Pour chaque entier $n \geq 1$, on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices carrées inversibles de taille $n$ à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note $\mathrm{U}_n$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices unitaires.

Le but du problème est d'étudier les sous-groupes finis de $\mathrm{U}_n$ et de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. La partie III propose de démontrer le résultat suivant, dû à C. Jordan : *il existe un entier $a(n)$, tel que tout sous-groupe fini $G$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus $a(n)$ dans $G$.*

Les parties II.A, II.B et III sont indépendantes.

Dans le problème, $n$ est un entier fixé $\geq 1$ ; il vaut 2 dans la partie II. On désigne par $V$ un espace vectoriel complexe de dimension $n$ ; on note $\mathrm{End}(V)$ l'algèbre des endomorphismes de $V$ et $\mathrm{GL}(V)$ le groupe des automorphismes de $V$ ; on écrit $gh$, au lieu de $g \circ h$, le composé de deux endomorphismes $g$ et $h$ de $V$ et on note $Id_V$ l'automorphisme identité de $V$.

Un élément $g$ de $\mathrm{End}(V)$ est dit *diagonalisable* s'il existe une base de $V$ telle que la matrice de $g$ dans cette base soit diagonale ; on dira qu'une partie $X$ de $\mathrm{End}(V)$ est *diagonalisable* s'il existe une base de $V$ telle que la matrice dans cette base de *tout* élément de $X$ soit diagonale.

Une *forme hermitienne* sur $V$ est une application $\Phi : V \times V \to \mathbb{C}$ qui est *sesquilinéaire* (linéaire *à droite*, antilinéaire *à gauche*) et vérifie $\Phi(y,x) = \overline{\Phi(x,y)}$, pour tout $x$, $y$ dans $V$. Une telle forme est dite *définie positive* si le nombre réel $\Phi(x,x)$ est strictement positif pour tout vecteur non nul $x$ de $V$. Si $\Phi$ est une forme hermitienne définie positive sur $V$, une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $V$ est dite *orthonormée pour* $\Phi$ si l'on a $\Phi(e_i, e_i) = 1$ et $\Phi(e_i, e_j) = 0$, pour tout $i$, $j$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ ; un endomorphisme $g$ de $V$ est dit *unitaire pour* $\Phi$ si l'on a $\Phi(g(x), g(y)) = \Phi(x,y)$ pour tout $x$, $y$ dans $V$.

# Première partie
# Généralités

Comme indiqué plus haut, $V$ désigne un espace vectoriel *complexe* de dimension finie $n \geq 1$.

I.1. Soient $u$ et $v$ deux éléments de $\mathrm{GL}(V)$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, posons :

$$t = vuv^{-1},\ U_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_V) \text{ et } T_\lambda = \mathrm{Ker}(t - \lambda Id_V).$$

(a) Calculer $T_\lambda$ en fonction de $U_\lambda$ et $v$.

(b) On suppose que $u$ et $v$ commutent ; montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $v(U_\lambda) = U_\lambda$.

(c) On suppose que $u$ et $v$ commutent et que $v$ est diagonalisable ; montrer que, pour toute valeur propre $\lambda$ de $u$, $v$ induit un endomorphisme diagonalisable de $U_\lambda$.

I.2. Prouver qu'un élément d'ordre fini de $\mathrm{GL}(V)$ est diagonalisable.

I.3. Soit $X$ une partie de $\mathrm{End}(V)$ formée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Montrer que $X$ est diagonalisable. (On pourra distinguer le cas où tous les éléments de $X$ sont des homothéties).

I.4. Il est clair d'après I.2 et I.3 qu'un sous-groupe *abélien fini* de $\mathrm{GL}(V)$ est diagonalisable. Donner, sous forme matricielle, un sous-groupe abélien infini de $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$ qui ne soit pas diagonalisable.

I.5. Soit $G$ un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$. À partir d'une forme hermitienne définie positive $\Psi$ sur $V$, construire une forme hermitienne définie positive $\Phi$ sur $V$ telle que $G$ soit formé d'endomorphimes *unitaires* pour $\Phi$.

