L3 A, intégration : M363

– I – Les mesures

X est un ensemble non vide et $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X.

Définition : Une σ-algèbre (ou tribu) sur X est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ telle que :
- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;
- Si $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable).

Définition : Si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur X, on dit alors que le couple $(X,\mathcal{A})$ est un espace mesurable.

Définition : Une mesure sur l'espace mesurable $(X,\mathcal{A})$ est une application

$$\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

telle que :
- $\mu(\emptyset) = 0$;
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (i. e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$), on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

  (σ-additivité de μ).

Avec ces conditions, on dit que le triplet $(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré.

Définition : Si $\mathcal{A}$ est une famille de parties de X, on dit alors que l'intersection de toutes les σ-algèbres sur X qui contiennent $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$. C'est aussi la plus petite σ-algèbre sur X (pour l'ordre de l'inclusion sur $\mathcal{P}(X)$) qui contient $\mathcal{A}$.

On la note $\sigma(\mathcal{A})$ et on a :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ tribu sur } X \\ \mathcal{A}\subset\mathcal{B}}} \mathcal{B}$$

Définition : Si X est un espace topologique, la tribu de Borel sur X est la σ-algèbre engendrée par les ouverts de X.

On la note $\mathcal{B}(X)$ et ses éléments sont les boréliens de X.

Une mesure de Borel sur X est une mesure sur $\mathcal{B}(X)$.

Exercice 1 *Soient A, B deux parties de X. Exprimer $\mathbf{1}_{X\setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\cap B}$, $\mathbf{1}_{AUB}$, $\mathbf{1}_{B\setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\Delta B}$, en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.*
Plus généralement, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ de parties de X, exprimer $\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k}$ et $\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_k}$.

Solution. Les fonctions indicatrices (ou caractéristiques) permettent de transformer des opérations ensemblistes en opérations algébriques.
Pour tout $x \in X$, on a :

$$\mathbf{1}_{X\setminus A}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \notin A \\ 0 \text{ si } x \in A \end{cases} = 1 - \mathbf{1}_A(x)$$

$$\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A\cap B \\ 0 \text{ si } x \notin A\cap B \end{cases} = \mathbf{1}_A(x)\,\mathbf{1}_B(x)$$

donc :

$$\mathbf{1}_{X\setminus A} = 1 - \mathbf{1}_A$$

et :

$$\mathbf{1}_{A\cap B}=\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B=\min\left(\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_B\right)$$

Avec :

$$X\setminus(AUB)=(X\setminus A)\cap(X\setminus B)$$

on déduit que :

$$\mathbf{1}_{X\setminus(AUB)}=\mathbf{1}_{X\setminus A}\mathbf{1}_{X\setminus B}$$

soit :

$$1-\mathbf{1}_{AUB}=\left(1-\mathbf{1}_A\right)\left(1-\mathbf{1}_B\right)$$

et :

$$\mathbf{1}_{AUB}=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B=\max\left(\mathbf{1}_A,\mathbf{1}_B\right)$$

Avec :

$$B\setminus A=(X\setminus A)\cap B$$

on déduit que :

$$\mathbf{1}_{B\setminus A}=\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B=\max\left(\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A,0\right)$$

Avec :

$$A\Delta B=(AUB)\setminus A\cap B$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{A\Delta B}&=\mathbf{1}_{AUB}\left(1-\mathbf{1}_{A\cap B}\right)=\left(\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B\right)\left(1-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B\right)\\&=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B+\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B\\&=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B\\&=\left(\mathbf{1}_A-\mathbf{1}_B\right)^2=\left|\mathbf{1}_A-\mathbf{1}_B\right|\end{aligned}$$

On vérifie facilement par récurrence sur $n\geq 1$ que :

$$\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k}=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}=\min_{1\leq k\leq n}\mathbf{1}_{A_k}$$

C'est vrai pour $n=1$ et $n=2$. En supposant le résultat acquis pour $n-1\geq 2$, on a :

$$\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k}=\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}A_k}\mathbf{1}_{A_n}=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}$$

et on vérifie facilement que pour tout $x\in X$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}(x)=\min_{1\leq k\leq n}\mathbf{1}_{A_k}(x)$$

Pour ce qui est de la réunion, on vérifie facilement que :

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k}=\max_{1\leq k\leq n}\mathbf{1}_{A_k}$$

En effet, soit $x\in X$. Si $x\in\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$, il existe alors un indice k tel que $x\in A_k$ et on a :

$$1=\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k}(x)=\mathbf{1}_{A_k}(x)=\max_{1\leq j\leq n}\mathbf{1}_{A_j}(x)$$

Si $x\notin\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$, on a alors $x\notin A_k$ pour tout k compris entre 1 et n et :

$$0=\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k}(x)=\max_{1\leq j\leq n}\mathbf{1}_{A_j}(x)$$

On peut aussi généraliser la formule $\mathbf{1}_{AUB} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
Avec :

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)$$

on déduit que :

$$1 - \mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{1}_{A_k})$$

donc :

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{1}_{A_k})$$

On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_{n,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, l'entier k étant compris entre 0 et n, sont définies par :

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sigma_{n,k}(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \\ \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k} \text{ si } k \in \{1, \cdots, n\} \end{cases}$$

et on a :

$$\prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$$

avec :

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\},\ a_{n-k} = (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

L'évaluation en 1 nous donne :

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - \alpha_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}$$

donc :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{1}_{A_k}) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1}} \mathbf{1}_{A_{i_2}} \cdots \mathbf{1}_{A_{i_k}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots A_{i_k}} \end{aligned}$$

et :

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots A_{i_k}}$$

(voir la formule de Poincaré, exercice 5).

Exercice 2 *Montrer que l'application qui associe à une partie A de X sa fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ réalise une bijection de $\mathcal{P}(X)$ sur $\{0,1\}^X$ (ensemble des applications de X dans $\{0,1\}$). Préciser son inverse.*

Solution. Notons :

$$\chi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \to & \{0,1\}^X \\ A & \mapsto & \mathbf{1}_A \end{array}$$

Si A, B dans $\mathcal{P}(X)$ sont tels que $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$, on a alors pour tout $x \in A$, $\mathbf{1}_B(x) = 1$ et $x \in B$, donc $A \subset B$.
Comme A et B jouent des rôles symétriques, on en déduit que $A = B$.
L'application χ est donc injective.
Pour toute application $\gamma \in \{0,1\}^X$, en notant $A = \gamma^{-1}\{1\}$, on a $\mathbf{1}_A = \gamma$, donc χ est surjective.
En conclusion, χ est bijective d'inverse :

$$\chi^{-1} : \begin{array}{ccc} \{0,1\}^X & \to & \mathcal{P}(X) \\ \gamma & \mapsto & \gamma^{-1}\{1\} \end{array}$$

Exercice 3 *Montrer qu'il n'existe pas de bijection de X sur $\mathcal{P}(X)$ (théorème de Cantor). On en déduit en particulier que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.*

Solution. Supposons qu'il existe une bijection φ de X sur $\mathcal{P}(X)$.
Le sous-ensemble A de X défini par :

$$A = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$$

a alors un antécédent x_0 par φ et on a :

$$(x_0 \in A) \Leftrightarrow (x_0 \in \varphi(x_0)) \Leftrightarrow (x_0 \notin A)$$

ce qui n'est pas possible.
En particulier, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas équipotent à $\mathbb{N}$ et il en est de même de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ qui est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
On peut aussi vérifier, en utilisant les développements dyadiques que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $[0,1]$.

