6

Séries réelles ou complexes

Comme pour le chapitre 3, les suites considérées sont a priori complexes et les résultats classiques sur les fonctions continues ou dérivables d'une variable réelle sont supposés connus de même que les fonctions usuelles exp, ln, sin, $\cdots$

6.1 Généralités sur les séries réelles ou complexes

Soient n_0 un entier naturel et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombres complexes. Étudier la série de terme général u_n revient à étudier la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ des sommes partielles définie par :

$$\forall n \geq n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

On peut remarquer que cette suite est aussi définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} S_{n_0} = u_{n_0}, \\ \forall n \geq n_0 + 1,\ S_n = S_{n-1} + u_n. \end{cases}$$

On notera plus simplement $\sum u_n$ une telle série et on parlera de série numérique.

Pour tout entier $n \geq n_0$, on dit que u_n est le terme d'indice n et S_n la somme partielle d'indice n de cette série.

On supposera, a priori, que $n_0 = 0$.

6.2 Séries convergentes ou divergentes

On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou plus généralement $(u_n)_{n\geq n_0}$) d'éléments de $\mathbb{C}$ et on désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles.

Définition 6.1 *On dit que la série $\sum u_n$ est convergente si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente.*

Dans le cas où la série $\sum u_n$ est convergente, on notera $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et on dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série de terme général u_n. On peut alors définir la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes de cette série convergente par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On dit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, que R_n est le reste d'ordre n de la série convergente $\sum u_n$ et on note :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

On peut remarquer que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Le reste d'ordre n, R_n nous donne une idée de l'erreur que l'on comment en remplaçant la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ par la somme partielle d'ordre n, S_n.

La convergence de la série $\sum u_n$ se traduit donc par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| < \varepsilon.$$

L'étude la suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (exercice 3.18) nous permet d'étudier la série correspondante.

Exercice 6.1 *Étudier la série géométrique $\sum a^n$, où $a \in \mathbb{C}$.*

Solution 6.1 *Pour $a = 1$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$$

et la série diverge.
Pour $a \neq 1$, les sommes partielles sont données par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

et la série géométrique converge si, et seulement si, la suite géométrique $(a^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce qui équivaut à $|a| < 1$. En cas de convergence, on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

Les restes d'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sont donnés par :

$$R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n - \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

L'exercice qui suit nous montre comment ramener l'étude d'une suite à celle d'une série ou inversement.

Exercice 6.2 *Étant donnée une suite numérique* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *on lui associe la série numérique de terme général* u_n *défini par :*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C}, \\ \forall n \geq 1,\ u_n = a_{n-1} - a_n. \end{cases}$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de même nature que la série* $\sum u_n$, *c'est-à-dire qu'elles convergent ou divergent simultanément.*

Solution 6.2 *Les sommes partielles de la série* $\sum u_n$ *sont données par* $S_0 = u_0$ *et, pour* $n \geq 1$ *:*

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) = u_0 + \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = u_0 + a_0 - a_n \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. En cas de convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* ℓ, *la série* $\sum u_n$ *converge vers* $u_0 + a_0 - \ell$ *et les restes d'ordre* n *de la série* $\sum u_n$ *sont données par :*

$$R_n = u_0 + a_0 - \ell - S_n = a_n - \ell.$$

Les exercices qui suivent nous donne des exemples d'application de ce résultat.

Exercice 6.3 *Étudier les séries* $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ *et* $\sum \frac{2n+3}{(n+1)^2 (n+2)^2}$.

Solution 6.3 *Une décomposition en éléments simples nous donne :*

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = a_{n-1} - a_n$$

et :

$$v_n = \frac{2n+3}{(n+1)^2 (n+2)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} = b_{n-1} - b_n$$

et en conséquence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = u_0 + a_0 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 1,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^2 (n+2)^2} = v_0 + b_0 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1.$$

Exercice 6.4 *Étudier les séries* $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *et* $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Solution 6.4 *Avec :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n) = -(a_{n-1} - a_n)$$

on déduit que la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *diverge (vers l'infini).*
Pour $n \geq 2$, *on a :*

$$\begin{aligned} v_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) \\ = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \ln&\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = a_{n-1} - a_n \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= v_2 + a_2 - \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) = -\ln(2). \end{aligned}$$

Exercice 6.5 *Étudier la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *définie par la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + a^n \end{cases}$$

où a *est un scalaire donné.*

Solution 6.5 *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de même nature que la série* $\sum (u_{n+1} - u_n) = \sum a^n$. *Elle est donc convergente si, et seulement si,* $|a| < 1$. *Pour* $|a| < 1$, *on a :*

$$\begin{aligned} u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) &= u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \\ = u_0 + \frac{1-a^n}{1-a} &\underset{n\to+\infty}{\to} u_0 + \frac{1}{1-a}. \end{aligned}$$

De manière plus générale, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par une relation de récurrence du type :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

est convergente si, et seulement si, la série $\sum v_n$ est convergente.

Nous verrons plus loin comment utiliser le résultat de l'exercice 6.2 pour étudier la constante d'Euler γ déjà rencontré à l'exercice 3.58.

L'exercice suivant nous montre comment utiliser la décomposition en éléments simple des fonctions rationnelles de pôles entiers relatifs et les changements d'indices pour calculer la somme de certaines séries numériques.

Exercice 6.6 *Montrer que les séries de terme général* $u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ $(n \geq 3)$ *et* $v_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n \geq 1)$ *sont convergentes et calculer leurs sommes.*

Solution 6.6 *En utilisant la décomposition en éléments simples :*

$$f(x) = \frac{2x-1}{x(x^2-4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}$$

avec :

$$a = \lim_{x\to 0} x f(x) = \frac{1}{4},\ b = \lim_{x\to 2} (x-2) f(x) = \frac{3}{8},\ c = \lim_{x\to -2} (x+2) f(x) = -\frac{5}{8}$$

on a :

$$u_n = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n-2} - \frac{5}{n+2}\right)$$

et :

$$\begin{aligned} 8S_n &= 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + 3\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2} - 5\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k+2} \\ &= 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + 3\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} - 5\sum_{k=5}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= 2\sum_{k=3}^{4} \frac{1}{k} + 3\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=n-1}^{n} \frac{1}{k} - 5\sum_{k=n-1}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{89}{12} - \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n} - \frac{5}{n+1} - \frac{5}{n+2}. \end{aligned}$$

En conséquence :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{89}{96}.$$

De manière analogue, la décomposition en éléments simples :

$$g(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

avec :

$$a = \lim_{x\to 0} x g(x) = \frac{1}{2},\ b = \lim_{x\to -1} (x+1) g(x) = -1,\ c = \lim_{x\to -2} (x+2) g(x) = \frac{1}{2}$$

on a :

$$v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

et :

$$\begin{aligned} 2S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

En conséquence :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

Les exercices 3.24 et 3.51 nous donnent le résultat suivant sur les séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Théorème 6.1 *Soit α un réel. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. Rappelons la démonstration de ce résultat.

Pour $\alpha \leq 1$, on utilise le fait que si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$ et pour $\alpha > 1$, on montre que la suite croissante $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Pour $\alpha \leq 1$, on a $x\frac{1}{x^\alpha} = x^{1-\alpha} \geq 1$ pour $x \geq 1$ et :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

et la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ diverge.

Pour $\alpha > 1$, la fonction $t \to \frac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall k \geq 2, \quad \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha} &= 1 + \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante majorée et en conséquence convergente. ∎

Pour $\alpha = 2$, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Voir le problème 22 pour plusieurs démonstrations de ce résultat. De manière plus générale, on peut montrer que pour tout entier $p \geq 1$ on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} = (-1)^{p+1} \frac{b_{2p} (2\pi)^{2p}}{2}$$

où les b_{2p} sont les nombres de Bernoulli (voir le problème 23).

On peut aussi montrer la convergence des séries de Riemann pour $\alpha > 1$ en utilisant les séries géométriques comme suit.

Exercice 6.7 *On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.*

1. Montrer que pour tout entier $p \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{2^{p(\alpha-1)}}.$$

2. *En déduire que pour tout réel $\alpha > 1$ et tout entier $r \geq 0$, on a :*

$$S_{2^{r+1}-1} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

3. *En déduire que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 1$.*

Solution 6.7

1. *Pour k compris entre 2^p et $2^{p+1}-1$, on a $k \geq 2^p$, donc $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{2^{p\alpha}}$ pour $\alpha > 0$ et :*

$$\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \left(2^{p+1}-2^p\right)\frac{1}{2^{p\alpha}} = 2^p \frac{1}{2^{p\alpha}} = \frac{1}{2^{p(\alpha-1)}}.$$

2. *Pour tout entier $r \geq 0$, on a la partition :*

$$\begin{aligned}\left\{1,2,\cdots,2^{r+1}-1\right\} &= \{1\} \cup \{2,3\} \cup \{4,5,6,7\} \cup \cdots \cup \left\{2^r,\cdots,2^{r+1}-1\right\} \\ &= \bigcup_{p=0}^{r} \left\{2^p,\cdots,2^{p+1}-1\right\}\end{aligned}$$

et pour $\alpha > 1$, on a :

$$\begin{aligned}S_{2^{r+1}-1} = \sum_{p=0}^{r} \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{p=0}^{r}\left(\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}\right)^p &= \frac{1-\frac{1}{2^{(r+1)(\alpha-1)}}}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}} \\ &< \frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}\end{aligned}$$

3. *Pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver un entier $r \geq 0$ tel que $n \leq 2^{r+1}-1$ et on a :*

$$S_n \leq S_{2^{r+1}-1} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}$$

puisque la série considérée est à termes positives. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante majoré et en conséquence convergente.

Une condition nécessaire de convergence, élémentaire mais souvent utile pour justifier la divergence d'une série, est donnée par le résultat suivant.

Théorème 6.2 *Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration. Résulte immédiatement de $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 1$. ■

Exemple 6.1 *Pour $|a| \geq 1$, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, en conséquence la série géométrique $\sum a^n$ diverge.*

Remarque 6.1 *La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ou ceux des séries de Riemann divergentes.*

En fait, dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle décroissante, on a le résultat plus précis suivant.

Théorème 6.3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, c'est-à-dire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.*

Démonstration. Pour $n > m \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k \geq (n-m+1)\, u_n$$

soit :

$$0 \leq nu_n \leq \sum_{k=m}^{n} u_k + (m-1)\, u_n \leq \sum_{k=m}^{+\infty} u_k + mu_n.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=m}^{+\infty} u_k\right) = 0$, pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver entier $m_0 \geq 1$ tel que $\sum\limits_{k=m_0}^{+\infty} u_k \leq \varepsilon$ et on a :

$$\forall n > m_0,\ 0 \leq nu_n \leq \varepsilon + m_0 u_n.$$

Pour m_0 ainsi fixé, tenant compte de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on peut trouver un entier $n_0 > m_0$ tel que $m_0 u_n < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. On a donc $nu_n < 2\varepsilon$ pour $n \geq n_0$. Le réel ε étant quelconque, on a bien montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$. ■

Exercice 6.8 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs décroissante telle que la série $\sum u_n$ soit convergente*

1. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$ et en déduire la nature de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{1-nu_n}$.*
2. *Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\,(u_n - u_{n+1}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Solution 6.8

1. *On a déjà vu avec le théorème précédent que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$. On a alors $1 - nu_n > 0$ pour n assez grand et $\dfrac{u_n}{1-nu_n} \backsim u_n$, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum\limits_{n=n_2}^{+\infty} \dfrac{u_n}{1-nu_n}$.*
2. *On a :*

$$\sum_{k=0}^{n} k\,(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} u_k - nu_{n+1},$$

avec $nu_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}(n+1)\, u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, d'où le résultat.

On peut remarquer que les séries de Riemann sont de la forme $\sum f(n)$ où f est une fonction définie sur $[1, +\infty[$, à valeurs positives, continue et décroissante. De manière plus précise, on a le résultat suivant qui reprend celui de l'exercice 3.52.

Théorème 6.4 *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante et F la primitive de f nulle en 1. La suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n)$ pour tout $n \geq 1$ est convergente et la série $\sum f(n)$ de même nature que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. En supposant f non identiquement nulle et en notant ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n) + \ell.$$

Démonstration. La fonction F est définie par :

$$\forall x \geq 1, \ F(x) = \int_1^x f(t)\, dt.$$

Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(n+1) - (F(n+1) - F(n)) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\, dt = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t))\, dt \end{aligned}$$

avec f continue et $f(n+1) \leq f(t)$ pour tout $t \in \,]n, n+1[$. On a donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

La fonction f est continue décroissante sur $[1, +\infty[$, donc :

$$\forall k \geq 1, \ \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\, dt = f(k)$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\, dt = \int_1^{n+1} f(t)\, dt = F(n+1),$$

et $u_n \geq F(n+1) - F(n) = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\, dt \geq 0$ puisque f est à valeurs positives. La suite u est donc décroissante minorée et en conséquence convergente vers un réel $\ell \geq 0$.

Comme f est à valeurs positives, la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à valeurs positives et on a deux possibilités. Soit cette suite est majorée et elle converge alors vers un réel $\ell' \geq 0$. Il en résulte alors que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n) = \ell + \ell'$. Dans le cas contraire, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = +\infty$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n) = +\infty$.

Si f n'est pas la fonction nulle, on aura $F(n) \geq F(n_0) > 0$ pour $n \geq n_0$ avec n_0 assez grand (puisque f est continue) et :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)}{F(n) + \ell} - 1 \right| &= \frac{\left| \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n) - \ell \right|}{F(n) + \ell} \\ &\leq \frac{\left| \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n) - \ell \right|}{F(n_0) + \ell} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n) + \ell.$ ■

Remarque 6.2 *Dans le cas où* $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = +\infty$, *on a* $F(n)+\ell \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n)$ *et* $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n)$.

Nous verrons, après avoir étudié les intégrales généralisées, que le résultat précédent se traduit en disant que la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

En utilisant la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ on retrouve, en les précisant, les résultats sur les séries de Riemann.

Pour $\alpha = 1$, on a $F(x) = \ln(x)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)\right) = \gamma$ (la constante d'Euler), $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{+\infty}{\backsim} \ln(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = +\infty$, soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$.

Pour $\alpha \neq 1$, on a $F(x) = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$.

Pour $\alpha > 1$, on a $F(n) = \dfrac{1}{\alpha-1}\left(1 - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{\alpha-1}$ et donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1} + \ell$.

Pour $\alpha < 1$, on a $F(n) = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\backsim} F(n) \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

Pour $\alpha \leq 0$, la série diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Exercice 6.9 *On se propose de montrer de façon élémentaire que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.
On note, pour tout entier $n \geq 1$ *et tout réel* x :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

1. *Montrer que :*

$$f_n(x) = \frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

   pour tout $x \in [0,1]$.
2. *En déduire que, pour tout entier* $n \geq 1$, *on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

3. *En déduire le résultat annoncé.*

Solution 6.9

1. *Pour* $x \in [0,1]$, *on a* $-x \neq 1$ *et :*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

2. *En intégrant sur* $[0,1]$, *on a :*

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} \\ = \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}dx \\ = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \\ = \ln(2) - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.\end{aligned}$$

3. *Avec :*

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$, *soit* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Exercice 6.10 *En s'inspirant de la méthode utilisée à l'exercice précédent, montrer que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Solution 6.10

1. *Pour* $x \in [0,1]$, *on a :*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

2. *En intégrant sur* $[0,1]$, *on a :*

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} \\ = \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}dx \\ = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx \\ = \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx.\end{aligned}$$

3. *Avec :*

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 x^{2n+2}dx = \frac{1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$, *soit* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Pour ce qui est des opérations sur les séries numériques, on dispose des résultats suivants.

