23

Variables aléatoires réelles

Pour ce paragraphe, $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

23.1 Définition et propriétés des variables aléatoires réelles

Définition 23.1 *On dit qu'une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si :*

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ X^{-1}(A) \in \mathcal{B}$$

On dit aussi qu'une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{B})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Remarque 23.1 *Pour $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Donc, dans le cas où Ω est dénombrable, en prenant $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu d'événements, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire.*

En utilisant le théorème 21.2, on a le résultat suivant.

Théorème 23.1 *Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si, et seulement si :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{B}$$

Démonstration. Le théorème 21.2 nous dit que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{X}_1)$, où $\mathcal{X}_1 = \{]-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on a alors $X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{B}$ pour tout réel x puisque $]-\infty, x] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Réciproquement, soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{B}$ pour tout réel x. On note :

$$\mathcal{A} = \left\{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \mid X^{-1}(A) \in \mathcal{B}\right\}$$

et on veut montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Pour ce faire, on montre que c'est une tribu qui contient $\mathcal{X}_1$, ce qui implique que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}$ et comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a l'égalité attendue.

Par hypothèses, on a $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Avec $\Omega = X^{-1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R} \in \mathcal{X}_1$, on déduit que $\Omega \in \mathcal{A}$.

Si $A \in \mathcal{A}$, on a alors :

$$X^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = \Omega \setminus X^{-1}(A) \in \mathcal{B}$$

et $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{A}$.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, on a alors :

$$X^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}$$

et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Donc $\mathcal{A}$ est une tribu et $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ce qui signifie que X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. ■

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, nous noterons :

- $(X \in A)$ pour $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ où $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$;
- $(X = x)$ pour $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ où x est un réel ;
- $(X \leq x)$ pour $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ où x est un réel ;
- $(X < x)$ pour $X^{-1}(]-\infty, x[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$ où x est un réel.

Exercice 23.1 *Montrer qu'une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si, et seulement si :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}(]-\infty, x[) \in \mathcal{B}$$

Solution 23.1 *Comme les intervalles de la forme $]-\infty, x[$ sont des boréliens, la condition est nécessaire.*
Réciproquement, soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $X^{-1}(]-\infty, x[) \in \mathcal{B}$ pour tout réel x.
Pour montrer que X est une variable aléatoire réelle, il nous suffit de montrer que $X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{B}$ pour tout réel x, ce qui résulte de :

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right[\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} X^{-1}\left(\left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right[\right)$$

Exercice 23.2 *On suppose que Ω est dénombrable. Montrer qu'une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si, et seulement si :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{B}$$

Solution 23.2 *Résulte du fait que :*

$$X^{-1}(]-\infty, x[) = \bigcup_{\substack{\omega\in\Omega \\ X(\omega)<x}} X^{-1}(X(\omega))$$

la réunion étant dénombrable pour Ω dénombrable.

Définition 23.2 *On dit qu'une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si $X(\Omega)$ est dénombrable et si $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{B}$ pour tout réel x. Dans le cas où $X(\Omega)$ est fini, on dit que X est étagée.*

Théorème 23.2 *Une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est une variable aléatoire.*

Démonstration. On a $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ et pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} X^{-1}(]-\infty, x]) &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i \text{ où } i \in I \text{ et } x_i \leq x\} \\ &= \bigcup_{\substack{i\in I \\ x_i\leq x}} X^{-1}(\{x_i\}) \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

puisqu'il s'agit d'une réunion dénombrable. ■

Théorème 23.3 *Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $f \circ X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.*

Démonstration. On a $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ et en conséquence $(f \circ X)(\Omega) = \{f(x_i) \mid i \in I\}$ est dénombrable.

Si $y \in \mathbb{R} \setminus (f \circ X)(\Omega)$, on a $(f \circ X)^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ et si $y = f(x_k) \in (f \circ X)(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}(f \circ X)^{-1}(\{y\}) &= \{\omega \in \Omega \mid f(X(\omega)) = f(x_k)\} \\ &= \bigcup_{i \in I \mid f(x_i) = f(x_k)} X^{-1}(\{x_i\}) \in \mathcal{B}\end{aligned}$$

Donc $f \circ X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. ∎

Théorème 23.4 *L'ensemble $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ stable par multiplication (c'est une $\mathbb{R}$-algèbre).*

Démonstration. Pour la structure d'espace vectoriel, il suffit de prouver que $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^\Omega$ de toutes les applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

La fonction identiquement nulle $X_0 : \omega \mapsto 0$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ puisque pour tout réel x, on a :

$$X_0^{-1}(]-\infty, x]) = (0 \leq x) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \text{ si } x < 0 \\ \Omega \text{ si } x \geq 0 \end{array} \right. \in \mathcal{B}$$

Soient X, Y dans $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $\omega \in (X+Y)^{-1}(]-\infty, x[)$, on a $X(\omega) + Y(\omega) < x$ et il existe un nombre rationnel r_ω tel que :

$$X(\omega) < r_\omega < x - Y(\omega)$$

ce qui entraîne $X(\omega) < r_\omega$, soit $\omega \in X^{-1}(]-\infty, r_\omega[)$ et $Y(\omega) < x - r_\omega$, soit $\omega \in Y^{-1}(]-\infty, x - r_\omega[)$. On a donc :

$$(X+Y)^{-1}(]-\infty, x[) \subset A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} X^{-1}(]-\infty, r[) \cap Y^{-1}(]-\infty, x - r[)$$

Réciproquement si $\omega \in A$, il existe un rationnel r tel que $X(\omega) < r$ et $Y(\omega) < x - r$, ce qui entraîne $(X+Y)(\omega) < x$ et $\omega \in (X+Y)^{-1}(]-\infty, x[)$. En définitive :

$$(X+Y)^{-1}(]-\infty, x[) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} X^{-1}(]-\infty, r[) \cap Y^{-1}(]-\infty, x - r[) \in \mathcal{B}$$

comme réunion dénombrable d'éléments de la tribu $\mathcal{B}$ et $X + Y \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Soient X dans $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = 0$, on a alors $\lambda X = 0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Pour $\lambda > 0$, on a :

$$(\lambda X)^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{x}{\lambda}\right]\right) \in \mathcal{B}$$

et pour $\lambda < 0$, on a :

$$(\lambda X)^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}\left(\left[\frac{x}{\lambda}, +\infty\right[\right) \in \mathcal{B}$$

Donc $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

En écrivant que $XY = \frac{1}{4}\left((X+Y)^2 - (X-Y)^2\right)$, il nous suffit de montrer que le carré d'une variable aléatoire est une variable aléatoire pour en déduire que $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est stable par multiplication.

Pour X dans $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $(X^2)^{-1}(]-\infty, x]) = \emptyset$ si $x < 0$ et pour $x \geq 0$, $\omega \in \Omega$, on a :

$$X^2(\omega) \leq x \Leftrightarrow -\sqrt{x} \leq X(\omega) \leq \sqrt{x}$$

ce qui entraîne que :

$$\left(X^2\right)^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}\left(\left[-\sqrt{x}, \sqrt{x}\right]\right) \in \mathcal{B}$$

et donc $X^2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. ■

On rappelle que si A est une partie de Ω, on définit alors sa fonction caractéristique par :

$$\begin{array}{rccl} \chi_A : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & \chi_A(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \in \Omega \setminus A \end{array} \right. \end{array}$$

Pour $A = \emptyset$, on a $\chi_A = 0$ et pour $A = \Omega$, on a $\chi_A = 1$.

