Chapitre 1

Espaces métriques

Avec ce chapitre, on se contente de donner les définitions et résultats basiques sur les espaces métriques. Les notions de suites et de continuité dans le cadre des espaces vectoriels normés et dans le cadre réel seront étudiées plus en détails dans les chapitres suivants.

1.1 Topologie associée à une distance

Pour ce paragraphe, on se donne un ensemble non vide E.

Définition 1.1. *Une distance sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que pour tous x, y, z dans E, on ait :*

- *$d(y, x) = d(x, y)$;*
- *$d(x, y) = 0$ si, et seulement si, $y = x$;*
- *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).*

Le couple (E, d) est un espace métrique.

Exemple 1.1 *La valeur absolue [resp. le module] sur $\mathbb{R}$ [resp. sur $\mathbb{C}$] induit une distance en posant $d(x, y) = |y - x|$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ [resp. dans $\mathbb{C}$].*

On peut remarquer qu'une distance sur E est nécessairement à valeurs positives. En effet, pour tous x, y dans E, on a :

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

et nécessairement $d(x, y) \geq 0$. Cette condition de positivité est souvent imposée dans la définition d'une distance, ce qui n'est pas vraiment utile.

Si d est une distance sur E et I une partie non vide de E, la restriction de d à $I \times I$ définit alors une distance sur I (distance induite).

De l'inégalité triangulaire, on déduit que pour tous x, y, z dans E, on a :

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

(deuxième inégalité triangulaire). Cela résulte de $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ et $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$.

Pour la suite de ce paragraphe, (E,d) est un espace métrique.

Pour toute partie non vide A de E et tout élément x de E, on note respectivement $\delta(A) = \sup\limits_{(x,y)\in A^2} d(x,y)$ et $d(x,A) = \inf\limits_{a\in A} d(x,a)$ le diamètre de A et la distance de x à A. $d(x,A)$ est un élément de $\mathbb{R}^+$ (borne inférieure d'une partie non vide et minorée) et $\delta(A)$ est un élément $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Dans le cas où $\delta(A)$ est fini, on dit que A est bornée.

On vérifie facilement que pour tous x, y dans E, on a :

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

Pour tout $a \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}^{+,*}$, on note $B(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) < r\}$ et $\overline{B}(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) \leq r\}$. L'ensemble $B(a,r)$ [resp. $\overline{B}(a,r)$] est la boule ouverte [resp. la boule fermée] de centre a et de rayon r.

Définition 1.2. *On appelle voisinage d'un point a de (E,d) toute partie $\mathcal{V}$ de E qui contient une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$.*

Définition 1.3. *On dit qu'une partie $\mathcal{O}$ de (E,d) est un ouvert si elle est vide ou si elle est non vide et voisinage de chacun de ses points, ce qui signifie que pour tout $a \in \mathcal{O}$ il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \mathcal{O}$. On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de (E,d) est un fermé si son complémentaire $E \setminus \mathcal{F}$ est un ouvert.*

Un ouvert est donc une réunion de boules ouvertes.

Pour toute partie non vide I de E, les ouverts [resp. les fermés] de (I,d) sont les ensembles de la forme $\mathcal{O} \cap I$ [resp. $\mathcal{F} \cap I$] où $\mathcal{O}$ [resp. $\mathcal{F}$] est un ouvert [resp. un fermé] de E (ouverts et fermés pour la topologie induite).

Exemples 1.1

1. *Une boule ouverte [resp. fermée] de E est un ouvert [resp. un fermé] de (E,d). En effet, pour tout $x \in B(a,r)$, on a $r' = r - d(a,x) > 0$ et $B(x,r') \subset B(a,r)$ (pour $y \in B(x,r')$ on a $d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < r' + d(x,a) = r$). De même pour $x \in E \setminus \overline{B}(a,r)$, on a $r' = d(a,x) - r > 0$ et $B(x,r') \subset E \setminus \overline{B}(a,r)$ (pour $y \in B(x,r')$ on a $d(y,a) \geq d(x,a) - d(x,y) > d(a,x) - r' = r$).*
2. *Pour toute partie non vide A de E et tout réel $r \in \mathbb{R}^{+,*}$, l'ensemble $\mathcal{V}_r(A) = \{x \in E \mid d(x,A) < r\}$ est un ouvert qui contient A. En effet, il est clair que $\mathcal{V}_r(A)$ contient A (on a $d(x,A) = 0$ pour $x \in A$) et pour tout $x \in \mathcal{V}_r(A)$, on a $r' = r - d(A,x) > 0$ et $B(x,r') \subset \mathcal{V}_r(A)$ (pour $y \in B(x,r')$ on a $d(y,A) \leq d(y,x) + d(x,A) < r' + d(x,A) = r$).*

Définition 1.4. *Un sous-ensemble non vide $\mathcal{C}$ de (E,d) est connexe si la condition $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ouverts de E tels que $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$*

entraîne $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$ (et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_2$) ou $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ (et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_1$), c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ ne peut s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts de $\mathcal{C}$.

Le résultat qui suit nous sera utile pour montrer que les connexes (et convexes) de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (corollaire 2.1).

Lemme 1.1 *L'intervalle* $[0,1]$ *est connexe dans* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Preuve. Supposons qu'il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ dans $\mathbb{R}$ tels que $[0,1] \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ et $[0,1] \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. On peut supposer que $0 \in \mathcal{O}_1$. Il existe alors un réel $\varepsilon \in]0,1[$ tel que $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathcal{O}_1$ et l'ensemble $I = \{x \in]0,1] \mid [0,x] \subset \mathcal{O}_1\}$ est non vide majoré par 1. On peut donc poser $\alpha = \sup(I)$ et on a $0 < \alpha \leq 1$. Par définition de la borne supérieure, pour tout $x \in]0, \alpha[$ on peut trouver $y \in]x, \alpha] \cap I$ et on a $x \in [0,y] \subset \mathcal{O}_1$. On a donc ainsi montré que $]0, \alpha[\subset \mathcal{O}_1$. Si $\alpha \in \mathcal{O}_2$, il existe alors $\varepsilon \in]0, \alpha[$ tel que $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset \mathcal{O}_2$ et $[\alpha - \varepsilon, \alpha[\subset [0,1] \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ ce qui est impossible. On a donc $\alpha \in \mathcal{O}_1$ et $[0, \alpha] \subset \mathcal{O}_1$. Si $\alpha < 1$, il existe alors $\varepsilon \in]0, 1 - \alpha[$ tel que $[0, \alpha + \varepsilon] \subset \mathcal{O}_1$ et $\alpha + \varepsilon \in I$ en contradiction avec $\alpha = \sup(I)$. On a donc $\alpha = 1$ et $[0,1] \subset \mathcal{O}_1$, ce qui entraîne $[0,1] \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. En conclusion, $[0,1]$ est connexe. □

Théorème 1.1.

L'ensemble vide, l'ensemble E, une réunion d'ouverts et une intersection finie d'ouverts sont des ouverts de (E,d). L'ensemble vide, l'ensemble E, une réunion finie de fermés et une intersection de fermés sont des fermés de (E,d).

Preuve. Il est clair que $\emptyset$ et E sont des ouverts.

Si $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque d'ouverts non vides (les $\mathcal{O}_i$ vides peuvent être supprimés de la réunion) et x un élément de $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, il existe alors un réel $r_{i_0} > 0$ tel que $B(x, r_{i_0}) \subset \mathcal{O}_{i_0} \subset \mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}$ est ouvert.

Si $(\mathcal{O}_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille finie d'ouverts non vides (le cas où l'un des $\mathcal{O}_k$ est vide est trivial) et x un élément de $\mathcal{O} = \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{O}_k$, il existe alors des réel $r_k > 0$, tels que $B(x, r_k) \subset \mathcal{O}_k$ pour tout k compris entre 1 et n. Le réel $r = \min_{1 \leq k \leq n} r_k$ est alors strictement positif et $B(x,r) \subset \bigcap_{k=1}^{n} B(x, r_k) \subset \mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}$ est ouvert.