I.6. En déduire qu'un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{U}_n$.

Désormais, $V$ désigne un espace vectoriel *hermitien* de dimension $n \geq 1$, c'est-à-dire un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 1$, muni d'une forme hermitienne définie positive $\Phi$. Selon l'usage, on parlera de base orthonormée au lieu de base orthonormée pour $\Phi$, et d'endomorphisme unitaire au lieu d'endomorphisme unitaire pour $\Phi$. Les endomorphismes unitaires de $V$ forment un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ noté $\mathrm{U}(V)$ ; on note $\mathrm{SU}(V)$ le sous-groupe de $\mathrm{U}(V)$ formé des endomorphismes de déterminant 1.

Pour $g \in \mathrm{End}(V)$, on note $g^\star$ l'endomorphisme adjoint de $g$ ; il est caractérisé par la condition $\Phi(g(x), y) = \Phi(x, g^\star(y))$ pour tout $x$, $y$ dans $V$. L'endomorphisme $g$ est *hermitien* si $g^\star = g$, *unitaire* si $g^\star g = Id_V$.

Si $W$ est un espace vectoriel complexe, on peut restreindre à $\mathbb{R} \times W$ la loi de multiplication par les scalaires $\mathbb{C} \times W \to W$ ; on obtient alors sur le groupe additif de $W$ une structure d'espace vectoriel réel, qu'on appelle espace vectoriel *réel sous-jacent* à $W$.

Si $E$ est un espace vectoriel réel et $q$ une forme quadratique définie positive sur $E$, une *isométrie* de $q$ est un endomorphisme $u$ de $E$ tel que $q(u(x)) = q(x)$ pour tout $x \in E$ ; les isométries de $q$ forment un sous-groupe noté $\mathrm{O}(q)$ du groupe des automorphismes de $E$, et on note $\mathrm{SO}(q)$ le sous-groupe de $\mathrm{O}(q)$ formé des éléments de déterminant 1.

## Deuxième partie

# Le cas où $n$ vaut 2

Dans cette partie, $V$ est un espace vectoriel *hermitien* de dimension $n = 2$ ; on note $\Phi$ la forme hermitienne définie positive donnée sur $V$.

II.A.- On note $E$ l'ensemble des éléments hermitiens de $\mathrm{End}(V)$ dont la trace est nulle. Pour $x \in E$, on pose $q(x) = -\det(x)$.

II.A.1. Il est clair que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel *réel* sous-jacent à $\mathrm{End}(V)$.

a) Calculer la dimension de $E$ sur $\mathbb{R}$.

b) Prouver que $q$ est une forme quadratique définie positive sur $E$.

c) Calculer la forme bilinéaire symétrique $B : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que $B(x,x) = q(x)$ pour tout $x \in E$. (On pourra répondre à ces questions en termes de matrices des éléments de $\mathrm{End}(V)$ dans une base orthonormée de $V$).

II.A.2. Soient $a \in \mathrm{U}(V)$ et $x \in E$. Montrer que $axa^{-1} \in E$.

Pour $a \in \mathrm{U}(V)$, on note $\varphi(a)$ l'application $x \mapsto axa^{-1}$ de $E$ dans $E$ ; il est immédiat que c'est un endomorphisme de $E$.

II.A.3. Montrer que pour tout $a \in \mathrm{U}(V)$, $\varphi(a)$ est une isométrie de $q$.

L'application $\varphi : a \mapsto \varphi(a)$ de $\mathrm{U}(V)$ dans $\mathrm{O}(q)$ ainsi obtenue est un homomorphisme de groupes (on ne demande pas de le vérifier).

II.A.4. a) Déterminer le noyau de $\varphi$.

b) Soit $a$ un élément de $\mathrm{U}(V)$ qui n'est pas dans le noyau de $\varphi$. Montrer que $\varphi(a)$ est une rotation de $E$, et préciser, après le choix d'une orientation de $E$, un couple (axe,angle) de cette rotation, en termes de vecteurs propres et valeurs propres de $a$. (On fixera une base orthonormée de $V$ formée de vecteurs propres de $a$ et on considérera les matrices des éléments de $\mathrm{End}(V)$ dans cette base).

c) Déterminer l'image de $\varphi$.

