Corrigé Analyse 1988, J.-P. Demailly **Institut Fourier, Janvier 1997**

I. Opérations sur les DAS

Soit $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{A}$, l'ensemble des fonctions complexes définies et continues sur $[x_0, +\infty[$ qui sont continues et bornées, resp. qui admettent un DAS en $+\infty$.

1. Si $f \in \mathcal{A}$ admet un DAS $f(x) \approx \sum a_n x^n$, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a_0$, donc $|f(x)| \le |a_0| + 1$ sur un voisinage $]x_1, +\infty[$ de $+\infty$. Par ailleurs la continuité de f implique que f est bornée sur $[x_0, x_1]$, donc f est bornée sur $[x_0, +\infty[$. Par suite $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. On a bien sûr $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$, par exemple $f(x) = \sin x$ est bornée et n'a pas de limite en $+\infty$, donc $f \notin \mathcal{A}$.

2. Soit $f \in \mathcal{A}$. Montrons par récurrence sur n que les coefficients a_n du DAS de f sont uniques. Pour $n = 0$, on doit avoir $a_0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Si $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont déterminés de manière unique, la formule évidente

$$a_n = \lim_{x\to+\infty} x^n \Big(f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \ldots - \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} \Big)$$

montre que a_n est lui aussi unique.

3. La fonction $f(x) = e^{-x}$ est non identiquement nulle, cependant son DAS a tous ses coefficients nuls puisque $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout n.

4. Supposons que $g(t) = f(1/t)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1/x_0]$. Alors la formule de Taylor-Young montre que g admet un développement limité à tout ordre

$$g(t) = \sum_{0\le k\le n} a_k t^k + t^n \varepsilon(t) \quad \text{avec } a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}, \quad \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

En substituant $t = 1/x$, on voit que $f(x) \approx \sum a_k x^{-k}$, par ailleurs $f(x) = g(1/x)$ est continue sur $[x_0, +\infty[$, donc $f \in \mathcal{A}$.

5. Soient f, g dans $\mathcal{A}$, avec $f(x) \approx \sum a_n x^{-n}$, $g(x) \approx \sum b_n x^{-n}$. Alors il est classique que $f + g$ et fg admettent des développements limités à tout ordre n, obtenus en faisant la somme (resp. le produit tronqué à l'ordre n) des développements limités de f et g.
Si $a_0 = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $1/f$ n'a pas de limite finie en $+\infty$ et donc pas de DAS. Si $a_0 \neq 0$, alors $|f(x)| > |a_0|/2$ sur un certain intervalle $[x_1, +\infty[$, donc $1/f$ est bien définie sur un voisinage de $+\infty$. Par ailleurs, pour tout entier n,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0\big(1 + u(x)\big)} \quad \text{avec } u(x) = \frac{a_1}{a_0} x^{-1} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} x^{-n} + x^{-n}\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

On obtient $1/f = \frac{1}{a_0}\big(1 - u + u^2 - \ldots + (-1)^n u^n + u^n \eta(u)\big)$ avec $\eta(t) = (-1)^{n+1} t/(1+t) \to 0$ quand $t \to 0$ et $u(x) = O(x^{-1})$. On voit donc que $1/f$ admet un développement à l'ordre n, obtenu en substituant $u(x)$ par son expression en fonction des puissances de x^{-1} et en tronquant au delà du degré n.

6. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_0, +\infty[$ telle que $f' \in \mathcal{A}$: $f'(x) \approx \sum c_n x^{-n}$. Pour tout entier n, on peut écrire

$$(\dagger) \qquad f'(x) = c_0 + c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + \ldots + c_n x^{-n} + x^{-n}\varepsilon_n(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon_n(x) = 0.$$

On cherche à intégrer cette relation et on pose donc $r_n(x) = -\int_x^{+\infty} t^{-n}\varepsilon_n(t)\,dt$. La fonction ε_n étant bornée sur $[x_0, +\infty[$ (puisque continue et tendant vers 0 en $+\infty$), on voit que l'intégrale définissant $r_n(x)$ converge absolument pour tout $n \ge 2$. Par définition $r_n'(x) = x^{-n}\varepsilon_n(x)$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x_1 \ge x_0$ tel que $|\varepsilon_n(x)| \le \varepsilon$ pour $x \ge x_1$, d'où

$$|r_n(x)| \le \varepsilon \int_x^{+\infty} t^{-n} dt = \varepsilon \frac{x^{1-n}}{n-1}.$$

Ceci montre que $\lim_{x\to+\infty} x^{n-1} r_n(x) = 0$, c'est-à-dire $r_n(x) = o(x^{1-n})$. Par intégration de la relation $(\dagger)$ on obtient alors

$$f(x) = A + c_0 x + c_1 \ln x - c_2 x^{-1} - \ldots - \frac{c_n}{n-1} x^{1-n} + r_n(x)$$

où A est une constante. En particulier $f(x) = A + c_0 x + c_1 \ln x + O(1/x)$, donc f est bornée si et seulement si $c_0 = c_1 = 0$. Inversement si c'est le cas, on voit que f admet un DAS de coefficients $a_0 = A = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $a_{n-1} = -c_n/(n-1)$ pour tout $n \geq 2$. Par suite $f \in \mathcal{A}$ si et seulement si $c_0 = c_1 = 0$.

II. Etude de certaines fonctions définies par des intégrales

Soit $\Omega = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2\,;\, \operatorname{Re}\alpha > 0 \text{ ou } \operatorname{Re}\alpha = 0, \alpha \neq 0, \operatorname{Re}\beta > 0\}$. Soit $(\alpha, \beta) \in \Omega$. On pose $a = \operatorname{Re}\alpha$, $b = \operatorname{Re}\beta$ et

$$\psi_\beta(x) = e^{\alpha x} x^\beta, \qquad J_\beta(x) = \int_{x_0}^{x} \psi_\beta(t)\, dt, \qquad Q_\beta(x) = \frac{J_\beta(x)}{\psi_\beta(x)} = \int_{x_0}^{x} e^{\alpha(t-x)} \Big(\frac{t}{x}\Big)^\beta dt.$$

1. Une intégration par parties donne

$$J_\beta(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\alpha t} t^\beta dt = \Big[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} x^\beta\Big]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \beta t^{\beta-1} dt, \qquad \text{soit}$$
$$J_\beta(x) = \frac{1}{\alpha}\big(\psi_\beta(x) - \psi_\beta(x_0)\big) - \frac{\beta}{\alpha} J_{\beta-1}(x).$$

