

Nombres complexes et géométrie euclidienne

Le corps \mathbb{C} des nombres complexes est supposé construit (voir le chapitre 7).

On rappelle que \mathbb{C} est un corps commutatif et un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2, de base canonique $(1, i)$ où i est une solution complexe de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

19.1 Le plan affine euclidien

On suppose connu le plan affine euclidien que l'on note \mathcal{P} et que l'on munit d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, en désignant par $\vec{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel associé à \mathcal{P} .

Nous rappelons rapidement quelques notions utiles pour la suite.

Un point $M \in \mathcal{P}$ est repéré par ses coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ce qui signifie qu'on a l'égalité $\vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ dans $\vec{\mathcal{P}}$.

On notera :

- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$: le produit scalaire des vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 de $\vec{\mathcal{P}}$;
- $\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = x_1y_2 - x_2y_1$: le déterminant de (\vec{v}_1, \vec{v}_2) dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$;
- $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$: la distance de A à B dans \mathcal{P} .

On rappelle que si $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ est une autre base de $\vec{\mathcal{P}}$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

Dans le cas où \mathcal{B}' est orthonormée comme \mathcal{B} , on a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \pm 1$.

On rappelle aussi que la base \mathcal{B}' définit la même orientation de $\vec{\mathcal{P}}$ que \mathcal{B} si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.

En se fixant une base \mathcal{B} , on écrira \det pour $\det_{\mathcal{B}}$.

19.2 Le plan d'Argand-Cauchy

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Théorème 19.1 *L'application φ [resp. $\vec{\varphi}$] qui associe à tout nombre complexe $z = x + iy$ le point $\varphi(z) \in \mathcal{P}$ [resp. le vecteur $\vec{\varphi}(z) \in \vec{\mathcal{P}}$] de coordonnées (x, y) dans le repère \mathcal{R} [resp. dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2)] réalise une bijection de \mathbb{C} sur \mathcal{P} [resp. sur $\vec{\mathcal{P}}$].*

Démonstration. Résulte du fait que tout nombre complexe [resp. tout point de \mathcal{P} ou tout vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$] est uniquement déterminé par sa partie réelle et sa partie imaginaire [resp. par ses coordonnées dans le repère \mathcal{R} ou dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2)]. ■

Tout point M du plan affine \mathcal{P} [resp. tout vecteur \vec{v} du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$] s'écrit donc de manière unique $M = \varphi(z)$ [resp. $\vec{v} = \vec{\varphi}(z)$] et peut ainsi être identifié au nombre complexe z .

Remarque 19.1 Les bijections φ et $\vec{\varphi}$ dépendent du repère orthonormé \mathcal{R} choisi.

Remarque 19.2 L'application $\vec{\varphi}$ est linéaire et donc réalise un isomorphisme d'espace vectoriel de \mathbb{C} sur $\vec{\mathcal{P}}$, puisqu'elle est bijective.

Le plan \mathcal{P} muni de cette identification est appelé plan complexe ou plan d'Argand-Cauchy.

Si $M \in \mathcal{P}$ [resp. $\vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$] s'écrit $M = \varphi(z)$ [resp. $\vec{v} = \vec{\varphi}(z)$], on dit que z est l'afixe de M [resp. l'afixe de \vec{v}] et M [resp. \vec{v}] le point [resp. vecteur] image de z .

On a $\varphi(0) = O$, le vecteur \vec{OM} est le vecteur image de z et z est l'afixe de \vec{OM} . Précisément si $z = x + iy$, on a :

$$\overrightarrow{\varphi(0)\varphi(z)} = \vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \vec{\varphi}(z)$$

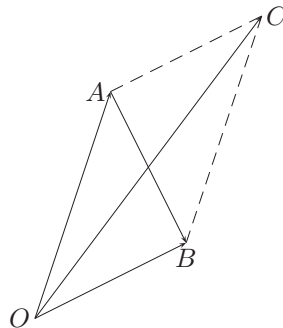
ce qui peut s'écrire dans \mathcal{P} :

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \vec{\varphi}(z)$$

et s'interprète en disant que φ est une application affine de \mathbb{C} dans \mathcal{P} d'application linéaire associée $\vec{\varphi}$ (le plan vectoriel \mathbb{C} est naturellement muni d'une structure d'espace affine).

En utilisant cette identification entre \mathcal{P} et \mathbb{C} , on peut donner les interprétations géométriques suivantes où a, b, z, z' désignent des nombres complexes et A, B, M, M' leurs images respectives dans \mathcal{P} .

1. L'axe $O_x = \mathbb{R}\vec{e}_1$ est identifié à l'ensemble des nombres réels.
2. L'axe $O_y = \mathbb{R}\vec{e}_2$ est identifié à l'ensemble des imaginaires purs.
3. $a + b$ est l'afixe du vecteur $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ et $b - a$ l'afixe du vecteur $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ (résulte de la linéarité de $\vec{\varphi}$).



4. $\Re(\bar{z}z') = \Re(\bar{z}z') = xx' + yy' = \vec{OM} \cdot \vec{OM'}$.
5. $\Im(\bar{z}z') = xy' - x'y = \det(\vec{OM}, \vec{OM'})$.

$$6. \bar{z}z' = \Re(\bar{z}z') + i\Im(\bar{z}z') = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} + i \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}).$$

7. Si A, B, C sont deux à deux distincts, alors ces points sont alignés si, et seulement si, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$, ce qui équivaut à dire que $\frac{b-a}{c-a}$ est réel.

On peut aussi dire que A, B, C sont alignés si, et seulement si :

$$\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \Im((b-a)(\overline{c-a})) = 0$$

ce qui équivaut à dire que $(b-a)(\overline{c-a})$ est réel.

8. Si les points A, B, C, D sont deux à deux distincts, alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \Re((b-a)(\overline{d-c})) = 0$$

ce qui équivaut à dire que $(b-a)(\overline{d-c})$ est imaginaire pur.

Remarque 19.3 Si u, v sont deux nombres complexes avec v non nul, on a les équivalences :

$$\left(\frac{u}{v} = \frac{1}{|v|^2} u\bar{v} \text{ est réel} \right) \Leftrightarrow (u\bar{v} \text{ est réel})$$

et :

$$\left(\frac{u}{v} = \frac{1}{|v|^2} u\bar{v} \text{ est imaginaire pur} \right) \Leftrightarrow (u\bar{v} \text{ est imaginaire pur})$$

En utilisant les propriétés 7. et 8. précédentes, on en déduit que si A, B, C, D sont des points deux à deux distincts, alors :

$$(A, B, C \text{ sont alignés}) \Leftrightarrow ((b-a)(\overline{c-a}) \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \left(\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R} \right)$$

et :

$$((AB) \text{ et } (CD) \text{ sont orthogonales}) \Leftrightarrow ((b-a)(\overline{d-c}) \in i\mathbb{R}) \Leftrightarrow \left(\frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R} \right)$$

Dans ce qui suit, on identifie le plan d'Argand-Cauchy \mathcal{P} à \mathbb{C} .

Si $A, B, M, M', \Omega, \dots$ sont des points de \mathcal{P} , nous noterons $a, b, z, z', \omega, \dots$ (noter que les affixes de points variables M, M', \dots sont notées z, z', \dots).

19.3 Équations complexes des droites et cercles du plan

19.3.1 Droites dans le plan complexe

Soit \mathcal{D} une droite passant par deux points distincts A, B . Dire que M appartient à \mathcal{D} équivaut à dire que les points A, M, B sont alignés, ce qui équivaut encore à dire que $(z-a)(\bar{z}-\bar{b})$ est réel, soit :

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{b}) = (\bar{z}-\bar{a})(z-b)$$

ce qui s'écrit :

$$(\bar{b}-\bar{a})z - (b-a)\bar{z} - (a\bar{b}-\bar{a}b) = 0$$

le nombre complexe $\bar{a}b - \overline{ab} = 2i\Im(ab)$ étant imaginaire pur. En multipliant par i , une équation complexe de la droite \mathcal{D} est alors :

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0 \quad (19.1)$$

où $\beta = i(a - b) \in \mathbb{C}^*$ et γ est réel.

Le nombre complexe $\beta = i(a - b)$ est l'affixe d'un vecteur \vec{v} qui est orthogonal à \mathcal{D} . En effet, on a :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = \Re(\bar{\beta}(b - a)) = \Re(i|b - a|^2) = 0.$$

On peut aussi aboutir à ce résultat en utilisant une équation cartésienne de \mathcal{D} :

$$ux + vy + w = 0$$

avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $w \in \mathbb{R}$. En écrivant que $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ pour M d'affixe z , cette équation devient :

$$u(z + \bar{z}) - vi(z - \bar{z}) + 2w = 0$$

soit :

$$(u - iv)z + (u + iv)\bar{z} + 2w = 0$$

avec $\beta = u + iv$ affixe du vecteur $\vec{v} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$ orthogonal à \mathcal{D} .

Réciproquement une équation du type (19.1) définit une droite. En effet, en écrivant $z = x + iy$, $\beta = u + iv$, cette équation devient :

$$(u - iv)(x + iy) + (u + iv)(x - iy) + \gamma = 0$$

soit :

$$ux + vy + \frac{\gamma}{2} = 0$$

et c'est une droite dirigée par le vecteur d'affixe $-v + iu = i\beta$ (ou orthogonale au vecteur d'affixe $\beta = u + iv$).

19.3.2 Cercles dans le plan complexe

Soit \mathcal{C} un cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$ dans le plan \mathcal{P} .

Dire que $M \in \mathcal{C}$ équivaut à dire que :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

ce qui se traduit dans le plan complexe par :

$$|z - \omega|^2 = R^2$$

et peut aussi s'écrire :

$$(z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) = z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + |\omega|^2 - R^2 = 0$$

Une équation complexe de ce cercle \mathcal{C} est donc :

$$z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + \gamma = 0 \quad (19.2)$$

où $\gamma = |\omega|^2 - R^2$ est réel avec $|\omega|^2 - \gamma = R^2 > 0$.

Réciproquement une telle équation définit un cercle. En effet, en écrivant $z = x + iy$, $\omega = u + iv$, cette équation devient :

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + \gamma = 0$$

soit :

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 + \gamma - u^2 - v^2 = 0$$

et en posant $R^2 = u^2 + v^2 - \gamma = |\omega|^2 - \gamma$ (ce réel est positif), on constate qu'on a le cercle de centre ω et de rayon $\sqrt{|\omega|^2 - \gamma}$.

On a donc montré le résultat suivant.

