Table des matières

[0] [cmon0012] v1.00

Avant-propos

Cet ouvrage est constitué des énoncés et corrigés de quinze problèmes posés au CAPES externe de Mathématiques entre 1999 et 2005. Certains de ces corrigés sont complétés par des remarques et des compléments.

Une utilisation efficace de ces problèmes consiste bien évidemment à les chercher au préalable puis à confronter les résultats obtenus aux solutions proposées.

Les candidats à l'Agrégation interne de Mathématiques pourront également utiliser avec profit ce travail.

Les objectifs principaux d'un tel travail sont les suivants :

– proposer des épreuves d'entraînements ;
– proposer un modèle de rédaction ;
– élargir le champ des connaissances acquises en licence.

D'un point de vue pratique, il est essentiel de rappeler que de manière générale ces problèmes de concours (que ce soit de CAPES ou d'Agrégation) sont beaucoup trop longs pour être résolus en cinq heures. Sur un problème comportant cinq parties la résolution correcte des questions des deux premières parties est en général suffisante pour assurer une admissibilité bien classée, il est donc conseillé de se concentrer sur les deux premières parties du problème et d'essayer d'en résoudre un maximum de questions plutôt que de « papillonner » et ne travailler que sur quelques questions élémentaires. Le reste du problème peut se travailler dans un deuxième temps dans le but d'acquérir de nouvelles connaissances.

Un autre conseil capital est de lire attentivement les rapports du jury sur ces épreuves (disponibles sur le site internet SIAC2 du Ministère, à l'adresse http ://www.education.gouv.fr/siac/siac2/default.htm). On y insiste souvent sur la nécessité de rédiger avec rigueur et concision. Le jury est souvent catastrophé par la rédaction de certains candidats (écriture peu lisible, manque de rigueur, théorèmes de base cités de manière approximative).

Les lignes qui suivent, où l'on donne pour chaque année une liste de notions de base qu'il est peut-être utile de revoir avant de s'attaquer aux problèmes, sont en partie extraites des rapports de jury.

Concours 1999.

Épreuve 1. Fonctions polynômes à plusieurs variables.
Multiplicité des racines d'un polynôme.
Fonctions symétriques des racines.
Suites monotones bornées.
Théorèmes des valeurs intermédiaires, de Rolle et des accroissements finis.
Convexité des fonctions réelles.
Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.
Topologie de $\mathbb{R}$, théorème de Bolzano-Weierstrass.

Épreuve 2 Algèbre linéaire, hyperplans et dualité.
Groupe des isométries du plan, isométries du carré.
Arithmétique de base, congruences et anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Calcul matriciel.
Groupe des permutations, matrices de permutations.
Equation des classes.

Concours 2000.

Épreuve 1. Calculs sur les polynômes, ordre de multiplicité des racines.
Produits scalaires sur des espaces de fonctions.
Familles orthogonales et polynômes orthogonaux.
Théorème de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Continuité et dérivation d'une fonction définie par une intégrale.
Convergence des intégrales impropres.
Interpolation de Lagrange et d'Hermite.
Calcul approché des intégrales définies ou impropres (méthode de Gauss).

Épreuve 2. Groupe symétrique.
Formes quadratiques.
Géométrie dans l'espace.
Tétraèdres : volumes, projections orthogonales, symétries...

Concours 2001.

Épreuve 1. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
Continuité à droite et à gauche.

Homéomorphismes.
Théorème des accroissements finis.
Intégrales dépendants d'un paramètre.
Suites extraites, densité.
Intégrales impropres.
Séries numériques.
Continuité des fonctions de plusieurs variables.
Notions de base en probabilités : variables aléatoires, probabilités conditionnelles, fonction de répartition, lois de Poisson et exponentielle.

Épreuve 2. Algèbre linéaire.
Arithmétique de niveau terminale S.
Suites récurrentes d'ordre 2.
Équation réduite des hyperboles.

Concours 2002.

Épreuve 1. Fonctions d'une variable réelle. Étude des variations.
Théorème des valeurs intermédiaires.
Propriétés des fonctions continues sur un compact.
Fonctions dérivables, formule de Leibniz.
Formule de Taylor-Young.
Développements limités.
Développements en séries entières.
Fonctions périodiques.
Espaces vectoriels, dimension, familles libres et sous-espaces.
Isomorphismes d'espaces vectoriels.
Equations différentielles linéaires d'ordre n.
Séries de fonctions, convergence uniforme et dérivation.

Épreuve 2. Polynômes prenant des valeurs particulières sur certaines parties.
Interpolation de Lagrange.
Systèmes linéaires.
Arithmétique, étude de certains anneaux de nombres.

Concours 2003.

Épreuve 1. Espaces vectoriels normés.
Polynômes, polynômes trigonométriques.
Dérivées partielles dans $\mathbb{R}^2$.
Fonctions périodiques et trigonométriques.

Coefficients et séries de Fourier.
Intégrale de Riemann d'une fonction continue (et périodique) sur un compact (sur $\mathbb{R}$).
Prolongement par continuité.
Formules de trigonométrie.
Propriétés des fonctions continues sur un compact (uniforme continuité).
Convergence uniforme d'une suite ou série de fonctions.
Continuité de la somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente.

Épreuve 2. Calcul des probabilités. Notion d'événements indépendants.
Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et leurs éléments inversibles.
Notions de base en arithmétique.
Identité d'Euler par les probabilités.
Test de primalité de Miller-Rabin.

Concours 2004.

Épreuve 1. Suites réelles, monotones, adjacentes.
Raisonnements par récurrence.
Fonctions d'une variable réelle : limites, continuité, dérivabilité, convexité.
Inégalité des accroissements finis.
Intégration des fonctions continues sur un compact.
Propriétés des fonctions exponentielles et logarithmes.
Suites de fonctions.
Equations différentielles.
Méthode d'Euler pour la résolution approchée d'équations différentielles d'ordre 1.

Épreuve 2. Notions de base en théorie des ensembles.
Relations d'équivalence, dénombrabilité.
Rotations vectorielles dans $\mathbb{R}^3$.
Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$.
Algèbre linéaire : calcul des puissances d'une matrice.
Etude d'ensembles paradoxaux.

Concours 2005.

Épreuve 1. Formule de Taylor-Lagrange pour les polynômes.
Définition et utilisation des notions de borne inférieure et supérieure.
Théorème de la bijection pour les fonctions continues d'une variable réelle.

Théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
Le caractère défini positif de l'intégration des fonctions continues sur un intervalle réel.
Propriétés des fonctions développables en série entière.
Solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 développables en série entière.
Connaissances de base sur les groupes.

Épreuve 2 annulée. Constructions à la règle et au compas.
Géométrie des Π-droites.

Épreuve 2 de remplacement. Courbes paramétrées.
Transformée de Descartes d'un arc paramétré.
Coniques : propriétés des tangentes à une hyperbole, à une parabole.
Fonctions polynomiales.

Comme on dit à la fin d'un cours, si vous avez des questions vous pouvez y aller. Sur le site MégaMaths, Dany-Jack se fera un plaisir de vous répondre. Jean-Etienne, de nature plus paresseux, se repose sur son camarade.

En espérant que notre travail vous sera utile nous vous souhaitons bonne chance.