2. On suppose ici $a = \operatorname{Re}\alpha > 0$. Comme $\psi_\beta(x) = \exp(\alpha x + \beta \ln x)$, on trouve $|\psi_\beta(x)| = \exp(ax + b\ln x)$, soit $|\psi_\beta(x)| = e^{ax} x^b$. L'inégalité $t^b \leq 2^{|b|} x^b$ pour $t \in [x/2, x]$ implique

$$|J_\beta(x)| \leq \int_{x_0}^{x} e^{at} t^b dt = \int_{x_0}^{x/2} + \int_{x/2}^{x} \leq e^{ax/2} \int_{x_0}^{x/2} t^b dt + 2^{|b|} x^b \int_{x/2}^{x} e^{at} dt$$
$$\leq e^{ax/2} \Big(\frac{x}{2} - x_0\Big) \max\big(x_0^b, (x/2)^b\big) + \frac{2^{|b|}}{a} e^{ax} x^b \leq C\, e^{ax} x^b$$

pour $x \geq x_1$ assez grand, avec disons $C = 2^{|b|}/a + 1$. La formule de récurrence du 1. donne alors

$$\Big|Q_\beta(x) - \frac{1}{\alpha}\Big| = \frac{\big|J_\beta(x) - \frac{1}{\alpha}\psi_\beta(x)\big|}{|\psi_\beta(x)|} \leq \frac{|\psi_\beta(x_0)| + |\beta|\,|J_{\beta-1}(x)|}{|\alpha|\,|\psi_\beta(x)|} \leq \frac{|\psi_\beta(x_0)| + \frac{|\beta|}{a} e^{ax} x^{b-1}}{|\alpha| e^{ax} x^b} \leq \frac{|\psi_\beta(x_0)|}{|\alpha| e^{ax} x^b} + \frac{|\frac{C\beta}{\alpha}|}{x}.$$

Le membre de droite tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} Q_\beta(x) = \frac{1}{\alpha}$ et $J_\beta(x) \sim \frac{1}{\alpha}\psi_\beta(x)$.

3. En supposant toujours $a = \operatorname{Re}\alpha > 0$, montrons par récurrence sur n que

$$Q_\beta(x) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{1\leq k\leq n} (-1)^k \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-k+1)}{\alpha^{k+1} x^k} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n}.$$

La question 2. montre que le résultat est vrai pour $n = 0$. La formule obtenue à la question 1. donne par ailleurs

$$(\star) \qquad Q_\beta(x) = \frac{J_\beta(x)}{\psi_\beta(x)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{J_{\beta-1}(x)}{\psi_\beta(x)} - \frac{1}{\alpha}\frac{\psi_\beta(x_0)}{\psi_\beta(x)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha x} Q_{\beta-1}(x) + x^n \varepsilon(x),$$

car le dernier terme $\psi_\beta(x_0)/\psi_\beta(x)$ a un développement asymptotique nul. En appliquant l'hypothèse de récurrence d'ordre $n-1$ à $Q_{\beta-1}$, on trouve

$$Q_\beta(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha x}\Big(\frac{1}{\alpha} + \sum_{1\leq k\leq n-1} (-1)^k \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-k)}{\alpha^{k+1} x^k} + \frac{\varepsilon(x)}{x^{n-1}}\Big).$$

En faisant le changement d'indice $k' = k+1$, on voit que ceci est précisément le résultat cherché à l'ordre n.

4. Dans le cas où $\operatorname{Re}\alpha = 0$, on a pour $J_\beta(x)$ la majoration

$$|J_\beta(x)| \leq \int_{x_0}^{x} t^b dt \leq \frac{x^{b+1} - x_0^{b+1}}{b+1}, \qquad \text{resp.} \quad \leq \ln\frac{x}{x_0}$$

si $b \neq -1$, resp. si $b = -1$. En appliquant la formule de récurrence pour $J_{\beta-1}(x)$ dans $(\star)$, il vient

$$Q_\beta(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2 x} + \frac{\beta(\beta-1)}{\alpha^2}\frac{J_{\beta-2}(x)}{\psi_\beta(x)} + \frac{\beta}{\alpha^2}\frac{\psi_{\beta-1}(x_0)}{\psi_\beta(x)} - \frac{1}{\alpha}\frac{\psi_\beta(x_0)}{\psi_\beta(x)}.$$

Les deux derniers termes tendent vers 0 puisque $|\psi_\beta(x)| = x^b$ tend vers $+\infty$. Par ailleurs

$$\Big|\frac{J_{\beta-2}(x)}{\psi_\beta(x)}\Big| = x^{-b}|J_{\beta-2}(x)| \leq \begin{cases} \dfrac{x^{-1}}{b-1} & \text{si } b > 1, \\ x^{-1}\ln\dfrac{x}{x_0} & \text{si } b = 1, \\ \dfrac{x^{-b}x_0^{b-1}}{1-b} & \text{si } b < 1. \end{cases}$$

Ceci entraîne dans tous les cas que $J_{\beta-2}/\psi_\beta$ tend vers 0, par suite on obtient encore $\lim_{x\to+\infty} Q_\beta(x) = \frac{1}{\alpha}$.

5. Pour $(\alpha, \beta) \in \Omega$, on pose

$$\varphi_\beta(x) = 1/\psi_\beta(x) = e^{-\alpha x}x^{-\beta}, \quad I_\beta(x) = \int_x^{+\infty} \varphi_\beta(t)\,dt, \quad P_\beta(x) = \frac{I_\beta(x)}{\varphi_\beta(x)} = \int_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)}\Big(\frac{t}{x}\Big)^{-\beta}dt.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_x^A e^{-\alpha t}t^{-\beta}dt = \Big[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}t^{-\beta}\Big]_x^A - \int_x^A \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\beta t^{-\beta-1}dt.$$

Si $a = \operatorname{Re}\alpha > 0$, les intégrales des deux membres sont absolument convergentes quand $A \to +\infty$, car on a par exemple $|e^{-\alpha t}t^{-\beta}| \leq e^{-at/2}$ pour t assez grand. Si $a = \operatorname{Re}\alpha = 0$ et $b = \operatorname{Re}\beta > 0$, on a $|e^{-\alpha t}t^{-\beta}| = t^{-b}$, donc l'intégrale du membre de gauche n'est absolument convergente que si $b > 1$. L'intégrale de droite est toujours absolument convergente puisque $b + 1 > 1$. Il en résulte que l'intégrale de gauche a toujours une limite quand $A \to +\infty$. Par suite l'intégrale $I_\beta(x)$ est convergente (semi-convergente pour $a = 0$, $b \in]0, 1]$, absolument convergente dans les autres cas), et on a

$$I_\beta(x) = \frac{1}{\alpha}\varphi_\beta(x) - \frac{\beta}{\alpha}I_{\beta+1}(x).$$

