1 Corrigé du devoir du 27 novembre 2010

Partie I - Cas d'un triangle équilatéral

I.1.a. Dire que $\mathcal{E}$ admet O comme centre de symétrie revient à dire que si $M(x,y) \in \mathcal{E}$ alors son symétrique $M'(-x,-y)$ par rapport à O appartient encore à $\mathcal{E}$. Pour tout $M(x,y) \in \mathcal{E}$, on a donc non seulement :

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$$

mais aussi :

$$ax^2 + by^2 + 2cxy - dx - ey + f = 0.$$

En soustrayant membre à membre, on obtient $dx + ey = 0$, de sorte que :

$$M(x,y) \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad dx + ey = 0.$$

Si $(d,e) \neq (0,0)$, $dx + ey = 0$ est l'équation d'une droite et l'implication précédente montre que l'ellipse $\mathcal{E}$ est incluse dans cette droite, ce qui est absurde. Donc $(d,e) = (0,0)$.

Autre méthode : D'après le cours ([**?**], Th. 352), les coordonnées du centre de symétrie d'une hyperbole ou d'une ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $f(x,y) = 0$ (où f est un polynôme du second degré en x, y) sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2ax + 2cy + d = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2by + 2cx + e = 0. \end{cases}$$

Ce centre sera l'origine du repère si et seulement si ce système admet la solution $(0,0)$, c'est-à-dire $d = e = 0$.

I.1.b. Une ellipse $\mathcal{E}$ de centre O qui contient I, J et K admet une équation de la forme $ax^2 + by^2 + 2cxy + f = 0$ avec :

$$\begin{cases} a + f = 0 \\ a\dfrac{1}{4} + b\dfrac{3}{4} + 2c\left(\dfrac{-1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + f = 0 \\ a\dfrac{1}{4} + b\dfrac{3}{4} + 2c\left(\dfrac{-1}{2}\right)\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right) + f = 0. \end{cases}$$

Ce système s'écrit :

$$\begin{cases} a + f = 0 \\ a + 3b - 2c\sqrt{3} + 4f = 0 \\ a + 3b + 2c\sqrt{3} + 4f = 0 \end{cases}$$

ou encore, en soustrayant et additionnant les deux dernières équations :

$$\begin{cases} a + f = 0 \\ a + 3b + 4f = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f = -a \\ b = a \\ c = 0. \end{cases}$$

$\mathcal{E}$ est donc l'ellipse d'équation $ax^2 + ay^2 - a = 0$, qui s'écrit $x^2 + y^2 = 1$ puisque a ne peut pas être nul. On reconnaît une équation du cercle de centre O et de rayon 1. C'est le cercle circonscrit au triangle ABC.

[0]ag81 v1.00 — Solution proposée par D.-J. Mercier.

I.2. Soit H le projeté du centre O du cercle circonscrit à ABC sur (BC). On a :

$$BC = 2 \times BH = 2R\sin\frac{\pi}{3} = R\sqrt{3} \quad \text{et} \quad OH = R\cos\frac{\pi}{3} = \frac{R}{2}$$

donc l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle équilatéral ABC est :

$$\mathcal{A}_{ABC} = 3\mathcal{A}_{OBC} = 3 \times \frac{BC \times OH}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

I.3. **Première solution** :

$$(S)\ \begin{cases} \cos(y-x) = \cos x \\ \cos(y-x) = \cos y \end{cases} \Rightarrow\ \cos x = \cos y$$

$$\Rightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad \exists \varepsilon \in \{\pm 1\} \quad y = \varepsilon x + k2\pi$$

donc :

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad \exists \varepsilon \in \{\pm 1\} \quad \begin{cases} y = \varepsilon x + k2\pi \\ \cos((\varepsilon - 1)x) = \cos x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} \quad \exists \varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\} \quad \begin{cases} y = \varepsilon x + k2\pi \\ (\varepsilon - 1)x = \varepsilon' x + k'2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

On envisage les quatre cas possibles :

• Si $(\varepsilon, \varepsilon') = (1, \pm 1)$, (S) entraîne $0 = \pm x + k'2\pi$ soit $x = \pm k'2\pi$. La condition $0 < x < y < 2\pi$ ne pourra pas être satisfaite. Dans ce cas, il n'y aura pas de solution dans l'intervalle demandé.

• Si $(\varepsilon, \varepsilon') = (-1, -1)$, (S) implique que $-2x = -x + k'2\pi$, et l'on retrouve que x doit être congru à 0 modulo 2π. Impossible.

• Si $(\varepsilon, \varepsilon') = (-1, 1)$, (S) s'écrit :

$$\begin{cases} y = -x + k2\pi \\ -2x = x + k'2\pi \ \Rightarrow\ x = \dfrac{-k'2\pi}{3} \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -\dfrac{4\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y = \dfrac{4\pi}{3} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = \dfrac{2\pi}{3} \\ x = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases} \right). \end{aligned}$$

En conclusion (S) admet deux solutions (x, y) telles que $0 < x < y < 2\pi$, à savoir $(2\pi/3, 4\pi/3)$ et $(4\pi/3, 2\pi/3)$.

Deuxième solution[1] : On utilise le fait que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et strictement croissante sur $[\pi, 2\pi]$. Si $y \in [0, \pi]$, comme $0 < x < y$, on a $\cos x > \cos y$, ce qui contredit (S) qui nous dit que $\cos x = \cos y$. De même $x \in [\pi, 2\pi]$ donne $\cos x < \cos y$.

Ainsi $x \in]0, \pi[$ et $y \in]\pi, 2\pi[$.

• Si $y - x \in [\pi, 2\pi[$, $\cos(y - x) = \cos y$ impose $y - x = y$, d'où $x = 2y$, ce qui est absurde car $x < y$.

• Donc $y - x \in]0, \pi[$ et $\cos(y - x) = \cos x$ impose $y - x = x$ puisque cos est injective sur $]0, \pi[$. On a donc $y = 2x$ et $\cos(y - x) = \cos y$ nous donne $\cos x = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, c'est-à-dire que $\lambda = \cos x$ est solution de $2\lambda^2 - \lambda - 1 = (2\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$, donc $\cos x = \lambda = -1/2$ puisque $x \in]0, \pi[$.

[1] La deuxième et la troisième solution sont proposées par Jean-Etienne Rombaldi.

En définitive $x = 2\pi/3$ et $y = 2x = 4\pi/3$.

Troisième solution : Avec $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$, pour tout réel θ, le système (S) s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} e^{i(y-x)} + e^{-i(y-x)} = e^{ix} + e^{-ix} \\ e^{i(y-x)} + e^{-i(y-x)} = e^{iy} + e^{-iy} \end{array}\right.$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{l} e^{ix}\left(1 - e^{-iy}\right) + e^{-ix}\left(1 - e^{iy}\right) = 0 \\ e^{iy}\left(1 - e^{-ix}\right) + e^{-iy}\left(1 - e^{ix}\right) = 0 \end{array}\right.$$

et avec :

$$1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i\sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$$

cela s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\dfrac{y}{2} \times \left(-e^{ix}e^{-i\frac{y}{2}} + e^{-ix}e^{i\frac{y}{2}}\right) = 0 \\ \sin\dfrac{x}{2} \times \left(-e^{iy}e^{-i\frac{x}{2}} + e^{-iy}e^{i\frac{x}{2}}\right) = 0 \end{array}\right.$$

Comme x et y sont dans $]0, 2\pi[$, les réels $x/2$ et $y/2$ sont dans $]0, \pi[$, de sorte que $\sin(x/2) > 0$ et $\sin(y/2) > 0$. Notre système est donc équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{l} -e^{ix}e^{-i\frac{y}{2}} + e^{-ix}e^{i\frac{y}{2}} = 0 \\ -e^{iy}e^{-i\frac{x}{2}} + e^{-iy}e^{i\frac{x}{2}} = 0 \end{array}\right.$$

ou encore à :

$$\left\{\begin{array}{l} -e^{ix} + e^{-ix}e^{iy} = 0 \\ -e^{iy} + e^{-iy}e^{ix} = 0 \end{array}\right.$$

c'est-à-dire que $\lambda = e^{ix}$ et $\mu = e^{iy}$ sont racines de :

$$\left\{\begin{array}{l} -\lambda + \dfrac{1}{\lambda}\mu = 0 \\ -\mu + \dfrac{1}{\mu}\lambda = 0 \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{l} \mu = \lambda^2 \\ \lambda = \mu^2 \end{array}\right.$$

On a donc $\lambda^4 = \lambda$ et $\mu^4 = \mu$ avec $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, ce qui donne $\lambda^3 = \mu^3 = 1$ et $\lambda\mu = \mu^3 = 1$, soit $\mu = 1/\lambda$. En définitive :

$$(\lambda, \mu) \in \left\{(1, 1), (e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}), (e^{\frac{4i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}})\right\}$$

et la condition supplémentaire $x < y$ nous donne $(\lambda, \mu) = (e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}})$ pour unique solution, soit $(x, y) = (2\pi/3, 4\pi/3)$, ce qui peut se vérifier.