Théorème 6.5 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et λ, μ deux scalaires.*

1. *Si ces deux séries convergent, il en est alors de même de la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mu v_n$.*
2. *Si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.*
3. *Si la série $\sum u_n$ converge, il en est de même de la série $\sum \overline{u_n}$, où $\overline{u_n}$ est le complexe conjugué de u_n et $\sum \overline{u_n} = \overline{\sum u_n}$.*

Démonstration. Se déduit immédiatement des résultats relatifs aux opérations algébriques sur les suites numériques. ■

Exercice 6.11 *On se propose d'étudier les séries de termes généraux $u_n = a^n e^{in\theta}$, $s_n = a^n \sin(n\theta)$ et $c_n = a^n \cos(n\theta)$ où a et θ sont deux réels quelconques.*

1. *Montrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $|a| < 1$, les trois séries convergent et calculer la somme de chacune ces séries.*
2. *Que dire des séries $\sum c_n$ et $\sum s_n$ pour $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$?*
3. *On suppose que $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $|a| \geq 1$.*
   (a) *Montrer que la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.*
   (b) *Montrer la série $\sum s_n$ est divergente.*
   (c) *Montrer la série $\sum c_n$ est divergente.*

Solution 6.11

1. *On a $u_n = \lambda^n$ avec $\lambda = ae^{i\theta}$ et la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $|\lambda| < 1$, ce qui équivaut à $|a| < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.*
   Pour $|a| < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a ;

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \frac{1}{1 - ae^{i\theta}} = \frac{1}{1 - a\cos(\theta) - ia\sin(\theta)}$$
$$= \frac{1 - a\cos(\theta) + ia\sin(\theta)}{(1 - a\cos(\theta))^2 + a^2\sin^2(\theta)} = \frac{1 - a\cos(\theta) + ia\sin(\theta)}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

et :

$$\sum_{n\geq 0} \overline{u_n} = \frac{1 - a\cos(\theta) - ia\sin(\theta)}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

puis :

$$\sum_{n\geq 0} c_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} \overline{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} u_n + \overline{\sum_{n\geq 0} u_n}\right)$$
$$= \Re\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) = \frac{1 - a\cos((\theta))}{1 - 2a\cos((\theta)) + a^2}$$

et :

$$\sum_{n\geq 0} s_n = \Im\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right) = \frac{a\sin((\theta))}{1 - 2a\cos((\theta)) + a^2}.$$

2. *Si* $\theta = p\pi$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$, *on a* $s_n = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $a \in \mathbb{R}$, *de sorte que* $\sum\limits_{n \geq 0} s_n = 0$.
   On a aussi $c_n = a^n (-1)^{np} = ((-1)^p a)^n$ *et* $\sum c_n$ *converge si, et seulement si,* $|a| < 1$.
3. *On remarque que la condition* $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ *équivaut à* $\sin(\theta) \neq 0$.
   (a) *Supposons que* $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sin(n\theta)) = \ell$. *Avec :*
   $$\sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta) = 2\sin(n\theta)\cos(\theta),$$
   on déduit que $2\ell = 2\ell\cos(\theta)$, *ce qui impose* $\ell = 0$ *puisque* $\cos(\theta) \neq 1$ *si* $\sin(\theta) \neq 0$. *Avec :*
   $$\sin((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta),$$
   on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\cos(n\theta)\sin(\theta)) = 0$, *ce qui entraîne* $\lim\limits_{n \to +\infty} (\cos(n\theta)) = 0$ *puisque* $\sin(\theta) \neq 0$, *mais ce dernier résultat est incompatible avec* $\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta) = 1$.
   (b) *Supposons que la série* $\sum s_n$ *soit convergente. On a alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} (s_n) = 0$ *et comme* $|\sin(n\theta)| = \left|\frac{s_n}{a^n}\right| \leq |s_n|$ *pour* $|a| \geq 1$, *on en déduit que* $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sin(n\theta)) = 0$ *ce qui est faux.*
   (c) *Supposons que la série* $\sum c_n$ *soit convergente. On a alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} (c_n) = 0$ *et comme* $|\cos(n\theta)| = \left|\frac{c_n}{a^n}\right| \leq |c_n|$ *pour* $|a| \geq 1$, *on en déduit que* $\lim\limits_{n \to +\infty} (\cos(n\theta)) = 0$ *et avec :*
   $$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$$
   on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sin(n\theta)\sin(\theta)) = 0$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sin(n\theta)) = 0$ *(puisque* $\sin(\theta) \neq 0$*) ce qui est faux.*

6.3 Séries alternées

Définition 6.2 *On dit qu'une série est alternée si son terme général est de la forme* $u_n = (-1)^n \alpha_n$, *où* $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite réelle de signe constant.*

Si $\sum (-1)^n \alpha_n$ est une série alternée, on supposera, a priori, que les α_n sont positifs.
Le théorème relatif aux suites adjacentes nous permet de montrer le résultat fondamental suivant.

Théorème 6.6 *Soit* $\sum (-1)^n \alpha_n$ *est une série alternée. Si la suite* $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tend vers* 0 *en décroissant, alors la série* $\sum (-1)^n \alpha_n$ *est convergente et une majoration des restes est donnée par :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \alpha_k \right| \leq \alpha_{n+1}.$$

Démonstration. On vérifie que si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de cette série, alors les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et en conséquence convergente vers la même limite, ce qui équivaut à la convergence de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

En utilisant la décroissance de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que pour tout entier n, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} S_{2n+2} - S_{2n} = \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+1} \leq 0, \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0, \end{array}\right.$$

ce qui signifie que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. De plus avec :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \alpha_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

on déduit que ces suites sont convergentes et la convergence de la série $\sum (-1)^n \alpha_n$ en découle. En notant S la somme de cette séries, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n},$$

ce qui entraîne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{\begin{array}{l} -\alpha_{2n+1} \leq R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0, \\ 0 \leq R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leq \alpha_{2n+2} \end{array}\right.$$

ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| \leq \alpha_{n+1}.$$

■

Remarque 6.3 *Le fait que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 en décroissant implique que les α_n sont tous positifs.*

On en déduit le résultat suivant sur les séries de Riemann alternée.

Exercice 6.12 *Soit α un réel. Montrer que la série de Riemann alternée $\sum \dfrac{(-1^n)}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si $\alpha > 0$.*

Solution 6.12 *Pour $\alpha \leq 0$ la série diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0. Pour $\alpha > 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant et le théorème des séries alternées nous dit que la série $\sum \dfrac{(-1^n)}{n^\alpha}$ converge.*

Exercice 6.13 *Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{n^3 \cos(n\pi)}{(n+1)^4}$.*

Solution 6.13 *Pour $n \geq 0$, on a $u_n = (-1)^n \dfrac{n^3}{(n+1)^4} = (-1)^n \alpha_n$ avec $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ qui tend vers 0 en décroissant ($0 \leq \alpha_n \leq \dfrac{1}{n}$ et $\alpha_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^4}$ et $f'(x) = \dfrac{x^2(3-4x)}{(x+1)^5} < 0$ pour $x \geq 1$). Le théorème des séries alternées nous dit alors que $\sum u_n$ converge.*

Exercice 6.14

1. *Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx$$

tend vers 0 en décroissant.

2. *Montrer que la série de terme général :*

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx$$

est convergente et calculer sa somme.

Solution 6.14

1. *Pour $n \geq 0$, on a :*

$$0 \leq I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\cos(x)\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx = I_n,$$

donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Pour $n \geq 1$ et $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$0 \leq I_n = \int_0^{\varepsilon} \cos^n(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx \leq \varepsilon + \cos^n(\varepsilon).$$

Comme $0 < \cos^n(\varepsilon) < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos^n(\varepsilon) = 0$ et il existe un entier n_ε tel que $\cos^n(\varepsilon) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui donne $0 \leq I_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. On a donc ainsi montré que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (en fait, on peut montrer que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$).

2. *Le théorème des séries alternées nous dit que cette série converge.*
Pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cos^k(x) = \frac{1}{1+\cos(x)} + (-1)^n \frac{\cos^{n+1}(x)}{1+\cos(x)}$$

et :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos(x)} + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}(x)}{1+\cos(x)}dx,$$

avec :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}(x)}{1+\cos(x)}dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(x)\,dx = I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos(x)} = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 1$$

en effectuant le changement de variable $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

6.4 Séries absolument convergentes

Définition 6.3 *On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Le critère de Cauchy pour les suites numériques nous permet de montrer qu'une série absolument convergente est convergente. Nous verrons au paragraphe suivant que l'étude des séries à termes positifs est plus simple que celle des séries réelles de signe quelconque ou que celle des séries complexes.

Remarque 6.4 *En réalité le critère de Cauchy pour les suites numériques est équivalent au fait qu'une série absolument convergente est convergente. Précisément, on peut montrer qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet si, et seulement si, toute série normalement convergente dans $(E, \|\cdot\|)$ est convergente.*

Théorème 6.7 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Si la série $\sum |u_n|$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente et :*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Démonstration. Soit $\sum u_n$ une série numérique absolument convergente.

La suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle vérifie le critère de Cauchy et pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_0 tel que :

$$\forall m > n \geq n_0, \quad \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| < \varepsilon,$$

ce qui entraîne que :

$$\forall m > n \geq n_0, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| < \varepsilon$$

et signifie que la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et en conséquence convergente, encore équivalent à dire que la série $\sum u_n$ est convergente.

En utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout entier n :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

et faisant tendre n vers l'infini, on déduit que $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. ■

Avec l'exercice 6.20, on montre le résultat précédent sans utiliser le critère de Cauchy, en utilisant uniquement le fait qu'une suite réelle croissante majorée est convergente.

Définition 6.4 *Une série numérique convergente, mais non absolument convergente est dite semi-convergente.*

Exemple 6.2 *Pour $0 < \alpha \leq 1$, la série de Riemann alternée $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est semi convergente.*

Exemple 6.3 *Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ tel que $x = \Re(z) > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^z}$ est absolument convergente du fait que $\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^x}$ (on rappelle que $n^z = e^{z\ln(n)}$). La fonction ζ définie sur l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement supérieur à 1 par :*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

est la fonction dzéta de Riemann.

Si on effectue une permutation de l'ordre des termes d'une série semi-convergente il peut se produire les phénomènes suivant :
- la nature de cette série est inchangée, mais sa somme est modifiée ;
- la nature et la somme de cette série sont inchangées ;
- la série est transformée en série divergente.

Avec les exercices et le théorème qui suivent, on étudie ces phénomènes.

Exercice 6.15 *On s'intéresse à la série de Riemann alternée $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. On sait que cette série est semi convergente de somme $\ln(2)$ (exercice 6.9).*
On désigne par σ la permutation de $\mathbb{N}$ qui ordonne $\mathbb{N}$ comme suit :

$$\sigma(\mathbb{N}) = \{0\} \cup \{1,3\} \cup \{2\} \cup \{5,7\} \cup \{4\} \cup \cdots \cup \{2k\} \cup \{4k+1, 4k+3\} \cup \cdots$$

Une telle permutation σ peut être définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) = \begin{cases} 2k \text{ si } n = 3k \\ 4k + 2r - 1 \text{ si } n = 3k + r \text{ avec } r \in \{1, 2\} \end{cases}$$

ou encore par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) = \begin{cases} 2k \text{ si } n = 3k \\ 4k + 1 \text{ si } n = 3k + 1 \\ 4k + 3 \text{ si } n = 3k + 2 \end{cases}$$

1. *Vérifier que σ est bien permutation de $\mathbb{N}$.*
2. *En notant $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, on désigne par $\sum v_n$ la série numérique de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$.*
   On se donne un entier $n \geq 3$ et on écrit $n = 3k + r$ sa division euclidienne par 3 avec $k \geq 1$ et $0 \leq r \leq 2$.
   (a) *Écrire la somme partielle $S_n = \sum_{j=0}^{n} v_j$ sous la forme $S_n = T_k - \varepsilon_k$ où $T_k = S_{3k+2}$ et $\lim_{k\to+\infty} \varepsilon_k = 0$.*
   (b) *Pour tout entier $k \geq 1$, on note $H_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i+1}$. Montrer que :*
   $$T_k = \frac{1}{2}(H_{2k+2} - H_{k+1})$$
   (c) *En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \frac{1}{2}\ln(2)$.*

Solution 6.15

1. *C'est la division euclidienne par 3 qui permet de définir σ.*
Soient n, m deux entiers naturels et $n = 3k + r$, $m = 3k' + r'$ les divisions euclidiennes de ces entiers par 3. Si $\sigma(n) = \sigma(m)$, les restes r et r' sont soit tous les deux nuls, soit tous les deux non nuls, sinon $\sigma(n)$ et $\sigma(m)$ sont deux entiers de parités différentes. En supposant qu'ils sont tous deux nuls, l'égalité $\sigma(n) = \sigma(m)$ se traduit par $2k = 2k'$, soit par $k = k'$ et $n = m$.
En supposant qu'ils sont tous deux non nuls, l'égalité $\sigma(n) = \sigma(m)$ se traduit par $4k + 2r - 1 = 4k' + 2r' - 1$ soit par $2k + r = 2k' + r'$ avec $1 \leq r, r' \leq 2$, ce qui équivaut à $r = r'$ (argument de parité) et $k = k'$, ce qui donne $n = m$.
L'application σ est donc injective.
Si m est un entier pair, il s'écrit $m = 2k = \sigma(n)$ où $n = 3k$.
Si m est un entier impair, il s'écrit $m = 4k + 1$ ou $4k + 3$, soit $m = \sigma(n)$ où $n = 3k + 1$ ou $3k + 2$
L'application σ est donc surjective.
2. *Soit $n = 3k + r$ un entier avec $k \geq 1$ et $0 \leq r \leq 2$.*
   (a) *Pour $r = 2$, on a $S_n = T_k$ et $\varepsilon_k = 0$, pour $r = 0$ ou 1, on a :*
$$S_n = \sum_{j=0}^{3k+2} v_j - \sum_{j=3k+r+1}^{3k+2} v_j = T_k - \varepsilon_k$$
   avec $T_k = S_{3k+2}$ et :
$$|\varepsilon_k| \leq |v_{3k+1}| + |v_{3k+2}| \leq \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} \underset{k\to+\infty}{\to} 0.$$
   (b) *On a :*
$$\begin{aligned} T_k = \sum_{j=0}^{3k+2} u_{\sigma(j)} &= \sum_{i=0}^{k} u_{\sigma(3i)} + \sum_{i=0}^{k} u_{\sigma(3i+1)} + \sum_{i=0}^{k} u_{\sigma(3i+2)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} u_{2i} + \sum_{i=0}^{k} u_{4i+1} + \sum_{i=0}^{k} u_{4i+3} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{4i+2} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{4i+4} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{4i+4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{2k+1} \frac{1}{j+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+2}\right) - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i+1} \end{aligned}$$
   soit :
$$T_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{2k+1} \frac{1}{j+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{2}\left(H_{2k+2} - H_{k+1}\right)$$

(c) *On rappelle que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)=\gamma$ *(exercice 3.48), ce qui s'écrit* $H_n = \ln(n)+\delta_n$ *avec* $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n=\gamma$. *On en déduit alors que :*

$$T_k=\frac{1}{2}\left(H_{2k+2}-H_{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{2k+2}{k+1}\right)+\delta_{2k+2}-\delta_{k+1}\right)$$

et $\lim\limits_{k\to+\infty}T_k=\frac{1}{2}\ln(2)$.
Les trois suites extraites $(S_{3k+r})_{k\geq 1}$, *pour* $r=0,1,2$ *convergent alors vers la même limite, ce qui revient à dire que* $(S_n)_{n\geq 1}$ *converge vers cette limite, soit :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)+1}=\frac{1}{2}\ln(2).$$

Exercice 6.16 *On s'intéresse encore à la série de Riemann alternée* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.
On se donne deux entiers naturels non nuls p *et* q *et on désigne par* σ *la permutation de* $\mathbb{N}$ *qui ordonne* $\mathbb{N}$ *comme suit :*

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbb{N})&=\{0,2,\cdots,2(p-1)\}\cup\{1,3,\cdots,2q-1\}\\&\cup\{2p,\cdots,2(2p-1)\}\cup\{2q+1,\cdots,4q-1\}\cup\cdots\end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on place les p *premiers entiers pairs, puis les* q *premiers entiers impairs, puis les* p *entiers pairs suivants,* q *entiers impairs suivants, et ainsi de suite. En effectuant la division euclidienne par* $p+q$ *tout entier* n *s'écrit de manière unique* $n=(p+q)k+r$ *avec* $k\in\mathbb{N}$ *et* $0\leq r\leq p+q-1$ *et une telle permutation* σ *peut être définie par :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sigma(n)=\begin{cases}2(pk+r) & si\ 0\leq r\leq p-1\\ 2(qk+r-p)+1 & si\ p\leq r\leq p+q-1\end{cases}$$

1. *Montrer que* σ *est bien permutation de* $\mathbb{N}$.
2. *En notant* $u_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$, *on désigne par* $\sum v_n$ *la série numérique de terme général* $v_n=u_{\sigma(n)}$.
   On se donne un entier $n\geq p+q$ *et on écrit* $n=(p+q)k+r$ *sa division euclidienne par* $p+q$ *avec* $k\geq 1$ *et* $0\leq r\leq p+q-1$.
   (a) *Écrire la somme partielle* $S_n=\sum\limits_{j=0}^{n}v_j$ *sous la forme* $S_n=T_k-\varepsilon_k$ *où* $T_k=S_{(p+q)k+p+q-1}$ *et* $\lim\limits_{k\to+\infty}\varepsilon_k=0$.
   (b) *Pour tout entier* $k\geq 1$, *on note* $H_k=\sum\limits_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i+1}$. *Montrer que :*
   $$T_k=T_k=H_{2p(k+1)}-\frac{1}{2}\left(H_{p(k+1)}+H_{q(k+1)}\right).$$
   (c) *En déduire que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_{\sigma(n)}=\ln(2)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.

