

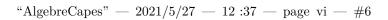


Table des matières

Avant-propos						
1	Élér	nents de logique et de théorie des ensembles	1			
	1.1	Quelques notions de logique	1			
	1.2	Les connecteurs logiques de base	2			
	1.3	Quelques méthodes de raisonnement	4			
	1.4	Notions de base sur les ensembles. Quantificateurs	5			
	1.5	Les symboles \sum et \prod	7			
	1.6	Les théorèmes de récurrence	8			
	1.7	L'algèbre des parties d'un ensemble	9			
	1.8	Applications. Notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité	11			
	1.9	Relations d'ordre et d'équivalence	16			
	1.10	Exercices	18			
2	Stru	acture de groupe	31			
	2.1	Loi de composition interne	31			
	2.2	Groupes	33			
	2.3	Sous-groupes	35			
	2.4	Sous-groupe engendré par une partie	36			
	2.5	Groupes monogènes	37			
	2.6	Groupes finis. Théorème de Lagrange	39			
	2.7	Morphismes de groupes	40			
	2.8	Ordre d'un élément dans un groupe	43			
	2.9	Exercices	46			
3	Stru	ctures d'anneau et de corps	57			
	3.1	Anneaux	57			
	3.2	Éléments inversibles dans un anneau unitaire	60			
	3.3	Sous-anneaux	61			
	3.4	Morphismes d'anneaux	62			
	3.5	Corps	62			
	3.6	Morphismes de corps	64			
	3.7	Exercices	64			









