L3 A, intégration : M363
Sur les séries commutativement convergentes

Exercice 1 *E est un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.*

1. *On suppose que la série $\sum u_n$ est normalement convergente. Montrer que, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est normalement convergente. Dans le cas où l'espace normé E est complet, montrer que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (on dit alors que la série $\sum u_n$ est commutativement convergente).*
2. *On suppose que $E = \mathbb{R}$ et que la série $\sum u_n$ est semi-convergente (i. e. $\sum u_n$ est convergente et $\sum |u_n|$ est divergente).*
   (a) *En notant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$, montrer que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont divergentes.*
   (b) *Montrer que l'on peut construire une bijection σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit divergente.*
3. *On suppose que l'espace normé E est de dimension finie. Montrer que la série $\sum u_n$ est normalement convergente si, et seulement si, elle est commutativement convergente.*
4. *Le résultat précédent est-il vrai pour les espaces normés de dimension infinie ?*

Solution.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'entier $p_n = \max_{0\leq k\leq n} \sigma(k)$ et le plus grand de $n+1$ entiers naturels, donc :

$$\begin{cases} p_n \geq n \\ \{\sigma(k) \mid 0 \leq k \leq n\} \subset \{0, 1, \cdots, p_n - 1, p_n\} \end{cases}$$

et :

$$\sum_{k=0}^{n} \left\|u_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{j=0}^{p_n} \|u_j\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| < +\infty$$

Il en résulte que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est normalement convergente.
Dans le cas où E n'est pas complet, cette série $\sum u_{\sigma(n)}$ n'est pas nécessairement convergente.
Dans le cas où E est complet, elle est convergente.
Comme σ^{-1} est aussi une permutation de $\mathbb{N}$, en notant pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $q_n = \max_{0\leq k\leq n} \sigma^{-1}(k)$, on a $q_n \geq n$ et :

$$I_n = \left\{\sigma^{-1}(k) \mid 0 \leq k \leq n\right\} \subset J_n = \{0, 1, \cdots, p_n - 1, p_n\}$$

donc en notant $K_n = J_n \setminus I_n$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{q_n} u_{\sigma(j)} &= \sum_{j\in I_n} u_{\sigma(j)} + \sum_{j\in K_n} u_{\sigma(j)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(\sigma^{-1}(k))} + \sum_{j\in K_n} u_{\sigma(j)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{j\in K_n} u_{\sigma(j)}\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\left\| \sum_{j=0}^{q_n} u_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^{n} u_k \right\| = \left\| \sum_{j \in K_n} u_{\sigma(j)} \right\| \leq \sum_{j \in K_n} \left\| u_{\sigma(j)} \right\|$$

Pour tout $j \in K_n$, on a $j \notin I_n = \sigma^{-1}\{0, 1, \cdots, n\}$, donc $\sigma(j) \notin \{0, 1, \cdots, n\}$ et $\sigma(j) \geq n+1$, ce qui nous donne :

$$\sum_{j \in K_n} \left\| u_{\sigma(j)} \right\| \leq R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

En définitive, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n \geq n \text{ et } \left\| \sum_{j=0}^{p_n} u_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^{n} u_k \right\| \leq R_{n+1}$$

et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

2.

(a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n^+ = \frac{u_n + |u_n|}{2} \text{ et } u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2}$$

Comme $\sum u_n$ est convergente et $\sum |u_n|$ est divergente, on en déduit que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont divergentes.
Ces séries étant à valeurs positives, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^- = +\infty$$

(b) On a la partition $\mathbb{N} = I \cup J$, où :

$$I = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq 0\} \text{ et } J = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n < 0\}$$

ces ensembles étant infinis puisque :

$$\sum_{n \in I} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ = +\infty \text{ et } \sum_{n \in J} u_n = -\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = -\infty$$

Il existe donc deux applications strictement croissantes (donc injectives) σ_1 et σ_2 de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $I = \sigma_1(\mathbb{N})$ et $J = \sigma_2(\mathbb{N})$.
Du fait que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{\sigma_1(n)} = \sum_{n \in I} u_n = +\infty$$

on peut définir l'entier p_1 comme étant le plus petit entier naturel tel que :

$$u_{\sigma_2(0)} + \sum_{j=0}^{p_1} u_{\sigma_1(j)} \geq 1$$

puis supposant définis les entiers $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, on désigne par p_{k+1} le plus petit entier strictement supérieur à p_k tel que :

$$u_{\sigma_2(k)} + \sum_{j=p_k+1}^{p_{k+1}} u_{\sigma_1(j)} \geq 1$$

En utilisant la partition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0, \cdots, p_1 + 1\} \cup \{p_1 + 2, \cdots, p_2 + 2\} \cup \{p_2 + 3, \cdots, p_3 + 3\} \cup \cdots \\
&= \{0, \cdots, p_1 + 1\} \cup \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{p_k + k + 1, \cdots, p_{k+1} + k + 1\}
\end{aligned}$$

on définit l'application $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \{0, \cdots, p_1\}, \ \sigma(j) = \sigma_1(j) \\ \sigma(p_1 + 1) = \sigma_2(0) \end{array} \right.$$

et :

$$\forall k \geq 1, \ \left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \{p_k + k + 1, \cdots, p_{k+1} + k\}, \ \sigma(j) = \sigma_1(j - k) \\ \sigma(p_{k+1} + k + 1) = \sigma_2(k) \end{array} \right.$$

