

TABLE DES MATIERES

Contents	xv
-----------------------	-----------

Avant-propos	xvii
---------------------------	-------------

Chapitre 1 — Le langage Ada avec OpenAda

1. <i>Petit historique de Ada</i>	1
2. <i>Une présentation rapide du langage Ada</i>	3
2.1 Le manuel de référence	3
2.2 Un survol du langage	3
2.3 Exemples d'utilisations de Ada	6
3. <i>Utilisation du compilateur OpenAda sur micro-ordinateur</i>	7

Chapitre 2 — Bibliothèque mathématique

1. <i>Introduction</i>	11
2. <i>Le paquetage CRT</i>	12
2.1 Spécifications des paquetages COMMON_CRT et CRT	12
2.2 Documentation du paquetage CRT	13
2.2.1 La procédure CLREOL	13
2.2.2 La procédure CLRSCR	13
2.2.3 La procédure GOTOXY	13
2.2.4 La fonction READKEY	13
2.2.5 Les fonctions WHERE_X et WHERE_Y	13
2.2.6 La procédure Cursor	13
2.2.7 La procédure PUT_CHAR	13
2.2.8 La procédure PUT_STRING	13
2.2.9 La procédure PUT_LINE_STRING	13
2.2.10 Partie initialisation de CRT	13
3. <i>Le paquetage MATH0</i>	14
3.1 Spécifications des paquetages COMMON_MATH0 et MATH0	14
3.2 Documentation du paquetage MATH0	15
3.2.1 La procédure GET_TIME	15
3.2.2 La procédure RANDOMIZE	15
3.2.3 Les fonctions RANDOM	15
3.2.4 La fonction MAJUSCULE	15
3.2.5 Les procédures GET_LINE	16
3.2.6 La fonction LIRE_REPONSE	16
3.2.7 La procédure PAUSE	16
3.2.8 La procédure BIP	16
3.2.9 La procédure CHRONOMETRE	16
3.2.10 Les procédures d'entrée des entiers et des réels	16
3.2.11 Les fonctions CHAINE_ENTIERE et CHAINE_REELLE	16
3.2.12 La procédure LECTURE_REPERTOIRE	16
3.2.13 La procédure LIRE_FICHIER	17
3.2.14 La procédure FICHIER_EXISTE	17
3.2.15 La procédure CREER_FICHIER	17
3.2.16 La procédure MODE_AFFICHAGE	17
3.2.17 La fonction TRUNC	17
3.2.18 La fonction FRAC	17

3.2.19 Les procédures de permutation de deux entiers ou deux réels	17
3.2.20 Les procédures VAL	17
3.2.21 La fonction LONGUEUR_CHAINE	18
3.2.22 Un exemple de programme utilisant Math0	18
4. Le paquetage MATH1	19
4.1 Spécifications des paquetages COMMON_MATH1 et MATH1	20
4.2 Documentation du paquetage MATH1	20
4.2.1 Les fonctions Puissances	20
4.2.2 Les fonctions ArcTan, ArcSin et ArcCos	20
4.2.3 Les fonctions hyperboliques inverses	21
4.2.4 Les fonctions Gamma et LnGamma	21
5. Le paquetage Math2	21
5.1 Spécifications du paquetage MATH2	22
5.2 Documentation de MATH2	22
5.2.1 Les fonctions EVALUE	22
5.2.2 La procédure DETRUIT_FONCTION	23
5.2.3 La procédure GET_LINE	23
5.2.4 La fonction TEXTE_DE_FONCTION	23
6. Le paquetage GRAPH	23
6.1 Spécifications des paquetages COMMON_GRAPH et GRAPH	23
6.2 Documentation de GRAPH	24
6.2.1 La procédure CLEAR_SCREEN	24
6.2.2 La procédure CLOSE_GRAPH	24
6.2.3 La procédure INIT_GRAPH	24
6.2.4 La procédure MOVE_TO	24
6.2.5 La procédure PUT_PIXEL	24
6.2.6 La procédure LINE	24
6.2.7 La procédure LINE_TO	24
6.2.8 La procédure RECTANGLE	24
7. Le paquetage MATH3	24
7.1 Spécifications des paquetages COMMON_MATH3 et MATH3	24
7.2 Documentation de MATH3	25
7.2.1 La procédure INIT_GRAPHIQUE	25
7.2.2 La procédure MODE_TEXTE	25
7.2.3 La procédure MESSAGE_ERREUR_GRAPHIQUE	26
7.2.4 La procédure TEST_MODE_GRAPHIQUE	26
7.2.5 La procédure TEXT_MOVE_TO	26
7.2.6 La procédure PAUSE_GRAPHIQUE	26
7.2.7 La procédure FENETRE	26
7.2.8 La procédure CADRE_GRAPHIQUE	26
7.2.9 La procédure FENETRE_GRAPHIQUE	26
7.2.10 La procédure CONVERSION	26
7.2.11 La procédure DEPLACE	26
7.2.12 La procédure TRACE	27
7.2.13 La procédure CROIX	27
7.2.14 La procédure TRACE_SEGMENT	27
7.2.15 La procédure POINT	27
7.2.16 La procédure CERCLE	27
7.2.17 La procédure TITRE	27
7.2.18 La procédure X_AXE	27
7.2.19 La procédure Y_AXE	27
7.2.20 La procédure XY_AXES	27
7.2.21 La procédure SORTIE_GRAPHIQUE	27
7.2.22 Un exemple d'utilisation de MATH2 et de MATH3	27
8. Exercices	32