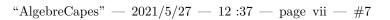


vi

4.1 Divisibilité et congruences 4.2 Le théorème de division euclidienne dans $\mathbb Z$ 7.3 4.3 Les systèmes de numération 7.4 4.4 Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple 7.4 4.5 L'algorithme d'Euclide 8.6 4.6 Equations diophantiennes $ax + by = c$ 8.7 4.7 Equations $ax \equiv b \ (n)$ 8.8 4.8 Le théorème Chinois 8.9 4.9 L'ensemble $\mathcal P$ des nombres premiers 8.10 Décomposition en facteurs premiers 8.11 Les théorèmes de Fermat et de Wilson 8.12 Les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et la fonction indicatrice d'Euler 9.13 Exercices 5 Le corps $\mathbb C$ des nombres complexes 9.10 Conditions nécessaires à la construction de $\mathbb C$ 110 5.2 Construction de $\mathbb C$ 111 5.4 Les équations de degré 2 112 5.5 Les équations de degré 3 et 4 115 5.6 Arguments d'un nombre complexe 115 5.7 Racines n -ièmes d'un nombre complexe 126 Espaces vectoriels réels ou complexes 127 6.2 Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe 128 6.4 Applications linéaires 139 6.5 Base canonique de $\mathbb K^n$ et expression matricielle des applications linéaires de $\mathbb K^n$ dans $\mathbb K^m$ 140 6.6 Matrices réelles ou complexes 151 6.7 Systèmes d'équations linéaires 152 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 153 6.7 Systèmes d'équations linéaires 154 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 155 6.7 Systèmes d'équations linéaires 156 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 157 6.9 Exercices 158 6.9 Exercices 169 6.9 Exercices 160 7.1 Systèmes libres, systèmes générateurs et bases 161 6.9 Exercices 162 6.9 Exercices 163 7.1 Systèmes libres, systèmes générateurs et bases 164 6.9 Exercices 165 6.9 Exercices 166 6.9 Exercices 167 6.0 Exercices 168 7.1 Systèmes de deimension finie 178 7.2 Espaces vectoriels de dimension linéaires 189 7.5 Formules de changement de base 180 7.6 Exercices	4	Div	ision euclidienne dans $\mathbb Z$	71	
4.3 Les systèmes de numération 4.4 Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple 7.5 L'algorithme d'Euclide 7.6 Equations diophantiennes $ax + by = c$ 8.6 Equations $ax \equiv b (n)$ 8.7 Equations $ax \equiv b (n)$ 8.8 Le théorème Chinois 8.9 L'ensemble P des nombres premiers 8.1 Décomposition en facteurs premiers 8.1 Les théorèmes de Fermat et de Wilson 8.2 Et al fonction indicatrice d'Euler 8.3 Le torps \mathbb{C} des nombres complexes 8.6 Le corps \mathbb{C} des nombres complexes 9.7 Le corps \mathbb{C} des nombres complexes 9.7 Le corps \mathbb{C} des nombres complexes 10.5 Le corps \mathbb{C} des nombres complexes 11.6 S.2 Construction de \mathbb{C} 11.6 S.3 Conjugué et module d'un nombre complexe 11.6 Les équations de degré 2 11.6 Les équations de degré 2 11.6 Arguments d'un nombre complexe 12.5 Les équations de degré 2 13.6 Arguments d'un nombre complexe 14.6 Arguments d'un nombre complexe 15.7 Racines n -ièmes d'un nombre complexe 16.1 L'espace vectoriels \mathbb{K}^n 17.6 Espaces vectoriels réels ou complexes 18.6 L'espace vectoriels réels ou complexes 18.6 Applications linéaires 18.6 Applications linéaires 18.6 Sous-espaces vectoriels 18.7 Espaces vectoriels réels ou complexes 18.6 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 18.6 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 18.7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 18.7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 18.7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 18.7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 18.7 Expression matricielle des applications linéaires 18.7 Expression matricielle des applications linéaires		4.1	Divisibilité et congruences	71	
4.4 Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple 4.5 L'algorithme d'Euclide 4.6 Equations diophantiennes $ax + by = c$ 8.7 4.7 Equations $ax \equiv b \ (n)$ 8.8 4.8 Le théorème Chinois 4.9 L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers 8.10 Décomposition en facteurs premiers 8.11 Les théorèmes de Fermat et de Wilson 8.11 Les théorèmes de Fermat et de Wilson 8.12 Les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et la fonction indicatrice d'Euler 9.13 Exercices 9.7 5 Le corps \mathbb{C} des nombres complexes 9.1 Conditions nécessaires à la construction de \mathbb{C} 1.1 Conditions nécessaires à la construction de \mathbb{C} 1.1 Les équations de degré 2 1.1 Les équations de degré 3 et 4 1.2 Les équations de degré 3 et 4 1.3 Exercices 1.4 L'espace vectoriels n -ièmes d'un nombre complexe 1.5 Les équations de degré 3 et 4 1.6 Arguments d'un nombre complexe 1.7 Racines n -ièmes d'un nombre complexe 1.8 Exercices 1.9 Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe 1.1 L'espace vectoriel \mathbb{K}^n 1.2 Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe 1.4 Applications linéaires 1.5 Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 1.4 Canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 1.4 Espaces vectoriels réels ou complexes 1.5 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 1.6 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 1.7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 1.7 Espaces vectoriels de dimension finie 1.7 Espaces vectoriels de dimension finie 1.7 Expression matricielle des applications linéaires 1.8 Expression matricielle des applications linéaires 1.8 Formules de changement de base		4.2	Le théorème de division euclidienne dans $\mathbb Z$	72	
4.5 L'algorithme d'Euclide 4.6 Equations diophantiennes $ax + by = c$ 8.7 Equations $ax \equiv b \ (n)$ 8.8 Le théorème Chinois 8.9 L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers 8.9 L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers 8.10 Décomposition en facteurs premiers 8.11 Les théorèmes de Fermat et de Wilson 8.11 Les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et la fonction indicatrice d'Euler 9.2 Les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et la fonction indicatrice d'Euler 9.7 Le corps \mathbb{C} des nombres complexes 9.7 Le conditions nécessaires à la construction de \mathbb{C} 110 5.1 Conditions nécessaires à la construction de \mathbb{C} 111 5.2 Construction de \mathbb{C} 112 Les équations de degré 2 113 Exercices 114 5.5 Les équations de degré 2 115 5.4 Les équations de degré 3 et 4 116 5.6 Arguments d'un nombre complexe 117 5.8 Exercices 118 6.1 L'espace vectoriels réels ou complexe 119 6.2 Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe 120 6.3 Sous-espaces vectoriels 121 6.4 Applications linéaires 122 6.5 Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 146 6.6 Matrices réelles ou complexes 156 6.7 Systèmes d'équations linéaires 157 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 168 6.9 Exercices 169 Exercices 160 7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 170 7.1 Systèmes libres, systèmes générateurs et bases 160 7.2 Espaces vectoriels de dimension finie 171 7.3 Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire 172 Expression matricielle des applications linéaires 184 7.5 Formules de changement de base		4.3	Les systèmes de numération	73	