I.4.a.i. L'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle ABC est :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} R\cos\beta - R & R\cos\gamma - R \\ R\sin\beta & R\sin\gamma \end{array}\right|,$$

le déterminant étant pris dans la base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{R^2}{2}\left|(\cos\beta - 1)\sin\gamma - \sin\beta(\cos\gamma - 1)\right| \\ &= \frac{R^2}{2}\left|\sin\gamma\cos\beta - \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma + \sin\beta\right| \\ &= \frac{R^2}{2}\left|\sin(\gamma - \beta) - \sin\gamma + \sin\beta\right|. \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression la valeur absolue est inutile car s'applique toujours à un nombre positif. En effet :

$$\begin{aligned}
\xi &= \sin(\gamma-\beta) - \sin\gamma + \sin\beta \\
&= \sin\gamma\cos\beta - \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma + \sin\beta \\
&= \sin\gamma(\cos\beta - 1) + \sin\beta(1-\cos\gamma) \\
&= \sin\gamma\left(-2\sin^2\frac{\beta}{2}\right) + \sin\beta\left(2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right) \\
&= 2\left(\sin\beta\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin\gamma\sin^2\frac{\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\xi &= 4\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right) \\
&= 4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right) \\
&= 4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right). \quad (*)
\end{aligned}$$

Comme $0 \leq \beta \leq \gamma \leq 2\pi$, les arguments $\beta/2$, $\gamma/2$ et $(\gamma-\beta)/2$ des sinus de la formule $(*)$ sont tous dans $[0,\pi]$, donc ces sinus sont positifs et $\xi \geq 0$. Finalement :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{R^2}{2}(\sin(\gamma-\beta) - \sin\gamma + \sin\beta).$$

I.4.a.ii. f est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^2$ dont les valeurs $f(\beta,\gamma)$ ne dépendent que des classes de β et γ modulo 2π. Donc $f(\mathbb{R}^2) = f(K)$ où $K = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$ est un compact. Une fonction continue sur un compact atteint ses bornes, donc il existe $(\beta_0,\gamma_0) \in K$ tel que :

$$f(\beta_0,\gamma_0) = \mathrm{Max}_K\{f(\beta,\gamma)\} = \mathrm{Max}_{\mathbb{R}^2}\{f(\beta,\gamma)\}.$$

On a $f(\beta,0) = f(0,\gamma) = 0$ quels que soient β, γ, et il est facile de voir qu'il existe un couple (β,γ) tel que $f(\beta,\gamma) > 0$, par exemple en calculant :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right) &= \frac{R^2}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \frac{3R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

On a donc nécessairement $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$. Notons au passage que f étant positive (c'est une aire), le minimum de f est 0, et que ce minimum est atteint en au moins tous les couples (β,γ) dont l'une au moins des coordonnées est nulle.

I.4.a.iii. Si f admet un extremum en (β,γ), les dérivées partielles de f en (β,γ) sont nulles :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial\beta} = \dfrac{R^2}{2}(-\cos(\gamma-\beta) + \cos\beta) = 0 \\
\dfrac{\partial f}{\partial\gamma} = \dfrac{R^2}{2}(\cos(\gamma-\beta) - \cos\gamma) = 0
\end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases}
\cos(\gamma-\beta) = \cos\beta \\
\cos(\gamma-\beta) = \cos\gamma.
\end{cases}$$

On retrouve le système (S) résolu à la question I.3. Comme f admet un maximum en (β_0,γ_0) tel que $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$, la question I.3 donne $(\beta_0,\gamma_0) = (2\pi/3, 4\pi/3)$. Le triangle ABC obtenu est équilatéral puisqu'il possède deux angles qui valent $2\pi/3$ modulo 2π.

I.4.b. On a :

$$\mathcal{A}_{ABC} = f(\beta, \gamma) \leq f(\beta_0, \gamma_0) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

quel que soit le triangle ABC inscrit dans $\mathcal{C}$, et $f(\beta_0, \gamma_0) = \mathcal{A}_{IJK}$ où IJK est le triangle équilatéral défini en I.1. On peut donc affirmer que les triangles d'aires maximales inscrits dans $\mathcal{C}$ sont les triangles équilatéraux, et que l'aire maximale obtenue est $3R^2\sqrt{3}/4$.

I.5. • Soit R le rayon de $\mathcal{C}$. On a $\mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \pi R^2$. Si (β, γ) désigne un couple de réels tels que $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = f(\beta, \gamma)$ et $0 < \beta < \gamma < 2\pi$, la question I.4 donne :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = f(\beta, \gamma) \leq f(\beta_0, \gamma_0) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

donc :

$$\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{C}}}{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}} = \frac{\pi R^2}{f(\beta, \gamma)} \geq \frac{\pi R^2}{f(\beta_0, \gamma_0)} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

• Si $\mathcal{T}$ est équilatéral, $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = f(\beta_0, \gamma_0)$ avec les notations de I.4, donc :

$$\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{C}}}{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}} = \frac{\pi R^2}{f(\beta_0, \gamma_0)} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

• Réciproquement, si $\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{C}}}{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$, notons (β, γ) un couple de réels tels que $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = f(\beta, \gamma)$ et $0 < \beta < \gamma < 2\pi$. Notons R le rayon du cercle circonscrit à $\mathcal{T}$. On obtient :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = f(\beta_0, \gamma_0) = \mathrm{Max}_K\{f(\beta, \gamma)\}.$$

D'après I.4, le maximum de f sur K est atteint en (β_0, γ_0) et seulement en ce point. L'égalité $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = f(\beta, \gamma) = f(\beta_0, \gamma_0)$ entraîne donc $(\beta, \gamma) = (\beta_0, \gamma_0)$, et cela prouve que $\mathcal{T}$ est équilatéral.

I.6. • *Existence* : Soit $\mathcal{E}$ une ellipse circonscrite au triangle IJK. Soit φ une affinité orthogonale qui transforme $\mathcal{E}$ en un cercle $\varphi(\mathcal{E})$. Posons $A = \varphi(I)$, $B = \varphi(J)$ et $C = \varphi(K)$. Comme φ conserve les rapports d'aires, la question I.5 permet d'écrire :

$$\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{E}}}{\mathcal{A}_{IJK}} = \frac{\mathcal{A}_{\varphi(\mathcal{E})}}{\mathcal{A}_{ABC}} \geq \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

d'où :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}} \geq \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \times \mathcal{A}_{IJK} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \times \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \pi R^2 = \mathcal{A}_{\mathcal{C}}$$

où $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ désigne l'aire du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à IJK. On a montré que $\mathcal{C}$ est une ellipse contenant I, J, K délimitant une surface d'aire minimale.

• *Unicité* : Supposons que $\mathcal{E}$ soit une ellipse circonscrite au triangle IJK délimitant une surface d'aire minimale $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \pi R^2$. En définissant φ comme ci-dessus, on obtient :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \pi R^2 = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \times \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \times \mathcal{A}_{IJK}$$

soit

$$\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{E}}}{\mathcal{A}_{IJK}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

d'où

$$\frac{\mathcal{A}_{\varphi(\mathcal{E})}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

puisque φ conserve les rapports d'aires. La question I.5 montre alors que ABC est équilatéral. Mais alors le centre de gravité Ω du triangle équilatéral ABC coïncide avec le centre du cercle $\varphi(\mathcal{E})$ circonscrit au triangle ABC. On sait que :

- φ est affine, donc conserve les barycentres. Comme O est l'isobarycentre de I, J, K, on a donc $\varphi(O) = \Omega$.

- φ est une bijection affine, donc transforme le centre de symétrie d'une figure Λ en le centre de symétrie de la figure $\varphi(\Lambda)$. Appliquons cette propriété à φ^{-1}. Comme Ω est le centre de symétrie du cercle $\varphi(\mathcal{E})$, on en déduit que $\varphi^{-1}(\Omega) = O$ est le centre de symétrie de l'ellipse $\varphi^{-1}(\mathcal{C}_{ABC}) = \mathcal{E}$.

Finalement $\mathcal{E}$ est une ellipse circonscrite au triangle IJK et de centre de symétrie O. La question I.1.b montre que $\mathcal{E} = \mathcal{C}$, et l'unicité est prouvée.

Partie II - Etude de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

II.1. Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est une matrice diagonale dont tous les coefficients λ_i de la diagonale principale sont strictement positifs, pour tout vecteur-colonne $X = {}^t(x_1, ..., x_n)$ non nul,

$$ {}^tXDX = (x_1, ..., x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2 $$

est strictement positif comme somme de termes positifs dont l'un au moins est strictement positif. Cela signifie que $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II.2.a. Si λ est une valeur propre de A, et si $X = {}^t(x_1, ..., x_n)$ est un vecteur propre (non nul) associé, alors ${}^tXAX > 0$. Mais :

$$ {}^tXAX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\, {}^tXX = \lambda ||X||^2 $$

où $||X||^2 = \sum_{i=0}^n x_i^2 > 0$. On a donc $\lambda ||X||^2 > 0$, c'est-à-dire $\lambda > 0$. Toutes les valeurs propres de A sont donc strictement positives.

