

Suites de fonctions

Sauf précision contraire, I est un intervalle réel non réduit à un point et les fonctions considérées sont définies sur I à valeurs réelles ou complexes.

16.1 Convergence simple et convergence uniforme

On désigne par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 16.1 On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I si, pour tout réel $x \in I$ la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

La convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f sur I se traduit donc par :

$$(\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}) \mid (\forall n \geq n_{x,\varepsilon}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

la notation $n_{x,\varepsilon}$ signifiant que l'entier $n_{x,\varepsilon}$ dépend de x et de ε .

En utilisant les résultats relatifs aux suites numériques, on montre facilement les résultats énoncés avec le théorème qui suit.

Théorème 16.1 Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions qui convergent simplement sur I vers f et g respectivement.

1. La suite $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $|f|$.
2. Pour tous scalaires λ, μ , la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $\lambda f + \mu g$.
3. Si les fonctions f_n et g_n sont à valeurs positives avec $f_n \leq g_n$ à partir d'un certain rang, alors $f \leq g$.
4. Si les f_n sont à valeurs positives et croissantes à partir d'un certain rang, alors f est croissante.
5. Si les f_n sont à valeurs positives et convexes à partir d'un certain rang, alors f est convexe.

Exemple 16.1 Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $I = \mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$. On vérifie facilement que cette suite converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour $\varepsilon \in]0, 1[$ donné et $x > 0$, on aura

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+nx} < \varepsilon$$

pour $nx > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, soit pour $n \geq n_{x,\varepsilon} = E\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x}\right) + 1$.

Supposons qu'il existe un entier n_ε indépendant de $x \in I$ tel que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. On aura alors pour tout $x > 0$ et $n \geq n_\varepsilon$, $\frac{1}{1+nx} < \varepsilon$ et faisant tendre x vers 0 pour n fixé, on aboutit à $1 \leq \varepsilon$, ce qui n'est pas.

Il est donc impossible de trouver un tel n_ε valable pour tout $x \in I$ ou même pour tout $x > 0$. On dit dans ce cas que la convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R}^+ (ou $\mathbb{R}^{+,*}$).

L'exemple précédent nous conduit à la définition suivante.

Définition 16.2 On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si la suite $\left(\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

Remarque 16.1 La borne supérieure $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ est un élément de $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

La convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f sur I se traduit donc par :

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \mid (\forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in I, \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

La convergence uniforme se traduit aussi graphiquement en disant que pour $n \geq n_\varepsilon$ le graphe de f_n est dans une bande de largeur 2ε symétrique par rapport au graphe de f (faire un dessin).

Avec les inégalités $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$, on déduit que la convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Exemple 16.2 En reprenant l'exemple précédent, on a pour $x > 0$, $|f_n(x) - f(x)| = \varphi(nx)$ où $\varphi(y) = \frac{1}{1+y}$ pour $y > 0$ avec $\sup_{y>0} \varphi(y) = 1$, ce qui donne $\sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = 1$ et la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (et en conséquence elle n'est pas uniforme sur \mathbb{R}^+). Mais sur $J = [a, +\infty[$ avec $a > 0$, on a :

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+na}$$

du fait de la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+nx}$ sur \mathbb{R}^+ . Avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+na} = 0$, on déduit que la convergence est uniforme sur J .

Remarque 16.2 Si I est une réunion d'intervalle, $I = \bigcup_{k=1}^p I_k$ la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur I est équivalente à la convergence uniforme sur chacun des I_k . En effet si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I , avec :

$$\sup_{x \in I_k} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

on déduit la convergence uniforme sur I_k . Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur chacun des I_k , avec :

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{1 \leq k \leq p} \left(\sup_{x \in I_k} |f_n(x) - f(x)| \right) \leq \sum_{k=1}^p \sup_{x \in I_k} |f_n(x) - f(x)|$$

on déduit la convergence uniforme sur I .

Pour montrer qu'une suite de fonctions converge uniformément, on peut procéder comme suit :

- étudier la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ pour prouver une éventuelle convergence simple vers une fonction f ;
- étudier les variations sur l'intervalle I de chaque fonction $f_n - f$ en vue de déterminer sa borne inférieure et sa borne supérieure, ce qui permet d'obtenir $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$, cette étude est facilitée si les fonctions en questions sont dérivables, dans la mesure où les racines de $f'_n - f'$ se calculent facilement ;
- ou alors essayer de déterminer une suite de réels positifs $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n$ pour n assez grand et tout $x \in I$, ce qui entraînera $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n$ pour n assez grand. En pratique, il vaut mieux opter pour ce type de méthode de travail.

Exercice 16.1 Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions uniformément convergente vers une fonction f sur un intervalle I , alors la suite de fonctions $(\sin(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\sin(f)$ sur I .

Solution 16.1 Résulte de :

$$|\sin(f_n(x)) - \sin(f(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

Le résultat qui suit nous donne un critère permettant de prouver la non convergence uniforme.

Théorème 16.2 Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur I , alors pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I , la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration. Résulte des inégalités :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

valables pour tout n . ■

Pour montrer la non convergence uniforme, il suffit donc de trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 (en supposant bien sûr que la convergence simple vers f a été prouvée).

Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x , avec :

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$

on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = f(x)$ si la convergence est uniforme avec f continue.

Exercice 16.2 On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur \mathbb{R} par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle simplement sur \mathbb{R} , et si oui, vers quelle fonction ?
2. La convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-t-elle uniforme sur \mathbb{R} ?
3. La convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-t-elle uniforme sur $[-1, 1]$?

Solution 16.2

1. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la suite réelle $(f_n(0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante égale à 0.

Pour $x \neq 0$, on a $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} x$ et la suite réelle $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x .

En définitive, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction $f : x \mapsto x$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n définie sur \mathbb{R} par :

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right) - x$$

est impaire et dérivable de dérivée $g'_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \leq 0$, cette dérivée s'annulant aux points $x_{n,k} = 2nk\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ avec $g_n(x_{n,k}) = 2nk\pi$. On a donc $\sup_{x \in [-2nk\pi, 2nk\pi]} |g_n(x)| =$

$2n|k|\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)| = +\infty$.

La convergence n'est donc pas uniforme sur \mathbb{R} .

3. Sur $[-1, 1]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction g_n est décroissante et $\sup_{x \in [-1, 1]} |g_n(x)| = |g_n(1)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. La convergence est donc uniforme.

Exercice 16.3 Soit k un entier positif ou nul et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x) = \frac{x^k}{x^2 + n}$.

- Pour quelles valeurs de k cette suite converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R} ?
- Pour quelles valeurs de k cette suite converge-t-elle uniformément sur toute partie bornée \mathbb{R} ?

Solution 16.3

1. Pour tout réel x , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

Pour $k = 0$, et x dans \mathbb{R} , on a $0 \leq f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n} \leq \frac{1}{n}$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R} et sur toute partie bornée \mathbb{R} .

Pour tout entier strictement positif k , on a $f'_n(x) = \frac{x^{k-1}}{(x^2 + n)^2} ((k-2)x^2 + kn)$ et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{n}} & \text{si } k = 1, \\ 1 & \text{si } k = 2, \\ +\infty & \text{si } k > 2. \end{cases}$$

On déduit donc que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R} uniquement pour $k = 0$ et $k = 1$.

2. Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [-a, a]$, on a :

$$|f_n(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{n}} & \text{si } k = 1, \\ |f_n(a)| & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

On en déduit alors que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout partie bornée \mathbb{R} pour tout entier positif ou nul k .

Exercice 16.4 Soit $\alpha > 0$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur \mathbb{R}^+ par $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette suite converge uniformément sur \mathbb{R}^+ .
2. Étudier la convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Solution 16.4 La fonction f_n est dérivable avec :

$$f'_n(x) = n^\alpha e^{-nx} (1 - nx)$$

$f_n(0) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et f à valeurs positives.

