

L3 A, intégration : M363
– I – Exercices préliminaires

On présente ici quelques méthodes de raisonnement qui seront utilisées en théorie de la mesure.

Exercice 1 Pour tout entier naturel non nul n , on définit les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_{n,k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, l'entier k étant compris entre 0 et n , par :

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \sigma_{n,k}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k} & \text{si } k \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

Soit $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ un polynôme scindé unitaire de degré $n \geq 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que l'on a $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k}$ avec :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, a_k = (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Solution. Ces expressions sont qualifiées de symétriques, car pour toute permutation τ de $\{1, \dots, n\}$, on a :

$$\sigma_{n,k}(\alpha_{\tau(1)}, \dots, \alpha_{\tau(n)}) = \sigma_{n,k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

On procède par récurrence sur $n = \deg(P) \geq 1$.

Pour $n = 1$, on a $P(X) = X - \alpha_1 = a_0 X + a_1$ avec $a_0 = 1 = \sigma_{1,0}(\alpha_1)$ et $a_1 = -\alpha_1 = -\sigma_{1,1}(\alpha_1)$.

Supposons le résultat acquis pour les polynômes scindés unitaires de degré $n - 1 \geq 1$ et soit $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ un polynôme scindé unitaire de degré n .

En notant $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a :

$$\sigma_{n,0}(\alpha) = \sigma_{n-1,0}(\alpha') = 1$$

$$\sigma_{n,n}(\alpha) = \prod_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_n \sigma_{n-1,n-1}(\alpha')$$

et pour k compris entre 1 et $n - 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{n,k}(\alpha) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} + \alpha_n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n-1} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{k-1}} \\ &= \sigma_{n-1,k}(\alpha') + \alpha_n \sigma_{n-1,k-1}(\alpha') \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\prod_{k=1}^{n-1} (X - \alpha_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k X^{n-1-k}$$

avec $a'_k = (-1)^k \sigma_{n-1,k}(\alpha')$ pour $0 \leq k \leq n-1$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
P(X) &= (X - \alpha_n) \prod_{k=1}^{n-1} (X - \alpha_k) = (X - \alpha_n) \sum_{k=0}^{n-1} a'_k X^{n-1-k} \\
&= (X - \alpha_n) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sigma_{n-1,k}(\alpha') X^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sigma_{n-1,k}(\alpha') X^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \alpha_n \sigma_{n-1,k}(\alpha') X^{n-(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sigma_{n-1,k}(\alpha') X^{n-k} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \alpha_n \sigma_{n-1,k-1}(\alpha') X^{n-k} \\
&= X^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (\sigma_{n-1,k}(\alpha') + \alpha_n \sigma_{n-1,k-1}(\alpha')) X^{n-k} + (-1)^n \alpha_n \sigma_{n-1,n-1}(\alpha') \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha) X^{n-k} = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k}
\end{aligned}$$

avec $a_k = (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha)$ pour tout k compris entre 0 et n .

Exercice 2 Soit Ω un ensemble non vide.

À toute partie A de Ω , on associe la fonction indicatrice (ou caractéristique) de A définie par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_A : \Omega &\rightarrow \{0, 1\} \\
x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}
\end{aligned}$$

On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω .

1. Montrer que l'application qui associe à une partie A de Ω sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ réalise une bijection de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $\{0, 1\}^\Omega$ (ensemble des applications de Ω dans $\{0, 1\}$). Préciser son inverse.
2. Soient A, B deux parties de Ω . Exprimer $\mathbf{1}_{\Omega \setminus A}$, $\mathbf{1}_{A \cap B}$, $\mathbf{1}_{A \cup B}$, $\mathbf{1}_{B \setminus A}$, $\mathbf{1}_{A \Delta B}$, en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.
3. Plus généralement, pour toute suite finie $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ de parties de Ω , exprimer $\mathbf{1}_{\bigcap_{k=1}^n A_k}$ et $\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k}$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_k}$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de bijection de Ω sur $\mathcal{P}(\Omega)$ (théorème de Cantor).
On en déduit en particulier que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.
5. Soient $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite finie de parties de Ω et A une partie de Ω . Montrer que :

$$((A_k)_{1 \leq k \leq n} \text{ est une partition de } A) \Leftrightarrow \left(\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k} \right)$$

Solution. Les fonctions indicatrices permettent de transformer des opérations ensemblistes en opérations algébriques sur des fonctions.

1. Notons :

$$\begin{aligned}
\chi : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow \{0, 1\}^\Omega \\
A &\mapsto \mathbf{1}_A
\end{aligned}$$

Si A, B dans $\mathcal{P}(\Omega)$ sont tels que $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$, on a alors pour tout $x \in \Omega$:

$$(x \in A) \Leftrightarrow (\mathbf{1}_A(x) = 1) \Leftrightarrow (\mathbf{1}_B(x) = 1) \Leftrightarrow (x \in B)$$

soit, $A = B$.

L'application χ est donc injective.