Chapitre 3 — Analyse numérique linéaire

1. <i>Introduction</i>	39
1.1 Position des problèmes	39
1.2 Notations	39
1.3 Remarques	39
1.4 Problèmes numériques liés à la résolution des systèmes linéaires	40
1.5 Systèmes dégénérés et numériquement dégénérés	40
1.6 Problèmes de stabilité numérique	42
1.7 Méthodes de résolution des systèmes linéaires	43
1.8 Exemples d'applications	43
2. <i>Rappels et compléments sur le calcul matriciel</i>	44
2.1 Normes vectorielles et matricielles	44
2.1.1 Norme matricielle induite par une norme vectorielle	44
2.1.2 Norme utilisée dans ce livre	44
2.2 Conditionnement d'une matrice	45
2.3 Valeurs propres et rayon spectral d'une matrice	46
2.3.1 Définitions	46
2.3.2 Propriétés du rayon spectral	46
2.4 Quelques propriétés des matrices symétriques réelles	47
2.4.1 Transposée d'une matrice	47
2.4.2 Spectre des matrices symétriques	47
2.5 Matrices à diagonale strictement dominante	47
3. <i>Résolution numérique des systèmes linéaires. Inversion des matrices</i>	48
3.1 Position des problèmes. Notations	48
3.2 Une méthode impraticable : la méthode de Cramer	49
3.3 Cas des systèmes triangulaires	49
3.3.1 Résolution des systèmes triangulaires	49
3.3.2 Inversion des matrices triangulaires	50
3.4 Méthode des pivots de Gauss	51
3.4.1 Principe de la méthode	51
3.4.2 Description de la méthode	51
3.4.3 Remarque sur le choix des pivots : méthode de Gauss avec pivots partiels	52
3.4.4 Nombre d'opérations élémentaires dans la méthode de Gauss	52
3.4.5 Programmation structurée	53
3.4.6 Remarques	54
3.5 Méthode de Gauss-Jordan	55
3.5.1 Méthode d'élimination de Gauss-Jordan	55
3.5.2 Inversion et calcul du déterminant d'une matrice	57
3.6 Interprétation algébrique de la méthode de Gauss.	
Décomposition L-R ou méthode de Crout	58
3.6.1 Condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'y ait pas de permutations dans la méthode de Gauss	58
3.6.2 Interprétation algébrique de la méthode Gauss	59
3.6.3 Détermination pratique de la décomposition L-R	60
3.6.4 Résolution d'un système linéaire par la méthode de Crout	61
3.6.5 Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode de Crout	61
3.7 Cas des matrices tridiagonales	61
3.7.1 Notations et hypothèses	61
3.7.2 Décomposition L-R d'une matrice tridiagonale	61
3.7.3 Méthode de résolution d'un système tridiagonal	62
3.7.4 Déterminant d'une matrice tridiagonale	63
3.7.5 Exemples d'applications	63
3.8 Résolution des systèmes symétriques	63

