Endomorphismes symétriques positifs et applications (norme d'un endomorphisme).

b) Angles

Matrice d'une rotation. Le groupe *SO(E)* est commutatif en dimension 2. Angles dans le plan euclidien orienté. Sinus et cosinus d'un angle. Exponentielle complexe. Nombre π. Fonctions trigonométriques circulaires. Morphisme canonique de **R** vers *SO*(2). Mesure des angles.
Angles orientés de droites en dimension 2.
Angles en dimension 3 : angle d'une rotation dont l'axe est orienté. Génération de SO(E) par les demi-tours.
Similitudes vectorielles en dimension 2 et 3.

c) Calcul matriciel et normes euclidiennes

Projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace. Matrice de Gram. Distance d'un point à un sous-espace. Problème des moindres carrés.

d) Calculs vectoriels en dimension 3

Produit vectoriel. Produit mixte. Applications à la géométrie des trièdres.

e) Espaces hermitiens

Inégalités de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire ; norme hermitienne. Sommes directes orthogonales.
Bases orthonormales. Adjoint d'un endomorphisme, matrice dans une base orthonormale.
Endomorphismes hermitiens. Groupe unitaire *U(E)* et spécial unitaire *SU(E).*
Réduction d'un endomorphisme hermitien, endomorphismes hermitiens positifs, applications (norme d'un endomorphisme).

8. Géométrie affine euclidienne orientée

a) Généralités

Espaces affines euclidiens. Distance de deux points. Inégalité triangulaire.
Groupes des isométries et des déplacements. Génération du groupe des isométries par les réflexions, du groupe des déplacements par les demi-tours en dimension 3.
Décomposition canonique d'une isométrie *en* $u = t \circ f = f \circ t$ où t est une translation et *f* une isométrie admettant au moins un point fixe. Application à la classification des isométries en dimension 2 et 3.
Exemples de groupes d'isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers et groupes diédraux. Tétraèdres réguliers, cubes, octaèdres.
Groupe des similitudes.

b) Géométrie plane

Propriété angulaire du cercle et applications.
Faisceau harmonique de deux droites et de leurs bissectrices.
Géométrie du triangle, éléments remarquables. Exemples de relations métriques et trigonométriques dans le triangle.
Utilisation des nombres complexes : affixe d'un point dans un repère orthonormé direct. Exemples d'applications géométriques (polygones réguliers, géométrie des cercles).
Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical. Orthogonalité entre cercles.

c) Coniques

Définitions bifocale et par foyer et directrice. Classification par l'excentricité. Équations réduites. Image par une application affine et classification en les trois genres affines : ellipse, parabole, hyperbole.
Exemples de propriétés géométriques communes ou spécifiques à chaque genre.
Section plane d'un cône de révolution.
Trajectoire parabolique d'un objet pesant. Mouvement à accélération centrale. Mouvement des planètes.

9. Propriétés affines et métriques

Pour toutes les situations géométriques, on réfléchira aux propriétés de caractère affine et à celles de nature métrique (ou euclidienne).
Groupes affines et groupes euclidiens.
Propriétés affines et euclidiennes des coniques.
Notions différentielles de caractère affine et métrique.
Exemples d'utilisation de repères pour traiter des problèmes de géométrie.

10. Analyse à une variable réelle

a) Nombres réels ou complexes

Corps **R** et **C** des réels et complexes, la construction de **R** étant admise. Suites convergentes, divergentes, sous-suites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites. Toute partie non vide majorée de **R** possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes. Droite numérique achevée.
Complétude de **R** : toute suite de Cauchy de **R** ou **C** converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de **R** ou **C** on peut extraire une sous-suite convergente.
Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.

Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison : domination, prépondérance (u est négligeable devant v), équivalence. Notations $u = O(v)$ et $u = o(v)$.
Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Récurrences linéaires et homographiques.

b) Séries de nombres réels ou complexes

Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est bornée. Étude de la convergence par les relations de comparaison, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence pour les séries convergentes et divergentes. Comparaison d'une série et d'une intégrale, cas des séries de Riemann. Critères de Cauchy pour les séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue. Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue, signe et majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.
Opérations sur les séries. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

c) Continuité

Fonctions définies sur une partie de **R**. Limite, continuité à droite et à gauche, continuité.
Théorème des valeurs intermédiaires. Continuité sur un segment, théorème des extrema. Théorème de Heine de continuité uniforme sur un segment. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone f sur un intervalle ; propriétés de la fonction réciproque f^{-1}.
Fonctions continues par morceaux sur un segment, approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, des polynômes (théorème de Weierstrass admis).

d) Dérivabilité

Dérivée à droite et à gauche en un point. Comportement de la dérivation relativement aux opérations algébriques. Dérivation d'une fonction composée, d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes. Application au sens de variation et au caractère lipschitzien.
Dérivées successives. Fonctions de classe C^k, de classe C^k par morceaux. Formule de Leibniz pour la dérivée k-ième d'un produit.
Fonctions convexes de classe C^1, convexité de l'épigraphe, croissance de la dérivée, position de la courbe relativement aux cordes et aux tangentes. Cas des fonctions de classe C^2.
Formules de Taylor avec reste intégral, de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young pour des fonctions de classe C^k.
Étude locale des fonctions. Conditions nécessaires d'extremum. Développements limités. Opérations sur les développements limités.
Série de Taylor.

e) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances. Équations fonctionnelles caractérisant ces fonctions.
Fonctions hyperboliques directes et réciproques.
Fonctions circulaires directes et réciproques.

f) Intégration d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne, relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Intégration par parties, changement de variable, calculs de primitives et d'intégrales.
Convergences en moyenne et en moyenne quadratique pour les suites de fonctions. Comparaison avec la convergence uniforme.

g) Intégrales sur un segment d'une fonction dépendant d'un paramètre

Théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme. Formule de Fubini si le paramètre décrit un segment. Lien avec les intégrales doubles.

h) Intégration sur un intervalle quelconque

Les fonctions considérées sont continues par morceaux sur tout segment contenu dans l'intervalle I de définition.
Intégrale d'une fonction positive. Emploi des relations de comparaison.
Une fonction définie sur I à valeurs complexes est dite intégrable si l'intégrale de son module est finie.
Les deux théorèmes suivants sont admis :
Théorème de convergence monotone : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions à valeurs positives intégrables convergeant simplement sur I vers une fonction f. Si f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment de I, et si la suite des intégrales des f_n est majorée, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des f_n.