Théorème 19.2 *Toute équation de la forme :*

$$\alpha z \bar{z} + \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \gamma = 0$$

où α, γ sont des réels et β un nombre complexe représente :

- l'ensemble \mathbb{C} tout entier si $\alpha = \beta = \gamma = 0$;
- l'ensemble vide si $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma \neq 0$;
- une droite dirigée par le vecteur d'affixe $i\beta$ (ou orthogonale vecteur d'affixe β) si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$;
- l'ensemble vide si $\alpha \neq 0$ et $\frac{|\beta|^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} < 0$;
- le cercle de centre $\omega = -\frac{\beta}{\alpha}$ et de rayon $\sqrt{\frac{|\beta|^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}$ si $\alpha \neq 0$ et $\frac{|\beta|^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} \geq 0$.

19.4 Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe

A priori, a, b, z, z', ω désignent des nombres complexes et A, B, M, M', Ω leurs images respectives dans \mathcal{P} relativement à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

19.4.1 Module et distance euclidienne

Théorème 19.3

1. $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance de O à M ;
2. $|b - a| = AB$ est la distance de A à B ;
3. l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z - \omega| = \rho$ est identifié au cercle de centre Ω et de rayon $\rho \geq 0$;
4. l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z - \omega| < \rho$ [resp. $|z - \omega| \leq \rho$] est identifié au disque ouvert [resp. fermé] de centre Ω et de rayon $\rho \geq 0$;
5. pour $A \neq B$, le point M est sur la médiatrice du segment $[AB]$ si, et seulement si, $|z - a| = |z - b|$.

Démonstration. Il suffit de vérifier. ■

Remarque 19.4 Si $\mathcal{R}' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ est un autre repère orthonormé de \mathcal{P} , en désignant par $M' = \varphi'(z)$ l'image dans \mathcal{P} du nombre complexe $z = x + iy$ relativement à \mathcal{R}' , on a :

$$\|\vec{O'M'}\|^2 = \|x\vec{e}'_1 + y\vec{e}'_2\|^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 = \|\vec{OM}\|^2$$

et $|z| = OM$ est bien indépendant du repère orthonormé choisi. On peut donc aussi définir le module de z comme la distance de O à M où $M = \varphi(z)$ et $O = \varphi(0)$, φ étant la bijection de \mathbb{C} sur \mathcal{P} relative à un repère quelconque \mathcal{R} .

Remarque 19.5 L'équation complexe $|z - a| = |z - b|$ de la médiatrice du segment $[AB]$ s'écrit aussi $|z - a|^2 - |z - b|^2 = 0$, soit :

$$(\bar{a} - \bar{b})z + (a - b)\bar{z} + (|b|^2 - |a|^2) = 0$$

et c'est une droite dirigée par le vecteur \vec{u} d'affixe $i\beta = i(a - b)$ (ou orthogonale au vecteur \vec{v} d'affixe $\beta = b - a$). On constate que le point I d'affixe $z = \frac{a+b}{2}$, c'est-à-dire le milieu de $[A, B]$, est bien sur cette médiatrice.

Une équation complexe de cette médiatrice est donc :

$$z = \frac{a+b}{2} + i\lambda(b-a)$$

où λ décrit \mathbb{R} .

19.4.2 L'égalité du parallélogramme

L'égalité suivante valable pour tous nombres complexes z et z' :

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\bar{z}') + |z'|^2$$

se traduit géométriquement par :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad (19.3)$$

pour tous vecteurs \vec{u}, \vec{v} du plan euclidien $\vec{\mathcal{P}}$.

De cette identité, on déduit que :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

qui se traduit géométriquement par :

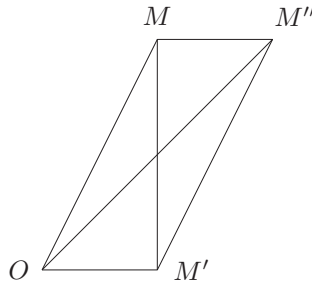
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$$

et s'interprète en disant que la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des cotés. En effet, en notant M'' le point d'affixe $z + z'$, $OMM''M'$ est un parallélogramme avec :

- $|z| = OM = M'M''$ puisque l'affixe de $\vec{M'M''} = \vec{OM''} - \vec{OM'}$ est $z + z' - z' = z$;
- $|z'| = OM' = MM''$, puisque l'affixe de $\vec{MM''} = \vec{OM''} - \vec{OM}$ est $z + z' - z = z'$;
- $|z + z'| = OM''$ (une diagonale) et $|z' - z| = MM'$ (l'autre diagonale).

Cette identité du parallélogramme est caractéristique des normes qui se déduisent d'un produit scalaire.

Nous reviendrons sur cette identité du parallélogramme au paragraphe sur le triangle.

FIG. 19.1 – $OM''^2 + MM'^2 = 2(OM^2 + OM'^2)$

19.4.3 L'inégalité de Cauchy-Schwarz

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{C} :

$$|\Re(z\overline{z'})| \leq |z||z'|$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, z et z' sont liés sur \mathbb{R} (théorème 7.5), nous permet de retrouver la même inégalité dans le plan euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont liés.

De cette inégalité, on déduit l'inégalité triangulaire dans \mathbb{C} :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, z et z' sont positivement liés sur \mathbb{R} (théorème 7.6), qui nous permet de retrouver la même inégalité dans le plan euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont positivement liés.

Cette inégalité triangulaire s'interprète en disant que dans un vrai triangle ABC la longueur d'un coté est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres cotés :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{BC}\| &= \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\| = |z - z'| \\ &< |z| + |z'| = \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{AB}\| \end{aligned}$$

en notant z l'afixe de \overrightarrow{AC} et z' celle de \overrightarrow{AB} .

De manière plus générale, on a vu que pour toute suite finie z_1, \dots, z_n de nombres complexes non nuls avec $n \geq 2$, on a :

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, il existe des réels $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $z_k = \lambda_k z_1$ pour $k = 2, \dots, n$ (exercice 7.7). Du point de vue géométrique, en désignant par M_k les points d'afixe z_k , on en déduit que l'égalité $\left\| \sum_{k=1}^n \overrightarrow{OM_k} \right\| = \sum_{k=1}^n \|\overrightarrow{OM_k}\|$ équivaut à dire que les points O, M_1, \dots, M_n sont alignés sur la demi-droite $[OM_1]$.

19.5 Lignes de niveau associées aux module

Si X est une partie non vide de \mathbb{C} et f une application de \mathbb{C} dans \mathbb{R} , on appelle lignes de niveau associées à f les sous-ensembles E_λ de \mathbb{C} définis par :

$$E_\lambda = \{z \in X \mid f(z) = \lambda\}$$

où λ décrit \mathbb{R} .

À chaque ligne de niveau E_λ , on associe la partie \mathcal{E}_λ de \mathcal{P} formée des points d'affixes $z \in E_\lambda$. On identifiera les ensembles E_λ et \mathcal{E}_λ .

Précisément, on a :

$$\mathcal{E}_\lambda = \{M \in \mathcal{P} \mid f \circ \varphi^{-1}(M) = \lambda\}$$

Par exemple pour $\omega \in \mathbb{C}$ donné, les lignes de niveau de :

$$f : z \mapsto |z - \omega|$$

sont définies par :

$$\mathcal{E}_\lambda = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \lambda < 0, \\ \{\Omega\} & \text{si } \lambda = 0, \\ \text{le cercle de centre } \Omega \text{ et de rayon } \lambda & \text{si } \lambda > 0. \end{cases}$$

Du cours sur les coniques, on déduit les résultats suivants.

Pour $a \neq b$ donnés \mathbb{C} , les lignes de niveau de :

$$f : z \mapsto |z - a| + |z - b|$$

sont définies par :

$$\mathcal{E}_\lambda = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \lambda < |a - b|, \\ \text{le segment } [AB] & \text{si } \lambda = |a - b|, \\ \text{l'ellipse de foyers } A, B \text{ et de grand axe } \lambda & \text{si } \lambda > |a - b|. \end{cases}$$

Pour $a \neq b$ donnés \mathbb{C} , les lignes de niveau de :

$$f : z \mapsto ||z - a| - |z - b||$$

sont définies par :

$$\mathcal{E}_\lambda = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \lambda > |a - b|, \\ \text{la droite } (AB) \text{ privée du segment ouvert }]AB[& \text{si } \lambda = |a - b|, \\ \text{l'hyperbole de foyers } A, B \text{ et de grand axe } \lambda & \text{si } \lambda < |a - b|. \end{cases}$$

En utilisant la représentation complexe des droites et cercles (théorème 19.2), on peut étudier les lignes de niveau de la fonction :

$$f : z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} \mapsto \frac{|z - b|}{|z - a|}$$

Pour tout réel λ , on a :

$$E_\lambda = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{a\} \mid \frac{|z - b|}{|z - a|} = \lambda \right\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - b| = \lambda |z - a|\}$$

Pour $\lambda < 0$, cet ensemble est vide et pour $\lambda = 0$, il est réduit à $\{b\}$.

Théorème 19.4 (Appolonius) Soient a, b deux nombres complexes distincts et λ un réel strictement positif. La ligne de niveau :

$$E_\lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - b| = \lambda |z - a|\}$$

est identifiée dans \mathcal{P} à la médiatrice du segment $[AB]$ si $\lambda = 1$ ou au cercle de centre Ω d'affixe $\frac{b - \lambda^2 a}{1 - \lambda^2}$ et de rayon $R = \frac{\lambda |a - b|}{|1 - \lambda^2|}$ si $\lambda \neq 1$.

Démonstration. L'ensemble E_λ a pour équation :

$$|z - b|^2 = \lambda^2 |z - a|^2$$

soit :

$$(z - b)(\bar{z} - \bar{b}) = \lambda^2 (z - a)(\bar{z} - \bar{a})$$

c'est-à-dire :

$$\alpha z \bar{z} + \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \gamma = 0$$

où on a posé :

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \lambda^2 \\ \beta = \lambda^2 a - b \\ \gamma = |b|^2 - \lambda^2 |a|^2 \end{cases}$$

C'est donc une droite ou un cercle quand il n'est pas vide ou \mathbb{C} tout entier.

Pour $\lambda = 1$, on a :

$$E_\lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - b| = |z - a|\}$$

c'est donc l'ensemble des points équidistants de A et B , c'est-à-dire la médiatrice du segment $[AB]$. Cette médiatrice ayant pour équation complexe :

$$(\bar{a} - \bar{b})z + (a - b)\bar{z} + (|b|^2 - |a|^2) = 0$$

(ce qui a été déjà vu avec la remarque 19.5).