3.8.1 Décomposition $L \cdot D \cdot L^t$	63
3.8.2 Calculs pratiques	64
3.8.3 Programmation structurée	64
3.8.4 Cas particulier des matrices symétriques définies positives. Décomposition $B \cdot B^t$ de Cholesky	65
3.9 Résolution des systèmes linéaires par des méthodes itératives	65
3.9.1 Remarques préliminaires	65
3.9.2 Principe des méthodes itératives	65
3.9.3 Méthode de Jacobi	66
3.9.4 Méthode de Gauss-Seidel	67
3.9.5 Comparaison des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel dans le cas des matrices tridiagonales d'ordre $n \geq 3$	69
3.9.6 Méthode de relaxation	70
3.9.7 Exemple d'application	73
4. Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de certaines matrices réelles	75
4.1 Introduction	75
4.2 Calcul du rayon spectral d'une matrice. Méthode de la puissance itérée	75
4.2.1 Hypothèses et notations	75
4.2.2 Méthode de la puissance itérée pour calculer le rayon spectral	76
4.3 Calcul des autres valeurs propres par la méthode de déflation	78
4.3.1 Hypothèses et notations	78
4.3.2 Un lemme	78
4.3.3 Programmation structurée	79
4.4 Méthode de Rutishauser	79
4.4.1 Un lemme	79
4.4.2 Hypothèses	80
4.4.3 Principe de la méthode de Rutishauser	80
4.4.4 Une condition suffisante de convergence de la méthode de Rutishauser	80
4.5 Méthode de Jacobi pour calculer les valeurs et vecteurs propres d'une matrice symétrique	81
4.6 Méthodes de calcul du polynôme caractéristique	85
4.6.1 Méthode de Souriau	85
4.6.2 Méthode de Krylov	87
4.6.3 Méthode de Leverrier	87
5. Exercices	88
6. Programmation Ada	93
(6.1) Spécifications des paquetages COMMON_MATRIX et MATRIX	93
(6.2) Spécification du paquetage Algeblin	94
(6.3) Spécification du paquetage Donnees_ALGEBLIN	95
(6.4) Démonstration de la méthode des pivots de Gauss	95
(6.5) Démonstration de la méthode L-R	96
(6.6) Démonstration de la méthode du double balayage de Cholesky	97
(6.7) Démonstration de la méthode de Gauss-Jordan	97
(6.8) Démonstration de la méthode de Cholesky	98
(6.9) Démonstration de la méthode de Jacobi	99
(6.10) Démonstration de la méthode de relaxation	100
(6.11) Démonstration de la décomposition Q-R	100
(6.12) Démonstration du calcul de l'inverse d'une matrice de Van Der Monde	102
(6.13) Spécification du paquetage SPECTRE	102
(6.14) Démonstration de la méthode de déflation	103
(6.15) Démonstration de la méthode de Rutishauser	104
(6.16) Démonstration de la méthode de Jacobi	105
(6.17) Démonstration de la méthode de Souriau	106

Chapitre 4 — Résolution numérique des systèmes non linéaires

1. Introduction	107
1.1 Position des problèmes	107
1.2 Remarques	107
2. Cas des équations numériques	108
2.1 Notations	108
2.2 La méthode dichotomie ou de bisection	108
2.3 La méthode de Newton-Raphson	109
3. Cas des équations algébriques	111
3.1 Introduction	111
3.2 La méthode Newton_Maehly	111
4. Résolution des systèmes non linéaires par la méthode de Newton-Raphson	113
4.1 Introduction	113
4.2 Algorithme de Newton-Raphson	114
4.3 Calcul de la matrice jacobienne	114
4.4 Programmation structurée	114
5. Racines d'un polynôme. Méthode de Bairstow	115
5.1 Principe de la méthode	115
5.2 Recherche des coefficients p et q	115
5.3 Programmation structurée	118
6. Exercices	119
7. Programmation Ada	120
7.1 Spécification du paquetage EQUATIONS_GENERIQUE	120
7.2 Démonstration du paquetage EQUATIONS_GENERIQUE	120
7.3 Spécification du paquetage SYSTEME_EQUATIONS_GENERIQUE	122
7.4 Démonstration du paquetage SYSTEME_EQUATIONS_GENERIQUE	123
7.5 Spécifications des paquetages COMMON_POLY et POLY	124
7.6 Démonstration du paquetage POLY	125

Chapitre 5 — Approximation et interpolation

1. Introduction	127
2. Problèmes d'approximation. Méthode des moindres carrés	127
2.1 Introduction	127
2.2 Exemples	128
2.2.1 La loi d'Ohm	128
2.2.2 Elongation d'un ressort	128
2.2.3 Problème du fil chaud	128
2.2.4 Corrélation statistique	128
2.3 Détermination des paramètres	128
2.4 Principes des méthodes des moindres carrés	129
2.5 Les modèles linéaires	130
2.5.1 Généralités	130
2.5.2 La régression affine	130
2.5.3 Exemple : le problème du fil chaud	133
2.5.4 Régression polynomiale	133
2.5.5 Cas général	136
2.5.6 Régression trigonométrique	136
2.6 Les modèles non linéaires	137
2.7 Un exemple d'application : détermination du coefficient de traînée d'une particule sphérique	138
2.8 Calcul du cercle des moindres carrés	146
2.8.1 Notations et hypothèses	146
2.8.2 Calcul du cercle des moindres carrés	147
2.8.3 Application à un calcul de rayon de courbure	148
3. Approximation uniforme des fonctions continues. Courbes de Bernstein, Bézier et B-Splines	149

