

## Limites à l'infini d'une fonction

On garde les notations du chapitre précédent en supposant ici que  $a = -\infty$  ou  $a = +\infty$  est adhérent à l'ensemble  $I$ , ce qui signifie que :

$$\forall m \in \mathbb{R}, ]-\infty, m[ \cap I \neq \emptyset$$

ou :

$$\forall M \in \mathbb{R}, ]M, +\infty[ \cap I \neq \emptyset$$

ce qui équivaut à dire que  $I$  est non minorée ou non majorée.

Dans la pratique  $I$  est un intervalle de la forme  $]-\infty, m[$  ou  $]M, +\infty[$ .

### 9.1 Limite finie en $-\infty$ ou $+\infty$ d'une fonction

La définition d'une limite à l'infini prend alors la forme suivante.

**Définition 9.1** *On dit que la fonction  $f$  admet une limite finie quand  $x$  tend vers  $-\infty$  [resp.  $+\infty$ ] dans  $I$ , s'il existe un réel  $\ell$  tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R} \mid (x \in I \text{ et } x < m) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$[\text{resp. } \forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} \mid (x \in I \text{ et } x > M) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon]$$

(on dit aussi que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  [resp.  $+\infty$ ] dans  $I$ ).

Les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges et il est parfois commode de se limiter à  $m < 0$  [resp.  $M > 0$ ] sans que cela ne soit restrictif.

Pour  $a = +\infty$  et  $f$  définie sur  $\mathbb{N}$ , on retrouve la définition de la convergence d'une suite numérique.

Dire que  $f$  n'a pas de limite finie en  $-\infty$  [resp.  $+\infty$ ] équivaut à dire que pour tout scalaire  $\ell$  il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in I \mid x < m \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon$$

$$[\text{resp. } \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I \mid x > M \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon].$$

Il est parfois commode de traduire la définition précédente, par exemple dans le cas où  $a = +\infty$ , sous la forme :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in ]M, +\infty[ \cap I, |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ou encore, pour  $f$  à valeurs réelles :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in ]M, +\infty[ \cap I, f(x) \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

Comme dans le cas des limites finies, en utilisant l'inégalité triangulaire dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on montre que si  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $-\infty$  [resp.  $+\infty$ ], alors cette limite est unique.

On note alors  $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \in I}} f(x)$  [resp.  $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in I}} f(x)$ ] ou plus simplement  $\ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  [resp.  $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ], le domaine de définition de la fonction  $f$  étant sous-entendu, cette limite. On écrira aussi  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$  [resp.  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ ].

**Exercice 9.1** Montrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ .

**Solution 9.1** Pour  $\varepsilon > 0$  donné il existe un entier  $M > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$  ( $\mathbb{R}$  est archimédien), ce qui implique que pour tout  $x \geq M$ , on a  $\left| \frac{1}{x^n} \right| \leq \frac{1}{M^n} < \varepsilon$ . On a donc bien  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ .

**Exercice 9.2** En utilisant  $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

**Solution 9.2** De  $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , on déduit que :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

et :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = e$$

donc pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe un entier  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e \right| < \varepsilon, \left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - e \right|.$$

Pour  $x > n_0 + 1$ , en notant  $n = [x]$  la partie entière de  $x$ , on a :

$$n_0 < n \leq x < n + 1$$

et :

$$\begin{aligned} e - \varepsilon &< \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \\ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &\leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon \end{aligned}$$

soit :

$$\forall x > M = n_0 + 1, e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e + \varepsilon.$$

D'où le résultat.

Quitte à remplacer la fonction  $f$  par la fonction  $x \mapsto f(-x)$ , on peut se contenter d'étudier les limites en  $+\infty$ .

On peut aussi se limiter à  $I = ]a, +\infty[$  avec  $a > 0$  et on a alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  si, et seulement si,  $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \ell$ .

Les résultats obtenus sur les limites finies en un point sont encore valables pour les limites finies à l'infini.

**Théorème 9.1** *S'il existe un réel  $\ell$ , un réel  $\delta$  et une fonction  $\varphi : J = ]\delta, +\infty[ \cap I \rightarrow \mathbb{R}^+$  tels que :*

$$\begin{cases} \forall x \in J, |f(x) - \ell| \leq \varphi(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

*alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .*

**Démonstration.** Pour tout réel  $\varepsilon > 0$  il existe un réel  $M$  tel que :

$$x \in J \subset I \text{ et } x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varphi(x) < \varepsilon$$

ce qui donne le résultat annoncé. ■

**Théorème 9.2** *Si  $f, g$  sont à valeurs réelles et s'il existe un réel  $\delta > 0$  et deux fonction  $\varphi$  et  $\psi$  définies sur  $J = ]\delta, +\infty[ \cap I$  et à valeurs réelles tels que :*

$$\begin{cases} \forall x \in J, \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \ell \end{cases}$$

*alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .*

**Démonstration.** Pour tout réel  $\varepsilon > 0$  il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $x \in J \subset I$  tel que  $x > M$ , on ait :

$$\ell - \varepsilon < \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) < \ell + \varepsilon$$

ce qui donne le résultat annoncé. ■

**Exercice 9.3** *Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ .*

**Solution 9.3** *Se déduit de  $\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$  pour  $x \in \mathbb{R}^*$ .*

**Théorème 9.3** *Si  $f$  admet une limite finie quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , il existe alors un réel  $M$  tel que la restriction de  $f$  à  $J = ]M, +\infty[ \cap I$  soit bornée.*

**Démonstration.** Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ , il existe alors un réel  $M$  tel que, pour tout  $x$  dans  $]M, +\infty[ \cap I$ , on ait :

$$|f(x)| = |(f(x) - \ell) + \ell| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|.$$

■

**Théorème 9.4** Supposons  $f$  à valeurs réelles et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

1. Si  $\ell > 0$  [resp.  $\ell < 0$ ] il existe alors un réel  $M$  tel que  $f(x) > 0$  [resp.  $f(x) < 0$ ] pour tout  $x \in ]M, +\infty[ \cap I$ .
2. S'il existe un réel  $M$  tel que  $f(x) \geq 0$  [resp.  $f(x) \leq 0$ ] pour tout  $x \in ]M, +\infty[ \cap I$  on a alors  $\ell \geq 0$  [resp.  $\ell \leq 0$ ].

**Démonstration.**

1. Pour  $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$  il existe un réel  $M$  tel que, pour tout  $x \in ]M, +\infty[ \cap I$ , on ait  $|f(x) - \ell| < \frac{\ell}{2}$  et on a alors :

$$\forall x \in ]M, +\infty[ \cap I, f(x) > \ell - \frac{\ell}{2} > \frac{\ell}{2} > 0.$$

Pour  $\ell < 0$ , on travaille avec  $-f$ .

2. Se déduit facilement du premier point. ■

**Théorème 9.5** La fonction  $f$  admet la limite  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si, et seulement si, pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $I$  qui converge vers  $+\infty$ , la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .

**Démonstration.** Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ , alors pour tout réel  $\varepsilon > 0$  il existe un réel  $M$  tel que  $x > M$  dans  $I$  entraîne  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  et si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de points de  $I$  qui converge vers  $+\infty$ , il existe alors un entier  $n_0$  tel que  $u_n > M$  pour tout  $n \geq n_0$ , ce qui implique  $|f(u_n) - \ell| < \varepsilon$ . On a donc bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$ .

Pour la réciproque, on raisonne par l'absurde. Si  $f$  n'a pas de limite finie en  $+\infty$ , pour tout réel  $\ell$ , il existe alors un réel  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout entier  $n \geq 1$  on peut trouver  $u_n \in I$  tel que  $u_n > n$  et  $|f(u_n) - \ell| \geq \varepsilon$ . On a donc ainsi une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $I$  qui converge vers  $+\infty$  pour laquelle la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas. ■

**Exercice 9.4** Montrer que la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .

**Solution 9.4** Si  $(u_n)_{n \geq 1}$  est la suite définie dans  $\mathbb{R}$  par  $u_n = n\pi$  pour tout  $n \geq 1$ , on a alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et la suite  $(f(u_n))_{n \geq 1} = ((-1)^n)_{n \geq 1}$  est divergente, ce qui prouve que  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .

**Exercice 9.5** Montrer que la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - [x]$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .

**Solution 9.5** Pour tout réel  $\lambda \in ]0, 1[$ , la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie dans  $\mathbb{R}$  par  $u_n = n + \lambda$  pour  $n \geq 0$  est telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et la suite  $(f(u_n))_{n \geq 1}$  est stationnaire sur  $\lambda$ , ce qui prouve que  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .

## 9.2 Opérations algébriques

En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite à l'infini, on a le résultat suivant relatif aux opérations algébriques.

**Théorème 9.6** Soient  $f, g$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  telles que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell'$ .

On a alors :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = |\ell|$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = \ell\ell'$ ,  
pour  $f, g$  à valeurs réelles,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \min(f(x), g(x)) = \min(\ell, \ell')$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \max(f(x), g(x)) = \max(\ell, \ell')$  ;
2. si  $\ell' \neq 0$ , il existe alors un réel  $M$  tel que la fonction  $\frac{1}{g}$  soit définie sur  $J = ]M, +\infty[ \cap I$   
et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}$  ;
3. si  $f$  est à valeurs réelles et  $\ell > 0$ , il existe alors un réel  $M$  tel que la fonction  $\sqrt{f}$  soit définie sur  $J = ]M, +\infty[ \cap I$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$ .

