8

Limites finies en un point

Pour ce chapitre, sauf précision contraire, I désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I et à valeurs réelles ou complexes.

Là encore, les fonctions usuelles $\sqrt{\cdot}$, exp, ln, x^a, cos, sin, tan, $\cdots$ sont supposés connus.

8.1 Points adhérents à une partie non vide de $\mathbb{R}$

La notion de limite finie en un point d'une fonction (étudiée au paragraphe qui suit) est intéressante si le point est adhérent à l'ensemble de définition I de la fonction f. En un tel point la fonction f n'est, a priori, pas définie. De manière intuitive, un point adhérent à I est un réel qui « colle » à l'ensemble I. Plus précisément, on peut donner la définition suivante.

Définition 8.1 *On dit qu'un réel a est adhérent à l'ensemble I si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap I \neq \emptyset.$$

Comme pour tout $a \in I$ et tout $\varepsilon > 0$, on a $a \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap I$, on déduit que tout point de I est adhérent à I.

On note $\overline{I}$ l'ensemble des points adhérents à I et on dit que $\overline{I}$ est l'adhérence (ou la fermeture) de I.

On a $I \subset \overline{I}$, mais ce sont les points de $\overline{I} \setminus I$ qui vont nous intéresser pour les problèmes de limites.

Par exemple pour $I =]a, b[\cup]b, c[$ avec $a < b < c$, les points a, b et c sont des points adhérents à I qui n'appartiennent pas à I et $\overline{I} = [a, b]$.

Exercice 8.1 *Montrer que si $I \subset J$, alors $\overline{I} \subset \overline{J}$.*

Solution 8.1 *Pour tout $a \in \overline{I}$, on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap J \supset]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap I \neq \emptyset$$

et donc $a \in \overline{J}$.

Exercice 8.2 *Montrer que si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui converge vers un réel ℓ, alors ℓ est adhérent à l'ensemble $I = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Solution 8.2 *Par définition de la limite d'une suite, on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\cap I,$$

et en conséquence, ℓ est adhérent à I.

On peut donner la caractérisation séquentielle suivante de la notion de point adhérent. Cette caractérisation est souvent utilisée.

Théorème 8.1 *Un réel a est adhérent à I si, et seulement si, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a.*

Démonstration. Si a est adhérent à I, pour tout entier $n \geq 1$ l'ensemble $\left]a - \dfrac{1}{n}, a + \dfrac{1}{n}\right[\cap I$ est non vide, il existe donc un réel $u_n \in I$ tel que $|u_n - a| < \dfrac{1}{n}$ et faisant tendre n vers l'infini, on déduit que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Réciproquement si a est limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I, on a alors :

$$a \in \overline{\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{I}.$$

■

8.2 Limite finie en un point d'une fonction réelle

Pour ce paragraphe et les suivants, a est un point adhérent à I et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 8.2 *On dit que la fonction f admet une limite finie quand x tend vers a dans I, s'il existe un réel ℓ tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid (x \in I \text{ et } |x - a| < \eta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{8.1}$$

(on dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a dans I).

Comme dans le cas de la définition de la convergence d'une suite, les deux dernières inégalités dans (8.1) peuvent être strictes ou larges et il est parfois commode de se limiter à $\varepsilon \in]0,1[$ sans que cela ne soit restrictif.

Dire que f n'a pas de limite en a équivaut à dire que pour tout scalaire ℓ il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \eta > 0,\ \exists x \in I \mid |x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Il est parfois commode de traduire (8.1) sous la forme :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ou encore, dans le cas d'une fonction à valeurs réelles :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I,\ f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

Le fait que a soit adhérent à I nous assure que $]a - \eta, a + \eta[\cap I$ n'est pas vide.

En utilisant l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on montre, comme pour les suites convergentes, que si f admet une limite ℓ en a, alors cette limite est unique. En effet, s'il existe deux réels ℓ et ℓ' vérifiant (8.1), on peut alors trouver pour tout réel $\varepsilon > 0$ un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \eta$ on ait :

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - f(x)) + (f(x) - \ell')| \leq |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| < 2\varepsilon,$$

ce qui équivaut à $\ell - \ell' = 0$.

On note alors $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in I}} f(x)$ ou plus simplement $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, le domaine de définition de la fonction f étant sous-entendu, cette limite. On écrira aussi $f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell$.

