.

1. Pour tous les entiers n et m, on a :
$$0 \leq u_{n,m} \leq S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$$
avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n = S < +\infty$, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum\limits_{n} u_{n,m}$ avec, pour tout entier m :
$$T_m = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} S_n = S$$
Pour tout entier m, on a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} T_k &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{m} u_{n,k} \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} S_n = S\end{aligned}$$
donc la série $\sum T_m$ est convergente de somme $T = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} T_m \leq S$.
En permutant les rôles de n et m, on aboutit de manière analogue à $S \leq T$ et en conséquence, $T = S$.
2. La série $\sum |u_{n,m}|$ étant convergente, on a pour tous les entiers n, m :
$$S'_n = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| < +\infty,\ T'_m = \sum_{j=0}^{+\infty} |u_{j,m}| < +\infty$$
et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} S'_n = \sum_{m=0}^{+\infty} T'_m$$

Les séries $\sum\limits_m u_{n,m}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum\limits_n u_{n,m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ sont donc absolument convergentes de sommes respectives S_n et T_m.
Pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} T_k - \sum_{j=0}^{n} S_j\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{j,k} - \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{j,k}\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{j,k} - \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k}\right| \\
&= \left|\sum_{j=n+1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{j,k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k}\right| \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{j,k}| + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |u_{j,k}| \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} S'_j + \sum_{k=n+1}^{+\infty} T'_k = R_n
\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ puisque chacune des séries $\sum S'_n$ et $\sum T'_m$ converge.

On a donc bien l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} T_m$.

3. Dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^m &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1
\end{aligned}$$

(en écrivant que $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$).

On peut donc calculer $\sum\limits_{m=2}^{+\infty}\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^m}$ alors qu'on ne connaît pas toutes les valeurs de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^m}$ pour $m \geq 2$.

4. Pour k entier naturel non nul fixé et $n > k$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} u_{j,k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{j^2-k^2} &= \frac{1}{2k}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n}\left(\frac{1}{j-k} - \frac{1}{j+k}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\sum_{\substack{j=1-k \\ j\neq 0}}^{n-k} \frac{1}{j} - \sum_{\substack{j=k+1 \\ j\neq 2k}}^{n+k} \frac{1}{j}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=k+1}^{n+k} \frac{1}{j} + \frac{1}{2k}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n+k} \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\frac{3}{2}\frac{1}{k} - \sum_{j=n-k+1}^{n+k} \frac{1}{j}\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$0 < \sum_{j=n-k+1}^{n+k} \frac{1}{j} \leq 2k \frac{1}{n-k+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

et donc :

$$\forall k \geq 1, \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} u_{j,k} = \frac{3}{4} \frac{1}{k^2}$$

ce qui signifie que :

$$\forall k \geq 1, T_k = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} = \frac{3}{4} \frac{1}{k^2}$$

La série $\sum T_m$ est donc convergente avec $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} T_m = \frac{3}{4} \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$, ce qui signifie que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,m} \right) = \frac{3}{4} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{6}$$

De manière analogue, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m} \right) = -\frac{3}{4} \frac{\pi^2}{6}$$

et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_{n,m} \right) \neq \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,m} \right)$.
La série double $\sum u_{n,m}$ n'est donc pas absolument convergente.

Exercice 5 *Soient E un espace vectoriel normé complet et $a < b$ deux réels.*
Une fonction $f : [a, b] \to E$ est dite réglée si elle admet une limite à droite en tout point de $[a, b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a, b]$.
On notera $f(x^-)$ [resp. $f(x^+)$] la limite à gauche [resp. à droite] en $x \in]a, b]$ [resp. en $x \in [a, b[$].

1. *Montrer qu'une fonction réglée est bornée.*
2. *Montrer qu'une limite uniforme de fonctions réglées de $[a, b]$ dans E est réglée.*
3. *Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction réglée et $\varepsilon > 0$. On note :*

$$E_\varepsilon = \left\{ x \in]a, b] \mid \text{il existe } \varphi \text{ en escaliers sur } [a, x] \text{ telle que } \sup_{t \in [a,x]} \| f(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon \right\}$$

Montrer que $E_x \neq \emptyset$, puis que $b = \max(E_\varepsilon)$.

4. *Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to E$ est réglée si, et seulement si, elle est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escaliers.*
5. *Rappeler comment le résultat de la question précédente est utilisé pour définir l'intégrale de Riemann d'une fonction réglée $f : [a, b] \to E$.*
6. *Montrer qu'une fonction réglée $f : [a, b] \to E$ est continue sur $[a, b]$ privé d'un ensemble D dénombrable (éventuellement vide).*
7. *La fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ est-elle réglée ?*
8. *En désignant par $E(t)$ la partie entière d'un réel t, montrer que la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(nx)}{2^n}$$

est réglée, puis calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$ (il s'agit d'une intégrale de Riemann).

Solution.

1. Soit $f : [a,b] \to E$ réglée.
Si elle n'est pas bornée, pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver un réel $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f(x_n)\| \geq n$. Dans le compact $[a,b]$, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha \in [a,b]$.
Supposons que $\alpha \in]a,b[$. Il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in [a,b] \cap]\alpha-\eta, \alpha[\,,\ \left\|f(x) - f\left(\alpha^-\right)\right\| < 1$$
et :
$$\forall x \in [a,b] \cap]\alpha, \alpha+\eta[\,,\ \left\|f(x) - f\left(\alpha^+\right)\right\| < 1$$
Il existe aussi un entier $n_0 \geq 1$ tel que :
$$\forall n \geq n_0,\ x_{\varphi(n)} \in]\alpha-\eta, \alpha+\eta[$$
ce qui nous donne pour tout $n \geq n_0$:
$$\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(\alpha^-\right)\right\| < 1 \text{ ou } \left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(\alpha^+\right)\right\| < 1$$
et en conséquence :
$$\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| < 1 + \left\|f\left(\alpha^-\right)\right\| \text{ ou } \left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| < 1 + \left\|f\left(\alpha^+\right)\right\|$$
en contradiction avec $\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| \geq \varphi(n) \geq n$.
Pour $\alpha = a$ [resp. $\alpha = b$], on procède de manière analogue en utilisant seulement la limite à droite [resp. à gauche].
La fonction f est donc bornée.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réglées de $[a,b]$ dans E qui converge uniformément vers une fonction f.
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_ε tel que :
$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \sup_{x\in[a,b]} \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$
La fonction f_{n_ε} ayant une limite à gauche en $\alpha \in]a,b]$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in [a,b] \cap]\alpha-\eta, \alpha[\,,\ \left\|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}\left(\alpha^-\right)\right\| < \varepsilon$$
ce qui nous donne, pour tout x, y dans $[a,b] \cap]\alpha-\eta, \alpha[$:
$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\| &\leq \|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)\| + \left\|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}\left(\alpha^-\right)\right\| + \left\|f_{n_\varepsilon}\left(\alpha^-\right) - f_{n_\varepsilon}(y)\right\| + \|f_{n_\varepsilon}(y) - f(y)\| \\ &\leq 4\varepsilon\end{aligned}$$
On déduit alors du critère de Cauchy que f admet une limite à gauche en α.
De plus avec :
$$\left\|f_n\left(\alpha^-\right) - f\left(\alpha^-\right)\right\| = \lim_{x\to\alpha^-} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \sup_{x\in[a,b]} \|f_n(x) - f(x)\|$$
on déduit que :
$$f\left(\alpha^-\right) = \lim_{n\to+\infty} f_n\left(\alpha^-\right)$$
On procède de même pour la limite à droite.