Pour toute application $\gamma \in \{0, 1\}^\Omega$, en notant $A = \gamma^{-1}\{1\}$, on a $\mathbf{1}_A = \gamma$, donc χ est surjective.

En conclusion, χ est bijective d'inverse :

$$\begin{aligned} \chi^{-1} : \{0, 1\}^\Omega &\rightarrow \mathcal{P}(\Omega) \\ \gamma &\mapsto \gamma^{-1}\{1\} \end{aligned}$$

2. De la partition $\Omega = A \cup (\Omega \setminus A)$, on déduit que pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_{\Omega \setminus A}(x) = 1$$

donc $\mathbf{1}_{\Omega \setminus A} = 1 - \mathbf{1}_A$.

Pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \text{ et } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin A \text{ ou } x \notin B \end{cases} = \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_B(x) = \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x))$$

donc $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.

De ces deux formules, on déduit toutes les autres.

Avec :

$$\Omega \setminus (A \cup B) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$$

on déduit que :

$$\mathbf{1}_{\Omega \setminus (A \cup B)} = \mathbf{1}_{\Omega \setminus A} \mathbf{1}_{\Omega \setminus B}$$

soit :

$$1 - \mathbf{1}_{A \cup B} = (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B)$$

ou encore :

$$\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$$

Avec :

$$B \setminus A = (\Omega \setminus A) \cap B$$

on déduit que :

$$\mathbf{1}_{B \setminus A} = \mathbf{1}_B(1 - \mathbf{1}_A) = \max(\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A, 0)$$

Avec :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus A \cap B$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \Delta B} &= \mathbf{1}_{A \cup B}(1 - \mathbf{1}_{A \cap B}) = (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B)(1 - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \\ &= (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2 = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B| \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{1}_{\bigcap_{k=1}^n A_k}(x) = 1 \right) &\Leftrightarrow \left(x \in \bigcap_{k=1}^n A_k \right) \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, x \in A_k) \\ &\Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \dots, n\}, \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1) \\ &\Leftrightarrow \left(\prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1 \right) \Leftrightarrow \left(\min_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1 \right) \end{aligned}$$

donc :

$$\mathbf{1}_{\bigcap_{k=1}^n A_k} = \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k} = \min_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

puisque ces fonctions sont à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Avec :

$$\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n (\Omega \setminus A_k)$$

on déduit que :

$$1 - \mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \min_{1 \leq k \leq n} (1 - \mathbf{1}_{A_k}) = 1 - \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}(x)$$

soit :

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

On peut aussi généraliser la formule $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ en utilisant l'exercice 1.

Avec :

$$\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n (\Omega \setminus A_k)$$

on déduit que :

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k})$$

avec :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k}) &= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1}} \mathbf{1}_{A_{i_2}} \dots \mathbf{1}_{A_{i_k}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots A_{i_k}} \end{aligned}$$

ce qui nous donne la formule de Poincaré :

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots A_{i_k}}$$

4. Supposons qu'il existe une surjection φ de Ω sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Le sous-ensemble A de Ω défini par :

$$A = \{x \in \Omega \mid x \notin \varphi(x)\}$$

a alors un antécédent x_0 par φ et on a :

$$(x_0 \in A) \Leftrightarrow (x_0 \in \varphi(x_0)) \Leftrightarrow (x_0 \notin A)$$

ce qui n'est pas possible.

En particulier, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas équipotent à \mathbb{N} et il en est de même de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ qui est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

On peut aussi vérifier, en utilisant les développements dyadiques (en base 2), que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $[0, 1[$.

5. Supposons que $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ soit une partition de A , c'est-à-dire que $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$, les A_k étant deux à deux disjoints.

Dans ce cas, pour tout entier k compris entre 2 et n et tout multi-indice (i_1, \dots, i_k) tel que $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, l'intersection $A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots A_{i_k}$ est vide, ce qui nous donne :

$$\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}$$

Réciproquement supposons que $\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}$.

Les A_k sont alors deux à deux disjoints.

En effet, s'il existe $k \neq j$ tels que $A_k \cap A_j \neq \emptyset$, on a alors pour $x \in A_k \cap A_j$:

$$\mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(x) \geq \mathbf{1}_{A_k}(x) + \mathbf{1}_{A_j}(x) = 2$$

ce qui est impossible.

Si $x \in \bigcup_{k=1}^n A_k$, il existe alors un indice j compris entre 1 et n tel que $x \in A_j$, donc $\mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(x) \geq \mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$, ce qui impose $\mathbf{1}_{A_k}(x) = 0$ pour $k \neq j$ et $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$, ce qui prouve que $\bigcup_{k=1}^n A_k \subset A$.

Pour $x \in A$, on a $1 = \mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}(x)$, donc il existe un unique j compris entre 1 et n tel

que $\mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$, ce qui signifie que x est dans A_j et $x \in \bigcup_{k=1}^n A_k$, donc $A \subset \bigcup_{k=1}^n A_k$ et on a l'égalité

$A = \bigcup_{k=1}^n A_k$, les A_k étant deux à deux disjoints.