Exercice 23.3 *Montrer que si n est un entier naturel non nul, $A_1, \cdots, A_n$ des éléments de $\mathcal{B}$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels, alors $X = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.*

Solution 23.3 *Il suffit de montrer que, pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\chi_A \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ puisque $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace vectoriel réel.*
Pour $A = \emptyset$, on a $\chi_A = 0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et pour $A \neq \emptyset$, $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (\chi_A)^{-1}(]-\infty, x]) &= \{\omega \in \Omega \mid \chi_A(\omega) \leq x\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \text{ si } x < 0 \\ \Omega \setminus A \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ \Omega \text{ si } x \geq 1 \end{array} \right. \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

et donc $\chi_A \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Exercice 23.4 *Montrer que si $X \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, alors $|X| \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. En déduire que pour X, Y dans $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ sont dans $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.*

Solution 23.4 *Pour X dans $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $(|X|)^{-1}(]-\infty, x]) = \emptyset$ si $x < 0$ et pour $x \geq 0$, $\omega \in \Omega$, on a :*

$$|X|(\omega) \leq x \Leftrightarrow -x \leq X(\omega) \leq x$$

ce qui entraîne que :

$$(|X|)^{-1}(]-\infty, x]) = X^{-1}([-x, x]) \in \mathcal{B}$$

et donc $|X| \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.
Il en résulte que :

$$\max(X, Y) = \frac{1}{2}(X + Y + |X - Y|) \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$$

et :

$$\min(X, Y) = \frac{1}{2}(X + Y - |X - Y|) \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$$

Exercice 23.5 *Montrer que si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a alors :*

$$f \circ X = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \chi_{X^{-1}(\{x\})}$$

Solution 23.5 *On a $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$.*
Pour tout $\omega \in \Omega$, il existe un indice $k \in I$ tel que $X(\omega) = x_k$ et :

$$\sum_{i \in I} f(x_i) \chi_{X^{-1}(\{x_i\})}(\omega) = f(x_k) = f \circ X(\omega)$$

du fait que $\chi_{X^{-1}(\{x_i\})}(\omega) = 0$ pour $i \neq k$ (dans ce cas $X(\omega) = x_k \neq x_i$ et $\omega \notin X^{-1}(x_i)$) et $\chi_{X^{-1}(\{x_k\})}(\omega) = 1$.

Définition 23.3 *On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne si :*

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

Théorème 23.5 *Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et f une application borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $f \circ X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.*

Démonstration. Pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a :

$$\begin{aligned}(f \circ X)^{-1}(A) &= \{\omega \in \Omega \mid (f \circ X)(\omega) \in A\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in f^{-1}(A)\right\} = X^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) \in \mathcal{B}\end{aligned}$$

donc $f \circ X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. ■

23.2 Loi d'une variable aléatoire réelle. Fonction de répartition

Théorème 23.6 *Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, alors l'application :*

$$\begin{array}{rccc}\mathbb{P}_X : & \mathcal{B}_{\mathbb{R}} & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))\end{array}$$

définit une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Définition 23.4 *Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on dit alors que la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ définie par le théorème précédent est la loi de X et que la fonction de répartition de $\mathbb{P}_X$ est la fonction de répartition de X. On la note F_X*
Dans le cas où $\mathbb{P}_X$ admet une densité, on dit que c'est la densité de X.

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle est donc définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Exemple 23.1 *Si X est étagée avec $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, alors la fonction de répartition F_X est une fonction en escaliers croissante, nulle sur $]-\infty, x_1[$, égale à 1 sur $[x_n, +\infty[$ et :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1) \\ \mathbb{P}(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}) \ \ (2 \leq k \leq n) \end{array} \right.$$

Ce qui résulte de :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \ si \ x < x_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) \ \ si \ x \in [x_k, x_{k+1}[\\ 1 \ si \ x \in [x_n, +\infty[\end{array} \right.$$

En effet :
pour $x < x_1$, on a $(X \leq x) = \emptyset$;
pour $x \in [x_k, x_{k+1}[$, on a $(X \leq x) = (X = x_1) \cup \cdots \cup (X = x_k)$;
pour $x \in [x_n, +\infty[$, on a $(X \leq x) = \Omega$.

Dans le cas où X est une variable aléatoire à densité, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$.

Exemple 23.2 *Si n un entier naturel non nul, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi uniforme discrète si $X(\Omega) = \{1, \cdots, n\}$ et :*

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, \cdots, n\})$.
Cette loi permet de décrire les expériences aléatoires où il y a équiprobabilité.

Exemple 23.3 *Si p un réel dans $]0, 1[$, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et :*

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \ \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Exemple 23.4 *Si n un entier naturel non nul et p un réel dans $]0, 1[$, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi binomiale de paramètres n et p, si $X(\Omega) = \{0, 1, \cdots, n\}$ et :*

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\}, \ \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Exemple 23.5 *Si p un réel dans $]0, 1[$, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi géométrique de paramètre p, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^k$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exemple 23.6 *Si λ un réel strictement positif, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Poisson de paramètre λ, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Exemple 23.7 *Si λ est un réel strictement positif, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi exponentielle de paramètre λ, si $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} \lambda \displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Exemple 23.8 *Si σ est un réel strictement positif et μ un réel, on dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi normale (de Gauss) de paramètres μ et σ si $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Exercice 23.6 *Un concours de tir au pistolet entre deux compétiteurs A et B est constitué d'une suite d'épreuves consistant, pour chacun des compétiteurs, en un tir visant à atteindre une cible. Les deux compétiteurs tirent simultanément, chacun d'eux disposant de sa cible personnelle. On associe à ce concours une expérience aléatoire.*
On suppose que toutes les épreuves sont mutuellement indépendantes et que pour chaque épreuve :
– le compétiteur A a la probabilité $\frac{2}{3}$ de toucher sa cible ;
– le compétiteur B a la probabilité $\frac{1}{2}$ de toucher sa cible ;
– les résultats obtenus par A et B sont indépendants.
À l'issue de chaque épreuve, il faut avoir touché sa cible pour être autorisé à poursuivre le concours, sinon on est éliminé.
Le concours cesse lorsque les deux compétiteurs ont été éliminés.
Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

A_n *: à l'issue de l'épreuve n, seul A n'est pas éliminé ;*
B_n *: à l'issue de l'épreuve n, seul B n'est pas éliminé ;*
C_n *: à l'issue de l'épreuve n, aucun compétiteur n'est éliminé ;*
D_n *: à l'issue de l'épreuve n, les deux compétiteurs sont éliminés ;*

C_0 est l'événement certain et A_0, B_0, D_0 sont impossibles.

1. *Calculer les probabilités suivantes :*

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n),\ \mathbb{P}(B_{n+1} \mid A_n),\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid A_n),\ \mathbb{P}(D_{n+1} \mid A_n), \\ \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n),\ \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n),\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid B_n),\ \mathbb{P}(D_{n+1} \mid B_n), \\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n),\ \mathbb{P}(B_{n+1} \mid C_n),\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n),\ \mathbb{P}(D_{n+1} \mid C_n). \end{cases}$$

2. *On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve à l'issue de laquelle a lieu la première élimination.*

(a) *Calculer* $\mathbb{P}(X=1)$.