Exercice 4 *Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Montrer que :*

1. *$X \in \mathcal{A}$;*
2. *si A, B sont dans $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \triangle B$ sont dans $\mathcal{A}$;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable).*

Solution.

1. $X = X \setminus \emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $A \cup B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ en posant $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$.
   $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \in \mathcal{A}$, donc $A \cap B = X \setminus (X \setminus (A \cap B)) \in \mathcal{A}$.
   $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{B}$ et $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{B}$.
3. On a :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = X \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n \right) \in \mathcal{A}$$

Exercice 5 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) < +\infty$. Montrer que :*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

(formule de Poincaré).

Solution. Comme $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ contient toutes les intersections $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$, l'hypothèse $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) < +\infty$ nous dit que tous ces ensembles $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ sont de mesure finie.
On peut prouver la formule de Poincaré par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, c'est clair.
Pour $n = 2$, on utilise les partitions :

$$\begin{cases} A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \setminus A_2) \\ A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \\ A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2)$$
$$\mu(A_2) = \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1)$$

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2) &= \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1) \\ &= \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1) - \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

Supposons le résultat acquis pour $n \geq 2$ et soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) < +\infty$.
En notant $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, le cas $n = 2$, nous donne :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mu(A_{n+1}) + \mu(B) - \mu(A_{n+1} \cap B)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

donc :

$$\mu(A_{n+1}) + \mu(B) = \sum_{i_1=1}^{n+1} \mu(A_{i_1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k < n+1} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

et :

$$\begin{aligned} \mu(A_{n+1} \cap B) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap A_{n+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j} \cap A_{n+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j < i_{j+1} = n+1} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}}\right) \end{aligned}$$

Le changement d'indice $k = j + 1$ dans cette dernière somme nous donne :

$$\mu(A_{n+1} \cap B) = \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} < i_k = n+1} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \sum_{i_1=1}^{n+1} \mu(A_{i_1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k < n+1} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} < i_k = n+1} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n+1} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \end{aligned}$$

en utilisant, pour tout k compris entre 2 et $n+1$ la partition :

$$\{(i_1,\cdots,i_k) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n+1\} = \{(i_1,\cdots,i_k) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k < n+1\} \\ \cup \{(i_1,\cdots,i_{k-1},n+1) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} < n+1\}$$

Exercice 6

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & \mathcal{P}(X) & \to & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \mathbf{1}_A(x) \end{array}$$

   est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$ (mesure de Dirac en x).

2. *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels positifs ou nuls indexée par (n,m) dans $\mathbb{N}^2$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{m\in\mathbb{N}} u_{n,m}$ est convergente de somme S_n et que la série $\sum S_n$ est convergente de somme S.*
   Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n,m}$ est convergente de somme T_m, que la série $\sum T_m$ est convergente et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

   (en fait cette égalité valable dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ pour toute suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs).

3. *Calculer :*

$$\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^m}$$

4. *Pour cette question et la suivante, on suppose que $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable.*
   Montrer que pour toute suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls tels que la série $\sum p_n$ soit convergente, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{P}(X) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) \end{array} \tag{1}$$

   est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$.

5. *Montrer que toute mesure finie μ sur $\mathcal{P}(X)$ peut s'exprimer sous la forme* (1) *(pour X dénombrable, toute mesure finie est une série pondérée de masses de Dirac).*

Solution.

1. Comme $x \notin \emptyset$, on a $\delta_x(\emptyset) = 0$.
   Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
   Si $x \notin A$, on a alors $x \notin A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\delta_x(A_n) = 0$ et :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_x(A_n) = 0 = \delta_x(A)$$

Si $x \in A$, il existe alors un unique entier n_0 tel que $x \in A_{n_0}$, donc $\delta_x(A_{n_0}) = 1$ et $\delta_x(A_n) = 0$ pour tout $n \neq n_0$, ce qui nous donne :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_x(A_n) = 1 = \delta_x(A)$$

En définitive, δ_x est bien une mesure sur $\mathcal{P}(X)$.
Comme $\delta_x(X) = 1$, cette mesure est finie (c'est une probabilité).

2. Pour tout entier naturel m, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n,m} \leq S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$$

avec $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = S < +\infty$, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n,m}$.

En notant $T_m = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}$, on a pour tout m :

$$\sum_{k=0}^{m} T_k = \sum_{k=0}^{m} \left(\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n} u_{j,k} \right) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} u_{j,k}$$

avec :

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} u_{j,k} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} u_{j,k} \leq \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{j,k} = \sum_{j=0}^{n} S_j \leq \sum_{n=0}^{+\infty} S_n = S$$

donc :

$$\sum_{k=0}^{m} T_k \leq S$$

ce qui signifie que la suite croissante $\left(\sum_{k=0}^{m} T_k \right)_{m \in \mathbb{N}}$ est majorée et en conséquence convergente. La série $\sum T_m$ est donc convergente avec $T = \sum_{m=0}^{+\infty} T_m \leq S$. En permutant les rôles de n et m, on aboutit de manière analogue à $S \leq T$ et $T = S$.

Dans le cas où l'une des sommes positives $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ ou $\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ est infinie, il en est de même de l'autre, puisque si l'une est finie l'autre l'est. L'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right)$ est donc valable pour toute suite double $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ de réels positifs.

3. Dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^m = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 \end{aligned}$$

(en écrivant que $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$).

On peut donc calculer $\sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m}$ alors qu'on ne connaît pas toutes les valeurs de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m}$ pour $m \geq 2$.

4. Comme $\sum p_n$ converge et $0 \leq p_n \delta_{x_n}(A) \leq p_n$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la série définissant $\mu(A)$ est bien définie et en particulier :
$$\mu(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n < +\infty$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\delta_{x_n}(\emptyset) = 0$, donc $\mu(\emptyset) = 0$.
Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
En notant $u_{n,m} = p_n \delta_{x_n}(A_m)$ pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A_m) = p_n \sum_{m=0}^{+\infty} \delta_{x_n}(A_m) = p_n \delta_{x_n}(A) < +\infty$$
et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_n < +\infty$$
donc :
$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A_m) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A_m) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mu(A_m)\end{aligned}$$
En conclusion μ est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$.
5. Il suffit de poser $p_n = \mu(\{x_n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a bien :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\{x_n\}) = \mu(X) < +\infty$$
et pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$:
$$\mu(A) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ x_n \in A}} \mu(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A)$$
En fait, ce résultat est encore valable pour $\mu(X) = +\infty$.