Exercice 3 On dit qu'une série numérique (réelle ou complexe) $\sum u_n$ est commutativement convergente si, pour toute permutation σ de \mathbb{N} , la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.

Montrer qu'une série $\sum u_n$ absolument convergente est commutativement convergente et que pour toute permutation σ de \mathbb{N} , on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (cela justifie l'écriture $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ dans le cas d'une série absolument convergente, ce qui est utilisé implicitement dans la définition d'une mesure).

Solution. Soient $\sum u_n$ une série absolument convergente et σ une permutation de \mathbb{N} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $\varphi(n) = \max_{0 \leq k \leq n} \sigma(k)$, on a :

$$\sum_{k=0}^n |u_{\sigma(k)}| \leq \sum_{j=0}^{\varphi(n)} |u_j| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = S$$

donc la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.

Il reste à montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On montre tout d'abord le résultat pour les séries réelles à termes positifs.

On vient de voir que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

En appliquant le résultat précédent à la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ et à la permutation σ^{-1} , on a aussi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_{\sigma^{-1}(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(\sigma^{-1}(n))} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

ce qui nous donne l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Pour le cas général d'une série réelle ou complexe, on a déjà $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{\sigma(n)}| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

En utilisant les notations précédentes, on a $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$\left| \sum_{j=0}^{\varphi(n)} u_j - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \right| = \left| \sum_{j \in E_n} u_j \right| \leq R_n = \sum_{j \in E_n} |u_j|$$

où on a noté :

$$E_n = \{0, 1, \dots, \varphi(n) - 1, \varphi(n)\} \setminus \{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\}$$

avec :

$$R_n = \sum_{j=0}^{\varphi(n)} |u_j| - \sum_{k=0}^n |u_{\sigma(k)}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

L'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ s'en déduit alors.

Exercice 4

1. Soit $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ une suite de réels positifs ou nuls indexée par (n, m) dans \mathbb{N}^2 .
On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_m u_{n,m}$ est convergente de somme S_n ;
- la série $\sum_n S_n$ étant convergente de somme S .

Montrer alors que dans ces conditions :

- pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n u_{n,m}$ est convergente de somme T_m ;
- la série $\sum_m T_m$ est convergente de somme S , soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$$

Dans le cas où l'une des sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ ou $\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ est finie, on dit que la série

double $\sum u_{n,m}$ est convergente et on note $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} u_{n,m}$ la valeur commune de $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$

et $\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$.

Étant donnée une suite double $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ de nombres complexes, on dit que la série double $\sum u_{n,m}$ est absolument convergente (ou que la suite $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable) si la série double $\sum |u_{n,m}|$ est convergente.

2. Soit $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double telle que la série double $\sum u_{n,m}$ soit absolument convergente.

Montrer alors que dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$ [resp. pour tout $m \in \mathbb{N}$], la série $\sum_m u_{n,m}$ [resp. $\sum_n u_{n,m}$] est absolument convergente et en notant S_n [resp. T_m] la somme de

cette série, la série $\sum S_n$ [resp. $\sum T_m$] est absolument convergente et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum_{m=0}^{+\infty} T_m$, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$$

3. En justifiant la convergence, calculer la somme $\sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m}$.

4. Soit $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ la suite double définie par :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, u_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = m \\ \frac{1}{n^2 - m^2} & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Montrer, en les calculant, que les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ et $\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ sont définies et différentes.

Solution.

1. Pour tous les entiers n et m , on a :

$$0 \leq u_{n,m} \leq S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$$

avec $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = S < +\infty$, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_n u_{n,m}$ avec, pour tout entier m :

$$T_m = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} S_n = S$$

Pour tout entier m , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m T_k &= \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^m u_{n,k} \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} S_n = S \end{aligned}$$

donc la série $\sum T_m$ est convergente de somme $T = \sum_{m=0}^{+\infty} T_m \leq S$.

En permutant les rôles de n et m , on aboutit de manière analogue à $S \leq T$ et en conséquence, $T = S$.

2. La série $\sum |u_{n,m}|$ étant convergente, on a pour tous les entiers n, m :

$$S'_n = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| < +\infty, \quad T'_m = \sum_{j=0}^{+\infty} |u_{j,m}| < +\infty$$

et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S'_n = \sum_{m=0}^{+\infty} T'_m$$

Les séries $\sum_m u_{n,m}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_n u_{n,m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ sont donc absolument convergentes de sommes respectives S_n et T_m .

Pour tout entier n , on a :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^n T_k - \sum_{j=0}^n S_j \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{+\infty} u_{j,k} - \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{+\infty} u_{j,k} \right| \\
&= \left| \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n u_{j,k} - \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n u_{j,k} \right| \\
&= \left| \sum_{j=n+1}^{+\infty} \sum_{k=0}^n u_{j,k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sum_{j=0}^n u_{j,k} \right| \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{j,k}| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |u_{j,k}| \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} S'_j + \sum_{k=n+1}^{+\infty} T'_k = R_n
\end{aligned}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ puisque chacune des séries $\sum S'_n$ et $\sum T'_m$ converge.

On a donc bien l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum_{m=0}^{+\infty} T_m$.

3. Dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^m = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1
\end{aligned}$$

(en écrivant que $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$).

On peut donc calculer $\sum_{m=2n=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m}$ alors qu'on ne connaît pas toutes les valeurs de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m}$ pour $m \geq 2$.

4. Pour k entier naturel non nul fixé et $n > k$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n u_{j,k} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{j^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \left(\frac{1}{j-k} - \frac{1}{j+k} \right) \\
&= \frac{1}{2k} \left(\sum_{\substack{j=1-k \\ j \neq 0}}^{n-k} \frac{1}{j} - \sum_{\substack{j=k+1 \\ j \neq 2k}}^{n+k} \frac{1}{j} \right) \\
&= \frac{1}{2k} \left(\sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=k+1}^{n+k} \frac{1}{j} + \frac{1}{2k} \right) \\
&= \frac{1}{2k} \left(\sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n+k} \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} \right) \\
&= \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{2} \frac{1}{k} - \sum_{j=n-k+1}^{n+k} \frac{1}{j} \right)
\end{aligned}$$

avec :

$$0 < \sum_{j=n-k+1}^{n+k} \frac{1}{j} \leq 2k \frac{1}{n-k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc :

$$\forall k \geq 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n u_{j,k} = \frac{3}{4} \frac{1}{k^2}$$

ce qui signifie que :

$$\forall k \geq 1, T_k = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} = \frac{3}{4} \frac{1}{k^2}$$

La série $\sum T_m$ est donc convergente avec $\sum_{m=1}^{+\infty} T_m = \frac{3}{4} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$, ce qui signifie que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,m} \right) = \frac{3}{4} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{6}$$

De manière analogue, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m} \right) = -\frac{3}{4} \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m} \right) \neq \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,m} \right).$$

La série double $\sum u_{n,m}$ n'est donc pas absolument convergente.

Exercice 5 Soient E un espace vectoriel normé complet et $a < b$ deux réels.

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow E$ est dite *réglée* si elle admet une limite à droite en tout point de $[a, b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a, b]$.

On notera $f(x^-)$ [resp. $f(x^+)$] la limite à gauche [resp. à droite] en $x \in]a, b]$ [resp. en $x \in [a, b[$].

1. Montrer qu'une fonction réglée est bornée.
2. Montrer qu'une limite uniforme de fonctions réglées de $[a, b]$ dans E est réglée.
3. Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction réglée et $\varepsilon > 0$. On note :

$$E_\varepsilon = \left\{ x \in]a, b] \mid \text{il existe } \varphi \text{ en escaliers sur } [a, x] \text{ telle que } \sup_{t \in [a, x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon \right\}$$

Montrer que $E_x \neq \emptyset$, puis que $b = \max(E_\varepsilon)$.

4. Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow E$ est réglée si, et seulement si, elle est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escaliers.
5. Rappeler comment ce résultat est utilisé pour définir l'intégrale de Riemann d'une fonction réglée $f : [a, b] \rightarrow E$.

Solution.

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ réglée.

Si elle n'est pas bornée, pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver un réel $x_n \in [a, b]$ tel que $\|f(x_n)\| \geq n$. Dans le compact $[a, b]$, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha \in [a, b]$.

Supposons que $\alpha \in]a, b[$. Il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b] \cap]\alpha - \eta, \alpha[, \|f(x) - f(\alpha^-)\| < 1$$

et :

$$\forall x \in [a, b] \cap]\alpha, \alpha + \eta[, \|f(x) - f(\alpha^+)\| < 1$$

Il existe aussi un entier $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, x_{\varphi(n)} \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$$

ce qui nous donne pour tout $n \geq n_0$:

$$\|f(x_{\varphi(n)}) - f(\alpha^-)\| < 1 \text{ ou } \|f(x_{\varphi(n)}) - f(\alpha^+)\| < 1$$

et en conséquence :

$$\|f(x_{\varphi(n)})\| < 1 + \|f(\alpha^-)\| \text{ ou } \|f(x_{\varphi(n)})\| < 1 + \|f(\alpha^+)\|$$

en contradiction avec $\|f(x_{\varphi(n)})\| \geq \varphi(n) \geq n$.

Pour $\alpha = a$ [resp. $\alpha = b$], on procède de manière analogue en utilisant seulement la limite à droite [resp. à gauche].

La fonction f est donc bornée.

2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions réglées de $[a, b]$ dans E qui converge uniformément vers une fonction f .

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \sup_{x \in [a, b]} \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

La fonction f_{n_ε} ayant une limite à gauche en $\alpha \in]a, b]$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b] \cap]\alpha - \eta, \alpha[, \|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(\alpha^-)\| < \varepsilon$$

ce qui nous donne, pour tout x, y dans $[a, b] \cap]\alpha - \eta, \alpha[$:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq \|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)\| + \|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(\alpha^-)\| + \|f_{n_\varepsilon}(\alpha^-) - f_{n_\varepsilon}(y)\| + \|f_{n_\varepsilon}(y) - f(y)\| \\ &\leq 4\varepsilon \end{aligned}$$

On déduit alors du critère de Cauchy que f admet une limite à gauche en α .