6. Si $a = \operatorname{Re}\alpha > 0$, on a $t^{-b} \leq 4^{|b|}x^{-b}$ pour $t \in [x, 4x]$ et $e^{-at} \leq e^{-2ax}e^{-at/2}$ pour $t \in [4x, +\infty[$, d'où la majoration

$$\begin{aligned} |I_\beta(x)| &\leq \int_x^{+\infty} e^{-at}t^{-b}dt = \int_x^{4x} + \int_{4x}^{+\infty} \leq 4^{|b|}x^{-b}\int_x^{4x} e^{-at}dt + e^{-2ax}\int_{4x}^{+\infty} e^{-at/2}t^{-b}dt \\ &\leq \frac{4^{|b|}}{a}e^{-ax}x^{-b} + C\,e^{-2ax} \leq C'\,e^{-ax}x^{-b}, \end{aligned}$$

par suite $|P_\beta(x)| \leq C'$ est borné. La formule du 5. implique

$$P_\beta(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha x}P_{\beta+1}(x),$$

donc $\lim_{x\to+\infty} P_\beta(x) = \frac{1}{\alpha}$ puisque $P_{\beta+1}$ est lui aussi borné. Une récurrence immédiate donne alors le développement limité

$$P_\beta(x) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{1\leq k\leq n} (-1)^k\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{\alpha^{k+1}x^k} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n}$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

7. Si $a = \operatorname{Re}\alpha = 0$ et $b = \operatorname{Re}\beta > 0$, on a

$$|I_\beta(x)| \leq \int_x^{+\infty} t^{-b}dt = \frac{x^{1-b}}{b-1} \quad \text{si } \ b > 1.$$

Il en résulte déjà que $|P_\beta(x)| \le x/(b-1)$ si $b > 1$. La formule de récurrence appliquée deux fois donne

$$P_\beta(x) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2 x} + \frac{\beta(\beta+1)}{\alpha^2 x^2} P_{\beta+2}(x) \quad \text{avec} \quad P_{\beta+2}(x) = O(x),$$

ce qui entraîne qu'on a encore $\lim_{x\to+\infty} P_\beta(x) = \frac{1}{\alpha}$. Une récurrence identique à celle faite en 6. montre que le DAS de P_β est valable dans ce cas aussi.

III. Une équation intégrale

Soit Δ l'ensemble des (x,t) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x_0 \le x \le t$, K une application continue de Δ dans $\mathbb{C}$ et soit $A = \sup_\Delta K$. Pour $g \in \mathcal{B}$, on note $\|g\| = \sup_{[x_0,+\infty[} |g|$ sa norme uniforme. On sait que $\mathcal{B}$ est un espace de Banach pour cette norme.

1,2,3. Si $h \in \mathcal{B}$, on pose

$$(Th)(x) = \int_x^{+\infty} \frac{K(x,t)h(t)}{t^2} dt.$$

On voit aussitôt que l'intégrale est absolument convergente et que

$$|(Th)(x)| \le \int_x^{+\infty} \frac{|K(x,t)h(t)|}{t^2} dt \le A\|h\| \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \le A\frac{\|h\|}{x},$$

en particulier $\|Th\| \le A\|h\|/x_0 < +\infty$. Le théorème de convergence dominée montre que Th est continue, donc $Th \in \mathcal{B}$ (poser $t = xu$, $dt = x\,du$ pour se ramener à $\int_1^{+\infty}$ et observer que $K(x,xu)h(xu)/(xu^2)$ est continue en (x,u), dominée par la fonction intégrable $u \mapsto A\|h\|/(x_0u^2)$ pour $x \ge x_0$, $u \ge 1$). Ceci entraîne que T est une application linéaire continue de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$ (la linéarité est évidente), de norme $|||T||| \le A/x_0$.

4. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\big|(T^n h)(x)\big| \le A^n \frac{\|h\|}{n!\,x^n}.$$

C'est vrai pour $n = 0$ puisque $T_0 = I$, et aussi pour $n = 1$ d'après 2. Si la majoration est vraie à l'ordre $n-1$, alors

$$\begin{aligned}\big|(T^n h)(x)\big| &= \Big|\int_x^{+\infty} \frac{K(x,t)\,T^{n-1}h(t)}{t^2} dt\Big| \le \int_x^{+\infty} A\,A^{n-1} \frac{\|h\|}{(n-1)!\,t^{n-1}} \frac{dt}{t^2} \\ &\le A^n \frac{\|h\|}{(n-1)!} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} = A^n \frac{\|h\|}{n!\,x^n}.\end{aligned}$$

En particulier on obtient $\|T^n h\| \le \|h\|\, A^n/(n!\,x_0^n)$ et $|||T^n||| \le A^n/(n!\,x_0^n)$, d'où

$$\Big\|\sum_{n\ge 0} T^n h\Big\| \le \sum_{n\ge 0} \|T^n h\| \le e^{A/x_0}\|h\|.$$

Ceci entraîne que la série $\sum T^n h$ est normalement convergente sur $[x_0, +\infty[$ et que sa somme est dans $\mathcal{B}$.

5. L'application linéaire $I - T$ est inversible d'inverse $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n$, car

$$(I-T) \circ \sum_{n=0}^{N} T^n = \sum_{n=0}^{N} T^n \circ (I-T) = I - T^{N+1},$$

et les majorations du 4. montrent que $\lim_{N\to+\infty} |||T^{N+1}||| = 0$. Par conséquent, si $h \in \mathcal{B}$, l'équation $g - Tg = h$, qui peut encore s'écrire $(I-T)g = h$, admet une solution unique

$$g = (I-T)^{-1}h = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n h \quad \text{dans } \mathcal{B}.$$

IV. DAS de la solution d'un problème du type précédent

1. Soit $(\alpha, \beta) \in \Omega$ fixé. On pose, pour tout $(x, u) \in \Delta$,

$$L(x,u) = \int_x^u e^{2\alpha(t-u)} \Big(\frac{t}{u}\Big)^{2\beta} dt.$$

On peut encore écrire

$$L(x,u) = e^{-2\alpha u} u^{-2\beta} \Big(\int_{x_0}^u e^{2\alpha t} t^{2\beta} dt - \int_{x_0}^x e^{2\alpha t} t^{2\beta} dt \Big).$$

La fonction apparaissant sous le signe intégral est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x_0, +\infty[$, il en est donc de même pour les primitives $\int_{x_0}^u$ et $\int_{x_0}^x$ comme fonctions de u et de x. De même $u \mapsto e^{-2\alpha u} u^{-2\beta}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x_0, +\infty[$. Il en résulte que L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x_0, +\infty[^2$, en particulier L est continue sur Δ.