Pour $\lambda \neq 1$, on a :

$$\frac{|\beta|^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{|\beta|^2 - \alpha\gamma}{\alpha^2}$$

avec :

$$\begin{aligned} |\beta|^2 - \alpha\gamma &= (\lambda^2 a - b)(\lambda^2 \bar{a} - \bar{b}) - (1 - \lambda^2)(|b|^2 - \lambda^2 |a|^2) \\ &= \lambda^2 (|a|^2 + |b|^2 - \bar{a}b - a\bar{b}) = \lambda^2 |a - b|^2 > 0 \end{aligned}$$

et \mathcal{E}_λ est le cercle de centre Ω ayant pour affixe $\omega = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b - \lambda^2 a}{1 - \lambda^2}$ et de rayon $R = \frac{\lambda |a - b|}{|1 - \lambda^2|}$.

■

Remarque 19.6 Pour $\lambda = 1$, la médiatrice du segment $[A, B]$ coupe le plan affine en deux demi-plans respectivement définis par les inéquations complexes $|z - b| < |z - a|$ (c'est le demi-plan qui contient b) et $|z - b| > |z - a|$ (c'est le demi-plan qui contient a).

Remarque 19.7 Pour $\lambda \neq 1$, on a :

$$\omega = a + \frac{1}{1 - \lambda^2} (b - a) = b + \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} (b - a)$$

et le centre Ω du cercle \mathcal{E}_λ est sur la droite (AB) privée du segment $[AB]$ (pour $|\lambda| > 1$, on a $\frac{1}{1 - \lambda^2} < 0$, donc Ω est sur la demi-droite $]-\infty, A]$, et pour $|\lambda| < 1$, on a $\frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} > 0$, donc Ω est sur la demi-droite $[B, +\infty[$).

Remarque 19.8 Pour $\lambda \neq 1$, l'égalité $(1 - \lambda^2)\omega = b - \lambda^2 a$, se traduit par :

$$(1 - \lambda^2) \overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{OB} - \lambda^2 \overrightarrow{OA}$$

et signifie que le centre Ω est le barycentre de $(A, -\lambda^2)$ et $(B, 1)$. On retrouve le fait que ce centre est sur la droite (AB) .

Remarque 19.9 Pour $\lambda \neq 1$, les points de $\mathcal{E}_\lambda \cap (AB)$ sont ceux dont l'affixe z est telle que :

$$\begin{cases} |z - \omega| = R \\ z = \omega + t(b - a) \end{cases}$$

où t est un réel. Pour de tels points, on a :

$$|z - \omega| = |t| |b - a| = R = \frac{\lambda |a - b|}{|1 - \lambda^2|}$$

et :

$$t = \pm \frac{\lambda}{|1 - \lambda^2|}$$

Pour $\lambda > 1$, on a les deux solutions :

$$\begin{aligned} c &= \omega + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} (b - a) = a + \frac{1}{1 - \lambda^2} (b - a) + \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} (b - a) \\ &= a + \frac{\lambda - 1}{\lambda^2 - 1} (b - a) = a + \frac{1}{\lambda + 1} (b - a) = \frac{\lambda}{\lambda + 1} a + \frac{1}{\lambda + 1} b \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} d &= \omega - \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} (b - a) = a + \frac{1}{1 - \lambda^2} (b - a) - \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} (b - a) \\ &= a - \frac{\lambda + 1}{\lambda^2 - 1} (b - a) = a - \frac{1}{\lambda - 1} (b - a) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} a - \frac{1}{\lambda - 1} b \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{cases} (\lambda + 1)c = \lambda a + b \\ (\lambda - 1)c = \lambda a - b \end{cases}$$

ce qui signifie que $\mathcal{E}_\lambda \cap (AB) = \{C, D\}$ où C est le barycentre de (A, λ) et $(B, 1)$ et D le barycentre de (A, λ) et $(B, -1)$.

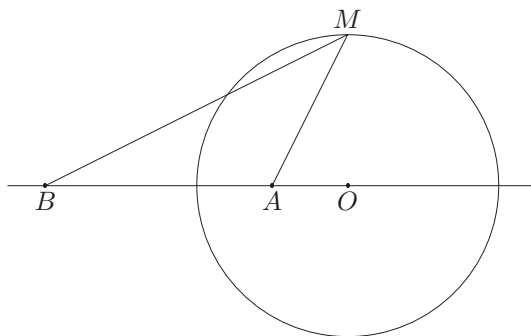
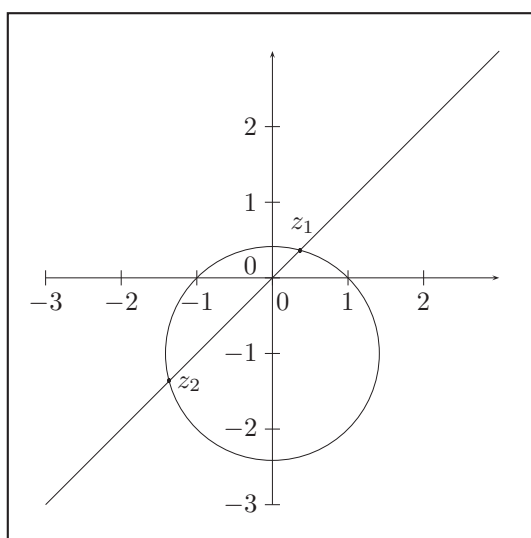
On procède de manière analogue pour $0 < \lambda < 1$.

Par exemple, pour $a = 0$, $b = -3$ et $\lambda = 2$, l'ensemble :

$$E_\lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3| = 2|z|\}$$

est le cercle de centre 1 et de rayon 2.

Exercice 19.1 Déterminer l'ensemble E des nombres complexes z tels que $|z - i| = |z - iz| = |z - 1|$.

FIG. 19.2 – $|z + 3| = 2|z|$ FIG. 19.3 – $|z - i| = |z - iz| = |z - 1|$

Solution 19.1 L'ensemble :

$$E_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = |z - iz| = \sqrt{2}|z| \right\}$$

est le cercle de centre $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$ et l'ensemble :

$$E_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = |z - 1| \}$$

est la médiatrice du segment $[1, i]$. L'ensemble E est l'intersection de ces ensembles, soit :

$$E = \left\{ -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} (1 + i), \frac{\sqrt{3} - 1}{2} (1 + i) \right\}$$

(figure 19.3).

Exercice 19.2

1. Montrer que pour tous nombres complexes a, b, z , on a :

$$|z - a|^2 + |z - b|^2 = 2 \left| z - \frac{a + b}{2} \right|^2 + \frac{|b - a|^2}{2}$$

2. Déterminer l'ensemble \mathcal{C} des points M de \mathcal{P} tels que :

$$MA^2 + MB^2 = \lambda$$

où λ est un réel donné (lignes de niveau de $f : z \mapsto |z - a|^2 + |z - b|^2$).

Solution 19.2

1. En posant $z = \frac{a+b}{2} + t$ (ce qui revient à placer l'origine en I d'affixe $\frac{a+b}{2}$, c'est-à-dire au milieu du segment $[A, B]$), on a :

$$\begin{aligned} |z - a|^2 + |z - b|^2 &= \left| t + \frac{b-a}{2} \right|^2 + \left| t - \frac{b-a}{2} \right|^2 \\ &= 2 \left(|t|^2 + \left| \frac{b-a}{2} \right|^2 \right) \\ &= 2 \left| z - \frac{a+b}{2} \right|^2 + \frac{|b-a|^2}{2} \end{aligned}$$

2. Désignant par I le milieu de $[A, B]$, l'identité précédente s'écrit :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{|b-a|^2}{2}$$

et l'égalité $MA^2 + MB^2 = \lambda$ se traduit par :

$$MI^2 = \frac{2\lambda - |b-a|^2}{4}$$

Il en résulte que :

- $\mathcal{C} = \emptyset$ pour $\lambda < \frac{|b-a|^2}{2}$;
- $\mathcal{C} = \{I\}$ pour $\lambda = \frac{|b-a|^2}{2}$;
- \mathcal{C} est le cercle de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{2\lambda - |b-a|^2}}{2}$ pour $\lambda > \frac{|b-a|^2}{2}$.

19.6 Interprétation géométrique de l'argument d'un nombre complexe

On rappelle que pour tout nombre complexe non nul z , il existe un réel θ tel que :

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$$

et un tel réel est unique s'il est pris dans $] -\pi, \pi]$.

On dit que le réel θ est un argument de z et on dit que c'est l'argument principal s'il est pris dans $] -\pi, \pi]$.

Par abus de langage, on écrira $\theta = \arg(z)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté.

On suppose toujours \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

En utilisant la forme polaire des nombres complexes et l'identité :

$$\overline{z_1}z_2 = \Re(\overline{z_1}z_2) + i\Im(\overline{z_1}z_2) = \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} + i \det(\vec{v_1}, \vec{v_2})$$

on peut définir les mesures d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

Pour ce faire on écrit que $\overline{z_1}z_2 = \rho e^{i\theta}$ où $\rho = |\overline{z_1}z_2| > 0$ ($\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont non nuls) et $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de $\overline{z_1}z_2$.

On dit alors que θ est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$, relativement au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Si les affixes sont considérées relativement à un autre repère orthonormé $\mathcal{R}' = (O', \vec{e'_1}, \vec{e'_2})$, en notant z' l'affixe du vecteur \vec{v} relativement à \mathcal{R}' , on a :

$$\overline{z'_1}z'_2 = \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} + i \det_{\mathcal{B}'}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$$

avec :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \pm \det_{\mathcal{B}}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$$

(le calcul du produit scalaire $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}$ ne dépend pas du choix d'une base orthonormée). Dans le cas où \mathcal{R}' définit la même orientation que \mathcal{R} , on aura $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$ et $\overline{z'_1}z'_2 = \overline{z_1}z_2$.

Cette définition d'une mesure d'angle orienté de vecteur est donc indépendante du choix d'un repère orthonormé orienté.

On suppose donc ici que \mathcal{P} est orienté par le choix d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Tout repère orthonormé définissant la même orientation que \mathcal{R} est dit direct.

Remarque 19.10 *Le choix d'une orientation de $\vec{\mathcal{P}}$ nous permet de définir sans ambiguïté la mesure principale dans $]-\pi, \pi]$ d'un angle de vecteurs. Ce choix d'une orientation correspond au choix d'une racine carrée i de -1 dans \mathbb{C} .*

Par abus de langage, on notera $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ une mesure de l'angle orienté de vecteurs. $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

On peut remarquer que :

$$\theta = (\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \arg(\overline{z_1}z_2) = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right).$$

Une telle mesure d'angle orienté est donc définie par :

$$\begin{cases} \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \rho \cos(\theta) = \|\vec{v_1}\| \|\vec{v_2}\| \cos(\theta) \\ \det(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \rho \sin(\theta) = \|\vec{v_1}\| \|\vec{v_2}\| \sin(\theta) \end{cases}$$

On vérifie facilement que pour tout réel non nul λ , on a $(\lambda\vec{v_1}, \lambda\vec{v_2}) = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$. En particulier, $(-\vec{v_1}, -\vec{v_2}) = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$, ce qui équivaut à $\cos(\theta)$ ou encore à $\theta = \frac{\pi}{2}$ modulo π .