1. Pour $n \geq 1$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers la fonction nulle pour tout $\alpha > 0$.
Avec $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$ pour $n \geq 1$, on déduit que la convergence est uniforme sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $\alpha \in]0, 1[$.
2. Pour tout $a > 0$, il existe un entier n_a tel que $\frac{1}{n} < a$ pour tout $n \geq n_a$ et $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$. On en déduit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 16.5 Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que $f(1) = 0$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $I = [0, 1]$ par $f_n(x) = x^n f(x)$ converge uniformément vers 0 sur I .

Solution 16.5 Laissée au lecteur.

Exercice 16.6 On désigne par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur \mathbb{R}^+ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = nx \sin(x) e^{-nx}.$$

1. Montrer que cette suite converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers la fonction nulle.
2. Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto te^{-t}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0 est uniforme sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$.
4. On se propose maintenant de montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0 est encore uniforme sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(a) Calculer, pour tout $n \geq 1$, la dérivée de la fonction f_n .

(b) Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{n}\right], f'_n(x) > 0.$$

(c) Montrer que, sur l'intervalle $\left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right]$, f'_n s'annule en un unique point $x_n \in \left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(d) En déduire les variations de f_n sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(e) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et sur \mathbb{R}^+ .

Solution 16.6

1. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = f(0) = 0$.

Pour $x > 0$, on a $|f_n(x)| \leq x \frac{n}{e^{nx}}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^{nx}} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = 0$.

2. La fonction φ est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \geq 1$, on a :

$$\varphi'(t) = e^{-t}(1-t) \leq 0.$$

Cette fonction est donc décroissante sur $[1, +\infty[$.

3. Pour tout $n \geq 1$ et $x \geq \frac{\pi}{2}$, on a :

$$|f_n(x)| \leq nxe^{-nx} = \varphi(nx) \leq \varphi(n) = \frac{n}{e^n}$$

puisque $nx \geq n \geq 1$ et φ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$, on déduit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$.

4.

(a) On a :

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= ne^{-nx}(-nx \sin(x) + \sin(x) + x \cos(x)) \\ &= ne^{-nx}((1-nx) \sin(x) + x \cos(x)). \end{aligned}$$

(b) Pour $x \in \left]0, \frac{1}{n}\right]$, les quantités $(1-nx)$, $\sin(x)$, x , $\cos(x)$ et ne^{-nx} sont strictement positives, donc $f'_n(x) > 0$.

(c) Pour $x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$f'_n(x) = ne^{-nx} \cos(x) (1-nx) \left(\tan(x) - \frac{x}{nx-1} \right)$$

avec $ne^{-nx} \cos(x) (1-nx) < 0$. Le signe de $f'_n(x)$ sur $\left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right]$ dépend donc de celui de $g_n(x) = \tan(x) - \frac{x}{nx-1}$. Avec $g'_n(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{(nx-1)^2} > 0$, on déduit que g_n est strictement croissante et avec $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^+} g_n(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g_n(x) = +\infty$, on déduit que, sur $\left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right]$, g_n s'annule en un unique point x_n et on a $g_n(x) < 0$ pour $x \in \left]\frac{1}{n}, x_n\right[$, $g_n(x) > 0$ pour $x \in \left]x_n, \frac{\pi}{2}\right[$. Tenant compte de :

$$f'_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = ne^{-n\frac{\pi}{2}} \left(1 - n\frac{\pi}{2}\right) < 0,$$

on déduit que sur $\left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right]$, f'_n s'annule uniquement en x_n avec $f'_n(x) > 0$ pour $x \in \left]\frac{1}{n}, x_n\right[$ et $f'_n(x) < 0$ pour $x \in \left]x_n, \frac{\pi}{2}\right[$.

(d) De l'étude précédente, on déduit que f_n est strictement croissante sur $[0, x_n]$ et strictement décroissante sur $[x_n, \frac{\pi}{2}]$ avec $f_n(0) = 0$ et $f_n(\frac{\pi}{2}) = n\frac{\pi}{2}e^{-n\frac{\pi}{2}} > 0$. On a donc :

$$\sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f_n(x)| = f_n(x_n).$$

(e) Avec $f'_n(\frac{1}{n}) > 0$ et :

$$f'_n\left(\frac{2}{n}\right) = -ne^{-2} \cos\left(\frac{2}{n}\right) \left(\tan\left(\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) < 0$$

(on a $\tan(x) > x$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$), on déduit que $x_n \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[$ et

$$0 < f_n(x_n) \leq 2 \sin\left(\frac{2}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Avec $\sup_{\mathbb{R}^+} |f_n| = \max\left(\sup_{[0, \frac{\pi}{2}]} |f_n|, \sup_{[\frac{\pi}{2}, +\infty[} |f_n|\right)$, on en déduit la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R}^+ .

16.2 Le critère de Cauchy uniforme

On rappelle qu'une suite réelle ou complexe est convergente si, et seulement si, elle vérifie le critère de Cauchy. Pour ce qui est de la convergence uniforme, on donne la définition suivante.

Définition 16.3 On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I si :

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \mid \forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Dire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I revient encore à dire que :

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) \mid \forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon, \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Théorème 16.3 La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur I si, et seulement si, elle vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I .

Démonstration. La condition nécessaire se déduit de :

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in I} |f(x) - f_m(x)|$$

où f est la limite uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit uniformément de Cauchy sur I . Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \quad (16.1)$$

Pour x fixé dans I , la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de Cauchy dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , elle converge donc vers un scalaire $f(x)$. En faisant tendre m vers l'infini dans (16.1), on déduit que :

$$\forall x \in I, \forall n \geq n_\varepsilon, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I . ■

16.3 Propriétés des fonctions stables par convergence uniforme

La notion de convergence uniforme est intéressante relativement à la continuité et l'intégration de Riemann, pour ce qui est de la dérivation il faut être un peu plus prudent.

Théorème 16.4 *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f sur l'intervalle I , alors la limite f est continue sur cet intervalle.*

Démonstration. Soit ε un réel strictement positif. On peut trouver un entier n tel que :

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Avec la continuité de f_n en $x_0 \in I$, on peut trouver un réel $\eta_n > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta_n, x_0 + \eta_n[\cap I, |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

et en conséquence, pour $x \in]x_0 - \eta_n, x_0 + \eta_n[\cap I$, on a :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

ce qui prouve la continuité de f en x_0 , le point x_0 étant quelconque dans I . La fonction f est donc continue sur I . ■

Remarque 16.3 *On a en fait montré que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite de fonctions continues en $x_0 \in I$ qui converge uniformément vers une fonction f sur l'intervalle I , alors f est continue en x_0 .*

Remarque 16.4 *Ce résultat peut être utilisé pour justifier une non convergence uniforme. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f non continue sur I , alors la convergence ne peut être uniforme.*

Exemple 16.3 *La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $I = [0, 1]$ par $f_n(x) = x^n$ qui converge simplement vers f définie par $f(x) = 0$ pour $0 \leq x < 1$ et $f(1) = 1$ ne peut converger uniformément vers cette fonction sur I .*

L'uniforme continuité est aussi conservée par convergence uniforme.

Théorème 16.5 *Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite de fonctions uniformément continues qui converge uniformément vers une fonction f sur l'intervalle I , alors la limite f est uniformément continue sur cet intervalle.*

Démonstration. Soit ε un réel strictement positif. On peut trouver un entier n tel que :

$$\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Avec l'uniforme continuité de f_n sur I , on peut trouver un réel $\eta_n > 0$ tel que :

$$((x, y) \in I^2 \text{ et } |x - y| < \eta_n) \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

et en conséquence, pour $(x, y) \in I^2$ tel que $|x - y| < \eta_n$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < 3\varepsilon$$

ce qui prouve l'uniforme continuité de f sur I . ■

Le théorème qui suit nous donne un exemple de situation où la convergence simple d'une suite de fonctions continues vers une fonction continue entraîne la convergence uniforme.

Théorème 16.6 (Dini) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions continues du segment $I = [a, b]$ (ou plus généralement d'un compact I de \mathbb{R}) dans \mathbb{R} qui converge simplement vers une fonction f continue sur I , alors la convergence est uniforme.