Le résultat sur les fermés s'en déduit par passage au complémentaire. □

Une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert comme le montre l'exemple de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Une réunion infinie de fermés n'est pas nécessairement un fermé comme le montre l'exemple de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, +\infty \right[=]0, +\infty[$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

De manière plus générale, un fermé de (E, d) est l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts et un ouvert est la réunion d'une suite croissante de fermés (exercice 1.4).

Définition 1.5. *L'intérieur d'une partie A de (E, d), noté $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert de E contenu dans A. L'adhérence d'une partie A de (E, d), notée $\overline{A}$, est le plus petit fermé de E contenant A.*

On vérifie facilement que l'intérieur de A est aussi la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A et que l'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés de E qui contiennent A.

Théorème 1.2.

Pour tout sous-ensemble A de (E, d), on a $\overset{\circ}{A} \subset A$ [resp. $A \subset \overline{A}$], l'égalité étant réalisée si, et seulement si, A est ouvert [resp. fermé].

Preuve. Par définition, on a $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \subset A$ où $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est la famille de tous les ouverts de E contenus dans A. L'égalité $A = \overset{\circ}{A}$ nous dit que A est ouvert comme réunion d'ouverts. Réciproquement si A est ouvert, c'est alors l'un des $\mathcal{O}_i$ et nécessairement, $A \subset \overset{\circ}{A}$, ce qui donne l'égalité $A = \overset{\circ}{A}$.

De même, on a $A \subset \overline{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ où $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est la famille de tous les fermés de E qui contiennent A. L'égalité $A = \overline{A}$ nous dit que A est fermé comme intersection de fermés. Réciproquement si A est fermé, c'est alors l'un des $\mathcal{F}_i$ et nécessairement, $\overline{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \subset A$, ce qui donne l'égalité $A = \overline{A}$. □

Théorème 1.3.

L'adhérence d'une partie A de (E, d) est l'ensemble des éléments x de E tels que $d(x, A) = 0$, ce qui revient à dire que $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $d(x, y) < \varepsilon$ (soit $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$).

Preuve. Il revient au même de montrer que $d(x, A) > 0$ si, et seulement si, $x \in E \setminus \overline{A}$.

Si $\delta = d(x, A) > 0$, on a alors $d(x, y) \geq \delta$ pour tout $y \in A$ et $E \setminus B(x, \delta)$ est un fermé qui contient A, donc $\overline{A} \subset E \setminus B(x, \delta)$ et en conséquence, $B(x, \delta) \subset E \setminus \overline{A}$, donc $x \in E \setminus \overline{A}$. Réciproquement, si $x \in E \setminus \overline{A}$, comme cet ensemble est ouvert, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus \overline{A}$, donc $A \subset \overline{A} \subset E \setminus B(x, \varepsilon)$ et on a $d(x, y) \geq \varepsilon$ pour tout $y \in A$, ce qui implique que $d(x, A) \geq \varepsilon > 0$. □

Définition 1.6. *On dit qu'une partie A de E est dense dans (E,d) si $\overline{A} = E$, ce qui signifie que pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $d(x,y) < \varepsilon$ (soit $A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$).*

Définition 1.7. *On dit que l'espace métrique (E,d)est séparable s'il existe dans E une partie dense dénombrable.*

Exemples 1.2

1. *De la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (corollaire 4.2 ou exercice 4.1), on déduit que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est séparable.*
2. *Un espace métrique compact est séparable (exercice 1.6).*

1.2 Suites à valeurs dans un espace métrique

Pour ce paragraphe, (E,d) est un espace métrique et les résultats de base sur les suites réelles sont supposés connus. Ces suites sont étudiées au chapitre 4.

Définition 1.8. *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de (E,d) est convergente s'il existe un élément ℓ de E tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,\ell) = 0$. Une suite non convergente est dite divergente.*

La convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ d(x_n,\ell) < \varepsilon \tag{1.1}$$

Dans l'assertion (1.1), les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges et il est parfois commode de se limiter à $\varepsilon \in]0,1[$ sans que cela ne soit restrictif.

Cette notion de convergence dépend de la distance choisie sur E (exercice 1.2 et le paragraphe 2.1).

En utilisant l'inégalité triangulaire, on vérifie facilement que si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de (E,d) est convergente, sa limite est alors unique, ce qui nous permet de noter $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ou $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$.

Une suite convergente est bornée. En effet, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$, il existe alors un entier n_0 tel que $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,\ell) + d(x_m,\ell) < 2$ pour tout $n > n_0$ et tout $m > n_0$, donc $\sup\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} d(x_n,x_m) \leq \max\left(\max\limits_{0\leq n,m\leq n_0} d(x_n,x_m), 2\right)$, ce qui signifie que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Définition 1.9. *On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* (E,d) *est de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \forall m \geq n_0,\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Les entiers m et n jouant des rôles symétriques, on peut se limiter à $m > n \geq n_0$ dans la définition précédente.

Le résultat suivant est souvent utilisé pour montrer qu'une suite est de Cauchy.

Théorème 1.4.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* (E,d) *pour laquelle il existe une suite* $(\varepsilon_n)_{n\geq n_0}$ *de réels positifs et un entier* n_0 *vérifiant :*

$$\begin{cases} \forall m > n \geq n_0,\ d(x_m, x_n) \leq \varepsilon_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon_n) = 0 \end{cases}$$

elle est alors de Cauchy.

Preuve. De $\lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon_n) = 0$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier $n_1 \geq n_0$ tel que $\varepsilon_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_1$, ce qui entraîne $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ pour $m > n \geq n_1$. $\square$

Théorème 1.5.

Toute suite de Cauchy dans (E,d) *est bornée et toute suite convergente est de Cauchy.*

Preuve. La première affirmation est une conséquence directe de la définition et la deuxième se déduit de l'inégalité triangulaire. $\square$

Dans le cas où toute suite de Cauchy dans (E,d) est convergente, on dit que l'espace métrique (E,d) est complet.

Les notions d'intérieur et d'adhérence peuvent se définir de façon séquentielle.

Théorème 1.6.

Soit A *une partie non vide de* (E,d)*. L'intérieur de* A *est l'ensemble des points* x *de* E *tels que pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* E *qui converge vers* x*, il existe un entier* n_0 *tel que* $x_n \in A$ *pour tout* $n \geq n_0$*. L'adhérence de* A *est l'ensemble des points* x *de* E *qui sont limites d'une suite de points de* A*.*

Preuve. Si $x \in \overset{\circ}{A}$, il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers x, il existe un entier n_0 tel que $d(x_n, x) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique que $x_n \in A$. Si $x \notin \overset{\circ}{A}$, alors pour tout entier $n \geq 1$, la boule $B\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$ n'est pas contenue dans A (comme $B\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$

est ouverte, si elle est contenue dans A, elle est aussi contenue dans $\overset{\circ}{A}$ et $x \in \overset{\circ}{A}$), donc il existe $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \setminus A$, ce qui nous donne une suite qui converge vers x avec tous ses termes en dehors de A. D'où la définition séquentielle de l'intérieur.

L'adhérence de A est $\overline{A} = \{x \in E \mid d(x, A) = 0\}$ (théorème 1.3), donc pour tout $x \in \overline{A}$ et tout entier $n \geq 1$, il existe $x_n \in A$ tel que $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$, ce qui nous donne une suite de points de A qui converge vers x. Réciproquement si x est la limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, des encadrements $0 \leq d(x, A) \leq d(x_n, x)$, on déduit que $d(x, A) = 0$, soit que $x \in \overline{A}$. □

De ce théorème, on peut déduire des définitions séquentielles des notions d'ouverts et de fermés. Un ensemble $\mathcal{O}$ est ouvert dans (E, d) si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers $x \in \mathcal{O}$, il existe un entier n_0 tel que $x_n \in \mathcal{O}$ pour tout $n \geq n_0$ (cela résulte de $\mathcal{O} = \overset{\circ}{\mathcal{O}}$). Un ensemble $\mathcal{F}$ est fermé dans (E, d) si, et seulement si, toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{F}$ a sa la limite dans $\mathcal{F}$ (cela résulte de $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$).

