Chapitre 2

Espaces métriques

Pour ce chapitre, E est un ensemble non vide.

2.1 Distances, espaces métriques et topologie

Définition 2.1. Une *distance* sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que pour tous x, y, z dans E, on ait :

- $d(x, y) = 0$ si, et seulement si, $y = x$ (propriété de séparation) ;
- $d(y, x) = d(x, y)$ (propriété de symétrie) ;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*inégalité triangulaire*).

Le couple (E, d) est un *espace métrique*.

Une distance sur E est nécessairement à valeurs positives. En effet, pour tout $(x, y) \in E^2$ on a $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$, donc $d(x, y) \geq 0$.

Exemples 2.1

1. *La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ [resp. le module sur $\mathbb{C}$] induit une distance en posant $d(x, y) = |y - x|$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ [resp. dans $\mathbb{C}$]. Sauf précision contraire, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ seront munis de cette distance.*
2. *Sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ l'application $d : (x, y) \mapsto |\arctan(y) - \arctan(x)|$ en convenant que $\arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$, définit une distance qui est bornée (on a $d(x, y) \leq \pi$ pour tous x, y dans $\overline{\mathbb{R}}$).*
3. *Si d est une distance sur E et Y est une partie non vide de E, la restriction de d à $Y \times Y$ définit alors une distance sur Y (*distance induite*).*
4. *Si f est une fonction de E dans $\mathbb{R}$, alors l'application $d_f : (x, y) \mapsto |f(y) - f(x)|$ est une distance sur E si, et seulement si, f est injective (exercice 2.1).*
5. *Si $n \geq 2$ est un entier et $(E_1, d_1), \cdots, (E_n, d_n)$ sont des espaces métriques, alors les applications δ_∞ et δ_1 définies sur le produit cartésien $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$*

en posant $\delta_\infty(x,y) = \max_{1\leq k\leq n} d_k(x_k,y_k)$ *et* $\delta_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} d_k(x_k,y_k)$ *pour tous* $x = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ *et* $y = (y_k)_{1\leq k\leq n}$ *dans* E *sont des distances sur* E*.*

6. *En particulier, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on définit des distances sur* $\mathbb{R}^n$ *en posant :*

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\leq k\leq n} |y_k - x_k| \text{ et } d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|$$

pour tous $x = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ *et* $y = (y_k)_{1\leq k\leq n}$ *dans* $\mathbb{R}^n$*.*

7. *Sur l'ensemble* $E = [0,1]^{\mathbb{N}}$ *des suites réelles à valeurs dans* $[0,1]$ *(le* cube de Hilbert*) en se donnant une série à termes réels strictement positifs* $\sum \alpha_n$ *convergente (voir le chapitre* **??***), l'application qui associe à toute couple* (x,y) *d'éléments de* E *le réel* $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |y_n - x_n|$ *définit une distance bornée (pour toutes suites* x,y *dans* E*, on a* $d(x,y) \leq 2\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$*).*

De l'inégalité triangulaire, on déduit que pour tous x,y,z dans un espace métrique (E,d), on a :

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$$

(*deuxième inégalité triangulaire*). Cela résulte de $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ et $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$. On en déduit aussi par récurrence que si $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite de $n \geq 2$ points de E, on a alors $d(x_1,x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k,x_{k+1})$ (*inégalité polygonale*).

Définition 2.2. Deux distances d et d' sur E sont dites *équivalentes*, s'il existe deux constantes réelles α et β strictement positives telles que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$$

On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des distances de E.

Pour la suite de ce paragraphe, (E,d) est un espace métrique que l'on notera simplement E quand il n'y a pas d'ambiguïté, la distance d étant donnée.

Définition 2.3. Pour toute partie non vide A de E et tout $x \in E$, on définit respectivement le *diamètre* de A et la *distance* de x à A par :

$$\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x,y),\ d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a)$$

On convient que $\delta(\emptyset) = 0$.

$d(x,A)$ est un élément de $\mathbb{R}^+$ (borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0) et $\delta(A)$ est un élément $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Pour tout $x \in A$, on a $d(x, A) = 0$, mais la réciproque est fausse. Par exemple pour $A =]0, 1] \subset \mathbb{R}$, on a $d(0, A) = 0$ et $0 \notin A$ (voir aussi le théorème 2.7).

Définition 2.4. On dit qu'une partie non vide A de E est *bornée*, si son diamètre $\delta(A)$ est fini.

On vérifie facilement que pour toute partie non vide A de E et tous points x, y dans E, on a $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Pour tout $a \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}^{+,*}$, on note

$$B(a, r) = \{x \in E,\ d(x, a) < r\},\ \overline{B}(a, r) = \{x \in E,\ d(x, a) \leq r\}$$

L'ensemble $B(a, r)$ [resp. $\overline{B}(a, r)$] est la *boule ouverte* [resp. la *boule fermée*] de centre a et de rayon r. La *sphère* de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$S(a, r) = \overline{B}(a, r) \setminus B(a, r) = \{x \in E,\ d(x, a) = r\}$$

Exemple 2.1 *Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni de la distance associée à la valeur absolue, les boules ouvertes [resp. fermées] sont les intervalles de la forme $]a - r, a + r[$ [resp. de la forme $[a - r, a + r]$]. De manière plus générale sur $\mathbb{R}^n$ muni de la distance $d_\infty : d_\infty$, les boules ouvertes [resp. les boules fermées] sont les pavés de la forme $\prod_{k=1}^{n}]a_k - r, a_k + r[$ [resp. les pavés de la forme $\prod_{k=1}^{n} [a_k - r, a_k + r]$].*

Définition 2.5. On appelle *voisinage* d'un point a de E toute partie $\mathcal{V}$ de E qui contient une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$.

Définition 2.6. Un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de E est dit *ouvert* s'il est vide ou non vide et voisinage de chacun de ses points, ce qui signifie que pour tout $x \in \mathcal{O}$ il existe $r_x \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$. Un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de E est dit *fermé* si son complémentaire $E \setminus \mathcal{F}$ est un ouvert.

Un ouvert non vide de E est une réunion de boules ouvertes : $\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} B(x, r_x)$.

Si $\mathcal{F}$ est un fermé non vide de E, un élément x de E appartient à l'ensemble $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $d(x, \mathcal{F}) = 0$. En effet, pour $x \in \mathcal{F}$, on $d(x, \mathcal{F}) = 0$ que $\mathcal{F}$ soit fermé ou pas. Si $x \notin \mathcal{F}$, il est alors dans l'ouvert $E \setminus \mathcal{F}$ et il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus \mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} \subset E \setminus B(x, \varepsilon)$ et pour tout $y \in \mathcal{F}$, on a $d(x, y) \geq \varepsilon$, ce qui implique que que $d(x, \mathcal{F}) \geq \varepsilon > 0$.

Exemples 2.2

1. *L'ensemble vide et E sont à la fois ouverts et fermés dans E.*

2. *Une boule ouverte [resp. une boule fermée] de E est un ouvert [resp. un fermé]. En effet, pour tout $x \in B(a,r)$, on a $r' = r - d(a,x) > 0$ et $B(x,r') \subset B(a,r)$ (pour $y \in B(x,r')$ on a $d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < r' + d(x,a) = r$). De même pour $x \in E \setminus \overline{B}(a,r)$, on a $r' = d(a,x) - r > 0$ et $B(x,r') \subset E \setminus \overline{B}(a,r)$ (pour $y \in B(x,r')$ on a $d(y,a) \geq d(x,a) - d(x,y) > d(a,x) - r' = r$).*
3. *Tout intervalle ouvert [resp. tout intervalle fermé] de $\mathbb{R}$ est un ouvert [resp. un fermé].*
4. *Un intervalle $[a,b[$ où $a < b$ sont deux réels, n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.*
5. *Sur $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_∞, un pavé ouvert $\prod_{k=1}^{n}]a_k, b_k[$ [resp. un pavé fermé $\prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$] est un ouvert [resp. un fermé].*
6. *Pour toute partie non vide A de E et tout réel strictement positif r, l'ensemble $\mathcal{V}_r(A) = \{x \in E,\ d(x,A) < r\}$ est un ouvert qui contient A. En effet, il est clair que $\mathcal{V}_r(A)$ contient A (on a $d(x,A) = 0$ pour $x \in A$) et pour tout x dans $\mathcal{V}_r(A)$, on a $r' = r - d(A,x) > 0$ et $B(x,r') \subset \mathcal{V}_r(A)$ (pour $y \in B(x,r')$ on a $d(y,A) \leq d(y,x) + d(x,A) < r' + d(x,A) = r$).*

Théorème 2.1.

Une réunion quelconque d'ouverts et une intersection finie d'ouverts sont des ouverts de E. Une réunion finie de fermés et une intersection quelconque de fermés sont des fermés de E.

Démonstration Si $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque d'ouverts non vides (les $\mathcal{O}_i$ vides peuvent être supprimés de la réunion) et x un élément de $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, il existe alors un réel $r_{i_0} > 0$ tel que $B(x, r_{i_0}) \subset \mathcal{O}_{i_0} \subset \mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}$ est ouvert. Si $(\mathcal{O}_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille finie d'ouverts non vides (le cas où l'un des $\mathcal{O}_k$ est vide est trivial) et x un élément de $\mathcal{O} = \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{O}_k$, il existe alors des réel $r_k > 0$, tels que $B(x, r_k) \subset \mathcal{O}_k$ pour tout k compris entre 1 et n. Le réel $r = \min_{1 \leq k \leq n} r_k$ est alors strictement positif et $B(x,r) \subset \bigcap_{k=1}^{n} B(x, r_k) \subset \mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}$ est ouvert.

Le résultat sur les fermés s'en déduit par passage au complémentaire. ∎

Une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert comme le montre l'exemple de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ qui est fermé non ouvert. De manière plus générale, l'intersection de toutes les boules ouvertes de centre a, $\bigcap_{r \in \mathbb{R}^{+,*}} B(a,r) = \{a\}$ n'est pas ouverte dans E.

Une réunion infinie de fermés n'est pas nécessairement un fermé comme le montre l'exemple de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n},+\infty\right[=\left]0,+\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$ qui est ouvert non fermé.

Ces deux exemples sont des cas particuliers du théorème qui suit.

Théorème 2.2.

Tout fermé de E peut s'écrire comme l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts et tout ouvert peut s'écrire comme la réunion d'une suite croissante de fermés.

Démonstration Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble fermé de E. Pour tout entier naturel non nul n, l'ensemble $\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})=\left\{x\in E,\ d(x,\mathcal{F})<\frac{1}{n}\right\}$ est un ouvert qui contient $\mathcal{F}$ (voir les exemples 2.2) et on a $\mathcal{F}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})$. En effet, comme $\mathcal{F}$ est contenu dans tous les $\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})$, il est contenu dans l'intersection et pour tout $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})$, on a $d(x,\mathcal{F})=0$, ce qui équivaut à dire que $x\in\mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ est fermé. De plus pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{V}_{\frac{1}{n+1}}(\mathcal{F})\subset\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})$, ce qui signifie que la suite $\left(\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(\mathcal{F})\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Par passage au complémentaire, on a le résultat annoncé sur les ouverts :

$$E\setminus\mathcal{O}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(E\setminus\mathcal{O})\ \text{ et }\ \mathcal{O}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(E\setminus\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(E\setminus\mathcal{O})\right)$$

avec $E\setminus\mathcal{V}_{\frac{1}{n}}(E\setminus\mathcal{O})=\left\{x\in E,\ d(x,E\setminus\mathcal{O})\geq\frac{1}{n}\right\}$. ■

Théorème 2.3.

Pour toute partie non vide Y de E, les ouverts [resp. les fermés] de (Y,d) sont les ensembles de la forme $\mathcal{O}\cap Y$ [resp. $\mathcal{F}\cap Y$] où $\mathcal{O}$ [resp. $\mathcal{F}$] est un ouvert [resp. un fermé] de E (ouverts et fermés pour la topologie induite*).*

Démonstration Pour l'ensemble vide c'est clair.

Si $\mathcal{O}'$ est un ouvert non vide de (Y,d), on a alors $\mathcal{O}'=\bigcup_{x\in\mathcal{O}'}B_Y(x,r_x)$ où on a noté $B_Y(x,r_x)=\{y\in Y,\ d(y,x)<r_x\}=B(x,r_x)\cap Y$, ce qui nous donne $\mathcal{O}'=\left(\bigcup_{x\in\mathcal{O}'}B(x,r_x)\right)\cap Y=\mathcal{O}\cap Y$ où $\mathcal{O}=\bigcup_{x\in\mathcal{O}'}B(x,r_x)$ est ouvert dans E comme réunion d'ouverts. Réciproquement si $\mathcal{O}\neq\emptyset$ est ouvert dans E et $x\in\mathcal{O}'=\mathcal{O}\cap Y$, il existe alors $r_x\in\mathbb{R}^{+,*}$ tel que $B(x,r_x)\subset\mathcal{O}$ et $B_Y(x,r_x)=B(x,r_x)\cap Y$ est une boule ouverte de (Y,d) contenue dans $\mathcal{O}'$, ce qui nous dit que $\mathcal{O}'$ est ouvert dans (Y,d). Un fermé $\mathcal{F}'$ de (Y,d) s'écrit $\mathcal{F}'=Y\setminus\mathcal{O}'$ où $\mathcal{O}'$ est un ouvert de (Y,d), donc $\mathcal{O}'=\mathcal{O}\cap Y$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de E et $\mathcal{F}'=Y\setminus(\mathcal{O}\cap Y)=(E\setminus\mathcal{O})\cap Y=\mathcal{F}\cap Y$

où $\mathcal{F} = E \setminus \mathcal{O}$ est un fermé de E. Réciproquement, si $\mathcal{F} = E \setminus \mathcal{O}$ est un fermé de E où $\mathcal{O}$ est un ouvert de E, alors $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap Y = (E \setminus \mathcal{O}) \cap Y = Y \setminus (\mathcal{O} \cap Y)$ est un fermé de (Y, d). ■

Un ouvert pour la topologie induite dans (Y, d) n'est pas nécessairement ouvert dans (E, d). Par exemple Y est ouvert dans (Y, d), mais pas obligatoirement dans (E, d). Pour un exemple moins trivial, on peut considérer $]1, 2]$ qui est ouvert dans $Y =]0, 2]$ et pas dans $\mathbb{R}$. Dans le cas où Y est un ouvert de E, les ouverts de (Y, d) pour la topologie induite le sont dans (E, d).

Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni de la distance associée à la valeur absolue, on a le résultat suivant.

Théorème 2.4.

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

Démonstration Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ ($\emptyset$ est l'intervalle ouvert $]a, a[$ pour n'importe quel réel a). Comme $\mathcal{O}$ est ouvert, pour tout $x \in \mathcal{O}$ il existe un réel $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) =]x - r_x, x + r_x[\subset \mathcal{O}$ et pour $n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_x} < r_x$ ($\mathbb{R}$ est archimédien), on a $\left]x - \frac{1}{n_x}, x + \frac{1}{n_x}\right[\subset \mathcal{O}$. De la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que l'intervalle $\left]x - \frac{1}{2n_x}, x + \frac{1}{2n_x}\right[$ contient un nombre rationnel q_x et on a $x - \frac{1}{2n_x} < q_x < x + \frac{1}{2n_x}$, soit $q_x - \frac{1}{2n_x} < x < q_x + \frac{1}{2n_x}$ ou encore $x \in \left]q_x - \frac{1}{2n_x}, q_x + \frac{1}{2n_x}\right[$, ce dernier intervalle étant contenu dans $\left]x - \frac{1}{n_x}, x + \frac{1}{n_x}\right[\subset \mathcal{O}$ puisque $x + \frac{1}{n_x} - \left(q_x + \frac{1}{2n_x}\right) = x + \frac{1}{2n_x} - q_x > 0$ et $q_x - \frac{1}{2n_x} - \left(x - \frac{1}{n_x}\right) = q_x - \left(x - \frac{1}{2n_x}\right) > 0$. On a donc au final en désignant par φ l'application qui associe à tout $x \in \mathcal{O}$ un couple (n_x, q_x), l'égalité $\mathcal{O} = \bigcup_{(n,q) \in \varphi(\mathcal{O})} \left]q - \frac{1}{2n}, q + \frac{1}{2n}\right[$, l'ensemble d'indices $\varphi(\mathcal{O}) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ étant dénombrable. ■

De manière plus générale sur $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_∞, on a le résultat qui suit.

Théorème 2.5.

Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de pavés ouverts.

Démonstration Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{O}$ il existe un réel $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) = \prod_{k=1}^{n}]x_k - r_x, x_k + r_x[\subset \mathcal{O}$ et pour $n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_x} < r_x$, on a $\prod_{k=1}^{n} \left]x_k - \frac{1}{n_x}, x_k + \frac{1}{n_x}\right[\subset \mathcal{O}$ pour tout entier k

compris entre 1 et n. Chaque intervalle $\left]x_k - \frac{1}{2n_x}, x_k + \frac{1}{2n_x}\right[$ contient un nombre rationnel $q_{x,k}$ et on a $x_k \in \left]q_{x,k} - \frac{1}{2n_x}, q_{x,k} + \frac{1}{2n_x}\right[\subset \left]x_k - \frac{1}{n_x}, x_k + \frac{1}{n_x}\right[$ pour tout k compris entre 1 et n, soit :

$$x \in \prod_{k=1}^{n} \left]q_{x,k} - \frac{1}{2n_x}, q_{x,k} + \frac{1}{2n_x}\right[\subset \prod_{k=1}^{n} \left]x_k - \frac{1}{n_x}, x_k + \frac{1}{n_x}\right[\subset \mathcal{O}$$

et en désignant par φ l'application qui associe à tout $x \in \mathcal{O}$ un couple (n_x, q_x) où $q_x = (q_{x,k})_{1 \leq k \leq n}$, on a $\mathcal{O} = \bigcup_{(n,q) \in \varphi(\mathcal{O})} B\left(q_x, \frac{1}{2n}\right)$ où $\varphi(\mathcal{O}) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Q}^n$ est dénombrable. ∎

Définition 2.7. Soit A une partie de E. *L'intérieur* de A noté $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert de E contenu dans A. *L'adhérence* de A notée $\overline{A}$, est le plus petit fermé de E contenant A. La *frontière* de A notée ∂A est l'intersection de $\overline{A}$ et $\overline{E \setminus A}$.

