Contrôle continu 2

Exercice 1. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto e^{-y} \sin 2xy$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0, 1] \times (0, +\infty)$; en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{y}(\sin y)^2 e^{-y}\, dy.$$

Exercice 2. Soient $a, b > 0$, et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ et $g(x) = e^{-\frac{b|x|^2}{2}}$. Calculer $f * g(x)$.

Exercice 3.

1. Montrer que toute fonction f de $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leqslant p < +\infty$ vérifie que $\lim ||f - f\mathbf{1}_{[-n,-n]}||_p = 0$.
2. On dit qu'une suite f_n de $L^2(\mathbb{R})$ converge faiblement vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ si pour tout g de $L^2(\mathbb{R})$ $< f - f_n, g >$ tend vers 0.
   Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :
   $$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{[n,2n]}(x).$$
   (a) Montrer que f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$ mais ne converge pas dans $L^2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que f_n converge vers 0 dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p > 2$.

Exercice 4. Pour $t > 0$ on définit :

$$F(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2(x) + t^2\cos(x)^2}} \qquad \text{et } G(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)dx}{\sqrt{\sin^2(x) + t^2\cos(x)^2}}.$$

1. Etudier la limite $\lim\limits_{t\to 0^+}(F(t) - G(t))$.
2. Calculer $G(t)$ pour $t \in]0, 1[$.
3. En déduire la limite $\lim\limits_{t\to 0^+}(F(t) + \ln(t))$.

Exercice 5. On considère une application $f :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ intégrable et on définit

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f(x)dx.$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^∞ sur $]0, +\infty[$.
2. Si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, F est-elle dérivable à droite en 0 ?