Exercice 7 *Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $\sum u_n$ une série réelle absolument convergente. Montrer que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument avec $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (cela justifie l'écriture $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ dans le cas d'une série absolument convergente, ce qui est le cas pour une série à termes positifs convergente, ce qui est utilisé implicitement dans la définition d'une mesure).*

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} \left|u_{\sigma(k)}\right| \leq \sum_{j=0}^{\max\limits_{0\leq k\leq n} \sigma(k)} |u_j| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = S$$

donc la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.

Il reste à montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On montre tout d'abord le résultat pour les séries à termes positifs.

On vient de voir que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

En appliquant le résultat précédent à la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ et à la permutation σ^{-1}, on a aussi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_{\sigma^{-1}(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(\sigma^{-1}(n))} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

ce qui nous donne l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Pour le cas général, on introduit les séries de terme général $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. On a $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$, $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$, $u_n = u_n^+ - u_n^{-1}$, donc les séries à termes positifs $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes si $\sum u_n$ est absolument convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Ce résultat est encore valable pour les séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie (on raisonne sur les composantes).

Exercice 8 *On reprend l'exercice précédent dans le cadre des séries à valeurs dans un espace vectoriel normé.*

E est un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.

1. *On suppose que la série $\sum u_n$ est normalement convergente. Montrer que, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est normalement convergente. Dans le cas où l'espace normé E est complet, montrer que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (on dit alors que la série $\sum u_n$ est commutativement convergente).*
2. *On suppose que $E = \mathbb{R}$ et que la série $\sum u_n$ est semi-convergente (i. e. $\sum u_n$ est convergente et $\sum |u_n|$ est divergente).*
   (a) *En notant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$, montrer que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont divergentes.*
   (b) *Montrer que l'on peut construire une bijection σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit divergente.*
3. *On suppose que l'espace normé E est de dimension finie. Montrer que la série $\sum u_n$ est normalement convergente si, et seulement si, elle est commutativement convergente.*
4. *Le résultat précédent est-il vrai pour les espaces normés de dimension infinie ?*

Solution.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'entier $p_n = \max_{0 \leq k \leq n} \sigma(k)$ et le plus grand de $n+1$ entiers naturels, donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_n \geq n \\ \{\sigma(k) \mid 0 \leq k \leq n\} \subset \{0, 1, \cdots, p_n - 1, p_n\} \end{array} \right.$$

et :

$$\sum_{k=0}^{n} \left\| u_{\sigma(k)} \right\| \leq \sum_{j=0}^{p_n} \| u_j \| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \| u_n \| < +\infty$$

Il en résulte que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est normalement convergente.
Dans le cas où E n'est pas complet, cette série $\sum u_{\sigma(n)}$ n'est pas nécessairement convergente.
Dans le cas où E est complet, elle est convergente.
Comme σ^{-1} est aussi une permutation de $\mathbb{N}$, en notant pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $q_n = \max_{0 \leq k \leq n} \sigma^{-1}(k)$, on a $q_n \geq n$ et :

$$I_n = \left\{ \sigma^{-1}(k) \mid 0 \leq k \leq n \right\} \subset J_n = \{0, 1, \cdots, p_n - 1, p_n\}$$

donc en notant $K_n = J_n \setminus I_n$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{q_n} u_{\sigma(j)} &= \sum_{j \in I_n} u_{\sigma(j)} + \sum_{j \in K_n} u_{\sigma(j)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(\sigma^{-1}(k))} + \sum_{j \in K_n} u_{\sigma(j)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{j \in K_n} u_{\sigma(j)} \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\left\| \sum_{j=0}^{q_n} u_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^{n} u_k \right\| = \left\| \sum_{j \in K_n} u_{\sigma(j)} \right\| \leq \sum_{j \in K_n} \left\| u_{\sigma(j)} \right\|$$

Pour tout $j \in K_n$, on a $j \notin I_n = \sigma^{-1}\{0, 1, \cdots, n\}$, donc $\sigma(j) \notin \{0, 1, \cdots, n\}$ et $\sigma(j) \geq n+1$, ce qui nous donne :

$$\sum_{j \in K_n} \left\| u_{\sigma(j)} \right\| \leq R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

En définitive, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n \geq n \text{ et } \left\| \sum_{j=0}^{p_n} u_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^{n} u_k \right\| \leq R_{n+1}$$

et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

2.

(a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n^+ = \frac{u_n + |u_n|}{2} \text{ et } u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2}$$

Comme $\sum u_n$ est convergente et $\sum |u_n|$ est divergente, on en déduit que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont divergentes.
Ces séries étant à valeurs positives, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^+ = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^- = +\infty$$

(b) On a la partition $\mathbb{N} = I \cup J$, où :

$$I = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq 0\} \text{ et } J = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n < 0\}$$

ces ensembles étant infinis puisque :

$$\sum_{n \in I} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ = +\infty \text{ et } \sum_{n \in J} u_n = -\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = -\infty$$

Il existe donc deux applications strictement croissantes (donc injectives) σ_1 et σ_2 de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $I = \sigma_1(\mathbb{N})$ et $J = \sigma_2(\mathbb{N})$.
Du fait que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{\sigma_1(n)} = \sum_{n \in I} u_n = +\infty$$

on peut définir l'entier p_1 comme étant le plus petit entier naturel tel que :

$$u_{\sigma_2(0)} + \sum_{j=0}^{p_1} u_{\sigma_1(j)} \geq 1$$

puis supposant définis les entiers $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, on désigne par p_{k+1} le plus petit entier strictement supérieur à p_k tel que :

$$u_{\sigma_2(k)} + \sum_{j=p_k+1}^{p_{k+1}} u_{\sigma_1(j)} \geq 1$$

En utilisant la partition :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, \cdots, p_1 + 1\} \cup \{p_1 + 2, \cdots, p_2 + 2\} \cup \{p_2 + 3, \cdots, p_3 + 3\} \cup \cdots \\ &= \{0, \cdots, p_1 + 1\} \cup \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{p_k + k + 1, \cdots, p_{k+1} + k + 1\} \end{aligned}$$

on définit l'application $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} \forall j \in \{0, \cdots, p_1\}, \ \sigma(j) = \sigma_1(j) \\ \sigma(p_1 + 1) = \sigma_2(0) \end{cases}$$

et :

$$\forall k \geq 1, \ \begin{cases} \forall j \in \{p_k + k + 1, \cdots, p_{k+1} + k\}, \ \sigma(j) = \sigma_1(j - k) \\ \sigma(p_{k+1} + k + 1) = \sigma_2(k) \end{cases}$$