Exercice 8.3 *Montrer que si $a \in I$ et si f a une limite finie en a, cette limite ne peut être que $f(a)$ (dans ce cas la fonction f est continue en a, comme nous le verrons au chapitre suivant).*

Solution 8.3 *En notant $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \left]a-\eta, a+\eta\right[\cap I,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ce qui donne pour $x = a \in \left]a-\eta, a+\eta\right[\cap I$, $|f(a) - \ell| < \varepsilon$. Le réel $\varepsilon > 0$ étant quelconque, il en résulte que $\ell = f(a)$.

Exercice 8.4 *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ admet une limite en 0, mais que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(0) = 1$ et $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ n'a pas de limite en 0.*

Solution 8.4 *Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $\eta > 0$, on a :*

$$\forall x \in \left]-\eta, \eta\right[\cap \mathbb{R}^*,\ |f(x)| = 0 < \varepsilon,$$

ce qui signifie que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
Supposons que g admette une limite ℓ en 0. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]-\eta, \eta\right[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

et prenant $x \neq 0$ dans $\left]-\eta, \eta\right[$, on a $|\ell| < \varepsilon$, le réel $\varepsilon > 0$ étant quelconque, ce qui impose $\ell = 0$. Mais prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ et $x = 0$ dans $\left]-\eta, \eta\right[$, on aboutit à $|f(0) - \ell| = 1 < \dfrac{1}{2}$, ce qui est absurde. La fonction g n'a donc pas de limite en 0.

Comme dans le cas des suites convergentes, les résultats qui suivent sont souvent utilisés pour justifier le calcul d'une limite.

Théorème 8.2 *S'il existe un réel ℓ, un réel $\delta > 0$ et une fonction φ de $J = \left]a-\delta, a+\delta\right[\cap I$ dans $\mathbb{R}^+$ tels que :*

$$\begin{cases} \forall x \in J,\ |f(x) - \ell| \leq \varphi(x) \\ \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Démonstration. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$x \in J \subset I \text{ et } |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varphi(x) < \varepsilon$$

ce qui donne le résultat annoncé. ■

Par exemple, avec $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout réel x, on déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = 0$ et avec $|\cos(x) - 1| = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \leq \dfrac{x^2}{2}$, on déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$.

Théorème 8.3 *Si f est à valeurs réelles et s'il existe un réel $\delta > 0$ et deux fonction φ et ψ définies sur $J = \left]a-\delta, a+\delta\right[\cap I$ et à valeurs réelles tels que :*

$$\begin{cases} \forall x \in J,\ \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) \\ \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = \ell \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Démonstration. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in J \subset I$ tel que $|x - a| < \eta$, on ait :

$$\ell - \varepsilon < \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) < \ell + \varepsilon$$

ce qui donne le résultat annoncé. ■

Exercice 8.5 *Montrer que* $\lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Solution 8.5 *Se déduit de* $\left| x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$ *pour* $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 8.6 *Montrer que, pour tous réels* $a > 0$ *et* $b > 0$, *on* $\lim_{x \to 0} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a}$, *où* $[\cdot]$ *désigne la fonction partie entière.*

Solution 8.6 *Pour tout réel* $x \neq 0$, *on a* $\left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{b}{x} < \left[\frac{b}{x}\right] + 1$, *de sorte que pour* $x > 0$ *on a :*

$$\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{b}{a} < \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] + \frac{x}{a}$$

soit :

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{b}{a} < \frac{b}{a} + \frac{x}{a}$$

et pour $x < 0$, *on a :*

$$\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \geq \frac{b}{a} > \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] + \frac{x}{a}.$$

soit :

$$\frac{b}{a} + \frac{x}{a} < \frac{b}{a} \leq \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] < \frac{b}{a} - \frac{x}{a}$$

Il en résulte que :

$$\frac{b}{a} - \frac{|x|}{a} < \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] < \frac{b}{a} + \frac{|x|}{a}$$

pour tout $x \neq 0$ *et* $\lim_{x \to 0} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a}$.

Exercice 8.7 *Soit* $f :]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, *avec* $\alpha > 0$. *Montrer que* $\lim_{x \to 0} f(x) = \ell$ *si, et seulement si,* $\lim_{x \to 0} f(\sin(x)) = \ell$.

