L3 A, intégration : M363

– I – Les mesures

Exercice 1 *Soient A, B deux parties de X. Exprimer $\mathbf{1}_{X\setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\cap B}$, $\mathbf{1}_{AUB}$, $\mathbf{1}_{B\setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\Delta B}$, en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.*

Exercice 2 *Montrer que l'application qui associe à une partie A de X sa fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ réalise une bijection de $\mathcal{P}(X)$ sur $\{0,1\}^X$ (ensemble des applications de X dans $\{0,1\}$). Préciser son inverse.*

Exercice 3 *Montrer qu'il n'existe pas de bijection de X sur $\mathcal{P}(X)$ (théorème de Cantor). On en déduit en particulier que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.*

Exercice 4 *Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Montrer que :*

1. *$X \in \mathcal{A}$;*
2. *si A, B sont dans $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \triangle B$ sont dans $\mathcal{A}$;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable).*

Exercice 5 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) < +\infty$. Montrer que :*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \mu_{k,n}$$

où on a noté pour $1 \leq k \leq n$:

$$\mu_{k,n} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\cdots,n\} \\ \mathrm{card}(I)=k}} \mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

(formule de Poincaré).

Exercice 6

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, l'application :*
$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & \mathcal{P}(X) & \to & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \mathbf{1}_A(x) \end{array}$$
est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$ (mesure de Dirac en x).
2. *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels positifs ou nuls indexée par (n,m) dans $\mathbb{N}^2$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} u_{n,m}$ est convergente de somme S_n et que la série $\sum S_n$ est convergente de somme S.*
Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_{n,m}$ est convergente de somme T_m et que la série $\sum T_m$ est convergente, soit :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$
(en fait cette égalité valable dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ pour toute suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs).

3. *On suppose que* $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *est un ensemble dénombrable. Montrer que pour toute suite* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels positifs ou nuls tels que la série* $\sum p_n$ *soit convergente, l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{P}(X) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) \end{array} \tag{1}$$

est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$ *.*

4. *Montrer que toute mesure finie* μ *sur* $\mathcal{P}(X)$ *peut s'exprimer sous la forme* (1) *(pour* X *dénombrable, toute mesure finie est une série pondérée de masses de Dirac).*

Exercice 7 *Soit* σ *une bijection de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *et* $\sum u_n$ *une série réelle absolument convergente. Montrer que la série* $\sum u_{\sigma(n)}$ *converge absolument avec* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *(cela justifie l'écriture* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *dans le cas d'une série absolument convergente, ce qui est le cas pour une série à termes positifs convergente, ce qui est utilisé implicitement dans la définition d'une mesure).*

Exercice 8 *Soient* $\mathcal{A}$ *une partie de* $\mathcal{P}(X)$ *telle que :*
- $\emptyset \in \mathcal{A}$ *;*
- $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ *(*$\mathcal{A}$ *est stable par passage au complémentaire) ;*
- $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2,\ A \cap B \in \mathcal{A}$ *(*$\mathcal{A}$ *est stable par intersection finie) ;*

($\mathcal{A}$ *est une algèbre de Boole) et* $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *une application telle que :*
- $\mu(\emptyset) = 0$ *;*
- μ *est* σ*-additive (i. e.* $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ *pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$ *deux à deux disjoints telle que* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$*).*

1. *Montrer que, pour toute suite finie* $(A_k)_{1\le k\le n}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$*, on a* $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$*,* $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ *et* $A_n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$ *(dans le cas où* $n \geq 2$*).*
2. *Montrer que* μ *est croissante.*
3. *Soient* $A \in \mathcal{A}$ *et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$ *telle que* $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$*. Montrer que :*

$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Exercice 9 *Soit* $\mathcal{A}$ *une* σ*-algèbre sur* X *supposée dénombrable (i. e. en bijection avec une partie, finie ou infinie, de* $\mathbb{N}$*). Pour tout* $x \in X$*, on note :*

$$A(x) = \bigcap_{\substack{A\in\mathcal{A} \\ x\in A}} A$$

(atome de x*).*

1. *Montrer que, pour tout* $x \in X$*,* $A(x)$ *est le plus petit élément de* $\mathcal{A}$ *qui contient* x*.*
2. *Soient* x, y *dans* X*. Montrer que si* $y \in A(x)$ *, on a alors* $A(x) = A(y)$ *.*

3. *Montrer que, pour tous x, y dans X, on a $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ ou $A(x) = A(y)$.*
4. *En désignant par $(x_i)_{i \in I}$ la famille des éléments de X telle que les $A(x_i)$ soient deux à deux disjoints, montrer que cette famille est dénombrable et que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a une partition $A = \bigcup_{j \in J} A(x_j)$, où J est une partie de I.*
5. *En déduire que $\mathcal{A}$ est finie, son cardinal étant une puissance de 2.*

Exercice 10 *La longueur d'un intervalle réel I est définie par :*

$$\ell(I) = \sup(I) - \inf(I) \in [0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

1. *Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé, borné et $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

2. *Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé, borné et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

3. *Soient I un intervalle et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

4. *Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles deux à deux disjoints inclus dans un intervalle I. Montrer que :*

$$\ell(I) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

Exercice 11 *Pour tous réels $a < b$, on désigne par $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.*
Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, b]$ (théorème de Dini). On donnera deux démonstrations de ce résultat, l'une utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass et l'autre utilisant celle de Borel-Lebesgue.
2. *Le résultat précédent est-il encore vrai dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ si on ne suppose plus l'intervalle I compact ?*

3. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ *telle que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement vers une fonction* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
   Montrer que :
$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$
4. *On désigne par* $\mathcal{A}$ *la famille des parties de* $\mathbb{R}^2$ *de la forme :*
$$A(f,g) = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$$
   où f, g *sont dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *telles que* $f \leq g$ *et on note :*
$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b (g(t) - f(t))\,dt$$
   Montrer que cette application μ *est* σ*-additive sur* $\mathcal{A}$.