3. Comme f admet une limite à droite en a, il existe un réel $\eta_a \in]0, b-a[$ tel que :
$$\forall t \in]a, a+\eta_a]\,,\ \left\|f(t) - f\left(a^+\right)\right\| < \varepsilon$$
donc en désignant par φ la fonction en escaliers définie sur $[a, a+\eta_a]$ par $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(t) = f\left(a^+\right)$ pour tout $t \in]a, a+\eta_a]$, on a $\sup\limits_{t\in[a,a+\eta_a]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, ce qui signifie que $a + \eta_a \in E_\varepsilon$.

L'ensemble E_ε est donc non vide majorée par b, donc il admet une borne supérieure $\beta \in \left]a, b\right]$ (on a $a + \eta_a \leq \beta$).
Supposons que $\beta < b$. Comme f admet une limite à droite et à gauche en β, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $[\beta - \eta, \beta + \eta] \subset \left]a, b\right[$ et :

$$\forall t \in [\beta - \eta, \beta[\,, \ \left\| f(t) - f\left(\beta^-\right) \right\| < \varepsilon$$

$$\forall t \in \left]\beta, \beta + \eta\right]\,, \ \left\| f(t) - f\left(\beta^+\right) \right\| < \varepsilon$$

Par définition de la borne supérieure β, il existe $x \in \left]\beta - \eta, \beta\right] \cap E_\varepsilon$. On désigne alors par φ une fonction en escaliers sur $[a, x]$ telle que $\sup\limits_{t \in [a,x]} \| f(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon$ et on la prolonge en une fonction en escaliers sur $[a, \beta + \eta]$ en posant $\varphi(t) = f(\beta^-)$ pour $t \in \left]x, \beta\right[$, $\varphi(\beta) = f(\beta)$ et $\varphi(t) = f(\beta^+)$ pour $t \in \left]\beta, \beta + \eta\right]$.
On a donc $\sup\limits_{t \in [a, \beta+\eta]} \| f(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon$, soit $\beta + \eta \in E_x$, ce qui contredit le fait que β est la borne supérieure de E_ε.
En définitive, on a $\beta = b$.
Comme f admet une limite à gauche en b, il existe un réel $\eta_b > 0$ tel que $[b - \eta_b, b] \subset \left]a, b\right]$ et :

$$\forall t \in [b - \eta_b, b[\,, \ \left\| f(t) - f\left(b^-\right) \right\| < \varepsilon$$

Prenant $x \in \left]b - \eta_b, b\right] \cap E_\varepsilon$, on désigne par φ une fonction en escaliers sur $[a, x]$ telle que $\sup\limits_{t \in [a,x]} \| f(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon$ et on la prolonge en une fonction en escaliers sur $[a, b]$ en posant $\varphi(t) = f(b^-)$ pour $t \in \left]x, b\right[$ et $\varphi(b) = f(b)$ (si $x = b$, il n'y a rien à faire), ce qui nous donne φ en escaliers sur $[a, b]$ telle que $\| f(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon$ pour tout $t \in [a, b]$.
On a donc $b \in E_\varepsilon$ et $\beta = b$.

4. Si f est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escaliers, elle est réglée comme limite uniforme d'une suite de fonctions réglées (une fonction en escaliers est réglée).
Réciproquement, soit $f : [a, b] \to E$ une fonction réglée.
Pour tout entier $n \geq 1$, on a $b \in E_{\frac{1}{n}}$, donc il existe φ_n en escaliers sur $[a, b]$ telle que $\sup\limits_{t \in [a,b]} \| f(t) - \varphi_n(t) \| < \dfrac{1}{n}$.
La suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge donc uniformément vers f sur $[a, b]$.
5. Le résultat de la question précédente peut être utilisé pour définir l'intégrale de Riemann d'une fonction réglée f sur $[a, b]$.
On définit d'abord l'intégrale des fonctions en escaliers de la façon usuelle.
On vérifie ensuite que pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\, dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, ce qui résulte des inégalités :

$$\left| \int_a^b f_m(x)\, dx - \int_a^b f_n(x)\, dx \right| \leq (b - a) \sup_{x \in [a,b]} |f_m(x) - f_n(x)|$$

desquelles on déduit que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.
La limite d'une telle suite ne dépend que f puisque si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f, on a pour tout entier n :

$$\left| \int_a^b g_n(x)\, dx - \int_a^b f_n(x)\, dx \right| \leq (b - a) \sup_{x \in [a,b]} |g_n(x) - f_n(x)| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

On peut donc définir l'intégrale f sur $[a, b]$ par :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

où $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est n'importe quelle suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

6. Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction réglée et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble D_n des points de discontinuité de f_n est fini et la réunion $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ est une partie dénombrable de de $[a,b]$.
Toutes les fonctions f_n sont continues sur l'ouvert $[a,b] \setminus D$, donc il en est de même de f puisque cette fonction est limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,b] \setminus D$.
Les points de discontinuité de f sont tous de première espèce.
7. La fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas réglée puisqu'elle est discontinue en tout point de $[0,1]$.
En effet, si $a \in [0,1]$ est un nombre rationnel [resp. irrationnel], alors pour tout réel $\eta > 0$, on peut trouver un nombre irrationnel [resp. rationnel] x dans $]a-\eta, a+\eta[\cap [0,1]$ et on a $|f(x) - f(a)| = 1$, ce qui prouve la discontinuité de f en a.
8. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \in [0,1]$, on a :
$$0 \leq \frac{E(nx)}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}$$
avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} < +\infty$, donc la série de fonctions $\sum \frac{E(nx)}{2^n}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
Pour montrer que f est réglée, il nous suffit de vérifier que les sommes partielles de cette série de fonctions sont des fonctions en escaliers. Comme l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[0,1]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il suffit de vérifier que chaque fonction :
$$f_n : x \in [0,1] \mapsto E(nx)$$
est en escaliers.
Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ et tout $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, on a $E(nx) = k$ et pour $x = 1$, $E(nx) = n$, donc :
$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[} + n \cdot \mathbf{1}_{\{1\}}$$
est en escaliers.
La fonction f est don réglée sur $[0,1]$ et en conséquence Riemann-intégrable.
Comme la série de fonctions définissant f est uniformément convergente, on a :
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{E(nx)}{2^n} dx$$
avec :
$$\int_0^1 E(nx)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{n-1}{2}$$
ce qui nous donne :
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^3} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2^3} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exercice 6 $[a,b]$ *est un intervalle fermé borné fixé avec* $a < b$ *réels.*

1. *Montrer que les fonctions en escaliers positives sur $[a,b]$ sont exactement les fonctions du type :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, les a_k sont des réels positifs ou nuls et les I_k sont des intervalles contenus dans $[a,b]$.

