agrégation de Mathématiques — Université Joseph Fourier
Année 2013-2014

# propriétés des homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, exemples d' utilisations en géométrie

## 1 géométrie dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{C}$

On considère le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes comme un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, donc aussi comme un espace affine de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est muni du produit scalaire $z.z' = \frac{1}{2}(\overline{z}z' + \overline{z'}z)$ , c'est donc un espace euclidien.

1. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $z$ de $\mathbb{C}$ appartienne au cercle de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$.
2. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $z$ de $\mathbb{C}$ appartienne à la droite de vecteur normal $u \in \mathbb{C}$ contenant $\alpha \in \mathbb{C}$.
3. Soit $z_0 \in C$. La multiplication $m : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à $z$ associe $z_0 z$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}$. Quelle est sa matrice dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ ? Quel est son nom en tant que transformation géométrique ?
4. Soient $z$ et $z'$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}$. L'angle de vecteurs $\widehat{(z, z')}$ est égal à $Arg(\frac{z'}{z})$. Soit $s$ une similitude vectorielle directe de $\mathbb{C}$. Montrer que $(\widehat{s(z), s(z')}) = \widehat{(z, z')}$.
5. Montrer que les similitudes directes sont les seuls endomorphismes de $\mathbb{C}$ qui préservent les angles de vecteurs.
6. Une courbe tracée sur $\mathbb{C}$ est une application différentiable $c$ d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Si $c_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ et $c_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux courbes telles qu'il existe $t_1 \in I_1$ et $t_2 \in I_2$ avec $c_1(t_1) = c_2(t_2)$ et $c_1'(t_1) \neq 0$ et $c_2'(t_2) \neq 0$, l'angle $\widehat{(c_1, c_2)}_m$ formé par les deux courbes en $m = c_1(t_1) = c_2(t_2)$ est par définition l'angle de vecteurs $(\widehat{c_1'(t_1), c_2'(t_2)})$.
   Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dont la dérivée ne s'annule pas sur $U$, montrer que $h$ préserve les angles des courbes tracées sur $U$.
7. Lorsque l'angle $\widehat{(c_1, c_2)}_m$ formé par les courbes $c_1$ et $c_2$ est congru à 0 modulo $\pi$, les courbes sont dites tangentes en $m$. Montrer qu'alors, pour toute application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ différentiable au voisinage de $m$ et telle que $d_f(m)$ est un endomorphisme inversible du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, les courbes $f \circ c_1$ et $f \circ c_2$ sont elles aussi tangentes en $f(m)$.

## 2 homographies de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$

On note $p : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ l'application de passage au quotient. On appelle repère projectif de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ une famille de $n+1$ points $(u_0, u_1, ..., u_n)$ de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ tels qu'il existe une base $U_1, ..., U_n$ de $\mathbb{C}^n$ de sorte que pour $1 \leq i \leq n$ on ait $p(U_i) = u_i$ et de plus $p(\sum_{i=1}^n U_i) = u_0$.

1. Montrer que l'image d'un repère projectif de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ par une homographie de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ est un repère projectif de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$.
2. Si $(u_0, u_1, ..., u_n)$ et $(v_0, v_1, ..., v_n)$ sont des repères projectifs de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ alors il existe une et une seule homographie $h$ telle que $h(u_i) = v_i$ pour $0 \leq i \leq n$.

# 3 la droite projective complexe

## 3.1 cercles et droites

On considère la carte usuelle de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ donnée par l'hyperplan affine $H_0 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | \ z_2 = 1\}$ et la bijection $\phi_0 : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{(1:0)\} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui au point de coordonnées homogènes $(z_1 : z_2)$ associe le complexe $\frac{z_1}{z_2}$.
Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\beta \in \mathbb{C}$ on considère la carte de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ donnée par l'hyperplan affine $H_{\alpha,\beta} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | \ \alpha z_1 + \beta z_2 = 1\}$ et la bijection $\phi_{\alpha,\beta} : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{(-\beta : \alpha)\} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui au point de coordonnées homogènes $(z_1 : z_2)$ associe le complexe $\frac{z_2}{\alpha z_1 + \beta z_2}$.(on a identifié $H_{\alpha,\beta}$ à $\mathbb{C}$ via la paramétrisation de $H_{\alpha,\beta}$ par $z_2$).
Le changement de cartes est alors donné par la bijection $\phi_{\alpha,\beta} \circ \phi_0^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{\beta}{\alpha}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ qui au complexe $z$ associe $\frac{1}{\alpha z + \beta}$.

1. Quel est le représentant dans $H_{\alpha,\beta}$ du point à l'infini de la représentation de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ par $H_0$ ?
2. Soit $D$ la droite de $H_0$ d'équation $u\overline{z} + \overline{u}z + d = 0$ où $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $d \in \mathbb{R}$. On note $\tilde{D} = \phi_0^{-1}(D)$. Déterminer $\phi_{\alpha,\beta}(\tilde{D})$ . Quelle est la nature géométrique de son adhérence dans $\mathbb{C}$ ? L'adhérence de $\phi_{\alpha,\beta}(\tilde{D})$ contient-elle le représentant dans $H_{\alpha,\beta}$ du point à l'infini de la représentation de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ par $H_0$ ?
3. Soit $C$ le cercle de $H_0$ d'équation $z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + c = 0$ où $\omega \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{R}$. On note $\tilde{C} = \phi_0^{-1}(C)$. Déterminer $\phi_{\alpha,\beta}(\tilde{C})$. Quelle est la nature géométrique de son adhérence dans $\mathbb{C}$ ? L'adhérence de $\phi_{\alpha,\beta}(\tilde{C})$ contient-elle le représentant dans $H_{\alpha,\beta}$ du point à l'infini de la représentation de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ par $H_0$ ?

## 3.2 birapport

On privilégie la représentation de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ par $H_0$. De ce fait, on notera $(1:0) = \infty$, $(0:1) = 0$ et $(1:1) = 1$.

1. définition du birapport :

   (a) Soient $a$,$b$ et $c$ trois points distincts de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une unique homographie $h$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ telle que $h(a) = \infty$, $h(b) = 0$ et $h(c) = 1$.
   Soit alors $d$ un point de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, l'image $h(d)$ de $d$ par $h$ est appelée le birapport des quatre points $a$, $b$, $c$ et $d$ et il est noté $[a, b, c, d]$.

   (b) Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre points de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, les trois premiers étant distincts, soient $a'$, $b'$, $c'$ et $d'$ quatre points de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, les trois premiers étant distincts, montrer qu'il existe une homographie $h : \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ telle que $h(a) = a'$, $h(b) = b'$, $h(c) = c'$ et $h(d) = d'$ si et seulement si les birapports $[a, b, c, d]$ et $[a', b', c', d']$ sont égaux.

   (c) Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre points de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, les trois premiers étant distincts et $d \neq a$. Montrer que $[a, b, c, d] = (\delta : 1)$ où

   $$\delta = \frac{d-b}{d-a} / \frac{c-b}{c-a}$$

   Comme on privilégie la représentation de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ par $H_0$ on notera $[a, b, c, d] = \delta$.
   indication : L'homographie $h$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans lui-même telle que $h(a) = \infty$, $h(b) = 0$ et $h(c) = 1$ provient d'une application linéaire bijective de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ vérifie certaines conditions...

(d) Que vaut $[a,b,c,a]$ ?

(e) Montrer que pour quatre points $a$, $b$, $c$ et $d$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, les trois premiers étant distincts et $d \neq a$, si $[a,b,c,d] = \delta$ alors $[b,a,c,d] = \frac{1}{\delta}$, $[a,b,d,c] = \frac{1}{\delta}$, $[a,c,b,d] = 1-\delta$, $[d,b,c,a] = 1-\delta$, $[c,b,a,d] = \frac{\delta}{\delta-1}$ , $[a,d,c,b] = \frac{\delta}{\delta-1}$, $[c,d,a,b] = \delta$.

2. cercles-droites :

(a) Soient $a$, $b$, $c$ trois points non alignés de $\mathbb{C}$. Montrer qu'un point $d$ de $\mathbb{C}$ appartient au cercle qui contient $a$, $b$ et $c$ si et seulement si le birapport $[a,b,c,d]$ est réel ou infini. (On considère le birapport comme un complexe avec la convention décrite précédemment)

(b) Soient $a$, $b$, $c$ trois points alignés et distints de $\mathbb{C}$. Montrer qu'un point $d$ de $\mathbb{C}$ appartient à la droite qui contient $a$, $b$ et $c$ si et seulement si le birapport $[a,b,c,d]$ est réel ou infini. (On considère le birapport comme un complexe avec la convention décrite précédemment)

(c) Etant donnés trois points $a$, $b$, et $c$ distincts de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, on définit le cercle-droite $C_{a,b,c}$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ qui contient $a$, $b$, et $c$ par

$$C_{a,b,c} = \{d \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \mid [a,b,c,d] \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$$

Montrer que l'image de $C_{a,b,c}$ par une homographie de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est encore un cercle-droite de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