On vérifie facilement que l'intérieur de A est aussi la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A et que l'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés de E qui contiennent A.

Un point x de E est dans $\overset{\circ}{A}$ si, et seulement si, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$. En effet, si $x \in \overset{\circ}{A}$ il existe alors $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \overset{\circ}{A} \subset A$. Réciproquement s'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$, la boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ est un ouvert de E contenu dans A et qui contient x, donc est contenue dans $\overset{\circ}{A}$ et $x \in \overset{\circ}{A}$.

L'adhérence d'une boule ouverte dans un espace métrique n'est pas nécessairement la boule fermée, c'est-à-dire que $\overline{B(x, r)} \neq \overline{B}(x, r)$. Par exemple si d est la *distance discrète* définie sur un ensemble E ayant au moins deux éléments par $d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = 1$ pour $x \neq y$, on a pour tout $x \in E$, $B(x, 1) = \{x\}$, $\overline{B(x, 1)} = \{x\}$ et $\overline{B}(x, 1) = E$. Nous verrons au chapitre suivant que dans le cas particulier d'un espace normé, on a l'égalité $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$.

Théorème 2.6.

Pour tout sous-ensemble A de E on a $\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}$, $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, $\overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A}$ et $\overset{\circ}{A} \subset A$ [resp. $A \subset \overline{A}$], cette dernière égalité étant réalisée si, et seulement si, A est ouvert [resp. A est fermé].

Démonstration L'ensemble $E \setminus \overset{\circ}{A}$ est un fermé qui contient $E \setminus A$ ($\overset{\circ}{A}$ est ouvert et $\overset{\circ}{A} \subset A$, donc $E \setminus \overset{\circ}{A}$ est fermé et $E \setminus A \subset E \setminus \overset{\circ}{A}$), ce qui implique que $\overline{E \setminus A} \subset E \setminus \overset{\circ}{A}$. Si F est un fermé qui contient $E \setminus A$, alors $E \setminus F$ est un ouvert contenu dans A, donc dans $\overset{\circ}{A}$ et F contient $E \setminus \overset{\circ}{A}$, donc $E \setminus \overset{\circ}{A}$ est le plus petit fermé qui contient $E \setminus A$, soit l'adhérence de ce dernier ensemble. Au final, on a $\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}$ et $\partial A = \overline{A} \cap \left(E \setminus \overset{\circ}{A} \right) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. En posant $B = E \setminus A$, on a $\overline{A} = \overline{E \setminus B} = E \setminus \overset{\circ}{B}$, soit $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}$. Par définition, on a $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \subset A$ où $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est la famille de tous les ouverts de E contenus dans A. L'égalité $A = \overset{\circ}{A}$ nous dit que A est ouvert comme réunion d'ouverts. Réciproquement si A est ouvert, c'est alors l'un des $\mathcal{O}_i$ et nécessairement on a $A \subset \overset{\circ}{A}$, ce qui donne l'égalité $A = \overset{\circ}{A}$. De même, on a $A \subset \overline{A} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_j$ où $(\mathcal{F}_j)_{j \in J}$ est la famille de tous les fermés de E qui contiennent A. L'égalité $A = \overline{A}$ nous dit que A est fermé comme intersection de fermés. Réciproquement si A est fermé, c'est alors l'un des $\mathcal{F}_j$ et nécessairement on a $\overline{A} = \bigcap_{j \in I} \mathcal{F}_j \subset A$, ce qui donne l'égalité $A = \overline{A}$. ∎

Théorème 2.7.

L'adhérence d'une partie A de E est l'ensemble des éléments x de E tels que $d(x, A) = 0$, ce qui revient à dire que $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $d(x, y) < \varepsilon$ (soit que $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$).

Démonstration Il revient au même de montrer que $d(x, A) > 0$ si, et seulement si, $x \in E \setminus \overline{A}$. Si $\delta = d(x, A) > 0$, on a alors $d(x, y) \geq \delta$ pour tout $y \in A$ et $E \setminus B(x, \delta)$ est un fermé qui contient A, donc $\overline{A} \subset E \setminus B(x, \delta)$ et en conséquence, $B(x, \delta) \subset E \setminus \overline{A}$, donc $x \in E \setminus \overline{A}$. Réciproquement, si $x \in E \setminus \overline{A}$, comme cet ensemble est ouvert, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus \overline{A}$, donc $A \subset \overline{A} \subset E \setminus B(x, \varepsilon)$ et on a $d(x, y) \geq \varepsilon$ pour tout $y \in A$, ce qui implique que $d(x, A) \geq \varepsilon > 0$. ∎

Du théorème précédent, on déduit que $x \in \partial A$ si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ et $B(x, \varepsilon) \setminus A \neq \emptyset$.

Définition 2.8. On dit qu'une partie D de E est *dense* dans E si $\overline{D} = E$, ce qui signifie que pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in D$ tel que $d(x, y) < \varepsilon$ (soit que $D \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$).

Dire que D est dense dans E revient aussi à dire que $\overset{\circ}{\widehat{E \setminus D}} = E \setminus \overline{D} = \emptyset$.

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dense si, et seulement si, pour tous réels $x < y$, on a $D \cap]x, y[\neq \emptyset$.

Définition 2.9. On dit que l'espace métrique E est *séparable* s'il existe dans E une partie dense dénombrable.

Exemple 2.2 *De la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_∞ est séparable : $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}^n$.*

2.2 Suites à valeurs dans un espace métrique

(E, d) est un espace métrique que l'on désignera simplement par E.

Une suite d'éléments de E (ou à valeurs dans E) est une application définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs dans E. On se limite aux suites définies sur $\mathbb{N}$ et on note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite.

Définition 2.10. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est *bornée*, si $\sup\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} d(u_n, u_m)$ est fini.

Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée revient à dire que l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans E (définition 2.4).

Définition 2.11. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est *convergente*, s'il existe un élément ℓ de E tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(u_n, \ell) = 0$. Une suite non convergente est dite *divergente*.

La convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ dans E se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ d(u_n, \ell) < \varepsilon \tag{2.1}$$

Dans l'assertion (2.1), les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges. Il est parfois commode de se limiter à $\varepsilon \in]0, 1[$ sans que cela ne soit restrictif et la condition $d(u_n, \ell) < \varepsilon$ peut être remplacée par $d(u_n, \ell) < \alpha\varepsilon$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{+,*}$ est donné.

Cette notion de convergence dépend de la distance choisie sur E (exercice 2.3).

En utilisant l'inégalité triangulaire, on vérifie facilement que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est convergente, sa limite est alors unique, ce qui nous permet de noter $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$.

Une suite convergente est bornée. En effet, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe alors un entier n_ε tel que $d(u_n, u_m) \leq d(u_n, \ell) + d(u_m, \ell) < 2$ pour tous $n > n_\varepsilon$ et $m > n_\varepsilon$, donc $\sup\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} d(u_n, u_m) \leq \max\left(\max\limits_{0\leq n,m\leq n_\varepsilon} d(u_n, u_m), 2\right)$.

Définition 2.12. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est *de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall m \geq n_\varepsilon,\ d(u_n, u_m) < \varepsilon$$

Les entiers m et n jouant des rôles symétriques, on peut se limiter à $m > n \geq n_\varepsilon$ dans la définition précédente.

Le résultat suivant est souvent utilisé pour montrer qu'une suite est de Cauchy.

Théorème 2.8.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E pour laquelle il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et un entier n_0 vérifiant :

$$\begin{cases} \forall m > n \geq n_0,\ d(u_m, u_n) \leq \varepsilon_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon_n) = 0 \end{cases}$$

elle est alors de Cauchy.

Démonstration De $\lim\limits_{n\to+\infty} (\varepsilon_n) = 0$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier $n_\varepsilon \geq n_0$ tel que $\varepsilon_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui entraîne $d(u_m, u_n) < \varepsilon$ pour tous $m > n \geq n_\varepsilon$. ■

Théorème 2.9.

Toute suite de Cauchy dans E est bornée et toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration La première affirmation est une conséquence directe de la définition et la deuxième se déduit de l'inégalité triangulaire. ■

Dans le cas où toute suite de Cauchy dans E est convergente, on dit que l'espace métrique E est *complet*.

Exemple 2.3 *Le point 6 du théorème 1.14 nous dit que $\mathbb{R}$ est complet. On en déduit facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de la distance d_∞ est complet.*

Les notions d'intérieur et d'adhérence peuvent se définir de façon séquentielle dans un espace métrique.

Théorème 2.10.

Soit A une partie non vide de E.

1. *L'intérieur de A est l'ensemble des points x de E tels que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers x, il existe un entier n_0 tel que $x_n \in A$ pour tout $n \geq n_0$.*
2. *L'adhérence de A est l'ensemble des points x de E qui sont limites d'une suite de points de A.*
3. *La frontière de A est l'ensemble des points x de E qui sont limites d'une suite de points de A et d'une suite de points de $E \setminus A$.*

Démonstration

1. Si $x \in \overset{\circ}{A}$, il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers x, il existe un entier n_ε tel que $d(x_n, x) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui implique que $x_n \in A$. Si $x \notin \overset{\circ}{A}$, alors pour tout entier $n \geq 1$, la boule $B\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$ n'est pas contenue dans A (comme $B\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$ est ouverte, si elle est contenue dans A, elle est aussi contenue dans $\overset{\circ}{A}$ et $x \in \overset{\circ}{A}$), donc il existe $x_n \in B\left(x, \dfrac{1}{n}\right) \setminus A$, ce qui nous donne une suite qui converge vers x avec tous ses termes en dehors de A. D'où la définition séquentielle de l'intérieur.

2. L'adhérence de A est $\overline{A} = \{x \in E,\ d(x, A) = 0\}$ (théorème 2.7), donc pour tout $x \in \overline{A}$ et tout entier $n \geq 1$, il existe $x_n \in A$ tel que $d(x_n, x) < \dfrac{1}{n}$, ce qui nous donne une suite de points de A qui converge vers x. Réciproquement si x est la limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, des encadrements $0 \leq d(x, A) \leq d(x_n, x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que $d(x, A) = 0$, soit que $x \in \overline{A}$.

3. Il en résulte que $x \in \partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$ si, et seulement si, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A et une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E \setminus A$ telles que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. ■

De ce théorème, on peut déduire des définitions séquentielles des notions d'ouverts, de fermés et de partie dense :

- un ensemble $\mathcal{O}$ est ouvert dans E si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers $x \in \mathcal{O}$, il existe un entier n_0 tel que $x_n \in \mathcal{O}$ pour tout $n \geq n_0$ (cela résulte de $\mathcal{O} = \overset{\circ}{\mathcal{O}}$) ;
- un ensemble $\mathcal{F}$ est fermé dans E si, et seulement si, toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{F}$ a sa la limite dans $\mathcal{F}$ (cela résulte de $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$) ;
- une partie A de E est dense dans E si, et seulement si, tout $x \in E$ est la limite d'une suite de points de A.

Définition 2.13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit qu'un élément a de E est *valeur d'adhérence* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il est limite d'une suite extraite, ce qui signifie qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$.

Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, on dit que $-\infty$ [resp. $+\infty$] est valeur d'adhérence de cette suite, si on peut en extraire une sous-suite divergente vers $-\infty$ [resp. vers $+\infty$].

Théorème 2.11.

Un élément a de E est valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \geq n,\ d(u_m, a) < \varepsilon \tag{2.2}$$

Démonstration Si $a = \lim_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe alors un entier n_ε tel que $d\left(u_{\varphi(n)}, a\right) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p = \max(n_\varepsilon, n)$, on a $m = \varphi(p) \geq p$, donc $m \geq n$, $p \geq n_\varepsilon$ et $d(u_m, a) = d\left(u_{\varphi(p)}, a\right) < \varepsilon$. Réciproquement si $a \in E$ vérifie (2.2), on construit alors par récurrence une suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $d\left(u_{\varphi(n)}, a\right) < \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On part de $m = \varphi(0) \geq 0$ tel que $d(u_m, a) < 1$ et en supposant obtenus pour $n \geq 0$ des entiers $\varphi(0) < \cdots < \varphi(n)$ tels que $d\left(u_{\varphi(k)}, a\right) < \dfrac{1}{k+1}$ pour tout k compris entre 0 et n, il existe un entier $m = \varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$ tel que $d(u_m, a) < \dfrac{1}{n+2}$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} d\left(u_{\varphi(n)}, a\right) = 0$, ce qui signifie que a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Une suite peut être sans valeur d'adhérence comme le montre l'exemple de la suite réelle $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. De manière plus générale, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $r > 0$ tel $d(x_i, x_j) \geq r$ pour tous $i \neq j$ dans $\mathbb{N}$, il est alors impossible d'en extraire une suite convergente.

Théorème 2.12.

Une suite convergente dans E a pour unique valeur d'adhérence sa limite.

Démonstration Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de E convergente vers ℓ. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_n, \ell)$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\varphi(n) \geq n \geq n_\varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui entraîne que $d\left(u_{\varphi(n)}, \ell\right) < \varepsilon$. La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers ℓ. ■

La réciproque du théorème précédent est fausse comme le montre l'exemple de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{2n} = n$ et $u_{2n+1} = 0$ (elle est divergente avec 0 pour unique valeur d'adhérence), mais elle vraie pour une suite à valeurs dans un compact comme on le verra avec le théorème 2.17.

Théorème 2.13.

Une suite de Cauchy est convergente si, et seulement si, elle a une valeur d'adhérence.

Démonstration Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans E. Si elle converge, sa limite est alors en particulier une valeur d'adhérence. Réciproquement si $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier n_ε tel que $d\left(u_{\varphi(n)}, \ell\right) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe un entier $m_\varepsilon \geq n_\varepsilon$ tel que $d(u_n, u_m) < \varepsilon$ pour tous $m \geq n \geq m_\varepsilon$, ce qui nous donne pour tout entier $n \geq m_\varepsilon$:

$$d(u_n, \ell) \leq d\left(u_n, u_{\varphi(n)}\right) + d\left(u_{\varphi(n)}, \ell\right) < 2\varepsilon$$

(pour $n \geq m_\varepsilon$, on a $\varphi(n) \geq n \geq m_\varepsilon \geq n_\varepsilon$). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers ℓ. ■

Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, on note $\mathcal{A}$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \{u_k,\ k \geq n\}$ l'ensemble des valeurs de la suite $(u_k)_{k\geq n}$.

Théorème 2.14.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E*. On a* $\overline{R_n} = R_n \cup \mathcal{A}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\mathcal{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{R_n}$.

Démonstration Pour toute valeur d'adhérence $a = \lim_{k\to+\infty} u_{\varphi(k)}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(k) \geq k$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\geq n}$ est à valeurs dans R_n et en conséquence sa limite a est dans $\overline{R_n}$. On a donc $\mathcal{A} \subset \overline{R_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme $R_n \subset \overline{R_n}$, on a $R_n \cup \mathcal{A} \subset \overline{R_n}$. Tout $a \in \overline{R_n}$ est limite d'une suite de points $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de R_n. Si a est dans R_n, il est alors dans $R_n \cup \mathcal{A}$, sinon pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier k_ε tel que $0 < d(v_k, a) < \varepsilon$ pour tout $k \geq k_\varepsilon$. En écrivant chaque v_k sous la forme $v_k = u_{\psi(k)}$, on peut trouver pour tout $n \in \mathbb{N}$ un entier $k \geq k_\varepsilon$ tel que $m = \psi(k) > n$ (s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\psi(k) \leq n$ pour tout $k \geq k_\varepsilon$, la suite $(v_k)_{k\geq k_\varepsilon}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs et sa limite a est l'une de ces valeurs, donc dans R_n contrairement à notre hypothèse), ce qui nous donne $d(u_m, a) = d(v_k, a) < \varepsilon$. Du théorème 2.11 on déduit alors que a est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit $a \in \mathcal{A} \subset R_n \cup \mathcal{A}$. D'où l'égalité $\overline{R_n} = R_n \cup \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que l'ensemble $\mathcal{A}$ est contenu dans tous les $\overline{R_n}$, donc dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{R_n}$. Du théorème (2.11) , on déduit que pour tout $a \in E \setminus \mathcal{A}$ il existe un réel $\varepsilon > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $d(u_m, a) \geq \varepsilon$ pour tout $m \geq n$, ce qui implique que a n'est pas dans $\overline{R_n}$ et en conséquence, $a \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{R_n}$. D'où l'égalité $\mathcal{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{R_n}$. ■

Du théorème précédent, on déduit que l'ensemble $\mathcal{A}$ des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fermé dans E comme intersection de fermés.

2.3 Compacité

Définition 2.14. On dit qu'une partie K de E est *compacte*, si de toute suite de points de K, on peut extraire une sous-suite qui converge dans K (*propriété de Bolzano-Weierstrass*).

La propriété de Bolzano-Weierstrass se traduit aussi en disant que toute suite de points de K admet une valeur d'adhérence dans K.