II.2.b. Un théorème du cours[2] énonce que toute matrice réelle symétrique A est diagonalisable dans le groupe orthogonal, ce qui signifie qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A. Il existe donc une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = P^{-1}DP$. Comme P est orthogonale, $P^{-1} = {}^tP$, et

$$ A = P^{-1}DP = {}^tPDP. $$

II.2.c. Les valeurs propres de A sont les termes diagonaux de la matrice D définie dans la question précédente. Si ces termes sont tous strictement positifs, alors pour tout $X \neq 0$,

$$ {}^tXAX = {}^tX{}^tPDPX = {}^t(PX)D(PX) > 0 $$

en appliquant II.1 et puisque $PX \neq 0$ (P étant inversible !). Cela démontre que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II.3. • Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, la question II.2 montre qu'il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ de termes diagonaux strictement positifs, et une matrice orthogonale P, telles que $A = {}^tPDP$. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, posons $\mu_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$ et $\Delta = \mathrm{diag}(\mu_1, ..., \mu_n)$. On a $D = \Delta^2$, donc :

$$ A = {}^tPDP = {}^tP\Delta^2P = {}^t(\Delta P)(\Delta P) = {}^tQQ $$

en notant $Q = \Delta P$. Et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ comme tout produit de deux matrices inversibles.

• Réciproquement, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et s'il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tQQ$, alors ${}^tA = {}^t({}^tQQ) = {}^tQ\,{}^t({}^tQ) = {}^tQQ = A$ donc A est symétrique, et pour tout $X \neq 0$,

$$ {}^tXAX = {}^tX\,{}^tQQX = {}^t(QX)(QX) = ||QX||^2 > 0 $$

(puisque $X \neq 0$ entraîne $QX \neq 0$, Q étant inversible), donc $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

[2] Voir "Cours de géométrie" [?] Théorème 382 et Corollaire 30.

II.4. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, la question précédente montre que A s'écrit $A = {}^tQQ$ avec Q inversible. Par suite $\det Q \neq 0$ et $\det A = \det({}^tQQ) = (\det Q)^2 > 0$. La réciproque est fausse car la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

est réelle symétrique, de déterminant $\det A = 5 > 0$, et pourtant ses valeurs propres ne sont pas toutes strictement positives donc $A \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

II.5. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \neq 0$. En particulier, si l'on prend des vecteurs-colonnes de la forme $X = {}^t(x_1, ..., x_k, 0, ...0)$, on obtient pour tout $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$:

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= (x_1, ..., x_k, 0, ...0) \begin{pmatrix} A_k & \# \\ \# & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, ..., x_k)\, A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}$$

donc $A_k \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R})$. La question II.4 montre alors que $\det A_k > 0$.

II.6. Posons

$$A = \begin{pmatrix} A_n & B \\ {}^tB & a \end{pmatrix}.$$

Comme $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ la question précédente montre qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tQQ$. Le produit Π de l'énoncé s'écrit :

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{pmatrix} {}^tQ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tQ & {}^tQC \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tQQ & {}^tQC \\ {}^tCQ & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc tout revient à trouver C et α tels que :

$$\begin{pmatrix} {}^tQQ & {}^tQC \\ {}^tCQ & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B \\ {}^tB & a \end{pmatrix}$$

sachant que B et a sont connus. Il suffit de prendre $\alpha = a$ et $C = {}^tQ^{-1}B$ pour avoir ${}^tQC = B$, et de vérifier que la dernière égalité ${}^tCQ = {}^tB$ à satisfaire devient triviale : il suffit de transposer les deux membres de ${}^tQC = B$ pour obtenir ${}^tCQ = {}^tB$.

II.7.a. Si $m = 1$,

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - \alpha_1^2$$

est la propriété est vraie. Supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang $m - 1$, et montrons-la au rang m. En développant le déterminant suivant la première colonne :

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \alpha_m & \alpha \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \\ \alpha_2 & \cdots & \cdots & \alpha_m & \alpha \end{vmatrix} + (-1)^{m+2}\alpha_1 \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_m \end{vmatrix}.$$

En appliquant l'hypothèse récurrente au rang $m-1$, et en calculant le second déterminant, on obtient :

$$\det M = \alpha - \sum_{i=2}^{m} \alpha_i^2 + (-1)^{m+2}\alpha_1 \times (-1)^{m+1}\alpha_1 = \alpha - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2,$$

ce qui démontre la propriété au rang m.

II.7.b. ${}^tXMX = x_1^2 + .. + x_m^2 + \alpha x_{m+1}^2 + 2\alpha_1 x_1 x_{m+1} + ... + 2\alpha_m x_m x_{m+1}$. Par hypothèse $\det M > 0$, donc $\alpha > \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2$. Si $x_{m+1} \neq 0$, on aura donc :

$$\begin{aligned} {}^tXMX &> x_1^2 + .. + x_m^2 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 x_{m+1}^2 + 2x_{m+1}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \\ &> \sum_{i=1}^{m} (x_i + \alpha_i x_{m+1})^2 \ \geq \ 0. \end{aligned}$$

Si $x_{m+1} = 0$, on obtient ${}^tXMX = x_1^2 + .. + x_m^2$, et cette expression reste strictement positive tant que $(x_1, ..., x_m) \neq (0, ..., 0)$. Finalement ${}^tXMX > 0$ pour tout $X \neq 0$, donc $M \in \mathcal{S}_{m+1}^{++}(\mathbb{R})$.

II.8. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, le résultat est trivial : on a $A = (\lambda_1)$ et $\det A = \lambda_1 > 0$ donc ${}^tXMX = \lambda_1 x^2 > 0$ pour tout réel x non nul, donc $A \in \mathcal{S}_1^{++}(\mathbb{R})$.

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n, et montrons-là au rang $n+1$. Soit $A \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\det A_k > 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n+1\}$. En particulier $\det A_k > 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, et l'hypothèse récurrente au rang n montre que $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. La question II.6 montre l'existence de $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A = {}^tRMR \quad \text{avec } R = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix}.$$

M est du même type que la matrice de la question II.7, R est inversible, et :

$$\begin{aligned} \det M &= \det\left({}^tR^{-1}AR^{-1}\right) \\ &= \det({}^tR^{-1}) \times \det A \times \det(R^{-1}) \\ &= (\det R)^{-2} \times \det A > 0 \end{aligned}$$

car $\det A > 0$ par hypothèse. La question II.7.b montre que $M \in \mathcal{S}_{n+1}^{++}(\mathbb{R})$. Si maintenant $X \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$,

$${}^tXAX = {}^tX({}^tRMR)X = {}^t(RX)M(RX) > 0$$

car $M \in \mathcal{S}_{n+1}^{++}(\mathbb{R})$ et $RX \neq 0$ (puisque R est inversible). Cela prouve que $A \in \mathcal{S}_{n+1}^{++}(\mathbb{R})$.

Remarque : Une autre façon de conclure consiste à noter que l'égalité $A = {}^tRMR$ signifie que les matrices A et M représentent la même forme bilinéaire symétrique φ, mais dans des bases différentes, et qu'ainsi :

$$(A \text{ définie positive}) \Leftrightarrow (\varphi \text{ définie positive}) \Leftrightarrow (M \text{ définie positive}).$$

II.9. Les questions II.5 et II.8 montrent que, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \{1, ..., n\} \quad \det A_k > 0.$$

Les fonctions :

$$\begin{array}{rccc} f_k : & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \det A_k \end{array}$$

sont continues sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ puisque les déterminants $\det A_k$ s'expriment comme des fonctions polynomiales des coefficients de la matrice A. Ainsi, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $f_k^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ comme l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue, et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ comme une intersection finie d'ouverts.

Remarque : On peut en fait montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé convexe de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que son intérieur est $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui converge dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice A, avec la continuité de l'application $M \mapsto {}^tXMX$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, on déduit que :

$${}^tXAX = \lim_{k\to+\infty} {}^tXA_kX \geq 0$$

et $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. L'ensemble est donc fermé dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Pour A, B dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $t \in [0,1]$, on a pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$${}^tX\left((1-t)A + tB\right)X = (1-t)\,{}^tXAX + t\,{}^tXBX \geq 0$$

et $(1-t)A + tB \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. L'ensemble est donc convexe dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On sait déjà que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Si $\mathcal{O}$ n'est pas contenu dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une matrice $A \in \mathcal{O}$ qui n'est pas définie positive. Cette matrice a donc au moins une de ses valeurs propres qui est nulle et il existe une matrice orthogonale P telle que :

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

les λ_k étant positifs ou nul pour k compris entre 2 et n. Comme $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe un entier k_0 tel que pour tout entier $k \geq k_0$ la matrice :

$$A_k = P \begin{pmatrix} -\frac{1}{k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP$$

soit dans $\mathcal{O}$, ce qui est incompatible avec $\mathcal{O} \subset \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ puisque A_k a une valeur propre strictement négative. On a donc $\mathcal{O} \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est l'intérieur de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Partie III - Inclusion d'un compact dans un ellipsoïde

III.1.1. *Première solution (référence au cours) :* D'après le cours, toute application bilinéaire φ définie sur un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit matriciellement sous la forme $\varphi(X,Y) = {}^tXMY$ où M est une matrice carrée de taille n et où X et Y désignent les vecteurs-colonnes des coordonnées de vecteurs x, y de E dans une base $e = (e_1, ..., e_n)$ de E.

On a aussi appris, dans le cours[3], que :

- La réciproque est vraie : toute application de E dans $\mathbb{R}$ définie matriciellement par une relation de la forme $\varphi(X,Y) = {}^tXMY$, est une forme bilinéaire.

- M est par définition la matrice de la forme bilinéaire φ dans la base e. On la note $\mathrm{Mat}(\varphi; e)$.