II.A.5. Montrer que $\mathrm{SU}(V)$ contient un sous-groupe fini $G$ dont tout sous-groupe abélien distingué est d'indice au moins 60. (On pourra utiliser le groupe des isométries positives d'un icosaèdre régulier, en *admettant* qu'un espace affine euclidien de dimension 3 contient un tel icosaèdre).

II.B.- On se donne un sous-groupe fini $G$ de $\mathrm{U}(V)$. On note $Z$ le sous-groupe de $G$ formé des homothéties qui appartiennent à $G$ (de sorte que $Z$ est inclus dans le centre de $G$) et on note $H$ le groupe quotient de $G$ par son sous-groupe distingué $Z$. On note $m$ le cardinal de $H$, et on suppose $G$ distinct de $Z$, de sorte que $m \geq 2$.

Les éléments de $G$ qui ne sont pas dans $Z$ ont exactement 2 droites propres (qui sont d'ailleurs orthogonales). On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de $V$ ainsi obtenues.

II.B.1 a) Montrer que si $D \in \mathcal{D}$ et $g \in G$, alors $g(D)$ est dans $\mathcal{D}$.

b) Montrer que l'application $(g, D) \mapsto g(D)$ de $G \times \mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$ induit une action sur $\mathcal{D}$ du groupe $H = G/Z$.

On note cette action $(h, D) \mapsto h.D$. Pour chaque élément $D$ de $\mathcal{D}$, on note $e_D$ le cardinal du stabilisateur de $D$ dans $H$.

II.B.2 a) Prouver qu'on a $e_D \geq 2$ pour $D \in \mathcal{D}$.

b) Prouver l'égalité :

$$2(m-1) = \sum_{D \in \mathcal{D}} (e_D - 1).$$

II.B.3 Si $D$ et $D'$ sont des éléments de $\mathcal{D}$ dans la même orbite pour l'action de $H$, montrer que l'on a $e_D = e_{D'}$.

On note $\Omega_1$, ..., $\Omega_r$ les orbites de $\mathcal{D}$ pour l'action de $H$. Pour $i = 1, .., r$, on note $e_i$ la valeur commune des $e_D$ pour $D \in \Omega_i$. On suppose les orbites rangées de manière à avoir $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_r$.

II.B.4 a) Calculer

$$\sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{e_i}\right),$$

en fonction de $m$.

b) Montrer qu'on a $r = 2$ ou $3$.

II.B.5 Si $r$ vaut 2, montrer que $G$ est abélien.

II.B.6 Si $r$ vaut 3 et qu'on a $e_1 = e_2 = 2$, $e_3 \geq 2$, établir que $G$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice 2.

II.B.7 En examinant les possibilités autres que celles envisagées en II.B.5 et II.B.6, montrer que tout sous-groupe fini $G$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus 60 dans $G$.

## Troisième partie
# La méthode de Frobenius

Dans cette partie, $n$ est un entier quelconque $\geq 2$, et $V$ un espace vectoriel *hermitien* de dimension $n$. On note $\Phi$ la forme hermitienne définie positive donnée sur $V$.

III.A.- Dans cette section on fixe un nombre réel $\tau \in [0, \pi/2[$ et un élément $v$ de $\mathrm{U}(V)$. On suppose que pour chaque valeur propre $\gamma$ de $v$, il existe $\theta \in [-\tau, +\tau]$ tel que $\gamma = e^{i\theta}$.