On suppose dans les questions suivantes que $n \geq 2$.

(b) *Calculer* $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} C_k\right)$.

(c) *Calculer* $\mathbb{P}(X>n)$.

(d) *En déduire* $\mathbb{P}(X=n)$.

(e) *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)$.

(f) *Montrer que* $\mathbb{P}(X>n-1) = \mathbb{P}(X=n) + \mathbb{P}(X>n)$.

(g) *Montrer que* $n\mathbb{P}(X>n) + \sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k)$.

(h) *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k)$.

3. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *on note* $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(D_n) \end{pmatrix}$ *et* $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ *est la matrice de transition définie par* $X_{n+1} = AX_n$.

(a) *Déterminer* A.

(b) *Déterminer une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telle que* $A = PDP$.

(c) *Calculer* X_n *en fonction de* X_0 *pour tout entier naturel* n.

(d) *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$.

Solution 23.6

1. *On a :*

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = \dfrac{2}{3},\ \mathbb{P}(B_{n+1} \mid A_n) = 0,\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid A_n) = 0,\ \mathbb{P}(D_{n+1} \mid A_n) = \dfrac{1}{3}, \\ \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n) = 0,\ \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n) = \dfrac{1}{2},\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid B_n) = 0,\ \mathbb{P}(D_{n+1} \mid B_n) = \dfrac{1}{2}, \\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n) = \dfrac{1}{3},\ \mathbb{P}(B_{n+1} \mid C_n) = \dfrac{1}{6},\ \mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n) = \dfrac{1}{3},\ \mathbb{P}(D_{n+1} \mid C_n) = \dfrac{1}{6}. \end{array}\right.$$

2.

(a) $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(D_1) = \dfrac{2}{3}$.

(b) $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} C_k\right) = \mathbb{P}\left(C_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} C_k\right) \cdots \mathbb{P}(C_2 \mid C_1)\,\mathbb{P}(C_1) = \dfrac{1}{3^n}$.

(c) $\mathbb{P}(X>n) = \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} C_k\right) = \dfrac{1}{3^n}$.

(d) $\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X \leq n) - \mathbb{P}(X \leq n) = \dfrac{1}{3^{n-1}} - \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{2}{3^n}$.

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{3^{k-1}} - \dfrac{1}{3^k}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) = 1$.

(f) *Résulte de* $(X>n-1) = (X=n) \cup (X>n)$.

(g) *On a :*

$$\begin{aligned}
P_n &= n\mathbb{P}(X > n) + \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \\
&= \frac{n}{3^n} + \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3^{k-1}} - \frac{1}{3^k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k).
\end{aligned}$$

(h) *On a :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{P}(X > k) - \mathbb{P}(X > n))
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
p(X > k) - p(X > n) &= p(X = k+1 \text{ ou } \cdots \text{ ou } n) \\
&= \sum_{j=k+1}^{n} p(X = j) = \frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^n}
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^n}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{3}{2}$.

3.

(a) *On a un processus de Markov avec :*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) A *est diagonalisable avec* $P^{-1}AP = D$ *et* $P^2 = I_4$ *où :*

$$D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $X_n = A^n X_0 = PD^n PX_0$.

(d) On a :

$$X_n = A^n X_0 = PD^n P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2^n - 1)\, 3^{-n} \\ 2^{-n} - 3^{-n} \\ 3^{-n} \\ 1 - 2^n 3^{-n} - 2^{-n} + 3^{-n} \end{pmatrix}$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

23.3 Espérance

Pour ce paragraphe, X est une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Définition 23.5 *Si X est à valeurs positives, l'espérance de X est l'élément de $\overline{\mathbb{R}^+} = [0, +\infty]$ défini par :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\, dt$$

L'application $t \mapsto \mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t)$ est décroissante à valeurs positives. Elle est donc Riemann-intégrable sur tout segment $[0, x]$ avec $x > 0$ et la fonction :

$$x \mapsto \int_0^x \mathbb{P}(X > t)\, dt$$

qui est croissante admet une limite, éventuellement égale à $+\infty$, quand x tend vers $+\infty$.

Avec :

$$\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F_X(t)$$

on a :

$$\int_0^x \mathbb{P}(X > t)\, dt = x - \int_0^x F_X(t)\, dt$$

Exercice 23.7 *Calculer $\mathbb{E}(X)$ pour X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.*

Solution 23.7 *Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors :*

$$\mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} \text{ si } t \geq 0 \\ 1 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

et :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Lemme 23.1 *Si X est une variable aléatoire réelle étagée positive sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, on a alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

Démonstration. On peut supposer que $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ et on a :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < x_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) \text{ si } t \in [x_k, x_{k+1}[\\ 1 \text{ si } t \in [x_n, +\infty[\end{cases}$$

donc :

$$\mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t < x_1 \\ 1 - \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) \text{ si } t \in [x_k, x_{k+1}[\\ 0 \text{ si } t \in [x_n, +\infty[\end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{x_1} \mathbb{P}(X > t)\, dt + \int_{x_1}^{x_2} \mathbb{P}(X > t)\, dt + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbb{P}(X > t)\, dt + \int_{x_n}^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\, dt \\ &= x_1 + \int_{x_1}^{x_2} (1 - \mathbb{P}(X = x_1))\, dt + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = x_i)\right) dt \\ &= x_1 + (1 - \mathbb{P}(X = x_1))(x_2 - x_1) + \cdots + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = x_i)\right)(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

soit en notant $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ pour $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= x_1 + (1 - p_1)(x_2 - x_1) + (1 - p_1 - p_2)(x_3 - x_2) + \cdots + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i\right)(x_n - x_{n-1}) \\ &= x_1 (1 - (1 - p_1)) + x_2 ((1 - p_1) - (1 - p_1 - p_2)) \\ &+ x_{n-1} ((1 - p_1 - \cdots - p_{n-2}) - (1 - p_1 - \cdots - p_{n-1})) \\ &+ x_n (1 - p_1 - \cdots - p_{n-1}) \\ &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_{n-1} x_{n-1} + p_n x_n \end{aligned}$$

puisque $p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n = 1$. ■

Exercice 23.8 *Calculer* $\mathbb{E}(\chi_A)$ *pour tout élément* A *de* $\mathcal{B}$.

Solution 23.8 *On a* $\chi_A(\Omega) = \{0, 1\}$ *et :*

$$\mathbb{E}(\chi_A) = \mathbb{P}(\chi_A = 1) = \mathbb{P}(A)$$

Exercice 23.9 *Calculer* $\mathbb{E}(X)$ *pour* X *suivant une loi uniforme discrète, une loi de Bernoulli, une loi binomiale.*

Solution 23.9 *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, \cdots, n\})$, *alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, *alors :*

$$\mathbb{E}(X) = p$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, *alors en tenant compte de* $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ *pour* $1 \leq k \leq n$, *on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} \\ &= np\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^{j}(1-p)^{n-1-j} = np(p+1-p)^{n-1} = np.\end{aligned}$$

Lemme 23.2 *Si* X, Y *sont deux variables aléatoires réelles étagées positives sur* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *et* λ *un réel positif, on a alors :*

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration. Soit $Z = \lambda X + Y$. Pour tout $z \in Z(\Omega)$, on note :

$$I_z = \{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mid \lambda x + y = z\}$$

C'est un ensemble fini puisque contenu dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ qui est fini.