2. On a $\big|e^{2\alpha(t-u)}(t/u)^{2\beta}\big| = e^{2a(t-u)}(t/u)^{2b}$, et pour $(t, u) \in \Delta$ on a $t - u \le 0$ et $t/u \le 1$. Si $a = 0$, alors par hypothèse $b > 0$, donc la fonction est bornée par 1. Si $a > 0$, on peut utiliser la majoration

$$(t/u)^b \le (u/t)^{|b|} \le \big(1 + (u-t)/t\big)^{|b|} \le \big(1 + (u-t)/x_0\big)^{|b|}.$$

En posant $s = u - t \ge 0$ on obtient

$$\big|e^{2\alpha(t-u)}(t/u)^{2\beta}\big| \le M = \sup_{s \ge 0} e^{-2as}(1 + s/x_0)^{|b|},$$

et $M < +\infty$ car la fonction apparaissant au membre de droite est continue en s et tend vers 0 à l'infini.

3. Si on pose $L_0(u) = L(x_0, u) = \int_{x_0}^u e^{2\alpha(t-u)}(t/u)^{2\beta} dt$, alors on a

$$L(x,u) = \int_{x_0}^u - \int_{x_0}^x e^{2\alpha(t-u)} \Big(\frac{t}{u}\Big)^{2\beta} dt = L_0(u) - e^{2\alpha(x-u)} \Big(\frac{x}{u}\Big)^{2\beta} L_0(x).$$

Pour montrer que L est bornée sur Δ, il suffit d'après 2. de montrer que L_0 est bornée sur $+\infty$. Or on voit que L_0 coïncide avec la fonction $Q_{2\beta}$ associée au couple $(2\alpha, 2\beta) \in \Omega$. La fonction L_0 est continue et les questions II 2. et II 4. impliquent que $\lim_{u \to +\infty} L_0(u) = \lim_{u \to +\infty} Q_{2\beta}(u) = 1/(2\alpha)$, par conséquent L_0 est bornée sur $[x_0, +\infty[$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Montrons que $x \mapsto \int_x^{+\infty} L(x, u) u^{-n-2} du$ admet un DAS. La relation entre L et L_0 obtenue à la question 3. permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} \frac{L(x,u)}{u^{n+2}} du &= \int_x^{+\infty} \frac{L_0(u)}{u^{n+2}} du - L_0(x) \int_x^{+\infty} \frac{e^{2\alpha(x-u)}(x/u)^{2\beta}}{u^{n+2}} du \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{L_0(u)}{u^{n+2}} du - x^{-n-2} L_0(x) \int_x^{+\infty} e^{-2\alpha(u-x)}(u/x)^{-2\beta-n-2} du \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{L_0(u)}{u^{n+2}} du - x^{-n-2} L_0(x) P_{2\beta+n+2}(x).
\end{aligned}$$

Si $a = \operatorname{Re} \alpha > 0$, on sait que $L_0(u) = Q_{2\beta}(u)$ admet un DAS d'après II 3. Il en est de même pour la fonction $P_{2\beta+n+2}$ associée au couple $(2\alpha, 2\beta + n + 2) \in \Omega$ (voir III). Comme $L_0(u)/u^{n+2}$ admet un DAS dont les coefficients en degrés 0 et 1 sont nuls, la primitive $\int_x^{+\infty} L_0(u)/u^{n+2} du$ admet un DAS d'après I 6. On conclut finalement par I 5.

Si $a = 0$, on ne peut plus raisonner de la même manière car on ne sait pas a priori si L_0 admet un DAS (en fait il n'en a pas). On peut s'en tirer en effectuant des intégrations par parties successives dans $L(x, u)$. Après k intégrations par parties du facteur exponentiel, la fonction à intégrer devient $c_k e^{2\alpha(t-u)} t^{2\beta-k} u^{-2\beta}$ et par récurrence sur q on obtient

$$L(x,u) = \int_x^u c_q e^{2\alpha(t-u)} t^{2\beta-q} u^{-2\beta} dt + \frac{1}{2\alpha} \sum_{0 \le k \le q-1} c_k \big(u^{-k} - e^{2\alpha(x-u)} x^{2\beta-k} u^{-2\beta}\big)$$

avec $c_k = (-1)^k (2\alpha)^{-k} 2\beta(2\beta-1)\dots(2\beta-k+1)$. Pour q assez grand tel que $q-2b>0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_x^u c_q e^{2\alpha(t-u)} t^{2\beta-q} u^{-2\beta} dt &= c_q u^{-q} \int_x^u e^{2\alpha(t-u)} \Big(\frac{t}{u}\Big)^{-(q-2\beta)} dt = c_q u^{-q} \Big(\int_x^{+\infty} - \int_u^{+\infty}\Big) \\ &= c_q u^{-q}\big(P_{q-2\beta}(x) e^{2\alpha(x-u)} (x/u)^{-(q-2\beta)} - P_{q-2\beta}(u)\big),\end{aligned}$$

$$\text{soit}\qquad \begin{aligned} L(x,u) &= c_q\big(P_{q-2\beta}(x) e^{2\alpha(x-u)} x^{2\beta-q} u^{-2\beta} - u^{-q} P_{q-2\beta}(u)\big) \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha} \sum_{0\le k\le q-1} c_k \big(u^{-k} - e^{2\alpha(x-u)} x^{2\beta-k} u^{-2\beta}\big),\end{aligned}$$

où $P_{q-2\beta}$ est associée au couple $(-2\alpha, q-2\beta) \in \Omega$ (les parties réelles sont $\mathrm{Re}\,(-2\alpha) = 0$ et $q-2b>0$). Après multiplication par du/u^{n+2} et intégration, il vient