Démonstration. Pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. On a donc $f(x) - f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$. De la continuité des f_n , on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in I \mid \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = f(x_n) - f_n(x_n)$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I} |f_{n+1}(x) - f(x)| &= f(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \\ &\leq f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la suite $\left(\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Elle converge donc vers un réel $\lambda \geq 0$. Il s'agit alors de montrer que $\lambda = 0$.

Dans le compact I , on peut extraire de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in I$. Soit p un entier positif. La fonction φ étant strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , on peut trouver un entier n_p tel que $\varphi(n) \geq p$ pour tout $n \geq n_p$. On a alors pour tout $n \geq n_p$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda &\leq \sup_{x \in I} |f_{\varphi(n)}(x) - f(x)| = f(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \\ &\leq f(x_{\varphi(n)}) - f_p(x_{\varphi(n)}). \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini (à p fixé) et en utilisant la continuité de f , on déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \lambda \leq f(x) - f_p(x).$$

Enfin, en faisant tendre p vers l'infini, en utilisant la convergence de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ vers $f(x)$, on déduit que $\lambda = 0$. ■

Remarque 16.5 Le résultat précédent n'est pas vrai si on ne suppose plus I compact. Par exemple, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $]0, 1[$ par $f_n(x) = \frac{-1}{1+nx}$ converge en croissant vers la fonction nulle et la convergence n'est pas uniforme sur $]0, 1[$ puisque $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{2}$.

Pour ce qui est de l'intégration des fonctions continues, on déduit du théorème précédent le résultat suivant.

Théorème 16.7 Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f sur l'intervalle I , on a alors pour tout segment $[a, b] \subset I$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Démonstration. Le théorème précédent nous dit que f est continue, elle est donc intégrable sur $[a, b]$ et avec :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx \\ &\leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

on a le résultat annoncé. ■

Exercice 16.7 Montrer que la suite de fonctions définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = \cos(nx)$ n'admet aucune sous suite uniformément convergente sur \mathbb{R} .

Solution 16.7 Supposons que l'on puisse extraire une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction f . La fonction f est alors continue et pour tous réels $a < b$, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_{\varphi(n)}(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(n)} [\sin(\varphi(n)b) - \sin(\varphi(n)a)] = 0$$

et f est nécessairement la fonction nulle, ce qui est en contradiction avec $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_{\varphi(n)}| = 1$ (ou avec $f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\varphi(n)}(0) = 1$).

En fait le théorème précédent est encore valable dans le cadre de l'intégrale de Riemann. Le point délicat dans la démonstration est la preuve de l'intégrabilité au sens de Riemann de la fonction f .

On rappelle qu'une fonction f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si, et seulement si, elle est bornée et pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver deux fonctions en escaliers g, h telles que $g \leq f \leq h$ et $\int_a^b (h(x) - g(x)) dx < \varepsilon$.

Théorème 16.8 Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite de fonctions Riemann-intégrables qui converge uniformément vers f sur $I = [a, b]$, alors la fonction f est Riemann intégrable sur I et on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Démonstration. Soit ε un réel strictement positif. On peut trouver un entier n tel que :

$$\forall x \in I, |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Comme f_n est Riemann intégrable sur $[a, b]$, elle est bornée et il existe deux fonctions en escaliers g_n, h_n telles que $g_n \leq f_n \leq h_n$ et $\int_a^b (h_n(x) - g_n(x)) dx < \varepsilon$. Avec $f_n(x) - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + f_n(x)$, on déduit que f est bornée sur I et en désignant par g, h les fonctions en escaliers définies par $g = g_n - \varepsilon$, $h = h_n + \varepsilon$, on a $g \leq f \leq h$ avec :

$$\int_a^b (h(x) - g(x)) dx = \int_a^b (h_n(x) - g_n(x)) dx + 2\varepsilon(b-a) < (1 + 2(b-a))\varepsilon$$

ce qui prouve que f est Riemann intégrable sur I .

Puis avec :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx \\ &\leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

on a le résultat annoncé. ■

Remarque 16.6 Le théorème précédent n'est pas vrai dans le cadre des intégrales généralisées. Par exemple la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie sur \mathbb{R}^+ par $f_n(x) = \frac{1}{n}$ sur $[0, n]$ et $f_n(x) = 0$ pour $x > n$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ vers $f = 0$ et la suite $\left(\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui est constante égale à 1 ne converge pas vers 0.

Au chapitre suivant nous montrerons un théorème de convergence dominé pour les suites de fonctions continues par morceaux sur un intervalle. Avec ce théorème on dispose de conditions suffisantes permettant de justifier l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx$$

On déduit du théorème précédent le résultat suivant relatif aux primitives des fonctions continues.

Théorème 16.9 Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite de fonctions Riemann-intégrables sur I qui converge uniformément vers une fonction f sur I , alors la suite de fonctions $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur I par $F_n(x) = \int_{x_0}^x f_n(t) dt$, où x_0 est donné dans I , converge simplement sur I vers la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ et la convergence est uniforme sur tout segment $[a, b] \subset I$.

Démonstration. Pour la convergence simple de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on utilise le théorème précédent et la convergence uniforme sur $[a, b]$ se déduit de :

$$\forall x \in [a, b], |F_n(x) - F(x)| \leq (\beta - \alpha) \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f_n(t) - f(t)|$$

où $[\alpha, \beta]$ contient x_0, a, b . ■

La dérivabilité n'est pas stable par convergence uniforme. Nous verrons plus loin qu'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes qui sont des fonctions indéfiniment dérivables et il existe des fonctions continues non dérivables. Il existe même des fonctions continues nulle part dérivables.

Exercice 16.8 Étudier la convergence simple puis uniforme sur \mathbb{R} des suites de fonctions définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ et $g_n(x) = f'_n(x)$.

Solution 16.8

1. Pour tout réel x , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc simplement sur \mathbb{R} vers la fonction $f : x \mapsto |x|$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2}} \end{aligned}$$

et avec :

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2} \geq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \geq \frac{1}{n},$$

on déduit que :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

3. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , on a :

$$g_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}$$

et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Les fonctions g_n étant continues sur \mathbb{R} , la convergence n'est pas uniforme puisque la limite g n'est pas continue en 0.

On peut aussi vérifier ce résultat en évaluant $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)|$.

Pour $x \neq 0$ et $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g(x)| &= \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - \frac{x}{|x|} \right| = |x| \left| \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} - \frac{1}{\sqrt{x^2}} \right| \\ &= |x| \left| \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{x^2} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}} \right| \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right)} \end{aligned}$$

Avec :

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right) \geq \frac{1}{n^2}$$

on déduit que $|g_n(x) - g(x)| \leq 1$. Puis avec $|g_n(0) - g(0)| = 0$ et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} |g_n(x) - g(x)| = 1$$

on déduit que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = 1$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers g sur \mathbb{R} .

On dispose quand même du résultat suivant conséquence du critère de Cauchy uniforme et du théorème des accroissements finis.

Théorème 16.10 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur I telle que la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction g . S'il existe un point $x_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction dérivable f telle $f' = g$ et la convergence est uniforme sur tout segment $[a, b] \subset I$.