Pour tout $z \in Z(\Omega)$, on a la partition :

$$(Z = z) = \bigcup_{(x,y)\in I_z} (X = x) \cap (Y = y)$$

donc :

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{(x,y)\in I_z} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{z\in Z(\Omega)} z\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{z\in Z(\Omega)} z \sum_{(x,y)\in I_z} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\ &= \sum_{z\in Z(\Omega)} \sum_{(x,y)\in I_z} z\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\ &= \sum_{z\in Z(\Omega)} \sum_{(x,y)\in I_z} (\lambda x + y)\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\ &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} (\lambda x + y)\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\ &= \lambda \sum_{x\in X(\Omega)} x \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) + \sum_{y\in Y(\Omega)} y \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{y\in Y(\Omega)} (X = x) \cap (Y = y)\right) \\ &= \mathbb{P}((X = x))\end{aligned}$$

puisque $((Y = y))_{y\in Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements et :

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x\in X(\Omega)} (X = x) \cap (Y = y)\right) \\ &= \mathbb{P}((Y = y))\end{aligned}$$

puisque $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \lambda \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}((X = x)) + \sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbb{P}((Y = y)) \\ &= \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$

■

Définition 23.6 *On dit qu'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ converge vers une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ si pour tout $\omega \in \Omega$, la suite réelle $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $X(\omega)$ (ce qui revient à dire que la suite de fonctions $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers X sur Ω).*

Théorème 23.7 *Une variable aléatoire réelle positive sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est limite d'une suite croissante de variables aléatoires réelles étagées positives.*

Démonstration. Soit X une variable aléatoire réelle positive sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ définie par :

$$X_n = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} \chi_{A_{n,k}}$$

où :

$$A_{n,k} = \left(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n} \right) \in \mathcal{B}$$

Chaque X_n est une variable aléatoire réelle étagée positive.

Pour $\omega \in \Omega$ et $n > X(\omega)$, il existe un unique entier $k \in \{0, \cdots, n2^n - 1\}$ tel que :

$$\frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n}$$

(pour $0 \leq X(\omega) < n$, on a $0 \leq 2^n X(\omega) < n2^n$, donc $0 \leq k = [2^n X(\omega)] \leq n2^n - 1$ et $k \leq X(\omega) < k+1$), ce qui signifie qu'il existe un unique entier $k \in \{0, \cdots, n2^n - 1\}$ tel que $\omega \in A_{n,k}$, donc $X_n(\omega) = \dfrac{k}{2^n}$ et :

$$|X(\omega) - X_n(\omega)| < \frac{1}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc simplement vers X.

Il reste à montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Pour $\omega \in \Omega$ et $n \geq 1$, on a deux possibilités.

Soit $X(\omega) < n$ et alors $X_n(\omega) = \dfrac{k}{2^n}$ où $k = [2^n X(\omega)]$, c'est-à-dire que $\dfrac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \dfrac{k+1}{2^n}$ et :

$$X_{n+1}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} \text{ si } \dfrac{k}{2^n} = \dfrac{2k}{2^{n+1}} \leq X(\omega) < \dfrac{2k+1}{2^{n+1}} \\ \dfrac{2k+1}{2^{n+1}} \text{ si } \dfrac{2k+1}{2^{n+1}} \leq X(\omega) < \dfrac{k+1}{2^n} = \dfrac{2k+2}{2^{n+1}} \end{cases}$$

qui donne dans tous les cas $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$.

Soit $X(\omega) \geq n$ et alors $X(\omega) \notin A_{n,k}$ pour $0 \leq k \leq n2^n - 1$ puisque $2^n X(\omega) \geq n2^n \geq k+1$, ce qui donne $X_n(\omega) = 0 \leq X_{n+1}(\omega)$. ■

Lemme 23.3 *Si X, Y sont deux variables aléatoires réelles positives sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ telles que $X \leq Y$, on a alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.*

Démonstration. Si $X \leq Y$, on a alors $(X > t) \subset (Y > t)$ pour tout réel $t \geq 0$, donc $\mathbb{P}(X > t) \leq \mathbb{P}(Y > t)$ et :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\, dt \leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y > t)\, dt = \mathbb{E}(Y).$$

■

Théorème 23.8 (Beppo-Levi) *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de variables aléatoires réelles positives sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ qui converge vers une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on a alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$$

dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Démonstration. Avec $0 \leq X_n \leq X_{n+1} \leq X$ ($(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers X), on déduit que $0 \leq \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_{n+1}) \leq \mathbb{E}(X)$, donc $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, elle est donc convergente (éventuellement vers $+\infty$) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X)$.

D'autre part, pour tout réel $t > 0$, la suite $((X_n > t))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et :

$$(X > t) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X_n > t)$$

($X_n(\omega) > t$ pour un entier n entraîne $X(\omega) = \lim\limits_{\substack{m\to+\infty \\ m\geq n}} X_m(\omega) \geq X_n(\omega) > t$ et $X(\omega) > t$ entraîne $X_n(\omega) \geq t$ pour n grand), ce qui donne :

$$\mathbb{P}(X > t) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n > t)$$

donc pour tout $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^m \mathbb{P}(X > t)\, dt &= \int_0^m \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n > t)\, dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^m \mathbb{P}(X_n > t)\, dt \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)
\end{aligned}$$

et $\mathbb{E}(X) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$. ■

Remarque 23.2 *L'égalité $\displaystyle\int_0^m \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n > t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^m \mathbb{P}(X_n > t)\, dt$ est justifiée par le théorème de convergence monotone qui nous dit que : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions de $I = [0, m]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue par morceaux et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ avec f est continue par morceaux, alors $\displaystyle\int_I f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\, dx$.*

Théorème 23.9 *Si X, Y sont deux variables aléatoires réelles positives sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et λ un réel positif, on a alors :*

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration. En désignant respectivement par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de variables aléatoires réelles positives et étagées sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ qui converge vers X et Y, la suite $(\lambda X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est étagée positive, converge en croissant vers $\lambda X + Y$ et on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\lambda X + Y) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\lambda X_n + Y_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda \mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(Y_n) \\ &= \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

■

Pour toute variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on désigne par X^+ et X^- les variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ définies par :

$$X^+ = \max(X, 0) = \frac{1}{2}(X + |X|) \text{ et } X^- = \max(-X, 0) = \frac{1}{2}(|X| - X) = -\min(X, 0)$$

On peut remarquer que :

$$X = X^+ - X^- \text{ et } |X| = X^+ + X^-$$

Définition 23.7 *On dit qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est intégrable si $\mathbb{E}(X^+) < +\infty$ et $\mathbb{E}(X^-) < +\infty$.*

Définition 23.8 *Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ qui est intégrable, son espérance est le réel :*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(X^+\right) - \mathbb{E}\left(X^-\right)$$

Théorème 23.10 *Une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est intégrable si, et seulement si $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ et dans ce cas, on a :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\, dt - \int_0^{+\infty} F_X(-t)\, dt$$

Démonstration. Supposons X intégrable. Avec $|X| = X^+ + X^-$, on déduit que $\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(X^+) + \mathbb{E}(X^-) < +\infty$.