Solution 6.16

1. *Soient n, m deux entiers naturels et $n = (p+q)\,k + r$, $m = (p+q)\,k' + r'$ les divisions euclidiennes de ces entiers par $p+q$. Si $\sigma(n) = \sigma(m)$, les restes r et r' sont tous deux dans $\{0, 1, \cdots, p-1\}$ ou $\{p, \cdots, p+q-1\}$, sinon $\sigma(n)$ et $\sigma(m)$ sont deux entiers de parités différente. En supposant qu'ils sont tous deux dans $\{0, 1, \cdots, p-1\}$ [resp. dans $\{p, \cdots, p+q-1\}$] l'égalité $\sigma(n) = \sigma(m)$ se traduit par $2\,(pk+r) = 2\,(pk'+r')$ [resp. par $2\,(qk+r-p)+1 = 2\,(qk'+r'-p)+1$] soit par $pk+r = pk'+r'$ [resp. par $qk+r-p = qk'+r'-p$] avec $0 \leq r, r' \leq p-1$ [resp. $0 \leq r-p, r'-p \leq q-1$] ce qui équivaut à $k = k'$ et $r = r'$ du fait de l'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne par p [resp. par q]. On a donc $n = m$ et σ est injective.*
   Si m est un entier pair, il s'écrit $m = 2s = 2\,(pk+r)$ avec $0 \leq r \leq p-1$ en effectuant la division euclidienne de s par p, soit $m = \sigma(n)$ où $n = (p+q)\,k + r$.
   Si m est un entier impair, il s'écrit $m = 2s+1 = 2\,(qk+r')+1$ avec $0 \leq r' \leq q-1$ en effectuant la division euclidienne de s par q, soit $m = \sigma(n)$ où $n = (p+q)\,k + p + r'$.
   L'application σ est donc surjective.
2. *Soit $n = (p+q)\,k + r$ un entier avec $k \geq 1$ et $0 \leq r \leq p+q-1$ (division euclidienne).*
   (a) *Pour $r = p+q-1$, on a $S_n = T_k$ et $\varepsilon_k = 0$, pour $0 \leq r \leq p+q-2$, on a :*
   $$S_n = \sum_{j=0}^{(p+q)k+p+q-1} v_j - \sum_{j=(p+q)k+r+1}^{(p+q)k+p+q-1} v_j = T_k - \varepsilon_k$$
   avec $T_k = S_{(p+q)k+p+q-1}$ et :
   $$\begin{aligned} |\varepsilon_k| &\leq \left|v_{(p+q)k+1}\right| + \cdots + \left|v_{(p+q)k+p+q-1}\right| \\ &\leq (p+q-1)\,\frac{1}{k} \underset{k\to+\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$
   (b) *On a :*
   $$\begin{aligned} T_k &= \sum_{j=0}^{(p+q)k+p+q-1} u_{\sigma(j)} = \sum_{r=0}^{p+q-1} \sum_{i=0}^{k} u_{\sigma((p+q)i+r)} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} u_{2(pi+r)} + \sum_{r=p}^{p+q-1} \sum_{i=0}^{k} u_{2(qi+r-p)+1} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2\,(pi+r)+1} - \sum_{r=p}^{p+q-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2\,(qi+r-p)+2} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2\,(pi+r)+1} - \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{qi+s+1} \end{aligned}$$
   En utilisant la division euclidienne par q, on a :
   $$\{qi+s+1 \mid 0 \leq i \leq k \text{ et } 0 \leq s \leq q-1\} = \{1, 2, \cdots, qk+q\}$$
   et :
   $$\sum_{s=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{qi+s+1} = \sum_{j=1}^{q(k+1)} \frac{1}{j} = H_{q(k+1)}$$

En remarquant que les entiers de la forme $2(pi+r)+1$ *où* $0 \leq i \leq k$ *et* $0 \leq s \leq p-1$ *sont les entiers impairs compris entre* 1 *et* $2pk+2p-1$ *(division euclidienne par* $2p$*), on a :*

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2(pi+r)+1} &= \sum_{s=0}^{2p-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2pi+s+1} - \sum_{r=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2pi+2r+2}\\ &= \sum_{s=0}^{2p-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2pi+s+1} - \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{pi+r+1}\\ &= \sum_{j=1}^{2p(k+1)}\frac{1}{j} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p(k+1)}\frac{1}{j} = H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}H_{p(k+1)}\end{aligned}$$

On a donc :

$$T_k = H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}\left(H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)}\right).$$

(c) *On utilisant* $H_n = \ln(n) + \delta_n$ *avec* $\lim_{n\to+\infty}\delta_n = \gamma$*, on a :*

$$\begin{aligned}T_k &= H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}\left(H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)}\right)\\ &= \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right) + \delta_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}\left(\delta_{p(k+1)} + \delta_{q(k+1)}\right)\end{aligned}$$

et $\lim_{k\to+\infty} T_k = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.

Toutes les suites extraites $\left(S_{(p+q)k+r}\right)_{k\geq 1}$*, pour* $0 \leq r \leq p+q-1$ *convergent alors vers la même limite, ce qui revient à dire que* $(S_n)_{n\geq 1}$ *converge vers cette limite, soit :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)+1} = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

Exercice 6.17 *Soit* σ *une permutation de* $\mathbb{N}$ *telle que la suite* $(\sigma(n)-n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit bornée. Montrer que pour toute série convergente* $\sum u_n$*, la série* $\sum u_{\sigma(n)}$ *est convergente et* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Solution 6.17 *Si la suite* $(\sigma(n)-n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, il existe un entier* N *tel que* $|\sigma(n)-n| \leq N$*, ou encore* $n-N \leq \sigma(n) \leq n+N$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
Comme σ *est bijective, pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $0 \leq k \leq n$ *il existe un entier* j *tel que* $k = \sigma(j)$ *et avec* $j-N \leq \sigma(j) = k \leq j+N$*, on déduit que cet entier* j *est compris entre* 0 *et* $k+N$*. Il en résulte que la somme partielle* $\sum_{k=0}^{n} u_k$ *est une partie de la somme* $\sum_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)}$ *et :*

$$\sum_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{\substack{j=0\\ \sigma(j)\geq n+1}}^{n+N} u_{\sigma(j)}$$

De plus avec $\sigma(j) \leq j+N \leq n+2N$*, on déduit que :*

$$\{\sigma(j) \mid 0 \leq j \leq n+N \text{ et } \sigma(j) \geq n+1\} \subset \{n+1, \cdots, n+2N\}$$

et :

$$\left|\sum_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{\substack{j=0 \\ \sigma(j)\geq n+1}}^{n+N} \left|u_{\sigma(j)}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+2N} |u_k| = \varepsilon_n$$

Comme chacune des suites $(|u_{n+r}|)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour* r *compris entre* 1 *et* $2N$ *tend vers* 0, *la suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend aussi vers* 0 *(somme finie de suites qui tendent vers* 0*). Il en résulte que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, *ce qui signifie que la série* $\sum u_{\sigma(n)}$ *est convergente avec* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Théorème 6.8 *Soit* $\sum u_n$ *une série semi-convergente. Pour tout réel* S, *il existe une permutation* σ *de* $\mathbb{N}$ *telle que la série* $\sum u_{\sigma(n)}$ *soit convergente de somme* S.
On peut aussi trouver des permutation σ *et* σ' *de* $\mathbb{N}$ *telles que la série* $\sum u_{\sigma(n)}$ *soit divergente vers* $-\infty$ *et la série* $\sum u_{\sigma(n)}$ *soit divergente vers* $+\infty$.

Démonstration. Voir [7] pages 72 à 75 ou [19] volume 3, pages 37 à 43.
La démonstration rigoureuse de ce théorème est délicate. ■

6.5 Séries à termes positifs

Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et à valeurs positives, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles associées est croissante (on a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$) et deux cas de figure peuvent se produire :

- soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et en conséquence elle converge ;
- soit cette suite n'est pas majorée et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, ce qui peut se noter $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

On a donc le résultat suivant.

Théorème 6.9 *Une série à termes positifs* $\sum u_n$ *est convergente si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée. En cas de divergence, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Dans le cas des séries à termes positifs, on écrira $\sum u_n < +\infty$ pour signifier que cette dernière converge. Cette notation étant justifiée par les considérations précédentes.

Du résultat précédent on déduit les critères de comparaisons suivants valables uniquement pour les séries à termes réels positifs.

Théorème 6.10 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes réels positifs.*

1. *S'il existe un entier* n_0 *tel que :*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n$$

alors :

$$\begin{cases} \sum v_n < +\infty \Rightarrow \sum u_n < +\infty \\ \sum u_n = +\infty \Rightarrow \sum v_n = +\infty \end{cases}$$

2. *S'il existe un entier* n_0 *et des constantes* m *et* M *strictement positives tels que :*

$$\forall n \geq n_0,\ v_n > 0 \text{ et } m \leq \frac{u_n}{v_n} \leq M$$

alors les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

3. *S'il existe un entier n_0 tel que :*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n > 0,\ v_n > 0 \ \textit{et}\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

alors :

$$\begin{cases} \sum v_n < +\infty \Rightarrow \sum u_n < +\infty \\ \sum u_n = +\infty \Rightarrow \sum v_n = +\infty \end{cases}$$

4. *S'il existe un entier n_0 et une constante $\lambda \in]0,1[$ tels que :*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n > 0 \ \textit{et}\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$$

alors $\sum u_n$ converge.

5. *S'il existe un entier n_0 et une constante $\lambda \geq 1$ tels que :*

$$\forall n \geq n_0,\ u_n > 0 \ \textit{et}\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \lambda$$

alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration.

1. En notant respectivement $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on a :
$$\forall n \geq n_0,\ S_n - S_{n_0} \leq T_n - T_{n_0}.$$
Le résultat annoncé en découle alors immédiatement.
2. De $0 < u_n \leq M v_n$ on déduit que si $\sum v_n$ converge il en est alors de même de $\sum u_n$ et de $u_n \geq m v_n > 0$, on déduit que si $\sum v_n$ diverge il en est alors de même de $\sum u_n$.
3. On a :
$$u_{n_0+1} \leq u_{n_0} \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} = \lambda v_{n_0+1}$$
et par récurrence :
$$\forall n \geq n_0 + 1,\ u_n \leq \lambda v_n.$$
En effet, c'est vrai pour $n_0 + 1$ et en supposant le résultat acquis au rang n :
$$u_{n+1} \leq u_n \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \lambda v_{n+1}.$$
On est donc ramené au premier cas.
4. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour $n \geq n_0$ avec $v_n = \lambda^n$ et $\sum v_n$ puisque $\lambda \in]0,1[$, donc $\sum u_n$ converge aussi.
5. On peut là aussi utiliser $v_n = \lambda^n$ ou tout simplement remarque la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, donc $u_n \geq u_{n_0} > 0$ pour tout $n \geq n_0$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne peut tendre vers 0, la série $\sum u_n$ est donc divergente.

■

Remarque 6.5 *Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\sum v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$. Plus généralement, on a pour les restes $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq R'_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.*

Exercice 6.18 *Montrer que la série* $\sum \ln \left(1+\frac{1}{n}\right)$ *est divergente. En déduire la divergence de la série harmonique.*

Solution 6.18 *Pour* $n \geq 1$, *on a :*

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln (k+1) - \ln (k)\right) \\ &= \ln (n+1) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty \end{aligned}$$

donc $\sum \ln \left(1+\frac{1}{n}\right)$ *diverge.*
Avec les inégalités valables pour $n \geq 1$ *:*

$$\frac{1}{n} \geq \ln \left(1+\frac{1}{n}\right) > 0,$$

on en déduit la divergence de $\sum \frac{1}{n}$.

Exercice 6.19 *Montrer que si les séries à termes positifs* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont convergentes, il en est alors de même des séries* $\sum \sqrt{u_n v_n}$ *et* $\sum \frac{1}{n}\sqrt{v_n}$.

Solution 6.19 *Résulte de :*

$$\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}\left(u_n + v_n\right)$$

et $\sum \frac{1}{n}\sqrt{v_n} = \sum \sqrt{\frac{1}{n^2} v_n}$ *avec* $\sum \frac{1}{n^2}$ *convergente.*

Le théorème précédent permet de retrouver le fait qu'une série absolument convergente est convergente sans recours au critère de Cauchy.

Exercice 6.20 *Montrer, sans utiliser le critère de Cauchy, qu'une série absolument convergente est convergente.*

Solution 6.20 *On considère tout d'abord le cas d'une série réelle* $\sum u_n$ *absolument convergente. Pour tout entier n, on a* $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$, *soit* $0 \leq v_n = u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$. *On déduit alors du théorème précédent que la série* $\sum v_n$ *est convergente et avec* $u_n = v_n - |u_n|$, *on en déduit que* $\sum u_n$ *est convergente.*
Dans le cas d'une série complexe $\sum u_n$ *absolument convergente, on écrit que* $u_n = x_n + iy_n$, *où* $x_n = \Re(u_n)$ *et* $y_n = \Im(u_n)$ *et avec* $|x_n| \leq |u_n|$, $|y_n| \leq |u_n|$, *on déduit que les séries réelles* $\sum x_n$ *et* $\sum y_n$ *sont absolument convergentes, donc convergentes et la convergence de* $\sum u_n$ *suit.*

De ce corollaire, on déduit les critères de comparaison aux séries de Riemann suivant.

Corollaire 6.1 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes réels positifs.*

1. *S'il existe un réel* $\alpha > 1$ *tel que la suite* $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit bornée (encore équivalent à dire que* $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$*), alors la série* $\sum u_n$ *converge.*
2. *S'il existe un réel* $\alpha \leq 1$ *tel que la suite* $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^\alpha u_n) = +\infty$, *alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Démonstration. Dans le premier cas, on a $0 \leq u_n \leq \dfrac{M}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ et dans le second $u_n \geq \dfrac{1}{n^\alpha}$ à partir d'un certain rang avec $\alpha \leq 1$. ■

Remarque 6.6 *Si on veut comparer la série à termes positifs à une série de Riemann, on étudie en pratique la convergence de la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel positif ou vers l'infini.*

Exercice 6.21 *Montrer que pour tout réel θ et tout réel $\alpha > 1$, la série $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ est absolument convergente.*

Solution 6.21 *Résulte de $\left|\dfrac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}\right| \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$.*

Exercice 6.22 *Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2\cos(n^2)}{(n+1)^4}$.*

Solution 6.22 *On a :*

$$\forall n \geq 1,\ |u_n| \leq \frac{1}{n^2},$$

donc la série converge absolument.

Exercice 6.23

1. *Montrer que $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n-1)} = 1$.*
2. *En comparant $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n(n-1)}$, en déduire la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ avec $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} \leq 2$.*

Solution 6.23

1. *Pour $n \geq 2$, on a :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1,\end{aligned}$$

   ce qui signifie que $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n-1)} = 1$.