De l'identité (19.3), on déduit que :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) + \|\vec{v}\|^2$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ modulo π , on retrouve le théorème de Pythagore.

Les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = 0$, ce qui équivaut à $\sin(\theta)$ ou encore à $\theta = 0$ modulo π , soit $\theta \in \{0, \pi\}$ pour la détermination principale.

On en déduit que les points deux à deux distincts A, B, C sont alignés si, et seulement si, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0$ modulo π . Précisément, en utilisant la détermination principale de la mesure d'angle (ou de l'argument), on aura $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ avec $\lambda > 0$ ($\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| > 0$) et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ avec $\lambda < 0$ ($\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| < 0$) (figure 19.4).

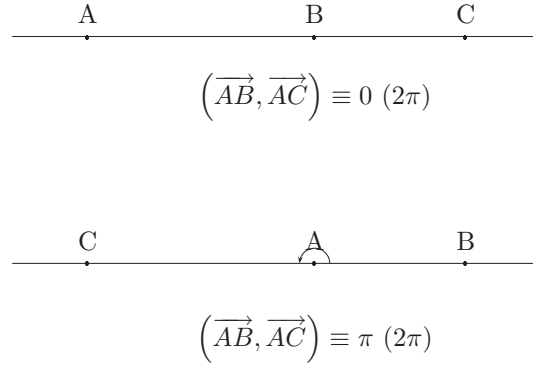


FIG. 19.4 – Points alignés

Si les points A, B, C sont deux à deux distincts alors un argument de $\frac{c-a}{b-a}$ (ou de $(\bar{b}-\bar{a})(c-a)$) est une mesure de l'angle orienté $\theta_A = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta_A) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} \\ \sin(\theta_A) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{AB \cdot AC} \end{cases} \quad (19.4)$$

En utilisant les propriétés de l'argument, on obtient les résultats suivants.

– Si A, B, C dans \mathcal{P} sont deux à deux distincts, alors ces points sont alignés si, et seulement si, $\arg(b-a) \equiv \arg(c-a)$ modulo π .

En effet dire que A, B, C sont alignés équivaut à dire que $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) \equiv 0 \ (\pi)$ et avec

$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) \equiv \arg(b-a) - \arg(c-a) \ (2\pi)$, on a le résultat annoncé.

$$(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}) \equiv \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv -\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \equiv -(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \ (2\pi)$$

– La relation de Chasles sur les mesures d'angle :

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) + (\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) \equiv (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3}) \ (2\pi)$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} (\vec{v}_1, \vec{v}_2) + (\vec{v}_2, \vec{v}_3) &\equiv \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \arg\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \\ &\equiv \arg\left(\frac{z_3}{z_1}\right) \equiv (\vec{v}_1, \vec{v}_3) \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

19.7 Lignes de niveau associées à l'argument

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On s'intéresse tout d'abord à l'étude des lignes de niveau de la fonction :

$$f : z \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\} \mapsto \arg(z - \omega)$$

où ω est un nombre complexe donné, cette fonction étant a priori à valeurs dans le groupe quotient $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$.

Pour tout nombre réel θ , on note :

$$E_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\} \mid \arg(z - \omega) \equiv \theta \pmod{2\pi}\}$$

et \mathcal{E}_θ est la partie de \mathcal{P} correspondante, c'est l'ensemble :

$$\mathcal{E}_\theta = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \{\Omega\} \mid \left(\vec{e}_1, \overrightarrow{\Omega M} \right) \equiv \theta \pmod{2\pi} \right\}$$

Théorème 19.5 *Si θ est un nombre réel, alors l'ensemble E_θ est identifié à la demi-droite passant par le point Ω d'affixe ω et d'angle polaire θ privée du point Ω , soit :*

$$\mathcal{E}_\theta = \left\{ M \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{\Omega M} = \rho (\cos(\theta) \vec{e}_1 + \sin(\theta) \vec{e}_2) \text{ avec } \rho > 0 \right\}$$

(figure 19.5).

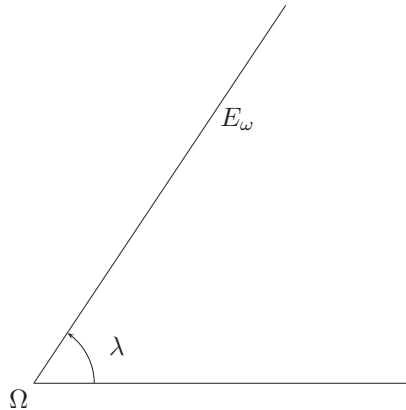


FIG. 19.5 –

Démonstration. Un nombre complexe z est dans E_θ si, et seulement si, il s'écrit $z = \omega + \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$, ce qui se traduit dans le plan \mathcal{P} par $\overrightarrow{\Omega M} = \rho \overrightarrow{v}$ avec $\rho > 0$, où $\overrightarrow{v} = \cos(\theta) \overrightarrow{e_1} + \sin(\theta) \overrightarrow{e_2}$ est le vecteur d'affixe $e^{i\theta}$. L'ensemble \mathcal{E}_θ est donc la demi droite d'origine Ω et dirigée par \overrightarrow{v} . ■

Remarque 19.11 *De manière analogue, on vérifie que l'ensemble :*

$$E_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\} \mid \arg(z - \omega) \equiv \theta \pmod{\pi}\}$$

est identifié à la droite passant par le point Ω d'affixe ω et d'angle polaire θ privée du point Ω .

L'étude des lignes de niveau de la fonction :

$$f : z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \mapsto \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$

où a, b sont deux nombres complexes distincts, nous fournira un critère de cocyclicité de 4 points du plan.

On s'intéresse tout d'abord aux lignes de niveau :

$$E_\theta = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \mid \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \theta \pmod{\pi} \right\}$$

où θ est un réel donné. La fonction f est dans ce cas à valeurs dans le groupe quotient $\frac{\mathbb{R}}{\pi\mathbb{Z}}$.

On note \mathcal{E}_θ la partie de \mathcal{P} correspondante, c'est l'ensemble :

$$\mathcal{E}_\theta = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\} \mid \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \theta \pmod{\pi} \right\}$$

Lemme 19.1 *Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a :*

$$(\arg(z) \equiv \theta \pmod{\pi}) \Leftrightarrow (z = \bar{z}e^{2i\theta})$$

Démonstration. On désigne par α un argument de z . On a donc $z = |z|e^{i\alpha}$ et :

$$(\arg(z) \equiv \theta \pmod{\pi}) \Rightarrow (z = \pm |z|e^{i\theta}) \Rightarrow (z^2 = |z|^2 e^{2i\theta} = z\bar{z}e^{2i\theta}) \Rightarrow (z = \bar{z}e^{2i\theta})$$

Réciproquement, supposons que $z = \bar{z}e^{2i\theta}$. On a alors :

$$z = |z|e^{i\alpha} = \bar{z}e^{2i\theta} = |z|e^{i(2\theta-\alpha)}$$

et $\alpha \equiv 2\theta - \alpha \pmod{2\pi}$, soit $\alpha \equiv \theta \pmod{\pi}$. ■

Dans le cas où $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$, on retrouve :

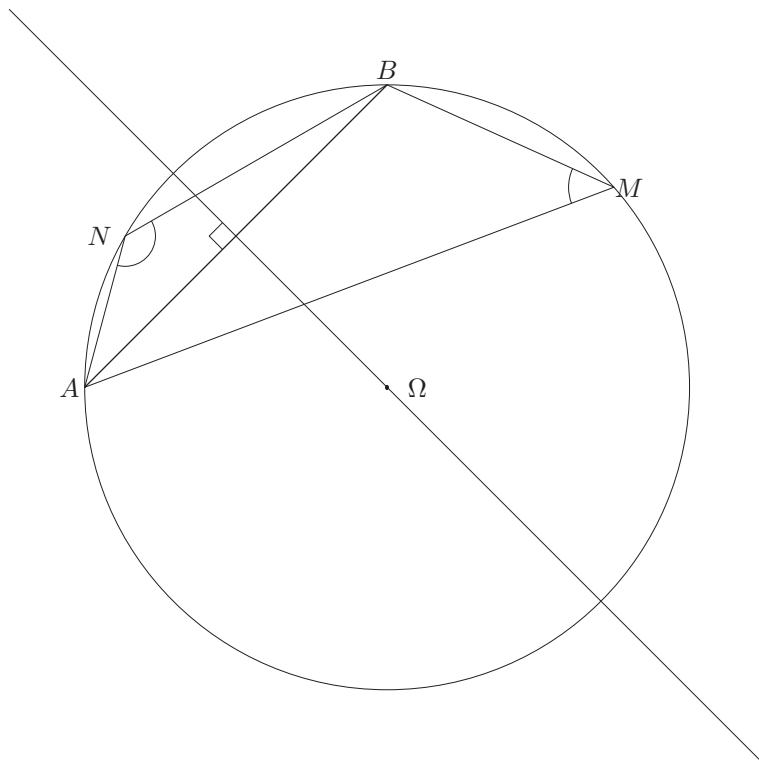
$$(z \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (z = \bar{z} = \bar{z}e^{2i\theta}) \Leftrightarrow (\arg(z) \equiv 0 \pmod{\pi})$$

Théorème 19.6 *Si a, b sont deux nombres complexes distincts et θ un réel, alors l'ensemble :*

$$E_\theta = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \mid \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \theta \pmod{\pi} \right\}$$

est identifié à :

– la droite (AB) privée des points A et B si θ est congru à 0 modulo π ;



– au cercle de centre Ω ayant pour affixe $\omega = \frac{a+b}{2} - i \cotan(\theta) \frac{b-a}{2}$ et de rayon $R = \frac{1}{|\sin(\theta)|} \left| \frac{b-a}{2} \right|$ privé des points A et B si θ n'est pas congru à 0 modulo π . (figure 19.6).