De plus avec :

$$\|f_n(\alpha^-) - f(\alpha^-)\| = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \sup_{x \in [a, b]} \|f_n(x) - f(x)\|$$

on déduit que :

$$f(\alpha^-) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha^-)$$

On procède de même pour la limite à droite.

3. Comme f admet une limite à droite en a , il existe un réel $\eta_a \in]0, b - a[$ tel que :

$$\forall t \in]a, a + \eta_a], \|f(t) - f(a^+)\| < \varepsilon$$

donc en désignant par φ la fonction en escaliers définie sur $[a, a + \eta_a]$ par $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(t) = f(a^+)$ pour tout $t \in]a, a + \eta_a]$, on a $\sup_{t \in [a, a + \eta_a]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, ce qui signifie que $a + \eta_a \in E_\varepsilon$.

L'ensemble E_ε est donc non vide majorée par b , donc il admet une borne supérieure $\beta \in]a, b]$ (on a $a + \eta_a \leq \beta$).

Supposons que $\beta < b$. Comme f admet une limite à droite et à gauche en β , il existe un réel $\eta > 0$ tel que $[\beta - \eta, \beta + \eta] \subset]a, b[$ et :

$$\forall t \in [\beta - \eta, \beta[, \|f(t) - f(\beta^-)\| < \varepsilon$$

$$\forall t \in]\beta, \beta + \eta], \|f(t) - f(\beta^+)\| < \varepsilon$$

Par définition de la borne supérieure β , il existe $x \in]\beta - \eta, \beta] \cap E_\varepsilon$. On désigne alors par φ une fonction en escaliers sur $[a, x]$ telle que $\sup_{t \in [a, x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ et on la prolonge en une fonction en escaliers sur $[a, \beta + \eta]$ en posant $\varphi(t) = f(\beta^-)$ pour $t \in]x, \beta[$, $\varphi(\beta) = f(\beta)$ et $\varphi(t) = f(\beta^+)$ pour $t \in]\beta, \beta + \eta]$.

On a donc $\sup_{t \in [a, \beta + \eta]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, soit $\beta + \eta \in E_x$, ce qui contredit le fait que β est la borne supérieure de E_ε .

En définitive, on a $\beta = b$.

Comme f admet une limite à gauche en b , il existe un réel $\eta_b > 0$ tel que $[b - \eta_b, b] \subset]a, b]$ et :

$$\forall t \in [b - \eta_b, b[, \|f(t) - f(b^-)\| < \varepsilon$$

Prenant $x \in]b - \eta_b, b] \cap E_\varepsilon$, on désigne par φ une fonction en escaliers sur $[a, x]$ telle que $\sup_{t \in [a, x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ et on la prolonge en une fonction en escaliers sur $[a, b]$ en posant $\varphi(t) = f(b^-)$ pour $t \in]x, b[$ et $\varphi(b) = f(b)$ (si $x = b$, il n'y a rien à faire), ce qui nous donne φ en escaliers sur $[a, b]$ telle que $\|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in [a, b]$.

On a donc $b \in E_\varepsilon$ et $\beta = b$.

4. Si f est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escaliers, elle est réglée comme limite uniforme d'une suite de fonctions réglées (une fonction en escaliers est réglée).

Réciproquement, soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction réglée.

Pour tout entier $n \geq 1$, on a $b \in E_{\frac{1}{n}}$, donc il existe φ_n en escaliers sur $[a, b]$ telle que $\sup_{t \in [a, b]} \|f(t) - \varphi_n(t)\| < \frac{1}{n}$.

La suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge donc uniformément vers f sur $[a, b]$.

5. Le résultat de la question précédente peut être utilisé pour définir l'intégrale de Riemann d'une fonction réglée f sur $[a, b]$.

On définit d'abord l'intégrale des fonctions en escaliers de la façon usuelle.

On vérifie ensuite que pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f , la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, ce qui résulte des inégalités :

$$\left| \int_a^b f_m(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f_m(x) - f_n(x)|$$

desquelles on déduit que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

La limite d'une telle suite ne dépend que f puisque si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f , on a pour tout entier n :

$$\left| \int_a^b g_n(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |g_n(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On peut donc définir l'intégrale f sur $[a, b]$ par :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

où $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est n'importe quelle suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Exercice 6 $[a, b]$ est un intervalle fermé borné fixé avec $a < b$ réels.

1. Montrer que les fonctions en escaliers positives sur $[a, b]$ sont exactement les fonctions du type :

$$\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, les a_k sont des réels positifs ou nuls et les I_k sont des intervalles contenus dans $[a, b]$.

2. Montrer que si $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite finie de fonctions en escaliers sur $[a, b]$, alors la fonction $\varphi = \max_{1 \leq k \leq n} \varphi_k$ est aussi en escaliers.
3. Soit f une fonction réglée définie sur $[a, b]$ et à valeurs positives.