3.1	Position du problème	149
3.2	Les bases de Bernstein. Polynômes de Bernstein	150
3.2.1	Les bases de Bernstein	150
3.2.2	Polynômes de Bernstein associés à une fonction continue	152
3.3	Les courbes de Bézier	152
3.3.1	Données du problème	152
3.3.2	Les courbes de Bézier	153
3.3.3	Algorithme de De Casteljeau	154
3.4	Les surfaces de Bézier	155
3.4.1	Définition	155
3.4.2	Propriétés	156
3.4.3	Algorithme de De Casteljeau	157
3.5	Les courbes B-Splines	157
3.5.1	Introduction	157
3.5.2	Fonctions de base B-Splines	157
3.5.3	Courbes B-Splines	160
4.	Problèmes d'interpolation	162
4.1	Introduction. Position des problèmes	162
4.2	L'interpolation polynomiale de Lagrange	163
4.2.1	L'interpolation linéaire	163
4.2.2	Le théorème d'interpolation de Lagrange	163
4.2.3	Algorithme de Neville pour calculer le polynôme de Lagrange	164
4.2.4	Forme de Newton du polynôme de Lagrange	165
4.2.5	Sur le choix des abscisses d'interpolation. Les polynômes de Tchébychev	167
4.3	Interpolation spline cubique	168
4.3.1	Introduction	168
4.3.2	Position du problème. Notations	168
4.3.3	Calcul des coefficients d_i	169
4.3.4	Calcul des b_i et des a_i	169
4.3.5	Calcul des c_i	170
4.3.6	Calcul des $s_i = x^i$	170
4.3.7	L'interpolation spline naturelle	170
4.3.8	Programmation structurée pour l'interpolation spline naturelle	171
4.3.9	Application à un calcul d'intégrale	172
4.3.10	Cas des fonctions périodiques	173
4.3.11	Interpolation spline pour les courbes fermées	175
4.3.12	Majoration de l'erreur d'interpolation	176
5.	Exercices	177
6.	Programmation Ada	179
6.1	Spécification du paquetage REGRESSIONS	179
6.2	Le paquetage DONNEES_POINTS	179
6.3	Démonstration de la régression affine	179
6.4	Démonstration de la régression polynomiale	180
6.5	Démonstration de la régression circulaire	181
6.6	Spécification du paquetage BEZIER	181
6.7	Démonstration de l'approximation de Bézier	182
6.8	Spécification du paquetage B_SPLINE	183
6.9	Démonstration de l'approximation B_Spline	183
6.10	Spécification du paquetage LAGRANGE	184
6.11	Démonstration de l'interpolation de Lagrange	184
6.12	Spécification du paquetage INTERPOLATION_SPLINE	185
6.13	Démonstration de l'interpolation spline	186
Chapitre 6 — Calcul numérique des intégrales		
1.	Introduction. Position des problèmes	187

1.1 Remarques préliminaires sur le calcul des primitives	187
1.1.1 Calcul direct des intégrales.....	187
1.1.2 A propos des primitives élémentaires.....	187
1.2 Elaboration de méthodes numériques.....	188
2. Méthodes de calcul par interpolation polynomiale. Schémas d'intégration classiques	189
2.1 Idée des méthodes par interpolation	189
2.2 Résolution du problème (2).....	190
2.2.1 Existence et unicité d'une solution	190
2.2.2 Détermination pratique des coefficients a_i	190
2.2.3 Majoration de l'erreur	191
2.3 Cas particulier où les x_i sont équidistants. Méthodes de Newton et Cotes	192
2.3.1 Calcul des coefficients a_i	192
2.3.2 Majoration de l'erreur dans les méthodes de Newton_Cotes.....	193
2.4 Méthodes classiques d'intégration	193
2.4.1 Cas $n = 1$. Méthode des trapèzes	193
2.4.2 Cas $n = 2$. Méthode de Simpson	196
2.4.3 Méthode de Romberg	198
3. Utilisation des polynômes orthogonaux. Quadratures de Gauss	200
3.1 Introduction. Idées des méthodes	200
3.2 Notations. Position du problème	201
3.2.1 Notations	201
3.2.2 Position du problème.....	201
3.3 Calcul des abscisses x_i et des coefficients de Gauss a_i	202
3.3.1 Remarque.....	202
3.3.2 Condition nécessaire et suffisante sur P	202
3.3.3 Détermination explicite de P_n	202
3.4 Propriétés des polynômes orthogonaux. Calcul des coefficients de Gauss.....	203
3.4.1 Récurrence vérifiée par les polynômes orthogonaux	204
3.4.2 Formule de Darboux-Christoffel	204
3.4.3 Calcul des coefficients de Gauss a_i	204
3.5 Majoration de l'erreur de quadrature	205
3.6 Exemples classiques de polynômes orthogonaux et formules de quadrature correspondantes	205
3.6.1 Les polynômes de Legendre.....	205
3.6.2 Polynômes de Tchébychev	207
3.6.3 Polynômes de Laguerre	208
3.6.4 Polynômes d'Hermite.....	209
4. La méthode probabiliste de Monte-Carlo.....	210
4.1 Nombres pseudo-aléatoires	210
4.2 La méthode de Monte-Carlo. Première version : tirage par « noir ou blanc »	210
4.2.1 Equiprobabilité sur un segment, ou un pavé de \mathbb{R}^n	210
4.2.2 Calcul d'une intégrale simple.....	211
4.2.3 Calcul d'une intégrale multiple	211
4.2.4 Remarques	212
4.3 Méthode de Monte Carlo, deuxième version.....	212
4.3.1 Remarques préliminaires	212
4.3.2 Méthode de Monte Carlo avec échantillonnage simple.....	213
4.3.3 Utilisation de transformations antithétiques	214
4.3.4 Calcul d'intégrales multiples.....	215
4.3.5 Exemple : calcul des coordonnées du centre de gravité d'un corps.....	215
5. Transformation de Fourier rapide.....	216
5.1 Position du problème. Notations	216
5.2 Approximation des $\hat{f}(x_k)$	217
5.3 La transformation de Fourier discrète	218