2. *Avec $0 < \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$ pour tout $n \geq 2$, on déduit la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} \leq 2$.*

Exercice 6.24 *On étudie à nouveau les séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.*

1. *Montrer que $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge pour $\alpha \leq 0$.*
2. *Montrer que $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.*

3. *En déduire que la série* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *diverge pour* $0 < \alpha \leq 1$.
4. *On suppose que* $\alpha > 1$.
   (a) *Montrer que* $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) = 1$.
   (b) *Montrer que pour tout réel* $\beta > 0$ *et tout réel* $t \in]0,1[$, *on a :*
   $$(1-t)^\beta \leq \frac{1}{1+\beta t}.$$
   (c) *Montrer que pour tout entier* $n \geq 2$, *on a :*
   $$\frac{\alpha-1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$
   (d) *Conclure.*

Solution 6.24

1. *Pour* $\alpha \leq 0$, *le terme général de la série* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *ne tend pas vers* 0, *donc la série diverge.*
2. *En désignant par* S_n *la somme partielle d'indice* n *de la série* $\sum \frac{1}{n}$, *on a pour tout* $n \geq 1$ *:*
   $$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
   donc la suite $(S_{2n} - S_n)_{n \geq 1}$ *ne tend pas vers* 0 *et la série diverge.*
3. *Pour* $0 < \alpha \leq 1$ *et* $n \geq 1$, *on a* $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ *et en conséquence* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *diverge.*
4.
   (a) *Pour* $n \geq 2$, *on a :*
   $$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha-1}} = 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1, \end{aligned}$$
   ce qui signifie que $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) = 1$.
   (b) *On désigne par* f *la fonction définie sur* $]0,1[$ *par* $f(t) = (1+\beta t)(1-t)^\beta$. *Cette fonction est dérivable sur* $[0,1]$ *avec :*
   $$\begin{aligned} f'(t) &= \beta (1-t)^{\beta-1} ((1-t) - (1+\beta t)) \\ &= -\beta (1-t)^{\beta-1} (t+\beta t) < 0 \end{aligned}$$
   Elle est donc décroissante et $f(t) \leq f(0) = 1$, *ce qui donne l'inégalité souhaitée.*

(c) *Prenant* $\beta = \alpha - 1$ *et* $t = \dfrac{1}{n}$ *dans l'inégalité précédente, on a :*

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} \leq \frac{1}{1 + \dfrac{\alpha - 1}{n}}$$

ou encore :

$$1 + \frac{\alpha - 1}{n} \leq \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha-1}} = \frac{n^{\alpha-1}}{(n-1)^{\alpha-1}}$$

encore équivalent à :

$$\frac{\alpha - 1}{n} \leq \frac{n^{\alpha-1}}{(n-1)^{\alpha-1}} - 1 = n^{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

qui donne l'inégalité souhaitée.

(d) *On a donc*

$$0 < \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

avec $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) < +\infty$*, ce qui entraîne la convergence de* $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha}}$.

L'étude des séries de Bertrand $\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$, décrites avec l'exercice qui suit, peut se faire en utilisant celles de Riemann pour $\alpha \neq 1$. Dans le cas où $\alpha = 1$, on utilise le théorème 6.4 pour $\beta \geq 0$ et on compare encore à une série de Riemann pour $\beta < 0$.

Exercice 6.25 *On s'intéresse à la série de Bertrand de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$*, où* α *et* β *sont deux réels donnés.*

1. *Montrer que cette série converge pour* $\alpha > 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$.
2. *Montrer que cette série diverge pour* $\alpha < 1$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$.
3. *On suppose que* $\alpha = 1$. *Montrer que* $\sum u_n$ *converge si, et seulement si,* $\beta > 1$.

Solution 6.25

1. *Si* $\alpha > 1$, *on peut trouver un réel* γ *tel que* $1 < \gamma < \alpha$ *et avec :*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\gamma}u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln(n))^{\beta}} = 0$$

pour tout réel β, *on déduit que* $\sum u_n$ *converge puisque* $\gamma > 1$.

2. *Si* $\alpha < 1$, *on peut trouver un réel* γ *tel que* $\alpha < \gamma < 1$ *et avec :*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\gamma}u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln(n))^{\beta}} = +\infty$$

pour tout réel β, *on déduit que* $\sum u_n$ *diverge puisque* $\gamma < 1$.

3. *Pour* $\beta \geq 0$, *la fonction* f *définie sur*$[2, +\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^{\beta}}$ *est continue et strictement décroissante (produit de deux fonctions strictement décroissantes à valeurs strictement positives), donc* $\sum u_n$ *est de même nature que la suite* $(F(n))_{n\geq 2}$, *où* F *est la primitive de* f *nulle en* 2, *soit :*

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t(\ln(t))^{\beta}} = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{du}{u^{\beta}}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\beta}\left((\ln(x))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta}\right) & si\ \beta \neq 1 \\ \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) & si\ \beta = 1 \end{cases}$$

(théorème 6.4).
Pour $0 \leq \beta \leq 1$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} F(n) = +\infty$ *et* $\sum u_n$ *diverge.*
Pour $\beta > 1$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} F(n) = \dfrac{(\ln(2))^{1-\beta}}{\beta - 1}$ *et* $\sum u_n$ *converge.*
Pour $\beta < 0$, *on a* $u_n = \dfrac{(\ln(n))^{-\beta}}{n} \geq \dfrac{(\ln(2))^{-\beta}}{n} > 0$ *pour tout* $n \geq 2$ *et* $\sum u_n$ *diverge.*

Exercice 6.26 *Étudier la série* $\sum (-1)^n \dfrac{\arctan(n)}{\sqrt{n}(\ln(n))^{\beta}}$, *où* β *est un réel positif ou nul.*

Solution 6.26 *En utilisant la relation* $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ *valable pour tout réel* $x > 0$, *on a :*

$$u_n = (-1)^n \frac{\arctan(n)}{\sqrt{n}(\ln(n))^{\beta}} = \frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\ln(n))^{\beta}} + (-1)^n \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}(\ln(n))^{\beta}}.$$

Le théorème des séries alternées nous assure la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\ln(n))^{\beta}}$ *(la suite* $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}(\ln(n))^{\beta}}\right)_{n\geq 2}$ *tend vers* 0 *en décroissant pour* $\beta \geq 0$*) et avec :*

$$\left|(-1)^n \frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}(\ln(n))^{\beta}}\right| \backsim \frac{1}{n\sqrt{n}(\ln(n))^{\beta}}$$

on déduit que la série $\sum (-1)^n \dfrac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$ *est absolument convergente, donc convergente. Il en résulte que* $\sum (-1)^n \dfrac{\arctan(n)}{\sqrt{n}(\ln(n))^{\beta}}$ *est convergente comme somme de deux séries convergentes.*
Mais la série $\sum |u_n| = \sum \dfrac{\arctan(n)}{\sqrt{n}(\ln(n))^{\beta}}$ *est divergente, donc* $\sum u_n$ *est semi-convergente.*

Exercice 6.27 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *des séries à termes positifs telles que* $v_n = o(u_n)$ *[resp.* $v_n = O(u_n)$*] On désigne respectivement par* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites des sommes partielles de ces séries et, en cas de convergence, par* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(R'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites des restes correspondants.*

1. *Montrer que si* $\sum u_n$ *converge, il en est alors de même de* $\sum v_n$ *et* $R'_n = o(R_n)$ *[resp.* $R'_n = O(R_n)$*].*
2. *Montrer que si* $\sum v_n$ *diverge, il en est alors de même de* $\sum u_n$ *et* $T_n = o(S_n)$ *[resp.* $T_n = O(S_n)$*].*

Solution 6.27 *La condition* $v_n = o(u_n)$ *[resp.* $v_n = O(u_n)$*] signifie qu'il existe une suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui tend vers* 0 *[resp. bornée] telle que* $v_n = \varepsilon_n u_n$*. Comme les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont à valeurs positives, on peut trouver une telle suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs positives. Dans les deux cas de figure, la suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et il existe un constante réelle* $\lambda > 0$ *telle que* $v_n \leq \lambda u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Le corollaire précédent nous dit alors que* $\sum v_n$ *converge si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum u_n$ *diverge si* $\sum v_n$ *diverge.*

1. *Si les* u_n *sont tous nuls à partir d'un rang* n_0*, il en est alors de même des* v_n *et* $R'_n = R_n = 0$ *pour tout* $n \geq n_0$*. Dans ce cas, on a bien* $R'_n = o(R_n)$ *[resp.* $R'_n = O(R_n)$*].*
   Dans le cas contraire, les suites $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(R'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont à valeurs strictement positives. Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$*, pour tout réel* $\varepsilon > 0$*, on peut trouver un entier* n_ε *tel que* $0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$ *pour tout* $n \geq n_\varepsilon$ *et :*
   $$\forall n \geq n_\varepsilon,\ 0 < R'_n \leq \varepsilon R_n.$$
   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{R'_n}{R_n} = 0$*, ce qui signifie que* $R'_n = o(R_n)$*.*
   Dans le as où $v_n = O(u_n)$*, la suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, soit* $\varepsilon_n \leq \lambda$ *où* $\lambda > 0$ *et* $0 < R'_n \leq \lambda R_n$ *pour tout* n*. La suite* $\left(\dfrac{R'_n}{R_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc bornée, ce qui signifie que* $R'_n = O(R_n)$*.*
2. *Si* $\sum v_n = +\infty$*, on a alors* $\sum u_n = +\infty$ *et les suites* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont croissantes non majorées, donc strictement positives à partir d'un certain rang.*
   Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$*, pour tout réel* $\varepsilon > 0$*, on peut trouver un entier* n_ε *tel que* $0 < \varepsilon_n \leq \varepsilon$ *pour tout* $n \geq n_\varepsilon$ *et comme* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante non majorée, il existe un entier* $n_1 \geq n_\varepsilon$ *tel que* $S_n \geq \dfrac{1}{\varepsilon}\sum\limits_{k=0}^{n_\varepsilon} v_k$*, de sorte que :*
   $$\forall n \geq n_1,\ T_n = \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} v_k + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} v_k \leq \varepsilon S_n + \varepsilon \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} u_k \leq 2\varepsilon S_n.$$
   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T_n}{S_n} = 0$*, ce qui signifie que* $T_n = o(S_n)$*.*
   Dans le as où $v_n = O(u_n)$*, la suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, soit* $\varepsilon_n \leq \lambda$ *où* $\lambda > 0$ *et* $0 < T_n \leq \lambda S_n$ *pour tout* n*. La suite* $\left(\dfrac{T_n}{S_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc bornée, ce qui signifie que* $T_n = O(S_n)$*.*

Les résultats de l'exercice précédent peuvent être utilisés en relation avec des développements limités.

Exercice 6.28 *Étudier la série de terme général* $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$*.*

Solution 6.28 *Un développement limité à l'ordre 2 donne :*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{3(n+1)^{3/2}} + v_n,$$

où $v_n = o\left(\dfrac{1}{(n+1)^{3/2}}\right)$, *ce qui entraîne* $\sum\limits_0^{+\infty} u_n = -\infty$ *du fait de la convergence des séries* $\sum\limits_0^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $\sum\limits_0^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{3/2}}$ *(séries alternées, la deuxième étant en fait absolument convergente),* $\sum\limits_0^{+\infty} v_n$ *(*$v_n = o\left(\dfrac{1}{(n+1)^{3/2}}\right)$*) et de* $\sum\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{2(n+1)} = +\infty$.

Exercice 6.29 *Étudier la série de terme général* $u_n = \left(\cos\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)\right)^{n^\alpha}$ *où* α, β *sont des réels avec* $\beta > 0$.

Solution 6.29 *Un développement limité nous donne :*

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= n^\alpha \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)\\ &= n^\alpha \ln\left(1 - \frac{1}{2n^{2\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2\beta}}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{2n^{2\beta-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\beta-\gamma}}\right).\end{aligned}$$

Pour $\alpha < 2\beta$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$, *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ *et la série diverge.*
Pour $\alpha = 2\beta$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\dfrac{1}{2}$, *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ *et la série diverge.*
On suppose donc que $\alpha > 2\beta$. *Pour* γ *réel à préciser, on a :*

$$\begin{aligned}\ln(n^\gamma u_n) &= \gamma \ln(n) - \frac{1}{2n^{2\beta-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\beta-\alpha}}\right)\\ &= -\frac{n^{\alpha-2\beta}}{2}\left(1 - 2\gamma\frac{\ln(n)}{n^{\alpha-2\beta}} + o(1)\right)\\ &\backsim -\frac{n^{\alpha-2\beta}}{2} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} -\infty\end{aligned}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^\gamma u_n) = 0$. *Choisissant* $\gamma = 2$, *on en déduit que la série* $\sum u_n$ *converge.*

Le théorème qui suit est très utile pour justifier la convergence de certaines séries positives.

Théorème 6.11 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes réels positifs telles que* $u_n \backsim v_n$.

1. *Si* $\sum u_n$ *est convergente il en est alors de même de* $\sum v_n$ *et les restes de ces séries sont équivalents, soit :*
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \backsim R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$
2. *Si* $\sum u_n$ *est divergente il en est alors de même de* $\sum v_n$ *et les sommes partielles de ces séries sont équivalents, soit :*
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \backsim T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Démonstration. Dire que les suites à termes positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes signifie qu'il existe une suite $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 1 telle que $v_n = \varphi_n u_n$, ce qui équivaut encore à dire que pour tout réel $\varepsilon \in \left]0,1\right[$ il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ (1-\varepsilon)\, u_n \leq v_n \leq (1+\varepsilon)\, u_n.$$

Dans ce qui suit on se donne un tel couple (ε, n_0).

1. Si la série de terme général u_n est convergente, des inégalités $0 \leq v_n \leq (1+\varepsilon)\, u_n$ pour tout $n \geq n_0$, on déduit qu'il en est de même de la série de terme général v_n. On peut donc définir les restes d'ordre n de ces séries, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ et on a :

$$\forall n \geq n_0,\ (1-\varepsilon)\, R_n \leq R'_n \leq (1+\varepsilon)\, R_n,$$

ce qui traduit l'équivalence de R_n et R'_n quand n tend vers l'infini.

2. Si la série de terme général u_n est divergente, des inégalités $v_n \geq (1-\varepsilon)\, u_n$ pour tout $n \geq n_0$ avec $1-\varepsilon > 0$ et $u_n \geq 0$, on déduit qu'il en est de même de la série de terme général v_n. De plus, on a $S_n > 0$ à partir d'un certain rang $n_1 > n_0$ et :

$$\forall n > n_1,\ (1-\varepsilon)\,(S_n - S_{n_0-1}) \leq T_n - T_{n_0-1} \leq (1+\varepsilon)\,(S_n - S_{n_0-1})$$

ce qui entraîne que, pour tout $n > n_1$, on a :

$$(1-\varepsilon)\left(1 - \frac{S_{n_0-1}}{S_n}\right) + \frac{T_{n_0-1}}{S_n} \leq \frac{T_n}{S_n} \leq (1+\varepsilon)\left(1 - \frac{S_{n_0-1}}{S_n}\right) + \frac{T_{n_0-1}}{S_n}.$$

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{S_n} = 0$, on en déduit alors qu'il existe $n_2 \geq n_1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ 1 - 2\varepsilon \leq \frac{T_n}{S_n} \leq 1 + 2\varepsilon,$$

ce qui traduit l'équivalence de S_n et T_n quand n tend vers l'infini.

■

Remarque 6.7 *L'hypothèse u_n et v_n de mêmes signes (au moins à partir d'un certain rang) est essentielle dans le théorème précédent. Considérons par exemple la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. Un développement limité nous donne :*

$$\begin{aligned} u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + v_n \end{aligned}$$

avec $|v_n| \leq \lambda \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, ce qui implique que la série de terme général u_n est divergente comme somme d'une série divergente (la série $\sum \dfrac{1}{n}$) avec des séries convergentes (les séries $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum v_n$). Et pourtant u_n est équivalent $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série alternée convergente.