2. *Montrer que si $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite finie de fonctions en escaliers sur $[a,b]$, alors la fonction $\varphi = \max\limits_{1\leq k\leq n} \varphi_k$ est aussi en escaliers.*

3. *Soit f une fonction réglée définie sur $[a,b]$ et à valeurs positives.*

   (a) *Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ et telle que :*

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ \varphi_n(x) \leq f(x)$$

   (b) *On désigne par $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[a,b]$ par $\psi_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:*

   $$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

   Monter que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

   (c) *Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

4. *Montrer que les fonctions réglées à valeurs positives sur $[a,b]$ sont exactement les fonctions de la forme :*

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$$

où les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs ou nuls, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'intervalles contenus dans $[a,b]$ et la série considérée converge uniformément sur $[a,b]$.

5. *Avec les notations de la question précédente, justifier l'égalité :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ell(I_n)$$

où $\ell(I_n)$ est la longueur de l'intervalle I_n.

Solution.

1. Si φ est une fonction en escaliers sur $[a,b]$, il existe alors un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision :

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p = b$$

telle que φ soit constante sur chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq p-1)$, ce qui peut s'écrire :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

où $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ est une partition de $[a,b]$ en n intervalles (les I_k sont les $]a_j, a_{j+1}[$, pour j compris entre 0 et $p-1$ et les $\{a_j\} = [a_j, a_j]$, pour j compris entre 0 et p, les a_k étant les valeurs constantes prises par φ sur chacun de ces intervalles).
Si φ est à valeurs positives, les a_k sont tous positifs ou nuls.
Réciproquement une telle fonction est en escaliers puisque l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a,b]$ est un espace vectoriel et elle est à valeurs positives si les a_k sont tous positifs ou nuls (en dehors de la réunion des I_k, la fonction φ est nulle).

2. Si $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$ est une fonction en escaliers sur $[a, b]$, alors la fonction $|\varphi| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \mathbf{1}_{I_k}$ est aussi en escaliers.
Il en résulte que, si ψ est une autre fonction en escaliers sur $[a, b]$, la fonction :
$$\max(\varphi, \psi) = \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{|\psi - \varphi|}{2}$$
en escaliers, puis par récurrence on en déduit que si $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$, alors la fonction $\max_{1 \leq k \leq n} \varphi_k$ est aussi en escaliers.
3.
   (a) Comme f réglée sur $[a, b]$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une fonction en escaliers f_n telle que :
$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n+1}$$
La fonction $\varphi_n = f_n - \dfrac{1}{n+1}$ est aussi en escaliers et pour tout $x \in [a, b]$, on a :
$$-\frac{1}{n+1} < f(x) - f_n(x) < \frac{1}{n+1}$$
donc :
$$0 < f(x) - \varphi_n(x) < \frac{2}{n+1}$$
donc $\varphi_n < f$ et :
$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)| = \sup_{x \in [a,b]} (f(x) - \varphi_n(x)) \leq \frac{2}{n+1}$$
ce qui signifie que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f par valeurs inférieures.
   (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction :
$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$
est en escaliers et pour tout $x \in [a, b]$, on a :
$$\psi_0 = 0 \leq \psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x) < f(x)$$
(puisque $f \geq 0$ et $f \geq \varphi_k$ pour tout entier k) et :
$$0 < f(x) - \psi_n(x) \leq f(x) - \varphi_n(x) < \frac{2}{n+1}$$
donc $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément en croissant vers f sur $[a, b]$.
   (c) On pose $f_0 = 0$ et $f_n = \psi_n - \psi_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui définit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives.
Avec :
$$\sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} (\psi_k - \psi_{k-1}) = \psi_n - \psi_0 = \psi_n$$
on déduit que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

4. Si $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$, où la série est uniformément convergentes, les a_n sont positifs et les I_n des intervalles contenus dans $[a, b]$, la fonction :
$$f = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

est alors limite uniforme d'une suite de fonctions réglées positives et en conséquence, elle est réglée positive.

Soit f une fonction réglée positive sur $[a,b]$.

Il existe alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

En écrivant chaque fonction en escaliers f_n sous la forme :

$$f_n = \sum_{k=1}^{p_n} a_{n,k}\mathbf{1}_{I_{n,k}}$$

où les $a_{n,k}$ sont des réels positifs ou nuls et les $I_{n,k}$ sont des intervalles contenus dans $[a,b]$, en notant $p_0 = 0$, on utilise la partition :

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{n\geq 1} \{p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1, \cdots , p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n\}$$

et le fait qu'il s'agit d'une séries de fonctions positives pour écrire que :

$$f = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j\mathbf{1}_{I_j}$$

où pour $j = p_1 + \cdots + p_{n-1} + k$ avec $1 \leq k \leq p_n$, on note :

$$a_j\mathbf{1}_{I_j} = a_{n,k}\mathbf{1}_{I_{n,k}}$$

ce qui définit bien une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls et une suite $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'intervalles contenus dans $[a,b]$.

A priori la convergence de cette série est simple.

Pour tout entier $m \geq 1$ il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que $m \in \{p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1, \cdots , p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n$ et on a :

$$R_m = \sum_{j=m}^{+\infty} a_j\mathbf{1}_{I_j} \leq \sum_{j=p_1+\cdots+p_{n-1}+1}^{+\infty} a_j\mathbf{1}_{I_j} = \sum_{p=n}^{+\infty} f_p = R'_n$$

ce qui assure la convergence uniforme (pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $R'_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, donc pour tout $m \geq m_\varepsilon = p_1 + \cdots + p_{n_\varepsilon - 1} + 1$, on aura $R_m < \varepsilon$).

5. Par convergence uniforme, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b a_n\mathbf{1}_{I_n}(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ell(I_n)$$

Exercice 7 *La longueur d'un intervalle réel I est définie par :*

$$\ell(I) = \sup(I) - \inf(I) \in [0,+\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

1. *Soient $I = [a,b]$ un intervalle fermé, borné et $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille finie d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

2. *Soient* $I = [a, b]$ *un intervalle fermé, borné et* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

3. *Soient* I *un intervalle et* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

4. *Soit* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles deux à deux disjoints inclus dans un intervalle* I. *Montrer que :*

$$\ell(I) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

Solution. Si I est un intervalle borné d'extrémités $a < b$, on a alors :

$$\ell(I) = b - a$$

En particulier, on a pour tout réel a :

$$\ell(\emptyset) = \ell(]a, a[) = 0 \text{ et } \ell([a, a]) = 0$$

Si I est non bornée, on a alors $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ et $\ell(I) = +\infty$.