## 3.3 angles de courbes dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

1. Soit $c$ une application d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
Montrer que $\phi_0 \circ c$ est différentiable en tout point de $I \setminus c^{-1}\{(1:0)\}$ si et seulement si pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ , $\phi_{\alpha,\beta} \circ c$ est différentiable en tout point de $I \setminus c^{-1}\{(1:0),(-\beta:\alpha)\}$ .
On dira donc que $c$ est différentiable en $t \in I$ lorsqu'il existe une représentation de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ à l'aide d'une application $\phi_{\alpha,\beta}$ définie en $c(t)$ telle que $\phi_{\alpha,\beta} \circ c$ est différentiable en $t$ ( avec la convention $\phi_{0,1} = \phi_0$).
2. Soit $t \in I \setminus c^{-1}\{(1:0),(-\beta:\alpha)\}$.
Montrer que $(\phi_0 \circ c)'(t) \neq 0$ si et seulement si $(\phi_{\alpha,\beta} \circ c)'(t) \neq 0$.
3. Une courbe tracée sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est une application différentiable $c$ d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
Soient $c_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et $c_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ deux courbes telles qu'il existe $t_1 \in I_1$ et $t_2 \in I_2$ avec $c_1(t_1) = c_2(t_2)$ . On suppose qu'il existe une représentation $\phi_{\alpha,\beta}$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ telle que $(\phi_{\alpha,\beta} \circ c_1)'(t_1) \neq 0$ et $(\phi_{\alpha,\beta} \circ c_2)'(t_2) \neq 0$. Montrer que l'angle $\left(\widehat{\phi_{\alpha,\beta} \circ c_1, \phi_{\alpha,\beta} \circ c_2}\right)_m$ formé par les images des courbes $c_1$ et $c_2$ en leur point d'intersection $m = \phi_{\alpha,\beta} \circ c_1(t_1)$ est indépendant de la représentation $\phi_{\alpha,\beta}$ choisie. Cet angle est par définition l'angle des courbes $c_1$ et $c_2$ en $c_1(t_1) = c_2(t_2)$ sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
4. Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. On appelle application conforme directe sur $U$ une application différentiable sur $U$ , dont le jacobien ne s'annule pas, et qui conserve les angles de courbes. Montrer que les homographies sont des applications conformes directes de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
5. Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$, montrer que les applications conformes directes sur $U$ sont les fonctions holomorphes sur $U$ dont la dérivée ne s'annule pas sur $U$.
6. Montrer que les applications conformes directes bijectives de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont les similitudes directes.
7. Montrer que les applications conformes directes bijectives de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sont les homographies.

# 4 quelques exemples d'utilisation des homographies dans la résolution de problèmes de géométrie affine plane

1. Soient $a$, $b$ et $n$ trois points distincts de $\mathbb{C}$. On veut montrer qu'il existe un unique cercle contenant $n$ et orthogonal à tous les cercles passant par $a$ et $b$.
   (a) Soit $\Gamma$ le cercle contenant $a$, $b$ et $n$. Comment trace-t-on le centre de $\Gamma$ ?
   (b) Montrer qu'il existe un unique cercle $C$ contenant $n$ et orthogonal à $\Gamma$ et à la droite $(ab)$.
   (c) Montrer que $C$ est également orthogonal au cercle $\Gamma'$ image de $\Gamma$ dans la reflexion par rapport à la droite $(ab)$.
   (d) Montrer que $C$ est orthogonal à tous les cercles passant par $a$ et $b$.
   indication : on pourra utiliser une homographie.

2. Soient $D_1$ et $D_2$ deux droites orthogonales et sécantes en $a$. Soient $C_1$ et $C_3$ deux cercles tangents en $a$ à $D_1$, soient $C_2$ et $C_4$ deux cercles tangents en $a$ à $D_2$.
   (a) Montrer que pour $i \in \{1,3\}$ et $j \in \{2,4\}$ les cercles $C_i$ et $C_j$ possèdent un deuxième points d'intersection que l'on note $m_{i,j}$.
   (b) Montrer que les points $m_{1,2}$, $m_{1,4}$, $m_{3,2}$ et $m_{3,4}$ sont cocycliques ou alignés.

3. Soient $C$ et $C'$ deux cercles et $a \in C$. Montrer qu'il existe un et un seul cercle contenant $a$ et orthogonal à $C$ et à $C'$.

4. Soient $C$ un cercle et $C'$ un cercle contenu dans l'intérieur du disque délimité par $C$. On construit par récurrence une suite de cercles $\Gamma_n$ ainsi : $\Gamma_1$ est tangent à $C$ et à $C'$ . Si $\Gamma_n$ est construit, on construit $\Gamma_{n+1}$ tangent à $C$ et à $C'$ , tangent à $\Gamma_n$ et distinct de $\Gamma_{n-1}$ . Montrer que l'on a l'alternative suivante : ou bien il existe $s \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tel que $\Gamma_s = \Gamma_1$ pour n'importe quel choix de $\Gamma_1$ , ou bien les cercles $\Gamma_n$ sont tous distincts quel que soit le cercle $\Gamma_1$ choisi.
   indication : l'alternative est claire lorsque les cercles $C$ et $C'$ sont concentriques, de même que le procédé de construction de la suite de cercles $\Gamma_n$.

5. Soient $C$ et $C'$ deux cercles sécants en deux points distincts dans $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) Les cercles $C$ et $C'$ sont orthogonaux.
   (b) Pour tout diamètre $(ab)$ de $C$ qui coupe $C'$ en deux points distincts $a'$ et $b'$ on a $[a', b', a, b] = -1$.
   (c) Il existe un diamètre $(ab)$ de $C$ qui coupe $C'$ en deux points distincts $a'$ et $b'$ tels que $[a', b', a, b] = -1$.