Réciproquement si $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$, avec $X^+ \leq |X|$, on déduit que $\mathbb{E}(X^+) \leq \mathbb{E}(|X|) < +\infty$.
■

Exercice 23.10 *Soient X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Montrer que si $|X| \leq |Y|$ avec Y intégrable, alors X est intégrable.*

Solution 23.10 *Si $|X| \leq |Y|$ avec Y intégrable, on a alors $\mathbb{E}(|X|) \leq \mathbb{E}(|Y|) < +\infty$ et X est intégrable.*

Théorème 23.11 *L'ensemble $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires intégrables sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et l'application :*

$$\begin{array}{rccc}\mathbb{E}: & \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}) & \to & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & \mathbb{E}(X)\end{array}$$

est une forme linéaire.

Démonstration. On a $\mathbb{E}(0) = \mathbb{E}(\chi_\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Donc $0 \in \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et X, Y dans $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on a :

$$|\lambda X + Y| \leq |\lambda| |X| + |Y|$$

avec :

$$\mathbb{E}(|\lambda| |X| + |Y|) = |\lambda| \mathbb{E}(|X|) + \mathbb{E}(|Y|) < +\infty$$

donc $\mathbb{E}(|\lambda X + Y|) < +\infty$ et $\lambda X + Y \in \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Il en résulte que $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Pour X, Y dans $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on a :

$$\begin{aligned} X + Y &= (X+Y)^+ - (X+Y)^- \\ &= \left(X^+ - X^-\right) + \left(Y^+ - Y^-\right) \end{aligned}$$

donc :

$$(X+Y)^+ + X^- + Y^- = (X+Y)^- + X^+ + Y^+$$

et :

$$\mathbb{E}\left((X+Y)^+\right) + \mathbb{E}\left(X^-\right) + \mathbb{E}\left(Y^-\right) = \mathbb{E}\left((X+Y)^-\right) + \mathbb{E}\left(X^+\right) + \mathbb{E}\left(Y^+\right)$$

ce qui donne :

$$\mathbb{E}\left((X+Y)^+\right) - \mathbb{E}\left((X+Y)^-\right) = \mathbb{E}\left(X^+\right) - \mathbb{E}\left(X^-\right) + \mathbb{E}\left(Y^+\right) - \mathbb{E}\left(Y^-\right)$$

soit :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Pour X dans $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et $\lambda \in \mathbb{R}^{+,*}$ on a :

$$(\lambda X)^+ = \frac{\lambda}{2}(X + |X|) = \lambda X^+ \text{ et } (\lambda X)^- = \frac{\lambda}{2}(|X| - X) = \lambda X^-$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda X) &= \mathbb{E}\left((\lambda X)^+\right) - \mathbb{E}\left((\lambda X)^-\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\lambda X^+\right) - \mathbb{E}\left(\lambda X^-\right) = \lambda\left(\mathbb{E}\left(X^+\right) - \mathbb{E}\left(X^-\right)\right) \\ &= \lambda \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^{-,*}$ on a :

$$(\lambda X)^+ = \frac{\lambda}{2}(X - |X|) = -\lambda X^- \text{ et } (\lambda X)^- = \frac{\lambda}{2}(-|X| - X) = -\lambda X^+$$

avec $-\lambda > 0$, donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda X) &= \mathbb{E}\left((\lambda X)^+\right) - \mathbb{E}\left((\lambda X)^-\right) \\ &= \mathbb{E}\left(-\lambda X^-\right) - \mathbb{E}\left(-\lambda X^+\right) = \lambda\left(\mathbb{E}\left(X^+\right) - \mathbb{E}\left(X^-\right)\right) \\ &= \lambda \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 0$ c'est clair. ∎

Théorème 23.12 *Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ et f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, on a alors, dans $\overline{\mathbb{R}^+}$:*

$$\mathbb{E}(f \circ X) = \sum_{i \in I} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$$

Démonstration. Si $X(\Omega)$ est fini, avec :

$$f \circ X = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \chi_{X^{-1}(\{x\})} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \chi_{X^{-1}(\{x_i\})}$$

(exercice 23.5) et la linéarité de l'espérance, on déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f \circ X) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \mathbb{E}\left(\chi_{X^{-1}(\{x_i\})}\right) = \sum_{i \in I} f(x_i) \mathbb{P}\left(X^{-1}(\{x_i\})\right) \\ &= \sum_{i \in I} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).\end{aligned}$$

Si $X(\Omega) = \{x_i \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ est infini dénombrable, la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \chi_{X^{-1}(\{x_i\})}$$

est croissante (f est à valeurs positives) et converge vers $f \circ X$ (pour $\omega \in \Omega$, il existe un entier m tel que $X(\omega) = x_m$ et pour $n \geq m$, on a $X_n(\omega) = f(x_m) = f \circ X(\omega)$), donc le théorème de Beppo-Levi nous dit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f \circ X) &= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{i \in I} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)\end{aligned}$$

■

Exercice 23.11 *Montrer que si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui est intégrable, on a alors :*

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X) \chi_\Omega)^2\right) = \sum_{i \in I} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_i)$$

Solution 23.11 *On applique le théorème précédent avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = (x - \mathbb{E}(X))^2$$

On a alors pour tout $\omega \in \Omega$:

$$f \circ X(\omega) = (X(\omega) - \mathbb{E}(X))^2 = ((X - \mathbb{E}(X) \chi_\Omega)(\omega))^2$$

À toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on associe les fonctions f^+ et f^- définies par :

$$f^+ = \max(f, 0) \ \text{ et } \ f^- = \max(-f, 0) = -\min(f, 0)$$

Ces fonctions sont à valeurs positives.

Lemme 23.4 *Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a alors :*

$$\mathbb{E}\left(f^+ \circ X\right) = \sum_{\substack{i\in I \\ f(x_i)\geq 0}} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\mathbb{E}\left(f^- \circ X\right) = -\sum_{\substack{i\in I \\ f(x_i)\leq 0}} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\mathbb{E}(|f \circ X|) = \sum_{i\in I} |f(x_i)|\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

Démonstration. Comme f^+ est à valeurs positives et X discrète, on a :

$$\mathbb{E}\left(f^+ \circ X\right) = \sum_{i\in I} f^+(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{\substack{i\in I \\ f(x_i)\geq 0}} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

et même chose pour f^-.

Avec :

$$(f \circ X)^+ = \frac{1}{2}(f \circ X + |f \circ X|) = \frac{1}{2}(f + |f|) \circ X = f^+ \circ X$$

et :

$$(f \circ X)^- = \frac{1}{2}(|f \circ X| - f \circ X) = \frac{1}{2}(|f| - f) \circ X = f^- \circ X$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|f \circ X|) &= \mathbb{E}\left((f \circ X)^+ + (f \circ X)^-\right) = \mathbb{E}\left(f^+ \circ X + f^- \circ X\right) \\
&= \mathbb{E}\left(f^+ \circ X\right) + \mathbb{E}\left(f^- \circ X\right) \\
&= \sum_{\substack{i\in I \\ f(x_i)\geq 0}} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i) - \sum_{\substack{i\in I \\ f(x_i)\leq 0}} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \sum_{i\in I} |f(x_i)|\, \mathbb{P}(X = x_i)
\end{aligned}$$

■

Théorème 23.13 (de transfert) *Si X est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ X$ soit intégrable, on a alors :*

$$\mathbb{E}(f \circ X) = \sum_{i\in I} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

Démonstration. En utilisant la démonstration du théorème précédent, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f \circ X) &= \mathbb{E}\left((f \circ X)^+ - (f \circ X)^-\right) = \mathbb{E}\left(f^+ \circ X - f^- \circ X\right) \\
&= \mathbb{E}\left(f^+ \circ X\right) - \mathbb{E}\left(f^- \circ X\right) \\
&= \sum_{\substack{i\in I \\ f(x_i)\geq 0}} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i) + \sum_{\substack{i\in I \\ f(x_i)\leq 0}} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \sum_{i\in I} f(x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i)
\end{aligned}$$

■

On en déduit que si X est une variable aléatoire réelle discrète intégrable sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$, on a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

cette série étant absolument convergente dans le cas où l'ensemble dénombrable I est infini.