Exercice 12 *Soit* X *un ensemble dénombrable. Quelle est la* σ*-algèbre engendrée par les singletons de* X *?*

Exercice 13 *Soit* X *un ensemble non dénombrable.*

1. *Quelle est la* σ*-algèbre* $\mathcal{A}$ *engendrée par les singletons de* X *?*
2. *Montrer que l'application :*
$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{A} & \to & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 \text{ si } X \setminus A \text{ est dénombrable} \end{array} \right. \end{array}$$
   est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Exercice 14 *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré.*

1. *Montrer que si* A, B *sont des éléments de* $\mathcal{A}$ *tels que* $A \subset B$ *et* $\mu(B) < +\infty$, *on a alors :*
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$
2. *Soient* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante d'éléments de* $\mathcal{A}$ *et* $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *Montrer que la suite* $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en croissant vers* $\mu(A)$.
3. *Soient* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante d'éléments de* $\mathcal{A}$ *et* $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *En supposant qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, *montrer que la suite* $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en décroissant vers* $\mu(A)$.

Exercice 15 *Soient* μ *une mesure finie sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* F *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mu([x, +\infty[)$$

1. *Montrer que* F *est décroissante avec, pour tout réel* x *:*
$$\lim_{\substack{t\to x\\ t<x}} F(t) = F(x),\ \lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} F(t) = F(x) - \mu(\{x\})$$
   et :
$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \mu(\mathbb{R}),\ \lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$$

2. *Montrer que l'ensemble :*
$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x\}) > 0\}$$
est dénombrable.

– II – Fonctions mesurables

Exercice 16 $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Montrer que* f *est mesurable si, et seulement si, la restriction de* f *à tout segment* $[a, b]$ *est mesurable.*

Exercice 17 *Soient* E *un espace vectoriel normé et* $a < b$ *deux réels.*
Une fonction $f : [a, b] \to E$ *est dite réglée si elle admet une limite à droite en tout point de* $[a, b[$ *et une limite à gauche en tout point de* $]a, b]$.
On notera $f(x^-)$ *[resp.* $f(x^+)$*] la limite à gauche [resp. à droite] en* $x \in \,]a, b]$ *[resp. en* $x \in [a, b[$*].*

1. *Montrer qu'une fonction réglée est bornée.*
2. *Montrer qu'une limite uniforme de fonctions réglées de* $[a, b]$ *dans* E *est réglée.*
3. *Soit* $f : [a, b] \to E$ *une fonction réglée et* $\varepsilon > 0$. *On note :*
$$E_\varepsilon = \left\{ x \in \,]a, b] \mid \textit{il existe } \varphi \textit{ en escaliers sur } [a, x] \textit{ telle que } \sup_{t \in [a,x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon \right\}$$
Montrer que $E_x \neq \emptyset$, *puis que* $b = \max(E_\varepsilon)$.
4. *Montrer qu'une fonction* $f : [a, b] \to E$ *est réglée si, et seulement si, elle est limite uniforme sur* $[a, b]$ *d'une suite de fonctions en escaliers.*
5. *Montrer qu'une fonction réglée* $f : [a, b] \to E$ *est borélienne et qu'elle est continue sur* $[a, b]$ *privé d'un ensemble* D *dénombrable (éventuellement vide).*
6. *La fonction* $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ *est-elle réglée ?*
7. *En désignant par* $E(t)$ *la partie entière d'un réel* t, *montrer que la fonction* f *définie sur* $[0, 1]$ *par :*
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(nx)}{2^n}$$
est réglée, puis calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ *(il s'agit d'une intégrale de Riemann).*

Exercice 18 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Montrer que sa dérivée* f' *est borélienne.*

Exercice 19

1. *Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *L'ensemble des réels* x *tels que la suite* $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ *soit convergente est-il ouvert ? fermé ?*
2. *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$ *(*$\mathbb{R}$ *étant muni de la tribu borélienne).*
Montrer que l'ensemble des éléments x *de* X *tels que la suite* $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ *soit convergente est mesurable.*

– III – Calculs de primitives

Exercice 20 *Calculer* $\int \frac{dx}{x-\alpha}$ *pour tout nombre complexe non réel,* $\alpha = a + ib$ *(avec* $b \neq 0$*).*

Exercice 21 *Pour tout entier* $n \geq 1$, *on désigne par* $F_n : x \in \mathbb{R} \mapsto F_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ *la primitive de* $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ *nulle en* 0.

1. *Calculer* F_1.
2. *Montrer que, pour tout réel* x, *on a :*
$$2F_2(x) = F_1(x) + \frac{x}{1+x^2}$$
et en déduire la valeur de F_2.
3. *Montrer que, pour tout entier* $n \geq 1$, *on a :*
$$2nF_{n+1}(x) = (2n-1)F_n(x) + \frac{x}{(1+x^2)^n}$$
4. *On note* $\alpha_n = \frac{(2^n n!)^2}{2n(2n)!}$ *pour tout* $n \geq 0$.
   (a) *Montrer que :*
   $$2n\alpha_n = (2n+1)\alpha_{n+1}$$
   (b) *Montrer que :*
   $$2\sum_{k=1}^n k\alpha_k F_{k+1} = \sum_{k=1}^n (2k-1)\alpha_k F_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^k}$$
   (c) *En déduire que :*
   $$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n\alpha_n}\left(\arctan(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^k}\right)$$
   (d) *Préciser* F_3.