4.5 L'algorithme d'Euclide 4.6 Equations diophantiennes $ax + by = c$ 8.7 Equations $ax \equiv b \ (n)$ 8.8 Le théorème Chinois 8.9 L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers 8.9 L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers 8.10 Décomposition en facteurs premiers 8.11 Les théorèmes de Fermat et de Wilson 8.11 Les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et la fonction indicatrice d'Euler 9.2 Les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et la fonction indicatrice d'Euler 9.7 Le corps \mathbb{C} des nombres complexes 9.7 Le conditions nécessaires à la construction de \mathbb{C} 110 5.1 Conditions nécessaires à la construction de \mathbb{C} 111 5.2 Construction de \mathbb{C} 112 Les équations de degré 2 113 Exercices 114 5.5 Les équations de degré 2 115 5.4 Les équations de degré 3 et 4 116 5.6 Arguments d'un nombre complexe 117 5.8 Exercices 118 6.1 L'espace vectoriels réels ou complexe 119 6.2 Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe 120 6.3 Sous-espaces vectoriels 121 6.4 Applications linéaires 122 6.5 Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 146 6.6 Matrices réelles ou complexes 156 6.7 Systèmes d'équations linéaires 157 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 168 6.9 Exercices 169 Exercices 160 7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 170 7.1 Systèmes libres, systèmes générateurs et bases 160 7.2 Espaces vectoriels de dimension finie 171 7.3 Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire 172 Expression matricielle des applications linéaires 184 7.5 Formules de changement de base		4.4	Ÿ	74	
4.6 Equations diophantiennes $ax + by = c$		4.5		80	
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		4.6	•		
4.8Le théorème Chinois844.9L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers854.10Décomposition en facteurs premiers874.11Les théorèmes de Fermat et de Wilson894.12Les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et la fonction indicatrice d'Euler924.13Exercices975Le corps \mathbb{C} des nombres complexes1095.1Conditions nécessaires à la construction de \mathbb{C} 1105.2Construction de \mathbb{C} 1105.3Conjugué et module d'un nombre complexe1155.4Les équations de degré 21165.5Les équations de degré 3 et 41195.6Arguments d'un nombre complexe1205.7Racines n -ièmes d'un nombre complexe1275.8Exercices1276Espaces vectoriels réels ou complexes1396.1L'espace vectoriel \mathbb{K}^n 1306.2Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe1406.3Sous-espaces vectoriels1426.4Applications linéaires1426.5Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 1486.6Matrices réelles ou complexes1566.7Systèmes d'équations linéaires1506.8Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels1606.9Exercices1617.1Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie1717.3Rang d'un systè		4.7			
4.9L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers854.10Décomposition en facteurs premiers874.11Les théorèmes de Fermat et de Wilson894.12Les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et la fonction indicatrice d'Euler924.13Exercices975Le corps \mathbb{C} des nombres complexes1095.1Conditions nécessaires à la construction de \mathbb{C} 1105.2Construction de \mathbb{C} 1105.3Conjugué et module d'un nombre complexe1125.4Les équations de degré 21165.5Les équations de degré 3 et 41195.6Arguments d'un nombre complexe1205.7Racines n -ièmes d'un nombre complexe1255.8Exercices1276Espaces vectoriels réels ou complexes1396.1L'espace vectoriel \mathbb{K}^n 1396.2Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe1406.3Sous-espaces vectoriels1426.4Applications linéaires1426.5Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 1496.6Matrices réelles ou complexes1506.7Systèmes d'équations linéaires1506.8Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels1606.9Exercices1617.1Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie1717.2Espaces vectoriels de dimension finie1727.4		4.8			
4.10 Décomposition en facteurs premiers 87 4.11 Les théorèmes de Fermat et de Wilson 88 4.12 Les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et la fonction indicatrice d'Euler 92 4.13 Exercices 97 5 Le corps \mathbb{C} des nombres complexes 106 5.1 Conditions nécessaires à la construction de \mathbb{C} 116 5.2 Construction de \mathbb{C} 116 5.3 Conjugué et module d'un nombre complexe 115 5.4 Les équations de degré 2 116 5.5 Les équations de degré 3 et 4 119 5.6 Arguments d'un nombre complexe 120 5.7 Racines n -ièmes d'un nombre complexe 122 5.8 Exercices 122 6 Espaces vectoriels réels ou complexes 123 6.1 L'espace vectoriel \mathbb{K}^n 133 6.2 Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe 144 6.3 Sous-espaces vectoriels \mathbb{K}^n 146 6.4 Applications linéaires 146 6.5 Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 146 6.6 Matrices réelles ou complexes 156 6.7 Systèmes d'équations linéaires 156 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 166 6.9 Exercices 167 7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 169 7.1 Systèmes libres, systèmes générateurs et bases 160 7.2 Espaces vectoriels de dimension finie 177 7.3 Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire 177 7.4 Expression matricielle des applications linéaires 181 7.5 Formules de changement de base 184		4.9		85	
4.11 Les théorèmes de Fermat et de Wilson		4.10			
4.12 Les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et la fonction indicatrice d'Euler 92 4.13 Exercices 97 5 Le corps \mathbb{C} des nombres complexes 108 5.1 Conditions nécessaires à la construction de \mathbb{C} 110 5.2 Construction de \mathbb{C} 110 5.3 Conjugué et module d'un nombre complexe 115 5.4 Les équations de degré 2 116 5.5 Les équations de degré 3 et 4 119 5.6 Arguments d'un nombre complexe 120 5.7 Racines n -ièmes d'un nombre complexe 122 5.8 Exercices 127 6 Espaces vectoriels réels ou complexes 129 6.1 L'espace vectoriel \mathbb{K}^n 139 6.2 Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe 140 6.3 Sous-espaces vectoriels 142 6.4 Applications linéaires 144 6.5 Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 144 6.6 Matrices réelles ou complexes 150 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 160 6.9 Exercices 161 7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 7.1 Systèmes d'équations linéaires et bases 163 7.2 Espaces vectoriels de dimension finie 177 7.3 Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire 177 7.4 Expression matricielle des applications linéaires 187 7.5 Formules de changement de base 184					