Exercice 23.12 *Calculer $\mathbb{E}(X)$ pour X suivant une loi géométrique, une loi de Poisson.*

Solution 23.12 *Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^k = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} p^j (1-p)^{n-1-j} = np(p+1-p)^{n-1} = np.\end{aligned}$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda.$$

Lemme 23.5 *Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ possédant une densité f, on a alors :*

$$\mathbb{E}(X^+) = \int_0^{+\infty} t f(t)\, dt,\ \mathbb{E}(X^-) = \int_{-\infty}^{0} -t f(t)\, dt$$

et :

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\, dt$$

Démonstration. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles étagées positives définie par :

$$X_n = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} \chi_{A_{n,k}}$$

où :

$$A_{n,k} = \left(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n} \right)$$

converge en croissant vers X^+ (voir la démonstration du théorème 23.7).

Le théorème de Beppo-Levi nous dit alors que $\mathbb{E}(X^+) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$ avec :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{P}\left(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \left(F_X\left(\frac{k+1}{2^n} \right) - F_X\left(\frac{k}{2^n} \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} f(t)\, dt\end{aligned}$$

On peut alors écrire que :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^n tf(t)\,dt-\mathbb{E}(X_n)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n2^n-1}\int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}}\left(t-\frac{k}{2^n}\right)f(t)\,dt\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n2^n-1}\int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}}\left(t-\frac{k}{2^n}\right)f(t)\,dt \\ &\leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n2^n-1}\int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} f(t)\,dt=\frac{1}{2^n}\int_0^n f(t)\,dt\end{aligned}$$

et tenant compte de :

$$0\leq\int_0^n f(t)\,dt\leq\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=1$$

on déduit que :

$$\left|\int_0^n tf(t)\,dt-\mathbb{E}(X_n)\right|\leq\frac{1}{2^n}\underset{n\to+\infty}{\to}0$$

et :

$$\mathbb{E}\left(X^+\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n tf(t)\,dt=\int_0^{+\infty}tf(t)\,dt$$

De manière analogue, on vérifie que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles étagées positives définie par :

$$Y_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\chi_{B_{n,k}}$$

où :

$$B_{n,k}=\left(-\frac{k+1}{2^n}<X\leq-\frac{k}{2^n}\right)$$

converge en croissant vers X^- et $\mathbb{E}(X^-)=\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(Y_n)$ avec :

$$\mathbb{E}(Y_n)=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\int_{-\frac{k+1}{2^n}}^{-\frac{k}{2^n}}f(t)\,dt$$

et :

$$\left|\int_{-n}^0 -tf(t)\,dt-\mathbb{E}(Y_n)\right|\leq\sum_{k=0}^{n2^n-1}\int_{-\frac{k+1}{2^n}}^{-\frac{k}{2^n}}\left(-t-\frac{k}{2^n}\right)f(t)\,dt\leq\frac{1}{2^n}$$

ce qui donne $\mathbb{E}(X^-)=\displaystyle\int_{-\infty}^0 -tf(t)\,dt.$

Enfin :

$$\mathbb{E}(|X|)=\mathbb{E}\left(X^+\right)+\mathbb{E}\left(X^-\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\,f(t)\,dt$$

■

Théorème 23.14 *Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P})$ possédant une densité f et intégrable, on a alors :*

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\,dt$$

Démonstration. En reprenant la démonstration du théorème précédent, on a pour X possédant une densité f et intégrable :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$$

■

Exercice 23.13 *Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire à densité qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, une loi de Gauss de paramètres $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$.*

Solution 23.13 *Laissée au lecteur.*

Exercice 23.14 *Montrer que si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ possédant une densité f, on a alors :*

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$$

et si de plus X est intégrable, alors :

$$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X)\chi_\Omega)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)\,dt$$

Solution 23.14 *Laissée au lecteur.*

On admet le théorème suivant.

Théorème 23.15 *Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ possédant une densité f, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que la variable aléatoire $\varphi \circ X$ soit intégrable, on a alors :*

$$\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(t)\,dt$$

23.4 Variance, écart type, covariance

Pour ce paragraphe, X est une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Définition 23.9 *On dit que X est de carré intégrable si la variable aléatoire X^2 est intégrable.*

Théorème 23.16 *L'ensemble $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires réelles intégrables sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Pour X, Y dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ la variable aléatoire XY est dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et l'application :*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \left(\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})\right)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto & \mathbb{E}(XY) \end{array}$$

est une forme bilinéaire, symétrique et positive sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Définition 23.10 *La variance d'une variable aléatoire $X \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est le réel défini par :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

et son écart type de X est le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Si $X \neq 0$ dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, la variable aléatoire centrée réduite associée à X est la variable aléatoire définie par $X' = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$.

Théorème 23.17 *Si $X \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est discrète avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$, on a alors :*

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i \in I} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \, \mathbb{P}(X = x_i)$$

Exercice 23.15 *Déterminer la variance, après avoir justifié son existence, d'une variable aléatoire discrète suivant une loi uniforme discrète, une loi de Bernoulli, une loi binomiale, une loi géométrique, une loi de Poisson.*

Solution 23.15 *Laissée au lecteur.*

Théorème 23.18 *Si $X \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est une variable aléatoire possédant une densité f, on a alors :*

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)\, dt$$

Exercice 23.16 *Déterminer la variance, après avoir justifié son existence, d'une variable aléatoire à densité qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, une loi de Gauss de paramètres $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$.*

Solution 23.16 *Laissée au lecteur.*

Théorème 23.19 *Pour $X \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on a :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$$

(formule de Köenig) et :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ \mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

De la formule de Köenig, on déduit que $\mathbb{E}(X^2) \leq (\mathbb{E}(X))^2$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, la variance est nulle. Dans le cas discret avec $\mathbb{P}(X = x_i) > 0$ pour tout $i \in I$, l'égalité $\mathbb{E}(X^2) = (\mathbb{E}(X))^2$ équivaut à $x_i = \mathbb{E}(X)$ pour tout $i \in I$.