Exercice 22 *Pour tout* $p \in [1, +\infty]$, *on désigne par* $B_p = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1\right\}$ *la boule unité de* $\mathbb{R}^2$ *pour la norme* $\|\cdot\|_p$ *et par* $\mathcal{A}_p$ *l'aire de* B_p.
Montrer que l'application $\mathcal{A}$ *est croissante sur* $[p, +\infty[$, *déterminer sa borne inférieure et sa borne supérieure et calculer* $\mathcal{A}_p$ *pour tout* $p \geq 1$.

Exercice 23 ***Volume d'une boule de*** $\mathbb{R}^n$
On désigne, pour tout entier $n \geq 2$ *et tout réel* $R > 0$, *par* $B_n(0,R)$ *la boule de* $\mathbb{R}^n$ *de centre* 0 *et de rayon* R *et par* $V_n(R)$ *le volume de cette boule.*

1. *Montrer que* $V_n(R) = R^n V_n(1)$. *On est donc ramené au calcul du volume :*
$$V_n = V_n(1) = \int_{B_n(0,1)} dx_1 \cdots dx_n$$
de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.
On note $V_0 = 1$ *et* $V_1 = 2$ *est la longueur du segment* $[-1, 1]$.

2. On désigne par $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des intégrales de Wallis définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$$

(a) Calculer W_0 et W_1, puis montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

(b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$W_{n+1} W_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

3.

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $V_n = \dfrac{2\pi}{n} V_{n-2}$.

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$V_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^p}{p!} \ \textit{si } n = 2p \\ 2^{2p+1} \dfrac{p!}{(2p+1)!} \pi^p \ \textit{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

(c) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$W_n = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2^{2p+1}} \binom{2p}{p} \ \textit{si } n = 2p \\ \dfrac{1}{2p+1} \dfrac{2^{2p}}{\binom{2p}{p}} \ \textit{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

4. Pour $n \geq 3$, on utilise le passage en coordonnées sphériques $x = \varphi(r,\theta) = \varphi(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})$ défini par :

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\theta_1) \\ x_2 = r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ x_3 = r\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\theta_3) \\ \vdots \\ x_{n-2} = r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{n-3})\cos(\theta_{n-2}) \\ x_{n-1} = r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{n-2})\cos(\theta_{n-1}) \\ x_n = r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{n-2})\sin(\theta_{n-1}) \end{cases}$$

avec $r \in \mathbb{R}^{+,*}$, $\theta_1,\cdots,\theta_{n-2}$ dans $[0,\pi]$ et $\theta_{n-1} \in \left]-\pi,\pi\right]$.

(a) Montrer que le déterminant jacobien de φ est donné par :

$$J_\varphi(r,\theta) = r^{n-1}\sin^{n-2}(\theta_1)\sin^{n-3}(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-2})$$

(b) En déduire que :

$$V_n = \frac{2\pi}{n} 2^{n-2} W_{n-2}\cdots W_1$$

– IV – Intégration

Exercice 24 *Montrer que la fonction* $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ *n'est pas Riemann-intégrable sur* $[a,b]$.

Exercice 25 *Étant donnée une fonction* $f \in \mathcal{C}^0([a,b]\times[c,d],\mathbb{C})$, *où* $a<b$ *et* $c<d$, *on lui associe les fonctions* α *et* β *définies sur* $[c,d]$ *par :*

$$\forall z \in [c,d],\ \begin{cases} \alpha(z) = \displaystyle\int_c^z \left(\int_a^b f(t,x)\,dt\right) dx \\ \beta(z) = \displaystyle\int_a^b \left(\int_c^z f(t,x)\,dx\right) dt \end{cases}$$

1. *Montrer que la fonction* α *est de classe* C^1 *sur* $[c,d]$ *et donner une expression de sa dérivée* α'.
2. *On désigne par* γ *la fonction définie sur le rectangle* $R=[a,b]\times[c,d]$ *par :*

$$\gamma(t,z) = \int_c^z f(t,x)\,dx$$

Montrer que la fonction γ *est continue sur* R *et qu'elle admet une dérivée partielle par rapport à* z *en tout point de* R, *cette dérivée* $\dfrac{\partial\gamma}{\partial z}$ *étant continue sur* R.

3. *Montrer que la fonction* β *est de classe* C^1 *sur* $[c,d]$ *et donner une expression de sa dérivée* β'.
4. *Déduire de ce qui précède que :*

$$\forall z \in [c,d],\ \int_c^z \left(\int_a^b f(t,x)\,dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_0^z f(t,x)\,dx\right) dt$$

et en particulier :

$$\int_c^d \left(\int_a^b \psi(t,x)\,dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d \psi(t,x)\,dx\right) dt$$

(théorème de Fubini pour les fonctions continues sur un rectangle).

Exercice 26 ***Calcul de l'intégrale de Gauss*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

1. *Montrer que l'intégrale de la fonction* $f : x \mapsto e^{-x^2}$ *est convergente sur* $[0,+\infty[$.
2. *Pour tout réel* $R>0$, *on note :*

$$I_R = \int_0^R e^{-t^2}dt$$

$$C_R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x,y\le R\right\} \text{ et } T_R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le x\le R\right\}$$

(a) *Montrer que :*

$$I_R^2 = 2\iint_{T_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

(b) *Montrer que :*

$$I_R^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}}d\theta$$

et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. *En munissant, pour tout entier* $n\ge 1$, $\mathbb{R}^n$ *de sa structure euclidienne canonique, calculer* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}dx$.

Exercice 27 *On se place sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \ \mu(A) = \mathrm{card}(A) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} x d\mu$ *pour toute suite réelle positive* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs complexes soit sommable.*

Exercice 28 *On se place sur* $(X, \mathcal{P}(X))$ *muni d'une mesure de Dirac* $\mu = \delta_x$, *où* $x \in X$ *est fixé.*
Calculer $\displaystyle\int_X f d\mu$ *pour toute fonction* $f : X \to \mathbb{R}^+$.

