Transformation de Laplace

Un nombre complexe sera noté $z = x + iy$, où $x = \Re(z)$ est la partie réelle de z et $y = \Im(z)$ sa partie imaginaire.

Pour tout réel σ, on désigne par P_σ le demi-plan ouvert défini par :

$$P_\sigma = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > \sigma\}$$

et par $\overline{P_\sigma}$ le demi-plan fermé défini par :

$$\overline{P_\sigma} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq \sigma\}$$

On note également $P_{+\infty} = \emptyset$ et $P_{-\infty} = \mathbb{C}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$.

Soient $f \in \mathcal{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. On dit que $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\,dt$ est convergente et dans ce cas, on note $\mathcal{L}(f)(z)$ la valeur de cette intégrale.

L'application $\mathcal{L}(f)$, quand elle est définie, est la transformée de Laplace de f.

On note $\mathcal{DL}(f)$ le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ pour $f \in \mathcal{C}$.

On notera que le fait qu'une intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ soit convergente ne signifie pas que la fonction g soit intégrable. Les théorèmes de convergence dominé ne s'appliquent donc pas a priori.

– I – Quelques exemples

Déterminer le domaine de définition $\mathcal{DL}(f)$ de $\mathcal{L}(f)$ et préciser les valeurs de $\mathcal{L}(f)(z)$ pour tout $z \in \mathcal{DL}(f)$ dans les cas suivants.

1. f est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^+$.
2. f est la fonction définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = e^{\lambda t}$$
où λ est un nombre complexe donné.
3. f est la fonction définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = t^n$$
où n est un entier naturel donné.
4. f est la fonction définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = e^{\lambda t} t^n$$
où λ est un nombre complexe et n un entier naturel donnés.
5. f est la fonction définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = t^n \cos(\omega t)\ \ [\text{resp. } f(t) = t^n \sin(\omega t)\,]$$
où ω un nombre réel, n un entier naturel donnés. Préciser ces fonctions pour $n = 0$ et $n = 1$.

– II – Abscisse de convergence. Continuité de $\mathcal{L}(f)$. Injectivité de $\mathcal{L}$

Soit $f \in \mathcal{C}$.

1.

(a) On suppose que $\mathcal{L}(f)$ est définie en un point $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ et on désigne par F_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ F_0(t) = \int_0^t e^{-z_0 u} f(u)\,du$$

Montrer que pour tout $z \in P_{x_0}$, $\mathcal{L}(f)(z)$ est défini et que :

$$\mathcal{L}(f)(z) = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F_0(t)\,dt$$

(b) On désigne par $E(f)$ la partie de $\mathbb{R}$ définie par :

$$E(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt \text{ est convergente} \right\}$$

i. Montrer que si $E(f) = \emptyset$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\,dt$ est divergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. On note, dans ce cas, $\sigma(f) = +\infty$. Donner un exemple de telle situation.

ii. Montrer que si $E(f)$ est non vide et non minoré, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est alors définie sur tout $\mathbb{C}$. On note alors $\sigma(f) = -\infty$. Donner un exemple de telle situation.

iii. Montrer que si $E(f)$ est non vide et minoré, il existe alors un réel $\sigma(f)$ tel que :

$$\begin{cases} \text{si } \Re(z) > \sigma(f) \text{ alors } \mathcal{L}(f)(z) \text{ est défini} \\ \text{si } \Re(z) < \sigma(f) \text{ alors } \mathcal{L}(f)(z) \text{ n'est pas défini} \end{cases}$$

Avec les notations de la question précédente, on dit que $\sigma(f)$ est l'abscisse de convergence de la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et on a :

$$P_{\sigma(f)} \subset \mathcal{DL}(f) \subset \overline{P_{\sigma(f)}}$$

Pour la suite, on suppose que $f \in \mathcal{C}$ est telle que $\sigma(f) < +\infty$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant. Si pour $\sigma_0 > \sigma(f)$, on désigne par F_0 la primitive nulle en 0 de la fonction $t \mapsto e^{-\sigma_0 t} f(t)$, soit :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ F_0(t) = \int_0^t e^{-\sigma_0 u} f(u)\,du \tag{1}$$

on a alors :

$$\forall z \in P_{\sigma_0},\ \mathcal{L}(f)(z) = (z - \sigma_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-\sigma_0)t} F_0(t)\,dt$$