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{L(x,u)}{u^{n+2}} du &= c_q x^{-q-n-2} P_{q-2\beta}(x) \int_x^{+\infty} e^{-2\alpha(u-x)} (u/x)^{-(2\beta+n+2)} du - c_q \int_x^{+\infty} u^{-q-n-2} P_{q-2\beta}(u) du \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha} \sum_{0\le k\le n-1} c_k \Big(\int_x^{+\infty} u^{-k-n-2} du - x^{-k-n-2} \int_x^{+\infty} e^{-2\alpha(u-x)} (u/x)^{-(2\beta+n+2)} du\Big) \\ &= c_q x^{-q-n-2} P_{q-2\beta}(x) P_{2\beta+n+2}(x) - c_q \int_x^{+\infty} u^{-q-n-2} P_{q-2\beta}(u) du \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha} \sum_{0\le k\le n-1} c_k \Big(\frac{1}{k+n+1} x^{-k-n-1} - x^{-k-n-2} P_{2\beta+n+2}(x)\Big).\end{aligned}$$

L'existence du DAS de l'intégrale $\int_x^{+\infty} L(x,u)/u^{n+2} du$ résulte alors du fait que $P_{q-2\beta}$ et $P_{2\beta+n+2}$ admettent tous deux des DAS.

5. Soit $\rho : [x_0, +\infty[\to \mathbb{C}$ admettant un développent limité à l'ordre n en $+\infty$, de la forme $\rho(u) = \sum_{0\le k\le n} c_k u^{-k} + u^{-n}\varepsilon(u)$. Alors on peut écrire

$$\int_x^{+\infty} \frac{L(x,u)\rho(u)}{u^2} du = \sum_{0\le k\le n} c_k \int_x^{+\infty} \frac{L(x,u)}{u^{k+2}} du + \int_x^{+\infty} \frac{L(x,u)\varepsilon(u)}{u^{n+2}} du.$$

Chaque terme de la sommation admet un DAS d'après la question 4. Le terme restant est majoré par $Mx^{-n-1}\widetilde{\varepsilon}(x)$ où M est une borne supérieure pour $L(x,u)$ (voir 3.) et où $\widetilde{\varepsilon}(x) = \sup_{[x,+\infty[} |\varepsilon(u)|$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Il en résulte aussitôt que $\int_x^{+\infty} L(x,u)\rho(u)/u^2 du$ admet un développement limité à l'ordre $n+1$ au moins.

6. Soit $F \in \mathcal{A}$ et T l'opérateur intégral défini par

$$(Tg)(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{F(u)L(x,u)}{u^2} g(u)\, du,$$

associé comme dans III 1. au noyau $K(x,u) = -F(u)L(x,u)$. Ce noyau étant borné, la question III 5. montre qu'il existe une unique solution $g \in \mathcal{B}$ de l'équation $g - Tg = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, soit une unique $g \in \mathcal{B}$ telle que

$$g(x) = \lambda - \int_x^{+\infty} \frac{F(u)L(x,u)}{u^2} g(u)\, du \qquad \text{pour}\quad x \ge x_0.$$

Montrons par récurrence sur n que g admet un développement limité à l'ordre n. Pour $n=2$, il suffit de montrer que g a une limite: comme F, L et g sont bornées, l'intégrale $Tg(x)$ est absolument convergente, donc $\lim_{x\to+\infty} Tg(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lambda$. La question 5. appliquée à $\rho(u) = F(u)g(u)$ montre que l'existence d'un développement limité à l'ordre n pour g entraîne l'existence d'un développement limité à l'ordre $n+1$. Par conséquent g admet un DAS.

7. On a vu à la question 1. que la fonction $(x,u) \mapsto L(x,u)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Δ. Comme $L(x,x) = 0$ et $L'_x(x,u) = -e^{2\alpha(x-u)}(x/u)^{2\beta}$ par définition de L, le théorème de dérivation sous le signe somme avec

bornes variables, appliqué à l'équation intégrale définissant g, montre que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \Big[\frac{F(u)L(x,u)}{u^2}g(u)\Big]_{u=x} - \int_x^{+\infty} \frac{F(u)L'_x(x,u)}{u^2}g(u)\,du \\ &= \int_x^{+\infty} e^{2\alpha(x-u)}\Big(\frac{x}{u}\Big)^{2\beta}\frac{F(u)g(u)}{u^2}\,du. \end{aligned}$$

On voit facilement que cette formule peut-être dérivée encore une fois au moins, donc g est en fait de classe $\mathcal{C}^2$; plus généralement, si F est de classe $\mathcal{C}^p$, on peut vérifier par récurrence sur p que g est de classe $\mathcal{C}^{p+2}$.

8. Puisque g a un DAS d'après 6. et que $F \in \mathcal{A}$, la fonction $\rho(u) = F(u)g(u)$ admet un DAS $\sum c_n u^{-n}$. Or, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la fonction

$$-\int_x^{+\infty} L'_x(x,u)u^{-n-2}du = \int_x^{+\infty} e^{2\alpha(x-u)}\Big(\frac{x}{u}\Big)^{2\beta}u^{-n-2}du = x^{-n-2}P_{2\beta+n+2}(x)$$

admet un DAS, $P_{2\beta+n+2}$ étant associée au couple $(2\alpha, 2\beta+n+2) \in \Omega$. Un raisonnement identique à celui de 5. montre que $g'(x) = -\int_x^{+\infty} L'_x(x,u)\rho(u)u^{-2}du$ admet un DAS (dont les coefficients de degrés 0 et 1 sont nuls).

V. Solutions normales de $y'' + qy = 0$

Soit $q \in \mathcal{A}$, $q(x) \approx \sum a_n x^{-n}$ avec $a_0 \neq 0$, et soit $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. On dit qu'une solution f de $\mathcal{E}$ est normale si on peut écrire $f(x) = e^{-\alpha x}x^{-\beta}g(x)$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ et g de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g \in \mathcal{A}$, $g' \in \mathcal{A}$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$.