Dans le cas où E est compact, on dit que cet espace métrique est compact.

Définition 2.15. On dit qu'une partie A de E est *relativement compacte*, si son adhérence $\overline{A}$ est compacte.

Théorème 2.15.

Une partie non vide A de E est relativement compacte si, et seulement si, de toute suite de points de A, on peut extraire une sous-suite qui converge dans E.

Démonstration Si A est relativement compacte, alors toute suite de points de A étant également une suite de points du compact $\overline{A}$, on peut en extraire une sous-suite qui converge dans $\overline{A}$. Réciproquement, supposons que de toute suite de points de A, on peut extraire une sous-suite qui converge dans E. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de points de $\overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in A$ tel que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers un élément y de $\overline{A}$. En écrivant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$d\left(y_{\varphi(n)}, y\right) \leq d\left(y_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)}\right) + d\left(x_{\varphi(n)}, y\right) < \frac{1}{\varphi(n)} + d\left(x_{\varphi(n)}, y\right)$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = y$ dans $\overline{A}$, ce qui nous dit que $\overline{A}$ est compact, soit que A est relativement compact. ■

Exemples 2.3

1. *Un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est compact. En effet, le point 5 du théorème 1.14 nous dit que de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b]$, on peut extraire une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente (théorème de Bolzano-Weierstrass) et des inégalités $a \leq u_{\varphi(n)} \leq b$, on déduit que la limite de cette suite extraite est dans $[a, b]$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E convergente, on notant ℓ sa limite, l'ensemble $K = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est alors compact.*
3. *Un fermé F dans un compact K de E est compact.*
4. *Un sous-ensemble d'un ensemble relativement compact est relativement compact.*

Lemme 2.1 *Soit K un compact de E. Pour tout réel $r > 0$, il existe une suite finie $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(a_k, r)$, ce qui signifie que le compact K peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de même rayon donné.*

Démonstration Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que K ne puisse être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon r et centrée en un point de K. Partant de $u_0 \in K$, il existe $u_1 \in K \setminus B(x_0, r)$ (puisque K n'est pas contenu dans

$B(u_0, r))$, donc $d(u_0, u_1) \geq r$. Supposant obtenus $u_0, \cdots, u_n$ dans K tels que $d(u_i, u_j) \geq r$ pour tous $i \neq j$ compris entre 1 et n, comme K n'est pas contenu dans $\bigcup_{k=1}^{n} B(u_k, r)$, il existe $u_{n+1} \in K$ tel que $d(u_{n+1}, u_k) \geq r$ pour tout k compris entre 1 et r. On construit donc ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que $d(u_i, u_j) \geq r$ pour tous $i \neq j$ dans $\mathbb{N}$ et d'une telle suite il est impossible d'extraire une suite convergente, ce qui n'est pas possible pour K compact. ■

Le lemme précédent se traduit en disant qu'un compact est précompact.

Définition 2.16. On dit qu'une partie K de E est *précompacte*, si pour tout réel $r > 0$, K peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon r.

Un précompact peut également être recouvert par un nombre fini de boules fermées de rayon $r > 0$.

Un sous-ensemble précompact K de E est borné. En effet, si $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite finie d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(a_k, 1)$, pour x, y dans K, il existe deux entiers j, k compris entre 1 et n tels que $x \in B(a_j, 1)$ et $y \in B(a_k, 1)$, donc :

$$d(x, y) \leq d(x, a_j) + d(a_j, a_k) + d(a_k, y) \leq M = 2 + \max_{1\leq j,k\leq n} d(a_j, a_k)$$

et K est borné.

Exemples 2.4

1. *Un sous-ensemble relativement compact de E est précompact.*
2. *Un sous-ensemble d'un précompact de E est précompact.*

Théorème 2.16.

Un compact de E est fermé, borné et séparable.

Démonstration Soit K un compact de E. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K qui converge vers $\ell \in E$, on peut extraire une suite qui converge vers un élément de K, donc $\ell \in K$. L'ensemble K est donc fermé. Le lemme 2.1 nous dit que K est précompact, c'est-à-dire qu'il existe une suite finie $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(a_k, 1)$, donc pour tous x, y dans K il existe j, k compris entre 1 et n tels que $(x, y) \in B(a_j, 1) \times B(a_k, 1)$ et :

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, a_j) + d(a_j, a_k) + d(a_k, y) < 2 + d(a_j, a_k) \\ &\leq 2 + \max_{1\leq j,k\leq n} d(a_j, a_k) \end{aligned}$$

ce qui nous dit que K est borné. Le lemme 2.1 nous dit aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il une suite finie $(a_{n,k})_{1 \leq k \leq m_n}$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^{m_n} B\left(a_{n,k}, \frac{1}{2^n}\right)$. On vérifie alors que l'ensemble dénombrable $D = \{a_{n,k},\ n \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq k \leq m_n\}$ est dense dans K. En effet, pour tout $x \in K$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$ et un entier m_ε tel que $K \subset \bigcup_{k=1}^{m_\varepsilon} B\left(a_{n_\varepsilon,k}, \frac{1}{2^{n_\varepsilon}}\right)$, donc il existe un entier k compris entre 1 et m_ε tel que $d(x, a_{n_\varepsilon,k}) < \frac{1}{2^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$, ce qui nous dit que D est dense dans K. ■

De manière générale, un fermé borné dans un espace métrique n'est pas nécessairement compact. Nous verrons au chapitre suivant que dans le cas particulier où E est un espace vectoriel normé, les compacts sont les fermés bornés si, et seulement si E est de dimension finie (théorème 3.16). Ce résultat pour $E = \mathbb{R}$ est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass. Voir aussi l'exercice 2.19.

Corollaire 2.1. *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés et les ensembles relativement compacts sont les bornés.*

Démonstration Le théorème précédent nous dit qu'un compact de $\mathbb{R}$ est fermé et borné. Réciproquement, si K est une partie bornée de $\mathbb{R}$, le théorème de Bolzano-Weierstrass nous dit que de toute suite de points de K, on peut extraire une sous-suite convergente et si de plus K est fermé, cette limite est alors dans K. Cet ensemble est donc compact. Le deuxième point en résulte immédiatement. ■

Théorème 2.17.

Soient K un compact de E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K.

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un nombre fini $a_1, \cdots, a_r$ de valeurs d'adhérences, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que $u_n \in \bigcup_{k=0}^{r} \mathcal{B}(a_k, \varepsilon)$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$.*
2. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle a un unique valeur d'adhérence.*

Démonstration Comme K est compact, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a au moins une valeur d'adhérence.

1. En notant $\mathcal{A}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que $\mathcal{A} = \{a_1, \cdots, a_r\}$. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $p_n \geq n$ tel que $x_{p_n} \notin \bigcup_{k=0}^{r} \mathcal{B}(a_k, \varepsilon)$, soit $d(u_{p_n}, a_k) \geq \varepsilon$ pour tout k compris entre 1 et r, on peut alors construire par récurrence une suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers telle que $d\left(u_{\varphi(n)}, a_k\right) \geq \varepsilon$ pour tout k compris entre 1 et r et de cette suite dans le compact K, on peut extraire une sous suite $\left(u_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in K$ tel que $d(a, a_k) \geq \varepsilon > 0$, donc a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'est pas dans $\mathcal{A}$, c'est impossible. D'où le résultat annoncé.

2. On sait déjà que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle a alors une unique valeur d'adhérence que cette suite soit à valeurs dans un compact ou pas (théorème 2.12). Réciproquement si $\mathcal{A} = \{\ell\}$, on déduit alors du premier point que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in \mathcal{B}(\ell, \varepsilon)$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui revient à dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. ■

Lemme 2.2 (Lebesgue) *Soient K un compact de E et $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ (on dit qu'on a un* recouvrement ouvert *de K). Il existe un réel $r > 0$ tel que toute boule ouverte de centre $x \in K$ et de rayon r soit contenue dans l'un des $\mathcal{O}_i$.*

Démonstration Supposons que pour tout réel $r > 0$, il existe une boule ouverte de centre $x \in K$ et de rayon r qui ne soit contenue dans aucun des $\mathcal{O}_i$. On peut alors trouver, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, une boule $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$ centrée en $x_n \in K$ qui ne soit contenue dans aucun des $\mathcal{O}_i$. De la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de K, on peut extraire une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $x \in K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Cette limite étant dans l'un des ouverts $\mathcal{O}_i$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O}_i$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x$, il existe un entier n_ε tel que $\frac{1}{\varphi(n)} < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d\left(x_{\varphi(n)}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, donc $B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right) \subset B(x, r) \subset \mathcal{O}_i$ (pour $y \in B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}\right)$, on a $d(x, y) \leq d\left(x, x_{\varphi(n)}\right) + d\left(x_{\varphi(n)}, y\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\varphi(n)} < \varepsilon$), contrairement à l'hypothèse de départ. ■

Théorème 2.18.

Soit K une partie non vide de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *K est compact ;*
2. *de tout recouvrement ouvert de K, on peut extraire un sous-recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue) ;*
3. *K est précompact et complet.*

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ *(2)* Soient K un compact de E et $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Le lemme 2.2 de Lebesgue nous dit qu'il existe $r > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon r et de centre $x \in K$ est contenue dans l'un des $\mathcal{O}_i$ et le lemme 2.1 qu'il existe une suite finie $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de K telle que

$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(a_k, r)$ (K est précompact). Chaque boule $B(a_k, r)$ étant contenue dans un ouvert $\mathcal{O}_{i_k}$, on en déduit que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k}$.

(2) $\Rightarrow$ *(1)* Réciproquement soit K une partie non vide de E telle que de tout recouvrement ouvert de K on puisse extraire un sous-recouvrement fini. S'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K sans valeur d'adhérence dans K, on peut alors trouver pour tout $x \in K$, un réel $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x)$ ne contienne qu'un nombre fini de valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais alors du recouvrement ouvert $K \subset \bigcup_{x\in K} B(x, r_x)$, on peut extraire un recouvrement fini $K \subset \bigcup_{k=1}^{p} B(a_j, r_{a_j})$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs qui en sont des valeurs d'adhérence, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ. L'ensemble K est donc compact.

(1) $\Rightarrow$ *(3)* Si K est compact dans E, le lemme 2.1 nous dit alors qu'il est précompact. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans le compact K, elle admet alors une valeur d'adhérence vers laquelle elle converge (théorème 2.13), cette limite étant dans K puisque cet ensemble est fermé. Le compact K est donc complet.

(3) $\Rightarrow$ *(1)* Supposons que K non vide soit précompact et complet. On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K et nous allons construire par récurrence une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ et une suite $\left(B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de boules ouvertes telles que $J_{n+1} \subset J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous les u_j pour $j \in J_n$ soient dans la même boule $B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right)$. L'ensemble K étant contenu dans une réunion finie de boules ouvertes de rayon $\frac{1}{2}$, il existe une partie infinie J_1 de $\mathbb{N}$ telle que tous les u_j pour $j \in J_1$ soient dans une même boule $B\left(x_1, \frac{1}{2}\right)$ (principe des tiroirs). Supposant construites pour $n \in \mathbb{N}^*$ les suite $(J_k)_{1\leq k\leq n}$ et $\left(B\left(x_k, \frac{1}{2^k}\right)\right)_{1\leq k\leq n}$ satisfaisant les conditions imposées. Comme K est contenu dans une réunion finie de boules ouvertes de rayon $\frac{1}{2^{n+1}}$, il existe une partie infinie J_{n+1} de J_n telle que tous les u_j pour $j \in J_{n+1}$ soient dans une même boule $B\left(x_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. On définit alors par récurrence la suite d'entiers $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suit. Pour $n = 1$, $\varphi(1) = \min J_1$ et supposant construit $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\varphi(n+1)$ comme le plus petit élément de $J_{n+1} \cap [\varphi(n) + 1, +\infty[$ (cette partie de J_n est non vide car J_{n+1} est infini). La suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors strictement croissante et pour tous $m > n$ dans $\mathbb{N}^*$, $u_{\varphi(n)}$ et $u_{\varphi(m)}$ sont dans $B\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right)$ (on a $\varphi(m) \in J_m \subset J_n$) donc :

$$d\left(u_{\varphi(m)}, u_{\varphi(n)}\right) \leq d\left(u_{\varphi(m)}, x_n\right) + d\left(x_n, u_{\varphi(n)}\right) < \frac{1}{2^{n-1}}$$

ce qui implique que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans K donc convergente vers un élément de K puisque K est complet. ■

Par passage au complémentaire, on déduit du théorème précédent qu'un sous-ensemble K de E est compact si, et seulement si, de toute famille $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ de fermés dans K d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille fini également d'intersection vide. Par contraposition, on en déduit que si $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés dans K telle que toute intersection fini d'éléments de cette famille est non vide, alors $\bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i$ est non vide.

Exemple 2.4 *$\mathbb{R}$ est non compact car $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[n,+\infty[=\emptyset$ (ce qui résulte du caractère archimédien de $\mathbb{R}$), alors que pour toute famille finie J d'entiers naturel, l'intersection $\bigcap\limits_{n\in J}[n,+\infty[=[\max(J),+\infty[$ est non vide.*

Corollaire 2.2. *Dans E complet, un sous-ensemble non vide est relativement compact si, et seulement si, il est précompact.*

Corollaire 2.3. (Compacts emboîtés) *Si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides dans E (i. e. telle que $K_{n+1}\subset K_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$), l'intersection $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}K_n$ est alors non vide. Dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta(K_n)=0$, cette intersection est réduite à un point.*

Démonstration La suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, c'est une suite de compacts de K_0. Si $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}K_n=\emptyset$, on a alors $K_0\subset E=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}E\setminus K_n$ et de ce recouvrement ouvert du compact K_0 on peut extraire un sous recouvrement fini $K_0\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m}E\setminus K_{n_k}$, chaque ouvert $E\setminus K_{n_k}$ étant contenu dans $E\setminus K_r$, où $r=\max\limits_{1\leq k\leq m}n_k$ (pour tout k compris entre 1 et m, on a $K_r\subset K_{n_k}$), ce qui implique que $K_0\subset E\setminus K_r$ avec $K_r\subset K_0$, donc $E\setminus K_0\subset K_r\subset K_0$, ce qui est impossible pour K_0 non vide. Au final, on a $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}K_n\neq\emptyset$. Si x,y sont deux points de cette intersection, on a alors $d(x,y)\leq\delta(K_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta(K_n)=0$, cela implique en faisant tendre n vers $+\infty$ que $d(x,y)=0$, soit que $y=x$. Cette intersection est donc réduite à un point. ■

2.4 Le théorème de Baire

Avec le théorème 1.14 on a vu que la complétude de $\mathbb{R}$ équivaut à la propriété des intervalles emboîtés. De manière plus générale, on a le résultat suivant.

Théorème 2.19. Boules emboîtées

L'espace métrique E est complet si, et seulement si, pour toute suite décroissante $\left(\overline{B}(x_n, r_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de boules fermées (boules emboîtées) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, l'intersection $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_n, r_n)$ est réduite à un point.

Démonstration Supposons E complet et soit $\left(\overline{B}(x_n, r_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boules fermées emboîtées. Pour tous $m > n$, on a $x_m \in \overline{B}(x_m, r_m) \subset \overline{B}(x_n, r_n)$, donc $d(x_m, x_n) \leq r_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, ce qui implique que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente vers un élément x de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $d(x, x_n) \leq d(x, x_m) + d(x_m, x_n) \leq d(x, x_m) + r_n$ pour tout $m > n$, ce qui implique en faisant tendre m vers $+\infty$ que $d(x, x_n) \leq r_n$, soit que $x \in \overline{B}(x_n, r_n)$, donc $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_n, r_n)$ et cette intersection est non vide. Si y est un autre point de cette intersection, on a alors $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq 2r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique en faisant tendre n vers $+\infty$ que $d(x, y) = 0$, soit que $y = x$. Cette intersection est donc réduite à $\{x\}$. Réciproquement, on suppose que la propriété des boules emboîtées est vérifiée et on se donne une suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe un entier n_1 tel que $d(u_n, u_{n_1}) < \dfrac{1}{2}$ pour tout $n > n_1$. Supposant obtenus pour $r \in \mathbb{N}^*$, des entiers $n_1 < \cdots < n_r$ tels que $d(u_n, u_{n_k}) < \dfrac{1}{2^k}$ pour tout entier k compris entre 1 et r et tout entier $n > n_k$, il existe un entier $n_{r+1} > n_r$ tel que $d\left(u_n, u_{n_{r+1}}\right) < \dfrac{1}{2^{r+1}}$ pour tout entier $n > n_{k+1}$. La suite de boules fermées $\left(\overline{B}\left(u_{n_r}, \dfrac{1}{2^{r-1}}\right)\right)_{r\in\mathbb{N}^*}$ est alors décroissante. En effet pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \overline{B}\left(u_{n_{r+1}}, \dfrac{1}{2^r}\right)$, on a $d\left(x, u_{n_{r+1}}\right) \leq \dfrac{1}{2^r}$ et $d\left(u_{n_{r+1}}, u_{n_r}\right) \leq \dfrac{1}{2^r}$ car $n_{r+1} > n_r$, donc :

$$d(x, u_{n_r}) \leq d\left(x, u_{n_{r+1}}\right) + d\left(u_{n_{r+1}}, u_{n_r}\right) \leq 2\frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^{r-1}}$$

soit $x \in \overline{B}\left(u_{n_r}, \dfrac{1}{2^{r-1}}\right)$. Il existe alors par hypothèse un élément x de E tel que $\bigcap\limits_{r\in\mathbb{N}^*} \overline{B}\left(u_{n_r}, \dfrac{1}{2^{r-1}}\right) = \{x\}$ et des inégalités $d(x, u_{n_r}) \leq \dfrac{1}{2^{r-1}}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on déduit que la suite $(u_{n_r})_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x, ce qui implique que x est aussi la limite de la suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après le théorème 2.13. L'espace métrique E est donc complet. ■

Une conséquence importante du théorème des boules emboîtées est le résultat qui suit.