Exercice 29 *Soient* X, Y *deux espaces métriques munis de leur tribu borélienne respective. Montrer qu'une fonction* $f : X \to Y$ *qui est continue sur* X *privé d'un ensemble* D *dénombrable est borélienne.*

Exercice 30 *On se place sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, *où* λ *est la mesure de Lebesgue.*

1. *Montrer que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver un ouvert* $\mathcal{O}$ *dense dans* $\mathbb{R}$ *tel que* $\lambda(\mathcal{O}) < \varepsilon$.
2. *Montrer qu'une partie mesurable bornée de* $\mathbb{R}$ *est de mesure finie. La réciproque est-elle vraie ?*
3. *Montrer qu'une partie mesurable de* $\mathbb{R}$ *d'intérieur non vide est de mesure non nulle. La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Montrer qu'une partie mesurable* A *de* $[0, 1]$ *de mesure égale à* 1 *est dense dans* $[0, 1]$. *Réciproquement un ouvert dense de* $[0, 1]$ *est-il de mesure égale à* 1 *?*

Exercice 31 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré avec* $\mu \neq 0$, $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel et les fonctions considérées sont à valeurs réelles.*

1. *Montrer que si* f, g *sont deux fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$, *les fonctions* $f + g$ *et* fg *sont mesurables.*
2. *Montrer que la somme de deux fonctions intégrables est intégrable.*
3. *Le produit de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
4. *La composée de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
5. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable positive. Montrer que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe un réel* $\eta > 0$ *tel que :*
$$(A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < \eta) \Rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon$$
6. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Montrer que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe une partie mesurable* A *de* X *telle que* $\mu(A) > 0$ *et* $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ *pour tous* x, y *dans* A.
7. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable positive. Montrer que pour tout réel* $\alpha > 0$, *on a :*
$$\mu\left(f^{-1}([\alpha, +\infty[)\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu$$
8. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable positive. Montrer que* $\displaystyle\int_X f d\mu = 0$ *si, et seulement si,* f *est nulle presque partout.*
9. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable positive. Montrer que si* $\displaystyle\int_X f d\mu < +\infty$, *on a alors* $f(x) < +\infty$ *presque partout.*

10. *Soient f, g deux fonctions mesurables positives sur X. Montrer que si $f = g$ presque partout, alors $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.*
11. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) > 0$ et f est bornée sur A.*
12. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f \neq 0$ presque partout. Montrer qu'il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ est minorée sur A par une constante strictement positive.*
13. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que si $\int_A f d\mu = 0$ pour toute partie A mesurable dans X, alors la fonction f est nulle presque partout.*

Exercice 32 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, la mesure μ étant finie, et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel). On définit les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de X par :*

$$A_n = f^{-1}([n, +\infty[) \, , \; B_n = f^{-1}([n, n+1[)$$

et g est la fonction définie sur X par $g = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbf{1}_{B_n}$.

1. *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(B_k)$.*
2. *Montrer que $g \leq f < g + 1$.*
3. *Montrer que f est intégrable si, et seulement si, la série $\sum n\mu(B_n)$ est convergente.*
4. *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} k\mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - n\mu(A_{n+1})$$

5. *Montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.*
6. *Montrer que f est intégrable si, et seulement si, la série $\sum \mu(A_n)$ est convergente.*
7. *Le résultat précédent est-il valable dan le cas où $\mu(X) = +\infty$?*

Exercice 33 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.*

1. *Montrer que s'il existe une fonction intégrable $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ telle $|f| \leq \varphi$ presque partout, la fonction f est alors intégrable.*
2. *Montrer que si f est bornée presque partout et $\mu(X)$ est fini, la fonction f est alors intégrable. En particulier, une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est mesurable et bornée presque partout est intégrable.*

Exercice 34

1. *Soient I un intervalle réel non réduit à un point et $a \in I$.*
   Pour tout $x \in I$, on désigne par $I_{a,x}$ l'intervalle fermé d'extrémités a et x.
   On se donne une fonction mesurable bornée, $f : I \to \mathbb{R}$ et on désigne par F la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, \; F(x) = \int_{I_{a,x}} f(t) \, dt$$

soit :

$$F(x) = \begin{cases} \int_a^x f(t)\,dt \text{ si } a \leq x \\ \int_x^a f(t)\,dt \text{ si } x \leq a \end{cases}$$

Montrer que F est lipschitzienne (donc uniformément continue) sur I et qu'elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$ où la fonction f est continue avec $F'(x_0) = f(x_0)$.

2. *Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable de dérivée bornée, alors f' est intégrable sur $[a,b]$ et :*

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

3. *En considérant la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par $f(0) = 0$ et :*

$$f(x) = \frac{x}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

pour $x \neq 0$, vérifier que le résultat précédent n'est plus valable pour f dérivable de dérivée non bornée.

– V – Convergence monotone, convergence dominée

Exercice 35 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$ qui converge vers une fonction f. Montrer que s'il existe une constante $M > 0$ telle que $\int_X f_n d\mu \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\int_X f d\mu \leq M$.*
2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$ qui converge presque partout vers une fonction f.*
   Montrer que si f_0 est intégrable, il en est alors de même de toutes les fonctions f_n ainsi que de f et qu'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

   Le résultat subsiste-t-il si $\int_X f_0 d\mu = +\infty$?
3. *Soient $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de parties mesurables de X définie par :*

$$A_n = |f|^{-1}([n, +\infty[)$$

   (a) *Montrer que f est finie presque partout et que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} |f|\,d\mu = 0$$

   (b) *Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*

$$(A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < \eta) \Rightarrow \int_A |f|\,d\mu < \varepsilon$$