1. Si l'un des intervalles I_j, pour j compris entre 1 et n, est non borné, on a alors $\ell(I_j) = +\infty$ et :

$$\ell(I) = b - a \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) = +\infty$$

On suppose donc que chaque intervalle I_k, pour k compris entre 1 et n, est borné et on note $\alpha_k \leq \beta_k$ ses extrémités.
On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, on a $I \subset I_1$, donc $\alpha_1 \leq a \leq b \leq \beta_1$ et :

$$\ell(I) = b - a \leq \beta_1 - \alpha_1 = \ell(I_1)$$

Supposons le résultat acquis pour $n - 1 \geq 1$ et soit $I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ un recouvrement fini de l'intervalle $I = [a, b]$ par des intervalles I_k bornés.
L'extrémité b de I est contenue dans l'un des I_k et, en modifiant au besoin la numérotation, on peut supposer que $k = n$.
Si $\alpha_n \leq a$, on a alors $\alpha_n \leq a \leq b \leq \beta_n$, soit $I \subset I_n$ et :

$$\ell(I) \leq \ell(I_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

Sinon, on a $a < \alpha_n \leq b \leq \beta_n$, donc :

$$[a, \alpha_n[\subset \bigcup_{k=1}^{n-1} I_k$$

et par hypothèse de récurrence, on a :

$$\alpha_n - a \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ell(I_k)$$

et tenant compte de :

$$b - \alpha_n \leq \beta_n - \alpha_n = \ell(I_n)$$

on déduit que :

$$\ell(I) = b - a = (b - \alpha_n) + (\alpha_n - a) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

2. Si l'un des I_n est non borné, le résultat est évident.
On suppose que chaque intervalle I_n, pour $n \in \mathbb{N}$, est borné et on note $\alpha_n \leq \beta_n$ ses extrémités.
Pour $\varepsilon > 0$ donné, on désigne par $(I_n(\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'intervalles ouverts définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(\varepsilon) = \left]\alpha_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \beta_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right[$$

et on a un recouvrement ouvert du compact $I = [a, b]$:

$$I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n(\varepsilon)$$

duquel on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} J_k$$

On déduit alors de la question précédente que :

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \ell(J_k) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n(\varepsilon))$$

avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ell(I_n(\varepsilon)) = \beta_n - \alpha_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

ce qui nous donne :

$$\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) + \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) + \varepsilon$$

Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

3. Si $\ell(I) = 0$ ou si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) = +\infty$, le résultat est alors évident.
Si $\ell(I) > 0$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$ est convergente, tous les I_n et I sont bornés. En notant $a < b$ les extrémités de I, pour tout segment $I' = [a', b']$ contenu dans I, on a $I' \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et de la question précédente, on déduit que :

$$\ell(I') = b' - a' \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

Faisant tendre (a', b') vers (a, b), on en déduit le résultat annoncé.

4. Si $\ell(I) = +\infty$, le résultat est alors évident.
   On suppose que I est borné d'extrémités $a \leq b$.
   Comme $I_n \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous ces intervalles sont bornés et on a $\bigcup_{k=0}^{n} I_k \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   En modifiant au besoin la numérotation et en notant $\alpha_n \leq \beta_n$ les extrémités de chaque intervalle I_n, comme ils sont deux à deux disjoints, on peut supposer que :
$$a \leq \alpha_0 \leq \beta_0 < \alpha_1 \leq \beta_1 < \cdots < \alpha_{n-1} \leq \beta_{n-1} < \alpha_n \leq \beta_n \leq b$$
   et on a :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \ell(I_k) &= \sum_{k=0}^{n} (\beta_k - \alpha_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) + (\beta_n - \alpha_n) \\ &\leq \alpha_n - \alpha_0 + b - \alpha_n \leq b - a = \ell(I) \end{aligned}$$
   Faisant tendre n vers l'infini, on en déduit le résultat annoncé.

Exercice 8 *Pour tous réels $a < b$, on désigne par $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante dans $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.*
   Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,b]$ (théorème de Dini). On donnera deux démonstrations de ce résultat, l'une utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass et l'autre utilisant celle de Borel-Lebesgue.
2. *Le résultat précédent est-il encore vrai dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ si on ne suppose plus l'intervalle I compact ?*
3. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}^+)$ telle que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.*
   Montrer que :
$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt$$
4. *On désigne par $\mathcal{A}$ la famille des parties de $\mathbb{R}^2$ de la forme :*
$$A(f,g) = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$$
   où f, g sont dans $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ et on note :
$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b (g(t) - f(t))\, dt$$
   Montrer que cette application μ est σ-additive sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (i. e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$), on a :
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Solution.

1.

(a) *Solution utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass :* ≪ un espace métrique E est compact si et seulement si de toute suite de points de E on peut extraire une sous suite convergente ≫.
Pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. On a donc $f(x) - f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
De la continuité de chaque fonction f_n sur le compact $[a,b]$, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in [a,b] \mid \|f - f_n\|_\infty = f(x_n) - f_n(x_n)$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|f - f_{n+1}\|_\infty &= f(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \\ &\leq f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) \leq \|f - f_n\|_\infty \end{aligned}$$

donc la suite $(\|f - f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et elle converge vers un réel $\lambda \geq 0$.
Il s'agit alors de montrer que $\lambda = 0$.
Dans le compact $[a,b]$, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in [a,b]$.
Soit p un entier positif. La fonction φ étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on peut trouver un entier n_p tel que $\varphi(n) \geq p$ pour tout $n \geq n_p$. On a alors pour tout $n \geq n_p$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda \leq \left\|f - f_{\varphi(n)}\right\|_\infty &= f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right) \\ &\leq f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_p\left(x_{\varphi(n)}\right) \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini (à p fixé) et en utilisant la continuité de f, on déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leq \lambda \leq f(x) - f_p(x)$$

Enfin, en faisant tendre p vers l'infini, en utilisant la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f(x)$, on déduit que $\lambda = 0$.

(b) *Solution utilisant la caractérisation de Borel-Lebesgue :* ≪ un espace métrique E est compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous recouvrement fini ≫.
Pour tout $x \in [a,b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\forall x \in I,\ \exists n_x \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_x,\ 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon$$

De la continuité de f et f_{n_x}, on déduit qu'il existe un voisinage ouvert V_x de x dans $[a,b]$ tel que :

$$\forall t \in V_x, \quad |f(x) - f(t)| \leq \varepsilon,\ \ |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(t)| \leq \varepsilon$$

On déduit alors que pour tout $t \in V_x$:

$$0 \leq f(t) - f_{n_x}(t) \leq |f(t) - f(x)| + |f(x) - f_{n_x}(x)| + |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(t)| \leq 3\varepsilon$$

Du recouvrement de $[a,b]$ par les ouverts V_x, on peut extraire un sous recouvrement fini $\bigcup_{i=1}^{p} V_{x_i}$.
On pose alors $n_0 = \max_{1\leq i\leq p} n_{x_i}$ et on a :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall t \in I, \quad 0 \leq f(t) - f_n(t) \leq f(t) - f_{n_{x_i}}(t) \leq 3\varepsilon$$

l'indice i étant tel que $t \in V_{x_i}$. Ce qui prouve bien la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur I.

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $]0,1[$ par $f_n(x) = \dfrac{-1}{1+nx}$ converge en croissant vers la fonction nulle et la convergence n'est pas uniforme sur $]0,1[$ puisque $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{-1}{2}$.

3. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de fonctions $\sum f_n$ est croissante (puisque les f_n sont à valeurs positives) et converge simplement vers la fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Le théorème de Dini nous dit alors que la convergence est uniforme et :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b S_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt$$

4. Pour f, g dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ on a :

$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b (g(t) - f(t))\,dt = \int_a^b \ell([f(t), g(t)])\,dt$$

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f_n \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et f, g dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ et :

$$A(f,g) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A(f_n, g_n)$$

étant deux à deux disjoints.
Dans ces conditions, on a :

$$\forall t \in [a,b],\ [f(t), g(t)] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [f_n(t), g_n(t)]$$

En effet, pour tout $t \in [a,b]$ et tout $y \in [f(t), g(t)]$, on a $(t,y) \in A(f,g)$, donc il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $(t,y) \in A(f_n, g_n)$, ce qui signifie que $y \in [f_n(t), g_n(t)]$. Réciproquement si $y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [f_n(t), g_n(t)]$, il existe alors un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in [f_n(t), g_n(t)]$, donc $(t,y) \in A(f_n, g_n) \subset A(f,g)$ et $y \in [f(t), g(t)]$.
On en déduit alors que :

$$\forall t \in [a,b],\ \ell([f(t), g(t)]) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell([f_n(t), g_n(t)])$$

les fonctions $t \mapsto \ell([f_n(t), g_n(t)])$ étant continues et positives. Il en résulte que :

$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b \ell([f(t), g(t)])\,dt = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_a^b \ell([f_n(t), g_n(t)])\,dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A(f_n, g_n))$$

La fonction μ est donc σ-additive sur $\mathcal{A}$.

– II – Mesures et probabilités élémentaires

X est un ensemble non vide et $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X.

Définition : Une σ-algèbre (ou tribu) sur X est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ telle que :
- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;
- Si $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable).

Définition : Si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur X, on dit alors que le couple $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

Définition : Une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est une application

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

telle que :

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (i. e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$), on a :
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$
(σ-additivité de μ).

Avec ces conditions, on dit que le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Dans le cas où $\mu(X) = 1$, on dit que μ est une probabilité sur $(X, \mathcal{A})$ et que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace probabilisé.

Dans ce cas, on notera $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité μ, les éléments de X sont appelés éventualités, ceux de $\mathcal{A}$ sont appelés événements, les singletons sont les évenements élémentaires et $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de A.

Deux événements disjoints sont dits incompatibles.

Définition : Si $\mathcal{A}$ est une famille de parties de X, on dit alors que l'intersection de toutes les σ-algèbres sur X qui contiennent $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$. C'est aussi la plus petite σ-algèbre sur X (pour l'ordre de l'inclusion sur $\mathcal{P}(X)$) qui contient $\mathcal{A}$.

On la note $\sigma(\mathcal{A})$ et on a :
$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ tribu sur } X \\ \mathcal{A}\subset\mathcal{B}}} \mathcal{B}$$

Si $f : X \to X'$ est une application de X dans un ensemble X', alors pour toute tribu $\mathcal{A}'$ sur X', l'image réciproque :
$$f^{-1}(\mathcal{A}') = \left\{f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\right\}$$
est une tribu sur X.

Pour toute famille $\mathcal{A}'$ de parties de X', on a :
$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{A}')\right) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$$

Définition : Si X est un espace topologique, la tribu de Borel sur X est la σ-algèbre engendrée par les ouverts de X.

On la note $\mathcal{B}(X)$ et ses éléments sont les boréliens de X.

Pour $X = \mathbb{R}^p$, on peut vérifier que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ est la tribu engendré par les pavés ouverts du type :
$$P = \prod_{k=1}^{p}]a_k, b_k[$$
les $a_k < b_k$, pour k compris entre 1 et p, étant tous rationnels.

Une mesure de Borel sur X est une mesure sur $\mathcal{B}(X)$.

Exercice 9 *Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Montrer que :*

1. $X \in \mathcal{A}$;
2. *si A, B sont dans $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \triangle B$ sont dans $\mathcal{A}$;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable).*

Solution. Cela résulte immédiatement des définitions.

1. $X = X \setminus \emptyset \in \mathcal{A}$.

2. $A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ en posant $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$.
   $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \in \mathcal{A}$, donc $A \cap B = X \setminus (X \setminus (A \cap B)) \in \mathcal{A}$.
   $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{B}$ et $A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{B}$.
3. On a :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = X \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n \right) \in \mathcal{A}$$

Exercice 10 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$ *telle que* $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) < +\infty$.
Montrer que :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \mu_{k,n}$$

où on a noté pour $1 \leq k \leq n$ *:*

$$\mu_{k,n} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$$

(formule de Poincaré).

Solution. Comme $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ contient toutes les intersections $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$, l'hypothèse $\mu(A) < +\infty$ nous dit que tous ces ensembles $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ sont tous de mesure finie.
On peut prouver la formule de Poincaré par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, c'est clair.
Pour $n = 2$, on utilise les partitions :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \setminus A_2) \\ A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \\ A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \end{array} \right.$$

ce qui nous donne :

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2)$$

$$\mu(A_2) = \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1)$$

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2) &= \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1) \\ &= \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1) - \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

Supposons le résultat acquis pour $n \geq 2$ et soit $(A_k)_{1\leq k\leq n+1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) < +\infty$.
En notant $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} A_k$ et $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, le cas $n = 2$, nous donne :

$$\mu(A) = \mu(A_{n+1}) + \mu(B) - \mu(A_{n+1} \cap B)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$$

donc :

$$\mu\left(A_{n+1}\right)+\mu\left(B\right)=\sum_{i_1=1}^{n+1}\mu\left(A_{i_1}\right)+\sum_{k=2}^{n}\left(-1\right)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k<n+1}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)$$

(l'inégalité $i_k\leq n$ est équivalente à $i_k<n+1$) et :

$$\begin{aligned}\mu\left(A_{n+1}\cap B\right)&=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}\left(A_k\cap A_{n+1}\right)\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^{j-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq n}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}\cap A_{n+1}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^{j-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j<i_{j+1}=n+1}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}\cap A_{i_{j+1}}\right)\end{aligned}$$

Le changement d'indice $k=j+1$ dans cette dernière somme nous donne :

$$\mu\left(A_{n+1}\cap B\right)=\sum_{k=2}^{n+1}\left(-1\right)^{k}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}<i_k=n+1}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{k-1}}\cap A_{i_k}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mu\left(A\right)&=\sum_{i_1=1}^{n+1}\mu\left(A_{i_1}\right)+\sum_{k=2}^{n}\left(-1\right)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k<n+1}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\\&+\sum_{k=2}^{n+1}\left(-1\right)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}<i_k=n+1}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{k-1}}\cap A_{i_k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n+1}\left(-1\right)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\end{aligned}$$

en utilisant, pour tout k compris entre 2 et $n+1$ la partition :

$$\begin{aligned}\left\{(i_1,\cdots,i_k)\mid 1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1\right\}&=\left\{(i_1,\cdots,i_k)\mid 1\leq i_1<\cdots<i_k<n+1\right\}\\&\cup\left\{(i_1,\cdots,i_{k-1},n+1)\mid 1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}<n+1\right\}\end{aligned}$$

Exercice 11 *Soit $(X,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\left(A_i\right)_{i\in I}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles.*
Montrer que l'ensemble d'indice :

$$D=\left\{k\in I\mid\mathbb{P}\left(A_k\right)\in\left]0,1\right]\right\}$$

est dénombrable (fini ou infini).
En particulier, l'ensemble :

$$\left\{x\in X\mid\mathbb{P}\left(\{x\}\right)\in\left]0,1\right]\right\}$$

est dénombrable.