III.A.1 Montrer que pour tout vecteur non nul $x$ de $V$, il existe un nombre réel $r > 0$ et un nombre réel $\alpha \in [-\tau, +\tau]$, tel que

$$\Phi(v(x), x) = re^{i\alpha}.$$

III.A.2 Soit $u$ un élément de $\mathrm{U}(V)$. Posons $t = vuv^{-1}$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, posons $U_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_V)$, $T_\lambda = \mathrm{Ker}(t - \lambda Id_V)$, et notons $U_\lambda^\perp$ l'orthogonal de $U_\lambda$ dans $V$.

a) Prouver qu'on a :

$$T_\lambda \cap U_\lambda^\perp = \{0\}.$$

b) On suppose de plus que $u$ et $t$ commutent. Montrer qu'on a $T_\lambda = U_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, de sorte que $t = u$ et que $u$ et $v$ commutent.

III.A.3 Soit $s$ un élément de $\mathrm{U}(V)$. On suppose que pour chaque valeur propre $\sigma$ de $s$, il existe $\alpha \in [-\tau, +\tau]$ tel que $\sigma = e^{i\alpha}$. Prouver que pour toute valeur propre $\mu$ de $vs^{-1}$, il existe $\beta \in [-2\tau, +2\tau]$, tel que $\mu = e^{i\beta}$. (On pourra considérer un vecteur $x$ de $V$ tel que $(v - \mu s)(x) = 0$).

Pour $g \in \mathrm{End}(V)$, on note $N(g)$ la trace de $g^\star g$. Si $A = [a_{i,j}]$ est la matrice de $g$ dans une base orthonormée de $V$, on a $N(g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2$, de sorte que $g \mapsto N(g)$ est une forme quadratique définie positive sur l'espace vectoriel réel $E$ sous-jacent à $\mathrm{End}(V)$. On note $g \mapsto \|g\| = \sqrt{N(g)}$ la norme euclidienne correspondante sur l'espace vectoriel $E$.

III.A.4 Montrer que, quel que soit $u \in \mathrm{U}(V)$ on a

$$N\left(vuv^{-1}u^{-1} - Id_V\right) \leq 4\sin^2(\tau) N\left(u - Id_V\right).$$

(On pourra, en prenant une base de vecteurs propres de $v$, estimer $N(v(u - Id_V) - (u - Id_V)v)$.)

III.B.- Dans cette section, $G$ désigne un sous-groupe *fini* de $\mathrm{U}(V)$. On note $S$ l'ensemble des éléments $s$ de $G$ tels que pour toute valeur propre $\sigma$ de $S$, il existe $\alpha \in ]-\pi/6, \pi/6[$ tel que $\sigma = e^{i\alpha}$. On note $A$ le sous-groupe de $G$ engendré par $S$.

III.B.1 Soient $v$ un élément de $S$ et $u$ un élément de $G$. On définit par récurrence sur l'entier naturel $k$, un élément $u_k$ de $\mathrm{U}(V)$, en posant :

$$u_0 = u \text{ et } u_{k+1} = v u_k v^{-1} u_k^{-1}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer qu'on a $u_k = Id_V$ pour $k$ assez grand.

b) On suppose en outre que pour toute valeur propre $\lambda$ de $u$, on peut trouver $\theta \in ]-\pi/2, +\pi/2[$ tel que $\lambda = e^{i\theta}$. Montrer que $u$ et $v$ commutent. (On pourra remarquer que, pour $k \geq 1$, dire que $u_{k+1} = Id_V$ signifie que $v$ commute à $u_{k-1} v u_{k-1}^{-1}$).

III.B.2 Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif $\eta$, indépendant de $n$, tel que deux éléments de $g$ et $h$ de $G$ vérifiant $N(g-h) < \eta$ vérifient aussi $h^{-1}g \in S$.

III.B.3 Prouver que l'indice de $A$ dans $G$ vaut au plus

$$a(n) = \left(2\sqrt{\frac{n}{\eta}} + 1\right)^{2n^2} - \left(2\sqrt{\frac{n}{\eta}} - 1\right)^{2n^2}.$$

(Prendre un système de représentants de $G/A$ dans $G$ ; il sera commode de noter $m$ la mesure de la boule unité de l'espace vectoriel euclidien $E$).

III.B.4 Conclure en prouvant le théorème de Jordan : *tout sous-groupe fini $G$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ possède un sous-groupe abélien distingué d'indice au plus $a(n)$ dans $G$.*