Solution 8.7 *Supposons que* $\lim_{x \to 0} f(x) = \ell$. *Soient* $\varepsilon > 0$ *et* $\eta \in \left]0, \min\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)\right[$ *tel que* $|f(y) - \ell| < \varepsilon$ *pour tout* $y \in]-\eta, \eta[\setminus \{0\}$. *Pour tout* $x \in]-\eta, \eta[\setminus \{0\}$ *on a alors* $0 < |\sin(x)| \leq |x| < \eta$ *et* $|f(\sin(x)) - \ell| < \varepsilon$.
Réciproquement, supposons que $\lim_{x \to 0} f(\sin(x)) = \ell$. *Soient* $\varepsilon > 0$ *et* $\delta \in \left]0, \min\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)\right[$ *tel que* $|f(\sin(t)) - \ell| < \varepsilon$ *pour tout* $t \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\}$. *En posant* $\eta = \sin(\delta)$, *pour* $0 < |x| < \eta$, *on a* $0 < |\arcsin(x)| < \arcsin(\eta) = \delta$ *et* $|f(x) - \ell| = |f(\sin(\arcsin(x))) - \ell| < \varepsilon$.

Comme pour les suites convergentes, l'inégalité triangulaire nous donne le résultat suivant.

Théorème 8.4 *Si f admet une limite finie quand x tend vers a dans I, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que la restriction de f à $J =]a - \eta, a + \eta[\cap I$ soit bornée (on dit que f est bornée au voisinage de a).*

Démonstration. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout x dans $]a - \eta, a + \eta[\cap I$, on ait :

$$|f(x)| = |(f(x) - \ell) + \ell| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|.$$

■

Le résultat qui suit se déduit immédiatement de la définition de la limite en a.

Théorème 8.5 *Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, la fonction f étant à valeurs réelles.*

1. *Si $\ell > 0$ [resp. $\ell < 0$] il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que $f(x) > 0$ [resp. $f(x) < 0$] pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$ (f est de signe constant au voisinage de a).*
2. *S'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $f(x) \geq 0$ [resp. $f(x) \leq 0$] pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$ on a alors $\ell \geq 0$ [resp. $\ell \leq 0$].*

Démonstration.

1. Pour $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2} > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I$, on ait $|f(x) - \ell| < \dfrac{\ell}{2}$ et on a alors :
$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I, \ f(x) > \ell - \frac{\ell}{2} > \frac{\ell}{2} > 0.$$
Pour $\ell < 0$, on travaille avec $-f$.
2. Se déduit facilement du premier point.

■

Une définition séquentielle de la notion de limite finie en un point est donnée par le résultat suivant.

Théorème 8.6 *La fonction f admet la limite ℓ quand x tend vers a dans I si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Démonstration. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta$ dans I entraîne $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de I qui converge vers a, il existe alors un entier n_0 tel que $|u_n - a| < \eta$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique $|f(u_n) - \ell| < \varepsilon$. On a donc bien $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$.

Pour la réciproque, on raisonne par l'absurde. Si f n'a pas de limite finie en a, pour tout réel ℓ, il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$ on peut trouver $u_n \in I$ tel que $|u_n - a| < \dfrac{1}{n}$ et $|f(u_n) - \ell| \geq \varepsilon$. On a donc ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a pour laquelle la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. ■

Cette caractérisation de la notion de limite peut être utilisée pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.

Exercice 8.8 *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ n'a pas de limite en 0.*

Solution 8.8 *Si $(u_n)_{n \geq 1}$ est la suite définie dans $\mathbb{R}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n\pi}$ pour $n \geq 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et la suite $(f(u_n))_{n \geq 1} = ((-1)^n)_{n \geq 1}$ est divergente, ce qui prouve que f n'a pas de limite en 0.*

8.3 Limites à gauche ou à droite des fonctions réelles

En prenant en considération la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$, on peut définir les notions de limite à gauche ou à droite en un point.

On suppose toujours que α est réel dans l'adhérence de I.

Définition 8.3 *On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ a pour limite à gauche [resp. à droite] ℓ en α si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*

$$x \in I,\ \alpha - \eta < x < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$[\textit{resp. } x \in I,\ \alpha < x < \alpha + \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon]$$

Il est facile de vérifier que si f admet une limite à gauche [resp. à droite] en α, alors cette limite est unique et on la note $f(\alpha^-) = \lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x)$ [resp. $f(\alpha^+) = \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)$].

De manière équivalente on peut dire que f a une limite à gauche [resp. à droite] en α si la restriction de f à $I \cap]-\infty, \alpha[$ [resp. à $I \cap]\alpha, +\infty[$] a une limite en α.