- (a) Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], \varphi_n(x) \leq f(x)$$

- (b) On désigne par $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[a, b]$ par $\psi_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

Montrer que $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

- (c) Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

4. Montrer que les fonctions réglées à valeurs positives sur $[a, b]$ sont exactement les fonctions de la forme :

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$$

où les $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs ou nuls, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'intervalles contenus dans $[a, b]$ et la série considérée converge uniformément sur $[a, b]$.

Solution.

1. Si φ est une fonction en escaliers sur $[a, b]$, il existe alors un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision :

$$a_0 = a < a_1 < \dots < a_p = b$$

telle que φ soit constante sur chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ ($0 \leq k \leq p-1$), ce qui peut s'écrire :

$$\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

où $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une partition de $[a, b]$ en n intervalles (les I_k sont les $]a_j, a_{j+1}[$, pour j compris entre 0 et $p-1$ et les $\{a_j\} = [a_j, a_j]$, pour j compris entre 0 et p , les a_k étant les valeurs constantes prises par φ sur chacun de ces intervalles).

Si φ est à valeurs positives, les a_k sont tous positifs ou nuls.

Réciproquement une telle fonction est en escaliers puisque l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est un espace vectoriel et elle est à valeurs positives si les a_k sont tous positifs ou nuls (en dehors de la réunion des I_k , la fonction φ est nulle).

2. Si $\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{I_k}$ est une fonction en escaliers sur $[a, b]$, alors la fonction $|\varphi| = \sum_{k=1}^n |a_k| \mathbf{1}_{I_k}$ est aussi en escaliers.

Il en résulte que, si ψ est une autre fonction en escaliers sur $[a, b]$, la fonction :

$$\max(\varphi, \psi) = \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{|\psi - \varphi|}{2}$$

en escaliers, puis par récurrence on en déduit que si $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$, alors la fonction $\max_{1 \leq k \leq n} \varphi_k$ est aussi en escaliers.

3.

- (a) Comme f réglée sur $[a, b]$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une fonction en escaliers f_n telle que :

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n+1}$$

La fonction $\varphi_n = f_n - \frac{1}{n+1}$ est aussi en escaliers et pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$-\frac{1}{n+1} < f(x) - f_n(x) < \frac{1}{n+1}$$

donc :

$$0 < f(x) - \varphi_n(x) < \frac{2}{n+1}$$

donc $\varphi_n < f$ et :

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi_n(x)| = \sup_{x \in [a, b]} (f(x) - \varphi_n(x)) \leq \frac{2}{n+1}$$

ce qui signifie que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f par valeurs inférieures.

- (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction :

$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

est en escaliers et pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$\psi_0 = 0 \leq \psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x) < f(x)$$

(puisque $f \geq 0$ et $f \geq \varphi_k$ pour tout entier k) et :

$$0 < f(x) - \psi_n(x) \leq f(x) - \varphi_n(x) < \frac{2}{n+1}$$

donc $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément en croissant vers f sur $[a, b]$.

- (c) On pose $f_0 = 0$ et $f_n = \psi_n - \psi_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui définit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives.

Avec :

$$\sum_{k=0}^n f_k = \sum_{k=1}^n (\psi_k - \psi_{k-1}) = \psi_n - \psi_0 = \psi_n$$

on déduit que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

4. Si $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$, où la série est uniformément convergentes, les a_n sont positifs et les I_n des intervalles contenus dans $[a, b]$, la fonction :

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

est alors limite uniforme d'une suite de fonctions réglées positives et en conséquence, elle est réglée positive.

Soit f une fonction réglée positive sur $[a, b]$.

Il existe alors une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

En écrivant chaque fonction en escaliers f_n sous la forme :

$$f_n = \sum_{k=1}^{p_n} a_{n,k} \mathbf{1}_{I_{n,k}}$$

où les $a_{n,k}$ sont des réels positifs ou nuls et les $I_{n,k}$ sont des intervalles contenus dans $[a, b]$, en notant $p_0 = 0$, on utilise la partition :

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{n \geq 1} \{p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1, \cdots, p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n\}$$

et le fait qu'il s'agit d'une séries de fonctions positives pour écrire que :

$$f = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \mathbf{1}_{I_j}$$

où pour $j = p_1 + \cdots + p_{n-1} + k$ avec $1 \leq k \leq p_n$, on note :

$$a_j \mathbf{1}_{I_j} = a_{n,k} \mathbf{1}_{I_{n,k}}$$

ce qui définit bien une suite $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls et une suite $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'intervalles contenus dans $[a, b]$.

A priori la convergence de cette série est simple.

Pour tout entier $m \geq 1$ il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que $m \in \{p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1, \cdots, p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n\}$ et on a :

$$R_m = \sum_{j=m}^{+\infty} a_j \mathbf{1}_{I_j} \leq \sum_{j=p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1}^{+\infty} a_j \mathbf{1}_{I_j} = \sum_{p=n}^{+\infty} f_p = R'_n$$

ce qui assure la convergence uniforme (pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $R'_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, donc pour tout $m \geq m_\varepsilon = p_1 + \cdots + p_{n_\varepsilon - 1} + 1$, on aura $R_m < \varepsilon$).