Démonstration. Avec le théorème des accroissements finis, on peut écrire pour n, m entiers naturels et $x \in I$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &\leq \sup_{t \in I} |f'_n(t) - f'_m(t)| |x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|, \end{aligned}$$

Il en résulte que pour $[a, b] \subset I$ et $[\alpha, \beta]$ contenant $[a, b]$ et x_0 on a :

$$\sup_{x \in [\alpha, \beta]} |f_n(x) - f_m(x)| \leq (\beta - \alpha) \sup_{t \in I} |f'_n(t) - f'_m(t)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|,$$

ce qui permet de conclure que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[\alpha, \beta]$ et donc qu'elle converge uniformément vers une fonction f sur cet intervalle et sur $[a, b]$. On définit ainsi une fonction f sur I limite simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour $x \neq y$ dans $[a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - g(x) \right| &\leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} \right| \\ &\quad + \left| \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} - f'_n(x) \right| \\ &\quad + |f'_n(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y) - (f_n(x) - f_n(y))| &= \lim_{m \rightarrow +\infty} |(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(y)| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [a, b]} |f'_m(t) - f'_n(t)| |x - y| \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} |g(t) - f'_n(t)| |x - y| \end{aligned}$$

et :

$$|f'_n(x) - g(x)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |g(t) - f'_n(t)|,$$

ce qui donne :

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - g(x) \right| \leq 2 \sup_{t \in [a, b]} |g(t) - f'_n(t)| + \left| \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} - f'_n(x) \right|.$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un entier n tel que $\sup_{t \in [a, b]} |g(t) - f'_n(t)| < \varepsilon$ et pour cet entier, par définition du nombre dérivé, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que pour $x \neq y$ dans $[a, b]$ vérifiant $|x - y| < \eta$ on ait $\left| \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} - f'_n(x) \right| < \varepsilon$. On a donc $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - g(x) \right| \leq 3\varepsilon$ pour $x \neq y$ dans $[a, b]$ tels que $|x - y| < \eta$, ce qui signifie que f est dérivable en x avec $f'(x) = g(x)$. ■

16.4 Approximation uniforme des fonctions continues sur un segment

Le fait qu'une fonction continue sur un segment y est en fait uniformément continue nous donne la possibilité de construire des suites de fonctions élémentaires (en escaliers, affines par morceaux ou polynomiales) qui convergent uniformément vers cette fonction.

16.4.1 Approximation uniforme par des fonctions en escaliers

Théorème 16.11 *Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.*

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$ on définit une subdivision de $[a, b]$ en notant :

$$x_k = a + k \frac{b - a}{n} \quad (0 \leq k \leq n)$$

et à cette subdivision on associe la fonction en escaliers f_n définie par $f_n(a) = f(a)$ et pour k compris entre 0 et $n - 1$:

$$\forall x \in]x_k, x_{k+1}], \quad f_n(x) = f(x_k)$$

La fonction f qui est continue sur le compact $[a, b]$ y est uniformément continue, donc pour $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que si x, y dans $[a, b]$ sont tels que $|x - y| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Pour tout entier $n \geq \frac{b - a}{\eta}$ et tout entier k compris entre 0 et $n - 1$

on a alors $x_{k+1} - x_k = \frac{b - a}{n} \leq \eta$. Sachant qu'un réel $x \in [a, b]$ est dans l'un des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, on obtient pour $n \geq \frac{b - a}{\eta}$:

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leq \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a, b]$ de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers f . ■

Ce théorème peut être utilisé pour montrer qu'une fonction continue sur un segment y est Riemann intégrable.

Théorème 16.12 *Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est Riemann intégrable.*

Démonstration. On sait déjà qu'une fonction continue sur $[a, b]$ est bornée.

En reprenant la démonstration précédente, on peut trouver pour $\varepsilon > 0$ une fonction en escaliers f_n telle que $g = f_n - \varepsilon < f < f_n + \varepsilon = h$, les fonctions g, h étant en escaliers avec $\int_a^b (h(x) - g(x)) dx = 2\varepsilon$. Il en résulte que f est Riemann intégrable sur $[a, b]$. ■

De ce résultat, on déduit que toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est Riemann intégrable.

Exercice 16.9 Montrer que pour toute fonction f continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0$$

(lemme de Riemann-Lebesgue).

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où f est continue sur $[a, b]$.

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f , pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n tel que $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ et pour tout entier $m \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin(mx) dx \right| &\leq \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x)) \sin(mx) dx \right| + \left| \int_a^b f_n(x) \sin(mx) dx \right| \\ &\leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| + \left| \int_a^b f_n(x) \sin(mx) dx \right| \\ &\leq (b-a) \varepsilon + \left| \int_a^b f_n(x) \sin(mx) dx \right|. \end{aligned}$$

En désignant par $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{p+1} = b$ une subdivision de $[a, b]$ telle que sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ f_n soit constante égale à y_k , on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f_n(x) \sin(mx) dx &= \sum_{k=0}^p y_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin(mx) dx \\ &= \sum_{k=0}^p y_k \left(\frac{\cos(mx_k)}{m} - \frac{\cos(mx_{k+1})}{m} \right) \end{aligned}$$

et :

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(mx) dx \right| \leq (b-a) \varepsilon + \frac{C}{m}$$

où $C = \frac{2}{m} \sum_{k=0}^p |y_k|$. On en déduit que $\left| \int_a^b f(x) \sin(mx) dx \right| \leq (b-a) \varepsilon + \frac{C}{m}$ pour m assez grand. ■

De manière analogue, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0$ pour f continue par morceaux.

Exercice 16.10 Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin^2(nx) dx$$

Solution 16.9 En écrivant que $\sin^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin^2(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(2nx) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

16.4.2 Approximation uniforme par des fonctions affines par morceaux et continues

Théorème 16.13 *Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues affines par morceaux.*

Démonstration. En utilisant les subdivisions introduites avec la démonstration du théorème précédent, on leur associe les fonctions f_n définies pour k compris entre 0 et $n - 1$ par :

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}], f_n(x) = f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} (f(x_{k+1}) - f(x_k))$$

(f_n coïncide avec f aux x_k et est affine sur $[x_k, x_{k+1}]$). Ces fonctions sont affines par morceaux et continues sur $[a, b]$.

En utilisant l'uniforme continuité de f sur $[a, b]$, pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tous x, y dans $[a, b]$ tels que $|x - y| \leq \eta$. Pour tout entier $n \geq \frac{b-a}{\eta}$ et tout entier k compris entre 0 et $n - 1$ on a alors $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \leq \eta$ et sachant qu'un réel $x \in [a, b]$ est dans l'un des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, on obtient pour $n \geq \frac{b-a}{\eta}$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| f(x) - f(x_k) - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \right| \\ &\leq |f(x) - f(x_k)| + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \\ &\leq \varepsilon + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \varepsilon \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a, b]$ de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers f . ■

Ce résultat et le théorème 16.10 peuvent être utilisés pour prouver, sans théorie de l'intégration, que toute fonction f continue sur un intervalle compact admet une primitive.

On commence par vérifier le résultat pour les fonctions affines par morceaux et continues.

Théorème 16.14 *Toute fonction affine par morceaux et continue sur un segment $[a, b]$ admet des primitives.*

Démonstration. Si φ est affine par morceaux et continue définie par une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et :

$$\varphi(x) = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} (y_{k+1} - y_k)$$

sur $[x_k, x_{k+1}]$ pour $0 \leq k \leq n - 1$, la fonction ϕ définie par :

$$\phi(x) = y_0(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)} (y_1 - y_0) + \gamma_0$$

avec $\gamma_0 = 0$ sur $[x_0, x_1]$ et :

$$\phi(x) = y_{k+1}(x - x_{k+1}) + \frac{(x - x_{k+1})^2}{2(x_{k+2} - x_{k+1})} (y_{k+2} - y_{k+1}) + \gamma_{k+1}$$

sur $[x_{k+1}, x_{k+2}]$ pour $0 \leq k \leq n-2$ où γ_{k+1} est tel que :

$$\lim_{x \rightarrow x_{k+1}^-} \phi(x) = (x_{k+1} - x_k) \frac{y_{k+1} + y_k}{2} + \gamma_k = \lim_{x \rightarrow x_{k+1}^+} \phi(x) = \gamma_{k+1}$$

pour $0 \leq k \leq n-2$, est une primitive de ϕ . En effet, sur $]x_k, x_{k+1}[$, on a :

$$\phi'(x) = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} (y_{k+1} - y_k) = \varphi(x)$$

et pour $x \in]x_0, x_1[$:

$$\frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0} = \frac{\phi(x)}{x - x_0} = y_0 + \frac{x - x_0}{2(x_1 - x_0)} (y_1 - y_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} y_0 = \varphi(x_0)$$

ce qui signifie que $\phi'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Pour $0 \leq k \leq n-2$ et $x \in]x_{k+1}, x_{k+2}[$, on a :