Solution. En écrivant que $D=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left\{k\in I\mid\mathbb{P}\left(A_k\right)\in\left[\frac{1}{n},1\right]\right\}$, il nous suffit de montrer que tous les :

$$D_n=\left\{k\in I\mid\mathbb{P}\left(A_k\right)\in\left[\frac{1}{n},1\right]\right\}$$

sont finis.

Si pour $n \geq 1$ l'ensembe D_n est infini, on dispose alors d'une suite infinie $\left(A_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que :

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_{k_j}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{k_j}\right) \leq 1$$

avec $\mathbb{P}\left(A_{k_j}\right) \geq \dfrac{1}{n}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible.

Exercice 12

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & \mathcal{P}(X) & \to & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \mathbf{1}_A(x) \end{array}$$

est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$ (mesure de Dirac en x).

2. *On suppose que $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable.*

   Montrer que pour toute suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls tels que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P} : & \mathcal{P}(X) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) \end{array} \qquad (1)$$

est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

3. *Réciproquement, montrer que toute mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(X, \mathcal{P}(X))$ peut s'exprimer sous la forme* (**??**) .

Solution.

1. Comme $x \notin \emptyset$, on a $\delta_x(\emptyset) = 0$.

   Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles et $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

   Si $x \notin A$, on a alors $x \notin A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\delta_x(A_n) = 0$ et :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_x(A_n) = 0 = \delta_x(A)$$

   Si $x \in A$, il existe alors un unique entier n_0 tel que $x \in A_{n_0}$, donc $\delta_x(A_{n_0}) = 1$ et $\delta_x(A_n) = 0$ pour tout $n \neq n_0$, ce qui nous donne :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_x(A_n) = 1 = \delta_x(A)$$

   En définitive, δ_x est bien une mesure sur $\mathcal{P}(X)$.

   Comme $\delta_x(X) = 1$, cette mesure est une probabilité.

2. Comme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ et $0 \leq p_n \delta_{x_n}(A) \leq p_n$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la série définissant $\mathbb{P}(A)$ est bien définie et en particulier :

$$\mathbb{P}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\delta_{x_n}(\emptyset) = 0$, donc $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

En notant $u_{n,m} = p_n \delta_{x_n}(A_m)$ pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A_m) = p_n \sum_{m=0}^{+\infty} \delta_{x_n}(A_m) = p_n \delta_{x_n}(A) < +\infty$$

et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_n < +\infty$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A_m) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A_m) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_m)\end{aligned}$$

En conclusion $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

3. Il suffit de poser $p_n = \mathbb{P}(\{x_n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On a bien :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{x_n\}) = \mathbb{P}(X) = 1$$

   et pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ x_n \in A}} \mathbb{P}(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A)$$

Exercice 13 *Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ telle que :*
- $\emptyset \in \mathcal{A}$ *;*
- $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;*
- $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2,\ A \cap B \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par intersection finie) ;*

($\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole) et $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ une application telle que :
- $\mu(\emptyset) = 0$ *;*
- *μ est σ-additive (i. e. $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$).*

1. *Montrer que, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ et $A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$ (dans le cas où $n \geq 2$).*
2. *Montrer que μ est croissante.*
3. *Soient $A \in \mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que :*

$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

   (inégalité de Boole).

Solution.

1. On vérifie facilement par récurrence sur $n \geq 1$ que, pour toute suite finie $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, donc :
$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus A_k) \in \mathcal{A}$$
et $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X \setminus \left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \in \mathcal{A}$.
Pour A, B dans $\mathcal{A}$, on a $B \setminus A = (X \setminus A) \cap B \in \mathcal{A}$, donc $A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$.

2. Pour $A \subset B$ dans $\mathcal{A}$, on a $B \setminus A \in \mathcal{A}$ et :
$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$
ce qui signifie que μ est croissante.

3. La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de X définie par $B_0 = A_0$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$
est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (pour $0 \leq n < m$, on a $B_n \subset A_n$ et un élément de B_m n'est pas dans A_n).
Comme $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
Pour tout $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ il existe un plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_n$.
Si $n = 0$, on a alors $x \in A_0 = B_0$.
Si $n \geq 1$, on a alors $x \in A_n$ et $x \notin A_k$ pour tout k compris entre 0 et $n-1$, soit $x \in B_n$.
On a donc $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap B_n$ dans $\mathcal{A}$.
Comme μ est σ-additive et croissante, il en résulte que :
$$\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap B_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$
(puisque $A \cap B_n \subset B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 14 *On se propose de montrer qu'une tribu dénombrable sur X est nécessairement finie de cardinal égal à une puissance de 2.*
Ce qui revient aussi à dire qu'une tribu infinie est non dénombrable.
Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre dénombrable sur X.
Pour tout $x \in X$, on note :
$$A(x) = \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ x \in A}} A$$
(atome de x).

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, $A(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ qui contient x.*
2. *Soient x, y dans X. Montrer que si $y \in A(x)$, on a alors $A(x) = A(y)$.*
3. *Montrer que, pour tous x, y dans X, on a $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ ou $A(x) = A(y)$.*

4. *En désignant par* $(x_i)_{i\in I}$ *la famille des éléments de* X *telle que les* $A(x_i)$ *soient deux à deux disjoints, montrer que cette famille est dénombrable et que pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *on a une partition* $A = \bigcup_{j\in J} A(x_j)$, *où* J *est une partie de* I.
5. *En déduire que* $\mathcal{A}$ *est finie, son cardinal étant une puissance de* 2.

Solution.

1. Comme $x \in X \in \mathcal{A}$, il existe des éléments de $\mathcal{A}$ qui contiennent x et $A(x)$ est bien défini contenant x. Comme $\mathcal{A}$ est dénombrable, l'ensemble $A(x)$ qui est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$.
   Si A est un élément de $\mathcal{A}$ qui contient x, il fait partie des éléments de $\mathcal{A}$ qui apparaissent dans l'intersection $A(x)$, donc $A(x) \subset A$.
2. Si $y \in A(x)$, l'ensemble $A(x)$ est un élément de $\mathcal{A}$ qui contient x, donc $A(y) \subset A(x)$.
   Pour montrer que $A(x) \subset A(y)$, il nous suffit de montrer que $x \in A(y)$.
   Si $x \notin A(y)$, l'ensemble $A(x) \setminus A(y)$ est dans $\mathcal{A}$ contenant x, donc :
   $$A(x) \subset A(x) \setminus A(y) \subset A(x)$$
   soit $A(x) = A(x) \setminus A(y)$ avec $A(y) \subset A(x)$, ce qui équivaut à $A(y) = \emptyset$ et contredit le fait que $y \in A(y)$.
   On a donc l'égalité $A(x) = A(y)$.
3. Si $A(x) \cap A(y) = \emptyset$, c'est alors terminé.
   Sinon, pour tout $z \in A(x) \cap A(y)$, on a $A(x) = A(z) = A(y)$.
4. Comme les $A(x)$ sont dans $\mathcal{A}$ qui est dénombrable, la famille $(A(x))_{x\in X}$ est aussi dénombrable et comme deux de ces ensembles sont disjoints ou confondus, il existe une partie I de $\mathbb{N}$ telle que $(A(x))_{x\in X} = (A(x_i))_{i\in I}$ (axiome du choix dénombrable : on choisit un représentant de chaque classe dans la relation d'équivalence « être dans le même $A(x)$ », les $A(x_i)$ étant deux à deux disjoints.
   On a donc une partition $X = \bigcup_{i\in I} A(x_i)$.
   Tout $A \in \mathcal{A}$ s'écrit $A = A \cap X = \bigcup_{i\in I} (A \cap A(x_i))$.
   Pour $i \in I$ tel que $A \cap A(x_i) \neq \emptyset$, il existe $x \in A \cap A(x_i)$, donc $x \in A$ et $A(x_i) = A(x)$ (puisque $x \in A(x_i)$), ce qui nous donne $A(x_i) \subset A$ (caractère minimal de $A(x) = A(x_i)$) et $A \cap A(x_i) = A(x_i)$.
   On a donc en définitive, $A = \bigcup_{j\in J} A(x_j)$ où $J \subset I$.
5. Si I est infini, on peut alors prendre $I = \mathbb{N}$ et l'application :
   $$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \rightarrow & \mathcal{A} \\ & J & \mapsto & \bigcup_{j\in J} A(x_j) \end{array}$$
   est bijective.
   En effet, elle est surjective car tout $A \in \mathcal{A}$ s'écrit $A = \bigcup_{j\in J} A(x_j)$ où $J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
   Pour $J \neq K$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a $\varphi(J) \neq \varphi(K)$ puisque les $A(x_i)$, pour $i \in \mathbb{N}$, sont non vides et deux à deux disjoints.
   Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable, on aboutit à une contradiction.
   Donc I est fini et il en est de même de $\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j\in J} A(x_j) \mid J \subset I \right\}$.
   Précisément, on a :
   $$\operatorname{card}(\mathcal{A}) = \operatorname{card}(\mathcal{P}(I)) = 2^{\operatorname{card}(I)}$$