5.3.1 Définition, propriétés.....	218
5.3.2 Calcul direct de la transformée de Fourier discrète	219
5.4 L'algorithme F.F.T. de Cooley et Tukey	220
5.4.1 Introduction	220
5.4.2 Cas particulier $n = 2$	220
5.4.3 Cas particulier $n = 4$	220
5.4.4 Cas général $n = 2^p$	221
5.4.5 Utilisation de (p) pour calculer la transformation de Fourier discrète.....	221
5.4.6 Nombre d'opérations élémentaires dans l'algorithme de Cooley et Tukey	222
5.4.7 Programmation structurée	223
5.5 Application au calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique.....	224
6. Exercices	225
7. Programmation Ada	229
7.1 Spécification du paquetage INTEGRATION_GENERIQUE	229
7.2 Démonstration du paquetage INTEGRATION_GENERIQUE	229
7.3 Spécifications des paquetages COMMON_FOURIER et FOURIER_GENERIQUE	232
7.4 Démonstration du paquetage FOURIER_GENERIQUE	233
Chapitre 7 — Résolution numérique des équations différentielles	
1. Introduction. Origines des problèmes d'équations différentielles	237
2. Problème de Cauchy.....	238
2.1 Position du problème	238
2.2 Problème de l'existence et l'unicité de solutions.....	240
2.3 Approximation de la solution d'un problème de Cauchy par discrétisation	242
3. Généralités sur les méthodes d'intégration à un pas	243
3.1 Définitions	243
3.2 Lien entre l'erreur de consistance et l'erreur de discrétisation	243
3.2.1 Hypothèses	243
3.2.2 Première évaluation de l'erreur de consistance	243
3.2.3 Hypothèses supplémentaires	244
3.2.4 Deuxième évaluation de l'erreur de consistance	244
3.2.5 Majoration de l'erreur de discrétisation	245
3.3 Les méthodes de Runge-Kutta.....	246
3.3.1 Principe des méthodes de Runge-Kutta.....	246
3.3.2 Exemples classiques	246
3.3.3 Remarque.....	248
3.3.4 Les schémas RK2	249
3.4 Programmation structurée de la méthode RK4 pour les équations différentielles d'ordre 1	249
3.5 Programmation structurée de la méthode RK4 pour les systèmes de p équations différentielles d'ordre 1	250
3.6 Programmation structurée de la méthode RK4 pour les équations différentielles d'ordre q	251
3.7 Programmation structurée de la méthode RK4 pour les systèmes de p équations différentielles d'ordre q	252
4. Contrôle du pas d'intégration.....	253
4.1 Position du problème	253
4.2 Choix du pas d'intégration à l'étape i du calcul	254
4.3 Programmation structurée de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec contrôle du pas	255
5. Problèmes avec conditions aux limites. Méthode du tir	256
5.1 Introduction : position du problème	256
5.2 La méthode du tir	257
5.2.1 Rappels	257
5.2.2 Programmation structurée de la méthode du tir.....	257