- φ est symétrique si et seulement si sa matrice M est symétrique, c'est-à-dire vérifie ${}^tM = M$.

Ici, on peut donc affirmer que l'application $(X,Y) \mapsto \Phi_A(X,Y) = {}^tXAY$ est une forme bilinéaire symétrique. La définie positivité de A permet d'écrire $\Phi_A(X,X) = {}^tXAX > 0$ quel que soit $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, ce qui prouve que Φ_A est une forme bilinéaire symétrique définie positive, autrement dit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Seconde solution (vérification point par point) : On vérifie facilement que Φ_A est une forme bilinéaire symétrique. La symétrie ne fait aucun doute puisque si $X, Y \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAY$ est un réel donc :

$$\Phi_A(X,Y) = {}^tXAY = {}^t({}^tXAY) = {}^tYAX = \Phi_A(Y,X).$$

La bilinéarité revient donc à la linéarité à gauche qui se vérifie facilement : si $X, X', Y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Phi_A(X+\lambda X', Y) &= {}^t(X+\lambda X')AY \\ &= {}^tXAY + \lambda X'AY \\ &= \Phi_A(X,Y) + \lambda \Phi_A(X',Y).\end{aligned}$$

Cela étant, la définie positivité de A permet d'écrire $\Phi_A(X,X) = {}^tXAX > 0$ quel que soit $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, donc Φ_A est définie positive. Finalement Φ_A est une bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque stratégique : Je sais ce que me demanderaient mes étudiants ! Ils voudraient savoir quelle réponse donner : la première ou la seconde. Voici comment je pourrais répondre : premièrement, qu'il faut trouver une solution, et la trouver le plus vite possible, donc il faut présenter la méthode que l'on imagine le mieux à l'instant donné. Secondement, qu'il faut aussi suivre ses penchants, choisir rapidement une stratégie qui nous fasse plaisir, et la mettre en oeuvre. On est à la bourre !

Si la première solution est inattaquable quand on se rappelle du cours, la seconde est plus précise et nécessite moins de prérequis, donc risque de rapporter plus.

Je choisirais donc la réponse qui me vient le plus rapidement à l'esprit pour passer aux autres questions, quitte à revenir proposer une seconde démonstration à la fin de l'épreuve si je n'ai plus que cela à faire, ce dont je doute ! Ici, la seconde solution me semble plus rapide et efficace pour engranger des points.

III.1.2. Soit $P = [e'_1, ..., e'_n]$ la matrice formée par les coordonnées d'une base Φ_A-orthonormale $e' = (e'_1, ..., e'_n)$ dans la base canonique $e = (e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On sait (d'après le cours !) que dire que $e' = (e'_1, ..., e'_n)$ est une base Φ_A-orthonormale équivaut à dire que la matrice de Φ_A dans la base e' est l'identité I, autrement dit :

$$\mathrm{Mat}(\Phi_A; e') = I.$$

Toujours d'après le cours,

$$I = \mathrm{Mat}(\Phi_A; e') = {}^tP\,\mathrm{Mat}(\Phi_A; e)P = {}^tPAP.$$

III.1.3. • L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & X & \mapsto & A^{-1}BX \end{array}$$

est linéaire puisque :

$$f(X+\lambda Y) = A^{-1}B(X+\lambda Y) = A^{-1}BX + \lambda A^{-1}BY = f(X) + \lambda f(Y)$$

[3]Il est indispensable de bien connaître tout le chapitre sur les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques tel qu'on peut le lire, par exemple, dans mon "Cours de géométrie" [?] ou dans les "Fondamentaux de géométrie" [?]. Tout ce que j'ai rassemblé dans ces chapitres servent à l'écrit pour réagir sur des problèmes comme celui-ci, et à l'oral pour servir de "background" permettant de répondre très précisément à des questions des examinateurs. Il faut donc investir dans ces lectures avant les concours.

pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. C'est une endomorphisme symétrique pour Φ_A car $\Phi_A(f(X), Y) = \Phi_A(X, f(Y)$ pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$. En effet :

$$\begin{aligned}\Phi_A(f(X), Y) = \Phi_A(X, f(Y)) &\Leftrightarrow {}^t f(X)AY = {}^t XAf(Y) \\ &\Leftrightarrow {}^t X\, {}^t B\, {}^t A^{-1}AY = {}^t XAA^{-1}BY \\ &\Leftrightarrow {}^t X\, {}^t BY = {}^t XBY\end{aligned}$$

et la dernière égalité est vraie puisque B est symétrique.

• L'écriture matricielle $f(X) = A^{-1}BX$ signifie que la matrice de f dans la base canonique est $A^{-1}B$, ce que je noterai $\mathrm{Mat}(f; e) = A^{-1}B$.

III.1.4. • D'après le cours, f étant un endomorphisme symétrique pour Φ_A, il est diagonalisable dans une base Φ_A-orthonormale. Il existe donc une matrice diagonale D et une matrice W dont les colonnes forment une base Φ_A-orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (ainsi $W \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$), telles que[4] :

$$D = W^{-1}A^{-1}BW. \quad (*)$$

D'après (III.2), ${}^t WAW = I$, donc :

$$A = {}^t W^{-1}W^{-1} = {}^t QQ$$

si l'on pose $Q = W^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par ailleurs $(*)$ entraîne :

$$\begin{aligned}B &= AWDW^{-1} \\ &= {}^t W^{-1}W^{-1}WDW^{-1} \\ &= {}^t W^{-1}DW^{-1} \\ &= {}^t QDQ.\end{aligned}$$

• Les matrices $A^{-1}B$ et $D = W^{-1}A^{-1}BW$ sont semblables. Elles représentent donc le même endomorphisme f dans deux bases différentes. Les coefficients diagonaux de D, qui sont les valeurs propres de D, coïncident ainsi avec les valeurs propres de $A^{-1}B$, qui sont aussi celles de f.

III.1.5.a. L'hypothèse $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$ s'écrit successivement :

$$\begin{array}{lll}\forall X \in \mathbb{R}^n & {}^t XAX \leq 1 & \Rightarrow \quad {}^t XBX \leq 1 \\ \forall X \in \mathbb{R}^n & {}^t X\, {}^t QQX \leq 1 & \Rightarrow {}^t X\, {}^t QDQX \leq 1 \\ \forall X \in \mathbb{R}^n & {}^t (QX)QX \leq 1 & \Rightarrow {}^t (QX)D(QX) \leq 1.\end{array}$$

Comme Q est inversible, cela s'écrit :

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad {}^t YY \leq 1 \Rightarrow {}^t YDY \leq 1$$

ou encore :

$$\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad ||Y||^2 \leq 1 \Rightarrow {}^t YDY \leq 1. \qquad (*)$$

La question précédente montre que les valeurs propres de $A^{-1}B$ et de D coïncident. Si λ est une valeur propre de $A^{-1}B$, il existe donc un vecteur X_0 de norme 1 tel que $DX_0 = \lambda X_0$, et l'on peut appliquer $(*)$:

$$||X_0||^2 = 1 \Rightarrow {}^t X_0 DX_0 \leq 1 \Rightarrow \lambda ||X_0||^2 \leq 1 \Rightarrow \lambda \leq 1.$$

III.1.5.b. Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, notons $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble de ses valeurs propres. Cet ensemble est appelé le spectre de f. La question précédente donne :

$$\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B \\ \mathcal{E}_B \subset \mathcal{E}_A\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathrm{Sp}(A^{-1}B) \subset]-\infty, 1] \\ \mathrm{Sp}(B^{-1}A) \subset]-\infty, 1].\end{array}\right.$$

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^{-1}B)$, alors $\lambda \neq 0$ puisque $A^{-1}B$ est inversible, et $1/\lambda \in \mathrm{Sp}(B^{-1}A)$ puisque $B^{-1}A$ est l'inverse de $A^{-1}B$. Ainsi :

$$\lambda \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda} \leq 1,$$

[4] Ce sont les formules de changement de base qui le disent...

donc $\lambda = 1$. Toutes les valeurs propres de $A^{-1}B$ sont donc égales à 1. Mais $A^{-1}B$ est diagonalisable puisque $D = W^{-1}A^{-1}BW$. On a donc nécessairement $D = A^{-1}B = I$, d'où $A = B$.

III.2.1. Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux parties convexes :

$$\forall i \in \{1,2\} \quad \forall u, v \in \mathcal{C}_i \quad [u;v] \subset \mathcal{C}_i$$

donc :

$$\forall u, v \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \quad [u;v] \subset \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2,$$

ce qui prouve que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est convexe.

III.2.2.a. • *Existence* : φ est une application continue définie sur un compact $\mathcal{C}$. Elle atteint donc son minimum en un point de $\mathcal{C}$: il existe $x_0 \in \mathcal{C}$ tel que $\varphi(x_0) = \mathrm{Min}_{x\in\mathcal{C}}\, \varphi(x)$.

Remarque : Doit-on en dire plus ? Ce qui est certain, c'est que l'on doit pouvoir en dire plus à l'écrit (si on le décide) ou à l'oral (si un examinateur le demande). Voyons donc : l'image d'un compact par une application continue est un compact, donc $\varphi(\mathcal{C})$ est un compact de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un fermé borné de $\mathbb{R}$. Comme la partie $\varphi(\mathcal{C})$ est bornée, elle est minorée donc possède une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. Comme $\varphi(\mathcal{C})$ est fermée, cette borne inférieure appartient à $\varphi(\mathcal{C})$, ce qui fait dire que φ atteint son minimum en un point de $\mathcal{C}$.