1. Cherchons l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{\alpha,\beta})$ transformée de $(\mathcal{E})$ par le changement de fonction inconnue $y = e^{-\alpha x}x^{-\beta}z$. Des calculs aisés donnent

$$\begin{aligned} y' &= e^{-\alpha x}x^{-\beta}\big(z' - \alpha z - \beta x^{-1}z\big), \\ y'' &= e^{-\alpha x}x^{-\beta}\big(z'' - 2\alpha z' - 2\beta x^{-1}z' + \beta x^{-2}z + \beta^2x^{-2}z + 2\alpha\beta x^{-1}z + \alpha^2 z\big). \end{aligned}$$

On voit alors que $(\mathcal{E})$ se transforme en

$$(\mathcal{E}_{\alpha,\beta}) \qquad z'' - (2\alpha + 2\beta x^{-1})z' + \big(\beta(\beta+1)x^{-2} + 2\alpha\beta x^{-1} + \alpha^2 + q(x)\big)z = 0.$$

2. Si $f(x) = e^{-\alpha x}x^{-\beta}g(x)$ est une solution normale de $(\mathcal{E})$, alors g satisfait $(\mathcal{E}_{\alpha,\beta})$, ce qui peut s'écrire $g'' = q_1g' - q_2g$ avec $q_1(x) = 2\alpha + 2\beta x^{-1}$, $q_2(x) = \beta(\beta+1)x^{-2} + 2\alpha\beta x^{-1} + \alpha^2 + q(x)$, donc $q_1, q_2 \in \mathcal{A}$. Comme par hypothèse $g, g' \in \mathcal{A}$, la question I 5. implique $g'' \in \mathcal{A}$.

3. Avec les notations de 2., posons $g(x) \approx \sum c_n x^{-n}$ avec $c_0 \neq 0$. On sait que g', g'' ont des DAS $g'(x) \approx \sum d_n x^{-n}$ et $g''(x) \approx \sum e_n x^{-n}$; la question I 6. donne les relations inverses $d_0 = d_1 = 0$, $d_{n+1} = -nc_n$ et $e_0 = e_1 = 0$, $e_{n+1} = -nd_n$, d'où les formules $g'(x) = -\sum_{n\geq 1} n\,c_n x^{-n-1} = O(x^{-2})$ et $g''(x) = \sum_{n\geq1} n(n+1)c_n x^{-n-2} = O(x^{-3})$. En reportant ceci dans $(\mathcal{E}_{\alpha,\beta})$, il vient

$$\big(\beta(\beta+1)x^{-2} + 2\alpha\beta x^{-1} + \alpha^2 + q(x)\big)g(x) = O(x^{-2}).$$

Comme par hypothèse $g(x)$ a une limite finie non nulle c_0 en $+\infty$, on voit que le terme entre parenthèses doit être lui-même $O(x^{-2})$. Le calcul des coefficients de x^0 et x^{-1} conduit, après substitution du DAS $q(x) \approx \sum a_n x^{-n}$, aux conditions nécessaires

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} \alpha^2 = -a_0 \\ 2\alpha\beta = -a_1. \end{cases}$$

Tenant compte de ces équations, l'égalité des DAS des deux membres de l'équation $(\mathcal{E}_{\alpha,\beta})$ fournit

$$\sum_{n\geq1} n(n+1)c_n x^{-n-2} + (2\alpha + 2\beta x^{-1})\sum_{n\geq1} n\,c_n x^{-n-1} + \big(\beta(\beta+1)x^{-2} + \sum_{n\geq2} a_n x^{-n}\big)\sum_{n\geq0} c_n x^{-n} \approx 0.$$

En égalant à 0 le coefficient de x^{-n-2} dans cette expression, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ les relations

$$n(n+1)c_n + 2\alpha(n+1)c_{n+1} + 2\beta n c_n + \big(\beta(\beta+1)+a_2\big)c_n + \sum_{k\geq 3} a_k c_{n+2-k} = 0$$

$$c_{n+1} = -\frac{1}{2\alpha(n+1)}\Big(\big(n(n+1)+2\beta n+\beta(\beta+1)+a_2\big)c_n + \sum_{k\geq 3} a_k c_{n+2-k}\Big), \qquad (\alpha \neq 0).$$

Cette relation de récurrence montre que la suite (c_n) est déterminée de manière unique par son coefficient c_0 et que l'ensemble des suites (c_n) solutions du problème forme un espace vectoriel de dimension 1.

4. Comme $a_0 \neq 0$, il existe exactement deux couples (α, β) satisfaisant (S), à savoir $\alpha = \pm\sqrt{-a_0}$, $\beta = -a_1/(2\alpha)$. Ces couples étant opposés, on les notera (α, β) et $(-\alpha, -\beta)$, en fixant le signe $\pm$ de sorte que $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ (resp. $\mathrm{Re}\,\beta \geq 0$ si $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$). Dans ce cas on a bien $(\alpha, \beta) \in \Omega$, à moins que $\mathrm{Re}\,\alpha = \mathrm{Re}\,\beta = 0$, c'est-à-dire $a_0 = -\alpha^2 = (\mathrm{Im}\,\alpha)^2 > 0$ et $a_1 = -2\alpha\beta = 2\mathrm{Im}\,\alpha\,\mathrm{Im}\,\beta \in \mathbb{R}$. Hormis le cas $(a_0, a_1) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ où les deux couples $(\pm\alpha, \pm\beta)$ sont purement imaginaires, on voit qu'il existe un seul couple $(\alpha, \beta) \in \Omega$.

VI. Développement des solutions de $(\mathcal{E})$

1. On suppose désormais $(a_0, a_1) \notin]0, +\infty[\times\mathbb{R}$, de sorte que $(\alpha, \beta) \in \Omega$. On pose $\varphi(x) = e^{-2\alpha x}x^{-2\beta}$. En multipliant $(\mathcal{E}_{\alpha,\beta})$ par $\varphi(x)$, on fait apparaître $\varphi'(x)$ comme coefficient de z'. L'équation $(\mathcal{E}_{\alpha,\beta})$ peut donc s'écrire

$$\frac{d}{dx}\Big(\varphi(x)\frac{dz}{dx}\Big) + \frac{\varphi(x)}{x^2}F(x)z = 0$$

avec

$$F(x) = x^2(\big(\beta(\beta+1)x^{-2} + 2\alpha\beta x^{-1} + \alpha^2 + q(x)\big) \approx \beta(\beta+1) + \sum_{n\geq 2} a_n x^{-(n-2)},$$

comme on le voit en utilisant les conditions (S). On a donc bien $F \in \mathcal{A}$.