On en déduit aussi qu'une partie A de E est dense dans (E, d) si, et seulement si, tout $x \in E$ est la limite d'une suite de points de A.

Définition 1.10. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de (E, d). On dit qu'un élément a de E est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il est limite d'une suite extraite, ce qui signifie qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $a = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$.*

On vérifie facilement par récurrence sur $n \geq 0$ que si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante, on a alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.7.

Un élément a de (E, d) est valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \geq n \mid d(x_m, a) < \varepsilon \tag{1.2}$$

Preuve. Si $a = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe alors un entier n_0 tel que $d\left(x_{\varphi(n)}, a\right) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p = \max(n_0, n)$, on a $m = \varphi(p) \geq p$, donc $m \geq n$, $p \geq n_0$ et $d(x_m, a) = d\left(x_{\varphi(p)}, a\right) < \varepsilon$. Réciproquement si $a \in E$ vérifie (1.2), on construit alors par récurrence une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $d\left(x_{\varphi(n)}, a\right) < \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour initialisation, on part de $m = \varphi(0) \geq 0$ tel que $d(x_m, a) < 1$. Supposant obtenus, pour $n \geq 0$, une suite d'entiers $\varphi(0) < \cdots < \varphi(n)$ tels que $d\left(x_{\varphi(k)}, a\right) < \frac{1}{k+1}$ pour tout k compris entre 0 et n, il existe un entier $m = \varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$ tel que $d(x_m, a) < \frac{1}{n+2}$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} d\left(x_{\varphi(n)}, a\right) = 0$, ce qui signifie que a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Une suite peut être sans valeur d'adhérence comme le montre l'exemple de la suite réelle $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. De manière plus générale, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de (E,d) pour laquelle il existe un réel $r>0$ tel $d(x_i,x_j)\geq r$ pour tous $i\neq j$ dans $\mathbb{N}$, il est alors impossible d'en extraire une suite convergente.

Théorème 1.8.

Une suite convergente a pour unique valeur d'adhérence sa limite.

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de (E,d) convergente vers ℓ. Pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $d(x_n,\ell)$ pour tout $n\geq n_0$ et pour toute application $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\varphi(n)\geq n\geq n_0$ pour tout $n\geq n_0$, ce qui entraîne que $d\left(x_{\varphi(n)},\ell\right)<\varepsilon$. La suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers ℓ. □

La réciproque du théorème précédent est fausse comme le montre l'exemple de la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{2n}=n$ et $x_{2n+1}=0$ (elle est divergente avec 0 pour unique valeur d'adhérence), mais elle vraie pour une suite à valeurs dans un compact (théorème 1.11).

Étant donnée une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de (E,d), on note $\mathcal{V}$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $R_n=\{x_k\mid k\geq n\}$ l'ensemble des valeurs de la suite $(x_k)_{k\geq n}$.

Théorème 1.9.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de (E,d). On a $\overline{R_n}=R_n\cup\mathcal{V}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $\mathcal{V}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{R_n}$.

Preuve. Pour toute valeur d'adhérence $a=\lim_{k\to+\infty}x_{\varphi(k)}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\varphi(k)\geq k$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite $\left(x_{\varphi(k)}\right)_{k\geq n}$ est à valeurs dans R_n et en conséquence sa limite a est dans $\overline{R_n}$. On a donc $\mathcal{V}\subset\overline{R_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et comme $R_n\subset\overline{R_n}$, on a $R_n\cup\mathcal{V}\subset\overline{R_n}$. Tout $a\in\overline{R_n}$ est limite d'une suite de points $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de R_n. Si a est dans R_n, il est alors dans $R_n\cup\mathcal{V}$, sinon pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier k_0 tel que $0<d(y_k,a)<\varepsilon$ pour tout $k\geq k_0$. En écrivant chaque y_k sous la forme $y_k=x_{\psi(k)}$, on peut trouver pour tout $n\in\mathbb{N}$ un entier $k\geq k_0$ tel que $m=\psi(k)>n$ (s'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\psi(k)\leq n$ pour tout $k\geq k_0$, la suite $(y_k)_{k\geq k_0}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs et sa limite ℓ est l'une de ces valeurs, donc dans R_n contrairement à notre hypothèse) ce qui nous donne $d(x_m,a)=d(y_k,a)<\varepsilon$. Du théorème (1.7), on déduit alors que a est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit $a\in\mathcal{V}\subset R_n\cup\mathcal{V}$. D'où l'égalité $\overline{R_n}=R_n\cup\mathcal{V}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On en déduit que l'ensemble $\mathcal{V}$ est contenu dans tous les $\overline{R_n}$, donc dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{R_n}$. Du théorème (1.7), on déduit que pour tout $a\in E\setminus\mathcal{V}$ il existe un réel $\varepsilon>0$ et un entier $n\in\mathbb{N}$ tels que $d(x_m,a)\geq\varepsilon$ pour tout $m\geq n$, ce qui implique que a n'est pas dans $\overline{R_n}$ et en conséquence, $a\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{R_n}$. D'où l'égalité $\mathcal{V}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{R_n}$. □

Du théorème précédent, on déduit que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fermé dans E comme intersection de fermés.

Définition 1.11. *On dit qu'une partie K de (E,d) est compacte si de toute suite de points de A, on peut extraire une sous-suite qui converge dans K (propriété de Bolzano-Weierstrass).*

Lemme 1.2 *Soit K un compact de (E,d). Pour tout réel $r>0$, il existe une suite finie $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de K telle que $K\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(a_k,r)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe $r>0$ tel que K ne puisse être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon r et centrée en $a\in K$. Partant de $x_0\in K$, il existe $x_1\in K\setminus B(x_0,r)$ (puisque K n'est pas contenu dans $B(x_0,r)$), donc $d(x_0,x_1)\geq r$. Supposant obtenus $x_0,\cdots,x_n$ dans K tels que $d(x_i,x_j)\geq r$ pour tous $i\neq j$ compris entre 1 et n, comme K n'est pas contenu dans $\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,r)$, il existe $x_{n+1}\in K$ tel que $d(x_{n+1},x_k)\geq r$ pour tout k compris entre 1 et r. On construit donc ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que $d(x_i,x_j)\geq r$ pour tous $i\neq j$ dans $\mathbb{N}$ et d'une telle suite il est impossible d'extraire une suite convergente, ce qui n'est pas possible pour K compact. □

Théorème 1.10.

Un compact dans un espace métrique est fermé et borné.

Preuve. Soit K un compact de (E,d). Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K qui converge vers $\ell\in E$, on peut extraire une suite qui converge vers un élément de K, donc $\ell\in K$. L'ensemble K est donc fermé. Le lemme précédent nous dit qu'il existe une suite finie $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de K telle que $K\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(a_k,1)$, donc pour tous x,y dans K il existe j,k compris entre 1 et n tels que $(x,y)\in B(a_j,1)\cap B(a_k,1)$ et en conséquence :

$$d(x,y)\leq d(x,a_j)+d(a_j,a_k)+d(a_k,y)<2+d(a_j,a_k)$$

ce qui nous donne $\delta(K)\leq 2+\max_{1\leq j,k\leq n}d(a_j,a_k)$ et signifie que K est borné. □

La réciproque du théorème précédent est fausse en général, mais elle est vraie dans le cas des espaces vectoriels normés de dimension finie (théorème 2.9).

Théorème 1.11.

Soient K un compact de (E,d) et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K.

1. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un nombre fini $a_1,\cdots,a_r$ de valeurs d'adhérences, alors pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un entier n_0 tel que $x_n\in\bigcup_{k=0}^{r}\mathcal{B}(a_k,\varepsilon)$ pour tout $n\geq n_0$.*
2. *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle a un unique valeur d'adhérence.*

Preuve. Comme K est compact, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a au moins une valeur d'adhérence.

1. En notant $\mathcal{V}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que $\mathcal{V} = \{a_1, \cdots, a_r\}$. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $p_n \geq n$ tel que $x_{p_n} \notin \bigcup_{k=0}^{r} \mathcal{B}(a_k, \varepsilon)$, soit $d(x_{p_n}, a_k) \geq \varepsilon$ pour tout k compris entre 1 et r, on peut alors construire par récurrence une suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers telle que $d(x_{\varphi(n)}, a_k) \geq \varepsilon$ pour tout k compris entre 1 et r et de cette suite dans le compact K, on peut extraire une sous suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in K$ tel que $d(a, a_k) \geq \varepsilon > 0$, donc a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'est pas dans $\mathcal{V}$, c'est impossible. D'où le résultat annoncé.
2. On sait déjà que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle a alors une unique valeur d'adhérence (que cette suite soit à valeurs dans un compact ou pas). Réciproquement, si $\mathcal{V} = \{\ell\}$, on déduit alors du premier point que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in \mathcal{B}(\ell, \varepsilon)$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui revient à dire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

□

Lemme 1.3 (Lebesgue) *Soient K un compact de (E, d) et $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ (on dit qu'on a un recouvrement ouvert de K). Il existe un réel $r > 0$ tel que toute boule ouverte de centre $x \in K$ et de rayon r soit contenue dans l'un des $\mathcal{O}_i$.*

Preuve. Supposons que pour tout réel $r > 0$, il existe une boule ouverte de centre $x \in K$ et de rayon r qui ne soit contenue dans aucun des $\mathcal{O}_i$. On peut alors trouver, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, une boule $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$ centrée en $x_n \in K$ qui ne soit contenue dans aucun des $\mathcal{O}_i$. De la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de K, on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $x \in K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Cette limite étant dans l'un des ouverts $\mathcal{O}_i$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O}_i$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x$, il existe un entier n_0 tel que $\frac{1}{\varphi(n)} < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(x_{\varphi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_0$, donc $B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right) \subset B(x, r) \subset \mathcal{O}_i$ (pour $y \in B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right)$, on a $d(x, y) \leq d(x, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\varphi(n)} < \varepsilon$), contrairement à l'hypothèse de départ. □

Théorème 1.12.

Un sous-ensemble K de (E, d) est compact si, et seulement si, de tout recouvrement ouvert de K, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Preuve. Soient K un compact de (E, d) et $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Le lemme de Lebesgue nous dit qu'il existe $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r et de centre $x \in K$ soit contenue dans l'un des $\mathcal{O}_i$ et le lemme 1.2 qu'il existe une suite finie $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(a_k, r)$. Chaque boule $B(a_k, r)$ étant contenue dans un ouvert $\mathcal{O}_{i_k}$, on en déduit que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k}$.

Réciproquement, soit K tel que de tout recouvrement ouvert de K, on puisse extraire un sous-recouvrement fini. S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K sans valeur d'adhérence dans K, on peut alors trouver pour tout $x \in K$, un réel $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x)$ ne contienne qu'un nombre fini de valeurs de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais du recouvrement ouvert $K \subset \bigcup_{x\in K} B(x, r_x)$, on peut extraire un recouvrement fini $K \subset \bigcup_{k=1}^{p} B\left(a_j, r_{a_j}\right)$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs qui en sont des valeurs d'adhérence, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ. L'ensemble K est donc compact. □

1.3 Limites et continuité

Pour ce paragraphe, $\mathbb{R}$ est muni de la distance définie par la valeur absolue, (E, d), (F, d') sont deux espaces métriques, I est une partie non vide de E non réduite à un point et f est une fonction de I dans F.

Définition 1.12. *Soit α un point dans l'adhérence de I. On dit que f admet une limite quand x tend vers α dans I, s'il existe $\ell \in F$ tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid (x \in I \setminus \{\alpha\},\ d(x, \alpha) < \eta) \Rightarrow (d'(f(x), \ell) < \varepsilon)$$

Comme pour les suites, on peut vérifier en utilisant l'inégalité triangulaire que si la fonction f admet une limite en $\alpha \in \overline{I}$, cette dernière est alors unique et on peut la noter $\ell = \lim_{x \to \alpha} f(x)$.

Le théorème qui suit nous donne une caractérisation séquentielle de la notion de limite.

Théorème 1.13.

La fonction $f : I \to F$ admet une limite en $\alpha \in \overline{I}$ si, et seulement si, pour toute suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $I \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Preuve. Si f admet une limite ℓ en α, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, \alpha) < \eta$ dans $I \setminus \{\alpha\}$ entraîne $d'(f(x), \ell) < \varepsilon$ et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $I \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α, il existe alors un entier n_0 tel que $0 < d(x_n, \alpha) < \eta$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique $d'(f(x_n), \ell) < \varepsilon$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

Réciproquement, on suppose que f transforme toute suite d'éléments de $I \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α en une suite convergente. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite de points de $I \setminus \{\alpha\}$ qui convergent vers α. Les suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. On définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $I \setminus \{\alpha\}$ par $z_{2n} = x_{2n}$, $z_{2n+1} = y_{2n+1}$. Cette suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α, donc $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} f(x_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} f(z_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} f(z_{2n+1}) = \lim_{n\to+\infty} f(y_{2n+1}) = \ell'$$

Donc toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $I \setminus \{\alpha\}$ convergente vers α est transformée en une suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un même élément ℓ de F. Si f n'admet pas ℓ pour limite en α, il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ on peut trouver $x_n \in I \setminus \{\alpha\}$ tel que $d(x_n, \alpha) < \dfrac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), \ell) \geq \varepsilon$. On a donc ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $I \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α pour laquelle la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ, ce qui est une contradiction d'après ce qui précède. □

D'un point de vue pratique, le théorème précédent s'exprime aussi en disant que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$ si, et seulement si, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$ pour toute suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $I \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α.

Définition 1.13. *On dit qu'une fonction $f : I \to F$ est continue en $\alpha \in I$ si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$. Dans le cas où f est continue en tout point de I, on dit qu'elle est continue sur I.*

Considérant que pour $x = \alpha$, on a $d(x, \alpha) = d'(f(x), f(\alpha)) = 0$, la continuité de f en α se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid (x \in I,\ d(x, \alpha) < \eta) \Rightarrow (d'(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon)$$

Du théorème 1.13, on déduit la caractérisation séquentielle suivante de la notion de continuité en un point.

Théorème 1.14.

La fonction $f : I \to F$ est continue en $\alpha \in I$ si, et seulement si, toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers α est transformée par f en une suite convergente dans F.

D'un point de vue pratique, le théorème précédent s'exprime aussi en disant que f est continue en α si, et seulement si, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\alpha)$ pour toute suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers α.

Théorème 1.15.

La composée de deux fonctions continues $f : I \to J \subset F$ et $g : J \to G$ (où (G, d'') est un espace métrique) est continue.

Preuve. Soit $\alpha \in I$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta' > 0$ tel que $d''(g(y), g(f(\alpha))) < \varepsilon$ pour y dans J tel que $d'(y, f(\alpha)) < \eta'$ et il existe $\eta > 0$ tel que $d'(f(x), f(\alpha)) < \eta'$ pour x dans I tel que $d(x, \alpha) < \eta$, ce qui nous donne $d''(g(f(x)), g(f(\alpha))) < \varepsilon$ pour x dans I tels que $d(x, \alpha) < \eta$. □

1.4 Propriétés globales des fonctions continues

Le théorème qui suit nous donne une caractérisations topologique de la notion de continuité sur I.

Théorème 1.16.

La fonction $f : I \to F$ est continue sur I si, et seulement si, l'image réciproque par f de tout ouvert [resp. fermé] de F est un ouvert [resp. fermé] de I.