En désignant par α un argument de $\frac{z-a}{z-b}$, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, en utilisant le lemme précédent, on a :

$$\begin{aligned} & \left(\arg \left(\frac{z-a}{z-b} \right) \equiv \theta \pmod{\pi} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{z-a}{z-b} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}-\bar{b}} e^{2i\theta} \right) \\ & \Leftrightarrow (1 - e^{2i\theta}) z \bar{z} + (\bar{a} e^{2i\theta} - \bar{b}) z + (b e^{2i\theta} - a) \bar{z} + a \bar{b} - \bar{a} b e^{2i\theta} = 0 \end{aligned}$$

$$(\bar{b} - \bar{a})z - (b - a)\bar{z} - (a\bar{b} - \bar{a}b) = 0$$

Pour θ non congru à 0 modulo π , on peut diviser par $1 - e^{2i\theta}$ et on obtient l'équation :

$$z\bar{z} + \frac{\bar{a}e^{2i\theta} - \bar{b}}{1 - e^{2i\theta}}z + \frac{be^{2i\theta} - a}{1 - e^{2i\theta}}\bar{z} + \frac{a\bar{b} - \bar{a}be^{2i\theta}}{1 - e^{2i\theta}} = 0$$

En écrivant que $1 - e^{2i\theta} = -2i \sin(\theta) e^{i\theta}$, cette équation s'écrit :

$$z\bar{z} - \frac{\bar{a}e^{2i\theta} - \bar{b}}{2i \sin(\theta) e^{i\theta}} z - \frac{be^{2i\theta} - a}{2i \sin(\theta) e^{i\theta}} \bar{z} - \frac{a\bar{b} - \bar{a}be^{2i\theta}}{2i \sin(\theta) e^{i\theta}} = 0$$

soit :

$$z\bar{z} - \frac{\bar{a}e^{i\theta} - \bar{b}e^{-i\theta}}{2i \sin(\theta)} z - \frac{be^{i\theta} - ae^{-i\theta}}{2i \sin(\theta)} \bar{z} - \frac{a\bar{b}e^{-i\theta} - \bar{a}be^{i\theta}}{2i \sin(\theta)} = 0$$

ou encore :

$$z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + \gamma = 0 \quad (19.5)$$

en posant :

$$\omega = \frac{be^{i\theta} - ae^{-i\theta}}{2i \sin(\theta)}$$

et :

$$\gamma = \frac{\bar{a}be^{i\theta} - a\bar{b}e^{-i\theta}}{2i \sin(\theta)} = \frac{2i\Im(\bar{a}be^{i\theta})}{2i \sin(\theta)} = \frac{\Im(\bar{a}be^{i\theta})}{\sin(\theta)} \in \mathbb{R}.$$

Le nombre complexe ω peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{(b-a) \cos(\theta) + i(b+a) \sin(\theta)}{2i \sin(\theta)} \\ &= \frac{a+b}{2} - i \cotan(\theta) \frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

En écrivant que $\gamma = \frac{\bar{a}b - \bar{a}be^{2i\theta}}{1 - e^{2i\theta}}$ et $\omega = \frac{a - be^{2i\theta}}{1 - e^{2i\theta}}$, on a :

$$\begin{aligned} |\omega|^2 - \gamma &= \frac{|a - be^{2i\theta}|^2 - (\bar{a}b - \bar{a}be^{2i\theta})(1 - e^{-2i\theta})}{|1 - e^{2i\theta}|^2} \\ &= \frac{|a|^2 + |b|^2 - 2\Re(\bar{a}be^{2i\theta}) - \bar{a}b + \bar{a}be^{2i\theta} + \bar{a}be^{-2i\theta} - \bar{a}b}{|1 - e^{2i\theta}|^2} \\ &= \frac{|a|^2 + |b|^2 - 2\Re(\bar{a}be^{2i\theta}) - 2\Re(\bar{a}b) + 2\Re(\bar{a}be^{2i\theta})}{|1 - e^{2i\theta}|^2} \\ &= \frac{|a|^2 + |b|^2 - 2\Re(\bar{a}b)}{|1 - e^{2i\theta}|^2} = \frac{|b-a|^2}{|1 - e^{2i\theta}|^2} = \frac{|b-a|^2}{4 \sin^2(\theta)} \end{aligned}$$

L'équation (19.5) est donc celle du cercle de centre $\omega = \frac{a+b}{2} - i \cotan(\theta) \frac{b-a}{2}$ et de rayon $R = \frac{|b-a|}{2|\sin(\theta)|}$.

L'ensemble \mathcal{E}_θ est donc le cercle de centre ω et de rayon R privé des points A et B . ■

Remarque 19.12 Les points A et B sont bien sur le cercle de centre ω et de rayon R puisque :

$$|a - \omega| = |b - \omega| = \left| \frac{b-a}{2} \right| |1 + i \cotan(\theta)| = R$$

Remarque 19.13 Le centre du cercle \mathcal{E}_θ , pour θ non congru à 0 modulo π , ayant une affixe de la forme $\omega = \frac{a+b}{2} + i\lambda'(b-a)$ est sur la droite passant par le milieu de $[AB]$ et perpendiculaire à la droite (AB) , c'est-à-dire sur la médiatrice du segment $[AB]$.

En particulier, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $R = \frac{|b-a|}{2}$ et $\omega = \frac{a+b}{2}$ est l'affixe du milieu de $[A, B]$. L'ensemble :

$$\mathcal{E}_{\frac{\pi}{2}} = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\} \mid \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right) \equiv \frac{\pi}{2} \ (\pi) \right\}$$

est donc le cercle de diamètre $[A, B]$ privé des points A et B .

Remarque 19.14 Au vu du résultat obtenu, il eut été judicieux d'utiliser le repère orthonormé direct $\mathcal{R}' = (O, \vec{e}_1', \vec{e}_2')$, où O est le milieu de $[AB]$ et \vec{e}_1' dirige la droite (AB) (ce repère est-il, a priori, si naturel que ça ?). Avec ce choix les affixes de A et B sont respectivement a' et $-a'$ avec a' réel non nul et le lieu géométrique :

$$\mathcal{E}_\theta = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\} \mid \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right) \equiv \theta \ (\pi) \right\}$$

correspond à la ligne di niveau :

$$E_\theta = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-a', a'\} \mid \arg \left(\frac{z - a'}{z + a'} \right) \equiv \theta \ (\pi) \right\}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \left(\arg \left(\frac{z - a'}{z + a'} \right) \equiv \theta \ (\pi) \right) &\Leftrightarrow \left(\frac{z - a'}{z + a'} = \frac{\bar{z} - a'}{\bar{z} + a'} e^{2i\theta} \right) \\ \Leftrightarrow (1 - e^{2i\theta}) z \bar{z} + a' (e^{2i\theta} + 1) z - a' (e^{2i\theta} + 1) \bar{z} - a'^2 (1 - e^{2i\theta}) &= 0 \\ \Leftrightarrow z \bar{z} + a' \frac{1 + e^{2i\theta}}{1 - e^{2i\theta}} z - a' \frac{1 + e^{2i\theta}}{1 - e^{2i\theta}} \bar{z} - a'^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow z \bar{z} + ia' \cotan(\theta) z - ia' \cotan(\theta) \bar{z} - a'^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow z \bar{z} - \bar{\omega} z - \omega \bar{z} + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

avec $\omega = ia' \cotan(\theta)$ et $\gamma = -a'^2$. Et comme :

$$|\omega|^2 - \gamma = a'^2 (\cotan^2(\theta) + 1) = \frac{a'^2}{\sin^2(\theta)}$$

on reconnaît là le cercle centré en Ω d'affixe ω et de rayon $R = \frac{|a'|}{|\sin(\theta)|}$ avec $|a'| = OA =$

$$\frac{AB}{2} = \left| \frac{b-a}{2} \right|.$$

Remarque 19.15 Quand le point M sur le cercle \mathcal{E}_θ tend vers B , la droite (BM) devient tangente au cercle et cette tangente T_B fait un angle géométrique θ avec la droite (AB) .

On peut déduire du théorème 19.6 le critère de cocyclicité suivant.

Corollaire 19.1 Soient A, B, C, D des points deux à deux distincts. Ces points sont alignés ou cocycliques si, et seulement si, $\frac{c-b}{c-a} \frac{d-a}{d-b}$ est réel.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{c-b}{c-a} \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R} \right) &\Leftrightarrow \left(\arg \left(\frac{c-b}{c-a} \frac{d-a}{d-b} \right) \equiv 0 \pmod{\pi} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\arg \left(\frac{d-b}{d-a} \right) \equiv \arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \pmod{\pi} \right) \end{aligned}$$

On distingue alors deux cas.

Soit A, B, C sont alignés et dans ce cas $\arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \equiv 0 \pmod{\pi}$, de sorte que :

$$\left(\frac{c-b}{c-a} \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R} \right) \Leftrightarrow \left(\arg \left(\frac{d-b}{d-a} \right) \equiv 0 \pmod{\pi} \right) \Leftrightarrow (A, B, C, D \text{ alignés}).$$

Soit A, B, C ne sont pas alignés et dans ce cas $\arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \equiv \theta \pmod{\pi}$ avec θ non congru à 0 modulo π , de sorte que :

$$\left(\frac{c-b}{c-a} \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R} \right) \Leftrightarrow \left(\arg \left(\frac{d-b}{d-a} \right) \equiv \theta \pmod{\pi} \right) \Leftrightarrow (A, B, C, D \text{ cocycliques}).$$

■

Théorème 19.7 Soient a, b deux nombres complexes distincts et θ un nombre réel. L'ensemble :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \mid \arg \left(\frac{z-a}{z-b} \right) \equiv \theta \pmod{2\pi} \right\}$$

est la droite (AB) privée du segment $[AB]$ si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, le segment $[AB]$ privé de A et B si $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, ou un arc de cercle d'extrémités A, B privé de ces points (arc capable), si θ n'est pas congru à 0 modulo π .

En utilisant l'inégalité triangulaire avec son cas d'égalité dans \mathbb{C} , on a le résultat suivant.

Théorème 19.8 (Ptolémée) Soient A, B, C, D des points deux à deux distincts. Le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si, et seulement si, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ (le produit des diagonales est égal à la somme des produits des cotés opposés).