Exercice 7 La longueur d'un intervalle réel I est définie par :

$$\ell(I) = \sup(I) - \inf(I) \in [0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

1. Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé, borné et $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie d'intervalles telle que :

$$I \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$$

2. Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé, borné et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles telle que :

$$I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

3. Soient I un intervalle et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles telle que :

$$I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

4. Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles deux à deux disjoints inclus dans un intervalle I . Montrer que :

$$\ell(I) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

Solution. Si I est un intervalle borné d'extrémités $a < b$, on a alors :

$$\ell(I) = b - a$$

En particulier, on a pour tout réel a :

$$\ell(\emptyset) = \ell(]a, a]) = 0 \text{ et } \ell([a, a]) = 0$$

Si I est non bornée, on a alors $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ et $\ell(I) = +\infty$.

1. Si l'un des intervalles I_j , pour j compris entre 1 et n , est non borné, on a alors $\ell(I_j) = +\infty$ et :

$$\ell(I) = b - a \leq \sum_{k=1}^n \ell(I_k) = +\infty$$

On suppose donc que chaque intervalle I_k , pour k compris entre 1 et n , est borné et on note $\alpha_k \leq \beta_k$ ses extrémités.

On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, on a $I \subset I_1$, donc $\alpha_1 \leq a \leq b \leq \beta_1$ et :

$$\ell(I) = b - a \leq \beta_1 - \alpha_1 = \ell(I_1)$$

Supposons le résultat acquis pour $n - 1 \geq 1$ et soit $I \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$ un recouvrement fini de l'intervalle

$I = [a, b]$ par des intervalles I_k bornés.

L'extrémité b de I est contenue dans l'un des I_k et, en modifiant au besoin la numérotation, on peut supposer que $k = n$.

Si $\alpha_n \leq a$, on a alors $\alpha_n \leq a \leq b \leq \beta_n$, soit $I \subset I_n$ et :

$$\ell(I) \leq \ell(I_n) \leq \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$$

Sinon, on a $a < \alpha_n \leq b \leq \beta_n$, donc :

$$[a, \alpha_n[\subset \bigcup_{k=1}^{n-1} I_k$$

et par hypothèse de récurrence, on a :

$$\alpha_n - a \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ell(I_k)$$

et tenant compte de :

$$b - \alpha_n \leq \beta_n - \alpha_n = \ell(I_n)$$

on déduit que :

$$\ell(I) = b - a = (b - \alpha_n) + (\alpha_n - a) \leq \sum_{k=1}^n \ell(I_k)$$

2. Si l'un des I_n est non borné, le résultat est évident.

On suppose que chaque intervalle I_n , pour $n \in \mathbb{N}$, est borné et on note $\alpha_n \leq \beta_n$ ses extrémités. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on désigne par $(I_n(\varepsilon))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'intervalles ouverts définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n(\varepsilon) = \left] \alpha_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \beta_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right[$$

et on a un recouvrement ouvert du compact $I = [a, b]$:

$$I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n(\varepsilon)$$

duquel on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} J_k$$

On déduit alors de la question précédente que :

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \ell(J_k) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n(\varepsilon))$$

avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ell(I_n(\varepsilon)) = \beta_n - \alpha_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

ce qui nous donne :

$$\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) + \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) + \varepsilon$$

Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

3. Si $\ell(I) = 0$ ou si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) = +\infty$, le résultat est alors évident.

Si $\ell(I) > 0$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$ est convergente, tous les I_n et I sont bornés. En notant $a < b$ les extrémités de I , pour tout segment $I' = [a', b']$ contenu dans I , on a $I' \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ et de la question précédente, on déduit que :

$$\ell(I') = b' - a' \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

Faisant tendre (a', b') vers (a, b) , on en déduit le résultat annoncé.

4. Si $\ell(I) = +\infty$, le résultat est alors évident.

On suppose que I est borné d'extrémités $a \leq b$.

Comme $I_n \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous ces intervalles sont bornés et on a $\bigcup_{k=0}^n I_k \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En modifiant au besoin la numérotation et en notant $\alpha_n \leq \beta_n$ les extrémités de chaque intervalle I_n , comme ils sont deux à deux disjoints, on peut supposer que :

$$a \leq \alpha_0 \leq \beta_0 < \alpha_1 \leq \beta_1 < \cdots < \alpha_{n-1} \leq \beta_{n-1} < \alpha_n \leq \beta_n \leq b$$

et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \ell(I_k) &= \sum_{k=0}^n (\beta_k - \alpha_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) + (\beta_n - \alpha_n) \\ &\leq \alpha_n - \alpha_0 + b - \alpha_n \leq b - a = \ell(I) \end{aligned}$$

Faisant tendre n vers l'infini, on en déduit le résultat annoncé.

Exercice 8 Pour tous réels $a < b$, on désigne par $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, b]$ (théorème de Dini). On donnera deux démonstrations de ce résultat, l'une utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass et l'autre utilisant celle de Borel-Lebesgue.