Avec ces notations, on a :

$$\sum_{j=0}^{p_1+1} u_{\sigma(j)} = \sum_{j=0}^{p_1} u_{\sigma_1(j)} + u_{\sigma_2(0)} \geq 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{p_2+2} u_{\sigma(j)} &= \sum_{j=0}^{p_1+1} u_{\sigma(j)} + \sum_{j=p_1+2}^{p_2+1} u_{\sigma(j)} + u_{\sigma(p_2+2)} \\ &= \sum_{j=0}^{p_1} u_{\sigma_1(j)} + u_{\sigma_2(0)} + \sum_{j=p_1+2}^{p_2+1} u_{\sigma_1(j-1)} + u_{\sigma_2(1)} \\ &= \sum_{j=0}^{p_1} u_{\sigma_1(j)} + u_{\sigma_2(0)} + \sum_{j=p_1+1}^{p_2} u_{\sigma_1(i)} + u_{\sigma_2(1)} \geq 2 \end{aligned}$$

et en raisonnant par récurrence, on vérifie que :

$$\sum_{j=0}^{p_k+k} u_{\sigma(j)} \geq k$$

En effet, c'est vrai pour $k=1$ et supposant le résultat acquis jusqu'au rang $k\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{p_{k+1}+k+1} u_{\sigma(j)} &= \sum_{j=0}^{p_k+k} u_{\sigma(j)} + \sum_{j=p_k+k+1}^{p_{k+1}+k} u_{\sigma(j)} + u_{\sigma(p_{k+1}+k+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{p_k+k} u_{\sigma(j)} + \sum_{j=p_k+k+1}^{p_{k+1}+k} u_{\sigma_1(j-k)} + u_{\sigma_2(k)} \\ &= \sum_{j=0}^{p_k+k} u_{\sigma(j)} + \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} u_{\sigma_1(i)} + u_{\sigma_2(k)} \geq k+1\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = +\infty$$

Il nous reste à vérifier que σ est une permutation de $\mathbb{N}$.
L'application σ réalise une bijection de $\{0,\cdots,p_1\}$ sur $\sigma_1(\{0,\cdots,p_1\})$ et, pour tout entier $k\geq 1$, une bijection de $\{p_k+k+1,\cdots,p_{k+1}+k\}$ sur $\sigma_1(\{p_k+1,\cdots,p_{k+1}\})$, donc une bijection de $\mathbb{N}\setminus\{p_k+k \mid k\geq 1\}$ sur $\sigma_1(\mathbb{N})$.
Comme elle réalise aussi une bijection de $\{p_k+k \mid k\geq 1\}$ sur $\sigma_1(\mathbb{N})$, en tenant compte de la partition $\mathbb{N}=I\cup J=\sigma_1(\mathbb{N})\cup\sigma_2(\mathbb{N})$, on déduit que c'est une permutation de $\mathbb{N}$.

3. Pour $E=\mathbb{R}$, on a vu qu'une série absolument convergente est commutativement convergente et la question précédente nous dit que la réciproque est vraie.
En effet, une série commutativement convergente est convergente et si elle n'est pas absolument convergente, on peut trouver une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit divergente, ce qui est contradictoire.
Ce résultat est en fait valable pour les séries à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
Dans un tel espace E de dimension $p\geq 1$ toutes les normes sont équivalentes et désignant par $(x_1,\cdots,x_p)$ les coordonnées d'un vecteur x de E dans une base $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leq i\leq p}$, on peut utiliser la norme définie par $\|x\|=\max\limits_{1\leq i\leq p}|x_i|$ et dire qu'une série $\sum u_n$ de vecteurs de E converge normalement équivaut à dire que toutes les séries de composantes $\sum u_n^{(i)}$, pour i compris entre 1 et p, sont absolument convergentes (ce qui résulte de $\left|u_n^{(i)}\right|\leq\|u_n\|\leq\sum\limits_{j=1}^{p}\left|u_n^{(j)}\right|$) ce qui équivaut à dire que pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ et tout i compris entre 1 et p la série $\sum u_{\sigma(n)}^{(i)}$ est convergente, encore équivalent à dire que pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente dans E.
4. Le résultat précédent est faux pour les espaces normés de dimension infinie (complet ou non). On donne un contre-exemple avec l'espace de Banach de dimension infinie ℓ^2 formé des suites réelles de carré sommable, c'est-à-dire l'espace des suites réelles $v=(v(k))_{k\geq 1}$ telles que $\sum v(k)^2$ converge, muni de la norme :

$$\|v\|_2=\left(\sum_{k=1}^{+\infty} v(k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

On pose, pour tous $n,k\in\mathbb{N}^*$:

$$\omega_n(k)=\begin{cases} 0 \text{ si } n\neq k \\ \dfrac{1}{n} \text{ si } k=n\end{cases}$$

On vérifie que, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, la série $\sum\omega_{\sigma(n)}$ converge dans ℓ^2 et que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\|\omega_n\|_2$ diverge.
A DETAILLER.

Exercice 9 *Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ telle que :*
- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;*
- $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2,\ A \cap B \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par intersection finie) ;*

($\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole) et $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ une application telle que :
- $\mu(\emptyset) = 0$;
- *μ est σ-additive (i. e. $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$).*

1. *Montrer que, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ et $A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$ (dans le cas où $n \geq 2$).*
2. *Montrer que μ est croissante.*
3. *Soient $A \in \mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que :*
$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Solution.

1. On vérifie par récurrence sur $n \geq 1$ que, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_{k=1}^{n} A_r \in \mathcal{A}$, donc :
$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_r = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus A_r) \in \mathcal{A}$$
et $\bigcup_{k=1}^{n} A_r = X \setminus \left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_r\right) \in \mathcal{A}$.
Pour A, B dans $\mathcal{A}$, on a $B \setminus A = (X \setminus A) \cap B \in \mathcal{A}$, donc $A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$.
2. Pour $A \subset B$ dans $\mathcal{A}$, on a $B \setminus A \in \mathcal{A}$ et :
$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$
ce qui signifie que μ est croissante.
3. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X définie par $B_0 = A_0$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$
est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (pour $0 \leq n < m$, on a $B_n \subset A_n$ et un élément de B_m n'est pas dans A_n).
Comme $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Pour tout $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ il existe un plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_n$. Si $n = 0$, on a alors $x \in A_0 = B_0$. Si $n \geq 1$, on a alors $x \in A_n$ et $x \notin A_k$ pour tout k compris entre 0 et $n-1$, soit $x \in B_n$.

On a donc $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap B_n$ dans $\mathcal{A}$. Comme μ est σ-additive et croissante, il en résulte que :

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

(puisque $A \cap B_n \subset B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 10 *Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur X supposée dénombrable (i. e. en bijection avec une partie, finie ou infinie, de $\mathbb{N}$). Pour tout $x \in X$, on note :*

$$A(x) = \bigcap_{\substack{A\in\mathcal{A} \\ x\in A}} A$$

(atome de x).

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, $A(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ qui contient x.*
2. *Soient x, y dans X. Montrer que si $y \in A(x)$, on a alors $A(x) = A(y)$.*
3. *Montrer que, pour tous x, y dans X, on a $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ ou $A(x) = A(y)$.*
4. *En désignant par $(x_i)_{i\in I}$ la famille des éléments de X telle que les $A(x_i)$ soient deux à deux disjoints, montrer que cette famille est dénombrable et que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a une partition $A = \bigcup_{j\in J} A(x_j)$, où J est une partie de I.*
5. *En déduire que $\mathcal{A}$ est finie, son cardinal étant une puissance de 2.*

Solution.