Théorème 2.20. Baire

Soit (E, d) un espace métrique complet. Si $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses dans E, l'intersection $\mathcal{O} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ est alors dense dans E.

Démonstration Il s'agit de montrer que pour tout $x \in E$ et tout réel $\varepsilon > 0$, on a $\mathcal{O} \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. Soit donc $\mathcal{B} = B(x, \varepsilon) \subset E$. Du fait que l'ouvert $\mathcal{O}_0$ est dense dans E, on déduit que l'ouvert $\mathcal{B} \cap \mathcal{O}_0$ est non vide et on peut trouver une boule fermée $B_0 = \overline{B}(x_0, r_0)$ avec $r_0 \in]0, 1[$ telle que $B_0 \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{O}_0$. En utilisant ensuite le fait que l'ouvert $\mathcal{O}_1$ est dense dans E, on déduit que l'ouvert $\mathcal{O}_1 \cap B(x_0, r_0)$ est non vide et on peut trouver une boule fermée $B_1 = \overline{B}(x_1, r_1)$ avec $r_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ telle que $B_1 \subset \mathcal{O}_1 \cap B(x_0, r_0)$. En itérant ce procédé, on construit une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de boules fermées telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} B_n = \overline{B}(x_n, r_n) \text{ avec } r_n \in \left]0, \dfrac{1}{n+1}\right[\\ B_0 \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{O}_0,\ B_{n+1} \subset \mathcal{O}_n \cap B(x_n, r_n) \end{array}\right.$$

En effet, supposant construites les boules fermées B_k, pour k compris entre 0 et n avec $n \geq 0$, en utilisant la densité de l'ouvert $\mathcal{O}_{n+1}$ dans E, on déduit que l'ouvert $\mathcal{O}_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ est non vide et il existe une boule fermée $B_{n+1} = \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1})$ avec $r_{n+1} \in \left]0, \frac{1}{n+2}\right[$ telle que $B_{n+1} \subset \mathcal{O}_n \cap B(x_n, r_n)$. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite de boules fermées emboîtées dans E telle que $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$ et le théorème des boules emboîtées nous dit que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{y\}$. On a alors $y \in B_0 \subset \mathcal{B}$ et $y \in B_{n+1} \subset \mathcal{O}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $y \in \mathcal{O} \cap \mathcal{B}$ et cet ensemble est non vide. En conclusion, $\mathcal{O}$ est dense dans E. ■

Utilisant le fait qu'un ouvert $\mathcal{O}$ est dense dans E si, et seulement si, le fermé $E \setminus \mathcal{O}$ est d'intérieur vide et le fait que le complémentaire d'une intersection est la réunion des complémentaires, on a l'énoncé équivalent suivant du théorème de Baire.

Théorème 2.21. Baire

Soit (E, d) un espace métrique complet. Si $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide dans E, la réunion $\mathcal{F} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$ est alors d'intérieur vide dans E.

On peut encore énoncer le théorème de Baire de la façon suivante.

Théorème 2.22. Baire

Soit (E,d) un espace métrique complet. Si $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés dans E telle que $E = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$, alors l'un des fermés $\mathcal{F}_n$ est d'intérieur non vide.

Avec les notations et hypothèses précédentes, on peut en fait montrer que l'ouvert $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{\mathcal{F}_n}$ est dense dans E (exercice 2.8).

2.5 Limites réelles supérieure et inférieure

À toute suite réelle bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut associer les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement définies par $v_n = \sup_{p\geq n} u_p$ et $w_n = \inf_{p\geq n} u_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ces suites sont bien définies du fait que tous les ensemble $E_n = \{u_p,\ p \geq n\}$ sont bornés et on a $w_n = \inf(E_n) \leq v_n = \sup(E_n)$.

Lemme 2.3 *Avec les hypothèses et notations qui précèdent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante majorée.*

Démonstration La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on a en notant $m = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ m \leq u_p \leq M$$

c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, m est un minorant de E_n et M un majorant de E_n, ce qui entraîne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq w_n = \inf(E_n) \leq v_n = \sup(E_n) \leq M$$

Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc bornées. En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $E_{n+1} \subset E_n = \{u_n\} \cup E_{n+1}$, on déduit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_n = \inf(E_n) \leq w_{n+1} = \inf(E_{n+1}) \\ v_{n+1} = \sup(E_{n+1}) \leq v_n = \sup(E_n) \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. ■

Du lemme précédent, on déduit que les suites réelles $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, ce qui permet de définir les réels :

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n,\ \liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n$$

ces limites étant respectivement appelées la *limite supérieure* et la *limite inférieure* de la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On les note aussi $\overline{\lim_{n\to+\infty}}(u_n)$ et $\underline{\lim_{n\to+\infty}}(u_n)$. On a donc :

$$\ell_1 = \liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{p\geq n} u_p = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{p\geq n} u_p \right)$$

$$\ell_2 = \limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geq n} u_p = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{p\geq n} u_p \right)$$

Théorème 2.23.

Avec les hypothèses et notations qui précèdent, les réels ℓ_1 et ℓ_2 sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour toute valeur d'adhérence ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$. C'est-à-dire que $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ est plus grande valeur d'adhérence et $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ la plus petite valeur d'adhérence de la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration De $\ell_1 = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (w_n)$ avec $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \ell_1 - \varepsilon < w_n = \inf_{p\geq n} u_p \leq \ell_1$$

et par définition de la borne inférieure, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, il existe un entier $p \geq n$ tel que $w_n \leq u_p < w_n + \varepsilon \leq \ell_1 + \varepsilon$. On a donc montré que pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $p \geq n$ tel que $\ell_1 - \varepsilon < u_p < \ell_1 + \varepsilon$ (pour ε donné, on a soit $n \geq n_\varepsilon$ et on trouvé un tel entier $p \geq n$, soit $0 \leq n < n_\varepsilon$ et on prend alors p qui correspond à n_ε). On peut alors extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge vers ℓ_1 en procédant comme suit : prenant $\varepsilon = 1$ et $n = 0$, on a $p = \varphi(0) \geq 0$ tel que $\ell_1 - 1 < u_{\varphi(0)} < \ell_1 + 1$, puis pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $n = \varphi(0) + 1$ on a $p = \varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $\ell_1 - \frac{1}{2} < u_{\varphi(1)} < \ell_1 + \frac{1}{2}$ et continuant ainsi de suite on construit une suite strictement croissante d'entiers naturels $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\ell_1 - \frac{1}{n+1} < u_{\varphi(n)} < \ell_1 + \frac{1}{n+1}$ (les entiers $\varphi(0) < \cdots < \varphi(k)$ étant construit en prenant $\varepsilon = \frac{1}{k+2}$ et $n = \varphi(k) + 1$ on obtient $\varphi(k+1)$). On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell_1$.

On montre de manière analogue que ℓ_2 est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$ une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels (l'existence de valeurs d'adhérence d'une suite bornée est assurée par le théorème de Bolzano-Weierstrass). En passant à la limite dans l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{\varphi(n)} \leq u_{\varphi(n)} \leq v_{\varphi(n)}$$

on obtient l'encadrement $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$. ■

Dans le cas où la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, soit elle n'est pas majorée et $+\infty$ est valeur d'adhérence, soit elle n'est pas minorée et $-\infty$ est valeur d'adhérence. Donc une suite réelle a toujours des valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et on peut définir sa limite supérieure [resp. inférieure] dans $\overline{\mathbb{R}}$ comme la plus grand [resp. plus petite] de ses valeurs d'adhérence.

Théorème 2.24.

Une suite réelle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente si, et seulement si, on a* $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, sa limite ℓ est alors l'unique valeur d'adhérence et on a $\ell_1 = \ell_2$. Réciproquement si $\ell_1 = \ell_2$, toute valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant comprise entre ℓ_1 et ℓ_2, il ne peut y en avoir qu'une et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, elle est nécessairement convergente (théorème 2.17). ■

Théorème 2.25.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles bornées.*

1. *On a :*
$$\liminf_{n\to+\infty}(u_n) + \liminf_{n\to+\infty}(v_n) \leq \liminf_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$$
$$\limsup_{n\to+\infty}(u_n+v_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n + \limsup_{n\to+\infty} v_n$$
2. *Si* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *on a alors :*
$$\liminf_{n\to+\infty}(u_n) \leq \liminf_{n\to+\infty}(v_n) \ \ \textit{et}\ \ \limsup_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} v_n$$

Démonstration

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout entier $p \geq n$, on a $\inf\limits_{p\geq n} u_p + \inf\limits_{p\geq n} v_p \leq u_p + v_p$, donc $\inf\limits_{p\geq n} u_p + \inf\limits_{p\geq n} v_p \leq \inf\limits_{p\geq n}(u_p+v_p)$ et passant à la limite quand n tend vers l'infini, on en déduit que $\liminf\limits_{n\to+\infty}(u_n) + \liminf\limits_{n\to+\infty}(v_n) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$. De même en écrivant que $u_p + v_p \leq \sup\limits_{p\geq n} u_p + \sup\limits_{p\geq n} v_p$ pour tous $p \geq n$, on en déduit que $\sup\limits_{p\geq n}(u_p+v_p) \leq \sup\limits_{p\geq n} u_p + \sup\limits_{p\geq n} v_p$ pour tout n et passant à la limite, il en résulte que $\limsup\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n + \limsup\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2. Si $u_p \leq v_p$ pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a alors $\inf\limits_{p\geq n} u_p \leq \inf\limits_{p\geq n} v_p$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et passant à la limite, on en déduit que $\liminf\limits_{n\to+\infty}(u_n) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty}(v_n)$. De manière analogue, on vérifie que $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} v_n$. ■

En considérant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\liminf\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \liminf\limits_{n\to+\infty}(v_n) = -1$ (la plus petite valeur d'adhérence), donc :

$$\liminf_{n\to+\infty}(u_n) + \liminf_{n\to+\infty}(v_n) = -2 < \liminf_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = 0$$

2.6 Limites et continuité des fonctions

Pour ce paragraphe, $\mathbb{R}$ est muni de la distance définie par la valeur absolue, (E, d), (F, d') sont deux espaces métriques, D est une partie non vide de E non réduite à un point et f est une fonction de D dans F.

Définition 2.17. Soit α un point dans l'adhérence $\overline{D}$ de D. On dit que f admet une *limite* quand x tend vers α dans D, s'il existe $\ell \in F$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*},\ \exists \eta \in \mathbb{R}^{+,*}\ ;\ (x \in D \setminus \{\alpha\}\ ,\ d(x, \alpha) < \eta) \Rightarrow (d'(f(x), \ell) < \varepsilon)$$

Comme pour les suites, on peut vérifier en utilisant l'inégalité triangulaire que si la fonction f admet une limite en $\alpha \in \overline{D}$, cette dernière est alors unique et on peut noter $\ell = \lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ ou $f(x) \underset{x \to \alpha}{\to} \ell$.

Dans le cas où f est définie en α, on peut avoir $f(\alpha) \neq \lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$. Par exemple pour la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$.

Le théorème qui suit nous donne une caractérisation séquentielle de la notion de limite.

Théorème 2.26.

La fonction $f : D \to F$ admet une limite en $\alpha \in \overline{D}$ si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $D \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Démonstration Soit $f : D \to F$ admettant une limite $\ell \in F$ en $\alpha \in \overline{D}$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$ il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $d(x, \alpha) < \eta$ dans $D \setminus \{\alpha\}$ entraîne $d'(f(x), \ell) < \varepsilon$ et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $D \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α, il existe alors un entier n_0 tel que $0 < d(x_n, \alpha) < \eta$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique $d'(f(x_n), \ell) < \varepsilon$. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$. Réciproquement, on suppose que f transforme toute suite d'éléments de $D \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α en une suite convergente. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite de points de $D \setminus \{\alpha\}$ qui convergent vers α. Les suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ' dans F. On définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $D \setminus \{\alpha\}$ par $z_{2n} = x_{2n}$ et $z_{2n+1} = y_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α, donc $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a :

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} f(x_{2n}) = \lim_{n \to +\infty} f(z_{2n}) = \lim_{n \to +\infty} f(z_{2n+1}) = \lim_{n \to +\infty} f(y_{2n+1}) = \ell'$$

Donc toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $D \setminus \{\alpha\}$ convergente vers α est transformée en une suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un même élément ℓ de F. Si f n'admet pas ℓ pour limite en α, il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ on peut trouver $x_n \in D \setminus \{\alpha\}$ tel que $d(x_n, \alpha) < \dfrac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), \ell) \geq \varepsilon$. On a donc ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $D \setminus \{\alpha\}$ qui converge vers α pour laquelle la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ, ce qui est une contradiction d'après ce qui précède. ■

On peut remarquer que dans l'énoncé du théorème précédent, il n'est pas demandé *a priori* aux suites $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de converger vers un même élément, même si ce fait apparaît dans la démonstration. D'un point de vue pratique, le théorème précédent s'exprime aussi de façon plus classique en disant que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$ si, et seulement si, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\ell$ pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $D\setminus\{\alpha\}$ qui converge vers α.

Définition 2.18. On dit qu'une fonction $f : D \to F$ est *continue* en $\alpha \in D$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*},\ \exists \eta \in \mathbb{R}^{+,*} \ ;\ (x \in D,\ d(x,\alpha) < \eta) \Rightarrow (d'(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon)$$

Dans le cas où f est continue en tout point de D, on dit qu'elle est continue sur D.

Si α est isolé dans D, c'est-à-dire s'il existe $\delta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $B(\alpha,\delta)=\{\alpha\}$, toute fonction $f : D \to F$ est continue en α. En un point $\alpha \in D$ non isolé, la continuité de f en α se traduit par $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Exemples 2.5

1. *En prenant pour distance d sur E la distance discrète, toute fonction $f : E \to F$ est continue. Pour $\eta \in]0,1[$, la condition $d(x,\alpha) < \eta$ équivaut à $x=\alpha$, ce qui implique que $d'(f(x), f(\alpha)) = 0 < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$.*
2. *En utilisant l'inégalité triangulaire, on vérifie que pour tout $x_0 \in E$, la fonction $x \mapsto d(x,x_0)$ est continue de E dans $\mathbb{R}$. De même pour toute partie non vide A de E, la fonction $x \mapsto d(x,A)$ est continue de E dans $\mathbb{R}$.*

Du théorème 2.26, on déduit la caractérisation séquentielle suivante de la notion de continuité en un point.

Théorème 2.27.

La fonction $f : D \to F$ est continue en $\alpha \in D$ si, et seulement si, toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de D qui converge vers α est transformée par f en une suite convergente dans F.

Comme pour le théorème 2.26, les suites $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'énoncé du théorème précédent convergent nécessairement vers $f(\alpha)$ et ce dernier s'exprime en disant que f est continue en α si, et seulement si, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\alpha)$ pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de D qui converge vers α.

Exemple 2.5 *La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ définie par $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ sinon est discontinue (*i. e.* non continue) en tout point. En effet, un nombre rationnel r est limite de la suite d'irrationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(r + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$*

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) = 0 \neq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(r)$ *et un nombre irrationnel* $x \notin \mathbb{Q}$ *est limite d'une suite* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de nombre rationnels avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(r_n) \neq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

Une fonction continue ne transforme pas nécessairement une suite de Cauchy dans E en suite de Cauchy dans F. Par exemple $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$, la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et $\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = (n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy.

Théorème 2.28.

Soient (G, d'') *un espace métrique,* $f : D \to J \subset F$ *une fonction continue en* $\alpha \in D$ *et* $g : J \to G$ *une fonction continue en* $f(\alpha)$. *La composée* $g \circ f : D \to G$ *est continue en* α.

Démonstration Par continuité de la fonction g en $f(\alpha)$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $\eta' \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $d''(g(y), g(f(\alpha))) < \varepsilon$ pour tout $y \in J$ tel que $d'(y, f(\alpha)) < \eta'$ et il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $d'(f(x), f(\alpha)) < \eta'$ pour tout $x \in D$ tel que $d(x, \alpha) < \eta$, ce qui nous donne $d''(g(f(x)), g(f(\alpha))) < \varepsilon$ pour tout $x \in D$ tels que $d(x, \alpha) < \eta$. ■

Exemple 2.6 *Si* $f : D \to F$ *est continue en* $\alpha \in D$, *alors pour tout* $y \in F$, *la fonction* $x \mapsto d'(f(x), y)$ *est continue en* α.

Le théorème qui suit nous donne une caractérisation topologique de la notion de continuité sur D (voir aussi le paragraphe 2.10).

Théorème 2.29.