6. Un exemple d'application. Mouvement de translation d'un corps sphérique pesant dans un fluide au repos	259
6.1 Position du problème et notations	259
6.2 Equations du mouvement de la sphère	260
7. Exercices	266
8. Programmation Ada	268
8.1 Spécification du paquetage EQUADIFF_11_GENERIQUE	268
8.2 Spécification du paquetage EQUADIFF_P1_GENERIQUE	269
8.3 Spécification du paquetage EQUADIFF_1Q_GENERIQUE	269
8.4 Spécification du paquetage EQUADIFF_PQ_GENERIQUE	270
8.5 Démonstration du paquetage EQUADIFF_11_GENERIQUE	270
8.6 Démonstration du paquetage EQUADIFF_P1_GENERIQUE	271
8.7 Démonstration du paquetage EQUADIFF_1Q_GENERIQUE	274
8.8 Démonstration du paquetage EQUADIFF_PQ_GENERIQUE	275
Chapitre 8 — Méthode des différences finies	
1. Problème de Dirichlet linéaire en dimension un	279
1.1 Introduction	279
1.2 Théorème d'existence et d'unicité de solutions du problème de Dirichlet linéaire	280
1.3 Forme canonique de l'équation de Dirichlet. Le problème de Poisson	280
1.4 Résolution approchée du problème de Dirichlet par discrétisation	281
2. Approximations des dérivées d'une fonction par différences finies	281
2.1 Approximation de $f'(x_0)$ par différence finie centrée	281
2.2 Approximation de $f''(x_0)$ par différence finie centrée	282
3. Résolution approchée du problème de Dirichlet par la méthode des différences finies	282
3.1 Discrétisation du problème de Dirichlet	282
3.2 Discrétisation de l'équation de Poisson	284
3.3 Majoration de l'erreur	285
3.3.1 Majoration de $h(x) = y(x) - \psi(x)$	285
3.3.2 Majoration de $q(x) = y(x) - j(x)$	286
3.3.3 Majoration de $g(x) = y(x) - \phi(x)$	286
4. Exemples d'application	287
4.1 Dissipation de la chaleur dans un disque	287
4.2 Fléchissement d'une poutre	288
5. Résolution approchée d'équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies	288
5.1 Intervention des équations aux dérivées partielles en physique	288
5.1.1 L'équation des cordes vibrantes ou équation des ondes en dimension un	288
5.1.2 L'équation des ondes en dimension deux	291
5.1.3 Equation de la chaleur en dimension un	292
5.2 Classification des équations aux dérivées partielles d'ordre 2	294
5.2.1 Introduction	294
5.2.2 Cas particulier des équations à coefficients constants et sans second membre	294
5.2.3 Cas général	295
5.2.4 Exemple	296
5.2.5 Remarque	296
5.3 Principe de la méthode des différences finies	296
5.4 Cas d'un problème avec conditions au bord : l'équation de Poisson	297
5.5 Equations elliptiques avec conditions aux bords sur un rectangle	298
5.5.1 Position du problème et notations	298
5.5.2 Discrétisation du problème (1)	299
5.5.3 Méthode SOR (Simultaneous Over-Relaxation) pour résoudre un système tridiagonal par blocs	302
5.5.4 Programmation structurée de la méthode S.O.R avec accélération de Tchébycheff	303

5.6 Cas particulier de l'équation de Poisson	304
5.7 Exemple d'application : distribution de la température en régime stationnaire dans une cheminée	305
5.8 Premier exemple d'équation parabolique : l'équation de la chaleur à une dimension.....	306
5.8.1 Introduction	306
5.8.2 Existence et unicité de solutions de (1)	306
5.8.3 Résolution de l'équation de la chaleur à une dimension par des méthodes de différences finies	308
5.8.4 Problèmes de stabilité	310
5.9 Equations paraboliques linéaires à une variable d'espace avec conditions initiales	312
6. Exemple d'application : Phénomène de sustentation par utilisation d'une source de pression. Le patin hydrostatique	313
6.1 Présentation du problème	313
6.2 Détermination du coefficient K_s	314
6.3 Détermination du coefficient K_q	315
6.4 Raideur du patin	315
6.5 Modélisation du champ de pression	316
6.5.1 Introduction	316
6.5.2 Les équations de laminage.....	316
6.5.3 Résolution dans le cas où les termes d'accélération sont très petits.....	317
7. Exercices.....	317
8. Programmation Ada	319
8.1 Spécification du paquetage DIRICHLET	319
8.2 Démonstration du paquetage DIRICHLET	319
8.3 Spécification du paquetage NIVEAUX.....	321
8.4 Spécification du paquetage EDP_ELLIPTIQUES	321
8.5 Démonstration du paquetage EDP_ELLIPTIQUES.....	322
8.6 Spécification du paquetage EDP_PARABOLIQUES	326
8.7 Démonstration du paquetage EDP_PARABOLIQUES	326
Bibliographie	329
Index	333

Avant-propos

Le but de cet ouvrage est de décrire, sans référence à un quelconque langage de programmation, des méthodes classiques d'analyse numérique, et de mettre à la disposition du programmeur scientifique (mathématicien ou utilisateur des mathématiques) une bibliothèque mathématique écrite en Ada et prête à l'emploi sur compatible PC.

Cet ouvrage pourra être très utile aux auditeurs du cours « programmation scientifique » du cycle B du Cnam ainsi qu'à tout étudiant en licence, maîtrise d'analyse numérique ou école d'ingénieurs. De manière plus générale il intéressera tout utilisateur de l'outil mathématique sur ordinateur.

L'informatique et les mathématiques sont ici des outils. C'est un ouvrage de *programmation mathématique* dans la lignée des « Numerical Recipes ».