Preuve. On rappelle qu'une partie $\mathcal{J}$ de I est ouverte [resp. fermée] dans I si elle s'écrit $\mathcal{J} = I \cap \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert [resp. fermé] de E.

Soient $f : I \to F$ une fonction continue et $\mathcal{O}'$ un ouvert de F. Pour tout α dans $f^{-1}(\mathcal{O}')$, on a $f(\alpha) \in \mathcal{O}'$, donc il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B'(f(\alpha), \varepsilon)$ soit contenue dans $\mathcal{O}'$ et avec la continuité de f, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in B(\alpha, \eta) \cap I$ on ait $f(x) \in B'(f(\alpha), \varepsilon) \subset \mathcal{O}'$. On a donc $B(\alpha, \eta) \cap I \subset f^{-1}(\mathcal{O}')$ et en posant $\mathcal{O} = \bigcup_{\alpha \in f^{-1}(\mathcal{O}')} B(\alpha, \eta)$, on définit un ouvert de E tel que $f^{-1}(\mathcal{O}') = I \cap \mathcal{O}$, ce qui prouve que $f^{-1}(\mathcal{O}')$ est ouvert dans I. Réciproquement, supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de I. Pour $\alpha \in I$ et $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(B'(f(\alpha), \varepsilon))$ est un ouvert de I, il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que $B(\alpha, \eta) \cap I \subset f^{-1}(B'(f(\alpha), \varepsilon))$, ce qui signifie que $d'(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon$ pour tout $x \in B(\alpha, \eta) \cap I$. La fonction f est donc continue en tout point de I.

Pour ce qui est de l'image réciproque des fermés, on utilise le fait qu'un fermé est le complémentaire d'un ouvert et l'image réciproque du complémentaire est le complémentaire de l'image réciproque. □

Définition 1.14. *On dit que $f : I \to F$ est uniformément continue sur I si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \left((x, y) \in I^2,\ d(x, y) < \eta\right) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Une fonction uniformément continue sur I est évidemment continue en tout point de I, la nuance étant qu'un réel η associé à ε ne dépend que de f, I et ε.

La notion de continuité est une notion ponctuelle alors que celle de continuité uniforme est globale. On peut aussi remarquer que cette notion de continuité uniforme est une notion métrique alors que celle de continuité est topologique.

Théorème 1.17.

La composée de deux fonctions uniformément continues $f : I \to J \subset F$ et $g : J \to G$ (où (G, d'') est un espace métrique) est uniformément continue.

Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta' > 0$ tel que $d''(g(u), g(v)) < \varepsilon$ pour u, v dans J tels que $d'(u, v) < \eta'$ et il existe $\eta > 0$ tel que $d'(f(x), f(y)) < \eta'$ pour x, y dans I tels que $d(x, y) < \eta$, ce qui nous donne $d''(g(f(x)), g(f(y))) < \varepsilon$ pour x, y dans I tels que $d(x, y) < \eta$. □

Exemples 1.3

1. *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Cela se déduit de :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x - y|}$$

   Cette inégalité est triviale pour $x = y$ et pour $y > x \geq 0$ (x, y jouent des rôles symétriques), on a $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|^2 = y - 2\sqrt{xy} + x > y - x$.

2. *Une fonction $f : I \to F$ lipschitzienne (ce qui signifie qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ pour tous x, y dans I) est uniformément continue sur I.*

3. *Si f est une fonction à valeurs réelles et dérivable sur un intervalle réel I avec f' bornée, le théorème des accroissements finis (chapitre 9) nous dit que cette fonction est lipschitzienne et en conséquence uniformément continue sur I.*

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut très bien être uniformément continue sur tout intervalle strictement contenu dans I sans être uniformément continue sur I tout entier. C'est le cas, par exemple, pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $I = \left]0, 1\right]$. Elle est lipschitzienne sur tout $[a, 1]$ où $0 < a < 1$ (conséquence des accroissements finis), donc uniformément continue sur ces intervalles. Mais pour tout réel $\eta \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, $x = \eta$, $y = x + \dfrac{\eta}{2}$, on a $|y - x| < \eta$ avec $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{3\eta} > \dfrac{2}{3}$.

Le théorème qui suit nous donne une caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité.

Théorème 1.18.

Une fonction $f : I \to F$ est uniformément continue si, et seulement si, pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

Preuve. Soit $f : I \to F$ uniformément continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tous x, y dans I vérifiant $d(x, y) < \eta$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de I telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$, il existe alors un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, y_n) < \eta$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne que $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d'(f(y_n), f(x_n)) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\lim_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$ pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telles que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Si f n'est pas uniformément continue, il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ on peut trouver x_n, y_n dans I tel que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $d' f(x_n), f(y_n) \geq \varepsilon$, ce qui nous donne deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I telles que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$ et $(d'(f(x_n), f(y_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, ce qui n'est pas possible. □

Ce résultat peut être utilisé pour montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue sur I.

Par exemple pour la fonction $f : x \mapsto x^2$, en considérant les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_n = \sqrt{n+1}$, $y_n = \sqrt{n}$, on a $x_n - y_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, ce qui donne $\lim_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0$ avec $\lim_{n\to+\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 1 \neq 0$, donc cette fonction n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Une démonstration directe de cette non uniforme continuité peut se faire comme suit : pour $\eta > 0$, $x = \frac{2}{\eta}$, $y = x + \frac{\eta}{2}$, on a $|x - y| < \eta$ et $\left|y^2 - x^2\right| = 1 + \frac{\eta^2}{4} > 1$.

On montre de manière analogue que la fonction $f : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En considérant les mêmes suites, on a :

$$f(x_n) - f(y_n) = \sin(n+1) - \sin(n) = 2\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

et cette suite est divergente.

Définition 1.15. *Soit J une partie non vide de F. On dit que $f : I \to J$ est est un homéomorphisme si elle est continue bijective d'inverse f^{-1} continue.*

1.4.1 Continuité et compacité

Une fonction continue n'est pas nécessairement uniformément continue, mais pour les fonctions définies sur un compact, on a le résultat suivant.

Théorème 1.19. Heine

Si K est un compact de (E, d), alors toute fonction continue $f : K \to F$ est uniformément continue sur K.

Preuve. Si $f : K \to F$ n'est pas uniformément continue, il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans K tels que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $d' f(x_n), f(y_n) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. K étant compact, on peut extraire deux suites $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui convergent respectivement vers x et y dans K. Mais avec $d(x_n, y_n) < \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$, on déduit que $d(x, y) = \lim_{n\to+\infty} d\left(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}\right) = 0$, soit $x = y$, puis avec la continuité de f on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d'\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right), f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right) = 0$ en contradiction avec $d'\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right), f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right) \geq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. $\square$

Théorème 1.20.

L'image d'un compact par une application continue est un compact, ce qui signifie que si K est un compact de (E, d) et $f : K \to F$ une fonction continue, alors $f(K)$ est un compact de (F, d').

Preuve. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $f(K)$ avec $y_n = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le compact K on peut extraire une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément x de K et avec la continuité de f on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(x) \in f(K)$, donc $f(K)$ est compact. $\square$

Théorème 1.21.

Soient K un compact de (E, d) et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Cette fonction est bornée et atteint ses bornes, ce qui signifie qu'il existe α, β dans K tels que $f(\alpha) = \inf\limits_{x\in K} f(x)$ et $f(\beta) = \sup\limits_{x\in K} f(x)$.

Preuve. Comme $f(K)$ est compact, il est en particulier borné dans $\mathbb{R}$ et étant non vide, il admet une borne inférieure et une borne supérieure :

$$m = \inf_{x\in K} f(x), \ M = \sup_{x\in K} f(x)$$

Par définition de la borne inférieure m, pour tout entier $n > 0$ on peut trouver x_n dans K tel que $m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n}$ et de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie dans le compact K on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha \in K$. On a donc pour tout $n > 0$, $m \leq f\left(x_{\varphi(n)}\right) < m + \frac{1}{\varphi(n)}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$, ce qui nous donne avec la continuité de f, $f(\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = m$. On procède de manière analogue pour la borne supérieure. $\square$

1.4.2 Continuité et connexité

Le résultat qui suit ainsi que son corollaire sont souvent utiles pour montrer qu'un ensemble est connexe.