1. Comme $x \in X \in \mathcal{A}$, il existe des éléments de $\mathcal{A}$ qui contiennent x et $A(x)$ est bien défini contenant x. Comme $\mathcal{A}$ est dénombrable, l'ensemble $A(x)$ qui est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$.
   Si B est un élément de $\mathcal{A}$ qui contient x, il fait partie des éléments de $\mathcal{A}$ qui apparaissent dans l'intersection $A(x)$, donc $A(x) \subset B$.
2. Si $y \in A(x)$, l'ensemble $A(x)$ est un élément de $\mathcal{A}$ qui contient x, donc $A(y) \subset A(x)$.
   Si $x \notin A(y)$, l'ensemble $A(x) \setminus A(y)$ est dans $\mathcal{A}$ contenant x, donc :
   $$A(x) \subset A(x) \setminus A(y)$$
   ce qui contredit le fait que $y \in A(x)$ et $y \in A(y)$.
   On a donc $x \in A(y)$ et $A(x) \subset A(y)$, d'où l'égalité $A(x) = A(y)$.
3. Si $A(x) \cap A(y) = \emptyset$, c'est alors terminé.
   Sinon, pour tout $z \in A(x) \cap A(y)$, on a $A(x) = A(z) = A(y)$.
4. Comme les $A(x)$ sont dans $\mathcal{A}$ qui est dénombrable, la famille $(A(x))_{x\in X}$ est aussi dénombrable et comme deux de ces ensembles sont disjoints ou confondus, il existe une partie I de $\mathbb{N}$ telle que $(A(x))_{x\in X} = (A(x_i))_{i\in I}$ (axiome du choix dénombrable : on choisit un représentant de chaque classe dans la relation d'équivalence « être dans le même $A(x)$ »), les $A(x_i)$ étant deux à deux disjoints.
   On a alors une partition $X = \bigcup_{i\in I} A(x_i)$ et tout $A \in \mathcal{A}$ s'écrit $A = \bigcup_{j\in J} A(x_j)$ où $J \subset I$.
5. Si I est infini, on peut prendre $I = \mathbb{N}$ et l'application :
   $$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathcal{A} \\ & J & \mapsto & \bigcup_{j\in J} A(x_j) \end{array}$$

est bijective.

En effet, elle est surjective car tout $A \in \mathcal{A}$ s'écrit $A = \bigcup_{j \in J} A(x_j)$ où $J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et pour $J \neq K$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a $\varphi(J) \neq \varphi(K)$ puisque les $A(x_i)$, pour $i \in \mathbb{N}$, sont non vides et deux à deux disjoints.

Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable, on aboutit à une contradiction.

Donc I est fini et il en est de même de $\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j \in J} A(x_j) \mid J \subset I \right\}$. Précisément, on a :

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}) = \operatorname{card}(\mathcal{P}(I)) = 2^{\operatorname{card}(I)}$$

En conclusion, une tribu dénombrable sur X est nécessairement finie de cardinal égal à une puissance de 2.

Exercice 11 *La longueur d'un intervalle réel I est définie par :*

$$\ell(I) = \sup(I) - \inf(I) \in [0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

1. *Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé, borné et $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

2. *Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé, borné et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

3. *Soient I un intervalle et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

4. *Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles deux à deux disjoints inclus dans un intervalle I. Montrer que :*

$$\ell(I) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

Solution. Si I est un intervalle borné d'extrémités $a < b$, on a alors :

$$\ell(I) = b - a$$

En particulier, on a pour tout réel a :

$$\ell(\emptyset) = \ell(]a, a[) = 0 \text{ et } \ell([a, a]) = 0$$

Si I est non bornée, on a alors $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ et $\ell(I) = +\infty$.

1. Si l'un des intervalles I_j, pour j compris entre 1 et n, est non borné, on a alors $\ell(I_j) = +\infty$ et :

$$\ell(I) = b - a \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) = +\infty$$

On suppose donc que chaque intervalle I_k, pour k compris entre 1 et n, est borné et on note $\alpha_k \leq \beta_k$ ses extrémités.
On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, on a $I \subset I_1$, donc $\alpha_1 \leq a \leq b \leq \beta_1$ et :

$$\ell(I) = b - a \leq \beta_1 - \alpha_1 = \ell(I_1)$$

Supposons le résultat acquis pour $n - 1 \geq 1$ et soit $I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ un recouvrement fini de l'intervalle $I = [a, b]$ par des intervalles I_k bornés.
L'extrémité b de I est contenue dans l'un des I_k et, en modifiant au besoin la numérotation, on peut supposer que $k = n$.
Si $\alpha_n \leq a$, on a alors $\alpha_n \leq a \leq b \leq \beta_n$, soit $I \subset I_n$ et :

$$\ell(I) \leq \ell(I_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

Sinon, on a $a < \alpha_n \leq b \leq \beta_n$, donc :

$$[a, \alpha_n[\subset \bigcup_{k=1}^{n-1} I_k$$

et par hypothèse de récurrence, on a :

$$\alpha_n - a \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ell(I_k)$$

et tenant compte de :

$$b - \alpha_n \leq \beta_n - \alpha_n = \ell(I_n)$$

on déduit que :

$$\ell(I) = b - a = (b - \alpha_n) + (\alpha_n - a) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

2. Si l'un des I_n est non borné, le résultat est évident.
On suppose que chaque intervalle I_n, pour $n \in \mathbb{N}$, est borné et on note $\alpha_n \leq \beta_n$ ses extrémités.
Pour $\varepsilon > 0$ donné, on désigne par $(I_n(\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'intervalles ouverts définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(\varepsilon) = \left]\alpha_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \beta_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right[$$

et on a un recouvrement ouvert du compact $I = [a, b]$:

$$I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n(\varepsilon)$$

duquel on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} J_k$$

On déduit alors de la question précédente que :

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \ell(J_k) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n(\varepsilon))$$

avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ell\left(I_n\left(\varepsilon\right)\right) = \beta_n - \alpha_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \ell\left(I_n\right) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

ce qui nous donne :

$$\ell\left(I\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I_n\right) + \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I_n\right) + \varepsilon$$

Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que :

$$\ell\left(I\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I_n\right)$$

3. Si $\ell\left(I\right) = 0$ ou si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I_n\right) = +\infty$, le résultat est alors évident.
   Si $\ell\left(I\right) > 0$ et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I_n\right)$ est convergente, tous les I_n et I sont bornés. En notant $a < b$ les extrémités de I, pour tout segment $I' = [a', b']$ contenu dans I, on a $I' \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et de la question précédente, on déduit que :

$$\ell\left(I'\right) = b' - a' \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I_n\right)$$

   Faisant tendre (a', b') vers (a, b), on en déduit le résultat annoncé.
4. Si $\ell\left(I\right) = +\infty$, le résultat est alors évident.
   On suppose que I est borné d'extrémités $a \leq b$.
   Comme $I_n \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous ces intervalles sont bornés et on a $\bigcup\limits_{k=0}^{n} I_k \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   En modifiant au besoin la numérotation et en notant $\alpha_n \leq \beta_n$ les extrémités de chaque intervalle I_n, comme ils sont deux à deux disjoints, on peut supposer que :

$$a \leq \alpha_0 \leq \beta_0 < \alpha_1 \leq \beta_1 < \cdots < \alpha_{n-1} \leq \beta_{n-1} < \alpha_n \leq \beta_n \leq b$$

   et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \ell\left(I_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\beta_k - \alpha_k\right) &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha_{k+1} - \alpha_k\right) + \left(\beta_n - \alpha_n\right) \\ &\leq \alpha_n - \alpha_0 + b - \alpha_n \leq b - a = \ell\left(I\right)\end{aligned}$$

   Faisant tendre n vers l'infini, on en déduit le résultat annoncé.