Remarque 6.8 *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs telles que $u_n \backsim v_n$ et convergentes, on a seulement l'équivalence des restes, mais pas celle des sommes partielles. Par exemple $\dfrac{1}{n(n+1)} \backsim \dfrac{1}{n^2}$ avec :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \backsim 1$$

et :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > 1 + \frac{1}{4}$$

ne peut être équivalent à 1 (en fait $T_n \backsim \dfrac{\pi^2}{6}$).

Exercice 6.30 *Montrer que, pour $n \geq 2$, on a $\dfrac{n!}{n^n} \leq \dfrac{2}{n^2}$, en déduire la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n! + n^3}{n^n + \ln(n)}$.*

Solution 6.30 *Pour $n \geq 2$, on a :*

$$\frac{n!}{n^n} n^2 = \frac{n!}{n^{n-2}} = 2 \prod_{k=3}^{n} \frac{k}{n} \leq 2$$

donc $0 < \dfrac{n!}{n^n} \leq \dfrac{2}{n^2}$ et $\sum \dfrac{n!}{n^n} < +\infty$.
Avec

$$0 < u_n = \frac{n! + n^3}{n^n + \ln(n)} = \frac{n!}{n^n} \left(\frac{1 + \dfrac{n^3}{n!}}{1 + \dfrac{\ln(n)}{n^n}} \right) \sim \frac{n!}{n^n},$$

on déduit que $\sum u_n$ converge.

Exercice 6.31 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs ou nuls telle que la série réelle $\sum u_n$ soit convergente.*

1. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$ et en déduire la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{1 - nu_n}$.*
2. *Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Solution 6.31 *1. En notant, pour tout entier $n \geq 1$, S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$, on a :*

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq nu_{2n} \geq 0$$

puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive. On a donc :

$$0 \leq 2n \cdot u_{2n} \leq \frac{1}{2}(S_{2n} - S_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

puisque $\sum u_n$ *est convergente et* $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$. *Puis avec :*

$$0 \leq (2n+1)\, u_{2n+1} \leq 2nu_{2n} + u_{2n}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, *on déduit que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\, u_{2n+1} = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$, *il existe un entier* n_2 *tel que* $0 \leq nu_n < 1$ *pour tout* $n \geq n_2$, *ce qui permet de considérer la série* $\sum \dfrac{u_n}{1-nu_n}$.
La condition $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$ *nous dit aussi que* $\dfrac{u_n}{1-nu_n} \backsim u_n$, *ce qui implique, puisque les séries considérées sont à termes positifs, que* $\sum\limits_{n=n_2}^{+\infty} \dfrac{u_n}{1-nu_n} < +\infty$.

2. *On a :*

$$\sum_{k=0}^{n} k\,(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} u_k - nu_{n+1},$$

avec $nu_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\,(n+1)\, u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, *d'où le résultat.*

Les précisions sur les sommes partielles des séries divergentes ou les restes des séries convergentes dans le théorème précédent peuvent être utilisées pour obtenir des développements asymptotiques de certaines suites.

Considérons par exemple le cas de la série harmonique $(H_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Cette série est divergente et à termes positifs avec $\dfrac{1}{n} \backsim \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, ce qui entraîne que :

$$H_n \backsim \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) = \ln(n+1),$$

ou encore $H_n \backsim \ln(n)$.

La suite $(K_n)_{n\geq 1}$ définie par $K_n = H_n - \ln(n)$ est de même nature que la série de terme général :

$$K_{n+1} - K_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

elle est donc convergente. Sa limite est la constante d'Euler :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right).$$

On considère ensuite la suite $(L_n)_{n\geq 1}$ définie par $L_n = H_n - \ln(n) - \gamma$. Cette suite est convergente vers 0 de même nature que la série de terme général :

$$L_{n+1} - L_n = K_{n+1} - K_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \backsim -\frac{1}{2n^2}.$$

Cette série est donc convergente à termes négatifs à partir d'un certain rang, ce qui entraîne l'équivalence des restes :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(L_{k+1}-L_k)\backsim -\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

avec :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(L_{k+1}-L_k)=\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n}^{m}(L_{k+1}-L_k)=\lim_{m\to+\infty}L_{m+1}-L_n=-L_n.$$

On a donc :

$$L_n\backsim\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Enfin avec :

$$\forall k\geq 2,\ \int_k^{k+1}\frac{dt}{t^2}\leq\frac{1}{k^2}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2},$$

on déduit que pour $m>n\geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^2}&=\int_n^{m+1}\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{n}-\frac{1}{m+1}\leq\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^2}\\&\leq\sum_{k=n}^{m}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2}=\int_{n-1}^{m}\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{m}\end{aligned}$$

et faisant tendre m vers l'infini (à n fixé), on déduit que :

$$\forall n\geq 2,\ \frac{1}{n}\leq\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{n-1},$$

ce qui implique que :

$$L_n\backsim\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\backsim\frac{1}{2n}.$$

On a donc en définitive le développement asymptotique :

$$H_n=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En itérant ce procédé on peut obtenir des termes supplémentaires du développement asymptotique.

Toujours dans le cadre des séries à termes positifs, on dispose également des théorèmes de Cauchy et de d'Alembert, souvent utilisés, pour prouver la convergence ou la divergence d'une série. La démonstration de ce théorème repose sur des comparaisons à des séries géométriques.

Théorème 6.12 (Cauchy) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles positives telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lambda$.*
La série $\sum u_n$ est convergente pour $\lambda<1$ et divergente pour $\lambda>1$.

Démonstration. Pour $\lambda<1$, on peut trouver un réel μ tel que $\lambda<\mu<1$ et un entier n_0 tel que :

$$\forall n\geq n_0,\ 0\leq\sqrt[n]{u_n}\leq\mu,$$

ce qui revient à dire que :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq \mu^n$$

et le corollaire 6.10 nous dit que la série $\sum u_n$ est convergente comme la série géométrique $\sum \mu^n$.

De même, pour $\lambda > 1$, on peut trouver un réel μ tel que $1 < \mu < \lambda$ et un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \geq \mu^n$$

et le corollaire 6.10 nous dit que la série $\sum u_n$ est divergente comme la série géométrique $\sum \mu^n$. ■

Remarque 6.9 *Dans le cas où* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda > 1$, *on peut aussi dire qu'on aura* $\sqrt[n]{u_n} > 1$ *pour* n *assez grand, donc aussi* $u_n > 1$ *et* $\sum u_n$ *diverge.*

Remarque 6.10 *Pour* $\lambda = 1$ *le théorème ne permet pas de conclure en général comme le montre l'exemple des séries de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. *En effet, on a :*

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = n^{-\frac{\alpha}{n}} = \exp\left(-\alpha \frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 1$$

pour tout réel α, *alors que la série* $\sum u_n$ *diverge pour* $\alpha \leq 1$ *et converge pour* $\alpha > 1$.

Exercice 6.32 *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *et* $a > 0$. *En utilisant la règle de Cauchy, étudier les séries de termes généraux :* $\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$; $\left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n}$; $\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; $\frac{a^n}{n^{\frac{n}{\alpha}}}$; $\frac{n}{n^{\frac{n}{2}}}$; $\frac{(n!)^n}{n^{n!}}$; $\frac{2^n}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}$; $\frac{2^n}{n^2}\sin^{2n}(\alpha)$.

Solution 6.32 *Toutes les séries considérées sont à termes strictement positifs.*

Pour $u_n = \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n$, *on a :*

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{an+b}{cn+d} \underset{n \to +\infty}{\to} \frac{a}{c}$$

donc $\sum u_n$ *converge pour* $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}$.

Pour $u_n = \left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n}$, *on a :*

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{4n-1}\right)^2 \underset{n \to +\infty}{\to} \frac{1}{16} < 1$$

donc $\sum u_n$ *converge.*

Pour $u_n = \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$, *on a :*

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt{\frac{2n+1}{3n+1}} \underset{n \to +\infty}{\to} \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$$

donc $\sum u_n$ *converge.*
Pour $u_n = \dfrac{a^n}{n^{\frac{n}{\alpha}}}$, *on a :*

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{a}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \underset{n\to+\infty}{\to} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 0, \\ +\infty \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

donc $\sum u_n$ *converge pour* $\alpha > 0$ *et diverge pour* $\alpha < 0$.
Pour $u_n = \dfrac{n}{n^{\frac{n}{2}}}$, *on a :*

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{n}} = n^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\sum u_n$ *converge.*
Pour $u_n = \dfrac{(n!)^n}{n^{n!}}$, *on a :*

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{n!}{n^{(n-1)!}} \leq \frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\sum u_n$ *converge (pour* $n \geq 3$, *on a* $n^{(n-1)!} \geq n^n$ *puisque* $(n-1)! \geq n$*).*
Pour $u_n = \dfrac{2^n}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}$, *on a :*

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{n^{\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{\exp\left(\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\ln(n)\right)} \underset{n\to+\infty}{\to} 2 > 1$$

donc $\sum u_n$ *diverge.*
Pour $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}\sin^{2n}(\alpha)$, *on a :*

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{n^{\frac{2}{n}}}\sin^2(\alpha) = \frac{2\sin^2(\alpha)}{\exp\left(2\frac{\ln(n)}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\to} 2\sin^2(\alpha)$$

donc $\sum u_n$ *diverge pour* $|\sin(\alpha)| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, *converge pour* $|\sin(\alpha)| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. *Pour* $|\sin(\alpha)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, *on a* $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ *et* $\sum u_n$ *converge.*

On dispose aussi de la version suivante du théorème de Cauchy qui utilise la notion de limite supérieure d'une suite réelle bornée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\limsup_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{p\geq n} v_p\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{p\geq n} v_p\right)$$

(la suite $\left(\sup\limits_{p\geq n} v_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante).

Cette notion est étudiée avec le problème du chapitre 26.

Théorème 6.13 (Cauchy) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs réelles positives. Si la suite* $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas majorée, alors la série* $\sum u_n$ *est divergente, sinon elle est convergente pour* $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$ *et divergente pour* $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$ *(pour* $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, *on ne peut rien dire a priori).*

Démonstration. Voir le problème du chapitre 26. ■

Cette version du théorème de Cauchy sera utilisée pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

Théorème 6.14 (d'Alembert) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles strictement positives telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$.*
La série $\sum u_n$ est convergente pour $\lambda < 1$ et divergente pour $\lambda > 1$.

Démonstration. Pour $\lambda < 1$, on peut trouver un réel μ tel que $\lambda < \mu < 1$ et un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \mu = \frac{\mu^{n+1}}{\mu^n}$$

et le corollaire 6.10 nous dit que la série $\sum u_n$ est convergente comme la série géométrique $\sum \mu^n$.

De même, pour $\lambda > 1$, on peut trouver un réel μ tel que $1 < \mu < \lambda$ et un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \mu = \frac{\mu^{n+1}}{\mu^n}$$

et le corollaire 6.10 nous dit que la série $\sum u_n$ est divergente comme la série géométrique $\sum \mu^n$.
■

Remarque 6.11 *Dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda > 1$, on aura $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour n assez grand et en conséquence il existe un entier n_0 tel que $u_n \geq u_{n_0} > 0$ pour $n \geq n_0$ (la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante) et $\sum u_n$ diverge puisque son terme général ne peut tendre vers 0.*

Remarque 6.12 *Pour $\lambda = 1$ le théorème ne permet pas de conclure en général comme le montre l'exemple des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.*

Remarque 6.13 *Le théorème de d'Alembert peut se déduire de celui de Cauchy en utilisant le théorème 3.6 (Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lambda$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \lambda$) qui est une conséquence du théorème de Césaro (exercice 3.73). Ce résultat peut s'exprimer en disant que la règle de Cauchy est plus générale que celle de d'Alembert. Pratiquement cela signifie que le théorème de Cauchy pourra permettre de conclure (mais pas toujours) si celui de d'Alembert ne le peut pas, c'est-à dire si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.*

Exercice 6.33 *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{2^{(-1)^n}}{2^n}$. Que donnent les critères de d'Alembert et de Cauchy pour la série $\sum u_n$?*

Solution 6.33 *On a $u_n > 0$ pour tout n et :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2^{2(-1)^n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{8} \text{ si } n \text{ est impair} \\ 2 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

donc la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge et le théorème de d'Alembert ne s'applique pas.*
Par contre, on a :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2^{\frac{(-1)^n}{n}}}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$$

et le théorème de Cauchy nous dit que $\sum u_n$ *converge.*
En fait, on a :

$$S_{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \frac{2^{(-1)^k}}{2^k} = 2\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{2^{2j}} + \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{2^{2j}}$$
$$= \frac{9}{4}\sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{4^j} + \frac{1}{2^{2p}} \underset{p\to+\infty}{\to} \frac{9}{4}\frac{4}{3} = 3$$

et :

$$S_{2p} = S_{2p} + \frac{1}{2^{2p+2}} \underset{p\to+\infty}{\to} 3$$

donc $\sum u_n$ *converge et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 3.$

Exercice 6.34

1. *Montrer que pour tout réel* $x \geq 0$ *la série* $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ *est convergente.*
2. *En déduire que pour tout nombre complexe* z *la série* $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ *est convergente.*

Solution 6.34

1. *Pour* $x = 0$ *c'est clair et pour* $x > 0$, *en notant* $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$, *on a* $u_n > 0$ *et* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. *On déduit alors du théorème de d'Alembert que la série* $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ *est convergente.*
2. *La question précédente nous dit que* $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ *est absolument convergente, donc convergente.*

Exercice 6.35 *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $a > 0$. *En utilisant la règle de d'Alembert, étudier les séries de termes généraux :* $\dfrac{a^n}{n^\alpha n!}$; $\dfrac{a^n}{n^\alpha n^n}$; $\dfrac{n!}{n^\alpha n^n}$; $\dfrac{a^n n^\alpha}{n! n^n}$; $\dfrac{a^n n!}{n^n}$ $(a \neq e)$; $\dfrac{a^n n^n}{n^\alpha n!}$ $(a \neq \frac{1}{e})$; $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; $\dfrac{3n-1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$; $\dfrac{n}{1+a^n}$; $\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$; $\dfrac{1\cdot 4\cdot 9\cdots n^2}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$; $\dfrac{n^p}{a^n}$ $(p \in \mathbb{Z})$.

Solution 6.35 *Toutes les séries considérées sont à termes strictement positifs.*
Pour $u_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha n!}$, *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\sum u_n$ *converge.*
Pour $u_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha n^n}$, *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0\cdot 1\cdot\frac{1}{e} = 0$$

(on utilise $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$*) donc* $\sum u_n$ *converge.*
Pour $u_n = \dfrac{n!}{n^\alpha n^n}$*, on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{e} < 1$$

donc $\sum u_n$ *converge.*
Pour $u_n = \dfrac{a^n n^\alpha}{n! n^n}$ *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\sum u_n$ *converge.*
Pour $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$ *avec* $a \neq e$*, on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{a}{e}$$

donc $\sum u_n$ *converge pour* $0 < a < e$*, diverge pour* $a > e$*.*
Pour $u_n = \dfrac{a^n n^n}{n^\alpha n!}(a \neq \frac{1}{e})$*, on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} ae$$

donc $\sum u_n$ *converge pour* $0 < a < \frac{1}{e}$*, diverge pour* $a > \frac{1}{e}$*.*
Pour $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$*, on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{4} < 1$$

donc $\sum u_n$ *converge*
Pour $u_n = \dfrac{3n-1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$*, on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+2}{3n-1}\frac{1}{\sqrt{3}} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

donc $\sum u_n$ *converge*
Pour $u_n = \dfrac{n}{1+a^n}$*, on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}\frac{1+a^{n+1}}{1+a^n} \backsim a$$

donc $\sum u_n$ *converge pour* $0 < a < 1$*, diverge pour* $a > 1$*. Pour* $a = 1$*, on a* $u_n = \frac{n}{2}$ *et* $\sum u_n$ *diverge.*
Pour $u_n = \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)} = \prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3k-1}{4k-3}$*, on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+2}{4n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{3}{4} < 1$$

donc $\sum u_n$ *converge*
Pour $u_n = \dfrac{1\cdot 4\cdot 9\cdots n^2}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)} = \prod_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{4k-3}$, *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{4n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

donc $\sum u_n$ *diverge*
Pour $u_n = \dfrac{n^p}{a^n}(p\in\mathbb{Z})$, *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{a}$$

donc $\sum u_n$ *diverge pour* $0<a<1$, *converge pour* $a>1$. *Pour* $a=1$, $u_n=n^p$ *et* $\sum u_n$ *diverge pour* $p\geq -1$, *converge pour* $p<-1$.