Démonstration. Dans tous les cas, on a :

$$\begin{aligned} AC \cdot BD &= |(c-a)(d-b)| \\ &= |(b-a)(d-c) + (d-a)(c-b)| \\ &\leq |(b-a)(d-c)| + |(d-a)(c-b)| = AB \cdot CD + AD \cdot BC \end{aligned}$$

(inégalité de Ptolémée) l'égalité étant réalisée si, et seulement si, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que :

$$(b-a)(d-c) = \lambda (d-a)(c-b)$$

ce qui équivaut à $\frac{b-a}{d-a} \frac{d-c}{b-c} = -\lambda \in \mathbb{R}^{*, -}$ qui est encore équivalent à :

$$\arg \left(\frac{b-a}{d-a} \frac{d-c}{b-c} \right) \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

ou à :

$$\arg \left(\frac{b-a}{d-a} \right) - \arg \left(\frac{b-c}{d-c} \right) \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

et entraîne :

$$\arg \left(\frac{b-a}{d-a} \right) \equiv \arg \left(\frac{b-c}{d-c} \right) \pmod{\pi}$$

soit :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \pmod{\pi}$$

et A, B, C, D sont cocycliques.

Réciproquement si ces points sont cocycliques, on a :

$$\arg \left(\frac{b-a}{d-a} \right) \equiv \arg \left(\frac{b-c}{d-c} \right) \pmod{\pi}$$

donc $\mu = \frac{b-a}{d-a} \frac{d-c}{b-c} \in \mathbb{R}$. Si $\mu > 0$, alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \pmod{2\pi}$ et les points A, C sont dans le même demi-plan délimité par la droite (BD) , ce qui contredit le fait que $ABCD$ est convexe. On a donc $\mu < 0$ et $(b-a)(d-c) = \lambda(d-a)(c-b)$ avec $\lambda > 0$, ce qui entraîne l'égalité dans l'inégalité de Ptolémée. ■

19.8 Le triangle dans le plan complexe

Définition 19.1 On appelle *vrai triangle* dans le plan \mathcal{P} , la donnée de trois points non alignés A, B, C .

Si $T = ABC$ est un vrai triangle, on notera :

$$\theta_A = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), \theta_B = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}), \theta_C = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

les mesures principales des angles orientés de vecteurs en A, B et C respectivement (figure ??).

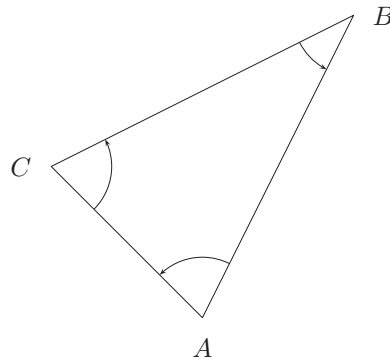


FIG. 19.7 –

Usuellement, on note respectivement a, b, c les cotés opposés à A, B, C (à ne pas confondre avec les abscisses).

19.8.1 Relations trigonométriques pour un triangle

Lemme 19.2 Si $T = ABC$ est un vrai triangle, on a alors :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \quad (19.6)$$

Démonstration. En utilisant les propriétés du déterminant, on a :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

et :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}).$$

■

Définition 19.2 On dit que le triangle T est orienté positivement [resp. négativement] ou qu'il est direct [resp. indirect] relativement au repère \mathcal{R} , si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$ [resp. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) < 0$].

Du lemme précédent et des relations :

$$\sin(\theta_A) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{AB \cdot AC}, \quad \sin(\theta_B) = \frac{\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}{BC \cdot BA}, \quad \sin(\theta_C) = \frac{\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}{CA \cdot CB} \quad (19.7)$$

on déduit que les quantités $\sin(\theta_A)$, $\sin(\theta_B)$ et $\sin(\theta_C)$ sont toutes de même signes. Les déterminations principales de ces mesures d'angle seront donc tous dans $]0, \pi[$ pour T direct ou toutes dans $]-\pi, 0[$ pour T indirect.

Lemme 19.3 Si $T = ABC$ est un vrai triangle, on a alors :

$$\theta_A + \theta_B + \theta_C \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

Démonstration. En utilisant la relation de Chasles pour les angles orientés, on a :

$$\begin{aligned} \theta_A + \theta_B + \theta_C &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) \equiv \pi \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

■

Pour un vrai triangle direct [resp. indirect] les déterminations principales de ces angles sont toutes dans $]0, \pi[$ [resp. dans $]-\pi, 0[$], donc la somme est dans $]0, 3\pi[$ [resp. dans $]-3\pi, 0[$] congrue à π modulo 2π et en conséquence est égale à π [resp. $-\pi$].

On a donc $\theta_A + \theta_B + \theta_C = \pi$ pour un triangle direct et $\theta_A + \theta_B + \theta_C = -\pi$ pour un triangle indirect.

Des relations (19.7) et (19.6) on déduit que :

$$AB \cdot AC \sin(\theta_A) = BC \cdot BA \sin(\theta_B) = CA \cdot CB \sin(\theta_C)$$

ce qui donne :

$$\frac{BC}{\sin(\theta_A)} = \frac{AC}{\sin(\theta_B)} = \frac{AB}{\sin(\theta_C)} \quad (19.8)$$

ou encore avec les notations usuelles :

$$\frac{a}{\sin(\theta_A)} = \frac{b}{\sin(\theta_B)} = \frac{c}{\sin(\theta_C)}.$$

Pour T direct rectangle en A , on a :

$$\cos(\theta_A) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = 0$$

avec $\theta_A \in]0, \pi[$, donc $\theta_A = \frac{\pi}{2}$.

De plus, avec :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = BA^2$$

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) &= \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \sin(\theta_A) \\ &= AB \cdot AC \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = AB \cdot AC \end{aligned}$$

on déduit que :

$$\cos(\theta_B) = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{BC \cdot BA} = \frac{BA^2}{BC \cdot BA} = \frac{BA}{BC}$$

(coté adjacent à l'angle droit sur l'hypoténuse) et :

$$\sin(\theta_B) = \frac{\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}{BC \cdot BA} = \frac{AB \cdot AC}{BC \cdot BA} = \frac{AC}{BC}$$

(coté opposé à l'angle droit sur l'hypoténuse), ce qui donne aussi :

$$\tan(\theta_B) = \frac{\sin(\theta_B)}{\cos(\theta_B)} = \frac{AC}{AB}$$

(coté opposé à l'angle droit sur coté adjacent).

Dans le cas où le triangle direct T est isocèle en A , on a $AB = AC$, donc A est sur la médiatrice du segment $[BC]$ et en désignant par I le milieu de ce segment, on peut écrire pour les triangles rectangles en I , AIC et AIB :

$$\cos(\theta_B) = \frac{IB}{AB} = \frac{IC}{AC} = \cos(\theta_C)$$

avec θ_B et θ_C dans $]0, \pi[$, ce qui équivaut à $\theta_B = \theta_C$ et entraîne $\theta_A = \pi - 2\theta_B$.

Réciproquement si $\theta_B = \theta_C$, de $\frac{AC}{\sin(\theta_B)} = \frac{AB}{\sin(\theta_C)}$ (formule (19.8)), on déduit que $AB = AC$ et T est isocèle en A .

Pour un triangle direct quelconque T , en écrivant que :

$$\|\overrightarrow{CB}\|^2 = \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \|\overrightarrow{AC}\|^2$$

on déduit que :

$$CB^2 = AB^2 - 2AB \cdot AC \cos(\theta_A) + AC^2.$$

ou encore en utilisant les notations usuelles :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\theta_A).$$

Pour T rectangle en A , on a $\theta_A = \frac{\pi}{2}$ et on retrouve le théorème de Pythagore.

Par permutations circulaires des sommets, on a les deux autres formules :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\theta_B)$$

et :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta_C).$$

19.8.2 Aire d'un triangle

Définition 19.3 *L'aire d'un triangle $T = ABC$ est le réel :*

$$m(T) = \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \right|.$$

En prenant pour origine du repère \mathcal{R} le projeté H du point A sur la droite (BC) , le vecteur \vec{e}_1 dirigeant cette droite (BC) , on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA} = x_B \vec{e}_1 - y_A \vec{e}_2 \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} = x_C \vec{e}_1 - y_A \vec{e}_2 \end{cases}$$

de sorte que :

$$\det \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) = \begin{vmatrix} x_B & x_C \\ -y_A & -y_A \end{vmatrix} = y_A (x_C - x_B)$$

et :

$$m(T) = \frac{1}{2} |y_A| |x_C - x_B| = \frac{AH \cdot BC}{2}$$

soit la formule : « base que multiplie hauteur divisé par 2 ».

Pour un triangle direct, on a :

$$m(T) = \frac{1}{2} \det \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin(\theta_A)$$

et pour un triangle indirect, on a :

$$m(T) = -\frac{1}{2} \det \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) = -\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin(\theta_A)$$

en notant θ_A la détermination principale de l'angle en A .

On retrouve l'aire d'un triangle T rectangle en A , $m(T) = \frac{1}{2} AB \cdot AC$.

Réciproquement si $m(T) = \frac{1}{2} AB \cdot AC$, on a alors $\sin(\theta_A) = \pm 1$, soit $\theta_A = \pm \frac{\pi}{2}$ (suivant que T est direct ou non) et T est rectangle en A .

Pour un triangle direct, en utilisant la formule (19.8), on obtient :

$$2 \frac{m(T)}{AB \cdot AC \cdot BC} = \frac{\sin(\theta_A)}{BC} = \frac{\sin(\theta_B)}{AC} = \frac{\sin(\theta_C)}{AB}$$

qui s'écrit aussi avec des notations usuelles :

$$2 \frac{m(T)}{abc} = \frac{\sin(\theta_A)}{a} = \frac{\sin(\theta_B)}{b} = \frac{\sin(\theta_C)}{c}$$

($a = BC, \dots$).

Dans un repère orthonormé \mathcal{R} quelconque, en utilisant les propriétés du déterminant, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et en désignant par a, b, c les affixes relatives au repère \mathcal{R} des points A, B, C , cela s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a+\bar{a}}{2} & \frac{a-\bar{a}}{2i} & 1 \\ \frac{b+\bar{b}}{2} & \frac{b-\bar{b}}{2i} & 1 \\ \frac{c+\bar{c}}{2} & \frac{c-\bar{c}}{2i} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4i} \begin{vmatrix} a+\bar{a} & a-\bar{a} & 1 \\ b+\bar{b} & b-\bar{b} & 1 \\ c+\bar{c} & c-\bar{c} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4i} \begin{vmatrix} 2a & a-\bar{a} & 1 \\ 2b & b-\bar{b} & 1 \\ 2c & c-\bar{c} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{vmatrix} a & a-\bar{a} & 1 \\ b & b-\bar{b} & 1 \\ c & c-\bar{c} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2i} \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et :

$$m(T) = \pm \frac{1}{4i} \det \begin{pmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{pmatrix}$$

le signant \pm étant celui qui assure la positivité de $m(T)$.