Théorème 1.22.

Si f est une fonction continue de (E, d) dans (F, d'), alors pour tout connexe $\mathcal{A}$ de E l'image $f(\mathcal{A})$ est connexe dans F.

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ une partie connexe de E et $\mathcal{A}' = f(\mathcal{A})$. Supposons qu'il existe deux ouverts de F, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, tels que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{A}' \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. On a alors :

$$\mathcal{A} \subset f^{-1}(\mathcal{A}') \subset f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cup f^{-1}(\mathcal{O}_2)$$

avec $f^{-1}(\mathcal{O}_1), f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ ouverts dans E et $\mathcal{A} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$, ce qui entraîne $\mathcal{A} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_1) = \emptyset$ ou $\mathcal{A} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$ et donc $\mathcal{A}' \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{A}' \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. L'ensemble $\mathcal{A}'$ est donc connexe dans F. □

Corollaire 1.1. *Une partie $\mathcal{A}$ de (E, d) est connexe si, et seulement si, toute application continue de $\mathcal{A}$ dans $\{0, 1\}$ est constante.*

Preuve. Soient $\mathcal{A}$ connexe dans (E, d) et $f : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ continue. L'ensemble $f(\mathcal{A})$ est connexe dans $\mathbb{R}$ contenu dans $\{0, 1\}$ et c'est nécessairement $\{0\}$ ou $\{1\}$ puisque $\{0, 1\}$ n'est pas connexe (en effet $\{0, 1\} \subset \left]-1, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$) ce qui signifie que f est constante. Réciproquement si $\mathcal{A}$ n'est pas connexe il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ de E tels que $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$ et $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$. La fonction caractéristique de $\mathcal{O}_1$, définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathcal{O}_1$ et $f(x) = 0$ sinon est alors continue de E dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ (si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1$ si $1 \in \mathcal{O}$ et $f^{-1}(\mathcal{O}) = \emptyset$ ou $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_2$ sinon) et non constante sur $\mathcal{A}$ (pour $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$ on a $f(x) = 1$ et pour $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ on a $f(x) = 0$). □

Corollaire 1.2. *Si $\mathcal{A}$ est une partie connexe de E, son adhérence $\overline{\mathcal{A}}$ est alors connexe.*

Preuve. Si f est une application continue de $\overline{\mathcal{A}}$ dans $\{0, 1\}$, sa restriction au connexe $\mathcal{A}$ est alors constante (puisque également continue) et par densité la fonction f est également constante sur $\overline{\mathcal{A}}$. □

L'intérieur d'un connexe n'est pas nécessairement connexe. Par exemple, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\mathcal{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\right\} \cup \{(0, 0)\}$ est connexe (il est connexe par arcs, donc connexe d'après le théorème 2.3) et son intérieur $\overset{\circ}{\mathcal{A}} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\right\}$ est non connexe .

Théorème 1.23.

Une réunion de connexes de E d'intersection non vide est connexe.

Preuve. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de connexes de E et $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Si $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ est une application continue à valeurs dans $\{0, 1\}$, alors pour tout $i \in I$ la restriction de f à $\mathcal{A}_i$ qui est également continue est constante égale à γ_i puisque $\mathcal{A}_i$ est connexe. Pour $x \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ on a $f(x) = \gamma_i$ pour tout $i \in I$, les γ_i sont donc tous égaux et f est constante sur $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est donc connexe. □

1.5 Exercices

Exercice 1.1. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pour que l'application $d_f : (x, y) \mapsto |f(y) - f(x)|$ définisse une distance sur $\mathbb{R}$.*

Solution. La propriété de symétrie et l'inégalité triangulaire sont clairement satisfaites. L'égalité $d_f(x, y) = 0$ équivaut à $f(x) = f(y)$ qui implique $x = y$ si, et seulement si, f est injective. En conclusion, d_f est une distance si, et seulement si, f est injective.

Exercice 1.2. *Pour tous polynômes P, Q dans $\mathbb{R}[X]$, on note :*

$$d_1(P, Q) = \sup_{\left[0, \frac{1}{2}\right]} |Q(t) - P(t)|, \quad d_2(P, Q) = \begin{cases} 0 \text{ si } P = Q \\ \deg(P - Q) + 1 \text{ si } P \neq Q \end{cases}$$

1. *Montrer que d_1 et d_2 définissent des distances sur $\mathbb{R}[X]$.*
2. *Étudier la convergence de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(\mathbb{R}[X], d_1)$ et dans $(\mathbb{R}[X], d_2)$.*

Solution. Les applications d_1 et d_2 sont à valeurs positives ou nulles.

1. La propriété de symétrie se vérifie aisément pour les deux normes. Par construction, on a $d_2(P, Q) = 0$ si, et seulement si $P = Q$ (puisque $\deg(A) \geq 0$ pour $A \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$). L'égalité $d_1(P, Q) = 0$ équivaut à $P(t) = Q(t)$ pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, ou encore à $P = Q$ (le polynôme $P - Q$ a une infinité de racines). Pour P, Q, R dans $\mathbb{R}[X]$, on a $|Q(t) - P(t)| \leq |Q(t) - R(t)| + |R(t) - P(t)|$ pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc $d_1(P, Q) \leq d_1(P, R) + d_1(R, Q)$. Pour $P = Q$, on a $d_2(P, Q) = 0 \leq d_2(P, R) + d_2(R, Q)$. Pour $P \neq Q$ et $P = R$ on a :

   $$d_2(P, Q) = d_2(R, Q) = \deg(R - Q) + 1 = d_2(P, R) + d_2(R, Q)$$

   et pareil pour $Q = R$. Pour $P \neq Q$, $P \neq R$ et $Q \neq R$ on a :

   $$\begin{aligned} d_2(P, Q) &= \deg(P - R + R - Q) + 1 \\ &\leq \deg(P - R) + \deg(R - Q) + 2 = d_2(P, R) + d_2(R, Q) \end{aligned}$$

   En conclusion, d_1, d_2 sont des distances sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Avec $\lim_{n\to+\infty} d_1(X^n, 0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on déduit que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $(\mathbb{R}[X], d_1)$ et avec $\lim_{n\to+\infty} d_2\left(X^{n+1}, X^n\right) = \lim_{n\to+\infty} (n + 1) = +\infty$, on déduit que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge dans $(\mathbb{R}[X], d_2)$.

Exercice 1.3. *Soit d une distance sur E.*

1. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante non identiquement nulle telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t + t') \leq \varphi(t) + \varphi(t')$ pour tous t, t' dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et que l'application $d_\varphi = \varphi \circ d$ définit une distance sur E.*
2. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle, croissante, continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de dérivée décroissante et telle que $\varphi(0) = 0$. Montrer que l'application $\varphi \circ d$ définit une distance sur E.*
3. *Montrer que les applications $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}} \circ d$, $\min(d, 1)$, $\dfrac{d}{1+d}$ et d^α ou α est dans $]0, 1[$ définissent des distances sur E.*
4. *On suppose que φ est continue en 0. En notant, pour $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}^{+,*}$, $B_\varphi(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r dans (E, d_φ), montrer que $B_\varphi(x, \varphi(r)) \subset B(x, r)$ et qu'il existe $r' \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $B(x, r') \subset B_\varphi(x, r)$. En déduire que les ouverts de (E, d) sont les ouverts de (E, d_φ).*

Solution.

1.