Exercice 6.36 *On considère les suites* $(u_n)_{n\geq 1}$ *et* $(v_n)_{n\geq 1}$ *définies par* $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}$ *et* $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. *Montrer que la série* $\sum v_n$ *converge.*
2. *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge vers un réel* $\alpha>0$.
3. *Montrer que* $n! \backsim \lambda\dfrac{\sqrt{n}n^n}{e^n}$ *avec* $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$
4. *En admettant la formule de Wallis :*
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$
et en simplifiant $\dfrac{u_{2n}}{u_n^2}$, *montrer que* $\lambda=\sqrt{2\pi}$ *(formule de Stirling).*
5. *Étudier les série de termes généraux* $\dfrac{e^n n!}{n^n}$, *et* $\dfrac{n^n}{e^n n^\alpha n!}$ *(cas* $a=e$ *et* $a=\dfrac{1}{e}$ *dans l'exercice précédent).*

Solution 6.36

1. *On a :*
$$v_n = \ln\left(\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
et un développement limité donne :
$$v_n = -1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
donc la série $\sum v_n$ *converge absolument (puisqu'on a aussi* $|v_n| = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$*).*
2. *Comme* $v_n = \ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$, *la série* $\sum v_n$ *est de même nature que la suite* $(\ln(u_n))_{n\geq 1}$ *et cette dernière converge. En notant* ℓ *sa limite, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha = e^\ell > 0$.

3. *Il en résulte que* $n! \backsim \lambda \frac{\sqrt{n}n^n}{e^n}$.
4. *On a :*

$$\frac{u_{2n}}{u_n^2} = \frac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{e^{2n}(2n)!}\frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n}n} = \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{(2n)!}\frac{(n!)^2}{\sqrt{n}}$$

avec :

$$\begin{aligned}(2n)! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)\cdot(2n)\\ &= 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\cdot 2^n(n!)\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{u_{2n}}{u_n^2} &= \frac{2^n\sqrt{2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\frac{n!}{\sqrt{n}}\\ = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{n}}\sqrt{2} &\underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{\pi}\sqrt{2}\end{aligned}$$

en utilisant la formule de Wallis. Il en résulte que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{2n}}{u_n^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} = \lambda = \sqrt{2\pi}$$

soit :

$$n! \backsim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}.$$

5. *Pour* $u_n = \frac{e^n n!}{n^n}$ *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure. En utilisant la formule de Stirling, on a :

$$u_n \backsim \lambda\frac{e^n}{n^n}\frac{\sqrt{n}n^n}{e^n} = \lambda\sqrt{n}$$

et $\sum u_n$ *diverge.*
Pour $u_n = \frac{n^n}{e^n n^\alpha n!}$, *on a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure. En utilisant la formule de Stirling, on a :

$$u_n \backsim \frac{1}{\lambda}\frac{n^n}{e^n n^\alpha}\frac{e^n}{\sqrt{n}n^n} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

et $\sum u_n$ *diverge pour* $\alpha \leq \frac{1}{2}$, *converge pour* $\alpha > \frac{1}{2}$.

Dans le cas où $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ (avec $u_n > 0$), on peut utiliser les théorèmes de Raabe-Duhamel qui suivent. Ces résultats reposent sur la comparaison de la série étudiée à une série de Riemann.

Théorème 6.15 (Raabe-Duhamel) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles strictement positives telle que :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où α est un réel (on a donc en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$). Si $\alpha < 1$, la série $\sum u_n$ est alors divergente et si $\alpha > 1$, elle est convergente.

Démonstration. L'idée est de comparer notre série à une série de Riemann. Si $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ où β est un réel à préciser, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n}\left(\beta - \alpha + \varepsilon_n\right)$$

où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite réelle qui tend vers 0.

Pour $\alpha < 1$, on choisit β tel que $\alpha < \beta < 1$, de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta - \alpha + \varepsilon_n) = \beta - \alpha > 0$ et il existe un entier n_0 tel que $\beta - \alpha + \varepsilon_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui donne $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n \geq n_0$ et $\sum u_n$ diverge comme $\sum v_n$.

Pour $\alpha > 1$, on choisit β tel que $1 < \beta < \alpha$, de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta - \alpha + \varepsilon_n) = \beta - \alpha < 0$ et il existe un entier n_0 tel que $\beta - \alpha + \varepsilon_n < 0$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui donne $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n \geq n_0$ et $\sum u_n$ converge comme $\sum v_n$. ■

Exercice 6.37 *Étudier la série $\sum u_n$, où $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$ pour $n \geq 1$.*

Solution 6.37 *On a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure.
Avec :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n+2} &= 1 - \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

et le théorème de Raabe-Duhamel, on déduit que $\sum u_n$ diverge ($\alpha = \frac{1}{2}$ avec les notations du théorème qui précède).

Le cas où $\alpha = 1$ peut être traité avec la version suivante du théorème de Raabe-Duhamel.

Théorème 6.16 (Raabe-Duhamel) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles strictement positives telle que :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

où α, γ sont des réels avec $\gamma > 1$ (on a donc en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$). La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration. Pour $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$, on écrit que $O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et on est ramené au théorème précédent.

Pour $\alpha = 1$, on introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \ln(nu_n)$ qui est de même nature que la série de terme général :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) + \left(-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^{\min(3,\gamma)}}\right) \end{aligned}$$

donc convergente puisque $\gamma > 1$. En notant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \lambda = e^\ell > 0$, ce qui signifie que $u_n \backsim \frac{\lambda}{n}$ et $\sum u_n$ est divergente. ∎

Exercice 6.38 *On désigne par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant.*
2. *Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}$.*
3. *En utilisant le théorème de Césaro, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.*

Solution 6.38

1. *On vérifie facilement par récurrence que $0 < u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 0$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$ et supposant acquis le résultat au rang $n \geq 0$, on a :*

$$0 < u_{n+1} = \sin(u_n) < 1.$$

   Tenant compte de l'inégalité $\sin(x) < x$ pour $x \in \left]0,1\right]$, on déduit que cette suite est décroissante et comme elle est minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \in [0,1]$. Avec la continuité de la fonction $\sin$, on déduit que $\sin(\ell) = \ell$ avec $\ell \in [0,1]$ et $\ell = 0$.

   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin(u_n)}{u_n} = 1$ et le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure.

2. *Le développement limité de $\sin$ en 0 à l'ordre 3 nous donne :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)} &= \frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2}{x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2} \\ &= \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. Comme $u_n > 0$ *pour tout* n *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, *on déduit de la question précédente que :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sin^2(u_n)}-\frac{1}{u_n^2}\right)=\frac{1}{3}$$

et le théorème de Césaro nous dit que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2}-\frac{1}{u_k^2}\right)&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{u_0^2}\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{1}{u_n^2}\right)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

et $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n}}$ *et la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Comme pour le théorème de Cauchy, on dispose d'un version du théorème de d'Alembert qui fait intervenir la notion de limite supérieure et aussi celle de limite inférieure. Précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 6.17 (d'Alembert) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs réelles strictement positives. Si* $\limsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$, *la série* $\sum u_n$ *est alors convergente et si* $\liminf\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$, *elle est divergente (dans les autres cas, on ne peut rien dire a priori).*

Démonstration. Voir le problème du chapitre 26. ∎

6.6 Produit de deux séries

Étant données deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on peut définir naïvement leur produit comme la série produit $\sum u_n v_n$, où on fait le produit terme à terme comme pour la somme. On dit que $\sum u_n v_n$ est le produit de Hadamard des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Par exemple pour deux séries géométriques convergentes $\sum a^n$ et $\sum b^n$, la série produit $\sum a^n b^n$ est encore une série géométrique convergente, mais en général :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n b^n = \frac{1}{1-ab} \neq \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \sum_{n=0}^{+\infty} b^n = \frac{1}{(1-a)(1-b)}.$$

On préfère définir le produit de deux séries par analogie au produit de deux polynômes comme suit.

Définition 6.5 *Étant données deux séries numériques* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$, *le produit de Cauchy de ces deux séries est la série de terme général* $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Ce produit de Cauchy est aussi appelé produit de convolution.

Pour l'exemple des séries géométriques convergentes avec $a \neq b$, on a :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$$

et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w^n = \frac{1}{b-a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1}\right) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b}{1-b} - \frac{a}{1-a}\right)$$
$$= \frac{1}{ab-b-a+1} = \frac{1}{(1-a)(1-b)}.$$

On s'intéresse tout d'abord au produit de Cauchy de deux séries à termes positifs.

Théorème 6.18 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs non identiquement nulles et $\sum w_n$ leur produit de Cauchy. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, il en est alors de même de $\sum w_n$ et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Si l'une des deux séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ est divergente, il en est alors de même de $\sum w_n$ (l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$ est encore vérifiée dans ce cas avec $+\infty$ pour valeur commune).

Démonstration. On note respectivement S_n, S'_n et S''_n les sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$. Pour tout entier n, on a :

$$S_n S'_n = \left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right) = \sum_{0\leq i,j\leq n} u_i v_j.$$

et :

$$S''_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k} u_i v_j = \sum_{i+j\leq n} u_i v_j$$

les indices i, j figurant dans ces sommes étant positifs ou nuls. Il en résulte que :

$$S''_n = \sum_{i+j\leq n} u_i v_j \leq \sum_{0\leq i,j\leq n} u_i v_j = S_n S'_n \leq \sum_{i+j\leq 2n} u_i v_j = S''_{2n}$$

En conséquence si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont majorées, donc aussi la suite $(S''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui équivaut à dire que la série à termes positifs $\sum w_n$ converge. Si l'une des deux séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ diverge, l'une des suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et il en est de même de $(S''_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ (les u_n, v_n sont positifs non tous nuls, donc S_n et S'_n sont croissantes et strictement positives pour n grand), la série est donc divergente. ∎

Le théorème précédent peut aussi s'énoncer en disant que, pour toutes séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs non tous nuls, on a toujours l'égalité dans $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

où $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

On en déduit alors le résultat suivant.

Théorème 6.19 *Le produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes est absolument convergent et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Démonstration. Le théorème précédent nous dit que, si on note $w'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}|$ pour tout entier naturel n, alors la série $\sum w'_n$ est convergente et avec les inégalités :

$$|w_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leq w'_n,$$

on déduit que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.
En notant respectivement S_n, S'_n, S''_n les sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$ et T_n, T'_n, T''_n celles des séries $\sum |u_n|$, $\sum |v_n|$, $\sum w'_n$ on a :

$$\begin{aligned}
|S_n S'_n - S''_n| &= \left|\sum_{0\leq i,j\leq n} u_i v_j - \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j\leq n}} u_i v_j\right| = \left|\sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j\geq n+1}} u_i v_j\right| \\
&\leq \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j\geq n+1}} |u_i|\,|v_j| = \sum_{0\leq i,j\leq n} |u_i|\,|v_j| - \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j\leq n}} |u_i|\,|v_j| \\
&\leq T_n T'_n - T''_n
\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} (T_n T'_n - T''_n) = 0$ puisque $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w'_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |v_n|\right)$. Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_n S'_n - S''_n) = 0$ et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} S''_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \lim_{n\to+\infty} S'_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

■

Exemple 6.4 *La série $\sum \lambda^n$ étant absolument convergente de somme $\dfrac{1}{1-\lambda}$, pour tout nombre complexe λ tel que $|\lambda| < 1$, on déduit que :*

$$\frac{1}{(1-\lambda)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

où :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \lambda^{n-k} = (n+1)\,\lambda^n.$$

On a donc :

$$\frac{1}{(1-\lambda)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,\lambda^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\lambda^{n-1}.$$

Exemple 6.5 *La série* $\sum \frac{\lambda^n}{n!}$ *étant absolument convergente pour tout nombre complexe* λ *(exercice 6.34), en notant* $f(\lambda)$ *sa somme, on a pour tous nombres complexes* λ *et* μ *:*

$$f(\lambda) f(\mu) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

où :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k \mu^{n-k} = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}.$$

On a donc $f(\lambda) f(\mu) = f(\lambda+\mu)$ *avec* $f(0) = 1$. *On reconnaît ici l'équation fonctionnelle qui caractérise la fonction exponentielle réelle (avec l'hypothèse de continuité en* 0*). Pour cette raison, on note* e^λ *la somme de la série* $\sum \frac{\lambda^n}{n!}$ *et on définit ainsi la fonction exponentielle complexe qui prolonge celle que l'on connaît sur* $\mathbb{R}$.

En réalité l'absolue convergence de l'un des deux séries suffit (l'autre série étant bien entendu convergente). Précisément on a le résultat suivant.

Théorème 6.20 (Mertens) *Le produit de Cauchy* $\sum w_n$ *de deux séries numériques* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergentes, l'une d'entre elles étant absolument convergente, est convergent et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Exercice 6.39 *Montrer que le produit de Cauchy de la série convergente* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ *par elle même est divergent.*

Solution 6.39 *Le théorème des séries alternées nous dit que* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ *est convergente. Le produit de Cauchy de cette série par elle est la série* $\sum w_n$ *définie par :*

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

et avec :

$$(k+1)(n-k+1) \leq (n+1)^2$$

pour k *compris entre* 0 *et* n, *on déduit que :*

$$|w_n| \geq 1$$

et $\sum w_n$ *diverge puisque son terme général ne tend pas vers* 0.

6.7 Séries doubles

De même que l'on considère des intégrales doubles, on peut définir la notion de série double. L'idée étant donner un sens à une somme du type $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$.

On s'intéresse tout d'abord au cas des séries doubles à termes positifs.

Théorème 6.21 *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels positifs ou nuls indexée par (n,m) dans $\mathbb{N}^2$. Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série $\sum u_{n,m}$ est convergente de somme S_n et si la série $\sum S_n$ est convergente de somme S, alors pour tout $m\in\mathbb{N}$, la série $\sum u_{n,m}$ est convergente de somme T_n et la série $\sum T_n$ est convergente de somme S. On a donc :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$$

Démonstration. Pour tout entier naturel m, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0\le u_{n,m}\le S_n=\sum_{k=0}^{+\infty}u_{n,k}$$

avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n=S<+\infty$, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum\limits_{n}u_{n,m}$. En notant T_m la somme de cette série, on a pour tout n :

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}u_{j,k}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}u_{j,k}\le\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty}u_{j,k}=\sum_{j=0}^{n}S_j\le\sum_{n=0}^{+\infty}S_n=S.$$

Il en résulte que :

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{+\infty}u_{j,k}=\sum_{k=0}^{m}T_k\le S$$

ce qui signifie que la suite croissante $\left(\sum\limits_{k=0}^{m}T_k\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est majorée et donc convergente. La série $\sum T_m$ est donc convergente et $T=\sum\limits_{m=0}^{+\infty}T_m\le S$. En permutant les rôles de n et m, on aboutit de manière analogue à $S\le T$ et $T=S$. ■

Remarque 6.14 *Dans le cas où l'une des sommes positives $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ ou $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ est infinie, il en est de même de l'autre, puisque si l'une est finie l'autre l'est. L'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)=\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ est donc valable pour toute suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs.*

Dans le cas où l'une des sommes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ ou $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ ($(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ étant une suite double de réels positifs) est finie, on dit que la série double $\sum u_{n,m}$ est convergente et on note $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}u_{n,m}$ la valeur commune de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ et $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$.

Définition 6.6 *Étant donnée une suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes, on dit que la série double $\sum u_{n,m}$ est absolument convergente si la série double $\sum |u_{n,m}|$ est convergente.*

On a le résultat suivant qui est l'analogue du théorème de Fubini que l'on connaît dans le cadre de la théorie de l'intégration.