Si I est un intervalle de borne inférieure α [resp. de borne supérieure α], seule la notion de limite à droite [resp. à gauche] a un sens.

Des définitions précédentes, on déduit facilement le résultat suivant.

Théorème 8.7 *Si I est un intervalle ouvert, alors la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ a pour limite ℓ en α si, et seulement si, elle a une limite à gauche et à droite en α, ces limites étant égales à ℓ.*

Le cas des fonctions monotones définies sur un intervalle ouvert (pour simplifier) est particulièrement intéressant.

Théorème 8.8 *Si f est une fonction monotone de l'intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}$, alors f admet une limite à gauche et droite en tout point. Dans le cas où f est croissante, on a pour tout $x \in I$:*

$$f\left(x^-\right) = \sup_{a<t<x} f(t) \leq f(x) \leq f\left(x^+\right) = \inf_{x<t<b} f(t).$$

De plus pour $x < y$ dans I, on a $f(x^+) \leq f(y^-)$.

Démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer f croissante.

Pour $x \in I$, l'ensemble $A = \{f(t) \mid a < t < x\}$ est non vide majoré par $f(x)$, il admet donc une borne supérieure $\mu = \sup\limits_{a<t<x} f(t) \leq f(x)$. Par définition de la borne supérieure, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in]a, x[$ tel que $\mu - \varepsilon < f(x_0) \leq \mu$ et avec la croissance de f, on a :

$$\forall t \in]x_0, x[,\ \mu - \varepsilon < f(x_0) \leq f(t) \leq \mu.$$

On a donc ainsi montré que $\mu = \lim\limits_{t \to x^-} f(t) = f(x^-)$.

On procède de même pour l'existence de la limite à droite $f(x^+)$.

Pour $x < y$ dans I, on a :

$$f\left(x^+\right) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t),\ f\left(y^-\right) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t),$$

ce qui entraîne $f(x^+) \leq f(y^-)$. ■

8.4 Opérations algébriques sur les limites finies

Des théorèmes 8.6 et 8.5, on déduit immédiatement le résultat suivant.

Théorème 8.9 *Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$.*
On a alors :

1. $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$, $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$, $\lim\limits_{x \to a} (f(x) g(x)) = \ell\ell'$, *pour f, g à valeurs réelles,* $\lim\limits_{x \to a} \min(f(x), g(x)) \min(\ell, \ell')$ *et* $\lim\limits_{x \to a} \max(f(x), g(x)) = \max(\ell, \ell')$ *;*
2. *si $\ell' \neq 0$, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que la fonction $\dfrac{1}{g}$ soit définie sur $J =]a - \eta, a + \eta[\cap I$ et* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$ *;*
3. *si f est à valeurs réelles et $\ell > 0$, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que la fonction $\sqrt{f}$ soit définie sur $J =]a - \eta, a + \eta[\cap I$ et* $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$.

Exercice 8.9 *Montrer le résultat précédent en partant de la définition d'une limite finie en a.*

Solution 8.9 *C'est comme pour les suites.*

Exercice 8.10 *Soit $P : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynomiale de degré $n \geq 0$ (on a donc $P \neq 0$ et $a_n \neq 0$). Montrer que, pour tout réel a, on a $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.*

Solution 8.10 *Le résultat est évident pour $P = 1$ et $P = x$ et le théorème précédent nous permet de conclure.*

Exercice 8.11 *Soit $f : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\sum\limits_{k=p}^{n} a_k x^k}{\sum\limits_{k=q}^{m} b_k x^k}$ une fonction rationnelle, où P, Q sont des fonctions rationnelles non nulles de valuations respectives p et q (i. e. $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$).*
Montrer que :

1. *si $p = q$, alors* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_p}{b_p}$ *;*
2. *si $p > q$, alors* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ *;*
3. *si $p < q$, alors f n'a pas de limite finie en 0.*

Solution 8.11 *La fonction f est définie sur un voisinage épointé de 0 de la forme $I =]a - \eta, a + \eta[\setminus \{0\}$, puisque Q n'a qu'un nombre fini de racines réelles possibles.*

1. *Si $p = q$, on a pour tout $x \in I$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n}{b_p x^p + b_{p+1} x^{p+1} + \cdots + b_m x^m} \\ &= \frac{a_p + a_{p+1} x^1 + \cdots + a_n x^{n-p}}{b_p + b_{p+1} x^1 + \cdots + b_m x^{m-p}} \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_p}{b_p}$.