Il va sans dire qu'il faut aussi savoir démontrer toutes les affirmations que l'on vient d'asséner pour répondre plus précisément à cette question.

• *Unicité* : Si x_0 et y_0 sont deux points distincts du convexe $\mathcal{C}$ qui vérifient $\varphi(x_0) = \varphi(y_0) = \mathrm{Min}_{x\in\mathcal{C}}\, \varphi(x)$, le segment $[x_0; y_0]$ est inclus dans $\mathcal{C}$ donc :

$$\forall t \in]0,1[\quad \varphi(tx_0 + (1-t)y_0) < t\varphi(x_0) + (1-t)\varphi(y_0) = \varphi(x_0).$$

Toutes les images des points $tx_0 + (1-t)y_0$ de $[x_0; y_0]$ par φ sont alors strictement inférieures à $\varphi(x_0) = \mathrm{Min}_{x\in\mathcal{C}}\, \varphi(x)$, ce qui est impossible ! Donc $x_0 = y_0$.

III.2.2.b. φ admet un maximum sur $\mathcal{C}$ pour les mêmes raisons qu'elle admet un minimum : une fonction continue sur un compact atteint ses bornes. Mais cette fois-ci, l'unicité n'est plus acquise. Pour s'en convaincre, il suffit de penser au disque fermée $\mathcal{D} = \overline{B(0,1)}$ de $E = \mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon 1, et de considérer l'application $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ qui à $x \in \mathcal{D}$ associe la distance $\mathrm{d}\,(0,x) = \sqrt{x_1^2 + x_1^2}$ de x à 0 (en notant $x = (x_1, x_2)$ et en considérant la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$, ce qui n'a pas de conséquence puisque toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes). L'application φ est continue sur $\mathcal{D}$ et atteint son maximum en tout point du bord du disque $\mathcal{D}$.

III.3.1. • Cas où $n = 2$.

L'ellipsoïde $\mathcal{E}_A$ est l'intérieur d'une ellipse dont une équation réduite dans une base orthonormale (pour la structure euclidienne canonique dans le plan $\mathbb{R}^2$) est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\dagger)$$

où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On démontre, en cours[5], que l'aire de l'intérieur de cette ellipse est πab. C'est le volume $\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A)$ de $\mathcal{E}_A$. Ainsi :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) = \pi ab = \frac{k_2}{\sqrt{\det A}}$$

où $\mathcal{E}_A = \{X \in \mathbb{R}^2 \,/\, {}^tXAX \leq 1\}$. On sait, toujours d'après le cours sur les coniques, que l'on obtient une équation réduite du type ($\dagger$) en diagonalisant la matrice A. Plus précisément, il existe une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et une matrice orthogonale P telles que $D = P^{-1}AP$, et telle que l'équation réduite ($\dagger$) soit en fait la suivante :

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 1.$$

[5] Voir Section 2.1.

On a donc $\lambda_1 = 1/a^2$, $\lambda_2 = 1/b^2$, et :

$$\det A = \det D = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{a^2 b^2}.$$

Par suite $ab = 1/\sqrt{\det A}$ et $k_2 = \pi$.

• Cas où $n = 3$.

L'ellipsoïde $\mathcal{E}_A$ est l'intérieur d'une quadrique dont une équation réduite dans une base orthonormale s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\ddagger)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Un calcul de volume (utilisant des intégrales triples) donne[6] :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) = \frac{4\pi}{3} abc = \frac{k_3}{\sqrt{\det A}}.$$

Encore une fois la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ obtenue en diagonalisant A nous fournit l'équation $(\ddagger)$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 1$$

donc $\lambda_1 = 1/a^2$, $\lambda_2 = 1/b^2$ et $\lambda_3 = 1/c^2$. Ainsi :

$$\det A = \det D = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{1}{a^2 b^2 c^2}$$

donc $abc = 1/\sqrt{\det A}$ et $k_3 = 4\pi/3$.

III.3.2. La question (III.1.5) montre que si $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$, alors le spectre de $A^{-1}B$ est inclus dans $]-\infty, 1]$. D'après (III.1.4), $D = W^{-1}A^{-1}BW$ donc D est la matrice diagonale formée des valeurs propres de $A^{-1}B$. Soit $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Comme $\lambda_i \leq 1$ pour tout i,

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}B) = \det D = \lambda_1 \ldots \lambda_n \leq 1 &\Rightarrow \det B \leq \det A \\ &\Rightarrow 1/\sqrt{\det A} \leq 1/\sqrt{\det B} \\ &\Rightarrow \nu\,(A) \leq \nu\,(B)\,. \end{aligned}$$

III.3.3. L'application :

$$\begin{array}{rccc} \nu : & \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & 1/\sqrt{\det A} \end{array}$$

est continue comme la composée de trois applications continues, à savoir :

- l'application "déterminant" $\det : \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ fait correspondre son déterminant $\det A$. Cette application est continue car $\det A$ est un polynôme en les coefficients de A. On remarque que l'image de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ par det est incluse dans $\mathbb{R}_+^*$.

- l'application racine carrée $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui a tout réel positif x associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.

- l'application inverse $i : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$; $x \mapsto 1/x$.

Avec ces notations, $\nu = i \circ \rho \circ \det$.

III.3.4.a. • *Première solution* : La fonction logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement concave d'après le cours, car sa dérivée seconde $x \mapsto -1/x^2$ reste strictement négative sur tout $\mathbb{R}_+^*$. Cela signifie que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \quad a \neq b \quad \forall t \in]0, 1[\quad \ln(ta + (1-t)b) > t \ln a + (1-t) \ln b.$$

[6] Voir Section 2.2.

Pour $a = 1$, on obtient :

$$\forall b \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} \quad \forall t \in]0,1[\quad \ln(t + (1-t)b) > (1-t)\ln b$$

avec égalité si et seulement si $b = 1$. C'est exactement ce qu'on nous demande de montrer !

• *Seconde solution* : Pour $t \in]0,1[$ fixé, l'application :

$$\psi(\lambda) = \ln(t + (1-t)\lambda) - (1-t)\ln\lambda$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de fonction dérivée :

$$\psi'(\lambda) = \frac{1-t}{t+(1-t)\lambda} - \frac{1-t}{\lambda} = t(1-t)\frac{\lambda - 1}{\lambda\,(t+(1-t)\lambda)}$$

soit :

$$\psi'(\lambda) = t\frac{\lambda - 1}{\lambda\left(\lambda - \frac{t}{t-1}\right)}.$$

Cette dérivée s'annule seulement en $\lambda = 1$. Lorsque λ décrit $\mathbb{R}_+^*$, $\lambda(\lambda - t/(t-1))$ reste positif donc $\psi'(\lambda)$ a le même signe que $\lambda - 1$, et le tableau de variations de ψ est :

λ	0		1		$+\infty$
$\psi'(\lambda)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$\psi(\lambda)$	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Cela montre que $\psi(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, et comme $\psi(1) = 0$, cela achève la vérification.

III.3.4.b. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \in [0,1]$, on demande de montrer l'assertion :

$$(P): \qquad e^{ta+(1-t)b} \leq te^a + (1-t)e^b.$$

• *Première solution* : La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée seconde est positive. La propriété (P) ne fait que traduire cette convexité.

• *Seconde solution* : En appliquant le logarithme népérien des deux côtés de l'inégalité,

$$\begin{aligned}(P) &\Leftrightarrow ta + (1-t)b \leq \ln(te^a + (1-t)e^b) \\ &\Leftrightarrow ta + (1-t)b \leq \ln e^a + \ln(t + (1-t)e^{b-a}) \\ &\Leftrightarrow (1-t)(b-a) \leq \ln(t + (1-t)e^{b-a}).\end{aligned}$$

Posons $\lambda = e^{b-a}$. On a $\lambda > 0$ et la dernière inégalité écrite devient :

$$(1-t)\ln\lambda \leq \ln(t + (1-t)\lambda).$$

On reconnaît l'inégalité démontrée au (III.3.4.a). Celle-ci est donc vraie, et l'on peut ajouter que l'inégalité (P) sera une égalité si et seulement si $\lambda = 1$, c'est-à-dire $a = b$.