4.13 Exercices 97 Le corps $\mathbb C$ des nombres complexes 106 5.1 Conditions nécessaires à la construction de $\mathbb C$ 116 5.2 Construction de $\mathbb C$ 116 5.3 Conjugué et module d'un nombre complexe 113 5.4 Les équations de degré 2 116 5.5 Les équations de degré 3 et 4 119 5.6 Arguments d'un nombre complexe 120 5.7 Racines n -ièmes d'un nombre complexe 122 5.8 Exercices 127 6 Espaces vectoriels réels ou complexes 139 6.1 L'espace vectoriel $\mathbb K^n$ 139 6.2 Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe 140 6.3 Sous-espaces vectoriels 142 6.4 Applications linéaires 144 6.5 Base canonique de $\mathbb K^n$ et expression matricielle des applications linéaires de $\mathbb K^n$ dans $\mathbb K^m$ 144 6.6 Matrices réelles ou complexes 156 6.7 Systèmes d'équations linéaires 159 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 160 7.1 Systèmes libres, systèmes générateurs et bases 160 7.2 Espaces vectoriels de dimension finie 177 7.3 Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaires 187 7.4 Expression matricielle des applications linéaires 187 7.5 Formules de changement de base 184			·//.		
5Le corps $\mathbb C$ des nombres complexes1095.1Conditions nécessaires à la construction de $\mathbb C$ 1105.2Construction de $\mathbb C$ 1105.3Conjugué et module d'un nombre complexe1135.4Les équations de degré 21165.5Les équations de degré 3 et 41155.6Arguments d'un nombre complexe1205.7Racines n -ièmes d'un nombre complexe1255.8Exercices1276Espaces vectoriels réels ou complexes1396.1L'espace vectoriel $\mathbb K^n$ 1396.2Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe1406.3Sous-espaces vectoriels1426.4Applications linéaires1426.5Base canonique de $\mathbb K^n$ et expression matricielle des applications linéaires de $\mathbb K^n$ dans $\mathbb K^m$ 1496.6Matrices réelles ou complexes1506.7Systèmes d'équations linéaires1506.8Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels1606.9Exercices1617Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie1627.1Systèmes libres, systèmes générateurs et bases1607.2Espaces vectoriels de dimension finie1737.3Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire1757.4Expression matricielle des applications linéaires1817.5Formules de changement de base184		4.10	$n\mathbb{Z}$		
5.1 Conditions nécessaires à la construction de \mathbb{C}		4.13	Exercices	97	
5.2Construction de \mathbb{C} 1165.3Conjugué et module d'un nombre complexe1135.4Les équations de degré 21165.5Les équations de degré 3 et 41185.6Arguments d'un nombre complexe1265.7Racines n -ièmes d'un nombre complexe1255.8Exercices1276Espaces vectoriels réels ou complexes1396.1L'espace vectoriel \mathbb{K}^n 1396.2Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe1406.3Sous-espaces vectoriels1426.4Applications linéaires1466.5Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 1486.6Matrices réelles ou complexes1506.7Systèmes d'équations linéaires1506.8Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels1606.9Exercices1617Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie1627.1Systèmes libres, systèmes générateurs et bases1637.2Espaces vectoriels de dimension finie1717.3Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire1737.4Expression matricielle des applications linéaires1847.5Formules de changement de base184	5	Le d		109	
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		5.1		110	
$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		5.2		110	
5.5 Les équations de degré 3 et 4 119 5.6 Arguments d'un nombre complexe 120 5.7 Racines n -ièmes d'un nombre complexe 125 5.8 Exercices 127 6 Espaces vectoriels réels ou complexes 139 6.1 L'espace vectoriel \mathbb{K}^n 139 6.2 Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe 140 6.3 Sous-espaces vectoriels 142 6.4 Applications linéaires 140 6.5 Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 149 6.6 Matrices réelles ou complexes 150 6.7 Systèmes d'équations linéaires 150 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 160 6.9 Exercices 160 7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 160 7 Espaces vectoriels de dimension finie 170 7 7 Espaces vectoriels de dimension finie 170 7 7 Expression matricielle des applications linéaires 180 7 7 7 7 7 7 7 7 <td< th=""><th></th><th>5.3</th><th>Conjugué et module d'un nombre complexe</th><th>113</th></td<>		5.3	Conjugué et module d'un nombre complexe	113	
5.6 Arguments d'un nombre complexe 120 5.7 Racines n -ièmes d'un nombre complexe 125 5.8 Exercices 127 6 Espaces vectoriels réels ou complexes 139 6.1 L'espace vectoriel \mathbb{K}^n 139 6.2 Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe 140 6.3 Sous-espaces vectoriels 140 6.4 Applications linéaires 140 6.5 Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 140 6.6 Matrices réelles ou complexes 150 6.7 Systèmes d'équations linéaires 150 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 160 6.9 Exercices 160 7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 160 7 Espaces vectoriels de dimension finie 160 7 Espaces vectoriels de dimension finie 170 7 Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire 170 7 Expression matricielle des applications linéaires 180 7 Expression matricielle des applications linéaires 180 7 Formules de changement de base 180		5.4		116	
5.7 Racines n -ièmes d'un nombre complexe 125 5.8 Exercices 127 6 Espaces vectoriels réels ou complexes 139 6.1 L'espace vectoriel \mathbb{K}^n 139 6.2 Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe 140 6.3 Sous-espaces vectoriels 142 6.4 Applications linéaires 142 6.5 Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 149 6.6 Matrices réelles ou complexes 150 6.7 Systèmes d'équations linéaires 150 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 160 6.9 Exercices 160 7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 160 7 Espaces vectoriels de dimension finie 160 7 Espaces vectoriels de dimension finie 160 7 Espaces vectoriels de dimension finie 170 7 Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire 170 7 Expression matricielle des applications linéaires 180 7 Expression matricielle des applic		5.5		119	