Avec ces notations, on a :

$$\sum_{j=0}^{p_1+1} u_{\sigma(j)} = \sum_{j=0}^{p_1} u_{\sigma_1(j)} + u_{\sigma_2(0)} \geq 1$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p_2+2} u_{\sigma(j)} &= \sum_{j=0}^{p_1+1} u_{\sigma(j)} + \sum_{j=p_1+2}^{p_2+1} u_{\sigma(j)} + u_{\sigma(p_2+2)} \\
&= \sum_{j=0}^{p_1} u_{\sigma_1(j)} + u_{\sigma_2(0)} + \sum_{j=p_1+2}^{p_2+1} u_{\sigma_1(j-1)} + u_{\sigma_2(1)} \\
&= \sum_{j=0}^{p_1} u_{\sigma_1(j)} + u_{\sigma_2(0)} + \sum_{j=p_1+1}^{p_2} u_{\sigma_1(i)} + u_{\sigma_2(1)} \geq 2
\end{aligned}$$

et en raisonnant par récurrence, on vérifie que :

$$\sum_{j=0}^{p_k+k} u_{\sigma(j)} \geq k$$

En effet, c'est vrai pour $k = 1$ et supposant le résultat acquis jusqu'au rang $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p_{k+1}+k+1} u_{\sigma(j)} &= \sum_{j=0}^{p_k+k} u_{\sigma(j)} + \sum_{j=p_k+k+1}^{p_{k+1}+k} u_{\sigma(j)} + u_{\sigma(p_{k+1}+k+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{p_k+k} u_{\sigma(j)} + \sum_{j=p_k+k+1}^{p_{k+1}+k} u_{\sigma_1(j-k)} + u_{\sigma_2(k)} \\
&= \sum_{j=0}^{p_k+k} u_{\sigma(j)} + \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} u_{\sigma_1(i)} + u_{\sigma_2(k)} \geq k + 1
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = +\infty$$

Il nous reste à vérifier que σ est une permutation de $\mathbb{N}$.
L'application σ réalise une bijection de $\{0, \cdots, p_1\}$ sur $\sigma_1(\{0, \cdots, p_1\})$ et, pour tout entier $k \geq 1$, une bijection de $\{p_k + k + 1, \cdots, p_{k+1} + k\}$ sur $\sigma_1(\{p_k + 1, \cdots, p_{k+1}\})$, donc une bijection de $\mathbb{N} \setminus \{p_k + k \mid k \geq 1\}$ sur $\sigma_1(\mathbb{N})$.
Comme elle réalise aussi une bijection de $\{p_k + k \mid k \geq 1\}$ sur $\sigma_1(\mathbb{N})$, en tenant compte de la partition $\mathbb{N} = I \cup J = \sigma_1(\mathbb{N}) \cup \sigma_2(\mathbb{N})$, on déduit que c'est une permutation de $\mathbb{N}$.

3. Pour $E = \mathbb{R}$, on a vu qu'une série absolument convergente est commutativement convergente et la question précédente nous dit que la réciproque est vraie.
   En effet, une série commutativement convergente est convergente et si elle n'est pas absolument convergente, on peut trouver une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit divergente, ce qui est contradictoire.
   Ce résultat est en fait valable pour les séries à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
   Dans un tel espace E de dimension $p \geq 1$ toutes les normes sont équivalentes et désignant par $(x_1, \cdots, x_p)$ les coordonnées d'un vecteur x de E dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$, on peut utiliser la norme définie par $\|x\| = \max\limits_{1 \leq i \leq p} |x_i|$ et dire qu'une série $\sum u_n$ de vecteurs de E converge normalement équivaut à dire que toutes les séries de composantes $\sum u_n^{(i)}$, pour i compris entre 1 et p, sont absolument convergentes (ce qui résulte de $\left|u_n^{(i)}\right| \leq \|u_n\| \leq \sum\limits_{j=1}^{p} \left|u_n^{(j)}\right|$) ce qui équivaut à dire que pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ et tout i compris entre 1 et p la série $\sum u_{\sigma(n)}^{(i)}$ est convergente, encore équivalent à dire que pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente dans E.
4. Le résultat précédent est faux pour les espaces normés de dimension infinie (complet ou non). On donne un contre-exemple avec l'espace de Banach de dimension infinie ℓ^2 formé des suites réelles de carré sommable, c'est-à-dire l'espace des suites réelles $v = (v(k))_{k \geq 1}$ telles que $\sum v(k)^2$ converge, muni de la norme :
   $$\|v\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} v(k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
   On pose, pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$:
   $$\omega_n(k) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ \dfrac{1}{n} \text{ si } k = n \end{cases}$$
   On vérifie que, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, la série $\sum \omega_{\sigma(n)}$ converge dans ℓ^2 et que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \|\omega_n\|_2$ diverge.
   A DETAILLER.