III.3.4.c.i. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe revient à montrer que, étant donné deux éléments A, B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, le segment $[A, B]$ est entièrement contenu dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit donc M un point du segment $[A, B]$. Il existe $t \in [0,1]$ tel que $M = tA + (1-t)B$. Alors, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$,

$${}^tXMX = t\,{}^tXAX + (1-t)\,{}^tXBX > 0$$

puisque par hypothèse ${}^tXAX > 0$ et ${}^tXBX > 0$, et puisque le barycentre à coefficients positifs ${}^tXMX$ des deux réels positifs ${}^tXAX$ et ${}^tXBX$ appartient au segment d'extrémités ces deux réels, segment qui est évidemment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

III.3.4.c.ii. On a $A = {}^tQQ$ et $B = {}^tQDQ$. Posons $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $\det Q = \delta$. On obtient :

$$\begin{cases} \det A = \det({}^tQQ) = \delta^2 \\ \det B = \det({}^tQDQ) = (\det Q)^2 \det D = (\lambda_1 ... \lambda_n)\,\delta^2. \end{cases}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} tA + (1-t)B &= t\,{}^tQQ + (1-t)\,{}^tQDQ \\ &= {}^tQ(tI + (1-t)D)Q \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \det(tA + (1-t)B) &= (\det Q)^2 \times \det(tI + (1-t)D) \\ &= \delta^2 \times \det[\mathrm{diag}\,(t + (1-t)\lambda_1, ..., t + (1-t)\lambda_n)]. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\det(tA + (1-t)B) \;=\; \delta^2 \prod_{i=1}^{n} (t + (1-t)\lambda_i)\,.$$

III.3.4.c.iii. Dire que ν est strictement convexe revient à dire que, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, avec $A \neq B$, et pour tout $t \in]0,1[$:

$$\nu(tA + (1-t)B) < t\nu(A) + (1-t)\nu(B).$$

Cela s'écrit successivement :

$$\frac{1}{\sqrt{\det(tA + (1-t)B)}} < \frac{t}{\sqrt{\det A}} + \frac{1-t}{\sqrt{\det B}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n} (t + (1-t)\lambda_i)}} < t + \frac{1-t}{\sqrt{\lambda_1 ... \lambda_n}}$$

ou encore, en posant $\lambda = 1/\sqrt{\lambda_1 ... \lambda_n}$:

$$-\frac{1}{2} \ln \left(\prod_{i=1}^{n} (t + (1-t)\lambda_i) \right) < \ln (t + (1-t)\lambda)\,. \quad (*)$$

D'après III.3.4.a, $(1-t)\ln\lambda \leq \ln(t + (1-t)\lambda)$ avec égalité si et seulement si $\lambda = 1$. On aura donc montré $(*)$ si l'on prouve que :

$$-\frac{1}{2} \ln \left(\prod_{i=1}^{n} (t + (1-t)\lambda_i) \right) < (1-t)\ln\lambda$$

ce qui s'écrit encore :

$$-\frac{1}{2} \ln \left(\prod_{i=1}^{n} (t + (1-t)\lambda_i) \right) < -\frac{1}{2}(1-t) \ln \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ou :

$$\sum_{i=1}^{n} \ln (t + (1-t)\lambda_i) > \sum_{i=1}^{n} (1-t)\ln\lambda_i. \quad (\natural)$$

On sait, d'après (III.3.4.a), que $\ln(t + (1-t)\lambda_i) \geq (1-t)\ln\lambda_i$ pour tout i, avec égalité si et seulement si $\lambda_i = 1$. En sommant on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \ln (t + (1-t)\lambda_i) \geq \sum_{i=1}^{n} (1-t)\ln\lambda_i$$

avec égalité si et seulement si $(\lambda_1, ..., \lambda_n) = (1, ..., 1)$, cette dernière condition revenant à avoir $D = I$ donc $A = {}^tQQ = B$, ce qui est à rejeter puisque par hypothèse $A \neq B$. Finalement l'inégalité stricte $(\natural)$ est toujours vraie, et cela achève la démonstration.

III.3.5. • Si $Y \in M(\mathcal{E}_A)$, il existe $X \in \mathcal{E}_A$ tel que $Y = MX$, et ${}^tXAX \leq 1$ s'écrit :

$$\begin{aligned} {}^tXAX \leq 1 &\Leftrightarrow {}^t(M^{-1}Y)A(M^{-1}Y) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow {}^tY({}^tM^{-1}AM^{-1})Y \leq 1 \\ &\Leftrightarrow Y \in \mathcal{E}_{{}^tM^{-1}AM^{-1}} \end{aligned}$$

donc $M(\mathcal{E}_A) \subset \mathcal{E}_B$ où $B = {}^t M^{-1} A M^{-1}$. Réciproquement, si $Y \in \mathcal{E}_B$, comme la matrice M est bijective, il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $Y = MX$ et l'on peut remonter les équivalences précédentes pour obtenir ${}^t XAX \leq 1$, ce qui prouve que $X \in \mathcal{E}_A$ et $Y = MX \in M(\mathcal{E}_A)$. En conclusion :

$$M(\mathcal{E}_A) = \mathcal{E}_B \quad \text{où } B = {}^t M^{-1} A M^{-1}.$$

• On a :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) = \frac{k_n}{\sqrt{\det A}}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(M(\mathcal{E}_A)) &= \frac{k_n}{\sqrt{\det({}^t M^{-1} A M^{-1})}} \\ &= |\det M| \times \frac{k_n}{\sqrt{\det A}} \quad = \quad |\det M| \times \mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A).\end{aligned}$$

III.4.1.a. D'après (III.1), l'application $(X, Y) \mapsto \Phi_A(X, Y) = {}^t XAY$ est un produit scalaire. Si l'on note $||X||_N = \sqrt{{}^t XAX}$ la norme associée,

$$\mathcal{E}_A = \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, {}^t XAX \leq 1\} = \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, ||X||_N \leq 1\}$$

apparaît comme la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour $||\ ||_N$. Une boule est convexe. Cela se vérifie sans coup férir puisque, si $X, Y \in \mathcal{E}_A$, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}||tX + (1-t)\,Y||_N &\leq t\,||X||_N + (1-t)\ ||Y||_N \\ &\leq t + (1-t) \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

III.4.1.b. La vérification est immédiate :

$$\begin{aligned}X \in \mathcal{E}_A &\Rightarrow\ {}^t XAX \leq 1 \\ &\Rightarrow\ {}^t(-X)A(-X) = {}^t XAX \leq 1 \\ &\Rightarrow\ -X \in \mathcal{E}_A.\end{aligned}$$

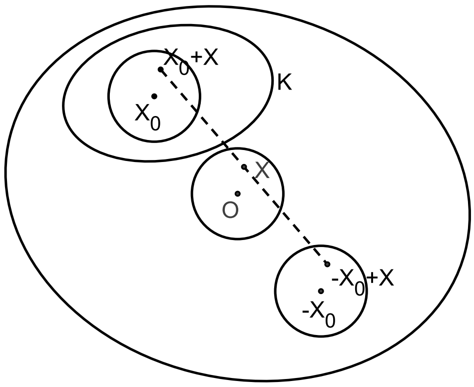

Fig. 1 – Visualisation

III.4.1.c. • La fig. 1 permet d'avoir des idées et d'écrire :

$$\begin{aligned}||X|| \leq \varepsilon &\Rightarrow\ ||(X_0 + X) - X_0|| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow\ X_0 + X \in B(X_0, \varepsilon) \subset K \subset \mathcal{E}_A \\ &\Rightarrow\ X_0 + X \in \mathcal{E}_A.\end{aligned}$$

• D'après (III.4.1.b), $\mathcal{E}_A$ est stable par la symétrie $s : X \mapsto -X$ par rapport à l'origine 0 de $\mathbb{R}^n$. Comme par hypothèse $B(X_0, \varepsilon) \subset \mathcal{E}_A$, on en déduit que $s\,(B(X_0, \varepsilon)) = B(-X_0, \varepsilon) \subset \mathcal{E}_A$, et l'on peut recommencer comme au premier point :

$$\begin{aligned} ||X|| \leq \varepsilon \Rightarrow\ & ||(-X_0 + X) - (-X_0)|| \leq \varepsilon \\ \Rightarrow\ & -X_0 + X \in B(-X_0, \varepsilon) \subset K \subset \mathcal{E}_A \\ \Rightarrow\ & -X_0 + X \in \mathcal{E}_A. \end{aligned}$$

• Si $X \in B(0, \varepsilon)$, $X_0 + X$ et $-X_0 + X$ appartiennent à $\mathcal{E}_A$, et comme $\mathcal{E}_A$ est convexe, le milieu

$$X = \frac{1}{2}(X_0 + X) + \frac{1}{2}(-X_0 + X)$$

du segment $[X_0 + X; -X_0 + X]$ aussi. Ainsi $(X \in B(0, \varepsilon) \Rightarrow X \in \mathcal{E}_A)$, et l'on a bien l'inclusion $B(0, \varepsilon) \subset \mathcal{E}_A$.

III.4.1.d. Si X est un vecteur propre (non nul) de A de norme 1 associé à la valeur propre λ, εX est de norme $||\varepsilon X|| = \varepsilon$ donc $\varepsilon X \in B(0, \varepsilon)$. On vient de démontrer que $B(0, \varepsilon) \subset \mathcal{E}_A$, donc $\varepsilon X \in \mathcal{E}_A$. Par suite :

$${}^t(\varepsilon X)A(\varepsilon X) \leq 1.$$

Comme ${}^t(\varepsilon X)A(\varepsilon X) = \varepsilon^2\, {}^tXAX = \varepsilon^2\, {}^tX(\lambda X) = \lambda\varepsilon^2||X||^2 = \lambda\varepsilon^2$, on obtient bien $\lambda \leq 1/\varepsilon^2$.