Cet ouvrage n'a pas la prétention d'être un ouvrage d'informatique. Son but est de montrer que le langage Ada peut être très efficace pour résoudre des problèmes numériques (créneau non encore exploité). J'espère inciter le programmeur scientifique en Pascal ou autre à évoluer vers Ada. Il est vrai que la lecture sera plus aisée pour le lecteur connaissant Pascal (c'est théoriquement le cas pour tout étudiant en école d'ingénieur).

Dans le premier chapitre on fait un rapide tour d'horizon du langage Ada en mettant l'accent sur les grandes qualités de ce langage (essentiellement l'apprentissage d'une « bonne hygiène de programmation »). Le lecteur devra consulter la bibliographie pour plus de détails. Ce chapitre se termine par une brève description du compilateur Open Ada sur PC, distribué en France par Cerus Informatique.

Dans le deuxième chapitre on décrit une série de paquetages de base permettant de manipuler des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles et d'exploiter les spécificités du PC pour travailler en mode graphique. Cette bibliothèque est inspirée du logiciel Modulog utilisé par les élèves de classes préparatoires. Elle est adaptée à l'utilisation du compilateur Open Ada sur PC. En général, les ouvrages sur le langage Ada ne se préoccupent pas d'une implémentation particulière d'un compilateur et pourtant il faudra bien travailler sur un type particulier de matériel.

A ma connaissance une telle bibliothèque livrée avec les sources Ada n'est pas disponible dans le domaine public et pourra être très utile au programmeur scientifique.

Dans l'ouvrage, seules les spécifications sont présentées. C'est tout ce que l'utilisateur a besoin de connaître. Le corps de ces paquetages est disponible sur la disquette livrée avec l'ouvrage.

Dans les chapitres 3 à 8 on décrit des méthodes numériques de base.

Pour chaque chapitre j'ai adopté la même philosophie de travail :

- Définir le problème à résoudre.
- Analyser le problème en donnant des résultats théoriques sur l'existence et l'unicité de solutions.
- Décrire les méthodes numériques classiques d'intérêt pédagogique et présenter des méthodes améliorées.

Par exemple, pour le calcul des intégrales on a les méthodes classiques des trapèzes et de Simpson puis celle plus performante de Romberg.

Ces méthodes sont décrites, du point de vue mathématique de façon rigoureuse, mais je n'ai pas jugé utile de réécrire certaines démonstrations que l'on peut trouver dans la littérature. J'utilise des références du type : voir Stoer et Burlisch p. 234.

- Ces méthodes étant destinées à être programmées, l'analyse précédente se termine par une programmation structurée en Français (en *italique* dans le texte) sans référence à un quelconque langage de programmation.

L'intérêt de cette façon de programmer est de ne pas restreindre le public aux seuls programmeurs Ada.

- Une série d'exercice est proposée pour chaque chapitre.
- Enfin le chapitre se termine par la programmation Ada correspondante sous forme de paquetages et d'exemples d'utilisation (en « *courier* » dans le texte). Seules les spécifications des paquetages et des programmes d'exemples figurent sur le manuscrit, l'intégralité se trouvant sur la disquette.

On donne également des exemples d'applications de ces méthodes à des problèmes issus de la mécanique des fluides. Ces exemples sont dus à Guy Aubry, professeur de mécanique des fluides à l'Ensam.

Les sujets traités sont :

Chapitre 3 — Résolution de systèmes d'équations linéaires et recherche de valeurs propres.

Chapitre 4 — Résolution de systèmes d'équations non linéaires.

Chapitre 5 — Mathématiques pour la CAO (Conception Assistée par Ordinateur) : approximations par des courbes de régression, de Bézier et B-Splines ; interpolations de Lagrange et Splines cubiques.

Chapitre 6 — Calculs d'intégrales et transformée de Fourier rapide (outils de la théorie du signal).

Chapitre 7 — Résolution d'équations et de systèmes différentiels.

Chapitre 8 — Résolution d'équations aux dérivées partielles par la méthode des différences finies.

Avec cet ouvrage je pense convaincre le lecteur que le langage Ada est vraiment bien adapté à la programmation mathématique (sécurité nettement supérieure à ce qu'on peut espérer avec les autres langages de programmation, réutilisabilité des composants logiciels, gestion des tableaux très efficace sans avoir à utiliser de pointeurs, ...).

Remerciements — Je tiens à remercier le Professeur André Warusfel qui a bien voulu étudier mon manuscrit. C'est pour moi un grand honneur de le publier dans la collection qu'il coordonne : « Logique Mathématiques et Informatique ».

Je remercie également Marcel Nicolas, Directeur de l'ENSAM de Châlons sur Marne qui a mis à ma disposition le matériel nécessaire à la réalisation de ce livre.

Enfin un grand merci à mon ami et collègue Jean Luc Bauchat pour avoir lu et critiqué une première version.