De plus F_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et avec $\lim\limits_{T \to +\infty} F_0(T) = \mathcal{L}(f)(\sigma_0)$, on déduit que cette fonction est bornée. On note alors :

$$M_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |F_0(t)|$$

2. Montrer que si f est à valeurs réelles positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt$ est alors absolument convergente pour tout $z \in P_{\sigma(f)}$.
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.
   (a) Montrer que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$ et que la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. On note respectivement $\varphi(z)$ et $f(z)$ les sommes de ces séries entières.
   (b) On note encore f la restriction de f à $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\sigma(f) \leq 1$.
   (c) Montrer que :
$$\forall z \in P_1,\ \mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z}\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$$
4. En utilisant la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{C}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \varphi_n(z) = \int_0^n e^{-zt} f(t)\, dt$$
   montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $P_{\sigma(f)}$.
5. Donner une deuxième démonstration de la continuité de $\mathcal{L}(f)$ sur $P_{\sigma(f)}$.
6. On se donne un réel $\sigma_0 > \sigma(f)$ et F_0 est la fonction définie par (1).
   (a) Montrer que, pour tout $z \in P_{\sigma_0}$ et tout entier naturel k, l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} e^{-(z-\sigma_0)t} t^k F_0(t)\, dt$$
   est absolument convergente.
   (b) En déduire que, pour tout $z \in P_{\sigma(f)}$ et tout entier naturel k, l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} t^k f(t)\, dt$$
   est convergente. On a donc :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sigma\left(t^k f\right) \leq \sigma(f)$$
7. Montrer que, si φ est une fonction continue sur un intervalle réel fermé borné $[a, b]$ à valeurs complexes telle que $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\, t^n dt = 0$ pour tout entier naturel n, elle est alors identiquement nulle (théorème des moments de Hausdorff).
8. En utilisant les transformées de Laplace des fonctions $t \mapsto t^n$, vérifier que le résultat de la question précédente n'est pas valable sur $]0, +\infty[$.
9. On suppose qu'il existe un réel $\sigma_0 > \sigma(f)$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}(f)(\sigma_0 + n) = 0$$
   (a) Montrer que la fonction φ définie sur $]0, 1]$ par :
$$\varphi(t) = F_0(-\ln(t))$$
   se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n \varphi(t)\,dt = 0$$

et en déduire que f est la fonction identiquement nulle.

10. Montrer que si $\mathcal{L}(f)(z) = 0$ pour tout $z \in P_{\sigma(f)}$, f est alors la fonction identiquement nulle.

11. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $n \geq 1$ et que :

$$\begin{aligned} &\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\},\ \sigma\left(f^{(k)}\right) < +\infty \\ &\forall k \in \{0, 1, \cdots, n-1\},\ \forall z \in P_{\sigma\left(f^{(k)}\right)},\ \lim_{t \to +\infty} e^{-zt} f^{(k)}(t) = 0 \end{aligned}$$

Montrer que :

$$\forall z \in \bigcap_{k=0}^{n} P_{\sigma\left(f^{(k)}\right)},\ \mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(z) = z^n \mathcal{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

– III – Étude de la restriction de $\mathcal{L}(f)$ à l'intervalle réel $]\sigma(f), +\infty[$

On s'intéresse ici à la restriction de la fonction $\mathcal{L}(f)$ à l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$. On note encore $\mathcal{L}(f)$ cette restriction.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$. On a donc $\mathcal{L}(f)(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{f(0)}{x}$ si $f(0) \neq 0$ et $\mathcal{L}(f)(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $f(0) = 0$.