5.8Exercices1276Espaces vectoriels réels ou complexes1396.1L'espace vectoriel \mathbb{K}^n 1396.2Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe1406.3Sous-espaces vectoriels1426.4Applications linéaires1466.5Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 1496.6Matrices réelles ou complexes1506.7Systèmes d'équations linéaires1596.8Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels1606.9Exercices1607Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie1697.1Systèmes libres, systèmes générateurs et bases1697.2Espaces vectoriels de dimension finie1707.3Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire1707.4Expression matricielle des applications linéaires1817.5Formules de changement de base184		5.6	· ·		
6Espaces vectoriels réels ou complexes139 6.1 L'espace vectoriel \mathbb{K}^n . 139 6.2 Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe 140 6.3 Sous-espaces vectoriels 142 6.4 Applications linéaires 140 6.5 Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 140 6.6 Matrices réelles ou complexes 150 6.7 Systèmes d'équations linéaires 150 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 160 6.9 Exercices 160 7.1 Systèmes libres, systèmes générateurs et bases 160 7.2 Espaces vectoriels de dimension finie 160 7.2 Espaces vectoriels de dimension finie 170 7.3 Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire 170 7.4 Expression matricielle des applications linéaires 180 7.5 Formules de changement de base 180		5.7	<u>.</u>		
6.1L'espace vectoriel \mathbb{K}^n 1396.2Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe1406.3Sous-espaces vectoriels1426.4Applications linéaires1466.5Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 1496.6Matrices réelles ou complexes1506.7Systèmes d'équations linéaires1506.8Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels1606.9Exercices1617Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie1697.1Systèmes libres, systèmes générateurs et bases1697.2Espaces vectoriels de dimension finie1717.3Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire1797.4Expression matricielle des applications linéaires1817.5Formules de changement de base184		5.8	Exercices	127	
6.1L'espace vectoriel \mathbb{K}^n 1396.2Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe1406.3Sous-espaces vectoriels1426.4Applications linéaires1466.5Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 1496.6Matrices réelles ou complexes1506.7Systèmes d'équations linéaires1506.8Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels1606.9Exercices1617Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie1697.1Systèmes libres, systèmes générateurs et bases1697.2Espaces vectoriels de dimension finie1717.3Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire1727.4Expression matricielle des applications linéaires1817.5Formules de changement de base184	6	Esp	aces vectoriels réels ou complexes	139	
6.2Définition d'un espace vectoriel réel ou complexe 140 6.3Sous-espaces vectoriels 142 6.4Applications linéaires 146 6.5Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 149 6.6Matrices réelles ou complexes 150 6.7Systèmes d'équations linéaires 150 6.8Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 160 6.9Exercices 160 7Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 160 7.1Systèmes libres, systèmes générateurs et bases 160 7.2Espaces vectoriels de dimension finie 170 7.3Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire 170 7.4Expression matricielle des applications linéaires 180 7.5Formules de changement de base 180				139	
6.3 Sous-espaces vectoriels 142 6.4 Applications linéaires 146 6.5 Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 149 6.6 Matrices réelles ou complexes 150 6.7 Systèmes d'équations linéaires 150 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 160 6.9 Exercices 160 7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 160 7.1 Systèmes libres, systèmes générateurs et bases 160 7.2 Espaces vectoriels de dimension finie 170 7.3 Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire 170 7.4 Expression matricielle des applications linéaires 180 7.5 Formules de changement de base 180		6.2		140	
6.4Applications linéaires1466.5Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m 1496.6Matrices réelles ou complexes1506.7Systèmes d'équations linéaires1596.8Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels1606.9Exercices1617Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie1697.1Systèmes libres, systèmes générateurs et bases1697.2Espaces vectoriels de dimension finie1797.3Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire1797.4Expression matricielle des applications linéaires1817.5Formules de changement de base184		6.3		142	
6.5 Base canonique de \mathbb{K}^n et expression matricielle des applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m		6.4		146	
linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^m . 149 6.6 Matrices réelles ou complexes . 150 6.7 Systèmes d'équations linéaires . 150 6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels . 160 6.9 Exercices . 161 7 Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie . 169 7.1 Systèmes libres, systèmes générateurs et bases . 169 7.2 Espaces vectoriels de dimension finie . 171 7.3 Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire . 179 7.4 Expression matricielle des applications linéaires . 181 7.5 Formules de changement de base . 184		6.5			
6.6 Matrices réelles ou complexes				149	
6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels		6.6		150	
6.8 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels		6.7	Systèmes d'équations linéaires	159	
7Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie1697.1Systèmes libres, systèmes générateurs et bases1697.2Espaces vectoriels de dimension finie1717.3Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire1797.4Expression matricielle des applications linéaires1817.5Formules de changement de base184		6.8		160	
7.1 Systèmes libres, systèmes générateurs et bases		6.9	Exercices	161	
7.1 Systèmes libres, systèmes générateurs et bases	7	Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie 16			
7.2 Espaces vectoriels de dimension finie	•				
7.3 Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire 179 7.4 Expression matricielle des applications linéaires			•		
7.4 Expression matricielle des applications linéaires					
7.5 Formules de changement de base					
			<u> </u>		