La fonction $f : D \to F$ *est continue sur* D *si, et seulement si, l'image réciproque par* f *de tout ouvert [resp. tout fermé] de* F *est un ouvert [resp. un fermé] de* D *(pour la topologie induite).*

Démonstration On rappelle qu'une partie $\mathcal{J}$ de D est ouverte [resp. est fermée] dans D si elle s'écrit $\mathcal{J} = D \cap \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert [resp. un fermé] de E. Soient $f : D \to F$ une fonction continue et $\mathcal{O}'$ un ouvert de F. Pour tout α dans $f^{-1}(\mathcal{O}')$, on a $f(\alpha) \in \mathcal{O}'$, donc il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B'(f(\alpha), \varepsilon)$ soit contenue dans $\mathcal{O}'$ et avec la continuité de f, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in B(\alpha, \eta) \cap D$ on ait $f(x) \in B'(f(\alpha), \varepsilon) \subset \mathcal{O}'$. On a donc $B(\alpha, \eta) \cap D \subset f^{-1}(\mathcal{O}')$ et en posant $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{\alpha \in f^{-1}(\mathcal{O}')} B(\alpha, \eta)$, on définit un ouvert de E tel que $f^{-1}(\mathcal{O}') = D \cap \mathcal{O}$, ce qui prouve que $f^{-1}(\mathcal{O}')$ est ouvert dans D. Réciproquement, supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de D. Pour $\alpha \in D$ et $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(B'(f(\alpha), \varepsilon))$ est un ouvert de D, il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que $B(\alpha, \eta) \cap D \subset f^{-1}(B'(f(\alpha), \varepsilon))$, ce qui signifie que $d'(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon$ pour tout $x \in B(\alpha, \eta) \cap D$. La fonction f est donc continue en tout point de D. Pour ce qui est de l'image réciproque des fermés, on utilise le fait qu'un fermé est le complémentaire d'un ouvert et l'image réciproque du complémentaire est le complémentaire de l'image réciproque. ■

Définition 2.19. Soit J une partie non vide de F. On dit que $f : D \to J$ est est un *homéomorphisme*, si elle est continue bijective d'inverse f^{-1} continue.

Définition 2.20. Deux distances d et d' sur E sont dites *topologiquement équivalentes* si l'identité $Id : x \mapsto x$ réalise un homéomorphisme de (E, d) sur (E, d').

La définition précédente revient aussi à dire que les distances d et d' définissent la même topologie sur E, ce qui signifie qu'une partie $\mathcal{O}$ de E est ouverte pour la distance d si, et seulement si, elle est ouverte pour d'.

Exemples 2.6

1. *Les distances $d : (x, y) \mapsto |y - x|$ et $d' : (x, y) \mapsto \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right|$ sont topologiquement équivalentes sur $\mathbb{R}^{+,*}$. Cela résulte du fait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur lui même égal à son inverse.*
2. *Les distances $d : (x, y) \mapsto |y - x|$ et $d' : (x, y) \mapsto |\arctan(y) - \arctan(x)|$ sont topologiquement équivalentes sur $\mathbb{R}$, alors que $(\mathbb{R}, d')$ n'est pas complet (exercice 2.5). La complétude n'est pas une notion topologique.*
3. *Deux distances équivalentes au sens de la définition 2.2 sont topologiquement équivalentes, mais la réciproque est fausse. Si d est une distance sur E l'application $d' : (x, y) \mapsto \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ définit une distance sur E topologiquement équivalente à d, mais non équivalente pour d non bornée (exercice 2.6).*

Définition 2.21. On dit que $f : D \to F$ est *uniformément continue* sur D si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*},\ \exists \eta \in \mathbb{R}^{+,*}\ ;\ \big((x, y) \in D^2,\ d(x, y) < \eta\big) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Une fonction uniformément continue sur D est évidemment continue en tout point de D, la nuance étant qu'un réel η associé à ε ne dépend que de f, D et ε.

La notion de continuité est une notion ponctuelle alors que celle de continuité uniforme est globale. On peut aussi remarquer que cette notion de continuité uniforme est une notion métrique alors que celle de continuité est topologique.

Exemples 2.7

1. *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Cela se déduit de :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$$

Cette inégalité est triviale pour $x = y$ et pour $y > x \geq 0$ (x, y jouent des rôles symétriques), on a $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|^2 = y - 2\sqrt{xy} + x > y - x$.

2. *Une fonction $f : D \to F$* lipschitzienne *(ce qui signifie qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que $d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y)$ pour tous x, y dans D) est uniformément continue sur D.*

3. *Pour tout $x_0 \in E$ et toute partie non vide A de E, les fonctions $x \mapsto d(x, x_0)$ et $x \mapsto d(x, A)$ sont uniformément continues de E dans $\mathbb{R}$ car 1-lipschitzienne.*

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut très bien être uniformément continue sur tout intervalle strictement contenu dans I sans être uniformément continue sur I tout entier. C'est le cas, par exemple, pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $I =]0,1]$. Elle est lipschitzienne sur tout $[a,1]$ où $0 < a < 1$ ($|f(y) - f(x)| = \dfrac{|y-x|}{xy} \leq \dfrac{|y-x|}{a^2}$), donc uniformément continue sur ces intervalles. Mais pour tout réel $\eta \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, $x = \eta$, $y = x + \dfrac{\eta}{2}$, on a $|y - x| < \eta$ avec $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{3\eta} > \dfrac{2}{3}$.

Le théorème qui suit nous donne une caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité.

Théorème 2.30.

Une fonction $f : D \to F$ est uniformément continue si, et seulement si, pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

Démonstration Soit $f : D \to F$ uniformément continue. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tous x, y dans D vérifiant $d(x,y) < \eta$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de D telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$, il existe alors un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, y_n) < \eta$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne que $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ et prouve que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d'(f(y_n), f(x_n)) = 0$. Réciproquement supposons que l'on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$ pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Si f n'est pas uniformément continue, il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ on peut trouver x_n, y_n dans D tel que $d(x_n, y_n) < \dfrac{1}{n}$ et $d' f(x_n), f(y_n) \geq \varepsilon$, ce qui nous donne deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$ et $(d'(f(x_n), f(y_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, ce qui n'est pas possible. ■

Ce résultat peut être utilisé pour montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue sur D. Par exemple pour tout réel $p > 1$, la fonction $f : x \mapsto x^p$ est continue non uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (exercice 2.10).

Une fonction uniformément continue $f : D \to F$ transforme une suite de Cauchy dans D en suite de Cauchy dans F. En effet, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tous x, y dans D tels que $d(x, y) < \eta$ et pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D, il existe entier n_η tel que $d(x_m, x_n) < \eta$ pour tous $m > n \geq n_\varepsilon$, ce qui implique que $d'(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$ et prouve que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F.

Théorème 2.31.

Soient J un sous-ensemble non vide de F et (G, d'') un espace métrique. La composée de deux fonctions uniformément continues $f : D \to J$ et $g : J \to G$ est uniformément continue.

Démonstration Pour tout réel $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe un réel $\eta' \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $d''(g(u), g(v)) < \varepsilon$ pour tous u, v dans J tels que $d'(u, v) < \eta'$ et il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $d'(f(x), f(y)) < \eta'$ pour tous x, y dans D tels que $d(x, y) < \eta$, ce qui nous donne $d''(g(f(x)), g(f(y))) < \varepsilon$ pour tous x, y dans D tels que $d(x, y) < \eta$.
■

Théorème 2.32.

Si D est dense dans E et F est complet, alors toute fonction uniformément continue de D dans F se prolonge de manière unique en une fonction uniformément continue de E dans F.

Démonstration Soient D une partie dense de E et $f : D \to F$ une fonction uniformément continue. Pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D telle que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Cette suite est en particulier de Cauchy et il en est de même pour la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ car f est uniformément continue, donc pour F complet cette dernière suite converge vers un élément y de F. Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite de D qui converge vers x, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$, donc $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (qui est convergente) converge vers la même limite que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. On peut donc définir la fonction $g : E \to F$ par $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D qui converge vers x. Pour $x \in D$, prenant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à x, on $g(x) = f(x)$, donc g prolonge bien f. Montrons que cette fonction g est uniformément continue. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tous x, y dans D tels que $d(x, y) < \eta$. Pour x, y dans E et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D qui convergent respectivement vers x et y, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d'(g(x), g(y)) \leq d'(g(x), f(x_n)) + d'(f(x_n), f(y_n)) + d'(f(y_n), g(y))$$

Vu que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ et $g(y) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$, il existe un entier n_0 tel que $d(x_n, x) < \frac{\eta}{3}$, $d(y_n, y) < \frac{\eta}{3}$, $d'(g(x), f(x_n)) < \varepsilon$ et

$d'(f(y_n), g(y)) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique que :

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) < 2\frac{\eta}{3} + d(x, y) < \eta$$

en prenant x, y tels que $d(x, y) < \frac{\eta}{3}$ et nous donne au final $d'(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$. La fonction g est donc uniformément continue sur E. L'unicité de ce prolongement est due au fait que si h est une autre fonction avec les mêmes propriétés que g, on a alors $h(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = g(x)$ (avec des hypothèses claires) pour tout $x \in E$. ■

Dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, on a les notions particulières de limite à gauche, à droite et à l'infini, ainsi que celles de continuité à gauche et à droite, dont l'étude est faite au chapitre 6.

2.7 Continuité et compacité

Une fonction continue n'est pas nécessairement uniformément continue comme le montrent les exemples des fonctions $x \mapsto x^p$ sur $\mathbb{R}$ pour tout réel $p > 1$, mais pour les fonctions définies sur un compact, on a le résultat suivant.

Théorème 2.33. Heine

Si K est un compact de E, alors toute fonction continue $f : K \to F$ est uniformément continue sur K.

Démonstration Si $f : K \to F$ n'est pas uniformément continue, il existe alors $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans K tels que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble K étant compact, on peut extraire deux suites $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui convergent respectivement vers x et y dans K. Mais avec $d(x_n, y_n) < \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$, on déduit que $d(x, y) = \lim\limits_{n \to +\infty} d\left(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}\right) = 0$, soit $x = y$, puis avec la continuité de f on a $\lim\limits_{n \to +\infty} d'\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right), f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right) = 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que $d'\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right), f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Théorème 2.34.

L'image d'un compact par une application continue est un compact, ce qui signifie que si K est un compact de E et $f : K \to F$ une fonction continue, alors $f(K)$ est un compact de (F, d').

Démonstration Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $f(K)$ avec $y_n = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le compact K on peut extraire une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément x de K et avec la continuité de f on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_{\varphi(n)} = \lim\limits_{n \to +\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(x) \in f(K)$, donc $f(K)$ est compact. ■

Un compact étant borné, on déduit du théorème précédent qu'une fonction continue d'un compact K de E dans F est bornée.

Théorème 2.35.

Soient K un compact de E et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Cette fonction est bornée et atteint ses bornes, ce qui signifie qu'il existe α, β dans K tels que $f(\alpha) = \inf_{x \in K} f(x)$ et $f(\beta) = \sup_{x \in K} f(x)$.

Démonstration $f(K)$ étant compact est en particulier borné dans $\mathbb{R}$ et étant non vide, il admet une borne inférieure $m = \inf_{x \in K} f(x)$ et une borne supérieure $M = \sup_{x \in K} f(x)$. Par définition de la borne inférieure m, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on peut trouver x_n dans K tel que $m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n}$ et de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie dans le compact K on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha \in K$. On a donc $m \leq f\left(x_{\varphi(n)}\right) < m + \frac{1}{\varphi(n)}$ avec $\lim_{n \to +\infty} \varphi(n) = +\infty$, ce qui nous donne avec la continuité de f, $f(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = m$. On procède de manière analogue pour la borne supérieure. ■

Pour toute partie non vide D de E, on note $\mathcal{C}^0(D, F)$ l'ensemble des fonctions continues de D dans F.

Définition 2.22. Soient D une partie non vide de E et A une partie non vide de $\mathcal{C}^0(D, F)$. On dit que :

- A est *équicontinue* en $\alpha \in K$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ (dépendant de ε et de α) tel que :

$$(x \in D \text{ et } d(x, \alpha) < \eta) \Rightarrow (\forall f \in A,\ d'(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon)$$

- A est équicontinue sur D, si elle équicontinue en tout point de D ;
- A est *uniformément équicontinue* sur D si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ (dépendant de ε) tel que :

$$\left((x, y) \in D^2 \text{ et } d(x, y) < \eta\right) \Rightarrow (\forall f \in A,\ d'(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

Exemples 2.8

1. *Une famille finie d'éléments de $\mathcal{C}^0(D, F)$ est équicontinue.*
2. *Pour tout réel $\lambda > 0$, l'ensemble des fonctions λ-lipschitzienne de D dans F est uniformément équicontinue.*

Théorème 2.36.

Pour K compact de E, une partie non vide A de $\mathcal{C}^0(K, F)$ est équicontinue si, et seulement si, elle est uniformément équicontinue.

Démonstration Que K soit compact ou pas, il est clair qu'une partie de $\mathcal{C}^0(K, F)$ uniformément équicontinue est équicontinue. Si $A \subset \mathcal{C}^0(K, F)$ est équicontinue, alors pour tout $x \in K$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta_{x,\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $y \in B(x, \eta_{x,\varepsilon}) \cap K$ et tout $f \in A$, on a $d'(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon$. Du recouvrement ouvert $K \subset \bigcup_{x \in K} B\left(x, \frac{\eta_{x,\varepsilon}}{2}\right)$ du compact K, on peut extraire un sous-recouvrement fini $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} B\left(x_k, \frac{\eta_{x_k,\varepsilon}}{2}\right)$. On note $\eta = \min_{1 \leq k \leq n} \frac{\eta_{x_k,\varepsilon}}{2}$ et on se donne x, y dans K tels que $d(x, y) < \eta$ et $f \in A$. En désignant par k un entier compris entre 1 et n tel que $x \in B\left(x_k, \frac{\eta_{x_k,\varepsilon}}{2}\right) \cap K$, on a $d'(f(x), f(x_k)) < \varepsilon$ et :

$$d(y, x_k) \leq d(y, x) + d(x, x_k) < \eta + \frac{\eta_{x_k,\varepsilon}}{2} \leq \eta_{x_k,\varepsilon}$$

soit $y \in B(x_k, \eta_{x_k,\varepsilon})$ et $d'(f(y), f(x_k)) < \varepsilon$, ce qui nous donne :

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_k)) + d'(f(x_k), f(y)) < 2\varepsilon$$

et prouve que A est uniformément équicontinue. ■

Pour la suite de ce paragraphe, on se donne un compact K de E.

Pour toutes fonctions f, g dans $\mathcal{C}^0(K, F)$, la fonction $\varphi : x \mapsto d'(f(x), g(x))$ est continue sur le compact K. En effet, pour tout $\alpha \in K$ et tout $x \in K$, on a :

$$\begin{aligned}
&|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \\
&\leq |d'(f(x), g(x)) - d'(f(x), g(\alpha))| + |d'(f(x), g(\alpha)) - d'(f(\alpha), g(\alpha))| \\
&\leq d'(g(x), g(\alpha)) + d'(f(x), f(\alpha))
\end{aligned}$$

et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que pour tout $x \in E$ tel que $d(x, \alpha) < \eta$ on a :

$$d'(f(x), f(\alpha)) < \varepsilon \text{ et } d'(g(x), g(\alpha)) < \varepsilon$$

ce qui implique que $|d'(f(x), g(x)) - d'(f(\alpha), g(\alpha))| < 2\varepsilon$ pour tout $x \in E$ tel que $d(x, \alpha) < \eta$, soit la continuité de φ en α. La fonction φ est donc majorée sur le compact K et atteint sa borne supérieure, ce qui permet de définir :

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in K} d'(f(x), g(x))$$

Théorème 2.37.

L'application d_∞ est une distance sur $\mathcal{C}^0(K, F)$ et pour F complet, l'espace métrique $\left(\mathcal{C}^0(K, F), d_\infty\right)$ est complet.

Démonstration Du fait que d' est une distance sur F, on déduit facilement que d_∞ est une distance sur $\mathcal{C}^0(K,F)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\left(\mathcal{C}^0(K,F), d_\infty\right)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon, \forall x \in K,\ d'(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon \tag{2.3}$$

donc pour tout $x \in K$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F et en conséquence convergente vers un élément $f(x)$ de F, dans le cas où cet espace est complet. Faisant tendre m vers l'infini dans (2.3), on déduit que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in K,\ d'(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon \tag{2.4}$$

(continuité de $z \in F \mapsto d'(z, f_n(x))$ à x et n fixés). Pour tout $\alpha \in K$ et tout $x \in K$, on a :

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(\alpha)) &\leq d'(f(x), f_{n_\varepsilon}(x)) + d'(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(\alpha)) + d'(f_{n_\varepsilon}(\alpha), f(\alpha)) \\ &\leq 2\varepsilon + d'(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(\alpha)) \end{aligned}$$

et pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$, il existe $\eta \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $d'(f_{n_\varepsilon}(x), f_{n_\varepsilon}(\alpha)) < \varepsilon$ pour tout $x \in E$ tel que $d(x,\alpha) < \eta$ (continuité en α de f_{n_ε}), ce qui implique que $d'(f(x), f(\alpha)) < 3\varepsilon$ pour tout $x \in E$ tel que $d(x,\alpha) < \eta$, soit la continuité de f en α. La fonction f est donc dans $\mathcal{C}^0(K,F)$ et les inégalités (2.4) se traduisent par $d_\infty(f, f_n) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui signifie que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{C}^0(K,F)$. En conclusion, $\left(\mathcal{C}^0(K,F), d_\infty\right)$ est complet. ■

Une suite d'éléments de $\mathcal{C}^0(K,F)$ convergente pour d_∞ est dite *uniformément convergente*. Voir le paragraphe 5.1 pour une étude détaillée des suites de fonctions sur un espace normé.

Théorème 2.38.

Soient A une partie non vide de $\mathcal{C}^0(K,F)$ équicontinue et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. Cette suite converge dans $\left(\mathcal{C}^0(K,F), d_\infty\right)$ si, et seulement si, pour tout $x \in K$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F (la convergence uniforme est équivalente à la convergence simple).