$$\frac{\phi(x) - \phi(x_{k+1})}{x - x_{k+1}} = y_{k+1} + \frac{x - x_{k+1}}{2(x_{k+2} - x_{k+1})} (y_{k+2} - y_{k+1}) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} y_{k+1} = \varphi(x_{k+1})$$

et pour $0 \leq k \leq n-1$, $x \in]x_k, x_{k+1}[$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(x_{k+1}) &= y_k(x - x_k) + \frac{(x - x_k)^2}{2(x_{k+1} - x_k)} (y_{k+1} - y_k) + \gamma_k - \gamma_{k+1} \\ &= (x - x_k) \left(y_k + \frac{x - x_k}{2(x_{k+1} - x_k)} (y_{k+1} - y_k) \right) - (x_{k+1} - x_k) \frac{y_{k+1} + y_k}{2} \\ &= (x - x_{k+1}) \left(y_k + \frac{x - x_k}{2(x_{k+1} - x_k)} (y_{k+1} - y_k) \right) \\ &\quad + (x_{k+1} - x_k) \left(y_k + \frac{x - x_k}{2(x_{k+1} - x_k)} (y_{k+1} - y_k) - \frac{y_{k+1} + y_k}{2} \right) \\ &= (x - x_{k+1}) \left(y_k + \frac{x - x_k}{2(x_{k+1} - x_k)} (y_{k+1} - y_k) \right) \\ &\quad + (x - x_{k+1}) \frac{y_{k+1} - y_k}{2} \\ &= (x - x_{k+1}) \left(\frac{x - x_k}{2(x_{k+1} - x_k)} (y_{k+1} - y_k) + \frac{y_{k+1} + y_k}{2} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\lim_{x \rightarrow x_{k+1}^-} \frac{\phi(x) - \phi(x_{k+1})}{x - x_{k+1}} = \frac{y_{k+1} - y_k}{2} + \frac{y_{k+1} + y_k}{2} = y_{k+1} = \varphi(x_{k+1})$$

■

Théorème 16.15 *Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ admet des primitives.*

Démonstration. En utilisant les notations introduites avec la démonstration du théorème 16.13, on désigne pour tout $n \geq 1$ par F_n la primitive de f_n nulle en a . La suite $(F_n')_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f et que la suite $(F_n(a))_{n \geq 1}$ converge vers 0. On déduit alors que la suite $(F_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction dérivable F et que $F' = f$, c'est-à-dire que F est une primitive de f sur $[a, b]$. ■

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction f continue sur $[a, b]$ par :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur cet intervalle.

16.4.3 Approximation uniforme de la fonction $x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$ par des fonctions polynomiales

L'approximation uniforme de la fonction $x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$ par des fonctions polynomiales nous sera utile pour approcher uniformément toute fonction continue et affine par morceaux par des polynôme sur un segment $[a, b]$.

On introduit la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur \mathbb{R} par $P_0(x) = 0$ et

$$\forall n \geq 1, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - (P_n(x))^2). \quad (16.2)$$

On vérifie facilement par récurrence sur $n \geq 0$ que chaque fonction P_n est polynomiale.

Exercice 16.11 Déterminer le degré et le coefficient dominant de chaque fonction P_n .

Solution 16.10 En désignant par p_n le degré de P_n et par α_n le coefficient dominant de P_n , on a $p_1 = 2$ et $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ ($P_1(x) = \frac{x^2}{2}$) et par récurrence, on vérifie que $p_n = 2^n$ et $\alpha_n = -\frac{1}{2^{2^n-1}}$. En effet, le résultat est vrai pour $n = 1$ et le supposant acquis au rang $n \geq 1$, en utilisant (16.2), on a $p_{n+1} = 2p_n = 2^{n+1}$ et $\alpha_{n+1} = -\frac{1}{2}\alpha_n^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{2^{2(2^n-1)}} = -\frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}$.

Lemme 16.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$|x| - P_{n+1}(x) = (|x| - P_n(x)) \left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right)$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} |x| - P_{n+1}(x) &= |x| - P_n(x) - \frac{1}{2}(|x| - P_n(x))(|x| + P_n(x)) \\ &= (|x| - P_n(x)) \left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right) \end{aligned}$$

■

Lemme 16.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x| \leq 1$$

et la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers $|x|$.

Démonstration. Pour le premier point, on procède par récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n = 0$, on a pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$0 = P_0(x) \leq P_1(x) = \frac{x^2}{2} \leq |x| \leq 1$$

$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x| \leq 1$$

Supposant le résultat acquis au rang $n \geq 0$, on a $P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0$. Puis de $P_{n+1}(x) \leq |x|$, on déduit que $x^2 \geq (P_{n+1}(x))^2$ et $P_{n+2}(x) \geq P_{n+1}(x)$. Enfin avec

$$|x| - P_{n+2}(x) = (|x| - P_{n+1}(x)) \left(1 - \frac{|x| + P_{n+1}(x)}{2}\right)$$

$|x| \geq P_{n+1}(x)$ et $\frac{|x| + P_{n+1}(x)}{2}$ milieu de $[P_{n+1}(x), |x|] \subset [0, 1]$, on déduit que $|x| - P_{n+2}(x) \geq 0$.

L'encadrement précédent nous dit que pour tout $x \in [-1, 1]$ la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs positive, croissante et majorée (par $|x|$) donc convergente vers $\ell(x) \geq 0$. En passant à la limite dans (16.2), on déduit que $\ell(x)^2 = x^2$ et $\ell(x) = |x|$. ■

Lemme 16.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$0 \leq |x| - P_n(x) \leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n \leq \frac{2}{n+1}$$

Démonstration. On montre tout d'abord par récurrence sur $n \geq 0$ l'encadrement :

$$0 \leq |x| - P_n(x) \leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n.$$

Pour $n = 0$, on a :

$$0 \leq |x| - P_0(x) = |x|.$$

En supposant le résultat acquis pour $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} |x| - P_{n+1}(x) &= (|x| - P_n(x)) \left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right) \\ &\leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n \left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right) \\ &\leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n \left(1 - \frac{|x|}{2}\right) = |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$(P_n(x) \geq 0)$.

Ensuite on étudie la fonction φ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(t) = t \left(1 - \frac{t}{2}\right)^n$ pour $n \geq 1$ (pour $n = 0$, on a bien $|x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n = |x| \leq 1 < 2$). Cette fonction est dérivable avec $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \frac{1}{2^n}$, :

$$\varphi'(t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{n+1}{2}t\right)$$

et $\varphi\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \frac{2}{n+1}$. Il en résulte que $\varphi(t) \leq \frac{2}{n+1}$ pour tout $t \in [0, 1]$ (variations de φ). ■

En conclusion, on a le résultat suivant.

Théorème 16.16 La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (16.2) converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

Remarque 16.7 On peut aussi déduire cette convergence uniforme du théorème de Dini.

L'exercice qui suit nous fournit une autre façon d'approximer la fonction $x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$.

Exercice 16.12 On désigne par $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des coefficients qui interviennent dans le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ sur l'intervalle $] -1, 1[$, soit :

$$\forall x \in] -1, 1[, \sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente.
2. En déduire que :

- (a) la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur l'intervalle $[-1, 1]$;
- (b) la fonction $x \mapsto |x|$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Solution 16.11 Les coefficients a_n sont donnés par $a_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $a_n = -b_n$ avec :

$$b_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)^2}.$$

En particuliers, les b_n sont positifs pour tout $n \geq 1$.

1. Pour tout x dans $[0, 1[$ et tout $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n b_k x^k \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = 1 - \sqrt{1-x}.$$

En faisant tendre x vers 1, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n b_k \leq 1,$$

ce qui implique la convergence de la série à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ et celle de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Si on tente le théorème de d'Alembert pour montrer la convergence de $\sum b_n$ (tous les b_n

sont strictement positifs), on a $b_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)^2}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n-1)}{(2n+1)4(n+1)^2} = \frac{2n-1}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et on ne peut pas conclure. En utilisant le développement limité :

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{1 - \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

le théorème de Raabe-Duhamel nous permet de conclure à la convergence de $\sum b_n$ (on a $\frac{3}{2} > 1$).