Exercice 12 *La mesure ℓ des intervalles réels se prolonge de manière unique en une mesure sur la tribu $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ des boréliens, cette mesure étant invariante par translation. C'est la mesure de Lebesgue sur $\left(\mathbb{R}, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\right)$.*
Nous allons vérifier que cette mesure ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)$.
On désigne par $\mathcal{C}$ le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

1. *Vérifier que, pour toute classe d'équivalence $c \in \mathcal{C}$, on peut trouver un représentant x dans $[0, 1[$.*
   Pour tout $c \in \mathcal{C}$, on se fixe un représentant x_c de c dans $[0, 1[$ (axiome du choix) et on désigne par A l'ensemble de tous ces réels x_c.
2. *Montrer que les translatés $r + A$, où r décrit $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints et que :*

$$[0, 1] \subset \bigcup_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1, 2]$$

3. *En déduire que A n'est pas borélien et que ℓ ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*
4. *Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non mesurable ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu de Borel) telle que $|f|$ soit mesurable.*

Solution. La relation :

$$(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (y - x \in \mathbb{Q})$$

est une relation d'équivalence puisque $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ et l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est un groupe puisque le groupe $(\mathbb{R}, +)$ est commutatif.

1. Soit $c = \overline{x} \in \mathcal{C}$. En désignant par $n = [x] \in \mathbb{Z}$ la partie entière de x, on a $0 \leq x_c = x - n < 1$ et $c = \overline{x_c}$ puisque $x - x_c = n \in \mathbb{Q}$.
   L'axiome du choix nous permet de choisir, pour toute classe d'équivalence un représentant $x_c \in [0, 1]$.
   Ces choix étant faits, on a $c = c'$ dans $\mathcal{C}$ si, et seulement si $x_c = x_{c'}$.
2. Si r, r' dans $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ sont tels que $(r + A) \cap (r' + A) \neq \emptyset$, il existe alors y dans $(r + A) \cap (r' + A)$, donc $y = r + x_c = r' + x_{c'}$ et $c = \overline{x_c} = \overline{x_{c'}} = c'$, ce qui nous donne $x_c = x_{c'}$ et $r = r'$.
   Donc les ensembles $r + A$, où r décrit $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints.
   Comme $A \subset [0, 1[$, on a $r + A \subset [-1, 2]$ pour tout $r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ et $\bigcup\limits_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1, 2]$.
   Pour tout $x \in [0, 1]$ il existe $x_c \in A$ tel que $\overline{x} = \overline{x_c}$, donc il existe un rationnel r tel que $x = r + x_c$ et comme $|r| = |x - x_c| \leq 1$ (x et x_c sont dans $[0, 1]$), on a $r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. On a donc $[0, 1] \subset \bigcup\limits_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A)$.
3. Si A est borélien, il en est alors de même de tous les $r + A$ (image réciproque de A par l'application continue, donc mesurable, $x \mapsto x - r$) et la réunion dénombrable $\bigcup\limits_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A)$ est un borélien, mais alors :

$$\ell([0, 1]) = 1 \leq \ell\left(\bigcup_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A)\right) = \sum_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \ell(r + A) = \sum_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \ell(A) \leq \ell([-1, 2]) = 3$$

   ce qui impose $\ell(A) > 0$ et $\sum\limits_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \ell(A) = +\infty$, ce qui est impossible.
   On a donc ainsi prouvé que l'ensemble A est donc borné et non borélien et que ℓ ne peut se prolonger à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
4. La fonction $f = 2\mathbf{1}_A - 1$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ -1 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

   est non borélienne ($f^{-1}(\{1\}) = A$ est non borélien) et $|f| = 1$ est mesurable.

Exercice 13 *Pour tous réels $a < b$, on désigne par $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.*
   Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, b]$ (théorème de Dini). On donnera deux démonstrations de ce résultat, l'une utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass et l'autre utilisant celle de Borel-Lebesgue.
2. *Le résultat précédent est-il encore vrai dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ si on ne suppose plus l'intervalle I compact ?*

3. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ telle que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.*
   Montrer que :
$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$
4. *On désigne par $\mathcal{A}$ la famille des parties de $\mathbb{R}^2$ de la forme :*
$$A(f,g) = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$$
   où f, g sont dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ et on note :
$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b (g(t) - f(t))\,dt$$
   Montrer que cette application μ est σ-additive sur $\mathcal{A}$.

Solution.

1.

(a) *Solution utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass :* ≪ un espace métrique E est compact si et seulement si de toute suite de points de E on peut extraire une sous suite convergente ≫.
Pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. On a donc $f(x) - f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
De la continuité de chaque fonction f_n sur le compact $[a,b]$, on déduit que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in [a,b] \mid \|f - f_n\|_\infty = f(x_n) - f_n(x_n)$$
et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} \|f - f_{n+1}\|_\infty &= f(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \\ &\leq f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) \leq \|f - f_n\|_\infty \end{aligned}$$
donc la suite $(\|f - f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et elle converge vers un réel $\lambda \geq 0$.
Il s'agit alors de montrer que $\lambda = 0$.
Dans le compact $[a,b]$, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in [a,b]$.
Soit p un entier positif. La fonction φ étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on peut trouver un entier n_p tel que $\varphi(n) \geq p$ pour tout $n \geq n_p$. On a alors pour tout $n \geq n_p$:
$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda \leq \left\|f - f_{\varphi(n)}\right\|_\infty &= f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right) \\ &\leq f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_p\left(x_{\varphi(n)}\right) \end{aligned}$$
En faisant tendre n vers l'infini (à p fixé) et en utilisant la continuité de f, on déduit que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leq \lambda \leq f(x) - f_p(x)$$
Enfin, en faisant tendre p vers l'infini, en utilisant la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f(x)$, on déduit que $\lambda = 0$.

(b) *Solution utilisant la caractérisation de Borel-Lebesgue :* ≪ un espace métrique E est compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous recouvrement fini ≫.
Pour tout $x \in [a,b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :
$$\forall x \in I,\ \exists n_x \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_x,\ 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon$$

De la continuité de f et f_{n_x}, on déduit qu'il existe un voisinage ouvert V_x de x dans $[a,b]$ tel que :

$$\forall t \in V_x, \quad |f(x) - f(t)| \leq \varepsilon, \;\; |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(t)| \leq \varepsilon$$

On déduit alors que pour tout $t \in V_x$:

$$0 \leq f(t) - f_{n_x}(t) \leq |f(t) - f(x)| + |f(x) - f_{n_x}(x)| + |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(t)| \leq 3\varepsilon$$

Du recouvrement de $[a,b]$ par les ouverts V_x, on peut extraire un sous recouvrement fini $\bigcup_{i=1}^{p} V_{x_i}$.