2. Le résultat précédent est-il encore vrai dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ si on ne suppose plus l'intervalle I compact ?
3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^+)$ telle que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Montrer que :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

4. On désigne par \mathcal{A} la famille des parties de \mathbb{R}^2 de la forme :

$$A(f, g) = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

où f, g sont dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ et on note :

$$\mu(A(f, g)) = \int_a^b (g(t) - f(t)) dt$$

Montrer que cette application μ est σ -additive sur \mathcal{A} .

Solution.

1.

- (a) *Solution utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass* : « un espace métrique E est compact si et seulement si de toute suite de points de E on peut extraire une sous suite convergente ».

Pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. On a donc $f(x) - f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

De la continuité de chaque fonction f_n sur le compact $[a, b]$, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b] \mid \|f - f_n\|_\infty = f(x_n) - f_n(x_n)$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|f - f_{n+1}\|_\infty &= f(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \\ &\leq f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) \leq \|f - f_n\|_\infty \end{aligned}$$

donc la suite $(\|f - f_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et elle converge vers un réel $\lambda \geq 0$.

Il s'agit alors de montrer que $\lambda = 0$.

Dans le compact $[a, b]$, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in [a, b]$.

Soit p un entier positif. La fonction φ étant strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , on peut trouver un entier n_p tel que $\varphi(n) \geq p$ pour tout $n \geq n_p$. On a alors pour tout $n \geq n_p$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda &\leq \|f - f_{\varphi(n)}\|_\infty = f(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \\ &\leq f(x_{\varphi(n)}) - f_p(x_{\varphi(n)}) \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini (à p fixé) et en utilisant la continuité de f , on déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq \lambda \leq f(x) - f_p(x)$$

Enfin, en faisant tendre p vers l'infini, en utilisant la convergence de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ vers $f(x)$, on déduit que $\lambda = 0$.

- (b) *Solution utilisant la caractérisation de Borel-Lebesgue* : « un espace métrique E est compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous recouvrement fini ». Pour tout $x \in [a, b]$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\forall x \in I, \exists n_x \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_x, 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon$$

De la continuité de f et f_{n_x} , on déduit qu'il existe un voisinage ouvert V_x de x dans $[a, b]$ tel que :

$$\forall t \in V_x, |f(x) - f(t)| \leq \varepsilon, |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(t)| \leq \varepsilon$$

On déduit alors que pour tout $t \in V_x$:

$$0 \leq f(t) - f_{n_x}(t) \leq |f(t) - f(x)| + |f(x) - f_{n_x}(x)| + |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(t)| \leq 3\varepsilon$$

Du recouvrement de $[a, b]$ par les ouverts V_x , on peut extraire un sous recouvrement fini $\bigcup_{i=1}^p V_{x_i}$.

On pose alors $n_0 = \max_{1 \leq i \leq p} n_{x_i}$ et on a :

$$\forall n \geq n_0, \forall t \in I, 0 \leq f(t) - f_n(t) \leq f(t) - f_{n_{x_i}}(t) \leq 3\varepsilon$$

l'indice i étant tel que $t \in V_{x_i}$. Ce qui prouve bien la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f sur I .

2. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $]0, 1[$ par $f_n(x) = \frac{-1}{1+nx}$ converge en croissant vers la fonction nulle et la convergence n'est pas uniforme sur $]0, 1[$ puisque $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{2}$.
3. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de fonctions $\sum f_n$ est croissante (puisque les f_n sont à valeurs positives) et converge simplement vers la fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Le théorème de Dini nous dit alors que la convergence est uniforme et :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

4. Pour f, g dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ on a :

$$\mu(A(f, g)) = \int_a^b (g(t) - f(t)) dt = \int_a^b \ell([f(t), g(t)]) dt$$

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f_n \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et f, g dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ et :

$$A(f, g) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A(f_n, g_n)$$

étant deux à deux disjoints.

Dans ces conditions, on a :

$$\forall t \in [a, b], [f(t), g(t)] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [f_n(t), g_n(t)]$$

En effet, pour tout $t \in [a, b]$ et tout $y \in [f(t), g(t)]$, on a $(t, y) \in A(f, g)$, donc il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $(t, y) \in A(f_n, g_n)$, ce qui signifie que $y \in [f_n(t), g_n(t)]$. Réciproquement

si $y \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [f_n(t), g_n(t)]$, il existe alors un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in [f_n(t), g_n(t)]$, donc $(t, y) \in A(f_n, g_n) \subset A(f, g)$ et $y \in [f(t), g(t)]$.
On en déduit alors que :

$$\forall t \in [a, b], \ell([f(t), g(t)]) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell([f_n(t), g_n(t)])$$

les fonctions $t \mapsto \ell([f_n(t), g_n(t)])$ étant continues et positives. Il en résulte que :

$$\mu(A(f, g)) = \int_a^b \ell([f(t), g(t)]) dt = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b \ell([f_n(t), g_n(t)]) dt = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A(f_n, g_n))$$

La fonction μ est donc σ -additive sur \mathcal{A} .