   (a) La fonction φ est à valeurs positives puisque croissante avec $\varphi(0) = 0$. Comme φ n'est pas identiquement nulle avec $\varphi(0) = 0$, il existe $t_0 > 0$ tel que $\varphi(t_0) > 0$. De la croissance de φ, on déduit que $\varphi(t) > 0$ pour tout $t \geq t_0$. S'il existe $t \in]0, t_0[$ tel que $\varphi(t) = 0$, on a alors $\varphi(nt) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, c'est vrai pour $n \in \{0, 1\}$ et si c'est vrai pour $n \geq 1$, de $0 \leq \varphi((n+1)t) \leq \varphi(nt) + \varphi(t)$, on déduit que $\varphi((n+1)t) = 0$. Mais prenant $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nt > t_0$, on aboutit à une contradiction. On a donc $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

   (b) Pour tous x, y, z dans E, on a $d_\varphi(y, x) = \varphi(d(y, x)) = \varphi(d(x, y)) = d_\varphi(x, y)$; l'égalité $d_\varphi(x, y) = \varphi(d(x, y)) = 0$ est réalisée si, et seulement si, $d(x, y) = 0$ d'après la question précédente, ce qui équivaut à $x = y$; $d_\varphi(x, z) = \varphi(d(x, z))$ avec $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, donc $d_\varphi(x, z) \leq d_\varphi(x, y) + d_\varphi(y, z)$.

2. Pour tout réel t' fixé dans $\mathbb{R}^+$, la fonction $\gamma : t \mapsto \varphi(t + t') - \varphi(t) - \varphi(t')$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec $\gamma'(t) = \varphi'(t + t') - \varphi'(t) \leq 0$ (φ' est décroissante), donc γ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (elle est continue en 0) et on a $\gamma(t) \leq \gamma(0) = 0$, soit $\varphi(t + t') \leq \varphi(t) + \varphi(t')$. De la question précédente, on déduit que $d_\varphi = \varphi \circ d$ est une distance.

3. Les fonctions $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}}$ et $t \mapsto \min(t, 1)$ vérifiant les hypothèses de la première question, on en déduit que :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}} \circ d : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } y = x \\ 1 \text{ si } y \neq x \end{cases} \quad \text{et} \quad \min(d, 1) : (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } d(x, y) > 1 \\ d(x, y) \text{ si } d(x, y) \leq 1 \end{cases}$$

sont des distances. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t}{1+t}$ et $t \mapsto t^{\alpha}$ pour $\alpha \in \left]0,1\right[$ vérifiant les hypothèses de la deuxième question, on en déduit que $\dfrac{d}{1+d}$ et d^{α} sont des distances.

4.

(a) Pour tout $y \in B_{\varphi}(x, \varphi(r))$, on a $d_{\varphi}(y,x) = \varphi(d(y,x)) < \varphi(r)$, ce qui implique que $d(y,x) < r$ puisque φ est croissante (si $d(y,x) \geq r$, on a alors $\varphi(d(y,x)) \geq \varphi(r)$), soit $y \in B(x,r)$. On a donc $B_{\varphi}(x,\varphi(r)) \subset B(x,r)$ que φ soit continue ou pas en 0.

(b) Dans le cas où φ est continue en 0, pour $r > 0$ donné il existe $r' > 0$ tel que $|\varphi(t)| = |\varphi(t) - \varphi(0)| < r$ pour tout réel t tel que $|t| < r'$, donc pour tout $y \in B(x,r')$, la condition $d(y,x) < r'$ entraîne que $d_{\varphi}(y,x) = \varphi(d(y,x)) < r$, soit $y \in B_{\varphi}(x,r)$. On a donc $B(x,r') \subset B_{\varphi}(x,r)$.

(c) Si $\mathcal{O} \subset E$ est ouvert non vide dans (E,d) et $x \in \mathcal{O}$, il existe alors $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \mathcal{O}$, donc $B_{\varphi}(x,\varphi(r)) \subset \mathcal{O}$ avec $\varphi(r) > 0$ et $\mathcal{O}$ est ouvert dans (E, d_{φ}). Réciproquement si $\mathcal{O}$ est ouvert dans (E,d_{φ}) et $x \in \mathcal{O}$, il existe alors $r > 0$ tel que $B_{\varphi}(x,r) \subset \mathcal{O}$ et pour $r' > 0$ tel que $B(x,r') \subset B_{\varphi}(x,r)$, on a $B(x,r') \subset \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}$ est ouvert dans (E,d). Les distances d et d_{φ} définissent donc la même topologie sur E.

Exercice 1.4. *Montrer que tout fermé d'un espace métrique (E,d) peut s'écrire comme l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts et que tout ouvert peut s'écrire comme la réunion d'une suite croissante de fermés.*

Solution. Soit $\mathcal{F}$ un fermé dans E. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F}) = \left\{ x \in E \mid d(x,\mathcal{F}) < \dfrac{1}{n} \right\}$ est un ouvert qui contient $\mathcal{F}$ (exemples 1.1) et on a $\mathcal{F} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})$. En effet, comme $\mathcal{F}$ est contenu dans tous les $\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})$, il est contenu dans l'intersection et pour tout $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})$, on a $d(x,\mathcal{F}) = 0$, ce qui équivaut à dire que $x \in \mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ est fermé. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{V}_{\frac{1}{n+1}}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})$. Par passage au complémentaire, on a le résultat sur les ouverts.

Exercice 1.5. *Soient (E,d), (F,d') deux espaces métriques, I une partie non vide de E et $\mathcal{C}_b(I,F)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées de I dans F.*

1. *Montrer que l'application d_{∞} définie par :*
$$\forall (f,g) \in (\mathcal{C}_b(I,F))^2, \ d_{\infty}(f,g) = \sup_{x \in I^2} d'(f(x), g(x))$$
est une distance sur $\mathcal{C}_b(I,F)$.
2. *Dans le cas où (F,d') est complet, montrer que $(\mathcal{C}_b(I,F), d_{\infty})$ est complet.*

Solution. Dire qu'une fonction $f : I \to F$ est bornée signifie que :

$$\delta(f(I)) = \sup_{(x,y)\in I^2} d'(f(x), f(y)) < +\infty$$

1. En se fixant x_0 dans I, on a pour toutes fonctions f, g dans $\mathcal{C}_b(I, F)$ et tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} d'(f(x), g(x)) &\le d'(f(x), f(x_0)) + d'(f(x_0), g(x_0)) + d'(g(x_0), g(x)) \\ &\le \delta(f(I)) + d'(f(x_0), g(x_0)) + \delta(g(I)) \end{aligned}$$

   donc le réel $d_\infty(f, g)$ est bien défini. Il est clair que pour toutes fonctions f, g, h dans $\mathcal{C}_b(I, F)$, on a $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$, $d_\infty(f, h) \le d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)$ et l'égalité $d_\infty(f, g) = 0$ équivaut à $d'(f(x), g(x))$ pour tout $x \in I$, soit à $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$, ou encore à $f = g$. L'application d_∞ est donc bien une distance sur $\mathcal{C}_b(I, F)$.
2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace métrique $(\mathcal{C}_b(I, F), d_\infty)$ et ε un réel strictement positif. Il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall m > n \ge n_0, \forall x \in I,\ d'(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \tag{1.3}$$

   donc pour x fixé dans I, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (F, d') et en conséquence converge vers un élément $f(x)$ de F. Faisant tendre m vers l'infini dans (1.3), on en déduit que :

$$\forall n \ge n_0, \forall x \in I,\ d'(f_n(x), f(x)) \le \varepsilon \tag{1.4}$$

   En effet, pour $x \in I$, $n \ge n_0$ fixés, on a :

$$d'(f_n(x), f(x)) \le d'(f_n(x), f_m(x)) + d'(f_m(x), f(x)) \le \varepsilon + d'(f_m(x), f(x))$$

   pour tout $m > n$ avec $\lim\limits_{m\to+\infty} d'(f_m(x), f(x)) = 0$, ce qui donne en faisant tendre m vers l'infini, $d'(f_n(x), f(x)) \le \varepsilon$. Il en résulte que pour tous x, y dans I, on a :

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(y)) &\le d'(f(x), f_{n_0}(x)) + d'(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d'(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &< 2\varepsilon + \delta(f_{n_0}(I)) < +\infty \end{aligned}$$

   ce qui signifie que f est bornée. Puis avec :

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\le d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &< 2\varepsilon + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \end{aligned}$$

   pour tous x, y dans I, on déduit que f est continue sur I. En définitive, f est dans $\mathcal{C}_b(I)$ et de (1.4), on déduit que $d_\infty(f_n, f) \le \varepsilon$ pour tout $n \ge n_0$, ce qui achève de prouver que $(\mathcal{C}_b(I, F), d_\infty)$ est complet.