On pose alors $n_0 = \max_{1\leq i\leq p} n_{x_i}$ et on a :

$$\forall n \geq n_0, \; \forall t \in I, \quad 0 \leq f(t) - f_n(t) \leq f(t) - f_{n_{x_i}}(t) \leq 3\varepsilon$$

l'indice i étant tel que $t \in V_{x_i}$. Ce qui prouve bien la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur I.

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $]0,1[$ par $f_n(x) = \dfrac{-1}{1+nx}$ converge en croissant vers la fonction nulle et la convergence n'est pas uniforme sur $]0,1[$ puisque $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{-1}{2}$.

3. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de fonctions $\sum f_n$ est croissante (puisque les f_n sont à valeurs positives) et converge simplement vers la fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Le théorème de Dini nous dit alors que la convergence est uniforme et :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

4. Pour f, g dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ on a :

$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b (g(t) - f(t))\,dt = \int_a^b \ell([f(t), g(t)])\,dt$$

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f_n \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et f, g dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ et :

$$A(f,g) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A(f_n, g_n)$$

étant deux à deux disjoints.
Dans ces conditions, on a :

$$\forall t \in [a,b], \; [f(t), g(t)] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [f_n(t), g_n(t)]$$

En effet, pour tout $t \in [a,b]$ et tout $y \in [f(t), g(t)]$, on a $(t,y) \in A(f,g)$, donc il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $(t,y) \in A(f_n, g_n)$, ce qui signifie que $y \in [f_n(t), g_n(t)]$. Réciproquement si $y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [f_n(t), g_n(t)]$, il existe alors un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in [f_n(t), g_n(t)]$, donc $(t,y) \in A(f_n, g_n) \subset A(f,g)$ et $y \in [f(t), g(t)]$.
On en déduit alors que :

$$\forall t \in [a,b], \; \ell([f(t), g(t)]) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell([f_n(t), g_n(t)])$$

les fonctions $t \mapsto \ell([f_n(t), g_n(t)])$ étant continues et positives. Il en résulte que :

$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b \ell([f(t), g(t)])\,dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b \ell([f_n(t), g_n(t)])\,dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A(f_n, g_n))$$

La fonction μ est donc σ-additive sur $\mathcal{A}$.

Exercice 14 *Soit X un ensemble dénombrable. Quelle est la σ-algèbre engendrée par les singletons de X ?*

Solution. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ la σ-algèbre engendrée par les singletons de X.
Tout $A \in \mathcal{P}(X)$ s'écrivant comme réunion dénombrable de singletons, il est dans $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

Exercice 15 *Soit X un ensemble non dénombrable.*

1. *Quelle est la σ-algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par les singletons de X ?*
2. *Montrer que l'application :*

$$\begin{array}{cccc} \mu : & \mathcal{A} & \to & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 \text{ si } X \setminus A \text{ est dénombrable} \end{array} \right. \end{array}$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Solution.

1. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ la σ-algèbre engendrée par les singletons de X.
On note :
$$\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ ou } X \setminus A \text{ est dénombrable}\}$$
On vérifie que $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre sur X qui contient les singletons de X, donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.
Comme $\emptyset$ est dénombrable, il est dans $\mathcal{B}$.
Soit $A \in \mathcal{B}$. Si A est dénombrable, alors $X \setminus A$ est de complémentaire dénombrable, donc $X \setminus A \in \mathcal{B}$, sinon $X \setminus A$ est dénombrable et $X \setminus A \in \mathcal{B}$.
La famille $\mathcal{B}$ est donc stable par passage au complémentaire.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. On a :
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ A_n \text{ dénombrable}}} A_n \cup \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ X\setminus A_n \text{ dénombrable}}} A_n = B \cup C$$
avec B dénombrable et C de complémentaire dénombrable ($X \setminus C = \bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ X\setminus A_n \text{ dénombrable}}} (X \setminus A_n)$).
Si $C = \emptyset$, on a alors $A = B \in \mathcal{B}$, sinon $X \setminus A = (X \setminus B) \cap (X \setminus C) \subset X \setminus C$ est dénombrable, donc $A \in \mathcal{B}$.
Un singleton qui est dénombrable est dans $\mathcal{B}$.
Soit $A \in \mathcal{B}$. Si A est dénombrable, il est alors réunion dénombrable de singletons, donc dans $\mathcal{A}$, sinon c'est $X \setminus A$ qui est dans $\mathcal{A}$ et $A = X \setminus (X \setminus A)$ est aussi dans $\mathcal{A}$.
On a donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
2. On a $\mu(\emptyset) = 0$ car $\emptyset$ est dénombrable.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints. Si tous les A_n sont dénombrables, il en est alors de même de $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et :
$$\mu(A) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$
Sinon, il existe un A_n non dénombrable et $X \setminus A_n$ est dénombrable. Comme $A_m \cap A_n = \emptyset$ pour $m \neq n$, on a $A_m \subset X \setminus A_n$ et A_m est dénombrable, donc :
$$\mu(A) = 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$
(A qui contient A_n est non dénombrable, donc $X \setminus A$ est dénombrable puisque $A \in \mathcal{A}$).

Exercice 16 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Montrer que si A, B sont des éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A \subset B$ et $\mu(B) < +\infty$, on a alors :*
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$
2. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $\mu(A)$.*
3. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En supposant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers $\mu(A)$.*

Solution.

1. Pour $A \subset B$ dans $\mathcal{A}$, on a la partition $B = A \cup (B \setminus A)$, donc :
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$
Avec $\mu(A) \leq \mu(B) < +\infty$, on en déduit que :
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$
2. On a :
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$$
En effet si $x \in A$, il existe un entier n tel que $x \in A_n$. Si $n = 0$, on a bien $x \in A_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$, sinon en désignant par $n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $x \in A_n$, on a $x \in A_n \setminus A_{n-1}$ et $x \in A_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$.
Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, cette réunion est une partition. En effet, pour $0 \leq n < m$, on a $A_n \subset A_{m-1}$ et $(A_m \setminus A_{m-1}) \cap A_n = \emptyset$, donc $(A_m \setminus A_{m-1}) \cap (A_n \setminus A_{n-1}) = \emptyset$ (en posant $A_{-1} = \emptyset$). Il en résulte que :
$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\mu(A_0) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \setminus A_{k-1}) \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$
la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante.
3. Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a :
$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n \subset A_{n_0}$$
et :
$$\mu(A) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_{n_0} \setminus A)$$

(puisque $\mu(A_{n_0}) < +\infty$) avec :

$$A_{n_0} \setminus A = A_{n_0} \setminus \bigcap_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty} (A_{n_0} \setminus A_n)$$

la suite $(A_{n_0} \setminus A_n)_{n \geq n_0+1}$ étant croissante dans $\mathcal{A}$, ce qui nous donne :

$$\mu(A_{n_0} \setminus A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_{n_0} \setminus A_n) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

et :

$$\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

la suite $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante.
Si tous les $\mu(A_n)$ sont infinis, ce résultat n'est plus vrai comme le montrer de $A_n = [n, +\infty[$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue. On a $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Exercice 17 *Soient μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mu([x, +\infty[)$$

1. *Montrer que F est décroissante avec, pour tout réel x :*

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} F(t) = F(x)\,,\ \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} F(t) = F(x) - \mu(\{x\})$$

et :

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = \mu(\mathbb{R})\,,\ \lim_{t \to +\infty} F(t) = 0$$

2. *Montrer que l'ensemble :*

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x\}) > 0\}$$

est dénombrable.