Définition 23.11 *La covariance de deux variables aléatoires X et Y dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est le réel défini par :*

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

et le coefficient de corrélation de X et Y est la réel :

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\, \sigma(Y)}$$

Définition 23.12 *On dit que deux variables aléatoires X et Y dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ sont non corrélées si* $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 23.17 *Montrer que pour X et Y dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on a $|\rho(X, Y)| \leq 1$.*

Solution 23.17 *Laissée au lecteur.*

Théorème 23.20 *Pour X et Y dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on a :*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

et l'application :

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \left(\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})\right)^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \mapsto & \mathrm{Cov}(X, Y) \end{array}$$

est une forme bilinéaire, symétrique et positive sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

Dire que X et Y dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ sont non corrélées revient à dire que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Théorème 23.21 *Soient $X_1, \cdots, X_n$ dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels On a :*

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \mathrm{Cov}(X_j, Y_k)$$

et dans le cas particulier où les variables aléatoires X_k sont deux à deux non corrélées, on a :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \mathbb{V}(X_k)$$

23.5 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 23.22 (Markov) *Soit X une variable aléatoire réelle positive sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :*

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

Exercice 23.18 *Montrer l'inégalité de Markov dans le cas discret.*

Solution 23.18 *Comme $x_i \geq 0$ pour tout $i \in I \subset \mathbb{N}$, on a :*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i) x_i \geq \sum_{\substack{i \in I \\ x_i \geq \varepsilon}} \mathbb{P}(X = x_i) x_i \\ &\geq x \sum_{\substack{i \in I \\ x_i \geq \varepsilon}} \mathbb{P}(X = x_i) = x\mathbb{P}(X \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Théorème 23.23 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) *Soit $X \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire réelle positive $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$. On a :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) = p\left(Y \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

■

En prenant $\varepsilon = t\sigma(X)$ avec $t > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\sigma(X)) \leq \frac{1}{t^2}$$

ou encore :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < t\sigma(X)) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

et peut s'interpréter en disant que la variance de X est une mesure de la dispersion des valeurs de X autour de la moyenne $\mathbb{E}(X)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut être utilisée pour montrer le théorème de Bernstein relatif à l'approximation uniforme sur $[0,1]$ d'une fonction continue par une suite de fonctions polynomiales.

Exercice 23.19 *À tout entier naturel non nul n et tout réel $x \in [0,1]$ on associe la variable aléatoire $X_{n,x}$ qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$, c'est-à-dire que $X_{n,x}$ est à valeurs dans $\{0,1,\cdots,n\}$ et sa loi de probabilité est définie par :*

$$\forall j \in \{0,1,\cdots,n\},\ \mathbb{P}(X_{n,x} = j) = C_n^j x^j (1-x)^{n-j}.$$

À toute fonction f continue sur $[0,1]$ et à valeurs réelles, on associe la variable aléatoire $Y_{n,x} = f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)$. En notant $\{y_0,\cdots,y_p\}$ les valeurs prises par $Y_{n,x}$, on a :

$$\forall k \in \{0,\cdots,p\},\ \mathbb{P}(Y_{n,x} = k) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ f\left(\frac{j}{n}\right) = y_k}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j).$$

1. *Montrer que l'espérance de $Y_{n,x}$ est donnée par :*

$$\mathbb{E}(Y_{n,x}) = B_n(f)(x),$$

où B_n est l'opérateur de Bernstein.

2. *Pour $\varepsilon > 0$, on désigne par $\eta > 0$ un réel tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour x, y dans $[0,1]$ vérifiant $|x-y| < \eta$ (uniforme continuité de f sur $[0,1]$) et, pour x fixé dans $[0,1]$, on note :*

$$\left\{\begin{array}{l} J_{1,x} = \left\{ j \in \{0,1,\cdots,n\} \mid \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x) \right| < \varepsilon \right\} \\ J_{2,x} = \left\{ j \in \{0,1,\cdots,n\} \mid \left| f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x) \right| \geq \varepsilon \right\} \end{array}\right.$$

(a) *Montrer que :*

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{j \in J_{2,x}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j).$$

(b) *Montrer que :*

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon).$$

(c) *Montrer que :*

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n \cdot \eta).$$

(d) *En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :*

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n \cdot \eta^2}$$

et conclure.

Solution 23.19

1. *L'espérance de $Y_{n,x}$ est donnée par :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n,x}) &= \sum_{k=0}^{p} y_k \mathbb{P}(Y_{n,x} = k) = \sum_{k=0}^{p} y_k \sum_{\substack{0\leq j\leq n \\ f\left(\frac{j}{n}\right)=y_k}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\substack{0\leq j\leq n \\ f\left(\frac{j}{n}\right)=y_k}} f\left(\frac{j}{n}\right) \mathbb{P}(X_{n,x} = j) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) \mathbb{P}(X_{n,x} = j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) C_n^j x^j (1-x)^{n-j} = B_n(f)(x)
\end{aligned}$$

(les ensembles $\left\{ j \in \{0, \cdots, n\} \mid f\left(\frac{j}{n}\right) = y_k \right\}$ forment une partition de $\{0, \cdots, n\}$).

2.

(a) *Avec $\sum\limits_{j=0}^{n} C_n^j x^j (1-x)^{n-j} = \sum\limits_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X_{n,x} = j) = 1$, on peut écrire que :*

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{j=0}^{n} \left(f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x) \right) C_n^j x^j (1-x)^{n-j} \right| \\
&\leq \varepsilon \sum_{j\in J_{1,x}} C_n^j x^j (1-x)^{n-j} + 2\|f\|_\infty \sum_{j\in J_{2,x}} C_n^j x^j (1-x)^{n-j} \\
&\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{j\in J_{2,x}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j).
\end{aligned}$$

(b) *On a :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon) &= \sum_{\substack{0\leq k\leq p \\ |y_k - f(x)|\geq\varepsilon}} \mathbb{P}(Y_{n,x} = k) \\
&= \sum_{\substack{0\leq k\leq p \\ |y_k - f(x)|\geq\varepsilon}} \sum_{\substack{0\leq j\leq n \\ f\left(\frac{j}{n}\right)=y_k}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j) \\
&= \sum_{\substack{0\leq j\leq n \\ \left|f\left(\frac{j}{n}\right) - f(x)\right|\geq\varepsilon}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j) = \sum_{j\in J_{2,x}} \mathbb{P}(X_{n,x} = j)
\end{aligned}$$

et l'inégalité précédente s'écrit :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon).$$

(c) *Comme l'événement* $|Y_{n,x} - f(x)|$ *implique* $\left|\dfrac{X_{n,x}}{n} - x\right| \geq \eta$, *on a :*

$$\mathbb{P}(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n \cdot \eta)$$

et l'égalité annoncée.

(d) *Avec* $nx = \mathbb{E}(X_{n,x})$ *et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :*

$$\mathbb{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n \cdot \eta) \leq \frac{\mathbb{V}(X_{n,x})}{n^2\eta^2} = \frac{x(1-x)}{n \cdot \eta^2} \leq \frac{1}{4n \cdot \eta^2},$$

ce qui donne :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n \cdot \eta^2} < 2\varepsilon$$

pour $n \geq n_0$ *où* n_0 *est un entier indépendant de* x. *La convergence uniforme vers* f *sur* $[0,1]$ *de la suite* $(B_n(f))_{n\geq 1}$ *s'en déduit alors.*

Exercice 23.20 *Soit* $I = [0,b]$ *avec* $b > 0$. *Si* f *est une fonction continue sur* I, *on la prolonge en une fonction continue sur* $\mathbb{R}^+$ *en posant* $f(x) = f(b)$ *pour* x *supérieur ou égal à* b.