			vii
8	Oné	rations élémentaires et déterminants	191
Ü	8.1	Opérations élémentaires. Matrices de dilatation et de transvection	192
	8.2	Déterminants des matrices carrées	195
	8.3	Déterminant d'une famille de vecteurs	203
	8.4	Déterminant d'un endomorphisme	204
	8.5	Exercices	205
	0.0	Zikororow I I I I I I I I I I I I I I I I I I I	200
9	Poly	vnômes à coefficients réels ou complexes	211
	9.1	L'algèbre $\mathbbm{K}\left[X\right]$ des polynômes à coefficients dans \mathbbm{K}	211
	9.2	Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$	215
	9.3	Polynômes premiers entre eux	220
	9.4	Fonctions polynomiales, racines des polynômes	222
	9.5	Dérivation des polynômes. Formule de Taylor	225
	9.6	Polynômes irréductibles	227
	9.7	Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples	231
	9.8	Polynômes d'interpolation de Lagrange	236
	9.9	Exercices	238
10		uction des endomorphismes	245
	10.1	Polynômes d'endomorphismes, polynômes annulateurs, polynôme	0.45
	400	minimal	245
		Le théorème de décomposition des noyaux	246
		Valeurs et vecteurs propres	248
		Le théorème de Cayley-Hamilton	251
		Diagonalisation	253
		Endomorphismes trigonalisables	255
	10.7	Exercices	257
11	Fori	nes bilinéaires et quadratiques réelles ou complexes	263
	11.1	Formes linéaires	263
	11.2	Formes bilinéaires	266
	11.3	Expression matricielle des formes bilinéaires (en dimension finie) .	267
	11.4	Formes quadratiques	269
	11.5	Théorème de réduction de Gauss	271
	11.6	Orthogonalité, noyau et rang	278
	11.7	Signature d'une forme quadratique réelle en dimension finie	282
		Quadriques dans \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n	285
	11.9	Exercices	289
12		aces préhilbertiens	305
		Produit scalaire	305
		Orthogonalité	307
		Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt	309
		Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie $$	311
		Les endomorphismes symétriques réels	317
		Espaces vectoriels hermitiens	318
	12.7	Réduction des matrices normales	321