Exercice 1.6. *Montrer qu'un espace métrique compact est séparable.*

Solution. Soit (E,d) un espace métrique compact. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on peut extraire du recouvrement ouvert $E=\displaystyle\bigcup_{x\in E}B\left(x,\frac{1}{n}\right)$ un sous recouvrement fini $E=\displaystyle\bigcup_{x\in D_n}B\left(x,\frac{1}{n}\right)$, où D_n est une partie finie de E. On vérifie alors que l'ensemble dénombrable $D=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}D_n$ est dense dans E. Pour $a\in E$ et $\varepsilon>0$, prenant $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, il existe $x\in D_n$ tel que $a\in B\left(x,\dfrac{1}{n}\right)$, donc $d(x,a)<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ et $x\in B(a,\varepsilon)\cap D$. On a donc $D\cap B(a,\varepsilon)\neq\emptyset$ pour tout $a\in E$ et tout $\varepsilon>0$, ce qui signifie que D est dense dans E. En conclusion, (E,d) est séparable.

Exercice 1.7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace métrique (E,d).*

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.*
2. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.*
3. *Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite périodique, montrer qu'elle converge si, et seulement si, elle est constante.*

Solution.

1. Supposons que $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. Si $\ell\neq\ell'$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a au moins deux valeurs d'adhérence distinctes et en conséquence ne peut converger. Si $\ell=\ell'$, il existe alors, pour tout réel $\varepsilon>0$, des entiers k_1 et k_2 tels que :
$$\forall k\geq k_1,\ d(u_{2k},\ell)<\varepsilon \text{ et } \forall k\geq k_2,\ d(u_{2k+1},\ell')<\varepsilon$$
et en notant $n_0=\max(2k_1,2k_2+1)$, on a pour tout $n\geq n_0$, $d(u_n,\ell)<\varepsilon$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. La réciproque est évidente.
2. Supposons que $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ, ℓ' et ℓ''. La suite $(u_{6k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui est extraite de $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et ℓ'', ce qui impose $\ell=\ell''$ du fait de l'unicité de la limite. De même en remarquant que $(u_{6k+3})_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$, on déduit que $\ell'=\ell''$ et $\ell=\ell'$, donc $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, ce qui équivaut à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La réciproque est évidente.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers ℓ et périodique de période p où p est un entier strictement positif. Pour tout entier naturel k, la suite extraite $(u_{pn+k})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur commune u_k et convergente vers ℓ. On a donc $u_k=\ell$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. La réciproque est évidente.

Exercice 1.8. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace métrique (E,d).*

1. *Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\ell$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} d(u_{n+1},u_n)=0$. La réciproque est-elle vraie ?*
2. *Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\ell$, on a alors pour toute application strictement croissante $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} d\left(u_{\varphi(n)},u_n\right)=0$.*
3. *Montrer que, dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$, les suites $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\ln(n))_{n\geq 1}$ sont divergentes.*
4. *Montrer que, dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$, la suite réelle $(\ln(\ln(n)))_{n\geq 2}$ est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n}-u_n)=0$ et divergente.*

Solution.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\ell$, on peut alors trouver, pour tout réel $\varepsilon>0$, un entier n_0 tel que :
$$\forall n>n_0,\ d(u_{n+1},u_n)\leq d(u_{n+1},\ell)+d(\ell,u_n)<\varepsilon$$
ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(u_{n+1},u_n)=0$. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$. Cette suite est divergente puisque non bornée et pour $n\geq 1$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$
On peut aussi considérer, plus généralement, la suite réelle $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ avec α dans $]0,1[$. Cette suite est divergente puisque non bornée et pour $n\geq 1$, on a :
$$(n+1)^\alpha-n^\alpha=[t^\alpha]_n^{n+1}=\int_n^{n+1}\frac{\alpha}{t^{1-\alpha}}dt\leq\frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}\underset{n\to+\infty}{\to}0$$
puisque $1-\alpha>0$. On peut aussi utiliser le théorème des accroissements finis pour écrire que $(n+1)^\alpha-n^\alpha=\alpha\xi_n^{\alpha-1}$ avec ξ_n compris entre n et $n+1$, ce qui donne $\alpha\xi_n^{\alpha-1}=\dfrac{\alpha}{\xi_n^{1-\alpha}}\leq\dfrac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$. Ou encore écrire que :
$$0<(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right)\leq n^\alpha\left(1+\frac{1}{n}-1\right)=\frac{1}{n^{1-\alpha}}$$
2. L'application φ étant strictement croissante, on a $\varphi(n)\geq n$ pour tout entier n et en conséquence, pour tout réel $\varepsilon>0$, on peut trouver un entier n_0 tel que :
$$\forall n>n_0,\ d\left(u_{\varphi(n)},u_n\right)\leq d\left(u_{\varphi(n)},\ell\right)+d(\ell,u_n)<\varepsilon$$
ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} d\left(u_{\varphi(n)},u_n\right)=0$.

3. Résulte de $|u_{n+1} - u_n| = 2$, $|v_{2n} - v_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ et $|w_{2n} - w_n| = \ln(2)$, les notations étant évidentes. On peut remarquer que la deuxième suite est telle que pour tout $p \geq 1$, $\lim_{n \to +\infty} (v_{n+p} - v_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k} \right) = 0$.

4. On a :

$$u_{2n} - u_n = \ln(\ln(2n)) - \ln(\ln(n)) = \ln \frac{\ln(n) + \ln(2)}{\ln(n)} = \ln\left(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)}\right)$$

et comme $\left(\frac{\ln(2)}{\ln(n)}\right)_{n \geq 2}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il en est de même pour la suite $(u_{2n} - u_n)_{n \geq 2} = \left(\ln\left(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)}\right)\right)_{n \geq 2}$. Comme :

$$u_{n^2} - u_n = \ln\left((\ln n^2)\right) - \ln(\ln(n)) = \ln\left(\frac{2\ln(n)}{\ln(n)}\right) = \ln 2$$

la suite réelle $(\ln(\ln(n)))_{n \geq 2}$ est divergente.

Exercice 1.9. *Soient (E, d) un espace métrique complet et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\overline{B}(x_n, r_n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de boules fermées dans E telle que :*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ r_n > 0,\ B_{n+1} \subset B_n \\ \lim_{n \to +\infty} r_n = 0 \end{cases}$$

Montrer que dans ces conditions l'intersection de toutes les boules B_n est non vide réduite à un point.

Solution. Étant donné un réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que $0 < r_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Du fait que pour $m \geq n$, on a $x_m \in B_m \subset B_n$, on déduit que :

$$\forall m > n \geq n_0,\ d(x_m, x_n) \leq r_n < \varepsilon$$

ce qui signifie que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, d). Cet espace métrique étant complet, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans E. On note x sa limite. Pour tout entier naturel n et tout entier $m \geq n$, on a $x_m \in B_n$, la boule B_n étant fermée, il en résulte que $x = \lim_{\substack{m \to +\infty \\ m \geq n}} x_m \in B_n$. Donc $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et cette intersection est non vide. Si $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$, on a alors $d(y, x_n) \leq r_n$ pour tout entier naturel n et $y = \lim_{n \to +\infty} x_n = x$, cette intersection est donc réduite au point x.