2. On note $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

(a) Pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$|\sqrt{1-x} - P_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui implique la convergence uniforme sur $[-1, 1]$ de la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

(b) Pour tout x dans $[-1, 1]$, on peut écrire que $|x| = \sqrt{1-u(x)}$ avec $u(x) = 1-x^2$ dans $[0, 1]$ et on a :

$$|x| = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(u(x))$$

cette convergence étant uniforme.

16.5 Le théorème de Weierstrass

On propose dans ce paragraphe plusieurs démonstrations du théorème de Weierstrass qui nous dit que toute fonction continue sur un segment $I = [a, b]$ est limite uniforme sur cet intervalle d'une suite de fonctions polynomiales.

16.5.1 Première démonstration

On a déjà vu que toute fonction continue sur un segment $I = [a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues et affines par morceaux. Il nous suffit donc d'approcher uniformément ces fonctions continues et affines par morceaux par des polynômes.

Pour tout réel $\alpha \in [0, 1]$, on désigne par h_α la fonction affine par morceaux définie par $x \mapsto h_\alpha(x) = \max(0, x - \alpha)$.

Lemme 16.4 Pour tout réel $\alpha \in [0, 1]$, la fonction h_α est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[0, 1]$.

Démonstration. En écrivant que :

$$h_\alpha(x) = \max(0, x - \alpha) = \frac{1}{2}(|x - \alpha| + x - \alpha),$$

on déduit du théorème 16.16 que h_α est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[0, 1]$. Précisément, en reprenant les notations du théorème 16.16, la suite de fonctions polynomiales $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], Q_n(x) = \frac{1}{2}(P_n(x - \alpha) + x - \alpha)$$

converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $\frac{1}{2}(|x - \alpha| + x - \alpha) = h_\alpha(x)$. ■

Lemme 16.5 Toute fonction affine par morceaux et continue sur un segment $[a, b]$ est combinaison linéaire de fonctions du type $h_\alpha : x \mapsto \max(0, x - \alpha)$.

Démonstration. Soit φ affine par morceaux et continue définie par une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et :

$$\varphi(x) = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} (y_{k+1} - y_k)$$

sur $[x_k, x_{k+1}]$ pour $0 \leq k \leq n-1$ ($n \geq 1$). On a donc $\varphi(x_k) = y_k$ pour tout k et on dit que φ a $n-1$ points anguleux $x_1 < \dots < x_{n-1}$ (il n'y en a pas si $n = 1$).

Il existe alors une suite réelle $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que :

$$\varphi = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k h_{x_k}.$$

En effet une telle égalité est réalisée si, et seulement si, elle est réalisée sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} z_0 + \lambda_0 (x - x_0) = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} (y_1 - y_0) & \text{sur } [x_0, x_1] \\ z_0 + \lambda_0 (x - x_0) + \lambda_1 (x - x_1) = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (y_2 - y_1) & \text{sur } [x_1, x_2] \\ \vdots \\ z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (x - x_k) = y_{n-1} + \frac{x - x_{n-1}}{b - x_{n-1}} (y_n - y_{n-1}) & \text{sur } [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

ce qui équivaut, en faisant $x = x_k$ et $x = x_{k+1}$ dans chacun de ces intervalles au système d'équations :

$$\begin{cases} z_0 = y_0 \text{ et } z_0 + \lambda_0 (x_1 - x_0) = y_1 \\ z_0 + \lambda_0 (x_2 - x_0) + \lambda_1 (x_2 - x_1) = y_2 \\ \vdots \\ z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (x_{n-1} - x_k) = y_{n-1} \end{cases}$$

(deux fonctions affines sur un intervalle coïncident si, et seulement si, elles coïncident en deux points distincts), ce qui détermine y_0 et les λ_k de manière unique (les λ_k sont solutions d'un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls). ■

Théorème 16.17 *Toute fonction continue et affine par morceaux sur $[0, 1]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur cet intervalle.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des deux lemmes qui précèdent. ■

Théorème 16.18 (Weierstrass) *Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Démonstration. Si f est une fonction continue sur $I = [a, b]$, la fonction g définie par :

$$g(t) = f((1-t)a + tb)$$

est continue sur $[0, 1]$, elle est donc limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales et f est limite uniforme sur $[a, b]$ de la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales définie par :

$$Q_n(x) = P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

■

16.5.2 Deuxième démonstration

Cette démonstration utilise les polynômes de Bernstein.

On se place d'abord sur l'intervalle $I = [0, 1]$.

Pour tout entier k compris entre 0 et n , on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in I, B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

et B_n est l'opérateur de Bernstein défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}.$$

On peut remarquer que $B_{n,k}(x) \geq 0$ pour tout $x \in I = [0, 1]$.

Les résultats préliminaires qui suivent nous seront utiles pour montrer le théorème de Weierstrass en utilisant les polynômes de Bernstein $B_n(f)$.

Lemme 16.6 *Si pour tout réel y on désigne par f_y la fonction définie sur \mathbb{R} par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_y(x) = e^{xy}.$$

on a alors :

$$\forall x \in I, B_n(f_y)(x) = \left(xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^n = \varphi_n(x, y).$$

Démonstration. Résulte de :

$$B_n(f_y)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(xe^{\frac{y}{n}}\right)^k (1-x)^{n-k} = \left(xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^n.$$

En notant $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{R}[x]$, où les polynômes e_k sont définis par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, e_k(x) = x^k$$

on déduit le résultat suivant.

Lemme 16.7 *Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel j , on a :*

$$B_n(e_j)(x) = \frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, 0).$$

Démonstration. Pour tout entier naturel j on a :

$$\frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, y) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^j e^{\frac{ky}{n}} B_{n,k}(x)$$

et pour $y = 0$ on obtient :

$$\frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, 0) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^j B_{n,k}(x) = B_n(e_j).$$

En particulier, pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{cases} \varphi_n(x, y) = (xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x)^n, \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}(x, y) = xe^{\frac{y}{n}} (xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x)^{n-1}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2}(x, y) = \frac{x}{n} e^{\frac{y}{n}} (xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x)^{n-1} + \frac{n-1}{n} x^2 e^{\frac{2y}{n}} (xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x)^{n-2}. \end{cases}$$

Et en faisant $y = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} B_n(e_0) = e_0 : x \mapsto 1, \\ B_n(e_1) = e_1 : x \mapsto x, \\ B_n(e_2) = e_2 + \frac{1}{n}(e_1 - e_2) : x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}x(1-x). \end{cases}$$

Lemme 16.8 Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in I$, on a :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - n \right)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 B_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 B_{n,k}(x) - 2x \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} B_{n,k}(x) + x^2 \sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) \\ &= B_n(e_2)(x) - 2xB_n(e_1)(x) + x^2 B_n(e_0)(x) \\ &= x^2 + \frac{1}{n}x(1-x) - 2x^2 + x^2 \\ &= \frac{1}{n}x(1-x) \leq \frac{1}{4n} \end{aligned}$$

(en étudiant les variations de $x \mapsto x(1-x)$ sur I). ■

Du fait qu'une fonction continue sur un segment y est uniformément continue, on déduit le résultat suivant.