"Algebre Capes" — 2021/5/27 — 12 :37 — page viii — #8



viii

13	13 Problèmes de Capes						
	13.1 Capes 2004, épreuve 2	337					
	13.2 Capes agricole 2004, épreuve 1	355					
	13.3 CAPES 2009, épreuve 2	369					
	13.4 CAPES 2010, épreuve 2	383					
	13.5 Capes 2011, épreuve 2	402					
	13.6 Capes 2013, épreuve 2	420					
	Bibliographie	433					
	Index	435					









Avant-propos

Ce cours d'algèbre s'adresse aux étudiants préparant le Capes de mathématiques. C'est le deuxième volume d'une série qui en comporte 3, le premier volume étant consacré à l'analyse et le troisième à la théorie des probabilités. Il ne s'agit pas de manuels de « méthodes » où l'on sacrifie la notion de rigueur qui est l'essence même des mathématiques. Les notions étudiées le sont de façon rigoureuse en démontrant tous (ou presque) les résultats énoncés. Chaque chapitre se termine par une série d'exercices tous corrigés en détails. C'est ce type d'exercices qu'il est utile de savoir faire avant de travailler sur des épreuves écrites du concours.

Ce deuxième volume est consacré aux notions d'algèbre habituellement enseignées en première et deux année de licence (L1 et L2), à savoir l'étude de quelques notions de logique et de théorie des ensembles, des structures de groupe, d'anneaux et de corps, en se concentrant sur l'anneau des entiers relatifs, le corps des nombres complexes, l'anneau des polynômes à coefficients réels ou complexes et les principales notions d'algèbre linéaire et bilinéaire avec la réduction des endomorphismes et des formes quadratiques. On s'intéresse également à quelques notions d'arithmétique. Le dernier chapitre est consacré à quelques épreuves d'algèbre et de géométrie du Capes, le niveau d'exigence pour cette épreuve ne dépassant pas le niveau de connaissance acquis en première et deuxième année d'université ou de classe préparatoire aux grandes écoles. Pour les notions de géométrie utiles dans certains problèmes de Capes, on se reportera à l'excellent livre de Dany Jacque Mercier : Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation. Les problèmes de Capes étant souvent trop longs pour être traités en cinq heures, à titre d'entrainement, on peut se contenter de travailler sur les deux premières parties d'un problème, la suite du problème pouvant être étudiée par la suite à titre d'approfondissement. Nous espérons que ce travail sera utile aux candidats au Capes.

Les élèves en classes préparatoires aux grandes écoles pourront aussi tirer profit de cet ouvrage.

Pour conclure, nous tenons à remercier les éditions De Boeck et en particulier Alain Luguet pour la confiance qu'ils nous accordent en publiant ce travail.