Démonstration Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{C}^0(K,F)$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$ et avec $d'(f_n(x), f(x)) \leq d_\infty(f_n, f)$ pour tout $x \in K$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ dans F pour tout $x \in K$. Réciproquement, on suppose que pour tout $x \in K$, il existe un élément $f(x)$ de F' (unique) tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Comme les fonctions f_n sont toutes dans A qui est équicontinue, donc uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tous x, y dans K tels que $d(x,y) < \eta$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d'(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$, ce qui implique que :

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(y)) &\leq d'(f(x), f_n(x)) + d'(f_n(x), f_n(y)) + d'(f_n(y), f(y)) \\ &< d'(f(x), f_n(x)) + \varepsilon + d'(f_n(y), f(y)) \end{aligned}$$

et faisant tendre n vers l'infini, il en résulte que $d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ pour tous x, y dans K tels que $d(x,y) < \eta$, ce qui signifie que f est uniformément continue, donc dans $\mathcal{C}^0(K,F)$. Comme K est compact, il est précompact (lemme 2.1) et peut donc être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon η, ce qui signifie qu'il existe $x_1,\cdots,x_r$ dans K tels que $K\subset\bigcup_{k=1}^{r}B(x_k,\eta)$, donc pour tout $x\in K$ et $k\in\{1,\cdots,r\}$ tel que $x\in B(x_k,\eta)$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d'(f_n(x),f(x)) &\leq d'(f_n(x),f_n(x_k))+d'(f_n(x_k),f(x_k))+d'(f(x_k),f(x)) \\ &\leq 2\varepsilon+d'(f_n(x_k),f(x_k))\leq 2\varepsilon+\sum_{j=1}^{r}d'(f_n(x_j),f(x_j)) \end{aligned}$$

ce qui implique que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $d_\infty(f_n,f)\leq 2\varepsilon+\sum_{j=1}^{r}d'(f_n(x_j),f(x_j))$ avec $\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{r}d'(f_n(x_j),f(x_j))=0$, ce qui nous assure de l'existence d'un entier n_ε tel que $d_\infty(f_n,f)\leq 3\varepsilon$ pour tout $n\geq n_\varepsilon$ et signifie que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{C}^0(K,F)$. ■

Théorème 2.39. Ascoli

Soit A une partie non vide de $\mathcal{C}^0(K,F)$. Pour F complet, A est relativement compacte dans $(\mathcal{C}^0(K,F),d_\infty)$ si, et seulement si, elle est équicontinue et pour tout $x\in K$ l'ensemble $A(x)=\{f(x),\ f\in A\}$ est relativement compact dans F.

Démonstration On suppose que A est relativement compacte dans l'espace métrique complet $(\mathcal{C}^0(K,F),d_\infty)$, donc précompacte (corollaire 2.2), ce qui signifie que pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe des fonctions $f_1,\cdots,f_n$ dans $\mathcal{C}^0(K,F)$ tels que $A\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(f_k,\varepsilon)$, donc pour toute fonction $f\in A$ il existe un entier k compris entre 1 et n tel que $d_\infty(f,f_k)<\varepsilon$, ce qui implique que pour tout $x\in K$, on a $d'(f(x),f_k(x))<\varepsilon$, soit $f(x)\in B(f_k(x),\varepsilon)$. On a donc $A(x)\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(f_k(x),\varepsilon)$ pour tout $x\in K$, ce qui signifie que $A(x)$ est précompact dans F ($\varepsilon>0$ est quelconque) et en conséquence relativement compact puisque F est complet (corollaire 2.2). D'autre part, chaque fonction f_k qui est continue sur le compact K est uniformément continue, donc il existe un réel $\eta_k>0$ tel que $d'(f_k(x),f_k(y))<\varepsilon$ pour tous x,y dans K tels que $d(x,y)<\eta_k$. En posant $\eta=\min_{1\leq k\leq n}\eta_k$, pour toute fonction $f\in A$ et k entier compris entre 1 et n tel que $d_\infty(f,f_k)<\varepsilon$, on a pour tous x,y dans K tels que $d(x,y)<\eta$:

$$d'(f(x),f(y))\leq d'(f(x),f_k(x))+d'(f_k(x),f_k(y))+d'(f_k(y),f(y))<3\varepsilon$$

ce qui nous dit que A est équicontinue. Réciproquement, on suppose que A est équicontinue et que chaque $A(x)$ est relativement compact. Il s'agit alors de montrer que toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans

$\mathcal{C}^0(K,F)$ (théorème 2.15). Le compact K étant séparable (théorème 2.16), on se donne une partie dénombrable $D=\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}\subset K$ dense dans K. L'ensemble $A(x_0)=\{f(x_0),\ f\in A\}$ étant relativement compact dans F, on peut extraire de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}=(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(y_{\varphi_0(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(f_{\varphi_0(n)}(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un élément $f(x_0)\in F$. De la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(f_{\varphi_0(n)}(x_1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'ensemble relativement compact $A(x_1)$, on peut extraire une sous-suite $\left(z_{\varphi_1(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(f_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)}(x_1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un élément $f(x_1)\in F$, la suite $\left(f_{\varphi_0\circ\varphi_1(n)}(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $\left(f_{\varphi_0(n)}(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente vers $f(x_0)$. Par récurrence, on peut donc définir une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall m\in\mathbb{N},\ \forall k\in\{0,\cdots,m\},\ \lim_{n\to+\infty}f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_m(n)}(x_k)=f(x_k)$$

La fonction $\varphi:n\in\mathbb{N}\mapsto\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(n)\in\mathbb{N}$ est alors strictement croissante. En effet pour toute fonction strictement croissante $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, on a $\sigma(k)\geq k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, ce qui nous donne pour $n<m$ dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\varphi(n)&<\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(m)\leq\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_{n+1}(m)\\&\leq\cdots\leq\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_m(m)=\varphi(m)\end{aligned}$$

(les φ_k étant strictement croissantes, il en est de même de $\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n$). Pour tout $m\in\mathbb{N}$, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}f_{\varphi(n)}(x_m)=\lim_{n\to+\infty}f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(n)}(x_m)=f(x_m)$$

puisque la suite $\left(f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(n)}(x_m)\right)_{n\geq m}$ est extraite de $\left(f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_m(n)}(x_m)\right)_{n\geq m}$. On vérifie alors que la fonction f ainsi définie sur D est uniformément continue. L'ensemble A qui est équicontinue sur le compact K est uniformément équicontinue, donc pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $\eta>0$ tel que $d'(g(x),g(y))<\varepsilon$ pour tous x,y dans K tels que $d(x,y)<\eta$ et tout $g\in A$, ce qui implique que pour tous les entiers p,q tel que $d(x_p,x_q)<\eta$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&d'(f(x_p),f(x_q))\\&\leq d'\left(f(x_p),f_{\varphi(n)}(x_p)\right)+d'\left(f_{\varphi(n)}(x_p),f_{\varphi(n)}(x_q)\right)+d'\left(f_{\varphi(n)}(x_q),f(x_q)\right)\\&\leq d'\left(f(x_p),f_{\varphi(n)}(x_p)\right)+\varepsilon+d'\left(f_{\varphi(n)}(x_q),f(x_q)\right)\end{aligned}$$

ce qui nous donne en faisant tendre n vers l'infini, $d'(f(x_p),f(x_q))\leq\varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur D qui est dense dans K, ce qui permet de la prolonger en une fonction f uniformément continue sur K (théorème 2.32). Il reste enfin à vérifier que la suite $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{C}^0(K,F)$. L'ensemble $A\cup\{f\}$ étant équicontinu, il nous suffit de montrer que pour tout $x\in K$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}f_{\varphi(n)}(x)=f(x)$. Par équicontinuité de $A\cup\{f\}$, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $\eta>0$ tel que $d'(g(x),g(y))<\varepsilon$ pour tous x,y dans K tels que $d(x,y)<\eta$ et tout $g\in A\cup\{f\}$, donc pour $x\in K$ et $m\in\mathbb{N}$ tel que $d(x,x_m)<\eta$ (densité de D dans K), on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&d'\left(f_{\varphi(n)}(x),f(x)\right)\\&\leq d'\left(f_{\varphi(n)}(x),f_{\varphi(n)}(x_m)\right)+d'\left(f_{\varphi(n)}(x_m),f(x_m)\right)+d'(f(x_m),f(x))\\&\leq 2\varepsilon+d'\left(f_{\varphi(n)}(x_m),f(x_m)\right)\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} d'\left(f_{\varphi(n)}(x_m), f(x_m)\right) = d'(f(x_m), f(x_m)) = 0$, ce qui nous assure l'existence de $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $d'\left(f_{\varphi(n)}(x), f(x)\right) \leq 3\varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et permet de conclure. ■

2.8 Un théorème de point fixe

Pour ce paragraphe, (E, d) est un espace métrique complet, F un fermé non vide dans E et f une application de F dans E. Dans le cas où $f(F) \subset F$, on dit que F est stable par f.

Définition 2.23. On dit que f est *strictement contractante* s'il existe une constante $\lambda \in [0, 1[$ telle que :

$$\forall (x, y) \in F^2,\ d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

Une fonction contractante $f : F \to E$ est en particulier lipschitzienne, donc uniformément continue.

Pour $\lambda = 0$, la fonction f est constante.

Dans le cas où F est stable par f, on peut définir pour tout $x \in F$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on dit que cette suite est l'*orbite* dans F de x suivant f. Elle est aussi définie par $x_n = f^n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ est la n-ième itérée de f (en convenant que $f^0 = Id$).

Lemme 2.4 *Si une orbite suivant $f : F \to F$ converge, sa limite α est alors dans F et si de plus la fonction f est continue sur F, on a alors $f(\alpha) = \alpha$.*

Démonstration Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$, on a alors $\alpha \in F$ puisque cet ensemble est fermé et pour f continue sur F, on a $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\alpha)$. ■

Définition 2.24. On dit que $\alpha \in F$ est un *point fixe* de f, si $f(\alpha) = \alpha$.

La seule hypothèse de continuité de f n'assure pas la convergence d'une orbite. Par exemple pour $f(x) = -x$ sur $[-1, 1]$ on a $x_n = (-1)^n x_0$ pour tout n et cette suite est divergente pour $x_0 \neq 0$.

La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ fournit un exemple de fonction discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ (l'un des exemples 2.5) pour laquelle toute orbite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe de f, à savoir 1. En effet pour $x_0 \in \mathbb{Q}$, on a $x_n = 1$ pour tout $n \geq 1$ et pour $x_0 \notin \mathbb{Q}$ on a $x_1 = 0$ et $x_n = 1$ pour tout $n \geq 2$, donc dans tous les cas $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Théorème 2.40. Picard

Si $f : F \to F$ est une application λ-contractante avec $\lambda \in [0,1[$, elle admet alors un unique point fixe α dans F et ce point fixe est la limite de toute orbite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant f. Une majoration de l'erreur d'approximation de α par les x_n est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(\alpha, x_n) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0)$$

(la convergence est géométrique*).*

Démonstration Pour l'existence d'un point fixe, on vérifie qu'une orbite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace métrique complet (E,d). Pour $q > p \geq 0$ entiers, on a en utilisant l'inégalité polygonale :

$$d(x_q, x_p) \leq d(x_q, x_{q-1}) + \cdots + d(x_{p+1}, x_p)$$

avec pour tout $k \geq 1$:

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq \lambda d(x_k, x_{k-1}) \leq \cdots \leq \lambda^k d(x_1, x_0)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} d(x_q, x_p) &\leq \left(\sum_{k=p}^{q-1} \lambda^k\right) d(x_1, x_0) = \frac{\lambda^p (1-\lambda^{q-p})}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\lambda^p}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \underset{p\to+\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

puisque $\lambda \in [0,1[$. On a donc ainsi montré que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E,d) et en conséquence, elle converge vers un élément $\alpha \in F$ puisque E est complet et F fermé dans E. Avec la continuité de f, on déduit que $f(\alpha) = \alpha$, c'est-à-dire que α est un point fixe de f. Faisant tendre q vers l'infini dans la majoration précédente (pour p fixé) on obtient la majoration $d(\alpha, x_p) \leq \dfrac{\lambda^p}{1-\lambda} d(x_1, x_0)$. Si $\beta \in F$ est un autre point fixe, on a alors $d(\alpha, \beta) = d(f(\alpha), f(\beta)) \leq \lambda d(\alpha, \beta)$ et nécessairement $\alpha = \beta$ puisque $\lambda \in [0,1[$. ∎

Si (E,d) est un espace métrique complet et F une partie fermée de E, une application $f : F \to F$ telle que $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ pour tous $x \neq y$ dans F n'a pas nécessairement de point fixe dans F comme le montre l'exemple de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}^+$ ou $f : x \mapsto x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$ sur $\mathbb{R}^+$. Mais dans le cas où F est compact on a le résultat suivant.

Théorème 2.41.

Soit K un compact dans un espace métrique (E, d) (non nécessairement complet) et $f : K \to K$ telle que :

$$\forall (x, y) \in K^2, \ (x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y))$$

La fonction f admet un unique point fixe dans K et ce point fixe est limite de toute orbite suivant f.

Démonstration La fonction f qui est lipschitzienne est en particulier continue. L'application $x \mapsto d(f(x), x)$ étant continue sur le compact K et à valeurs réelles, il existe $\alpha \in K$ tel que $d(f(\alpha), \alpha) = \inf_{x \in K} d(f(x), x)$ (théorème 2.35). Si $f(\alpha) \neq \alpha$, on a alors $d(f(\alpha), f(f(\alpha))) < d(\alpha, f(\alpha))$ avec $f(\alpha) \in K$, ce qui est contradictoire avec le caractère minimal de α. On a donc $f(\alpha) = \alpha$. Si $\beta \neq \alpha$ est un autre point fixe de f, on a alors $d(\alpha, \beta) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta)$, ce qui est impossible. En conclusion, f admet un unique point fixe dans K. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une orbite associée à f. Si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} = \alpha$, la suite est alors stationnaire sur α, donc convergente vers α. On suppose donc que $x_n \neq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on a $0 < d(x_{n+1}, \alpha) = d(f(x_n), f(\alpha)) < d(x_n, \alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que la suite réelle $(d(x_n, \alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante minorée par 0, donc convergente vers un réel $d \geq 0$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant dans le compact K, on peut en extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\beta \in K$ et on a :

$$d(f(\beta), \alpha) = \lim_{n \to +\infty} d\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right), \alpha\right) = \lim_{n \to +\infty} d\left(x_{\varphi(n)+1}, \alpha\right) = d$$

et $\beta \neq \alpha$ entraîne $d = d(\alpha, f(\beta)) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta) = d$, soit une impossibilité. On a donc $\beta = \alpha$ et $d = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha$. ∎

Il peut arriver que la fonction $f : F \to F$ ne soit pas strictement contractante, mais que l'une de ces itérées $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$ avec $p \geq 2$ le soit. Dans ce cas on a encore existence et unicité du point fixe de f comme limite de toute orbite.

Théorème 2.42.

Si $f : F \to F$ est telle que l'une de ses itérées f^p pour $p \in \mathbb{N}^*$ soit strictement contractante, elle admet alors un unique point fixe dans F limite de toute orbite.

Démonstration L'application f^p qui est aussi strictement contractante sur le fermé F dans l'espace métrique complet E admet un unique point fixe $\alpha \in F$. De $f^p(\alpha) = \alpha$ on déduit que $f^p(f(\alpha)) = f(f^p(\alpha)) = f(\alpha)$ et $f(\alpha)$ est aussi point fixe de f^p. On a donc $f(\alpha) = \alpha$ du fait de l'unicité du point fixe de f^p. L'application f admet donc un point fixe dans F. En considérant que tout point fixe de f est aussi point fixe de f^p, on déduit que ce point fixe est unique dans F. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $x_0 \in E$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$x_{np+r} = f^{np+r}(x_0) = (f^p)^n (f^r(x_0))$ pour tout $r \in \{0, \cdots, p-1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $(x_{np+r})_{j\in\mathbb{N}}$ est une orbite suivant f^p de valeur initiale $f^r(x_0)$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} x_{np+r} = \alpha$ pour tout $r \in \{0, \cdots, p-1\}$ ce qui équivaut à dire que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha$ (exercice 2.7). ■

2.9 Continuité et connexité

Définition 2.25. Un sous-ensemble non vide $\mathcal{C}$ de E est *connexe* si la condition $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ouverts de E tels que $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ entraîne $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$ (et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_2$) ou $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ (et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_1$), c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ ne peut s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts de $\mathcal{C}$.

Le résultat qui suit ainsi que son corollaire sont souvent utiles pour montrer qu'un ensemble est connexe.

Théorème 2.43.

Si f est une fonction continue de E dans F, alors pour tout connexe $\mathcal{C}$ de E, l'image $f(\mathcal{C})$ est connexe dans F.