(c) *En prenant* $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *où* λ *est la mesure de Lebesgue, montrer que la fonction* F *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ *(*$\int_0^x f(t)\,dt$ *désigne l'intégrale de* f *sur l'intervalle d'extrémités* 0 *et* x*).*

Exercice 36 *On se place sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu(A) = \mathrm{card}(A) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on désigne par* δ_n *la mesure de Dirac en* n*.*

1. *Montrer que* $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$*.*
2. *Montrer que pour toute suite réelle positive* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, on a* $\int_{\mathbb{N}} x\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$*.*
3. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right)$*.*

Exercice 37 *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2 x (1-x)^n\,dx$ *et conclure.*

Exercice 38 *Pour tout réel* $\alpha > 0$*, on désigne par* $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite réelle définie par :*

$$I_n(\alpha) = \int_0^{n^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{x^\alpha}{n}\right)^n dx$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Exercice 39 *Pour tout réel* $\alpha > 0$*, on désigne par* $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite réelle définie par :*

$$I_n(\alpha) = \int_1^{+\infty} n^\alpha \sin\left(\frac{x}{n}\right) e^{-n^2x^2}\,dx$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Exercice 40

1. *Montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\,dt$$

2. *Montrer que :*

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right)$$

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\,dt$*.*

Exercice 41

1. *Montrer que, tout réel x et tout réel $t \in]-1,1[$ la série $\sum t^{n-1}\sin(nx)$ est convergente et calculer sa somme. On notera $f(x,t)$ cette somme.*
2. *Montrer que, pour tout réel $x \in]0,\pi[$, on a $\displaystyle\int_0^1 f(x,t)\,dt = \frac{\pi - x}{2}$.*
3. *Monter que, pour tout réel $x \in]0,\pi[$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$.*

Exercice 42 *Soient $a < b$ deux réels et $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles telles que :*

$$\forall x \in]a,b[,\ \lim_{n\to+\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right) = 0$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ (lemme de Cantor).
On peut raisonner par l'absurde en utilisant une suite de fonctions définie par :

$$f_k(x) = \frac{\left(a_{n_k}\cos(n_k x) + b_{n_k}\sin(n_k x)\right)^2}{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2}$$

où la suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ est judicieusement choisie.

Exercice 43 *On désigne par $\mathcal{H}$ le demi plan complexe défini par :*

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

1. *Montrer que, pour tout nombre complexe z, la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]1,+\infty[$.*
2. *Soit z un nombre complexe. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement si, $z \in \mathcal{H}$.*
   La fonction gamma d'Euler est la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :
   $$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$
3. *Montrer que $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.*
4. *Montrer que la fonction gamma vérifie l'équation fonctionnelle :*
   $$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2}$$
5. *Montrer que pour tout entier naturel n, on a :*
   $$\Gamma(n+1) = n! \text{ et } \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$
6.
   (a) *Soient z et α deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $(z,\alpha) \in \mathcal{H}^2$.*

   (b) *Montrer que :*
   $$\forall (z,\alpha) \in \mathcal{H}\times\mathbb{R}^{+,*},\ \int_0^{+\infty}\frac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}}dt = \Gamma(z+1)\,\zeta(z+1,\alpha)$$
   où ζ est la fonction dzéta de Hurwitz définie par :
   $$\forall (z,\alpha) \in \mathcal{H}\times\mathbb{R}^{+,*},\ \zeta(z+1,\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^{z+1}}$$

7. *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on note :*

$$I_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

   (a) *Montrer que :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = I_n(z)$$

   (b) *En déduire que :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

   (formule d'Euler).

8. *Montrer que :*

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}$$

   soit :

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

   (formule de Wallis).

9.
   (a) *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$I_{2n}(z) = 2^{z-1}\left(1 + \frac{z}{2n+1}\right) \frac{I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}$$

   (b) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

   (formule de Legendre).

10. *On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}$ par :*

$$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R},\ f(x,u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \leq -\sqrt{x} \\ \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} \text{ si } u > -\sqrt{x} \end{cases}$$

   (a) *Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :*

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\, du$$

   (b) *Montrer que, pour tout réel u, on a :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

   (c) *Montrer que pour tout $(x,u) \in [1,+\infty[\times \mathbb{R}$, on a :*

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u) = \begin{cases} e^{-\frac{u^2}{2}} \text{ si } u \leq 0 \\ (1+u)\, e^{-u} \text{ si } u > 0 \end{cases}$$

(d) *En déduire la formule de Stirling :*

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Pour $x = n$ entier naturel non nul, on retrouve la formule usuelle :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

11. *Montrer que la fonction gamma est continue sur $\mathcal{H}$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec pour tout entier naturel non nul n et tout réel strictement positif x :*

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t} dt$$

12. *En utilisant l'équation fonctionnelle (2), montrer que la fonction Γ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et que ce prolongement vérifie la même équation fonctionnelle. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, on notera encore $\Gamma(z)$ ce prolongement.*
13. *Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :*

$$\Gamma(z) \underset{z\to-n}{\backsim} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$$

14. ***La formule des compléments.***
On désigne par φ la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \varphi(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1+t} dt$$

et par $\mathcal{D}$ la bande ouverte du plan complexe définie par :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(z) < 1\}$$

(a) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

(b) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

(c) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$$

(d) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} - 2z\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2}$$

(e) *Montrer que, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et tout réel $t \in [0,\pi]$, on a :*

$$\cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}\left(\frac{1}{z} - 2z\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2}\cos(nt)\right)$$