Exercice 15 *Soit X un ensemble dénombrable.*
Montrer que la σ-algèbre engendrée par les singletons de X est $\mathcal{P}(X)$.

Solution. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ la σ-algèbre engendrée par les singletons de X.
Tout $A \in \mathcal{P}(X)$ s'écrivant comme réunion dénombrable de singletons, il est dans $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

Exercice 16 *Soit X un ensemble non dénombrable.*

1. *Montrer que la famille $\mathcal{A}$ formée des parties A de X telles que A ou ou $X \setminus A$ est dénombrable est une σ-algèbre sur X.*
2. *Montrer que $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre engendrée par les singletons de X.*
3. *Montrer que l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \mathcal{A} & \to & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \textit{ si } A \textit{ est dénombrable} \\ 1 \textit{ si } X \setminus A \textit{ est dénombrable} \end{array} \right. \end{array}$$

est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$.

Solution.

1. Comme $\emptyset$ est dénombrable, il est dans $\mathcal{A}$.
Soit $A \in \mathcal{A}$. Si A est dénombrable, alors $X \setminus A$ est de complémentaire dénombrable, donc $X \setminus A \in \mathcal{A}$, sinon $X \setminus A$ est dénombrable et $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Si tous les A_n sont dénombrables, il en est alors de même de A et $A \in \mathcal{A}$.
Sinon, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $X \setminus A_{n_0}$ est dénombrable et avec :
$$X \setminus A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n) \subset X \setminus A_{n_0}$$
on déduit que $X \setminus A$ est dénombrable et $A \in \mathcal{A}$.
2. Un singleton qui est dénombrable est dans $\mathcal{A}$, donc la σ-algèbre $\mathcal{A}'$ engendrée par les singletons de X est contenue dans $\mathcal{A}$.
Soit A dans $\mathcal{A}$.
Si A est dénombrable, il est alors réunion dénombrable de singletons, donc dans $\mathcal{A}'$, sinon c'est $X \setminus A$ qui est dénombrable donc dans $\mathcal{A}'$ et $A = X \setminus (X \setminus A)$ est aussi dans $\mathcal{A}'$.
On a donc $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.
3. On a $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ car $\emptyset$ est dénombrable.
Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Si tous les A_n sont dénombrables, il en est alors de même de $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et :
$$\mathbb{P}(A) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$
Sinon, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $X \setminus A_{n_0}$ est dénombrable. Comme $A_n \cap A_{n_0} = \emptyset$ pour $n \neq n_0$, on a $A_n \subset X \setminus A_{n_0}$ et A_n est dénombrable, donc :
$$\mathbb{P}(A) = 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$
(A qui contient A_{n_0} est non dénombrable comme X, donc $X \setminus A$ est dénombrable puisque $A \in \mathcal{A}$).

Exercice 17 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Montrer que si A, B sont des éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A \subset B$ et $\mu(B) < +\infty$, on a alors :*
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$
2. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $\mu(A)$ (continuité croissante de μ).*
3. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En supposant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers $\mu(A)$ (continuité décroissante de μ).*

Solution.

1. Pour $A \subset B$ dans $\mathcal{A}$, on a la partition $B = A \cup (B \setminus A)$, donc :
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$
Avec $\mu(A) \leq \mu(B) < +\infty$, on en déduit que :
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$
2. On a la partition :
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$$
En effet si $x \in A$, il existe un entier n tel que $x \in A_n$. Si $n = 0$, on a bien $x \in A_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$, sinon en désignant par $n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $x \in A_n$, on a $x \in A_n \setminus A_{n-1}$ et $x \in A_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$.
Pour $0 \leq n < m$, on a $A_n \subset A_{m-1}$ et $(A_m \setminus A_{m-1}) \cap A_n = \emptyset$, donc $(A_m \setminus A_{m-1}) \cap (A_n \setminus A_{n-1}) = \emptyset$ (en posant $A_{-1} = \emptyset$).
Il en résulte que :
$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\mu(A_0) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \setminus A_{k-1}) \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$
la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante.
3. Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a :
$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n \subset A_{n_0}$$
et :
$$\mu(A) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_{n_0} \setminus A)$$

(puisque $\mu(A_{n_0}) < +\infty$) avec :

$$A_{n_0} \setminus A = A_{n_0} \setminus \bigcap_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty} (A_{n_0} \setminus A_n)$$

la suite $(A_{n_0} \setminus A_n)_{n \geq n_0+1}$ étant croissante dans $\mathcal{A}$, ce qui nous donne :

$$\mu(A_{n_0} \setminus A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_{n_0} \setminus A_n) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

et :

$$\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

la suite $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante.
Si tous les $\mu(A_n)$ sont infinis, ce résultat n'est plus vrai comme le montrer de $A_n = [n, +\infty[$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue. On a $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Exercice 18 *Soient $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x])$$

(fonction de répartion de $\mathbb{P}$).

1. *Montrer que F est croissante avec, pour tout réel x :*

$$\lim_{t \to x^+} F(t) = F(x),\ \lim_{t \to x^-} F(t) = F(x) - \mathbb{P}(\{x\})$$

et :

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0,\ \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$$

2. *Montrer que l'ensemble :*

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\{x\}) > 0\}$$

est dénombrable.

Solution.