Démonstration Soient $\mathcal{C}$ une partie connexe de E et $\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$. Supposons qu'il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ de F tels que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{C}' \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. On a alors :

$$\mathcal{C} \subset f^{-1}(\mathcal{C}') \subset f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cup f^{-1}(\mathcal{O}_2)$$

avec $f^{-1}(\mathcal{O}_1), f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ ouverts dans E et $\mathcal{C} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$, ce qui entraîne que $\mathcal{C} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_1) = \emptyset$ ou $\mathcal{C} \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2) = \emptyset$ et donc que $\mathcal{C}' \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{C}' \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. L'ensemble $\mathcal{C}'$ est donc connexe dans F. ■

Corollaire 2.4. *Une partie $\mathcal{C}$ de (E, d) est connexe si, et seulement si, toute application continue de $\mathcal{C}$ dans $\{0, 1\}$ est constante.*

Démonstration Soient $\mathcal{C}$ connexe dans E et $f : \mathcal{C} \to \{0, 1\}$ continue. L'ensemble $f(\mathcal{C})$ est connexe non vide dans $\mathbb{R}$ contenu dans $\{0, 1\}$ et c'est nécessairement $\{0\}$ ou $\{1\}$ puisque $\{0, 1\}$ n'est pas connexe (en effet $\{0, 1\} \subset \left]-1, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$) ce qui signifie que f est constante. Réciproquement si $\mathcal{C}$ n'est pas connexe il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ de E tels que $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$, $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$. La fonction caractéristique de $\mathcal{O}_1$, définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathcal{O}_1$ et $f(x) = 0$ sinon est alors continue de E dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ (si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_1$ si $1 \in \mathcal{O}$ et $f^{-1}(\mathcal{O}) = \emptyset$ ou $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_2$ sinon) et non constante sur $\mathcal{C}$ (pour $x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$ on a $f(x) = 1$ et pour $x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ on a $f(x) = 0$). ■

Corollaire 2.5. *Si $\mathcal{C}$ est une partie connexe de E, son adhérence $\overline{\mathcal{C}}$ est alors connexe.*

Démonstration Si f est une application continue de $\overline{\mathcal{C}}$ dans $\{0,1\}$, sa restriction au connexe $\mathcal{C}$ est alors constante (puisque également continue) et par densité la fonction f est également constante sur $\overline{\mathcal{C}}$. ■

Théorème 2.44.

Une réunion de connexes de E d'intersection non vide est connexe.

Démonstration Soit $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de E et $\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{C}_i$. Si $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est une application continue à valeurs dans $\{0,1\}$, alors pour tout $i \in I$ la restriction de f à $\mathcal{C}_i$ qui est également continue est constante égale à γ_i puisque $\mathcal{C}_i$ est connexe. Pour $x \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i$ (cette intersection est supposée non vide), on a $f(x) = \gamma_i$ pour tout $i \in I$, les γ_i sont donc tous égaux et f est constante sur $\mathcal{C}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est donc connexe. ■

Définition 2.26. On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ de E est *connexe par arcs*, si pour tout couple (a,b) d'éléments de $\mathcal{C}$ il existe une application continue γ de $[0,1]$ dans $\mathcal{A}$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$ (deux points quelconques de $\mathcal{A}$ peuvent être joints par un arc continu dans $\mathcal{A}$).

Théorème 2.45.

Un ensemble connexe par arcs dans E est connexe.

Démonstration Si $\mathcal{C}$ est connexe par arcs dans E, pour $a \in \mathcal{C}$ fixé en désignant pour tout $x \in \mathcal{C}$ par γ_x un arc continu joignant les points a et x dans $\mathcal{C}$, on a alors $\mathcal{C} = \bigcup_{x\in\mathcal{A}} \gamma_x([0,1])$, avec $\gamma_x([0,1])$ connexe pour tout $x \in \mathcal{A}$, comme image du connexe $[0,1]$ par l'application continue γ_x, ce qui implique que $\mathcal{C}$ est connexe comme réunion de connexes ayant tous en commun le point $a = \gamma_x(0)$. ■

Contrairement à ce qu'il se passe pour l'adhérence, l'intérieur d'un connexe n'est pas nécessairement connexe. Par exemple, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$ est connexe (il est connexe par arcs, donc connexe et son intérieur $\overset{\circ}{\mathcal{C}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\}$ est non connexe.

2.10 Espaces topologiques

[1]Une structure topologique sur E est définie par la donnée d'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de E tel que :

- $\emptyset$ et E sont dans $\mathcal{T}$;
- si $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont dans $\mathcal{T}$, leur intersection $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ est alors dans $\mathcal{T}$;
- si $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est une familles d'éléments de $\mathcal{T}$, leur réunion $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{O}_i$ est alors dans $\mathcal{T}$.

Le deuxième axiome équivaut à dire qu'une intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés *ouverts* de E et l'ensemble E muni de cette structure topologique est appelé *espace topologique*. Un tel espace topologique est noté $(E, \mathcal{T})$. Pour $\mathcal{T}$ fixé, on notera simplement E un tel espace.

Exemples 2.9

1. *La famille* $\{\emptyset, E\}$ *définit la* topologie grossière *sur* E *et est sans grand intérêt.*
2. *La famille* $\mathcal{P}(E)$ *de toutes les parties de* E *définit la* topologie discrète *sur* E.
3. *Si* (E, d) *est un espace métrique, la famille de tous les ouverts de* E *pour cette distance* d *définit alors une structure topologique sur* E *dite associée à la structure métrique. La topologie associée à la distance discrète* ($d(x, x) = 0$ *et* $d(x, y) = 1$ *pour* $x \neq y$) *est la topologie discrète.*
4. *Si* D *est une partie non vide de* E, *la famille* $\mathcal{T}_D = \{D \cap \mathcal{O},\ \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$ *des traces sur* D *des ouverts de* E *définit une topologie sur* D *dite* topologie induite.

Pour la suite de ce paragraphe, E est un espace topologique, $\mathcal{T}$ désignant la famille des ouverts correspondants.

Définition 2.27. On appelle *voisinage* d'un point a de E toute partie $\mathcal{V}$ de E qui contient un ouvert qui contient a.

On vérifie facilement qu'une partie de E est ouverte si, et seulement si, elle est voisinage de chacun de ses points.

Définition 2.28. On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de E est un *fermé* si son complémentaire $E \setminus \mathcal{F}$ est un ouvert.

La famille $\mathcal{U}$ des fermés de E vérifie les propriétés suivantes :

- $\emptyset$ et E sont dans $\mathcal{U}$;
- une réunion finie d'éléments de $\mathcal{U}$ est dans $\mathcal{U}$;

1. Assez curieusement, les espaces topologiques ne sont pas au programme de l'agrégation interne ou externe !

- si $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ est une familles d'éléments de $\mathcal{U}$, leur intersection $\bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{O}_i$ est alors dans $\mathcal{U}$.

Définition 2.29. Un espace topologique E est dit *séparé*, si pour tous points $x \neq y$ dans E, il existe un voisinage $\mathcal{V}_x$ de x et un voisinage $\mathcal{V}_y$ de y sans point commun (axiome de Hausdorff).

Dans un espace topologique séparé un singleton $\{x\}$ ou un sous-ensemble fini, sont des fermés.

Exemples 2.10

1. *Un ensemble E muni de la topologie grossière n'est pas séparé car l'unique ouvert non vide est E.*
2. *Un espace métrique (E,d) est un espace topologique séparé. En effet, pour $x \neq y$ dans E et tout $r \in \left]0, \frac{d(x,y)}{2}\right]$, les boules ouvertes $B(x,r)$ et $B(y,r)$ sont disjointes.*

Théorème 2.46.

Deux distances équivalentes sur E définissent la même topologie.

Démonstration Soient d et d' deux distances équivalentes sur E, c'est-à-dire telles que $\alpha d \leq d' \leq \beta d$ où α et β sont deux réels strictement positifs. Toute boule pour d étant contenue dans une boule de même centre pour d' et réciproquement, une partie de E est ouverte pour d si, et seulement si, elle est ouverte pour d'. ■

Deux distances sur E peuvent définir la même topologie sans être équivalentes. Par exemple sur $\mathbb{R}$ les distances d et d' respectivement définies par $d(x,y) = |y-x|$ et $d'(x,y) = \frac{|y-x|}{1+|y-x|}$ ne sont pas équivalentes car d' est majorée (par 1), alors que d ne l'est pas et pourtant, elles définissent la même topologie. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon \in]0,1[$, on a $B(a,\varepsilon) \subset B'(a,\varepsilon)$ (on a $d'(x,y) < d(x,y)$) et $B'(a,\varepsilon) = B\left(a, \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$ ($\frac{|x-a|}{1+|x-a|} < \varepsilon$ équivaut à $|x-a| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$), donc un ouvert pour d' est ouvert pour d et réciproquement (tout réel $\delta > 0$ s'écrit de manière unique $\delta = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ avec $\varepsilon = \frac{\delta}{1+\delta} \in]0,1[$). De manière plus générale, pour toute distance d sur E, l'application d' définie sur E^2 par $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ est une distance sur E définissant la même topologie et ces distances ne sont pas équivalentes dans le cas où d est non bornée (car d' l'est par 1). Voir l'exercice 2.6.

Définition 2.30. Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit *métrisable* s'il existe une distance sur E telle que la topologie associée à cette distance coïncide avec celle définie par $\mathcal{T}$.

Exemple 2.7 *Un ensemble E muni de la topologie grossière n'est pas métrisable car non séparé.*

Dans un espace topologique, on définit les notions *d'intérieur* $\overset{\circ}{A}$, *d'adhérence* $\overline{A}$, de *frontière* $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$ et de *partie dense* comme dans les espaces métriques (définition 2.7).

On peut définir la notion de convergence d'une suite dans un espace topologique comme suit.

Définition 2.31. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est *convergente*, s'il existe $\ell \in E$ tel que pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ dans E, il existe un entier n_0 (qui dépend de $\mathcal{V}$) tel que $u_n \in \mathcal{V}$ pour tout $n \geq n_0$. Une suite non convergente est dite *divergente*.

Dans le cas où l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est séparé, en cas d'existence la limite d'une suite est unique. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 \neq \ell_2$, comme E est séparé, il existe des voisinages $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ de ℓ_1 et ℓ_2 respectivement tels que $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$, ce qui n'est pas compatible avec le fait qu'il existe des entiers n_1 et n_2 tels que $u_n \in \mathcal{V}_1$ pour tout $n \geq n_1$ et $u_n \in \mathcal{V}_2$ pour tout $n \geq n_2$, donc $u_n \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$.

Définition 2.32. Un sous-ensemble non vide K de E est dit *compact* s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de K, on peut extraire un sous-recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue).

Par passage au complémentaire, un sous-ensemble K de E est compact si, et seulement si, il est séparé et de toute famille $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ de fermés dans K d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille fini également d'intersection vide.

Un compact dans un espace topologique séparé est fermé. En effet pour tout $x \in E \setminus K$ (dans le cas où $K \neq E$) et tout $y \in K$, il existe deux ouverts disjoints $\mathcal{V}_x$ et $\mathcal{V}_y$ tels que $x \in \mathcal{V}_x$ et $y \in \mathcal{V}_y$ et du recouvrement ouvert de K par les $\mathcal{V}_y$, on peut extraire un recouvrement fini $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{V}_{y_k}$ et l'ouvert $\mathcal{O} = \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{V}_{x_k}$ qui contient x ne rencontre par K. L'hypothèse de séparation est essentielle pour cette démonstration. Elle est aussi utile pour prouver que deux compacts disjoints peuvent être contenus dans deux ouverts disjoints (exercice 2.11).

Dans un espace topologique séparé, un sous-ensemble d'un compact est compact si, et seulement si, il est fermé.

Théorème 2.47.

Si K est un compact de E, on peut alors extraire de toute suite de points de E une sous-suite convergente dans K (i e. toute suite de points de K admet une valeur d'adhérence dans K).

Démonstration C'est la même démonstration que pour l'implication (2) $\Rightarrow$ (1) du théorème 2.18. ∎

Contrairement au cas des espace métriques, la réciproque du théorème précédent n'est pas valable pour un espace topologique en général. Par exemple dans E muni de la topologie grossière, toute suite admet tout élément de E comme valeur d'adhérence et E n'est pas compact car non séparé.

Théorème 2.48.

Dans E séparé, une intersection de compacts est compacte et une réunion finie de compacts est compacte.

Démonstration Soient $(K_i)_{i \in I}$ une famille de compacts dans E et $K = \bigcap\limits_{i \in I} K_i$. L'ensemble K est fermé contenu dans n'importe lequel des K_i qui est compact dans E séparé, ce qui implique que K est compact. Soient $(K_j)_{1 \leq j \leq n}$ une famille finie de compacts dans E et $K = \bigcup\limits_{j=1}^{n} K_j$. Cet ensemble K est séparé comme sous-ensemble de E séparé (pour $x \neq y$ dans K, il existe un voisinage $\mathcal{V}_x$ de x et un voisinage $\mathcal{V}_y$ de y dans E sans point commun et on a $(\mathcal{V}_x \cap K) \cap (\mathcal{V}_y \cap K) = \emptyset$). Si $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de E telle que $K \subset \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{O}_i$, cette famille d'ouverts est aussi un recouvrement de chaque compact K_j, pour $1 \leq j \leq n$, donc on peut en extraire un recouvrement fini $(\mathcal{O}_i)_{i \in I_j}$ qui nous donne un recouvrement ouvert fini $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} \bigcup\limits_{i \in I_j} \mathcal{O}_i$. ∎

La notion de continuité se défini comme suit où $(E, \mathcal{T})$, $(F, \mathcal{T}')$ sont deux espaces topologiques, D est une partie non vide de E non réduite à un point et f est une fonction de D dans F.

Définition 2.33. On dit que f est *continue*, en $a \in D$ si pour tout voisinage $\mathcal{V}_{f(a)}$ de $f(a)$ dans F, $f^{-1}\left(\mathcal{V}_{f(a)}\right)$ est un voisinage de a. Si f est continue en tout point de D, on dit alors qu'elle est continue sur D.

La notion d'*homéomorphisme* se défini comme dans le cas des espaces métriques.

Théorème 2.49.

La fonction $f : D \to F$ est continue sur D si, et seulement si, l'image réciproque par f de tout ouvert [resp. tout fermé] de F est un ouvert [resp. un fermé] de D (pour la topologie induite).

Démonstration Analogue à celle du théorème 2.29. ■

Comme dans le cas des espaces métriques, on vérifie que la composée de deux fonctions continues est continue.

La notion de connexité se défini comme dans le cas des espaces métriques et on a le résultat suivant.

Théorème 2.50.

Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble non vide de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$\mathcal{C}$ est connexe ;*
2. *il n'existe pas de partition de $\mathcal{C}$ en deux fermés non vides ;*
3. *les seules parties à la fois ouverte et fermée sont $\emptyset$ et $\mathcal{C}$;*
4. *les seules applications continues de $\mathcal{C}$ dans $\{0, 1\}$ discret sont les constantes.*

2.11 Exercices

Exercice 2.1. *Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $d_f : (x, y) \mapsto |f(y) - f(x)|$ définisse une distance sur E.*

Solution. La propriété de symétrie et l'inégalité triangulaire sont clairement vérifiées. L'égalité $d_f(x, y) = 0$ équivaut à $f(x) = f(y)$ qui implique $x = y$ si, et seulement si, la fonction f est injective. Donc d_f est une distance si, et seulement si, f est injective.

Exercice 2.2. *Soit (E, d) un espace métrique. On dit que la distance d est ultra-métrique si elle est telle que :*

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \; d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)) \tag{2.5}$$

1. *Vérifier que la condition (2.5) entraîne en fait l'inégalité triangulaire.*
2. *Montrer que pour tous x, y, z dans E tels que $d(x, y) \neq d(y, z)$, on a $d(x, z) = \max(d(x, y), d(y, z))$.*
3. *Montrer que toute boule ouverte [resp. fermée] de E est à la fois ouverte et fermée.*

4. *Montrer que si deux boules ouvertes ont un point en commun, l'une est alors contenue dans l'autre, ces deux boules étant égales si elles sont de même rayon.*

Solution.

1. Résulte de $\max(a,b) \leq a+b$ pour tous réels positifs a et b.
2. Supposons que $\max(d(x,y), d(y,z)) = d(x,y)$. L'hypothèse $d(x,y) \neq d(y,z)$ impose alors que $d(y,z) < d(x,y)$. Si $d(x,z) < \max(d(x,y), d(y,z))$, on a alors $d(x,z) < d(x,y)$, donc :
$$d(x,z) \leq \max(d(x,z), d(z,y)) = \max(d(x,z), d(y,z)) < d(x,y)$$
soit une impossibilité. De même, dans le cas où $\max(d(x,y), d(y,z)) = d(y,z)$, l'hypothèse $d(x,z) < \max(d(x,y), d(y,z))$ conduit à une impossibilité. On a donc $d(x,z) = \max(d(x,y), d(y,z))$.
3. Soit $B(x,r)$ une boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$. On sait déjà qu'une telle boule est un ouvert de E (exemples 2.2). Soient $y \in E \setminus B(x,r)$ et $r' \in]0,r[$. Pour tout $z \in B(y,r')$, on a $d(x,y) \geq r > r' > d(y,z)$, donc $d(x,y) \neq d(y,z)$ et
$$d(x,z) = \max(d(x,y), d(y,z)) = d(x,y) \geq r$$
soit $z \in E \setminus B(x,r)$. Donc $B(y,r') \subset E \setminus B(x,r)$ pour tout $z \in B(y,r')$, ce qui nous dit que $E \setminus B(x,r)$ est un ouvert ou encore que $B(x,r)$ est un fermé. De manière analogue, on vérifie qu'une boule fermée est à la fois ouverte et fermée.
4. Soient $B(x,r)$ et $B(y,r')$ deux boules ouvertes de rayons $r' \geq r > 0$ dans E et $t \in B(x,r) \cap B(y,r')$. Pour tout $z \in B(x,r)$, on a $d(z,y) \leq \max(d(z,x), d(x,y))$ avec $d(z,x) < r \leq r'$ et $d(x,y) \leq \max(d(x,t), d(t,y)) < r'$, donc $d(z,y) < r'$. Au final, on a $B(x,r) \subset B(y,r')$. Dans le cas où $r = r'$, on a l'égalité $B(x,r) \subset B(y,r')$.