2. a. Soit g une solution bornée de $(\mathcal{E}_{\alpha,\beta})$ et $(x, X) \in \Omega$. Par intégration sur $[x, X]$ de l'équation obtenue à la question 1. (avec $z = g$), on obtient

$$\varphi(X)g'(X) - \varphi(x)g'(x) = -\int_x^X \frac{\varphi(t)F(t)g(t)}{t^2}dt.$$

b. Comme φ, F et g sont bornées, l'intégrale ci-dessus est abolument convergente sur $[x, +\infty[$. Ceci entraîne que $\ell = \lim_{X\to+\infty}\varphi(X)g'(X)$ existe.

c. Soit $M = \sup_{[x_0,+\infty[}|Fg|$. Comme $|\varphi(x)| = e^{-2ax}x^{-2b}$ est décroissante sur $[x_1, +\infty[$ pour x_1 assez grand, l'intégrale du a. donne en valeur absolue

$$|\varphi(X)g'(X) - \varphi(x)g'(x)| \leq |\varphi(x)|\int_x^X \frac{M}{t^2}dt \leq M|\varphi(x)|\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{X}\Big) \quad \text{pour} \quad x \geq x_1.$$

En faisant tendre X vers $+\infty$ et en divisant par $|\varphi(x)|$ on obtient

$$|\ell - \varphi(x)g'(x)| \leq M|\varphi(x)|\frac{1}{x} \Longrightarrow \Big|g'(x) - \frac{\ell}{\varphi(x)}\Big| \leq \frac{M}{x}.$$

Par intégration sur $[x_1, +\infty[$, on en déduit

$$\Big|g(x) - g(x_1) - \ell\int_{x_1}^x e^{2\alpha t}t^{2\beta}dt\Big| \leq \ln(x/x_1) \quad \text{pour} \quad x \geq x_1.$$

D'après II 2. et II 4. l'intégrale $\int_{x_1}^x e^{2\alpha t}t^{2\beta}dt \sim \frac{1}{2\alpha}e^{2\alpha x}x^{2\beta}$ croît comme une fonction puissance ou exponentielle quand $x \to +\infty$; comme g est bornée, ceci n'est possible que si $\ell = 0$. Par conséquent $|g'(x)| \leq M/x$ et $\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.

d. Si on fait tendre X vers $+\infty$ dans a. et si on divise par $\varphi(x)$, il vient

$$g'(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)F(t)g(t)}{\varphi(x)t^2}dt = \int_x^{+\infty} \frac{F(t)g(t)}{t^2}e^{2\alpha(x-t)}\Big(\frac{x}{t}\Big)^{2\beta}dt.$$

3. a. Soit $h(x) = \int_x^X L(x,t)F(t)g(t)/t^2 dt$ avec X fixé. Comme $L(x,x) = 0$ et $L'_x(x,t) = -e^{2\alpha(x-t)}(x/t)^{2\beta}$, une dérivation sous le signe somme donne

$$\begin{aligned} h'(x) &= -[L(x,t)F(t)g(t)/t^2]_{t=x} + \int_x^X L'_x(x,t)F(t)g(t)/t^2 dt \\ &= -\int_x^X e^{2\alpha(x-t)}(x/t)^{2\beta}F(t)g(t)/t^2 dt \\ &= \int_X^{+\infty} - \int_x^{+\infty} = g'(X)e^{2\alpha(x-X)}(x/X)^{2\beta} - g'(x). \end{aligned}$$

En substituant u à x et en intégrant pour $u \in [x, X]$ il vient

$$\begin{aligned} h(X) - h(x) = -h(x) &= g'(X)L(x,X) - (g(X) - g(x)), \qquad \text{soit} \\ g(X) - g(x) &= g'(X)L(x,X) + \int_x^X \frac{L(x,t)F(t)g(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

b. La majoration $|g'(x)| \le M/x$ obtenue au 2.c. entraîne par intégration $|g(x)| \le M \ln x + O(1)$. Les fonctions L et F étant bornées, on en déduit que l'intégrale $\int_x^{+\infty} L(x,t)F(t)g(t)/t^2 dt$ est absolument convergente. Comme par ailleurs $\lim_{X\to+\infty} g'(X) = 0$, on voit en faisant tendre X vers $+\infty$ dans la formule finale du a. que $g(X)$ a une limite λ en $+\infty$ telle que

$$\lambda - g(x) = \int_x^X \frac{L(x,t)F(t)g(t)}{t^2} dt.$$

4. On sait d'après IV 6. qu'il existe une unique solution $g \in \mathcal{B}$ de l'équation intégrale

$$g(x) = \lambda - \int_x^X \frac{L(x,t)F(t)g(t)}{t^2} dt.$$

L'unicité montre que la solution associée à la valeur λ est le produit par λ de la solution associée à $\lambda = 1$. D'après VI 3. b., il existe donc à un facteur multiplicatif près au plus une solution bornée de $(\mathcal{E}_{\alpha,\beta})$, qui ne peut être que la fonction $g \in \mathcal{B}$ ci-dessus; par conséquent il existe au plus une solution normale bornée $f(x) = e^{-\alpha x}x^{-\beta}g(x)$ de $(\mathcal{E})$ à un facteur multiplicatif près. Pour voir que f est effectivement solution de $(\mathcal{E})$, il suffit de vérifier que g est bien solution de $(\mathcal{E}_{\alpha,\beta})$; or la formule IV 7. appliquée à g implique

$$\varphi(x)g'(x) = e^{-2\alpha x}x^{-2\beta}g'(x) = \int_x^{+\infty} e^{-2\alpha u}u^{-2\beta}\frac{F(u)g(u)}{u^2} du,$$

ce qui donne bien

$$\frac{d}{dx}\Big(\varphi(x)\frac{dg}{dx}\Big) = -e^{-2\alpha x}x^{-2\beta}\frac{F(x)g(x)}{x^2} = -\frac{\varphi(x)}{x^2}F(x)g(x).$$

De plus IV 6., IV 8. montrent que g admet un DAS de coefficient initial λ et que g' admet aussi un DAS. Par conséquent f est une solution normale bornée de $(\mathcal{E})$ si $\lambda \ne 0$.