**Exercice 9.6** Soit  $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k x^k}{\sum_{k=0}^m b_k x^k}$  une fonction rationnelle, où  $P, Q$  sont des fonctions rationnelles non nulles de degrés respectifs  $n$  et  $m$  (i. e.  $a_n \neq 0$  et  $b_m \neq 0$ ).

Montrer que :

1. si  $n = m$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}$  ;
2. si  $n < m$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$  ;
3. si  $n > m$ , alors  $f$  n'a pas de limite finie en  $+\infty$ .

**Solution 9.6** La fonction  $f$  est définie sur un intervalle de la forme  $I = ]M, +\infty[$  puisque  $Q$  n'a qu'un nombre fini de racines réelles possibles.

1. Si  $n = m$ , on a pour tout  $x \in I$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x^1 + \cdots + b_n x^n} \\ &= \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{x} + b_n} \end{aligned}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}.$$

2. Si  $n < m$ , on a pour tout  $x \in I$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x^1 + \cdots + b_m x^m} \\ &= \frac{1}{x^{m-n}} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{x} + b_m} \end{aligned}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \cdot \frac{a_n}{b_m} = 0.$$

3. Si  $n > m$ , on a pour tout  $x \in I$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m} \\ &= x^{n-m} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{x} + b_m} \end{aligned}$$

soit  $\frac{1}{x^{n-m}}f(x) = g(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{a_n}{b_m} \neq 0$ . Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ , on a alors  $\frac{a_n}{b_m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-m}}f(x) = 0 \cdot \ell = 0$ , ce qui est impossible. Donc  $f$  n'a pas de limite finie en  $+\infty$ .

**Exercice 9.7** Soient  $m, n$  deux entiers naturels. Étudier la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie sur  $I = ]1, +\infty[$  par  $f(x) = x^m \sqrt{1 + \frac{1}{x^n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^n}}$ .

**Solution 9.7** Pour tout  $x \in I$ , on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^m \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^n}}\right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^n}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^n}}} \\ &= x^m \frac{\frac{2}{x^n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^n}}} = 2x^{m-n} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^n}}}. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  pour  $n = m$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  pour  $n > m$  et  $f$  n'a pas de limite finie en  $+\infty$  pour  $n < m$ .

**Théorème 9.7** Soient  $f, g$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell'$ .

1. Si  $\ell > \ell'$ , il existe alors un réel  $M$  tel que  $f(x) > g(x)$  pour tout  $x \in ]M, +\infty[ \cap I$ .
2. S'il existe un réel  $M$  tel que  $f(x) \geq g(x)$  pour tout  $x \in ]M, +\infty[ \cap I$  on a alors  $\ell \geq \ell'$ .
3. Si  $M$  est un majorant [resp.  $m$  un minorant] de  $f$  sur  $I$ , alors  $\ell \leq M$  [resp.  $m \leq \ell$ ].

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer le théorème 9.4 aux fonctions  $f - g$ ,  $f - M$  et  $f - m$ .

■

## 9.3 Limite à l'infini d'une composée de fonctions

On se contente ici de la limite à l'infini d'une composée  $g \circ f$  avec  $f$  de limite finie  $\ell$  en  $+\infty$  et  $g$  de limite finie en  $\ell$ . Le cas où  $\ell = +\infty$  ou  $\ell = -\infty$  sera étudié au chapitre suivant.

**Théorème 9.8** Soient  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  et  $g$  une fonction définie sur une partie  $J$  de  $\mathbb{R}$  qui contient  $f(I)$ . Dans ces conditions,  $\ell$  est adhérent à  $J$  et si, de plus,  $\lim_{y \rightarrow \ell} g(y) = \ell'$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = \ell'$ .

**Démonstration.** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de points de  $I$  qui converge vers  $+\infty$ , alors  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de points de  $J$  (puisque  $f(I) \subset J$ ) qui converge vers  $\ell$ , ce qui prouve que  $\ell$  est adhérent à  $J$ .

Pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe un réel  $\delta > 0$  tel que  $y \in J$  et  $|y - \ell| < \delta$  entraîne  $|g(y) - \ell'| < \varepsilon$  et en désignant par  $M$  un réel tel que  $x \in I$  et  $x > M$  entraîne  $|f(x) - \ell| < \delta$ , on a :

$$\begin{aligned} (x \in I \text{ et } x > M) &\Rightarrow (f(x) \in f(I) \subset J \text{ et } |f(x) - \ell| < \delta) \\ &\Rightarrow |g(f(x)) - \ell'| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat annoncé. ■