Exercice 2.3. *Pour tous polynômes P, Q dans $\mathbb{R}[X]$, on note :*
$$d_1(P,Q) = \sup_{[0,\frac{1}{2}]} |Q(t) - P(t)|, \quad d_2(P,Q) = \begin{cases} 0 \text{ si } P = Q \\ \deg(P-Q) + 1 \text{ si } P \neq Q \end{cases}$$

1. *Montrer que d_1 et d_2 définissent des distances sur $\mathbb{R}[X]$.*
2. *Étudier la convergence de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(\mathbb{R}[X], d_1)$ et dans $(\mathbb{R}[X], d_2)$.*

Solution.

1. La propriété de symétrie se vérifie aisément pour les deux normes. Par construction, on a $d_2(P,Q) = 0$ si, et seulement si $P = Q$ (puisque $\deg(A) \geq 0$ pour $A \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$). L'égalité $d_1(P,Q) = 0$ équivaut à $P(t) = Q(t)$ pour tout

$t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, ou encore à $P = Q$ (le polynôme $P - Q$ a une infinité de racines). Pour P, Q, R dans $\mathbb{R}[X]$, on a $|Q(t) - P(t)| \leq |Q(t) - R(t)| + |R(t) - P(t)|$ pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc $d_1(P, Q) \leq d_1(P, R) + d_1(R, Q)$. Pour $P = Q$, on a $d_2(P, Q) = 0 \leq d_2(P, R) + d_2(R, Q)$. Pour $P \neq Q$ et $P = R$ on a :

$$d_2(P, Q) = d_2(R, Q) = \deg(R - Q) + 1 = d_2(P, R) + d_2(R, Q)$$

et pareil pour $Q = R$. Pour $P \neq Q$, $P \neq R$ et $Q \neq R$ on a :

$$\begin{aligned} d_2(P, Q) &= \deg(P - R + R - Q) + 1 \\ &\leq \deg(P - R) + \deg(R - Q) + 2 = d_2(P, R) + d_2(R, Q) \end{aligned}$$

En conclusion, d_1, d_2 sont des distances sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Avec $\lim\limits_{n \to +\infty} d_1(X^n, 0) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on déduit que $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $(\mathbb{R}[X], d_1)$ et avec $\lim\limits_{n \to +\infty} d_2(X^{n+1}, X^n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (n + 1) = +\infty$, on déduit que $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge dans $(\mathbb{R}[X], d_2)$.

Exercice 2.4. *Soit d une distance sur E.*

1. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante non identiquement nulle telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t + t') \leq \varphi(t) + \varphi(t')$ pour tous t, t' dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et que l'application $d_\varphi = \varphi \circ d$ définit une distance sur E.*
2. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle, croissante, continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de dérivée décroissante et telle que $\varphi(0) = 0$. Montrer que $d_\varphi = \varphi \circ d$ définit une distance sur E.*
3. *Montrer que les applications $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}} \circ d$, $\min(d, 1)$, $\frac{d}{1 + d}$ et d^α pour tout $\alpha \in]0, 1[$ définissent des distances sur E.*
4. *On suppose que φ vérifiant les hypothèses de la question 1 est de plus continue en 0. En notant pour $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}^{+,*}$, $B_\varphi(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r dans (E, d_φ), montrer que $B_\varphi(x, \varphi(r)) \subset B(x, r)$ et qu'il existe $r' \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $B(x, r') \subset B_\varphi(x, r)$. En déduire que Les distances d et d_φ définissent la même topologie sur E.*

Solution.

1.

(a) La fonction φ est à valeurs positives puisque croissante avec $\varphi(0) = 0$. Comme φ n'est pas identiquement nulle avec $\varphi(0) = 0$, il existe $t_0 > 0$ tel que $\varphi(t_0) > 0$. De la croissance de φ, on déduit que $\varphi(t) > 0$ pour tout $t \geq t_0$. S'il existe $t \in]0, t_0[$ tel que $\varphi(t) = 0$, on a alors $\varphi(nt) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, c'est vrai pour $n \in \{0, 1\}$ et si c'est vrai pour $n \geq 1$, de $0 \leq \varphi((n + 1)t) \leq \varphi(nt) + \varphi(t)$, on déduit que $\varphi((n + 1)t) = 0$. Mais prenant $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nt > t_0$, on aboutit à une contradiction. On a donc $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

(b) Soient x, y, z dans E. On a :

$$d_\varphi(y, x) = \varphi(d(y, x)) = \varphi(d(x, y)) = d_\varphi(x, y)$$

D'après la question précédente, l'égalité $d_\varphi(x, y) = \varphi(d(x, y)) = 0$ est réalisée si, et seulement si, on a $d(x, y) = 0$ ce qui équivaut à $x = y$. On a $d_\varphi(x, z) = \varphi(d(x, z))$ avec $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, ce qui nous donne $d_\varphi(x, z) \leq d_\varphi(x, y) + d_\varphi(y, z)$.

2. Pour tout réel t' fixé dans $\mathbb{R}^+$, la fonction $\gamma : t \mapsto \varphi(t + t') - \varphi(t) - \varphi(t')$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec $\gamma'(t) = \varphi'(t + t') - \varphi'(t) \leq 0$ (φ' est décroissante), donc γ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (elle est continue en 0) et on a $\gamma(t) \leq \gamma(0) = 0$, soit $\varphi(t + t') \leq \varphi(t) + \varphi(t')$. De la question précédente, on déduit que $d_\varphi = \varphi \circ d$ est une distance.

3. Les fonctions $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}}$ et $t \mapsto \min(t, 1)$ vérifiant les hypothèses de la première question, on en déduit que :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+,*}} \circ d : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } y = x \\ 1 \text{ si } y \neq x \end{cases}$$

et :

$$\min(d, 1) : (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } d(x, y) > 1 \\ d(x, y) \text{ si } d(x, y) \leq 1 \end{cases}$$

sont des distances. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t}{1 + t}$ et $t \mapsto t^\alpha$ pour $\alpha \in]0, 1[$ vérifiant les hypothèses de la deuxième question, on en déduit que $\dfrac{d}{1 + d}$ et d^α sont des distances.

4.

(a) Pour tout $y \in B_\varphi(x, \varphi(r))$, on a $d_\varphi(y, x) = \varphi(d(y, x)) < \varphi(r)$, ce qui implique que $d(y, x) < r$ puisque φ est croissante (si $d(y, x) \geq r$, on a alors $\varphi(d(y, x)) \geq \varphi(r)$), soit $y \in B(x, r)$. On a donc $B_\varphi(x, \varphi(r)) \subset B(x, r)$ que φ soit continue ou pas en 0.

(b) Pour φ continue en 0 et $r > 0$, il existe $r' > 0$ tel que $|\varphi(t)| < r$ pour tout réel t tel que $|t| < r'$, donc pour tout $y \in B(x, r')$, la condition $d(y, x) < r'$ entraîne que $d_\varphi(y, x) = \varphi(d(y, x)) < r$, soit $y \in B_\varphi(x, r)$. On a donc $B(x, r') \subset B_\varphi(x, r)$.

(c) Si $\mathcal{O} \subset E$ est ouvert non vide dans (E, d) et $x \in \mathcal{O}$, il existe alors $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O}$, donc $B_\varphi(x, \varphi(r)) \subset \mathcal{O}$ avec $\varphi(r) > 0$ et $\mathcal{O}$ est ouvert dans (E, d_φ). Réciproquement si $\mathcal{O}$ est ouvert dans (E, d_φ) et $x \in \mathcal{O}$, il existe alors un réel $r > 0$ tel que $B_\varphi(x, r) \subset \mathcal{O}$ et pour $r' > 0$ tel que $B(x, r') \subset B_\varphi(x, r)$, on a $B(x, r') \subset \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}$ est ouvert dans (E, d). Les distances d et d_φ définissent donc la même topologie sur E.

Exercice 2.5. *Montrer que les deux distances d et d' définies sur $\mathbb{R}$ par $d(x,y) = |y-x|$ et $d'(x,y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$ sont topologiquement équivalentes et que $(\mathbb{R}, d')$ n'est pas complet.*

Solution. L'application d' définit bien une distance sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction arctan est injective (exercice 2.1) et cette distance est équivalente à d du fait que la fonction arctan réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d')$ car pour $m > n$ dans $\mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} d'(m,n) &= \arctan(m) - \arctan(n) = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(m)\right) \\ &\leq \frac{\pi}{2} - \arctan(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

Si cette suite converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ pour la distance d', on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} d'(n,\ell) = |\arctan(n) - \arctan(\ell)| = 0$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$, ce qui impose que $\arctan(\ell) = \frac{\pi}{2}$ avec ℓ réel, soit une impossibilité.

Exercice 2.6. *Soit d une distance sur l'ensemble E. Montrer que l'application $d' : (x,y) \mapsto \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ définit une distance sur E topologiquement équivalente à d, mais non équivalente de manière générale.*

Solution.

1. On vérifie tout d'abord que la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t}{1+t}$ réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,1[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $0 \leq \varphi(t) < 1$ et φ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,1[$ d'inverse $\varphi^{-1} : x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$. Comme φ et φ^{-1} sont continues, φ est un homéomorphisme. (de manière plus générale pour $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ la fonction homographique $t \mapsto \dfrac{at+b}{ct+d}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$). La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée donnée par $\varphi'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} > 0$, donc elle strictement croissante ainsi que son inverse.
2. Pour tous x, y dans E, il est clair que $d'(x,y) = d'(y,x)$ et que $d'(x,y) = 0$ si, et seulement si, $x = y$. L'inégalité triangulaire pour d' résulte de la croissance de φ qui nous permet d'écrire pour x, y, z dans E que :

$$\begin{aligned} d'(x,z) &= \varphi(d(x,z)) \leq \varphi(d(x,y) + d(y,z)) \\ &\leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = d'(x,y) + d'(y,z) \end{aligned}$$

L'application d' est donc bien une distance sur E.

3. De $d' \leq d$, on déduit que Id est continue de (E, d) sur (E, d'). Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$ et x, y dans E tels que $d'(x, y) < \eta = \varphi(\varepsilon)$, on a :
$$d(x, y) = \varphi^{-1}(d'(x, y)) < \varphi^{-1}(\eta) = \varepsilon$$
donc Id est continue de (E, d') sur (E, d). Les distances d et d' sont donc topologiquement équivalentes sur E.
4. Ces deux distances ne peuvent être équivalentes (au sens de la définition 2.2) pour d non majorée car d' est majorée par 1.

Exercice 2.7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace métrique (E, d).*

1. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, les suites extraites $(u_{pn+r})_{r\in\mathbb{N}}$ pour $0 \leq r \leq r-1$ convergent toutes vers une même limite.*
2. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.*
3. *Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite périodique, montrer qu'elle converge si, et seulement si, elle est constante.*

Solution.

1. Pour $p = 1$, il n'y a rien à prouver. Pour $p \geq 2$, la condition nécessaire résulte du fait que toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite. Supposons que chaque suites $(u_{pn+r})_{r\in\mathbb{N}}$ pour $0 \leq r \leq r-1$ converge vers ℓ. Dans ce cas, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $r \in \{0, \cdots, p-1\}$, il existe un entier n_r tel que $d(u_{pn+r}, \ell) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_r$. Tout $n \in \mathbb{N}$ s'écrivant de manière unique $n = qp + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \cdots, p-1\}$, on en déduit que $d(u_n, \ell) < \varepsilon$ pour tout entier $q \geq n_\varepsilon = \max\limits_{0 \leq r \leq p-1} n_r$, soit que $d(u_n, \ell) < \varepsilon$ pour tout $n \geq (n_\varepsilon + 1)p$. On a donc ainsi prouvé que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
2. Supposons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ, ℓ' et ℓ''. La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est extraite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et ℓ'', ce qui impose $\ell = \ell''$ du fait de l'unicité de la limite. De même en remarquant que $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{2n+1})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que $\ell' = \ell''$ et $\ell = \ell'$, donc $(u_{2n})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, ce qui équivaut à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La réciproque est évidente.
3. La condition suffisante est évidente. Réciproquement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ et convergente vers ℓ, alors pour tout entier r compris entre 0 et $p-1$, la suite extraite $(u_{pq+r})_{q\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur commune u_r, donc convergente vers ℓ, ce qui impose $u_r = \ell$ et il en résulte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante puisque tout entier $n \in \mathbb{N}$ s'écrit $n = pq + r$ par division euclidienne.

Exercice 2.8. *Soit (E,d) un espace métrique complet. Montrer que si $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés de E telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$, alors l'ouvert $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{\mathcal{F}_n}$ est dense dans E.*

Solution. On note $\mathcal{F} = E \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{\mathcal{F}_n}$, c'est un fermé de E. Pour tout entier naturel n, l'intersection $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_n$ est un fermé d'intérieur vide. En effet cet ensemble est fermé comme intersection de deux fermés et on a $\overset{\circ}{\mathcal{G}} \subset \mathcal{F} \cap \overset{\circ}{\mathcal{F}_n} = \emptyset$. On déduit alors du théorème de Baire que :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F} \cap E = \mathcal{F} \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_n$$

est d'intérieur vide dans E, ce qui équivaut à dire que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{\mathcal{F}_n}$ est dense dans E.

Exercice 2.9. *Soit (E,d) un espace métrique dans lequel toutes les boules fermées sont compactes. Montrer que E est complet et que les compacts de E sont les fermés bornés.*

Solution. Utilisant le théorème 2.19, il nous suffit pour montrer que E est complet de vérifier la propriété des boules emboîtés. Soit donc $\left(\overline{B}(x_n, r_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boules emboîtés. Toutes ces boules étant compactes, le théorème 2.3 nous dit que cette intersection est non vide et avec $\lim_{n\to+\infty} \delta\left(\overline{B}(x_n, r_n)\right) = 2 \lim_{n\to+\infty} r_n = 0$, on déduit qu'elle est réduite à un point. Donc E est complet. On sait déjà que tout compact de E est fermé borné. Si K est un fermé borné de E il est alors contenu dans une boule fermée et est compact comme fermé dans un compact.

Exercice 2.10. *Montrer que pour tout réel $p > 1$, la fonction continue $f : x \mapsto x^p$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.*

Solution. En considérant les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour $p > 1$ par $x_n = n^{\frac{1}{p}}$ et $y_n = (n+1)^{\frac{1}{p}}$, on a $0 < y_n - x_n = p \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{1-\frac{1}{p}}} \leq \frac{p}{n^{1-\frac{1}{p}}}$ avec $1 - \frac{1}{p} > 0$, ce qui nous donne $\lim_{n\to+\infty} (y_n - x_n) = 0$ avec $\lim_{n\to+\infty} (f(y_n) - f(x_n)) = 1 \neq 0$, donc cette fonction n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2.11. *Soient $(T, \mathcal{T})$ un espace topologique, (E,d) un espace métrique complet, F un fermé non vide de E et $f : T \times F \to F$ une fonction telle que pour tout $x \in E$, la fonction $t \in T \mapsto f(t,x) \in F$ soit continue* *et pour tout $t \in T$, la fonction $x \in F \mapsto f(t,x) \in F$ soit λ-contractante où $\lambda \in]0,1[$ est indépendant de t. En désignant pour tout $t \in T$ par $\alpha(t)$ l'unique point fixe de la fonction $x \mapsto f(t,x)$, montrer que la fonction α est continue de de T dans F.*

Solution. Soit $t_0 \in T$. La fonction $t \mapsto f(t, \alpha(t_0))$ étant continue de T dans F, il existe pour tout réel $\varepsilon > 0$ un voisinage $\mathcal{V}_0$ de t_0 dans T tel que :

$$\forall t \in \mathcal{V}_0,\ d(f(t,\alpha(t_0)), f(t_0, \alpha(t_0))) < \varepsilon$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit que pour tout $t \in \mathcal{V}_0$, on a :

$$\begin{aligned} d(\alpha(t), \alpha(t_0)) &= d(f(t,\alpha(t)), f(t_0,\alpha(t_0))) \\ &\leq d(f(t,\alpha(t)), f(t,\alpha(t_0))) + d(f(t,\alpha(t_0)), f(t_0,\alpha(t_0))) \\ &\leq \lambda d(\alpha(t), f(\alpha(t_0))) + \varepsilon \end{aligned}$$

soit $d(\alpha(t), \alpha(t_0)) \leq \dfrac{\varepsilon}{1-\lambda}$, ce qui prouve la continuité de α en t_0.

Exercice 2.12. *Soient K_1 et K_2 deux compacts disjoints dans un espace topologique séparé E (par exemple un espace métrique). Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ tels que $K_1 \subset \mathcal{O}_1$ et $K_2 \subset \mathcal{O}_2$.*

Solution. Pour y donné dans K_2 et tout $x \in K_1$, il existe deux ouverts disjoints $\mathcal{V}_x$ et $\mathcal{V}_y$ tels que $x \in \mathcal{V}_x$ et $y \in \mathcal{V}_y$, du recouvrement ouvert de K_1 par les $\mathcal{V}_x$ on extrait un recouvrement fini $K_1 \subset \mathcal{O}_y = \bigcup_{k=1}^{n_y} \mathcal{V}_{x_k}$ et on a $y \in \mathcal{U}_y = \bigcap_{k=1}^{n_y} \mathcal{V}_{x_k}$. Du recouvrement ouvert de K_2 par les $\mathcal{U}_y$, on peut extraire un recouvrement fini $K_2 \subset \mathcal{O}_2 = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{U}_{y_k}$ et on a $K_1 \subset \mathcal{O}_1 = \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{y_k}$, l'ouvert étant disjoint de $\mathcal{O}_2$.