En calculant ce déterminant, on a :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b-a & \bar{b}-\bar{a} & 0 \\ c-a & \bar{c}-\bar{a} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} b-a & \bar{b}-\bar{a} \\ c-a & \bar{c}-\bar{a} \end{pmatrix} = (b-a)(\bar{c}-\bar{a}) - (\bar{b}-\bar{a})(c-a) \\ &= 2i\Im((b-a)(\bar{c}-\bar{a})) \end{aligned}$$

et on obtient la formule :

$$m(T) = \pm \frac{1}{2} \Im((b-a)(\bar{c}-\bar{a})) \quad (19.9)$$

En traduisant le fait que M est sur la droite (AB) si, et seulement si, l'aire du triangle ABM est nulle, on en déduit l'équation complexe suivante de la droite (AB) :

$$(M \in (AB)) \Leftrightarrow \left(\det \begin{pmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{pmatrix} = 0 \right)$$

En utilisant l'expression (19.9) de $m(T)$, on retrouve la condition :

$$(M \in (AB)) \Leftrightarrow (\Im((\bar{b} - \bar{a})(z - a)) = 0)$$

ce qui est encore équivalent à dire que $(b - a)(\overline{c - a})$ est réel.

Cette formule (19.9) nous donne aussi le résultat suivant.

Théorème 19.9 *Si $T = ABC$ est un vrai triangle, on a alors :*

$$m(T) \leq \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, le triangle T est rectangle en A .

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} m(T) &= \frac{1}{2} |\Im((b - a)(\bar{c} - \bar{a}))| \\ &\leq \frac{1}{2} |b - a| |c - a| = \frac{1}{2} AB \cdot AC \end{aligned}$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $(b - a)(\bar{c} - \bar{a})$ est imaginaire pur, ce qui équivaut à dire que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. ■

19.8.3 Centre de gravité d'un triangle

Si $T = ABC$ est un vrai triangle, la médiane issue de A est la droite \mathcal{M}_A qui joint les points A et le milieu I_A du segment $[BC]$.

Théorème 19.10 *Les trois médianes d'un vrai triangle $T = ABC$ concourent en G d'affixe $\frac{a + b + c}{3}$.*

Démonstration. L'affixe du milieu I_A de $[BC]$ étant $\frac{b + c}{2}$, une équation de la médiane \mathcal{M}_A est :

$$\det \begin{pmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{\bar{b}+\bar{c}}{2} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{pmatrix} = 0$$

soit :

$$\det \begin{pmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ \frac{b+c-2a}{2} & \frac{\bar{b}+\bar{c}-2\bar{a}}{2} & 0 \\ z - a & \bar{z} - \bar{a} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ou encore :

$$\det \begin{pmatrix} b + c - 2a & \bar{b} + \bar{c} - 2\bar{a} \\ z - a & \bar{z} - \bar{a} \end{pmatrix}.$$

On constate que $z = \frac{a + b + c}{3}$ est solution de cette équation ($z - a = \frac{1}{3}(b + c - 2a)$).

Définissant de manière analogue les médianes en B et C , on constate encore que le point G d'affixe $\frac{a + b + c}{3}$ est sur ces médianes. ■

Définition 19.4 *Avec les notations du théorème qui précède, on dit que le point G d'affixe $\frac{a + b + c}{3}$ est le centre de gravité du triangle.*

Le centre de gravité est aussi l'iso-barycentre des points A, B, C .

19.8.4 Cercle circonscrit à un triangle

Si A, B, C sont trois points non alignés, alors $\theta = \arg \left(\frac{a-c}{b-c} \right)$ n'est pas congru à 0 modulo π et ces points sont sur le cercle $\mathcal{E}_\theta \cup \{A, B\}$, où :

$$\mathcal{E}_\theta = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\} \mid \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right) \equiv \theta \pmod{\pi} \right\}$$

Ce cercle, qui est uniquement déterminé, est le cercle circonscrit au triangle $T = ABC$ et son centre Ω est à l'intersection des trois médiatrices de T .

Un point M est sur ce cercle circonscrit à T si, et seulement si :

$$\arg \left(\frac{a-z}{b-z} \right) \equiv \arg \left(\frac{a-c}{b-c} \right) \pmod{\pi}$$

ce qui est encore équivalent à :

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right) \equiv \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \right) \pmod{\pi} \quad (19.10)$$

c'est ce qu'on appelle l'équation angulaire du cercle passant par A, B, C .

L'utilisation de la relation de Chasles pour les angles orientés de vecteurs nous permet de montrer le théorème de l'angle inscrit qui suit.

Théorème 19.11 *Soient $T = ABC$ un vrai triangle et Ω le centre du cercle circonscrit à ce triangle. On a alors :*

$$2 \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C} \right) \pmod{2\pi}$$

Démonstration. En utilisant la relation de Chasles, on a :

$$\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C} \right) + \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A} \right) + \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B} \right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B} \right) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

Comme les triangles ΩAB et ΩAC sont isocèles en Ω , on a :

$$2 \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega} \right) + \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B} \right) \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

et :

$$2 \left(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AC} \right) + \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A} \right) \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

ce qui donne par addition :

$$2 \left(\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega} \right) + \left(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AC} \right) \right) + \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B} \right) + \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A} \right) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

soit :

$$2 \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) + \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B} \right) + \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A} \right) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

ou encore :

$$2 \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) - \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C} \right) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

■

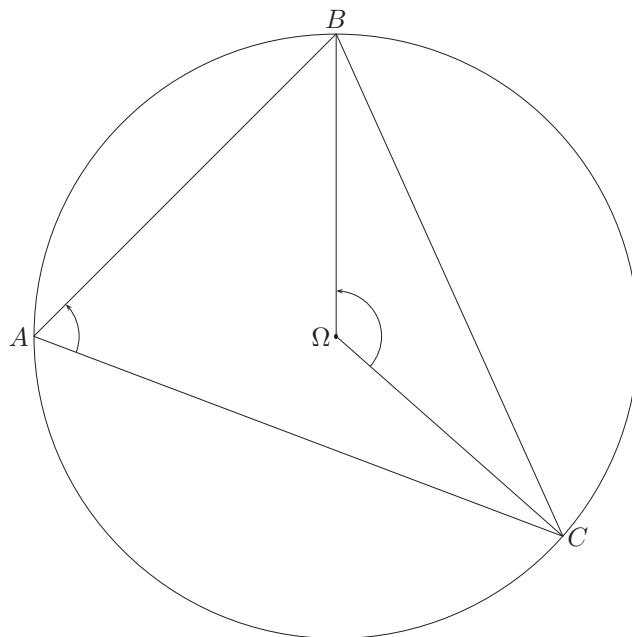


FIG. 19.8 – Théorème de l'angle inscrit

19.8.5 Orthocentre d'un triangle

La caractérisation complexe de l'orthogonalité de deux droites nous permet de retrouver la définition de l'orthocentre d'un triangle.

Lemme 19.4 Soit $T = ABC$ un vrai triangle. Un point M est sur la hauteur issue de A de T si, et seulement si, son affixe z est telle que $(z - a)(\bar{c} - \bar{b})$ (ou de manière équivalente $\frac{z - a}{c - b}$) soit imaginaire pur.

Démonstration. Si $M = A$, on a $z = a$ et $(z - a)(\bar{c} - \bar{b}) = 0$ est bien imaginaire pur.

Sinon M est sur la hauteur issue de A si, et seulement si les droites (AM) et (BC) sont orthogonales, ce qui équivaut à $(z - a)(\bar{c} - \bar{b})$ imaginaire pur, qui est encore équivalent à dire que $\frac{z - a}{c - b}$ est imaginaire pur. ■

Lemme 19.5 Soient a, b, c des nombres complexes deux à deux distincts. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, le nombre complexe

$$Z = (z - a)(\bar{c} - \bar{b}) + (z - b)(\bar{a} - \bar{c}) + (z - c)(\bar{b} - \bar{a})$$

est imaginaire pur.

Démonstration. Résulte de :

$$\begin{aligned}(z-c)(\bar{b}-\bar{a}) &= (z-a)(\bar{b}-\bar{a}) + (a-c)(\bar{b}-\bar{a}) \\ &= (z-a)(\bar{b}-\bar{c}) + (z-a)(\bar{c}-\bar{a}) + (a-c)(\bar{b}-\bar{a}) \\ &= (z-a)(\bar{b}-\bar{c}) + (z-b)(\bar{c}-\bar{a}) + (b-a)(\bar{c}-\bar{a}) + (a-c)(\bar{b}-\bar{a}) \\ &= -(z-a)(\bar{c}-\bar{b}) - (z-b)(\bar{a}-\bar{c}) + 2i\Im((b-a)(\bar{c}-\bar{a}))\end{aligned}$$

qui s'écrit :

$$Z = 2i\Im((b-a)(\bar{c}-\bar{a}))$$

■

Le fait que Z soit imaginaire pur se traduit par $\Re(Z) = 0$, soit par :

$$\Re((z-a)(\bar{c}-\bar{b})) + \Re((z-b)(\bar{a}-\bar{c})) + \Re((z-c)(\bar{b}-\bar{a})) = 0$$

ou encore par :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

pour tout point $M \in \mathcal{P}$.

Cette égalité est l'égalité de Wallace.

Lemme 19.6 Soient a, b, c des nombres complexes deux à deux distincts et z un nombre complexe. Si deux quantités parmi $(z-a)(\bar{c}-\bar{b})$, $(z-b)(\bar{a}-\bar{c})$, $(z-c)(\bar{b}-\bar{a})$ sont imaginaires pures, il en est alors de même de la troisième.

Démonstration. Résulte du lemme précédent. ■

Théorème 19.12 Soit $T = ABC$ un vrai triangle. Les trois hauteurs de T sont concourantes.

Démonstration. Notons respectivement T_A , T_B et T_C les hauteurs issues de A , B et C .

Un point M est sur $T_A \cap T_B$ si, et seulement si, les quantités $(z-a)(\bar{c}-\bar{b})$ et $(z-b)(\bar{a}-\bar{c})$ sont imaginaires pures, ce qui entraîne que $(z-c)(\bar{b}-\bar{a})$ est aussi imaginaire pur et M est sur T_C .

Les trois hauteurs sont donc concourantes. ■

Le point d'intersection des trois hauteurs du triangle T est l'orthocentre de T .