Théorème 6.22 *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double telle que la série double $\sum u_{n,m}$ soit absolument convergente. Dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$ [resp. pour tout $m \in \mathbb{N}$], la série $\sum\limits_m u_{n,m}$ [resp. $\sum\limits_n u_{n,m}$] est absolument convergente et en notant S_n [resp. T_m] la somme de cette série, la série $\sum S_n$ [resp. $\sum T_m$] est absolument convergente et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} T_m$, soit :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

Démonstration. La convergence de $\sum |u_{n,m}|$ entraîne par définition celle des séries $\sum\limits_m |u_{n,m}|$ pour tout entier n, ce qui signifie que toutes les séries $\sum\limits_m u_{n,m}$ sont absolument convergentes. Avec :

$$\sum_{k=0}^{m} |S_k| = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{n,m}| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{n,m}|\right) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} |u_{n,m}| < +\infty$$

on déduit que la série $\sum S_n$ est absolument convergente. Les indices n et m jouant des rôles symétriques, on montre de même que la série $\sum T_m$ est absolument convergente. Faisant tendre m vers l'infini dans l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} u_{j,k}$$

on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{j,k}$$

soit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k} = \sum_{j=0}^{n} S_j$$

De même, en faisant tendre n vers l'infini, on aboutit à :

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{j,k} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{m} u_{j,k}$$

soit :

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{m} u_{j,k} = \sum_{k=0}^{m} T_k$$

Prenant $n = m$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} T_k - \sum_{j=0}^{n} S_j &= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{j,k} - \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} u_{j,k} - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k} + \sum_{j=n+1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{j,k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k} \\
&= \sum_{j=n+1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{j,k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k} \\
&= \sum_{j=n+1}^{+\infty} S_j - \sum_{k=n+1}^{+\infty} T_k \underset{n\to+\infty}{\to} 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

puisque chacune des séries $\sum S_n$ et $\sum T_m$ converge. On a donc bien l'égalité on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} T_m$. ■

Dans le cas où la série double $\sum u_{n,m}$ est absolument convergente on note $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$ la valeur commune de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ et $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$.

Remarque 6.15 *Le résultat précédent n'est pas valable a priori sans hypothèse de convergence absolue. Les sommes* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ *et* $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ *peuvent être définies et différentes et dans ce cas il n'est pas possible de donner un sens à* $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$.

Exercice 6.40 *Soit* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ *la suite double définie par :*

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ u_{n,m} = \begin{cases} 0 \text{ si } n=m \\ \dfrac{1}{n^2-m^2} \text{ si } n\neq m \end{cases}$$

Montrer, en les calculant, que les sommes $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ *et* $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ *sont définies et différentes.*

Solution 6.40 *Pour* k *entier naturel non nul fixé et* $n>k$*, on a*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} u_{j,k} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{j^2-k^2} &= \frac{1}{2k}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\left(\frac{1}{j-k}-\frac{1}{j+k}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\sum_{\substack{j=1-k\\ j\neq 0}}^{n-k}\frac{1}{j} - \sum_{\substack{j=k+1\\ j\neq 2k}}^{n+k}\frac{1}{j}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\sum_{j=1}^{n-k}\frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j} - \sum_{j=k+1}^{n+k}\frac{1}{j} + \frac{1}{2k}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\sum_{j=1}^{n-k}\frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n+k}\frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\frac{3}{2}\frac{1}{k} - \sum_{j=n-k+1}^{n+k}\frac{1}{j}\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$0 < \sum_{j=n-k+1}^{n+k}\frac{1}{j} \leq 2k\frac{1}{n-k+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et donc :

$$\forall k\geq 1,\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n} u_{j,k} = \frac{3}{4}\frac{1}{k^2},$$

ce qui signifie que :

$$\forall k \geq 1,\ T_k = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} = \frac{3}{4}\frac{1}{k^2}.$$

La série $\sum T_m$ *est donc convergente avec* $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} T_m = \dfrac{3}{4}\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\dfrac{1}{m^2}$, *ce qui signifie que :*

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \frac{3}{4}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}.$$

De manière analogue, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}\right) = -\frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}$$

et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}\right) \neq \sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$.
La série double $\sum u_{n,m}$ *n'est donc pas absolument convergente.*

6.8 La transformation d'Abel

Cette transformation que l'on peut considérer comme une intégration par parties discrète sera surtout utile lors de l'étude des séries trigonométriques.

Théorème 6.23 *Soient* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites numériques et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.$$

Pour tous entiers $q > p \geq 1$, *on a :*

$$\sum_{k=p}^{q} \alpha_k u_k = A_q u_q - A_{p-1} u_p - \sum_{k=p}^{q-1} A_k \left(u_{k+1} - u_k\right).$$

Démonstration. En écrivant que $\alpha_k = A_k - A_{k-1}$, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q} \alpha_k u_k = \sum_{k=p}^{q} \left(A_k - A_{k-1}\right) u_k = \sum_{k=p}^{q} A_k u_k - \sum_{k=p}^{q} A_{k-1} u_k$$

$$= \sum_{k=p}^{q} A_k u_k - \sum_{k=p-1}^{q-1} A_k u_{k+1} = A_q u_q - A_{p-1} u_p + \sum_{k=p}^{q-1} A_k \left(u_k - u_{k+1}\right)$$

$$= A_q u_q - A_{p-1} u_p - \sum_{k=p}^{q-1} A_k \left(u_{k+1} - u_k\right)$$

■

L'analogie avec la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = \int_a^b F'(t)\, g(t)\, dt = F(b)\, g(b) - F(a)\, g(a) - \int_a^b F(t)\, g'(t)\, dt$$

où $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(t)\, dt$ est la primitive de f nulle en a peut se faire comme suit :

– la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identifiée à la fonction f ;
– la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identifiée à la fonction F (intégration discrète) ;
– la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identifiée à la fonction g ;
– la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identifiée à la fonction g' (dérivation discrète) ;
– la somme $\sum\limits_{k=p}^{q} \alpha_k u_k$ est identifiée à l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$;
– la somme $\sum\limits_{k=p}^{q-1} A_k(u_{k+1}-u_k)$ est identifiée à l'intégrale $\displaystyle\int_a^b F(t)\, g'(t)\, dt$.

En utilisant cette transformation, on obtient le résultat suivant.

Théorème 6.24 (Abel) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers 0 en décroissant et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A_n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k.$$

soit bornée. Dans ces conditions la série $\sum u_n\alpha_n$ est convergente et, en désignant par $M>0$ un majorant de la suite $(|A_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, on a les majoration des restes :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |R_{n+1}|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\alpha_k u_k\right|\leq 2Mu_{n+1}.$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n\alpha_n$ est convergente. En utilisant, pour $n\geq 2$, la transformation d'Abel :

$$\begin{aligned} S_n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k u_k=\alpha_0u_0+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k&=\alpha_0u_0+A_nu_n-A_0u_1-\sum_{k=1}^{n-1}A_k(u_{k+1}-u_k)\\ &=A_nu_n-\sum_{k=0}^{n-1}A_k(u_{k+1}-u_k)\end{aligned}$$

$(\alpha_0=A_0)$ cela revient à montrer que la série $\sum A_n(u_{n+1}-u_n)$ est convergente (la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $(A_nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers 0). Pour ce faire nous allons montrer qu'elle est absolument convergente, ce qui résulte de :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |A_n(u_{n+1}-u_n)|\leq M(u_n-u_{n+1})$$

(la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante) la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ étant convergente puisque de même nature que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour ce qui est des restes, on utilise encore la transformation d'Abel qui nous permet d'écrire pour $m>n+1$:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{m}\alpha_k u_k\right|&=\left|A_mu_m-A_nu_{n+1}-\sum_{k=n+1}^{m-1}A_k(u_{k+1}-u_k)\right|\\ &\leq|A_mu_m-A_nu_{n+1}|+\sum_{k=n+1}^{m-1}|A_k|(u_k-u_{k+1})\\ &\leq M\left(u_m+u_{n+1}+\sum_{k=n+1}^{m-1}(u_k-u_{k+1})\right)=2Mu_{n+1}\end{aligned}$$

puis, faisant tendre m vers l'infini, on obtient :

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k u_k \right| \leq 2M u_{n+1}.$$

■

Remarque 6.16 *En utilisant la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\alpha_n = (-1)^n$, on retrouve le théorème des séries alternées (on a $|A_n| \leq 1$).*

Une utilisation classique du théorème d'Abel est l'étude des séries trigonométriques.

Théorème 6.25 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.*

1. *Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n e^{int}$ est absolument convergente pour tout réel t.*
2. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum u_n e^{int}$ est convergente pour tout réel $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration.

1. Résulte immédiatement de $|u_n e^{it}| = u_n$ pour tout réel t.
2. Pour tout réel $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} A_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}}{e^{i\frac{t}{2}}} \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}t} - e^{i\frac{n+1}{2}t}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} \\ &= e^{in\frac{t}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

et :

$$|A_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}.$$

(pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \neq 0$). Le résultat découle alors du théorème d'Abel.

■

Du théorème précédent, on déduit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum u_n e^{-int}$ est convergente pour tout réel $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (remplacer t par $-t$) et en conséquence les séries $\sum u_n \cos(nt)$ et $\sum u_n \sin(nt)$ sont également convergentes. Pour $t \in \pi\mathbb{Z}$, on a $\cos(nt) = (-1)^n$ et $\sin(nt) = 0$ pour tout n et les séries $\sum u_n \cos(nt) \sum (-1)^n u_n$ et $\sum u_n \sin(nt)$ sont encore convergentes (la première par le théorème des séries alternées).

Exercice 6.41 *Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \dfrac{\sin(nt)}{n}$ est semi-convergente.*

Solution 6.41 *Comme $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant, la série $\sum \dfrac{\sin(nt)}{n}$ est convergente. Avec $|\sin(nt)| \geq \sin^2(nt)$ pour tous n, t et :*

$$\frac{\sin^2(nt)}{n} = \frac{1}{n} - \frac{\cos(2nt)}{n}$$

on déduit que $\sum \dfrac{|\sin(nt)|}{n}$ est divergente comme $\sum \dfrac{\sin^2(nt)}{n}$ (somme d'une divergente et d'une convergente avec $2t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$).

Une petite modification de la transformation d'Abel permet de montrer le résultat suivant.

Théorème 6.26 (Abel) *Soient et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite de nombres complexes telles que la série $\sum \alpha_n$ soit convergente et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ absolument convergente.*
Dans ces conditions la série $\sum u_n\alpha_n$ est convergente.

Démonstration. On utilise une transformation d'Abel qui fait intervenir les restes $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k$ de la série convergente $\sum \alpha_n$ et non pas les sommes partielles A_n de cette série. Pour ce faire, on écrit que $\alpha_k = R_{k-1} - R_k$, pour tout entier $k \geq 1$ et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k &= \sum_{k=1}^{n} (R_{k-1} - R_k)\, u_k = \sum_{k=1}^{n} R_{k-1}u_k - \sum_{k=1}^{n} R_k u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} R_k u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} R_k u_k = R_0 u_1 - R_n u_n + \sum_{k=1}^{n-1} R_k\,(u_{k+1} - u_k)\end{aligned}$$

Comme $\sum (u_{n+1} - u_n)$ absolument convergente, elle convergente et cette série étant de même nature que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cette dernière est convergente. Il en résulte que la suite $(R_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ($(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 puisque $\sum \alpha_n$ converge). Enfin avec $|R_n (u_{n+1} - u_n)| \leq M\,|u_{n+1} - u_n|$ où M est un majorant de $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que la série $\sum R_n (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente comme $\sum (u_{n+1} - u_n)$. En définitive, $\sum u_n\alpha_n$ est convergente. ■

Exercice 6.42 *Montrer que si la série réelle ou complexe $\sum \alpha_n$ est convergente, alors pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, la série $\sum \alpha_n z^n$ est convergente.*

Solution 6.42 *En posant $u_n = z^n$, on a pour $|z| < 1$:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n+1} - u_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |z-1|\,|z|^n = |z-1|\,\frac{1}{1-|z|}.$$

Le deuxième théorème d'Abel nous dit alors que la série $\sum \alpha_n z^n$ est convergente.

6.9 Exemples de séries approximant π

Pour chacune des séries de somme égale à π, on note S_n la somme partielle d'indice n et $R_n = |\pi - S_n|$ l'erreur d'indice n.

On a déjà vu la série de Grégory :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(exercice 6.10). Cette série converge lentement :

$$R_{10} \backsimeq 9.072\,3 \times 10^{-2},\ R_{100} \backsimeq 9.900\,7 \times 10^{-3},\ R_{1000} \backsimeq 9.99 \times 10^{-4}$$

Le théorème des séries alternées nous dit que cette erreur est majorée par $\dfrac{4}{2n+3}$.

Une formule d'Euler :

$$\pi = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}$$

On a :

$$R_{10} \backsimeq 4.866\,3 \times 10^{-4},\ R_{100} \backsimeq -5.\,048\,7 \times 10^{-29}$$

La série de Machin donne une meilleure approximation :

$$\pi = 16 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^{2n+1}} \frac{(-1)^n}{2n+1} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{239^{2n+1}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

On a :

$$R_5 \backsimeq 9.744\,8 \times 10^{-10},\ R_{10} \backsimeq 5.628\,5 \times 10^{-17},\ R_{20} \backsimeq 1.514\,6 \times 10^{-28}$$

La formule suivante, de Plouffe converge aussi rapidement :

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) \frac{1}{16^n}$$

(voir le problème 27). On a :

$$R_5 \backsimeq 3.617\,1 \times 10^{-10},\ R_{10} \backsimeq 1.088\,5 \times 10^{-16},\ R_{20} \backsimeq 1.009\,7 \times 10^{-28}$$

La plus belle formule est celle de Ramanujan :

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}}.$$

Il l'énonça en 1910, mais ne fut démontrée qu'en 1985 par les frères Borwein.

On a :

$$R_2 \backsimeq 5.682\,5 \times 10^{-24},\ R_3 \backsimeq 5.048\,7 \times 10^{-29}$$

6.10 Produits infini

En s'inspirant de la notion de série numérique, on peut définir la notion de produit infini comme suit.

Étant donnés un entier naturel n_0 et une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ de nombres complexes, étudier le produit infini de terme général u_n revient à étudier la suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ des produits partiels définie par :

$$\forall n \geq n_0,\ P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k.$$

On peut remarquer que cette suite est aussi définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} P_{n_0} = u_{n_0}, \\ \forall n \geq n_0 + 1,\ P_n = P_{n-1} \cdot u_n. \end{cases}$$

On notera plus simplement $\prod u_n$ un tel produit et on parlera de produit infini.

Pour tout entier $n \geq n_0$, on dit que u_n est le terme d'indice n et P_n le produit partiel d'indice n de ce produit infini.

On supposera, a priori, que $n_0 = 0$.

Définition 6.7 *On dit que le produit infini $\prod u_n$ est convergent si la suite de ses produits partiels $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Dans le cas contraire, on dit que le produit infini est divergent.*

Dans le cas où le produit infini $\prod u_n$ est convergent, on notera $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} u_k$$

Remarque 6.17 *Si l'un des u_n est nul, on aura $P_m = 0$ pour tout $m \geq n$ et le produit infini converge toujours.*

Si $\prod u_n$ est un produit infini, on supposera que tous les u_n sont non nuls.

Exercice 6.43 *Montrer que le produit infini $\prod \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ est convergent et calculer sa valeur.*

Solution 6.43 *On note :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right)$$

On a vu avec l'exercice 6.28 que la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ est divergente vers $-\infty$.
La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives et on a $\ln(P_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(P_n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$, ce qui signifie que le produit infini $\prod \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ converge vers 0.

L'exercice précédent nous montre qu'un produit infini de termes non nuls peut très bien converger vers 0.

Définition 6.8 *On dit que le produit infini $\prod u_n$ est strictement convergent s'il converge vers un complexe non nul.*

Comme pour les séries numériques, on a la condition nécessaire de stricte convergence suivante.

Théorème 6.27 *Si le produit infini $\prod u_n$ est strictement convergent, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.*

Démonstration. Résulte immédiatement de $u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$ pour $n \geq 1$ et de $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n \neq 0$. ∎

Dans ce qui suit, on écrira les u_n sous la forme $u_n = 1 + v_n$ avec $v_n \neq -1$ pour tout n et en cas de stricte convergence de $\prod u_n$, on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Dans le cas où les v_n sont réels positifs, l'utilisation de la fonction logarithme nous donne le résultat suivant.