(f) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

(g) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}$$

(h) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Exercice 44 ***Utilisation d'une intégrale double pour calculer*** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1. *Montrer que :*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y} dy$$
2. *En déduire que :*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \int\int_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{1-xy}$$
3. *Montrer que l'application $\varphi : (u,v) \mapsto (u-v, u+v)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même et préciser son inverse.*
4. *Déterminer l'image par φ^{-1} du carré $[0,1]^2$.*
5. *Montrer que pour tout $u \in \left]0,1\right[$, on a :*
$$\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arcsin(u)$$
et :
$$\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin(u)}{2}$$
6. *En utilisant le changement de variable $(x,y) = \varphi(u,v)$, montrer que $\iint \frac{dxdy}{1-xy} = \frac{\pi^2}{6}$ et en conséquence $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.*

– VI – Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 45 *Montrer que $\ell^*(I) = \ell(I)$ pour tout intervalle réel I et que ℓ^* est une mesure extérieure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que :*

$$\ell^*(\emptyset) = 0$$
$$A \subset B \Rightarrow \ell^*(A) \leq \ell^*(B)$$

et pour toute partie A de $\mathbb{R}$, toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}$,telles que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, on a :

$$\ell^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell^*(A_n)$$

Exercice 46 *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est négligeable si $\ell^*(A) = 0$.*

1. *Montrer qu'une partie négligeable de $\mathbb{R}$ est mesurable de mesure nulle.*
2. *Montrer que toute partie d'un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}$ est négligeable et qu'une réunion dénombrable de parties négligeables est négligeable.*
3. *Montrer qu'une partie négligeable de $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide. La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Montrer qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est négligeable si, et seulement si, il existe un borélien B de $\mathbb{R}$ tel que $A \subset B$ et $\lambda(B) = 0$.*

Exercice 47 *Montrer que, pour toutes parties A, B de $\mathbb{R}$, on a :*

$$\ell^*(A \cup B) + \ell^*(A \cap B) \leq \ell^*(A) + \ell^*(B)$$

Exercice 48 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ contenu dans un mesurable B. Montrer que, pour toute partie C de $\mathbb{R}$ telle que $B \cap C = \emptyset$, on a :*

$$\ell^*(A \cup C) = \ell^*(A) + \ell^*(C)$$

Exercice 49 *Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $d(A, B) > 0$. Montrer que :*

$$\ell^*(A \cup B) = \ell^*(A) + \ell^*(B)$$

Exercice 50 *Soit B une partie négligeable de $\mathbb{R}$. Montrer que, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on a :*

$$\ell^*(A \cup B) = \ell^*(A) = \ell^*(A \setminus B)$$

Exercice 51 *Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}$ de mesure finie. Montrer que, pour toute partie B de $\mathbb{R}$ qui contient A, on a :*

$$\ell^*(B \setminus A) = \ell^*(B) - \ell^*(A)$$

Exercice 52 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est mesurable ;*
2. *pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tel que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus A) < \varepsilon$;*
3. *pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que $\ell^*(A \setminus \mathcal{F}) < \varepsilon$.*

Exercice 53 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A est mesurable de mesure finie si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $\mathbb{R}$ contenu dans A et un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tels que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus K) < \varepsilon$.*

Exercice 54 *Montrer que la fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est Lebesgue-intégrable et non Riemann-intégrable sur $[a, b]$.*

Exercice 55 *Soient f, g deux fonctions intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer $f = g$ presque partout si, et seulement si, $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt$ pour tout $x \in [a, b]$.*

Exercice 56 ***Fonctions Riemann-intégrables.***
On se donne deux réels $a < b$ et une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in [a, b]$, l'oscillation de f en x est le réel :

$$\omega(x) = \inf_{\eta > 0} \sup_{]x-\eta, x+\eta[\cap[a,b]} |f(y) - f(z)|$$

1. *Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est :*

$$A = \{x \in [a, b] \mid \omega(x) > 0\}$$

2. *Montrer que la fonction ω est semi-continue supérieurement.*
3. *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble :*

$$A_n = \left\{ x \in [a, b] \mid \omega(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

est un fermé et en déduire que l'ensemble A des points de discontinuité de f est mesurable.

4. *Montrer que si f est Riemann-intégrable, alors l'ensemble A de ses points de discontinuité f est négligeable.*
5. *Réciproquement, montrer que si l'ensemble A des points de discontinuité f est négligeable, la fonction f est alors Riemann-intégrable.*

– VII – Théorèmes de Fubini sur $\mathbb{R}^n$

Nous avons déjà rencontré le théorème de Fubini pour les fonctions continues sur un rectangle :
Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b] \times [c, d], \mathbb{C})$, où $a < b$ et $c < d$, on a :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

Ce théorème se prouvant de façon élémentaire (exercice **??**).

Exercice 57 *Soient deux réels $a < b$ et φ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le triangle :*

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq y \leq b \right\}$$

1. *Montrer que la fonction ψ définie sur le carré $C = [a, b]^2$ par :*

$$\forall (x, y) \in C,\ \psi(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) - \varphi(x, x) & si\ (x, y) \in T \\ 0 & si\ (x, y) \notin T \end{cases}$$

est continue sur C.

2. *Soit $k \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que :*

$$\forall z \in [a, b],\ \int_a^z \left(\int_a^y k(x)\, dx \right) dy = \int_a^z \left(\int_x^z k(x)\, dy \right) dx$$

3. *Déduire de ce qui précède que :*

$$\forall z \in [a, b],\ \int_a^z \left(\int_a^y \varphi(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^z \left(\int_x^z \varphi(x, y)\, dy \right) dx$$

et en particulier :

$$\int_a^b \left(\int_a^y \varphi(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_x^b \varphi(x, y)\, dy \right) dx$$

(théorème de Fubini sur un triangle).

Exercice 58 *Quelle est l'image de* $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ *par l'application qui à* (x, y) *associe* $(x + y, y)$ *? Montrer que cette application est un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ *sur son image. En déduire la valeur de* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star} e^{-(x+y)^2} dx\, dy$.