Lemme 16.9 Si f est une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} (x - y)^2. \quad (16.3)$$

Démonstration. La fonction f qui est continue sur le compact $[a, b]$ y est uniformément continue, donc pour $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que si x, y dans $[a, b]$ sont tels que $|x - y| < \eta$, on a alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Pour x, y dans $[a, b]$, on a soit $|x - y| < \eta$ et dans ce cas $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, soit $|x - y| \geq \eta$, ce qui équivaut à $1 \leq \frac{(x - y)^2}{\eta^2}$ et dans ce cas :

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \frac{(x - y)^2}{\eta^2}.$$

On a donc dans tous les cas :

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} (x - y)^2$$

■

Théorème 16.19 (Bernstein) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ la suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $I = [0, 1]$.*

Démonstration. Avec $B_n(e_0) = \sum_{k=0}^n B_{n,k} = e_0$, on déduit que pour $n \geq 1$, on a :

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) B_{n,k}(x).$$

On se donne un réel $\varepsilon > 0$ et en utilisant le lemme précédent, on a pour tout $x \in I$ et tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left(\varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \right) B_{n,k}(x) \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_{n,k}(x) \\ &\leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \frac{1}{4n} \end{aligned}$$

et donc :

$$\sup_{x \in I} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \frac{1}{4n} \leq 2\varepsilon$$

pour n assez grand. On a donc ainsi montré que la suite $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $I = [0, 1]$. ■

Comme au paragraphe précédent, le changement de variable $x = (1-t)a + tb$ ramène un intervalle $[a, b]$ à $[0, 1]$ et le théorème de Weierstrass s'en déduit.

16.5.3 Troisième démonstration

Le lemme 16.9 qui est à la base de la démonstration du théorème de Bernstein permet en fait de montrer un résultat plus général. C'est le théorème de Korovkin qui suit qui a pour corollaire ceux de Bernstein et de Weierstrass.

On désigne par $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné avec $a < b$ et par $\mathcal{C}(I)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans \mathbb{R} .

On appelle opérateur linéaire sur $\mathcal{C}(I)$ tout endomorphisme de cet espace vectoriel et on dit qu'un opérateur linéaire sur $\mathcal{C}(I)$ est positif (ou monotone) s'il transforme toute fonction positive appartenant à $\mathcal{C}(I)$ en une fonction positive.

Lemme 16.10 *Si u est un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$, on a alors :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), |u(f)| \leq u(|f|).$$

Démonstration. Avec $-|f| \leq f \leq |f|$ et u linéaire et positif, on déduit que $-u(|f|) \leq u(f) \leq u(|f|)$, soit, $|u(f)| \leq u(|f|)$. ■

On note toujours $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{R}[x]$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$, tout entier naturel k et pour tout réel x fixé dans I , $f - f(x)e_k$ désigne la fonction de I dans \mathbb{R} définie par :

$$t \mapsto g(t) - g(x)t^k.$$

Du lemme 16.9, on déduit alors le résultat suivant.

Lemme 16.11 *Si u est un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ et tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que :*

$$\forall x \in I, |u(f) - f(x)u(e_0)| \leq \varepsilon u(e_0) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2u(e_0)).$$

Démonstration. L'inégalité (16.3) à x fixé dans I se traduit par :

$$|f - f(x)e_0| \leq \varepsilon e_0 + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} (e_2 - 2xe_1 + x^2e_0)$$

et pour u linéaire positif, on en déduit que :

$$\begin{aligned} |u(f) - f(x)u(e_0)| &= |u(f - f(x)e_0)| \leq u(|f - f(x)e_0|) \\ &\leq \varepsilon u(e_0) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2} (u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2u(e_0)). \end{aligned}$$

■

Lemme 16.12 *Si u est un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ et tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver des réels positifs α, β et γ tels que pour tout $x \in I$, on ait :*

$$|u(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \alpha \|u(e_0) - e_0\|_\infty + \beta \|u(e_1) - e_1\|_\infty + \gamma \|u(e_2) - e_2\|_\infty$$

Démonstration. En écrivant, que :

$$u(f) - f(x)e_0 = (u(f) - f(x)u(e_0)) + f(x)(u(e_0) - e_0)$$

on a :

$$\begin{aligned} |u(f) - f(x)e_0| &\leq |u(f) - f(x)u(e_0)| + |f(x)| |u(e_0) - e_0| \\ &\leq |u(f) - f(x)u(e_0)| + \|f\|_\infty \|u(e_0) - e_0\|_\infty \end{aligned}$$

et en écrivant que :

$$\begin{aligned} u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2u(e_0) &= (u(e_2) - e_2) - 2x(u(e_1) - e_1) + x^2(u(e_0) - e_0) \\ &\quad + (e_2 - 2xe_1 + x^2e_0) \end{aligned}$$

le lemme précédent nous donne en posant $M = 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}$, pour u linéaire positif :

$$\begin{aligned} |u(f) - f(x)u(e_0)| &\leq \varepsilon (u(e_0) - e_0) + \varepsilon \\ &\quad + M ((u(e_2) - e_2) - 2x(u(e_1) - e_1) + x^2(u(e_0) - e_0)) \\ &\quad + M (e_2 - 2xe_1 + x^2e_0) \\ &\leq \varepsilon \|u(e_0) - e_0\|_\infty + \varepsilon \\ &\quad + M (\|u(e_2) - e_2\|_\infty + 2\|e_1\|_\infty \|u(e_1) - e_1\|_\infty + \|e_2\|_\infty \|u(e_0) - e_0\|_\infty) \\ &\quad + M |e_2 - 2xe_1 + x^2e_0| \end{aligned}$$

et l'évaluation en x nous donne, compte tenu de :

$$e_2(x) - 2xe_1(x) + x^2e_0(x) = x^2 + 2x^2 + x^2 = 0$$

$$|u(f)(x) - f(x)u(e_0)(x)| \leq \varepsilon \|u(e_0) - e_0\|_\infty + \varepsilon \\ + M(\|u(e_2) - e_2\|_\infty + 2\|e_1\|_\infty \|u(e_1) - e_1\|_\infty + \|e_2\|_\infty \|u(e_0) - e_0\|_\infty)$$

et :

$$|u(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + (\|f\|_\infty + \varepsilon + M\|e_2\|_\infty) \|u(e_0) - e_0\|_\infty \\ + 2M\|e_1\|_\infty \|u(e_1) - e_1\|_\infty + M\|u(e_2) - e_2\|_\infty$$

■

Ce lemme est à la base de la démonstration du théorème de Korovkin qui suit.

Théorème 16.20 Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs linéaires positifs sur $\mathcal{C}(I)$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I , alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

Démonstration. Le lemme précédent appliqué à chaque u_n nous donne pour $f \in \mathcal{C}(I)$ et $\varepsilon > 0$:

$$\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \varepsilon + \alpha \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty + \beta \|u_n(e_1) - e_1\|_\infty + \gamma \|u_n(e_2) - e_2\|_\infty$$

les constantes α, β, γ ne dépendant que de I, f et ε . Avec la convergence uniforme sur I de $(u_n(e_k))_{n \in \mathbb{N}}$ vers e_k pour $k = 0, 1, 2$, on peut trouver un entier n_0 tel que $\|u_n(f) - f\|_\infty \leq 4\varepsilon$ pour tout $n \geq n_1$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a ainsi prouvé la convergence uniforme sur I de $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ vers f . ■

Prenant pour u_n les opérateurs de Bernstein sur $[0, 1]$, on retrouve le théorème de Bernstein.

16.5.4 Quatrième démonstration

On donne ici une démonstration qui utilise un opérateur de convolution.

On se donne une fonction δ dans $\mathcal{C}([-1, 1])$ telle que :

$$\begin{cases} \delta(0) = 1, \\ \forall x \in [-1, 1] - \{0\}, 0 \leq \delta(x) < 1. \end{cases}$$

Par exemple, la fonction δ définie sur $[-1, 1]$ par $\delta(x) = (1 - x^2)$ convient.

À une telle fonction, on associe la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $P_n = \frac{1}{a_n} \delta^n$, où le

réel a_n est défini par $\int_{-1}^1 P_n(x) dx = 1$, soit $a_n = \frac{1}{I_n}$, où $I_n = \int_{-1}^1 \delta^n(x) dx$.

Si δ est un polynôme alors les P_n sont des fonctions polynomiales.

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$\forall \alpha \in]0, 1], I_n(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \delta^n(x) dx.$$

Lemme 16.13 On a :

$$\forall \alpha \in]0, 1], I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n(\alpha).$$

Démonstration. Le résultat est évident pour $\alpha = 1$. On se fixe donc α dans $]0, 1[$.