III.4.1.e. On sait[7] que la norme opérateur $|||A|||$ de l'endomorphisme symétrique A est la plus grande valeur absolue des valeurs propres de A :

$$|||A||| = \mathrm{Sup}_{X \neq 0} \frac{||AX||}{||X||} = \mathrm{Sup}\left\{|\lambda| \ / \ \lambda \text{ valeur propre de } A\right\}.$$

Comme on vient de démontrer que toutes les valeurs propres de A sont inférieures à $1/\varepsilon^2$, et comme ces valeurs propres sont positives par hypothèse, on obtient $|||A||| \leq 1/\varepsilon^2$.

III.4.2. K est un compact de $\mathbb{R}^n$, c'est donc un borné et il existe une boule fermée $B\,(0, r)$ qui le contient. On a :

$$\begin{aligned} B\,(0, r) &= \{X = {}^t\,(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, x_1^2 + ... + x_n^2 \leq 1\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, {}^tXX \leq 1\} \\ &= \mathcal{E}_I \end{aligned}$$

où I est la matrice identité. Ainsi $B\,(0, r)$ est un ellipsoïde qui contient K.

III.4.3.a. Si $A \in \mathcal{M}$, alors $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont positives. Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ telles que $D = P^{-1}AP$, et tous les λ_i sont positifs ou nuls. Mais $\det A = \lambda_1 ... \lambda_n \geq \det A_0 > 0$ puisque $A_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc $\lambda_i > 0$ quel que soit i, et $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

III.4.3.b. Choisissons une boule fermée $B(X_0, \varepsilon)$ incluse dans K $(\varepsilon > 0)$ comme au début de la partie (III.4). Si $A \in \mathcal{M}$, alors $0 \leq {}^tXAX \leq 1$ pour tout $X \in K$, donc $K \subset \mathcal{E}_A$. Cette inclusion nous permet d'utiliser la question (III.4.1.e) et obtenir la majoration $|||A||| \leq 1/\varepsilon^2$. La borne $1/\varepsilon^2$ ne dépend que de ε qui ne dépend que de K. On a trouvé une constante $1/\varepsilon^2$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M} \quad |||A||| \leq 1/\varepsilon^2$$

ce qui prouve que $\mathcal{M}$ est borné.

III.4.3.c. Montrer que $\mathcal{M}$ est fermé dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ revient à montrer que, si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{M}$ qui tend vers $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors A appartient à $\mathcal{M}$. Considérons-donc une telle suite.

• $A_k \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour tout k, donc :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad {}^tXA_kX \geq 0.$$

[7] Voir Section 2.3.

Posons $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j}$ et $A = (a_{ij})_{i,j}$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toutes les normes sont équivalentes (c'est un espace vectoriel de dimension finie n^2), et en particulier la norme opérateur $|||A|||$ et la "norme du sup" $||A||_\infty = \mathrm{Sup}\, |a_{ij}|$ sont équivalentes. Les topologies induites sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par ces normes sont les mêmes, et $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$ se lit indifféremment pour la norme opérateur ou pour la "norme du sup". On peut donc dire que, si $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$, alors $\lim_{k\to+\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$.

Mais ${}^tXA_kX \geq 0$ s'écrit $\sum_{i,j} a_{ij}^{(k)} x_i x_j \geq 0$, et donne $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \geq 0$ en passant à la limite quand k tend vers $+\infty$. Par suite $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

• Pour tout k, $\det A_k \geq \det A_0$. La fonction $A \mapsto \det A$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ puisqu'un déterminant est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice, donc on peut passer à la limite dans l'inégalité $\det A_k \geq \det A_0$ lorsque k tend vers $+\infty$ pour obtenir $\det A \geq \det A_0$.

• Enfin :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall X \in K \quad 0 \leq {}^tXA_kX \leq 1.$$

Encore une fois ${}^tXA_kX = \sum_{i,j} a_{ij}^{(k)} x_i x_j \geq 0$, et $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$ entraîne :

$$\lim_{k\to+\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$$

quel que soit le couple (i,j) fixé. En passant à la limite dans les inégalités $0 \leq {}^tXA_kX \leq 1$, on obtient $0 \leq {}^tXAX \leq 1$.

En conclusion $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\det A_k \geq \det A_0$ et $0 \leq {}^tXAX \leq 1$ pour tout X appartenant à K, donc $A \in \mathcal{M}$.

Remarques : α) Cette preuve montre aussi que $\mathcal{M}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, si $A_k \in \mathcal{M}$ pour tout k, et si $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$$

pour tous i, j, donc $a_{ij} = a_{ji}$ en passant à la limite, donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et tout ce qu'on vient de faire auparavant s'applique : A appartient à $\mathcal{M}$.

β) Cette façon de procéder montre que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ sont fermés dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais on ne peut rien dire de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car un passage à la limite dans des inégalités strictes donne des inégalités larges. A la question (II.9) on a par contre démontré que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ était un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

III.4.3.d. Il s'agit de montrer que si $A, B \in \mathcal{M}$, alors $[A; B] \subset \mathcal{M}$. Soit $C = tA + (1-t)B$ un point quelconque du segment $[A; B]$ (avec $t \in [0,1]$). Pour montrer que C appartient à $\mathcal{M}$ on doit faire trois vérifications :

• On a vu que $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et l'on a montré que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ était convexe (III.3.4.c.i). Donc $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et a fortiori $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

• On a $\det A \geq \det A_0$ et $\det B \geq \det A_0$. D'après (III.3.4.c.iii), ν est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc, si $A \neq B$:

$$\nu(tA + (1-t)B) < t\nu(A) + (1-t)\nu(B).$$

$$\frac{1}{\sqrt{\det C}} < \frac{t}{\sqrt{\det A}} + \frac{1-t}{\sqrt{\det B}} \leq \frac{1}{\sqrt{\det A_0}}$$

d'où $\det C \geq \det A_0$.

• Il s'agit enfin de montrer que $0 \leq {}^tXCX \leq 1$ pour tout $X \in K$. C'est évident puisque :

$${}^tXCX = t\,{}^tXAX + (1-t)\,{}^tXBX$$

fait apparaître le réel ${}^tXCX$ comme un barycentre à coefficients positifs de deux nombres ${}^tXAX$ et ${}^tXBX$ qui appartiennent à l'intervalle $[0,1]$, ce qui impose d'avoir ${}^tXCX \in [0,1]$.

III.4.4. L'ensemble $\{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) \,/\, K \subset \mathcal{E}_A\}$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc minoré par 0. Il admet donc une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. Soit :

$$v = \mathrm{Inf}\{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_A) \,/\, K \subset \mathcal{E}_A\}.$$

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $K \subset \mathcal{E}_{A_0}$. On a $A_0 \in \mathcal{M}$, et :

$$\begin{aligned} v &= \operatorname{Inf}\{\operatorname{Vol}(\mathcal{E}_A) \,/\, \operatorname{Vol}(\mathcal{E}_A) \leq \operatorname{Vol}(\mathcal{E}_{A_0}) \text{ et } K \subset \mathcal{E}_A\} \\ &= \operatorname{Inf}\{\operatorname{Vol}(\mathcal{E}_A) \,/\, \det A \leq \det A_0 \text{ et } \forall X \in K \ \ 0 \leq {}^tXAX \leq 1\} \\ &= \operatorname{Inf}\{k_n \nu(A) \,/\, A \in \mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

D'après (III.3.3) et (III.3.4.c) l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & k_n \nu(A) \end{array}$$

est strictement convexe et continue sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc a fortiori sur $\mathcal{M}$, et $\mathcal{M}$ est une partie non vide, convexe et compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après (III.4.3) et la remarque faite après la preuve de (III.4.3). On peut utiliser le résultat de la question (III.2.2) : Ψ admet un minimum et celui-ci est atteint en un unique point de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe donc une unique matrice $A_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que :

$$v = \operatorname{Inf}\{k_n \nu(A) \,/\, A \in \mathcal{M}\} = k_n \nu(A_1)$$

autrement dit telle que :

$$v = \operatorname{Inf}\{\operatorname{Vol}(\mathcal{E}_A) \,/\, K \subset \mathcal{E}_A\} = \operatorname{Vol}(\mathcal{E}_{A_1}).$$

III.4.5.a. L'intérieur de K est l'ensemble vide car toute boule ouverte de centre un point de K et de rayon strictement positif intercepte le complémentaire de K dans $\mathbb{R}^2$.

III.4.5.b. Les intérieurs des ellipses de foyers $F\,(1,0)$, $F'\,(-1,0)$ contiennent le segment $K = [-1,1] \times \{0\}$. Ces ellipses admettent des équations réduites de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où $0 < b < a$, dans un repère orthonormal d'origine le milieu de $[FF']$ et de premier axe (FF'). Avec les notations habituelles, c'est-à-dire en notant $(c,0)$ les coordonnées de F, et en supposant (FF') orienté de telle sorte que $c > 0$, on sait que $a^2 = b^2 + c^2$. Ici $c = 1$, donc l'ellipse, que nous noterons $\mathcal{E}_a$, admet l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1.$$

L'aire de l'intérieur de $\mathcal{E}_a$, que nous noterons abusivement[8] $\operatorname{Vol}(\mathcal{E}_a)$, est :

$$\operatorname{Vol}(\mathcal{E}_a) = \pi ab = \pi a \sqrt{a^2 - 1}$$

donc $\lim_{a \to 0} \operatorname{Vol}(\mathcal{E}_a) = 0$. On peut ainsi trouver des ellipses qui contiennent K, et d'aires aussi petites que l'on désire. Il n'existe pas d'ellipse d'aire minimale contenant K.