Exercice 59 ***Fonction Béta.***
On désigne par $\mathcal{H}$ *le demi plan complexe défini par :*

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

1. *Soient* u, v *deux nombres complexes. Montrer que la fonction* $t \mapsto t^{u-1}(1-t)^{v-1}$ *est intégrable sur* $]0, 1[$ *si, et seulement si,* $(u, v) \in \mathcal{H}^2$.
   Définition : *la fonction béta (ou fonction de Bessel de seconde espèce) est la fonction définie sur* $\mathcal{H}^2$ *par :*
   $$\forall (u, v) \in \mathcal{H}^2,\ B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\, dt$$
2. *Montrer que, pour tous nombres complexes* u, v *dans* $\mathcal{H}$*, on a :*
   $$B(u, v) = B(v, u) \ \text{ et } B(u+1, v) = \frac{u}{u+v} B(u, v)$$
3. *Montrer que, pour tous nombres complexes* u, v *dans* $\mathcal{H}$*, on a :*
   $$\lim_{n \to +\infty} n^u B(u, v + n + 1) = \Gamma(u)$$
4. *Montrer que, pour tous nombres complexes* u, v *dans* $\mathcal{H}$*, on a* $B(u, v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$.
5. *Calculer* $B(n+1, m+1)$, *pour* n, m *entiers naturels.*

Exercice 60 *Soient* a *et* b *deux réels vérifiant* $-1 < a < b$.

1. *Montrer que la fonction* $(x, y) \mapsto f(x, y) = y^x$ *est intégrable sur le rectangle* $[a, b] \times [0, 1]$.
2. *En déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln(y)}\, dy$.

Exercice 61 *La fonction* $(x, y) \mapsto e^{-xy} \sin(x) \sin(y)$ *est-elle intégrable sur* $]0, \infty[^2$ *?*

Exercice 62 ***Opérateurs de Volterra***

On se donne deux réels $a < b$ *et* E *est l'espace vectoriel* $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ *est une valeur propre de* $u \in \mathcal{L}(E)$ *si* $\ker(\lambda Id - u) \neq \{0\}$.
On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ *est une valeur spectrale de* $u \in \mathcal{L}(E)$ *si* $\lambda Id - u$ *n'est pas bijective.*
Le spectre de u *est l'ensemble* $\sigma(u)$ *des valeurs spectrales de* u.
Étant donnée une fonction $K \in \mathcal{C}^0\left([a, b]^2, \mathbb{R}\right)$, *où* $a < b$, *on lui associe les endomorphismes de* E, T_K *et* T_K^* *définis par :*

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [a, b],\ T_K(f)(x) = \int_a^x f(t) K(t, x)\, dt \tag{3}$$

et :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [a, b],\ T_K^*(f)(x) = \int_x^b f(t) K(x, t)\, dt$$

On dit que T_K *est un opérateur de Volterra de noyau* K.
Pour K *constante égale à* 1 *sur* $[0, 1]^2$, *on notera simplement* T *l'opérateur de Volterra correspondant et* T^* *l'opérateur* T_K^*.

1. *Montrer que T_K^* est l'unique endomorphisme de E tel que pour toutes fonctions f, g dans E, on ait :*

$$\langle T_K(f) \mid g\rangle = \langle f \mid T_K^*(g)\rangle$$

2. *On se propose de montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec :*

$$\|T_K\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x |K(t,x)|\, dt$$

   (a) *Montrer le résultat pour K à valeurs positives.*

   (b) *Montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec :*

$$\|T_K\|_\infty \leq \left\|T_{|K|}\right\|_\infty$$

   (c) *Justifier l'existence de $x_0 \in [a,b]$ tel que :*

$$\left\|T_{|K|}\right\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x |K(t,x)|\, dt = \int_a^{x_0} |K(t,x_0)|\, dt$$

   (d) *On désigne par $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions continues définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a,b]\,,\ f_n(t) = \frac{K(t,x_0)}{|K(t,x_0)| + \varepsilon_n}$$

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_K(f_n)(x_0) = \left\|T_{|K|}\right\|_\infty$ et conclure.

3. *On suppose que K est à valeurs positives et on se propose de montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$ avec :*

$$\|T_K\|_1 = \sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(x,t)\, dt$$

   (a) *Montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$ avec :*

$$\|T_K\|_1 \leq \sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(x,t)\, dt$$

   (b) *Justifier l'existence de $x_0 \in [a,b]$ tel que :*

$$\sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(x,t)\, dt = \int_{x_0}^b K(x_0,t)\, dt$$

   (c) *Montrer que :*

$$\|T_K\|_1 = \sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(x,t)\, dt$$

4. *Montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans $(E, \|\cdot\|_2)$ et que :*

$$\|T_K\|_2 \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|K\|_\infty$$

   où $\|K\|_\infty = \sup\limits_{(x,t)\in[a,b]^2} |K(x,t)|$.

5. *On se propose de montrer que l'opérateur T_K n'a pas de valeur propre réelle non nulle.*

   (a) *On suppose que $K = 1$. Montrer que T n'admet pas de valeur propre.*

   (b) *On revient au cas général.*
   Comme pour $K = 0$ le résultat est évident, on suppose que $K \neq 0$.
   On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et une onction $f \in E \setminus \{0\}$ tels que ${}_K(f) = \lambda f$.
   On désigne par g la fonction définie par $g = T(f^2)$.

      i. *Montrer que la fonction g est croissante et qu'il existe un réel $\alpha \in [a, b[$ tel que $g(x) = 0$ pour tout $x \in [a, \alpha]$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha, b]$.*

      ii. *Montrer qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que :*

$$\forall x \in [a, b], \ \lambda^2 g'(x) \leq \beta g(x)$$

      iii. *Conclure.*

   (c) *On suppose que $[a, b] = [0, 1]$ et T_K est l'opérateur défini par :*

$$\forall f \in E, \ \forall x \in [0, 1], \ T_K(f)(x) = \int_0^x f(t) \cos(x - t)\, dt$$