2. *Si $p > q$, on a pour tout $x \in I$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n}{b_q x^q + b_{q+1}x^{q+1} + \cdots + b_m x^m} \\ &= x^{p-q}\frac{a_p + a_{p+1}x^1 + \cdots + a_n x^{n-p}}{b_p + b_{p+1}x^1 + \cdots + b_m x^{m-p}} \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0 \cdot \dfrac{a_p}{b_p} = 0.$

3. *Si $p < q$, on a pour tout $x \in I$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n}{b_q x^q + b_{q+1}x^{q+1} + \cdots + b_m x^m} \\ &= \frac{1}{x^{q-p}}\frac{a_p + a_{p+1}x^1 + \cdots + a_n x^{n-p}}{b_p + b_{p+1}x^1 + \cdots + b_m x^{m-p}} \end{aligned}$$

soit $x^{q-p}f(x) = g(x)$ *avec* $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{a_p}{b_p} \neq 0$. *Si* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell$, *on a alors* $\dfrac{a_p}{b_p} = \lim\limits_{x\to 0} x^{q-p} f(x) = 0 \cdot \ell = 0$, *ce qui est impossible. Donc f n'a pas de limite finie en 0.*

Exercice 8.12 *Soient m, n deux entiers naturels. Étudier la limite en 0 de la fonction f définie sur $I =]-1, 1[\setminus \{0\}$ par* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^n} - \sqrt{1-x^n}}{x^m}$.

Solution 8.12 *Pour tout $x \in I$, on a :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\left(\sqrt{1+x^n} - \sqrt{1-x^n}\right)\left(\sqrt{1+x^n} + \sqrt{1-x^n}\right)}{x^m\left(\sqrt{1+x^n} + \sqrt{1-x^n}\right)} \\ &= \frac{2x^n}{x^m\left(\sqrt{1+x^n} + \sqrt{1-x^n}\right)} = 2x^{n-m}\frac{1}{\sqrt{1+x^n} + \sqrt{1-x^n}}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ *pour $n = m$,* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ *pour $n > m$ et f n'a pas de limite finie en 0 pour $n < m$.*

Le théorème précédent et le théorème 8.5 nous donnent le résultat suivant.

Théorème 8.10 *Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$.

1. *Si $\ell > \ell'$, il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$.*
2. *S'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$ on a alors $\ell \geq \ell'$.*
3. *Si M est un majorant [resp. m un minorant] de f sur I (ou sur un voisinage de a), alors $\ell \leq M$ [resp. $m \leq \ell$].*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 8.5 aux fonctions $f - g$, $f - M$ et $f - m$.
■

8.5 Limite en un point d'une composée de fonctions

Théorème 8.11 *Soient f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et g une fonction définie sur une partie J de $\mathbb{R}$ qui contient $f(I)$. Dans ces condition, ℓ est adhérent à J et si, de plus, $\lim\limits_{y \to \ell} g(x) = \ell'$, alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = \ell'$.*

Démonstration. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de I qui converge vers a, alors $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de J (puisque $f(I) \subset J$) qui converge vers ℓ, ce qui prouve que ℓ est adhérent à J.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $y \in J$ et $|y - \ell| < \delta$ entraîne $|g(y) - \ell'| < \varepsilon$ et en désignant par $\eta > 0$ un réel tel que $x \in I$ et $|x - a| < \eta$ entraîne $|f(x) - \ell| < \delta$, on a :

$$\begin{aligned}(x \in I \text{ et } |x - a| < \eta) &\Rightarrow (f(x) \in f(I) \subset J \text{ et } |f(x) - \ell| < \delta) \\ &\Rightarrow |g(f(x)) - \ell'| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat annoncé. ■

Avec $\lim\limits_{y \to \ell} \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\ell}$ pour $\ell \neq 0$ et $\lim\limits_{y \to \ell} \sqrt{y} = \sqrt{\ell}$ pour $\ell > 0$, on retrouve que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \neq 0$ (on a $f(x) \neq 0$ sur un ensemble $J =]a - \eta, a + \eta[\cap I$ et $\dfrac{1}{f}$ est la composée la restriction de f à J avec la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{y}$) et que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell > 0$ (on a $f(x) > 0$ sur un ensemble $J =]a - \eta, a + \eta[\cap I$ et $\sqrt{f}$ est la composée la restriction de f à J avec la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$).