1. Pour $x \leq y$, on a $]-\infty, x] \subset]-\infty, y]$ et en conséquence $F(x) \leq F(y)$.
Comme F est croissante, elle admet une limite à gauche $F(x^-)$ et une limite à droite $F(x^+)$ en tout point x.
Pour $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right)_{n \geq 1}$ est décroissante dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et :

$$]-\infty, x] = \bigcap_{n \geq 1} \left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right]$$

donc :

$$F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n \to +\infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right) = F(x^+)$$

ce qui signifie que continue à droite en x.
Avec les mêmes arguments, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(]-\infty, x[) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \left]-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right) &= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left]-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right) = F(x^-) \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}1=\mathbb{P}(\mathbb{R})=\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1}]-\infty,n]\right)&=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(]-\infty,n])\\&=\lim_{n\to+\infty}F(n)=\lim_{t\to+\infty}F(t)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}0=\mathbb{P}(\emptyset)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}]-\infty,-n]\right)&=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(]-\infty,-n])\\&=\lim_{n\to+\infty}F(-n)=\lim_{t\to-\infty}F(t)=0\end{aligned}$$

(F est croissante minorée par 0 et majorée par 1, donc les limites en $-\infty$ et $+\infty$ existent).

2. L'ensemble des points de discontinuité de F est dénombrable puisque cette fonction est décroissante (donc réglée).
   Mais F est continue en x si, et seulement si, $\lim\limits_{t\to x^+}F(t)=\lim\limits_{t\to x^-}F(t)=F(x)$, ce qui revient à dire que $\mathbb{P}(\{x\})=0$, donc l'ensemble $\mathcal{D}$ est exactement l'ensemble des points de discontinuité de F et il est dénombrable.
   En fait, on a déjà montré ce résultat sans référence aux fonctions réglées.

Exercice 19 *Soit $n\geq 2$ un entier naturel.*
On considère l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P})$, où $\Omega=\{1,\cdots,n\}$ et :

$$\forall k\in\Omega,\ \mathbb{P}(\{k\})=\frac{1}{n}$$

ce qui revient à considérer l'expérience aléatoire qui consiste à choisir de manière équiprobable un entier compris entre 1 et n.
Pour tout diviseur positif d de n, on désigne par A_d l'événement :≪ le nombre choisi est divisible par d ≫.

1. *Calculer $\mathbb{P}(A_d)$ pour tout diviseur positif d de n.*
2. *Montrer que si $2\leq p_1<p_2<\cdots<p_r$ sont tous les diviseurs premiers de n, les événements $A_{p_1},\cdots,A_{p_r}$ sont alors mutuellement indépendants.*
3. *Soient $(\Omega,\mathcal{B},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1,\cdots,A_n$, où $n\geq 2$, des événements mutuellement indépendants dans $\mathcal{B}$.*
   (a) *Montrer que $\Omega\setminus A_1,A_2,\cdots,A_n$ sont mutuellement indépendants.*
   (b) *En déduire que pour tout entier k compris entre 1 et n, les événements $\Omega\setminus A_1,\cdots,\Omega\setminus A_k,A_{k+1},\cdots,A_n$ sont mutuellement indépendants.*
4. *On désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler définie sur $\mathbb{N}^*$ par*

$$\varphi(n)=\operatorname{card}\{k\in\{1,\cdots,n\}\mid k\wedge n=1\}$$

   Montrer que

$$\varphi(n)=n\prod_{k=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

5. *Soit d un diviseur positif d de n. Calculer la probabilité de l'événement B_d : ≪ le nombre a choisi est tel que $a\wedge n=d$ ≫.*

6. *En déduire que :*

$$n = \sum_{d/n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

Solution.

1. Pour d divisant n, on a $n = qd$ et :

$$A_d = \{a \in \Omega \mid \exists j \in \Omega \; ; \; a = dj\} = \{d, 2d, \cdots, qd\}$$

donc :

$$\mathbb{P}(A_d) = \frac{\text{card}(A_d)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{q}{n} = \frac{1}{d}$$

2. On rappelle que, si $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, des événements $A_1, \cdots, A_r$, où $r \geq 2$, sont dits mutuellement indépendants dans $\mathcal{B}$ si, pour toute partie J non vide de $\{1, 2, \cdots, r\}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Soit J une partie non vide de $\{1, 2, \cdots, r\}$. Les entiers p_j pour $j \in J$ sont premiers et distincts, donc premiers entre eux et un entier a compris entre 1 et n, est divisible par tous les p_j si, et seulement si, il est divisible par leur produit. On a donc :

$$\bigcap_{j\in J} A_{p_j} = A_{\prod\limits_{j\in J} p_i}$$

et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_{p_j}\right) = \mathbb{P}(A_{\prod\limits_{j\in J} p_i}) = \frac{1}{\prod\limits_{j\in J} p_i} = \prod_{j\in J} \frac{1}{p_j} = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_{pj})$$

Les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont donc mutuellement indépendants.

3.

(a) On note $A'_1 = \Omega \setminus A_1$, $A'_k = A_k$ pour k compris entre 2 et n et on se donne une partie J non vide de $\{1, 2, \cdots, n\}$.
Si $1 \notin J$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A'_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}\left(A'_j\right).$$

Si J a plus de 2 éléments et $1 \in J$ (pour $J = \{1\}$, il n'y a rien à montrer), on a alors :

$$\bigcap_{j\in J} A'_j = (\Omega \setminus A_1) \cap \left(\bigcap_{j\in J\setminus\{1\}} A_j\right) = \bigcap_{j\in J\setminus\{1\}} A_j \setminus \bigcap_{j\in J} A_j$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A'_j\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J\setminus\{1\}} A_j\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \\
&= \prod_{j\in J\setminus\{1\}} \mathbb{P}(A_j) - \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j) \\
&= (1 - \mathbb{P}(A_1)) \prod_{j\in J\setminus\{1\}} \mathbb{P}(A_j) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}\left(A'_j\right)
\end{aligned}$$

(b) On procède par récurrence finie.

4. Si A désigne l'événement : « l'entier choisi est premier avec n », on a alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\varphi(n)}{n}$$

et en désignant par $p_1 < \cdots < p_r$ tous les diviseurs premiers de n, on aura $k \in A$ si, et seulement si, k n'est divisible par aucun des p_i, donc :

$$A = \bigcap_{i=1}^{r} (\Omega \setminus A_{p_i})$$

Les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ étant mutuellement indépendants, il en est de même des événements $\Omega \setminus A_{p_1}, \cdots, \Omega \setminus A_{p_r}$, donc :

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}(\Omega \setminus A_{p_i}) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

5. On a $n = qd$ et :

$$B_d = \{a \in \Omega \mid a \wedge n = d\} = \{a \in \Omega \mid a \wedge qd = d\}$$

Dire que $a \wedge qd = d$ équivaut à dire que d divise a et $\frac{a}{d} \wedge q = 1$, ce qui revient à dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $a = kd$ et $k \wedge q = 1$. Comme $1 \leq a = kd \leq n = qd$, on a $1 \leq k \leq q$ et donc :

$$\operatorname{card}(B_d) = \operatorname{card}\{k \in \{1, \cdots, q\} \mid k \wedge q = 1\} = \varphi(q)$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(B_d) = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

6. On a la partition $\Omega = \bigcup_{d/n} B_d$ (les B_d forment un système complet d'événements), ce qui nous donne :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{d/n} \mathbb{P}(B_d) = \frac{1}{n} \sum_{d/n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$