2 Compléments

2.1 Aire de l'intérieur d'une ellipse

L'aire de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal est donnée par l'intégrale double :

$$A = \int\int_D dxdy \qquad \text{où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Considérons le changement de variables $\varphi\,(\rho,\theta) = (a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta) = (x,y)$. On a :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \leq 1$$

[8]"Abusivement" non pas parce qu'il s'agit d'une aire et non d'un volume, ce qui provient naturellement du fait que l'on travaille dans un espace de dimension 2, mais parce qu'une ellipse n'a pas d'aire, et que seul l'intérieur d'une ellipse peut en avoir.

et le déterminant du jacobien de φ vaut :

$$\det J(\varphi;(\rho,\theta)) = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Donc :

$$A = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} ab\rho\, d\theta d\rho = ab\left(\int_{\rho=0}^{1}\rho\, d\rho\right)\times\left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\right) = \pi ab.$$

2.2 Volume d'un ellipsoïde

On peut réviser comment l'on calcule le volume d'un ellipsoïde. L'exercice ci-dessous, extrait du recueil [?] sur les fonctions de plusieurs variables, nous permettra de nous exercer pour la bonne cause !

Exercice 1 *(Examen de juin 1997)* ***Volume d'un ellipsoïde***
On se donne trois réels a, b et c strictement positifs.
1) Montrer que l'ensemble $U = \{(\rho,\theta,t)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \rho>0,\ 0<\theta<2\pi\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2) Soit φ l'application de U dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi(\rho,\theta,t) = (a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta, ct).$$

Expliquer sommairement pourquoi φ est de classe C^1 sur U, puis écrire la matrice jacobienne $J(\varphi;(\rho,\theta,t))$ de φ en $(\rho,\theta,t)\in U$.
3) Soit $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, y=0 \text{ et } x\geq 0\}$. Démontrer que φ induit une bijection de U sur $\mathbb{R}^3\backslash S$.
4) Montrer que la partie :

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$$

est bornée. En utilisant le changement de variable $\varphi : U\to\mathbb{R}^3$, calculer le volume de Ω, autrement dit la valeur de l'intégrale triple :

$$V = \iiint_\Omega dxdydz.$$

Solution : 1) Les projections $p_1 : (\rho,\theta,t)\mapsto\rho$ et $p_2 : (\rho,\theta,t)\mapsto\theta$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$, de sorte que les images réciproques $p_1^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $p_2^{-1}(]0,2\pi[)$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ par ces applications soient des ouverts de $\mathbb{R}^3$. U est ouvert comme l'intersection de ces deux ouverts.

2) φ est de classe C^1 sur U car ses applications coordonnées sont des fonctions de classe C^1 (et même C^∞) sur U. On a

$$J(\varphi;(\rho,\theta,t)) = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta & 0 \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

3) Il est évident que $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^3\backslash S$, la seconde coordonnée $b\rho\sin\theta$ de $\varphi(\rho,\theta,t)$ ne pouvant jamais s'annuler lorsque $0<\theta<2\pi$ sauf lorsque $x<0$ (c'est-à-dire lorsque $\theta=\pi\ (2\pi)$). Pour montrer que $\varphi : U\to\mathbb{R}^3\backslash S$ est bijective, il reste à prouver que n'importe quel élément (x,y,z) de $\mathbb{R}^3\backslash S$ possède un unique antécédent par φ dans U. Puisque $\rho>0$,

$$\varphi(\rho,\theta,t)=(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} a\rho\cos\theta = x \\ b\rho\sin\theta = y \\ ct = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{a\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{b\rho} \\ t = \dfrac{z}{c}. \end{cases} \qquad (*)$$

Comme $\left(\frac{x}{a\rho}\right)^2+\left(\frac{y}{b\rho}\right)^2 = 1$ il existe un et un seul réel θ appartenant à $[0,2\pi[$ tel que $\cos\theta = x/a\rho$ et $\sin\theta = y/b\rho$. De plus la condition $y\neq 0$ impose $\theta\neq 0$, d'où $\theta\in]0,2\pi[$. Les conditions $(*)$ déterminent donc un unique triplet (ρ,θ,t) appartenant à U.

4)
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{a^2}\leq 1 \quad\Rightarrow\quad x^2\leq a^2 \quad\Rightarrow\quad |x|\leq a.$$

En procédant de la même manière, on obtient :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1 \quad\Rightarrow\quad |x|\leq a,\ |y|\leq b,\ |z|\leq c,$$

donc pour tout $(x,y,z)\in\Omega$,

$$\|(x,y,z)\|_\infty = \operatorname{Sup}\left(|x|,|y|,|z|\right)\leq \operatorname{Sup}(a,b,c)$$

et Ω est bornée. Le changement de variable dans l'intégrale donne

$$V=\iiint_\Omega dxdydz=\iiint_{\Omega'}\left|\frac{D\varphi(x,y,z)}{D(\rho,\theta,t)}\right| d\rho d\theta dt$$

avec

$$\begin{aligned}\Omega' &= \left\{(\rho,\theta,t)\in U\,/\,\rho^2+t^2\leq 1\right\}\\ &= \left\{(\rho,\theta,t)\in\mathbb{R}^3\,/0<\rho<\sqrt{1-t^2},\ 0<\theta<2\pi\,,\ -1\leq t\leq 1\right\}.\end{aligned}$$

La valeur absolue du jacobien de φ est

$$\left|\frac{D\varphi(x,y,z)}{D(\rho,\theta,t)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta & 0\\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}\right| = abc\rho$$

donc, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}V &= \int_{t=-1}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\sqrt{1-t^2}} abc\rho\, d\rho d\theta dt\\ &= 2\pi abc\int_{t=-1}^{1}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi abc\int_{t=-1}^{1} 1-t^2\, dt=\frac{4\pi}{3}abc.\end{aligned}$$

Remarque : Si Ω est la boule de rayon R, alors $a=b=c=R$ et l'on retrouve la formule classique donnant le volume d'une boule :

$$V=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

2.3 Norme opérateur d'une matrice symétrique

Voici un extrait adapté du chapitre 24 du "Cours de Géométrie" [**?**] consacré aux endomorphismes réels symétriques :

Théorème 2 *La norme opérateur* $\|A\|=\operatorname{Sup}_{X\neq 0}\frac{\|AX\|}{\|X\|}$ *d'une matrice carrée réelle symétrique est :*

$$\|A\|=\operatorname{Sup}_{X\neq 0}\frac{\left|{}^tXAX\right|}{{}^tXX}=\operatorname{Sup}\left\{|\lambda|\ /\ \lambda \text{ valeur propre de } A\right\}.$$

Preuve : Notons λ_1, ..., λ_n les valeurs propres de A comptées avec leurs ordres de multiplicité. On peut toujours supposer que $|\lambda_1|=\operatorname{Sup}_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|$. La matrice réelle symétrique A est diagonalisable dans le groupe orthogonal, donc il existe une matrice orthogonale P telle que :

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}=P^{-1}AP.$$

Puisque ${}^tP = P^{-1}$, on peut écrire :

$$\frac{|{}^tXDX|}{{}^tXX} = \frac{|{}^tXP^{-1}APX|}{{}^tXX} = \frac{|{}^t(PX)\,APX|}{{}^t(PX)\,(PX)}$$

et de la même manière :

$$\frac{|{}^tXAX|}{{}^tXX} = \frac{|{}^t\left(P^{-1}X\right)DP^{-1}X|}{{}^t(P^{-1}X)\,(P^{-1}X)}.$$

Cela montre l'égalité ensembliste :

$$\left\{\frac{|{}^tXAX|}{{}^tXX}/X \neq 0\right\} = \left\{\frac{|{}^tXDX|}{{}^tXX}/X \neq 0\right\}$$

et permet d'affirmer que :

$$\mathrm{Sup}_{X\neq 0}\,\frac{|{}^tXAX|}{{}^tXX} = \mathrm{Sup}_{X\neq 0}\,\frac{|{}^tXDX|}{{}^tXX}.$$

Pour tout vecteur X non nul,

$$\frac{\left|{}^tXDX\right|}{{}^tXX} = \frac{\left|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2\right|}{\|X\|^2} \leq |\lambda_1|$$

et $\dfrac{\left|{}^tZDZ\right|}{{}^tZZ} = |\lambda_1|$ pour $Z = {}^t(1,0,...,0)$, donc :

$$\mathrm{Sup}_{X\neq 0}\,\frac{\left|{}^tXDX\right|}{{}^tXX} = |\lambda_1|\,.$$

Par ailleurs les égalités :

$$\frac{\|DX\|}{\|X\|} = \frac{\left\|P^{-1}APX\right\|}{\|X\|} = \frac{\left\|P^{-1}A\,(PX)\right\|}{\|PX\|} = \frac{\|A\,(PX)\|}{\|PX\|}$$

montrent que $||A|| = ||D|| = \mathrm{Sup}_{X\neq 0}\,\dfrac{||DX||}{||X||}$. Si $X \neq 0$,

$$\frac{\|DX\|}{\|X\|} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \leq |\lambda_1|$$

et $\dfrac{||DZ||}{||Z||} = |\lambda_1|$, de sorte que l'on ait bien $||A|| = ||D|| = |\lambda_1|$. ∎