5. Soit f la solution normale bornée de $(\mathcal{E})$ associée à $\lambda = 1$. Cherchons les solutions de $(\mathcal{E})$ sous la forme $y = fw$ avec w de classe $\mathcal{C}^2$ (méthode de variation des constantes). La formule de Leibnitz donne $y'' = fw'' + 2f'w' + f''w$, donc comme $f'' + qf = 0$ l'équation $y'' + qy = 0$ se réduit à $fw'' + 2f'w' = 0$, soit $w''/w' = -2f'/f$. Une intégration conduit à $w'(x) = \mu/f(x)^2$, d'où $w(x) = \lambda + \mu \int_{x_1}^x 1/f(t)^2 dt$ et

$$y(x) = \lambda f(x) + \mu f(x)\int_{x_1}^x \frac{1}{f(t)^2} dt.$$

Ce calcul suppose évidemment que f ne s'annule pas sur l'intervalle $[x_1, x]$; c'est bien le cas si x_1 est assez grand et $x \ge x_1$, puisque $f(x) = e^{-\alpha x}x^{-\beta}g(x)$ avec $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lambda = 1$. La fonction $h(x) = f(x)\int_{x_1}^x 1/f(t)^2 dt$ est bien solution de $(\mathcal{E})$ sur $[x_1, +\infty[$, et on sait a priori qu'elle se prolonge en une solution globale sur $[x_0, +\infty[$ (théorie des équations différentielles linéaires). Cette solution est indépendante de f puisque le rapport h/f est non constant (de dérivée $1/f^2 \ne 0$). Comme l'espace vectoriel des solutions est de dimension 2, on en déduit que les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les combinaisons linéaires $\lambda f + \mu h$. On a

$$h(x) = e^{-\alpha x}x^{-\beta}g(x)\int_{x_1}^{x} e^{2\alpha t}t^{2\beta}g(t)^{-2}dt = e^{\alpha x}x^{\beta}k(x) \quad \text{avec} \quad k(x) = g(x)\int_{x_1}^{x} e^{2\alpha(t-x)}\Big(\frac{t}{x}\Big)^{2\beta}g(t)^{-2}dt.$$

D'après I 5., $g(x)^{-2}$ admet un DAS de coefficient initial 1, et d'après II 2. la fonction $Q_{2\beta+n}$ associée à $(2\alpha, 2\beta+n)$ admet un DAS de coefficient initial $1/2\alpha$ (si $\operatorname{Re}\alpha > 0$). On en déduit facilement que k admet un DAS de coefficient initial $1/2\alpha$ (raisonner de manière analogue à IV 5.). Donc h est une solution normale non bornée, et toute solution y de $(\mathcal{E})$ non proportionnelle à f est de ce type si $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

VII. Un exemple

1. Soit $(\mathcal{E}_0)$ l'équation différentielle $y'' - \lambda^2 x^m y = 0$ avec $\operatorname{Re}\lambda > 0$. On effectue le changement de variable $t = \int_0^x u^{m/2}du$ et le changement de fonction inconnue $y = x^{-m/4}z$. Il vient

$$dt = x^{m/2}dx, \qquad \frac{dy}{dx} = x^{m/2}\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m}{2}x^{m/2-1}\frac{dy}{dt} + x^m\frac{d^2y}{dt^2}$$

et $t = \frac{1}{m/2+1}x^{m/2+1}$, d'où l'équation différentielle

$$x^m\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{m}{2}x^{m/2-1}\frac{dy}{dt} - \lambda^2 x^m y = 0 \Longleftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{m/2}{m/2+1}\frac{1}{t}\frac{dy}{dt} - \lambda^2 y = 0.$$

En multipliant ceci par $t^{\frac{m/4}{m/2+1}}$ et en utilisant la formule de Leibnitz, on obtient

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(t^{\frac{m/4}{m/2+1}}y\Big) - \frac{m/4}{m/2+1}\Big(\frac{m/4}{m/2+1} - 1\Big)t^{\frac{m/4}{m/2+1}-2}y - \lambda^2 t^{\frac{m/4}{m/2+1}}y = 0,$$

soit, puisque $t^{\frac{m/4}{m/2+1}}y$ est proportionnel à $x^{m/4}y = z$:

$$(\mathcal{E}_1) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + \Big(\frac{k}{t^2} - \lambda^2\Big)z = 0, \qquad \text{avec} \quad k = \frac{m(m+4)}{4(m+2)^2}.$$

2. Cette équation est de la forme $y'' + qy = 0$ avec $q(t) = -\lambda^2 + k/t^2$, et q satisfait les hypothèses du V. Le système (S) donne $\alpha^2 = \lambda^2$ et $2\alpha\beta = 0$, d'où $\alpha = \lambda$ et $\beta = 0$ puisqu'on convient de choisir $\operatorname{Re}\alpha \geq 0$. Comme les coefficients a_n du DAS de q sont nuls pour $n \geq 3$ et que $a_2 = k$, les coefficients c_n du DAS de g satisfont d'après V 3. la relation de récurrence

$$n(n+1)c_n + 2\lambda(n+1)c_{n+1} + kc_n = 0, \qquad \text{soit} \quad c_{n+1} = -\frac{n^2+n+k}{2\lambda(n+1)}c_n, \quad c_n = -\frac{n^2-n+k}{2\lambda n}c_{n-1}.$$

En choisissant $c_0 = 1$, on obtient la solution normale bornée

$$f(t) = e^{-\lambda t}g(t), \qquad g(t) \approx \sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{k(2+k)\ldots(n^2-n+k)}{(2\lambda)^n n!}t^{-n}.$$

L'autre solution de $(\mathcal{E}_1)$ s'obtient en changeant formellement la racine λ en $-\lambda$, d'où

$$h(t) = e^{\lambda t}k(t), \qquad k(t) \approx \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{k(2+k)\ldots(n^2-n+k)}{(2\lambda)^n n!}t^{-n}.$$

Ces DAS sont toujours divergents (règle de d'Alembert: $\lim_{n\to+\infty}|c_{n+1}/c_n| = +\infty$).

3. Considérons par exemple l'équation $(\mathcal{E}_0)$ $y'' - xy = 0$ obtenue pour $\lambda = m = 1$. On trouve alors $k = 5/36$, $t = (2/3)x^{3/2}$ et $n^2 - n + 5/36 = (6n-1)(6n-5)/36$. Ceci donne pour $(\mathcal{E}_0)$ deux solutions ayant des développements asymptotiques fractionnaires divergents :

$$y_1(x) \approx x^{-1/4}\exp\Big(-\frac{2}{3}x^{3/2}\Big)\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{[5\ldots(6n-1)]\,[1\ldots(6n-5)]}{48^n n!}x^{-3n/2},$$

$$y_2(x) \approx x^{-1/4}\exp\Big(\frac{2}{3}x^{3/2}\Big)\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{[5\ldots(6n-1)]\,[1\ldots(6n-5)]}{48^n n!}x^{-3n/2}.$$