12. Analyse fonctionnelle et vocabulaire de la topologie

a) Topologie et espaces métriques

Distance, boules ouvertes et fermées. Parties ouvertes et fermées. Voisinages. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Distance à une partie, diamètre d'une partie. Parties denses, points isolés, points d'accumulation. Produits finis d'espaces métriques.

Suites, limites, valeurs d'adhérence, sous-suites, suites de Cauchy. Caractérisation de l'adhérence par les suites.

Continuité d'une application en un point, caractérisation par les suites. Continuité sur l'espace entier, caractérisation par les images réciproques des ouverts et fermés. Homéomorphismes. Applications uniformément continues. Algèbre des fonctions numériques continues.

b) Espaces vectoriels normés sur R ou C

Normes. Distance associée à une norme. Normes équivalentes. Continuité des opérations. Applications linéaires continues, normes de ces applications.

c) Espaces métriques compacts

Définition séquentielle. Parties compactes d'un compact. Parties compactes de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts. Parties compactes de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$.

Image continue d'un compact. Théorème de Heine de continuité uniforme des applications continues.

d) Espaces métriques connexes

Définitions. Parties connexes. Union de parties connexes d'intersection non vide. Parties connexes de $\mathbf{R}$. Image continue d'un connexe. Théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs : elle implique la connexité et lui équivaut sur un ouvert d'un espace vectoriel normé.

e) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème d'équivalence des normes. Les parties compactes sont les fermés bornés. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires en dimension finie.

Exponentielle d'un endomorphisme.

f) Espaces métriques complets

Définition. Parties complètes d'un espace complet. Exemples de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème du point fixe pour les contractions d'un espace complet dans lui-même. Application aux approximations successives.

Critère de Cauchy pour l'existence de la limite d'une application en un point.

g) Espaces de Banach

Définition. Critère de Cauchy pour les séries. L'absolue convergence d'une série implique la convergence. Sous-espaces de Banach.

Espaces de Banach usuels de suites et de fonctions. Espace de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Banach vers un autre.

Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple, uniforme, uniforme sur tout compact. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Critère de Cauchy uniforme. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ simplement convergente et dont la suite des dérivées converge uniformément.

Séries d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergence simple et uniforme. Convergence normale. Critère de Cauchy uniforme. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel.

h) Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Inégalités de Cauchy-Schwarz. Norme associée. Théorème de Pythagore. Familles orthonormales. Procédé de Schmidt. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; distance à un tel sous-espace.

Exemples de produits scalaires ; exemples de suites de polynômes orthogonaux.