   (opérateur de convolution par la fonction cos*).*

      i. *Montrer que, pour toute fonction $f \in E$, la fonction $T_K(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.*

      ii. *Montrer que T_K n'a pas de valeur propre.*

6. *Montrer que si K_1 et K_2 sont deux fonctions continues sur $[a, b]^2$, alors la composée $T_{K_1} \circ T_{K_2}$ est un opérateur de Volterra sur E.*

7. *On se propose de montrer que $\sigma(T_K) = \{0\}$.*

   (a) *Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, l'application T_K^n est un opérateur de Volterra, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $K_n \in \mathcal{C}^0\left([a, b]^2, \mathbb{R}\right)$ telle que :*

$$\forall f \in E, \ \forall x \in [a, b], \ T_K^n(f)(x) = \int_a^x f(t) K_n(t, x)\, dt$$

   (b) *Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :*

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \ |K_n(x, y)| \leq \frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} |x - y|^{n-1}$$

   (c) *Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :*

$$\|T_K^n\|_2 \leq \frac{\|K\|_\infty^n (b - a)^n}{n!}$$

   (d) *Montrer que la série $\sum T_K^n$ est convergente dans $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|_2)$, que $Id - T_K$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et donner une expression de $(Id - T_K)^{-1}$.*

   (e) *Montrer que, pour tout réel non nul λ, l'opérateur $\lambda Id - T_K$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et retrouver le fait que T_K n'a pas de valeur propre non nulle.*

   (f) *Montrer que $\sigma(T_K) = \{0\}$.*

8. *Pour cette question et les suivantes, $K = 1$.*

(a) *Montrer que, pour tout* $f \in E$, *tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in [0,1]$, *on a :*

$$T^n(f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$$

la fonction $T^n(f)$ *étant de classe* $\mathcal{C}^n$ *sur* $[a,b]$.

(b) *Calculer* $\|T^n\|_\infty$ *et* $\|T^n\|_1$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(c) *Donner une expression de* $(\lambda Id - T)^{-1}$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

(d) *Montrer que, pour tout* $f \in E$, *tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in [a,b]$, *on a :*

$$(T^*)^n(f)(x) = \int_x^b \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$$

(e) *Montrer que, pour tout* $f \in E$, *tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in [a,b]$, *on a :*

$$T^n(f)(x) + (T^*)^n(f)(x) = \int_a^b \frac{|t-x|^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$$

9. *Soit* H *un sous-espace vectoriel de dimension finie de* E *stable par* T. *Montrer que* $H = \{0\}$.

10. *Soient* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$ *telle que* $f(a) = 0$ *et* φ *la fonction définie sur l'intervalle ouvert* $]a,b[$ *par :*

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2(b-a)\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)}$$

(a) *Montrer que la fonction* φ *se prolonge par continuité en* b *et que la fonction* $\varphi \cdot f$ *se prolonge par continuité en* a.

(b) *Montrer que :*

$$\forall t \in\,]a,b[,\ \varphi^2(t) + \varphi'(t) = -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2}$$

(c) *Montrer que :*

$$\|f' - \varphi \cdot f\|_2^2 = \|f'\|_2^2 - \frac{\pi^2}{4(b-a)^2}\|f\|_2^2$$

(d) *En déduire que :*

$$\|f\|_2 \leq \frac{2(b-a)}{\pi}\|f'\|_2$$

l'égalité étant réalisée uniquement pour les fonctions $f : t \in [a,b] \mapsto \lambda \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{t-a}{b-a}\right)$, *où* λ *est une constante réelle.*

11. *Calculer* $\|T\|_2$.

Exercice 63 *Pour tout intervalle réel* I *non réduit à un point, on désigne par* $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{R}$.
$I = \mathbb{R}^+$ *ou* $I = [0,X]$ *pour un réel* $X > 0$, E *est l'espace vectoriel* $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ *et* T *est l'opérateur de Volterra défini par :*

$$\forall f \in E,\ \forall x \in I,\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Pour toutes fonctions f, g *dans* E, *on définit le produit de convolution* $f * g$ *par :*

$$\forall x \in I,\ f * g(x) = \int_0^x f(x-t)\,g(t)\,dt$$

1. *Montrer que :*
   (a) *la loi $*$ est une loi de composition interne sur E ;*
   (b) *cette loi est commutative ;*
   (c) *cette loi est associative ;*
   (d) *il n'existe pas d'élément neutre pour cette loi.*

2. *Montrer que pour toutes fonctions f, g dans E, on a :*

$$T(f * g) = T(f) * g = f * T(g)$$

   et pour tout entier naturel n :

$$T^n(f * g) = T^n(f) * g = f * T^n(g)$$

3. *On suppose que f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Montrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec :*

$$(f * g)' = f(0)\, g + f' * g = g(0)\, f + f * g'$$

4. *On prend ici $I = [0, 1]$ et on se propose de montrer le cas particulier suivant du théorème de Titchmarsh : si f, g sont deux fonctions développables en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ où $R > 1$ telles que $f * g = 0$, on a alors $f = 0$ ou $g = 0$.*
   (a) *On suppose que f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ avec $f(0) \neq 0$. Montrer que si $f * g = 0$, on a alors $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (b) *On suppose que f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ et $f * g = 0$. Montrer qu'on a $f' * g = 0$ et $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (c) *Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$. Montrer que si $f * g = 0$, on a alors $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (d) *Soient f, g deux fonctions développables en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ où $R > 1$. Montrer que si $f * g = 0$, on a alors $f = 0$ ou $g = 0$.*