1. *Montrer que pour toute fonction* f *appartenant à* $\mathcal{C}(I)$ *et pour tout entier naturel* n *strictement positif on peut définir une fonction* $u_n(f)$ *appartenant à* $\mathcal{C}(I)$ *en posant :*

$$\forall x \in I,\ u_n(f)(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k.$$

2. *Montrer, en s'inspirant de l'exercice précédent, que pour toute fonction* f *appartenant à* $\mathcal{C}(I)$ *la suite de fonctions* $(u_n(f))_{n\geq 1}$ *converge uniformément vers* f *sur* I *(une démonstration directe de ce résultat est possible mais peu évidente).*

Solution 23.20 *Soient* $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,b]$ *et* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *uniformément continue et bornée. Soit* X *une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre* nx.
On a :

$$\mathbb{E}(X) = nx,\ \mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right) = x,\ \mathbb{V}(X) = nx,\ \mathbb{V}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{x}{n}$$

et :

$$u_n(f)(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{X}{n}\right)\right).$$

Avec l'uniforme continuité de f *sur* $\mathbb{R}^+$, *on peut trouver, pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *un réel* $\eta > 0$ *tel que :*

$$\forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^+)^+,\ |x_1 - x_2| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon.$$

On a alors pour tout $n \geq 1$ *et tout* $x \in [0,b]$, *en notant* χ_A *la fonction caractéristique de l'ensemble* A *et en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :*

$$\begin{aligned}
|u_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{X}{n}\right) - f(x)\right)\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{X}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \chi_{\left|\frac{X}{n}-x\right|\leq\eta}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{X}{n}\right) - f(x)\right| \cdot \chi_{\left|\frac{X}{n}-x\right|>\eta}\right) \\
&\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - x\right| > \eta\right) \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{\mathbb{V}\left(\frac{X}{n}\right)}{\eta^2} \\
&\leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty x}{n\eta^2} \leq \varepsilon + \frac{2b\|f\|_\infty}{\eta^2}\frac{1}{n} \leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

pour n *assez grand (uniformément par rapport à* x*). Et c'est terminé.*

23.6 Variables aléatoires réelles indépendantes

Définition 23.13 *Soient $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. On dit que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si pour tous boréliens $B_1, B_2, \cdots, B_n$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in B_i)\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \in B_i).$$

L'événement $\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in B_i)$ sera aussi noté $(X_1 \in B_1, \cdots, X_n \in B_n)$.

Théorème 23.24 *Soient $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelle discrètes sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tous boréliens $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dans $\prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Démonstration. La condition nécessaire est évidente en prenant pour boréliens des $B_i = \{x_i\}$.

Montrons que la condition est suffisante.

Avec :

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in B_i) &= \bigcup_{x_1 \in B_1}\left((X_1 = x_1) \cap \bigcap_{i=2}^{n}(X_i \in B_i)\right)\\ &= \bigcup_{x_1 \in B_1 \cap X_1(\Omega)}\left((X_1 = x_1) \cap \bigcap_{i=2}^{n}(X_i \in B_i)\right)\end{aligned}$$

l'ensemble $B_1 \cap X_1(\Omega)$ étant dénombrable puisque X_1 est discrète, on déduit que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) = \sum_{x_1 \in B_1 \cap X_1(\Omega)}\mathbb{P}\left((X_1 = x_1) \cap \bigcap_{i=2}^{n}(X_i \in B_i)\right)$$

En itérant ce procédé un nombre fini de fois, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) &= \sum_{x_1 \in B_1 \cap X_1(\Omega)} \cdots \sum_{x_n \in B_n \cap X_n(\Omega)} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right)\\ &= \sum_{x_1 \in B_1 \cap X_1(\Omega)} \cdots \sum_{x_n \in B_n \cap X_n(\Omega)} \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i = x_i)\\ &= \left(\sum_{x_1 \in B_1 \cap X_1(\Omega)}\mathbb{P}(X_1 = x_1)\right) \cdots \left(\sum_{x_n \in B_n \cap X_n(\Omega)}\mathbb{P}(X_n = x_n)\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \in B_i \cap X_i(\Omega)) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \in B_i).\end{aligned}$$

■

Exercice 23.21 *Soient $n \geq 3$ et $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelle discrètes sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes.*

1. *Montrer que les variables aléatoires $X_1 + X_2, X_3, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.*
2. *En déduire que pour tout entier r compris entre 2 et $n-1$, les variables aléatoires $X_1 + \cdots + X_r, X_{r+1}, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.*

Solution 23.21

1. *Pour tout réel x, on a :*

$$(X_1 + X_2 = x) = \bigcup_{x_1 \in X_1(\Omega)} (X_1 = x_i) \cap (X_2 = x - x_1)$$

l'ensemble $X_1(\Omega)$ étant dénombrable puisque X_1 est discrète. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 + X_2 = x) &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}((X_1 = x_i) \cap (X_2 = x - x_1)) \\ &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x_i) \mathbb{P}(X_2 = x - x_1)\end{aligned}$$

Pour x réel et $(x_3, \cdots, x_n)$ dans $\prod_{i=3}^{n} X_i(\Omega)$, on a :

$$(X_1 + X_2 = x) \cap \bigcap_{i=3}^{n} (X_i = x_i) = \bigcup_{x_1 \in X_1(\Omega)} (X_1 = x_i) \cap (X_2 = x - x_1) \cap \bigcap_{i=3}^{n} (X_i = x_i)$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left((X_1 + X_2 = x) \cap \bigcap_{i=3}^{n} (X_i = x_i)\right) &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}\left((X_1 = x_i) \cap (X_2 = x - x_1) \cap \bigcap_{i=3}^{n} (X_i = x_i)\right) \\ &= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x_i) \mathbb{P}(X_2 = x - x_1) \prod_{i=3}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \\ &= \left(\sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x_i) \mathbb{P}(X_2 = x - x_1)\right) \prod_{i=3}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \\ &= \mathbb{P}(X_1 + X_2 = x) \prod_{i=3}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)\end{aligned}$$

et $X_1 + X_2, X_3, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

2. *Par récurrence fini sur r compris entre 2 et $n-1$.*

Théorème 23.25 *Si X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ intégrables et indépendantes, elles sont alors non corrélées et on a :*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

et :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(X)$$

23.7 Convergence en probabilité et en loi

Définition 23.14 *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X|\right) \geq \varepsilon = 0.$$

Théorème 23.26 (loi faible des grands nombres) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ deux à deux indépendantes et de même loi X. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X)$.*

En fait, on peut affaiblir les hypothèses $X_n \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ pour obtenir un résultat plus fort !

Théorème 23.27 (loi forte des grands nombres) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ deux à deux indépendantes et de même loi X. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X)$.*

Définition 23.15 *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions de répartition associées et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si :*

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

en tout point de continuité x de la fonction de répartition F de X.

Exercice 23.22 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{n}$, où $\lambda > 0$ est donné.. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ (convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson).*

Solution 23.22 *Laissée au lecteur.*

Définition 23.16 *On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes si pour tout $n \geq 2$, les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.*

Théorème 23.28 (central limite) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ indépendantes et de même loi X. La suite de variables aléatoire $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - \mathbb{E}(X))}{\sigma(X)\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant une loi de Gauss de paramètres 0 et 1.*