3. On suppose, pour cette question, que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \ell$.

   (a) Montrer que $\sigma(f) \leq 0$.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.

4. Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\sigma(f), +\infty[$ avec :

$$\forall x \in]\sigma(f), +\infty[,\ \mathcal{L}(f)'(x) = -\mathcal{L}(tf)(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} t f(t)\,dt$$

5. En déduire que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\sigma(f), +\infty[$ avec $\mathcal{L}(f)^{(k)} = (-1)^k \mathcal{L}\left(t^k f\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

6. Montrer que si $f \in \mathcal{C}$ est telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lambda$, on a alors $\lim\limits_{T \to +\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(t)\,dt = \lambda$ (théorème de Cesàro).

7. On suppose, pour cette question, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente. Montrer que :

   (a) $\sigma(f) \leq 0$;

   (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ (la limite est prise pour x réel positif) ;

   (c) $\lim\limits_{T \to +\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T t f(t)\,dt = 0$.

8. Si $\sigma(f) \leq 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, peut-on en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente ?
9. On suppose, pour cette question, que $f \in \mathcal{C}$ est à valeurs positives ou nulles.

   Montrer que si $\sigma(f) \leq 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est alors convergente et sa valeur vaut ℓ.
10. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} \text{ si } t > 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ sont convergentes et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$$

   (b) Montrer que $\sigma(f) = 0$.

   (c) Calculer $\mathcal{L}(f)(x)$ pour tout $x > 0$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

11. Soient $f \in \mathcal{C}$ telle que $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t} = \ell$ et $g \in \mathcal{C}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{t} \text{ si } t > 0 \\ \ell \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

   On suppose de plus que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ est convergente.

   (a) Montrer que $\sigma(f) \leq \sigma(g) \leq 0$.

   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t)\,dt$ est convergente et que :

$$\forall x \geq 0,\ \mathcal{L}(g)(x) = \int_x^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t)\,dt$$

   En particulier, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(f)(t)\,dt$$

   et on retrouve les résultats de la question précédente.

– IV – Théorèmes taubériens

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}$ est telle que la fonction $t \mapsto t \cdot f(t)$ soit bornée (i. e. $f(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t}\right)$), on a alors $\sigma(f) \leq 0$.
2. On suppose, pour cette question, que $f \in \mathcal{C}$ est telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} (t \cdot f(t)) = 0$ (i. e. $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$).

(a) Montrer que $\sigma(f) \leq 0$.

(b) Montrer que $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T t\,|f(t)|\,dt = 0$.

(c) Montrer que :

$$\forall x > 0,\ \forall T > 0,\ \left|\int_T^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt\right| \leq \frac{e^{-xT}}{xT} \sup_{t\geq T}\left(t\,|f(t)|\right)$$

(d) On suppose de plus que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \ell$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut ℓ.

3. Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ (dans ce cas, on a $\sigma(f) \leq 0$).

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$. Ce résultat est un théorème de Tauber (faible).

4. On s'intéresse ici à la réciproque du résultat montré en **III.7.**

Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $\sigma(f) \leq 0$, $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \ell$, $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T t f(t)\,dt = 0$.

On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$\forall t > 0,\ g(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t u f(u)\,du$$

(a) Montrer que :

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \frac{f(0)}{2}$$

On prolonge alors la fonction g par continuité en 0 en posant $g(0) = \dfrac{f(0)}{2}$ et $g \in \mathcal{C}$.

(b) Montrer que $\sigma(g) \leq 0$.

(c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\mathcal{L}(t\cdot g)(x) = 0$.

(d) Montrer que :

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(g)(x) + x\mathcal{L}(t\cdot g)(x)$$

(e) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \mathcal{L}(g)(x) = \ell$.

(f) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

En définitive, on a montré le résultat suivant :

Soit $f \in \mathcal{C}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut ℓ si, et seulement si : $\sigma(f) \leq 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} L(f)(x) = \ell$, $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T t f(t)\,dt = 0$.