Théorème 6.28 *Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls. Le produit infini $\prod (1 + v_n)$ est strictement convergent si, et seulement si, la série $\sum v_n$ est convergente.*

Démonstration. En notant $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des produits partiels de $\prod(1+v_n)$, on a :

$$P_{n+1} = P_n(1+v_n) \geq P_n > 0$$

Cette suite est donc croissante.

Si $\sum v_n$ converge, on a :

$$\ln(P_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+v_k) \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq S = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

c'est-à-dire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée à valeurs strictement positives, elle converge donc vers un réel $P > 0$.

Supposons que $\sum v_n$ soit divergente. Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(1+v_n) < +\infty$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+v_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\ln(1+v_n) \underset{k\to+\infty}{\backsim} v_n$ qui entraîne $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n < +\infty$ en contradiction avec l'hypothèse de départ. On a donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(1+v_n) = +\infty$ et il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(P_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$, ce qui signifie que le produit infini $\prod(1+v_n)$ est divergent. ■

Pour les produits infinis de la forme $\prod(1-v_n)$ avec $v_n \geq 0$, la situation est plus simple.

Théorème 6.29 *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs qui tend vers 0, alors le produit infini $\prod(1-v_n)$ est convergent.*
Dans le cas où les v_n sont tous différents de 1, ce produit infini converge vers 0 si la série $\sum v_n$ diverge et il est strictement convergent si cette série converge.

Démonstration. On note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des produits partiels de $\prod(1-v_n)$.

Si l'un des v_n vaut 1, alors la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire sur 0.

On suppose donc tous les v_n différents de 1.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et il existe un entier n_0 tel que $1 - v_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui permet d'écrire pour $n \geq n_0 + 1$, $P_n = P_{n_0} Q_n$, avec $Q_n = \prod\limits_{k=n_0+1}^{n} (1-u_k) > 0$.

On a alors pour $n \geq n_0 + 1$:

$$0 < Q_{n+1} = Q_n(1-v_n) \leq P_n$$

c'est-à-dire que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0, elle converge donc vers un réel $Q \geq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P_{n_0} Q = P$.

Supposons que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$ (la série $\sum v_n$ est à termes positifs). Si $P > 0$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(P_n) = \ln(P)$, soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(1-v_n) = \ln(P)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1-v_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, ce qui entraîne $\ln(1-v_n) \underset{n\to+\infty}{\backsim} -v_n < 0$ et donne $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n < +\infty$ en contradiction avec l'hypothèse de départ. On a donc $P = \lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$ si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$.

Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = S < +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, $\ln(1-v_n) \underset{n\to+\infty}{\backsim} -v_n$ et $\sum \ln(1-v_n)$ converge vers un réel S, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(P_n) = S$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = e^S > 0$. ■

Par exemple, pour $v_n = \dfrac{1}{n+1}$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1} = +\infty$ et le produit infini $\prod (1 - v_n)$ converge vers 0.

Exercice 6.44 *Montrer que le produit infini* $\prod \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ *converge strictement et calculer sa valeur (ce produit est considéré à partir de* $n = 2$*).*

Solution 6.44 *La convergence de* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *nous assure la stricte convergence du produit infini. Pour tout* $n \geq 2$*, on a :*

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \frac{2 \cdot 4}{3^2} \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(n-2)\,n}{(n-1)^2} \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \dfrac{1}{2}$*, soit* $\prod\limits_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 6.45

1. *Montrer que, pour tout réel* $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$*, le produit infini* $\prod \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ *converge strictement.*
2. *Montrer que, pour tout entier naturel* n*, il existe un polynôme* P_n *de degré* n *tel que* $\sin((2n+1)x) = \sin(x) P_n(\sin^2(x))$ *pour tout réel* x*. On vérifiera que le coefficient dominant de* P_n *est* $\alpha_n = (-1)^n 4^n$ *et que* $P_n(0) = 2n+1$*.*
   On peut utiliser la relation : $\sin((2n+1)x) = \Im\left(e^{i(2n+1)x}\right)$.
3. *Déterminer les racines du polynôme* P_n*, pour* $n \geq 1$*.*
4. *Montrer que, pour tout réel* $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *et tout entier* $n \geq 1$*, on a :*

$$\begin{aligned} \sin((2n+1)x) &= (2n+1)\sin(x) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\ &= (2n+1)\tan(x)\cos^{2n+1}(x) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \end{aligned}$$

5. *Montrer que pour* $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$*, on a :*

$$0 < \frac{\tan(x)}{\tan(y)} < \frac{x}{y} < \frac{\sin(x)}{\sin(y)}$$

6. *Montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos^n\left(\dfrac{x}{n}\right) = 1$ *pour tout réel* $x \in \left]0, \pi\right[$.
7. *Montrer que, pour tout réel* $x \in [-\pi, \pi]$*, on a :*

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Solution 6.45

1. *Pour* $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, *la suite* $\left(\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est formée de réels positifs tous différents de* 1 *et cette suite tend vers* 0, *donc le produit infini* $\prod \left(1 - \dfrac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$ *est strictement convergent.*
2. *On a :*

$$\begin{aligned} e^{i(2n+1)x} &= (\cos(x) + i\sin(x))^{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} \cos^{2n+1-k} i^k \sin^k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} \cos^{2n+1-2k} (-1)^k \sin^{2k}(x) + i \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \cos^{2n-2k} (-1)^k \sin^{2k+1}(x) \\ &= \cos(x) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k} \left(1 - \sin^2(x)\right)^{n-k} \sin^{2k}(x) \\ &+ i\sin(x) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} \left(1 - \sin^2(x)\right)^{n-k} \sin^{2k}(x) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\sin((2n+1)x) = \Im\left(e^{i(2n+1)x}\right) = \sin(x) P_n\left(\sin^2(x)\right)$$

où $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} (1-t)^{n-k} t^k$.
Ce polynôme est de degré n *et son coefficient dominant de* P_n *est :*

$$\alpha_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} = 4^n$$

cette dernière égalités étant déduite de :

$$2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} + \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}$$

$$0 = (1-1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} - \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}$$

qui donne par addition :

$$2^{2n+1} = 2 \cdot 4^n = 2\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}$$

On a aussi :

$$P_n(0) = C_{2n+1}^{1} = 2n+1.$$

3. *Pour* k *entier compris entre* 1 *et* n, *on a :*

$$0 = \sin\left((2n+1)\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) P_n\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

avec $\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \neq 0$ *(pour* $1 \leq k \leq n$*, on a* $0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$*), donc* $P_n\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) = 0$*. Les* $x_{n,k} = \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ *nous fournissent donc n racines distinctes de* P_n *(la fonction* $\sin$ *est strictement croissante sur* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$*) et ont les a toutes.*

4. *On a donc :*

$$P_n(t) = (-1)^n 4^n \prod_{k=1}^{n} \left(t - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

et :

$$\begin{aligned}\sin((2n+1)x) &= (-1)^n 4^n \sin(x) \prod_{k=1}^{n} \left(\sin^2(x) - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \\ &= (-1)^n 4^n \sin(x) \prod_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} - 1\right)\end{aligned}$$

avec :

$$2n+1 = P_n(0) = 4^n \prod_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

ce qui donne :

$$\sin((2n+1)x) = (2n+1)\sin(x) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

pour tout réel x.
En utilisant la relation, $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$, *on a, pour k compris entre* 1 *et n :*

$$\begin{aligned}1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} &= \cos^2(x) + \sin^2(x)\left(1 - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\ &= \cos^2(x) + \sin^2(x)\left(\frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) - 1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\left(\frac{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \\ &= \cos^2(x) - \frac{\sin^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\end{aligned}$$

ce qui donne pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *:*

$$1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \cos^2(x)\left(1 - \frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}\sin((2n+1)x) &= (2n+1)\sin(x)\prod_{k=1}^{n}\left(\cos^2(x)\left(1-\frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\right)\\ &= (2n+1)\sin(x)\cos^{2n}(x)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\\ &= (2n+1)\tan(x)\cos^{2n+1}(x)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\tan^2(x)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\end{aligned}$$

5. *Pour y fixé dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on désigne par f la fonction définie sur $[0,y]$ par $f(x) = y\sin(x) - x\sin(y)$. Cette fonction est indéfiniment dérivable avec $f'(x) = y\cos(x) - \sin(y)$ et $f''(x) = -y\sin(x) < 0$ pour $x \in]0,y]$, donc f' est strictement décroissante sur $[0,y]$. Comme $f(0) = f(y) = 0$, le théorème de Rolle nous dit qu'il existe $c \in]0,y[$ tel que $f'(c) = 0$ et avec la stricte décroissance de f', on déduit que $f'(x) > 0 = f'(c)$ sur $]0,c[$ et $f'(x) < 0$ sur $]c,y[$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0,c[$, strictement décroissante sur $]c,y[$ avec $f(0) = f(y) = 0$ et en conséquence $f(x) > 0$ sur $]0,y[$ (f est strictement concave sur $[0,y]$), ce qui équivaut à $\frac{x}{y} < \frac{\sin(x)}{\sin(y)}$.*

   Une étude analogue donne $\frac{\tan(x)}{\tan(y)} < \frac{x}{y}$.

6. *Si $u_n = \cos^n\left(\frac{x}{n}\right)$, on a*

$$\ln(u_n) = n\ln\left(1-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{x^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = 1$.

7. *Pour $x \in]0,\pi[$ et $n \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin\left((2n+1)\frac{x}{2n+1}\right)\\ &= (2n+1)\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\end{aligned}$$

   avec :

$$0 < \frac{x}{2n+1} < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$$

   pour k compris entre 1 et n, ce qui donne :

$$0 < \frac{x}{k\pi} = \frac{\frac{x}{2n+1}}{\frac{k\pi}{2n+1}} < \frac{\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} < 1$$

   et :

$$0 < 1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} < 1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}$$

Tenant compte de $\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right) < \frac{x}{2n+1}$, *il en résulte que :*

$$\begin{aligned}\sin(x) &< (2n+1)\sin\left(\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\\ &< x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\end{aligned}$$

et faisant tendre n *vers l'infini, on en déduit que :*

$$\sin(x) \leq x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

(on sait que le produit infini converge).
Pour $x \in \left]0,\pi\right[$ *et* $n \geq 1$, *on a* $\frac{x}{2n+1} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ *et :*

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin\left((2n+1)\frac{x}{2n+1}\right)\\ &= (2n+1)\tan\left(\frac{x}{2n+1}\right)\cos^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\end{aligned}$$

avec :

$$0 < \frac{\tan\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} < \frac{x}{k\pi} < 1$$

pour k *compris entre* 1 *et* n *et :*

$$0 < 1-\frac{x^2}{k^2\pi^2} < 1-\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2n+1}\right)}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

Tenant compte de $\tan\left(\frac{x}{2n+1}\right) > \frac{x}{2n+1}$, *il en résulte que :*

$$\sin(x) > x\cos^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

et faisant tendre n *vers l'infini, on en déduit que :*

$$\sin(x) \geq x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

et $\sin(x) = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ *pour* $x \in \left]0,\pi\right[$.
Ce résultat est valable pour $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$ *et par parité, cette identité est encore valable pour* $x \in [-\pi,\pi]$.

Remarque 6.18 *En utilisant le développement précédent en produit infini de* $\sin(x)$, *Euler démontre l'égalité* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *comme suit : le coefficient de* x^3 *dans le développement limité* *à l'ordre 3 de ce produit infini est égal* $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2}$*, mais c'est aussi celui de* x^3 *dans la développement de* $\sin(x)$*, soit* $-\frac{1}{6}$*, ce qui donne le résultat. Il faudrait en fait justifier un peu plus sérieusement la première affirmation.*

De manière plus générale la convergence absolue de $\sum v_n$ avec les v_n réels différents de -1 nous assure la stricte convergence $\prod (1 + v_n)$.

Théorème 6.30 *Si* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite de réels tous différents de* -1 *telle que la série* $\sum v_n$ *soit absolument convergente, alors le produit infini* $\prod (1 + v_n)$ *est strictement convergent.*

Démonstration. On note toujours $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des produits partiels de $\prod (1 + v_n)$.

Avec $\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| < +\infty$, on déduit que $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ et il existe un entier n_0 tel que $1 + v_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui permet d'écrire pour $n \geq n_0 + 1$, $P_n = P_{n_0} Q_n$, avec $Q_n = \prod_{k=n_0+1}^{n} (1 + u_k) > 0$.

Avec $\ln(Q_n) = \sum_{k=n_0+1}^{n} \ln(1 + v_k)$ et $|\ln(1 + v_k)| \underset{k \to +\infty}{\backsim} |v_k|$, on déduit que la série $\sum \ln(1 + v_n)$ est absolument convergente. La suite $(\ln(Q_n))_{n \geq n_0+1}$ est donc convergente et en notant S sa limite, on a $\lim_{n \to +\infty} P_n = P_{n_0} e^S \neq 0$. ∎

6.11 Exercices supplémentaires

Exercice 6.46 *Le but de cet exercice est de calculer la somme de la série numérique :*

$$\sum \frac{1}{u_n} \text{ où } u_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ pour tout } n \geq 1$$

1. *Montrer que*

$$\forall n \geq 1, \ u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. *Justifier la convergence de la série* $\sum \frac{1}{u_n}$.

   (a) *Montrer que la suite* $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ *définie par* $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ *pour tout* $n \geq 1$ *est décroissante minorée. Sa limite est la constante d'Euler, notée* γ.

   (b) *Montrer que la suite* $\left(\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \right)_{n \geq 1}$ *est convergente et déterminer sa limite.*

3.

   (a) *Déterminer des réels* a, b, c *tels que l'on ait, pour tout* $n \geq 1$ *:*

$$\frac{1}{u_n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

   (b) *Calculer la somme* $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$.

Solution 6.46

1. *En effectuant le changement d'indice* $k = j + 1$, *on a :*

$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{j=0}^{n} (j+1)^3 = \sum_{j=0}^{n} j^3 + 3\sum_{j=0}^{n} j^2 + 3\sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} 1$$

soit :

$$v_{n+1} = v_n + 3u_n + 3w_n + n + 1$$

où $w_n = \sum\limits_{j=0}^{n} j = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *et :*

$$\begin{aligned} 3u_n = v_{n+1} - v_n - 3w_n - (n+1) &= (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

ce qui donne $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
On peut aussi procéder par récurrence sur $n \geq 1$.

2. *On a* $0 < \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{n^2}$, *ce qui entraîne la convergence de la série* $\sum \dfrac{1}{u_n}$.

3.

   (a) *Pour* $n \geq 1$, *on a :*

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \\ &= \int_n^{n+1} \frac{t-(n+1)}{(n+1)t} dt < 0, \end{aligned}$$

   c'est-à-dire que $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*
   La fonction $t \rightarrow \dfrac{1}{t}$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}^{+*}$, *donc :*

$$\forall k \geq 1,\ \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

   et pour tout $n \geq 2$, *on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1),$$

   soit $\gamma_n \geq \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) > 0$.

   (b) *On a pour tout* $n \geq 1$ *:*

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \gamma_{2n+1} + \ln(2n+1) - (\gamma_n + \ln(n)) \\ &= \gamma_{2n+1} - \gamma_n + \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

et avec la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$, *on déduit que :*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k}=\ln(2).$$

4. On note $(S_n)_{n\geq 1}$ *la suite des sommes partielles de la série* $\sum \frac{1}{u_n}$.

(a) On a la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{x(x+1)(2x+1)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{4}{2x+1}$$

et :

$$\frac{1}{u_n}=6\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{4}{2n+1}\right)$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k}&=6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)\\
&=6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}-4\left(\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-1\right)\right)\\
&=6\left(4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-4\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+3\right)\\
&=24\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}\right)+\frac{6}{n+1}+18\\
&=\frac{6}{n+1}+18-24\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\rightarrow}18-24\ln(2),
\end{aligned}$$

soit :

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2}=6\left(3-4\ln(2)\right).$$