Exercice 19.3 Soit $T = ABC$ un vrai triangle. Montrer que l'orthocentre H de T a pour affixe relativement au repère $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$\begin{aligned}h &= a + i \frac{\Re((a-b)(\overline{c-a}))}{\Im((c-b)(\overline{c-a}))} (c-b) \\ &= a + i \frac{\Re\left(\frac{a-b}{c-a}\right)}{\Im\left(\frac{c-b}{c-a}\right)} (c-b)\end{aligned}$$

Solution 19.3 Comme $H \in T_A \cap T_B$, il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que :

$$h = a + i\lambda_1(c-b) = b + i\lambda_2(c-a)$$

ce qui entraîne :

$$i\lambda_2 = \frac{a-b}{c-a} + i\lambda_1 \frac{c-b}{c-a}$$

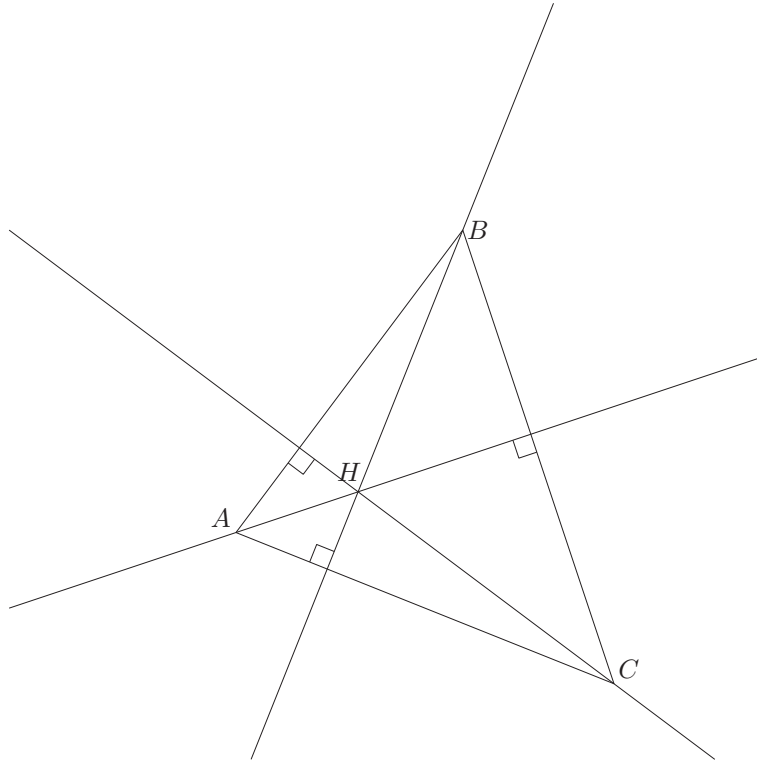


FIG. 19.9 – Orthocentre

et en prenant les parties réelles :

$$0 = \Re\left(\frac{a-b}{c-a}\right) + \lambda_1 \Re\left(i \frac{c-b}{c-a}\right) = \Re\left(\frac{a-b}{c-a}\right) - \lambda_1 \Im\left(\frac{c-b}{c-a}\right)$$

Comme les points C, A, B ne sont pas alignés, $\frac{c-a}{c-b} = \frac{a-c}{b-c}$ n'est pas réel et λ_1 est uniquement déterminé. On a donc :

$$\lambda_1 = \frac{\Re\left(\frac{a-b}{c-a}\right)}{\Im\left(\frac{c-b}{c-a}\right)} = \frac{\Re((a-b)(\overline{c-a}))}{\Im((c-b)(\overline{c-a}))}.$$

et :

$$\begin{aligned} h &= a + i \frac{\Re((a-b)(\overline{c-a}))}{\Im((c-b)(\overline{c-a}))} (c-b) \\ &= a + i \frac{\Re\left(\frac{a-b}{c-a}\right)}{\Im\left(\frac{c-b}{c-a}\right)} (c-b) \end{aligned}$$

Par exemple, pour a, b réels et $c = i\gamma$ imaginaire pur, on a :

$$\frac{\Re((a-b)(\overline{c-a}))}{\Im((c-b)(\overline{c-a}))} = \frac{a}{\gamma}$$

et :

$$h = -i \frac{ab}{\gamma} = \frac{ab}{c}.$$

En fait, pour déterminer une affixe de l'orthocentre, il est plus commode de travailler dans un repère d'origine $O = \Omega$ où Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Exercice 19.4 Montrer que si ABC est un triangle inscrit dans le cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$, alors l'affixe de son orthocentre est $h = a + b + c$. (Ω étant pris comme origine).

Solution 19.4 On désigne par M le point d'affixe $h = a + b + c$. Comme $h - a = b + c$ avec $|b| = |c| = R$, on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$ et ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega C}$, ($(\overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}) \cdot (\overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega C}) = \Omega B^2 - \Omega C^2 = R^2 - R^2 = 0$), ce qui équivaut à dire que $(h - a)(\overline{b - c})$ est imaginaire pur, qui est encore équivalent à dire que M est sur la hauteur de T issue de A .

On montre de manière analogue que M est sur les deux autres hauteurs et en conséquence c'est l'orthocentre de T .

En utilisant les affixes relativement au repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, le théorème 19.10 nous dit que le centre de gravité G a pour affixe $g = \frac{a + b + c}{3}$ et l'exercice 19.4 que l'orthocentre a pour affixe $h = a + b + c$, ce qui se traduit par :

$$\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$$

et entraîne que ces trois points sont alignés.

Théorème 19.13 Dans un vrai triangle T , le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité sont alignés.

La droite passant par ces trois points est la droite d'Euler.

19.8.6 Triangle équilatéral

Théorème 19.14 Soient A, B, C trois points deux à deux distincts de \mathcal{P} et a, b, c leurs affixes respectives. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. le triangle ABC est équilatéral ;
2. $|b - a| = |c - b| = |c - a|$;
3. $\frac{1}{a - b} + \frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - a} = 0$;
4. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$;
5. j ou \bar{j} est racine de $az^2 + bz + c = 0$ (j et \bar{j} sont les racines cubiques de l'unité).

$$6. j \text{ ou } \bar{j} \text{ est racine de } \det \begin{pmatrix} a & z^2 & 1 \\ b & z & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Démonstration. L'équivalence entre 1. et 2. résulte de la définition d'un triangle équilatéral. Supposons que $|a - b| = |b - c| = |c - a|$.

On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b} &= \frac{\bar{a}-\bar{b}}{|a-b|^2} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{|b-c|^2} = \frac{1}{b-c} \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{b}-\bar{c}} \\ &= \frac{1}{b-c} \frac{\bar{a}-\bar{c}+\bar{c}-\bar{b}}{\bar{b}-\bar{c}} = \frac{1}{b-c} \left(\frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}} - 1 \right)\end{aligned}$$

avec $\frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}} = \frac{b-c}{a-c}$ puisque $\left| \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}} \right| = \left| \frac{a-c}{b-c} \right| = 1$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b} &= \frac{1}{b-c} \left(\frac{b-c}{a-c} - 1 \right) = \frac{1}{b-c} \frac{b-c}{a-c} - \frac{1}{b-c} \\ &= \frac{1}{a-c} - \frac{1}{b-c}\end{aligned}$$

et $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

Supposons cette dernière identité réalisée. On a alors en multipliant par $(a-b)(b-c)(c-a)$:

$$(b-c)(c-a) + (a-b)(c-a) + (a-b)(b-c) = 0$$

et en développant, cela est équivalent à :

$$ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2 = 0.$$

En supposant cette identité vérifiée, on a :

$$(aj^2 + bj + c)(a\bar{j}^2 + b\bar{j} + c) = a^2 + b^2 + c^2 + (j + \bar{j})ab + (j^2 + \bar{j}^2)ac + (j + \bar{j})bc$$

avec $j^2 + \bar{j}^2 = \bar{j} + j = -1$, ce qui donne :

$$(aj^2 + bj + c)(a\bar{j}^2 + b\bar{j} + c) = 0$$

et j ou \bar{j} est racine de $az^2 + bz + c = 0$.

Supposons que j soit racine de $az^2 + bz + c = 0$. Tenant compte de $1 + j + j^2 = 0$, on a alors :

$$0 = aj^2 + bj + c = aj^2 + bj - c(j + j^2) = (b-c)j + (a-c)j^2$$

et $(b-c)j = -(a-c)j^2$ qui entraîne $|b-c| = |c-a|$. On peut aussi écrire :

$$0 = aj^2 + bj + c = aj^2 - b(1 + j^2) + c = (c-b) + (a-b)j^2$$

et on a $(c-b) = -(a-b)j^2$ qui entraîne $|a-b| = |c-b|$.

L'équivalence entre **5.** et **6.** se déduit du calcul suivant. Pour $z \in \{j, \bar{j}\} = \{j, j^2\}$:

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} a & z^2 & 1 \\ b & z & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a-b & z^2-z & 0 \\ b-c & z-1 & 0 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a-b & z^2-z \\ b-c & z-1 \end{pmatrix} \\ &= az + b + cz^2 - (a + bz^2 + cz) \\ &= \bar{z}(az^2 + bz + c) - z(az^2 + bz + c) \\ &= (z - \bar{z})(az^2 + bz + c) = 2i\Im(z)(az^2 + bz + c).\end{aligned}$$

■

Nous verrons un peu plus loin que la caractérisation **6.** des triangles équilatéraux traduit le fait qu'un triangle équilatéral est semblable à un triangle ayant pour sommets les points d'affixes $1, z, z^2$ avec $z = j$ ou $z = \bar{j}$.

19.9 Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$, $z \mapsto a\bar{z} + b$

Les nombres complexes peuvent être utilisés pour décrire quelques transformations géométriques de \mathcal{P} . Ainsi :

- $z \mapsto z + a$ est la translation de vecteur \overrightarrow{OA} ;
- $z \mapsto -z$ est la symétrie par rapport à O ;
- $z \mapsto \bar{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe O_x ;
- $z \mapsto -\bar{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe O_y ;
- pour tout réel $\rho > 0$, $z \mapsto \rho z$ est l'homothétie de rapport ρ et de centre O ;
- pour tout réel θ , $z \mapsto e^{i\theta}z$ est la rotation de centre O et d'angle θ ;
- pour tous nombres complexes a, b avec $a \notin \{0, 1\}$ d'argument θ , l'application $z \mapsto az + b$ est la composée commutative de la rotation d'angle θ et de centre $\Omega \left(\frac{b}{1-a} \right)$ et de l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$, on dit que cette application est la similitude directe de centre Ω , de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

Exercice 19.5 Soit $\alpha = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul et n un entier naturel non nul. Montrer que les racines n -ièmes de α se déduisent des racines n -ième de l'unité par une similitude directe de centre O , de rapport $\sqrt[n]{\rho}$ et d'angle $\frac{\theta}{n}$.

Solution 19.5 Les racines n -ièmes de α sont les :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

où les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, pour k compris entre 0 et $n-1$, sont les racines n -ième de l'unité.