Avec  $\lim_{y \rightarrow \ell} \frac{1}{y} = \frac{1}{\ell}$  pour  $\ell \neq 0$  et  $\lim_{y \rightarrow \ell} \sqrt{y} = \sqrt{\ell}$  pour  $\ell > 0$ , on retrouve que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \neq 0$  (on a  $f(x) \neq 0$  sur un ensemble  $J = ]M, +\infty[ \cap I$  et  $\frac{1}{f}$  est la composée la restriction de  $f$  à  $J$  avec la fonction  $y \mapsto \frac{1}{y}$ ) et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$  si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell > 0$  (on a  $f(x) > 0$  sur un ensemble  $J = ]M, +\infty[ \cap I$  et  $\sqrt{f}$  est la composée la restriction de  $f$  à  $J$  avec la fonction  $y \mapsto \sqrt{y}$ ).

## 9.4 Limites à l'infini des fonctions monotones

Le résultat qui suit est analogue à celui obtenu pour les suites monotones bornées.

On se limite aux cas où  $I = [a, +\infty[$  ou  $I = ]-\infty, b]$

**Théorème 9.9** *Si  $f : I = [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  [resp.  $f : I = ]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ] est une fonction croissante et majorée [resp. décroissante et minorée], elle admet alors une limite finie en  $+\infty$  [resp. en  $-\infty$ ]. Cette limite est la borne supérieure [resp. inférieure] de  $f$  sur  $I$ . soit :*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup_{x \in I} f(x) \quad \left[ \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \inf_{x \in I} f(x) \right]$$

**Démonstration.** On suppose que  $f : I = [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante et majorée. L'autre cas se traite de manière analogue.

Comme  $f$  est majorée sur  $I$ , elle admet une borne supérieure  $\ell = \sup_{x \in I} f(x)$  sur cet intervalle ( $f(I)$  est non vide majorée, donc admet une borne supérieure). Pour  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver, par définition de la borne supérieure, un réel  $x_0 > a$  tel que  $\ell - \varepsilon < f(x_0) \leq \ell$  et comme  $f$  est croissante, on en déduit que :

$$\forall x \in [x_0, +\infty[, \quad \ell - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon.$$

■

**Remarque 9.1** *Si  $f$  est croissante et non majorée sur  $[a, +\infty[$ , elle n'a pas de limite finie en  $+\infty$  puisqu'une fonction admettant une limite finie en  $+\infty$  est bornée au voisinage de  $+\infty$ . On verra plus loin que dans ce cas, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .*

Dans le cas où  $I = \mathbb{N}$ ,  $f$  définit une suite numérique et on retrouve le théorème sur les suites croissantes majorées.

## 9.5 Le critère de Cauchy

Comme pour les suites numériques, on dispose du critère de Cauchy qui permet de montrer qu'une fonction admet une limite finie à l'infini sans connaître nécessairement cette limite.

**Théorème 9.10** *La fonction  $f$  admet une limite finie quand  $x$  tend vers  $+\infty$  dans  $I$  si, et seulement si pour tout réel  $\varepsilon > 0$  il existe un réel  $M$  tel que :*

$$\forall (x, y) \in (]M, +\infty[ \cap I)^2, |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (9.1)$$

**Démonstration.** Supposons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ . Pour tout réel  $\varepsilon > 0$  il existe alors un réel  $M$  tel que :

$$\forall x \in J = ]M, +\infty[ \cap I, |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et en conséquence :

$$\forall (x, y) \in J^2, |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| < \varepsilon$$

Réciproquement, supposons (9.1) vérifié pour tout  $\varepsilon > 0$  donné. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de points de  $I$  qui converge vers  $+\infty$ , pour  $\varepsilon > 0$  et  $M$  tel que (9.1) soit satisfait, il existe un entier  $n_0$  tel que  $u_n \in ]M, +\infty[ \cap I$  pour tout  $n \geq n_0$ , ce qui implique que  $|f(u_n) - f(u_m)| < \varepsilon$  pour tout couple  $(n, m)$  d'entiers tels que  $n \geq n_0$  et  $m \geq n_0$ . La suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est donc de Cauchy et en conséquence convergente. En désignant par  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de points de  $I$  qui convergent vers  $+\infty$  et en notant  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$ ,  $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n)$ , pour  $\varepsilon > 0$  et  $M$  tel que (9.1) soit satisfait, il existe un entier  $n_0$  tel que  $u_n, v_n$  soient dans  $]M, +\infty[ \cap I$  pour tout  $n \geq n_0$ , et en conséquence :

$$|\ell - \ell'| = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \geq n_0}} |f(u_n) - f(v_n)| \leq \varepsilon.$$

Le réel  $\varepsilon > 0$  étant quelconque, on nécessairement  $\ell = \ell'$ . C'est-à-dire que pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $I$  qui converge vers  $+\infty$ , la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell$ , ce qui équivaut à dire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ . ■