L3 A, intégration : M363

– I – Exercices préliminaires

Exercice 1 *Soient* A, B *deux parties de* X*. Exprimer* $\mathbf{1}_{X\setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\cap B}$, $\mathbf{1}_{AUB}$, $\mathbf{1}_{B\setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\Delta B}$, *en fonction de* $\mathbf{1}_A$ *et* $\mathbf{1}_B$.
Plus généralement, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ *de parties de* X*, exprimer* $\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k}$ *et* $\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}$ *en fonction des* $\mathbf{1}_{A_k}$.

Exercice 2 *Montrer que l'application qui associe à une partie* A *de* X *sa fonction caractéristique* $\mathbf{1}_A$ *réalise une bijection de* $\mathcal{P}(X)$ *sur* $\{0,1\}^X$ *(ensemble des applications de* X *dans* $\{0,1\}$*). Préciser son inverse.*

Exercice 3 *Montrer qu'il n'existe pas de bijection de* X *sur* $\mathcal{P}(X)$ *(théorème de Cantor). On en déduit en particulier que* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *et* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *ne sont pas dénombrables.*

Exercice 4 *Soit* σ *une bijection de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *et* $\sum u_n$ *une série réelle absolument convergente. Montrer que la série* $\sum u_{\sigma(n)}$ *converge absolument avec* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *(cela justifie l'écriture* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *dans le cas d'une série absolument convergente, ce qui est le cas pour une série à termes positifs convergente, ce qui est utilisé implicitement dans la définition d'une mesure).*

Exercice 5 *La longueur d'un intervalle réel* I *est définie par :*

$$\ell(I) = \sup(I) - \inf(I) \in [0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

1. *Soient* $I = [a, b]$ *un intervalle fermé, borné et* $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ *une famille finie d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

2. *Soient* $I = [a, b]$ *un intervalle fermé, borné et* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

3. *Soient* I *un intervalle et* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

4. *Soit* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles deux à deux disjoints inclus dans un intervalle* I. *Montrer que :*
$$\ell(I) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

Exercice 6 *Pour tous réels* $a < b$, *on désigne par* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

1. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *qui converge simplement vers une fonction* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
   Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,b]$ *(théorème de Dini). On donnera deux démonstrations de ce résultat, l'une utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass et l'autre utilisant celle de Borel-Lebesgue.*
2. *Le résultat précédent est-il encore vrai dans* $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ *si on ne suppose plus l'intervalle* I *compact ?*
3. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ *telle que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement vers une fonction* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
   Montrer que :
$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$
4. *On désigne par* $\mathcal{A}$ *la famille des parties de* $\mathbb{R}^2$ *de la forme :*
$$A(f,g) = \{(x,y) \in [a,b]\times\mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$$
   où f, g *sont dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *telles que* $f \leq g$ *et on note :*
$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b (g(t) - f(t))\,dt$$
   Montrer que cette application μ *est* σ*-additive sur* $\mathcal{A}$.

– II – Les mesures

Exercice 7 *Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Montrer que :*

1. $X \in \mathcal{A}$;
2. *si A, B sont dans $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \triangle B$ sont dans $\mathcal{A}$;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable).*

Exercice 8 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) < +\infty$. Montrer que :*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \mu_{k,n}$$

où on a noté pour $1 \leq k \leq n$:

$$\mu_{k,n} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\cdots,n\} \\ \mathrm{card}(I)=k}} \mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

(formule de Poincaré).

Exercice 9

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & \mathcal{P}(X) & \to & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \mathbf{1}_A(x) \end{array}$$

est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$ (mesure de Dirac en x).

2. *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels positifs ou nuls indexée par (n,m) dans $\mathbb{N}^2$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} u_{n,m}$ est convergente de somme S_n et que la série $\sum S_n$ est convergente de somme S.*
Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_{n,m}$ est convergente de somme T_m et que la série $\sum T_m$ est convergente, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

(en fait cette égalité valable dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ pour toute suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs).

3. *On suppose que $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable. Montrer que pour toute suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls tels que la série $\sum p_n$ soit convergente, l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{P}(X) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) \end{array} \tag{1}$$

est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$.

4. *Montrer que toute mesure finie μ sur $\mathcal{P}(X)$ peut s'exprimer sous la forme* (1) *(pour X dénombrable, toute mesure finie est une série pondérée de masses de Dirac).*

Exercice 10 *Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ telle que :*
- $\emptyset \in \mathcal{A}$ *;*
- $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;*
- $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2,\ A \cap B \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par intersection finie) ;*

($\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole) et $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ une application telle que :
- $\mu(\emptyset) = 0$ *;*
- *μ est σ-additive (i. e. $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$).*

1. *Montrer que, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ et $A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$ (dans le cas où $n \geq 2$).*
2. *Montrer que μ est croissante.*
3. *Soient $A \in \mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que :*

$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Exercice 11 *Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur X supposée dénombrable (i. e. en bijection avec une partie, finie ou infinie, de $\mathbb{N}$). Pour tout $x \in X$, on note :*

$$A(x) = \bigcap_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ x\in A}} A$$

(atome de x).

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, $A(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ qui contient x.*
2. *Soient x, y dans X. Montrer que si $y \in A(x)$, on a alors $A(x) = A(y)$.*
3. *Montrer que, pour tous x, y dans X, on a $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ ou $A(x) = A(y)$.*
4. *En désignant par $(x_i)_{i\in I}$ la famille des éléments de X telle que les $A(x_i)$ soient deux à deux disjoints, montrer que cette famille est dénombrable et que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a une partition $A = \bigcup_{j\in J} A(x_j)$, où J est une partie de I.*
5. *En déduire que $\mathcal{A}$ est finie, son cardinal étant une puissance de 2.*

Exercice 12 *Soit X un ensemble dénombrable. Quelle est la σ-algèbre engendrée par les singletons de X ?*

Exercice 13 *Soit X un ensemble non dénombrable.*

1. *Quelle est la σ-algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par les singletons de X ?*

2. *Montrer que l'application :*

$$\begin{array}{rccl} \mu : & \mathcal{A} & \to & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 \text{ si } X \setminus A \text{ est dénombrable} \end{array} \right. \end{array}$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Exercice 14 *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré.*

1. *Montrer que si* A, B *sont des éléments de* $\mathcal{A}$ *tels que* $A \subset B$ *et* $\mu(B) < +\infty$, *on a alors :*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

2. *Soient* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante d'éléments de* $\mathcal{A}$ *et* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *Montrer que la suite* $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en croissant vers* $\mu(A)$.
3. *Soient* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante d'éléments de* $\mathcal{A}$ *et* $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *En supposant qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, *montrer que la suite* $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en décroissant vers* $\mu(A)$.

Exercice 15 *Soient* μ *une mesure finie sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* F *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mu([x, +\infty[)$$

1. *Montrer que* F *est décroissante avec, pour tout réel* x *:*

$$\lim_{\substack{t\to x \\ t<x}} F(t) = F(x)\,,\ \lim_{\substack{t\to x \\ t>x}} F(t) = F(x) - \mu(\{x\})$$

et :

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \mu(\mathbb{R})\,,\ \lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$$

2. *Montrer que l'ensemble :*

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x\}) > 0\}$$

est dénombrable.

Exercice 16 *La mesure* ℓ *des intervalles réels se prolonge de manière unique en une mesure sur la tribu* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *des boréliens, cette mesure étant invariante par translation. C'est la mesure de Lebesgue sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Nous allons vérifier que cette mesure ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
On désigne par $\mathcal{C}$ *le groupe quotient* $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

1. *Vérifier que, pour toute classe d'équivalence* $c \in \mathcal{C}$, *on peut trouver un représentant* x *dans* $[0, 1[$.
   Pour tout $c \in \mathcal{C}$, *on se fixe un représentant* x_c *de* c *dans* $[0, 1[$ *(axiome du choix) et on désigne par* A *l'ensemble de tous ces réels* x_c.
2. *Montrer que les translatés* $r + A$, *où* r *décrit* $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, *sont deux à deux disjoints et que :*

$$[0, 1] \subset \bigcup_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1, 2]$$

3. *En déduire que A n'est pas borélien et que ℓ ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*
4. *Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non mesurable ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu de Borel) telle que $|f|$ soit mesurable.*

Exercice 17 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Montrer que si A, B sont des éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A \subset B$ et $\mu(B) < +\infty$, on a alors :*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

2. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $\mu(A)$.*
3. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En supposant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers $\mu(A)$.*

Exercice 18 *Soient μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mu([x, +\infty[)$$

1. *Montrer que F est décroissante avec, pour tout réel x :*

$$\lim_{\substack{t\to x\\ t<x}} F(t) = F(x),\ \lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} F(t) = F(x) - \mu(\{x\})$$

et :

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \mu(\mathbb{R}),\ \lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$$

2. *Montrer que l'ensemble :*

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x\}) > 0\}$$

est dénombrable.

– III – Fonctions mesurables

Exercice 19 $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Montrer que* f *est mesurable si, et seulement si, la restriction de* f *à tout segment* $[a, b]$ *est mesurable.*

Exercice 20 *Soient* E *un espace vectoriel normé et* $a < b$ *deux réels.*
Une fonction $f : [a, b] \to E$ *est dite réglée si elle admet une limite à droite en tout point de* $[a, b[$ *et une limite à gauche en tout point de* $]a, b]$.
On notera $f(x^-)$ *[resp.* $f(x^+)$*] la limite à gauche [resp. à droite] en* $x \in]a, b]$ *[resp. en* $x \in [a, b[$*].*

1. *Montrer qu'une fonction réglée est bornée.*
2. *Montrer qu'une limite uniforme de fonctions réglées de* $[a, b]$ *dans* E *est réglée.*
3. *Soit* $f : [a, b] \to E$ *une fonction réglée et* $\varepsilon > 0$. *On note :*

$$E_\varepsilon = \left\{ x \in]a, b] \mid \text{il existe } \varphi \text{ en escaliers sur } [a, x] \text{ telle que } \sup_{t \in [a,x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon \right\}$$

   Montrer que $E_x \neq \emptyset$, *puis que* $b = \max(E_\varepsilon)$.
4. *Montrer qu'une fonction* $f : [a, b] \to E$ *est réglée si, et seulement si, elle est limite uniforme sur* $[a, b]$ *d'une suite de fonctions en escaliers.*
5. *Montrer qu'une fonction réglée* $f : [a, b] \to E$ *est borélienne et qu'elle est continue sur* $[a, b]$ *privé d'un ensemble* D *dénombrable (éventuellement vide).*
6. *La fonction* $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ *est-elle réglée ?*
7. *En désignant par* $E(t)$ *la partie entière d'un réel* t, *montrer que la fonction* f *définie sur* $[0, 1]$ *par :*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(nx)}{2^n}$$

   est réglée, puis calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$ *(il s'agit d'une intégrale de Riemann).*

Exercice 21 $[a, b]$ *est un intervalle fermé borné fixé avec* $a < b$ *réels.*

1. *Montrer que les fonctions en escaliers positives sur* $[a, b]$ *sont exactement les fonctions du type :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

   où $n \in \mathbb{N}^*$, *les* a_k *sont des réels positifs ou nuls et les* I_k *sont des intervalles contenus dans* $[a, b]$.
2. *Montrer que si* $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ *est une suite finie de fonctions en escaliers sur* $[a, b]$, *alors la fonction* $\varphi = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \varphi_k$ *est aussi en escaliers.*
3. *Soit* f *une fonction réglée définie sur* $[a, b]$ *et à valeurs positives.*
   (a) *Montrer qu'il existe une suite* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$ *et telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, b],\ \varphi_n(x) \leq f(x)$$

(b) *On désigne par* $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de fonctions définie sur* $[a,b]$ *par* $\psi_0 = 0$ *et pour tout* $n \geq 1$ *:*

$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

Monter que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$.

(c) *Montrer qu'il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série* $\sum f_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$.

4. *Montrer que les fonctions réglées à valeurs positives sur* $[a,b]$ *sont exactement les fonctions de la forme :*

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$$

où les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels positifs ou nuls,* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'intervalles contenus dans* $[a,b]$ *et la série considérée converge uniformément sur* $[a,b]$.

Exercice 22 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Montrer que sa dérivée* f' *est borélienne.*

Exercice 23

1. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *L'ensemble des réels* x *tels que la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *soit convergente est-il ouvert ? fermé ?*
2. *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$ *(*$\mathbb{R}$ *étant muni de la tribu borélienne).*
Montrer que l'ensemble des éléments x *de* X *tels que la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *soit convergente est mesurable.*