La fonction δ étant à valeurs positives, on a :

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \quad 0 \leq I_n(\alpha) \leq I_n.$$

En écrivant que :

$$I_n = I_n(\alpha) + \int_{-1}^{-\alpha} \delta^n(x) dx + \int_{\alpha}^1 \delta^n(x) dx$$

et en posant $M_\alpha = \sup_{\alpha \leq |x| \leq 1} \delta(x)$, on a $0 \leq M_\alpha < 1$ (la borne supérieure sur un compact de la fonction continue δ est atteinte et $0 \leq \delta(x) < 1$ pour $\alpha \leq |x| \leq 1$) et :

$$0 \leq I_n(\alpha) \leq I_n \leq I_n(\alpha) + 2(1 - \alpha) M_\alpha^n \leq I_n(\alpha) + 2M_\alpha^n$$

ce qui donne :

$$1 \leq \frac{I_n}{I_n(\alpha)} \leq 1 + 2 \frac{M_\alpha^n}{I_n(\alpha)}.$$

(comme δ est continue avec $\delta(0) > 0$, on a $I_n(\alpha) > 0$).

La fonction δ étant continue en 0 avec $\delta(0) = 1$, pour tout réel $\varepsilon \in]0, 1[$ on peut trouver un réel $\eta \in]0, \alpha[$ tel que :

$$\forall x \in [-\eta, \eta], \quad 0 \leq 1 - \delta(x) < \varepsilon$$

soit :

$$\forall x \in [-\eta, \eta], \quad \delta(x) > 1 - \varepsilon$$

et :

$$I_n(\alpha) \geq \int_{-\eta}^{\eta} \delta^n(x) dx \geq 2\eta(1 - \varepsilon)^n.$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1, \quad 1 \leq \frac{I_n}{I_n(\alpha)} \leq 1 + \frac{1}{\eta} \left(\frac{M_\alpha}{1 - \varepsilon} \right)^n.$$

En prenant $\varepsilon \in]0, 1 - M_\alpha[$ (ce qui est possible puisque $0 \leq M_\alpha < 1$), on a $0 \leq \frac{M_\alpha}{1 - \varepsilon} < 1$ et de l'inégalité précédente on déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_n(\alpha)} = 1$$

soit $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n(\alpha)$.. ■

Lemme 16.14 Pour tout réel $\alpha \in]0, 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\alpha \leq |x| \leq 1} P_n(x) dx \right) = 0.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \leq |x| \leq 1} P_n(x) dx &= \int_{-1}^1 P_n(x) dx - \int_{-\alpha}^{\alpha} P_n(x) dx \\ &= 1 - a_n I_n(\alpha) = 1 - \frac{I_n}{I_n(\alpha)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, on peut la prolonger par 0 en une fonction continue sur \mathbb{R} (on pose donc $f(x) = 0$ pour $x \notin [0, 1]$ et f est continue sur \mathbb{R}). À une telle fonction f , on associe la suite de fonctions $(Q_n)_{n \geq 1}$ définie sur $[0, 1]$ par :

$$Q_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t) P_n(t) dt.$$

Lemme 16.15 Avec ces notations, la suite $(Q_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Démonstration. Tenant compte de $\int_{-1}^1 P_n(t) dt = 1$, on peut écrire pour tout $x \in [0, 1]$:

$$Q_n(x) - f(x) = \int_{-1}^1 (f(x+t) - f(x)) P_n(t) dt.$$

La fonction f qui est continue sur le compact $[-1, 2]$ y est uniformément continue et pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dès que $|x - y| < \alpha$ dans $[-1, 2]$. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0, 1]$, on a alors :

$$\begin{aligned} |Q_n(x) - f(x)| &\leq \int_{-1}^1 |f(x+t) - f(x)| P_n(t) dt \\ &\leq \varepsilon \int_{-\alpha}^{\alpha} P_n(t) dt + 2 \|f\|_{\infty}^2 \int_{\alpha \leq |t| \leq 1} P_n(t) dt \\ &\leq \varepsilon + 2 \|f\|_{\infty}^2 \int_{\alpha \leq |t| \leq 1} P_n(t) dt \end{aligned}$$

ce qui signifie que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |Q_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \|f\|_{\infty}^2 \int_{\alpha \leq |t| \leq 1} P_n(t) dt$$

Comme la suite $\left(\int_{\alpha \leq |t| \leq 1} P_n(t) dt \right)_{n \geq 1}$ converge vers 0, on en déduit qu'il existe un entier n_0 tel que $\sup_{x \in [0, 1]} |Q_n(x) - f(x)| \leq (2 \|f\|_{\infty}^2 + 1) \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

On a ainsi prouvé la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de $(Q_n)_{n \geq 1}$ vers f . ■

En prenant pour δ une fonction polynomiale, les fonctions Q_n sont également polynomiales. En effet, comme f est nulle en dehors de $[0, 1]$, on a pour tout $x \in [0, 1]$:

$$Q_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) P_n(t) dt = \int_0^1 f(u) P_n(u-x) du,$$

et Q_n est une fonction polynomiale.

Le théorème de Weierstrass s'en déduit alors comme suit. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, la fonction g définie par :

$$g(t) = f((1-t)a + tb)$$

est continue sur $[0, 1]$ et la fonction h définie par :

$$h(t) = g(t) - g(0) - (g(1) - g(0))t$$

est également continue sur $[0, 1]$ avec $h(0) = h(1) = 0$.

Il nous suffit alors d'appliquer le lemme précédent à la fonction h pour conclure.

Précisément, on a $h = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n$, où $Q_n(t) = \int_0^1 f(u) P_n(u-t) du$ est polynomiale, la convergence étant uniforme sur $[0, 1]$ et pour $x = (1-t)a + tb \in [a, b]$ avec $t \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= g(t) = h(t) + g(0) + (g(1) - g(0))t \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (Q_n(t) + g(0) + (g(1) - g(0))t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) \end{aligned}$$

avec :

$$R_n(x) = Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + f(a) + (f(b) - f(a)) \frac{x-a}{b-a}$$

fonction polynomiale, la convergence étant uniforme sur $[a, b]$.

Le choix de $\delta(x) = 1 - x^2$ nous fournit une telle démonstration (due à Landau).

Le choix de δ non polynomiale, mais développable en série entière permet également de montrer le théorème de Weierstrass.

Par exemple le choix de $\delta(x) = e^{-x^2}$ nous fournit une telle démonstration (due à Weierstrass lui même en 1885).

On a bien $\delta(0) = 1$ et $0 \leq \delta(x) < 1$ pour tout réel non nul.

Comme on vient de le voir il suffit de considérer le cas d'une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Pour une telle fonctions, la suite $(Q_n)_{n \geq 1}$ qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ est définie par :

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \int_0^1 f(t) P_n(t-x) dt = \frac{1}{I_n} \int_0^1 f(t) e^{-(xt)^2} dt \\ &= \frac{1}{I_n} \int_0^1 f(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} n^k (t-x)^{2k} dt \end{aligned}$$

la convergence de la série étant uniforme en $t \in [0, 1]$ pour tout x fixé dans $[0, 1]$ puisque la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini (voir le chapitre suivant pour les séries de fonctions), on peut donc intégrer terme à terme et on a :

$$Q_n(x) = \frac{1}{I_n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} n^k \int_0^1 f(t) (t-x)^{2k} dt,$$

la convergence de cette série étant uniforme sur $[0, 1]$. Enfin en écrivant que :

$$\int_0^1 f(t) (t-x)^{2k} dt = \sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^j (-1)^j \left(\int_0^1 f(t) t^{2k-j} dt \right) x^j,$$

on déduit que Q_n est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[0, 1]$. Il existe donc pour tout réel $\varepsilon > 0$ un entier n tel que $\|f - Q_n\|_\infty < \varepsilon$ et un polynôme P_n tel que $\|Q_n - P_n\|_\infty < \varepsilon$ et on a :

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \|f - Q_n\|_\infty + \|Q_n - P_n\|_\infty < 2\varepsilon.$$

Le théorème de Weierstrass s'en déduit.