Contenu de la disquette fournie avec le livre — Cette disquette est découpée en répertoires comme décrit ci-dessous.

A:\DIVERS — Chapitre 2

PREMIERS.ADA	LIST.ADA	POLYGO.ADA	DEM_CART.ADA
DEM_NIV.ADA	DEM_CURV.ADA		

A:\BIBLIO — Chapitres 2 à 8

LIO.ADS	CO_CRT.ADS	CRT.ADS	CRT.ADB
CO_MATH0.ADS	MATH0.ADS	MATH0.ADB	CO_MATH1.ADS
MATH1.ADS	MATH1.ADB	LIRE_FCT.ADA	MATH2.ADS
MATH2.ADB	CO_MATH3.ADS	MATH3.ADS	MATH3.ADB
CO_GRAPH.ADS	GRAPH.ADS	GRAPH.ADB	CURVE.ADS
CURVE.ADB	CARTESIE.ADS	CARTESIE.ADB	CO_MATRI.ADS
MATRIX.ADS	MATRIX.ADB	NIVEAUX.ADS	NIVEAUX.ADB
ALGEBLIN.ADS	ALGEBLIN.ADB	SPECTRE.ADS	SPECTRE.ADB
DON_ALGL.ADS	DON_ALGL.ADB	CO_POLY.ADS	POLY.ADS
POLY.ADB	COMPLEXE.ADS	COMPLEXE.ADB	EQUATION.ADS
EQUATION.ADB	SYST_EQU.ADS	SYST_EQU.ADB	REGRESS.ADS
REGRESS.ADB	BEZIER.ADS	BEZIER.ADB	B_SPLINE.ADS
B_SPLINE.ADB	LAGRANGE.ADS	LAGRANGE.ADB	SPLINE.ADS
SPLINE.ADB	DON_PTS.ADS	DON_PTS.ADB	INTEGRAT.ADS
INTEGRAT.ADB	CO_FOURI.ADS	FOURIER.ADS	FOURIER.ADB
CO_QDIF.ADS	QDIF_1I.ADS	QDIF_1I.ADB	QDIF_P1.ADS
QDIF_P1.ADB	QDIF_1Q.ADS	QDIF_1Q.ADB	QDIF_PQ.ADS
QDIF_PQ.ADB	DIRICHLE.ADS	DIRICHLE.ADB	ELLIPTIC.ADS
ELLIPTIC.ADB	PARABOLI.ADS	PARABOLI.ADB	

A:\DONNEES — Données pour les programmes

REGR_AFF.DAT : Nuage de points pour la régression affine.

SPL_CART.DAT SPL_PARA.DAT : Nuages de points pour l'interpolation spline.

BILLE.DAT : Données pour BILLE1.ADA et BILLE.ADA.

B_SPLINE.DAT : Nuage de points pour l'interpolation B_Spline.

ALGEBLIN — Chapitre 3

HILBERT.ADA DEM_PIV.ADA DEM_LR.ADA DEM_GJ.ADA

DEM_TRID.ADA DEM_CHOL.ADA DEM_JAC.ADA DEM_REL.ADA

DEM_DEFL.ADA DEM_VPJA.ADA DEM_RUTI.ADA DEM_SOU.ADA

DEM_VAND.ADA DEM_QR.ADA DEM_ALGL.ADA

EQUATION — Chapitre 4

DEM_POL.ADA DEM_EQU.ADA DEM_SYST.ADA

INTERPOL — Chapitre 5

DEM_AFF.ADA DEM_POL.ADA DEM_CIRC.ADA DEM_APPR.ADA

BILLE1.ADA DEM_BEZI.ADA DEM_BSPL.ADA DEM_LAGR.ADA

DEM_SPL.ADA DEM_APP1.ADA DEM_APP2.ADA

INTEGRAT — Chapitre 6

DEM_INT.ADA DEM_FFT.ADA

EQUADIFF — Chapitre 7

BILLE.ADA DEM_RK11.ADA DEM_RKP1.ADA DEM_RK1Q.ADA

DEM_RKPQ.ADA DEM_QDIF.ADA

EDP — Chapitre 8

DEM_DIRI.ADA DEM_ELLI.ADA DEM_CHAL.ADA DEM_EDP.ADA

Notes — Les programmes proposés dans ce livre le sont à titre pédagogique. Je ne garantis en aucune manière qu'ils soient exempts d'erreurs. Le lecteur peut les utiliser à ses propres risques et périls. Ni l'auteur ni les éditions Masson ne peuvent être tenus pour responsables des dommages que l'utilisation de ces programmes pourrait occasionner.

En aucun cas ces programmes ne peuvent être utilisés à des fins commerciales ou industrielles.

Open Ada est une marque déposée de Meridian Software.

First Ada est une marque déposée de Alsys.