Remarque 8.1 *Une définition possible de la notion de limite en a est la suivante :*

$$(x \in I,\ 0 < |x - \alpha| < \eta) \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire qu'on s'intéresse à la limite en a par valeurs différentes (on prend $x \in I \setminus \{a\}$). On dit qu'on travaille sur des voisinages épointés de a et on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \ell$. Avec cette définition, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ à l'exercice 8.4 par $g(0) = 1$ et $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ a une limite nulle en 0, mais si on la compose avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ puisque $0 \leq |f(x)| \leq |x|$ pour tout réel x et la fonction $g \circ f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{1}{k\pi} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^* \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

n'a pas de limite en 0 puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{n\pi}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$.
En conclusion, le théorème sur la composition des limites tel qu'on l'a énoncé n'est plus valable avec cette définition. On dispose quand même, avec cette définition, d'un théorème sur la composition des limites en affinant les hypothèses sur f et g.
Mais il est préférable d'opter pour la définition choisie dans ce cours en étant conscient qu'une fonction telle que la fonction g n'a alors pas de limite en 0, ce qui est contraire à l'intuition.

8.6 Limites en un point des fonctions monotones

Le résultat qui suit est analogue a celui obtenu pour les suites monotones bornées.

Théorème 8.12 *Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ [resp. $f :]a,b] \to \mathbb{R}$] est une fonction croissante [resp. décroissante] et majorée [resp. minorée], elle admet alors une limite finie en b [resp. en a]. Cette limite est la borne supérieure [resp. inférieure] de f sur $[a,b[$ [resp. sur $]a,b]$] soit :*

$$\lim_{x\to b} f(x) = \sup_{x\in[a,b[} f(x) \quad \left[\text{resp. } \lim_{x\to a} f(x) = \inf_{x\in]a,b]} f(x)\right].$$

Démonstration. On suppose que $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est croissante majorée (l'autre cas se traite de manière analogue).

Comme f est majorée sur $I = [a,b[$, elle admet une borne supérieure $\ell = \sup\limits_{x\in[a,b[} f(x)$ sur cet intervalle ($f(I)$ est non vide majorée, donc admet une borne supérieure). Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver, par définition de la borne supérieure, un réel $x_0 \in I$ tel que $\ell - \varepsilon < f(x_0) \leq \ell$ et comme f est croissante, on en déduit que :

$$\forall x \in [x_0, b[\,,\ \ell - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon,$$

soit en posant $\eta = b - x_0 > 0$:

$$\forall x \in]x_0, b[=]b - \eta, b + \eta[\cap I,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

■

Remarque 8.2 *Si f est croissante [resp. décroissante] et non majorée [resp. non minorée], elle n'a pas de limite finie en b [resp. en a] puisqu'une fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point. Nous verrons plus loin que pour f croissante et non majorée sur $[a,b[$, on a $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.*

De manière plus générale, on peut montrer qu'une fonction monotone sur un intervalle I admet une limite à gauche et à droite en tout point de I.

8.7 Le critère de Cauchy

Comme pour les suites numériques, on dispose du critère de Cauchy qui permet de montrer qu'une fonction admet une limite finie en un point sans connaître nécessairement cette limite.

Théorème 8.13 *La fonction f admet une limite finie quand x tend vers a dans I si, et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*

$$\forall (x,y) \in (]a - \eta, a + \eta[\cap I)^2,\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{8.2}$$

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in J =]a - \eta, a + \eta[\cap I,\ |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et en conséquence :

$$\forall (x,y) \in J^2,\ |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |f(y) - \ell| < \varepsilon$$

Réciproquement, supposons (8.2) vérifié pour tout $\varepsilon > 0$ donné. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de I qui converge vers a, pour $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que (8.2) soit satisfait, il existe un entier n_0 tel que $u_n \in \left]a-\eta, a+\eta\right[\cap I$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique que $|f(u_n) - f(u_m)| < \varepsilon$ pour tout couple (n, m) d'entiers tels que $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$. La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy et en conséquence convergente. En désignant par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de points de I qui convergent vers a et en notant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$, $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$, pour $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que (8.2) soit satisfait, il existe un entier n_0 tel que u_n v_n soient dans $\left]a-\eta, a+\eta\right[\cap I$ pour tout $n \geq n_0$, et en conséquence :

$$|\ell - \ell'| = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} |f(u_n) - f(v_n)| \leq \varepsilon.$$

Le réel $\varepsilon > 0$ étant quelconque, on nécessairement $\ell = \ell'$. C'est-à-dire que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, ce qui équivaut à dire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. ■