Solution.

1. Pour $x \leq y$, on a $[y, +\infty[\subset [x, +\infty[$ et en conséquence $F(y) \leq F(x)$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\left[x - \frac{1}{n}, +\infty\right[\right)_{n \geq 1}$ est décroissante dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $\mu([x-1, +\infty[) \leq \mu(\mathbb{R}) < +\infty$ et :

$$[x, +\infty[= \bigcap_{n \geq 1} \left[x - \frac{1}{n}, +\infty\right[$$

donc :

$$F(x) = \mu([x, +\infty[) = \lim_{n \to +\infty} \mu\left(\left[x - \frac{1}{n}, +\infty\right[\right) = \lim_{n \to +\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right)$$

et comme F est décroissante, on en déduit que $\lim_{t \to x^-} F(t) = F(x)$, c'est-à-dire que continue à gauche en x.
Avec les mêmes arguments, on a :

$$\begin{aligned}\mu(]x, +\infty[) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} \left[x + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu\left(\left[x + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

et :

$$\lim_{t\to x^+} F(t) = \mu(]x,+\infty[) = \mu([x,+\infty[\setminus\{x\}) = F(x) - \mu(\{x\})$$

Comme $([-n,+\infty[)_{n\geq 1}$ est croissante et $([n,+\infty[)_{n\geq 1}$ est décroissante dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$\mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1}[-n,+\infty[\right) = \lim_{n\to+\infty}\mu([-n,+\infty[) = \lim_{n\to+\infty} F(-n)$$

et :

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcap_{n\geq 1}[n,+\infty[\right) = \lim_{n\to+\infty}\mu([n,+\infty[) = \lim_{n\to+\infty} F(n)$$

soit avec la décroissance de F, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \mu(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

2. L'ensemble des points de discontinuité de F est dénombrable puisque cette fonction est décroissante (donc réglée).
Mais F est continue en x si, et seulement si, $\lim\limits_{t\to x^+} F(t) = \lim\limits_{t\to x^-} F(t) = F(x)$, ce qui revient à dire que $\mu(\{x\}) = 0$, donc l'ensemble $\mathcal{D}$ est exactement l'ensemble des points de discontinuité de F et il est dénombrable.

– II – Fonctions mesurables

Définition. Soient $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est mesurable si, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Dans le cas où X, Y sont deux espaces topologiques et $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont les tribus de Borel, une fonction mesurable de X dans Y est dite borélienne.

La composée, la somme, le produit et une limite simple de fonctions mesurables est mesurable.

Les fonctions réglées de $[a,b]$ dans un espace de Banach sont mesurables (par exemples, les fonctions continues par morceaux et les fonctions monotones de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$).

Si $f : (X,\mathcal{A},\mu) \to \mathbb{R}^+$ est mesurable, il existe alors une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de X telles que $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu(A_n) \leq +\infty$$

Définition. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est intégrable (ou sommable) si $\displaystyle\int_X |f|\, d\mu < +\infty$ et dans ce cas :

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

L'ensemble des fonctions intégrables de $(X,\mathcal{A},\mu)$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel et l'application $f \mapsto \displaystyle\int_X f d\mu$ est une forme linéaire positive avec :

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu < +\infty$$

Exercice 18 $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Montrer que* f *est mesurable si, et seulement si, la restriction de* f *à tout segment* $[a, b]$ *est mesurable.*

Solution. Notons $f_{a,b} = f_{|[a,b]}$.
Si f est mesurable, pour tout borélien A de $\mathbb{R}$:

$$f_{a,b}^{-1}(A) = \{x \in [a, b] \mid f(x) \in A\} = [a, b] \cap f^{-1}(A)$$

est un borélien de A, donc $f_{a,b}$ est mesurable.
Réciproquement, supposons que toutes les restrictions $f_{a,b}$ soient mesurables.
Pour tout borélien A de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in [-n, n] \mid f(x) \in A\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_{-n,n}^{-1}(A) \end{aligned}$$

est un borélien de A, donc f est mesurable.

Exercice 19 *Soient* E *un espace vectoriel normé et* $a < b$ *deux réels.*
Une fonction $f : [a, b] \to E$ *est dite réglée si elle admet une limite à droite en tout point de* $[a, b[$ *et une limite à gauche en tout point de* $]a, b]$.
On notera $f(x^-)$ *[resp.* $f(x^+)$*] la limite à gauche [resp. à droite] en* $x \in]a, b]$ *[resp. en* $x \in [a, b[$*].*

1. *Montrer qu'une fonction réglée est bornée.*
2. *Montrer qu'une limite uniforme de fonctions réglées de* $[a, b]$ *dans* E *est réglée.*
3. *Soit* $f : [a, b] \to E$ *une fonction réglée et* $\varepsilon > 0$*. On note :*

$$E_\varepsilon = \left\{ x \in]a, b] \mid \text{il existe } \varphi \text{ en escaliers sur } [a, x] \text{ telle que } \sup_{t \in [a,x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon \right\}$$

   Montrer que $E_x \neq \emptyset$*, puis que* $b = \max(E_\varepsilon)$.
4. *Montrer qu'une fonction* $f : [a, b] \to E$ *est réglée si, et seulement si, elle est limite uniforme sur* $[a, b]$ *d'une suite de fonctions en escaliers.*
5. *Montrer qu'une fonction réglée* $f : [a, b] \to E$ *est borélienne et qu'elle est continue sur* $[a, b]$ *privé d'un ensemble* D *dénombrable (éventuellement vide).*
6. *La fonction* $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ *est-elle réglée ?*
7. *En désignant par* $E(t)$ *la partie entière d'un réel* t*, montrer que la fonction* f *définie sur* $[0, 1]$ *par :*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(nx)}{2^n}$$

   est réglée, puis calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$ *(il s'agit d'une intégrale de Riemann).*

Solution.

1. Soit $f : [a,b] \to E$ réglée. Si elle n'est pas bornée, pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f(x_n)\| \geq n$. Dans le compact $[a,b]$, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha \in [a,b]$.
   Supposons que $\alpha \in \left]a,b\right[$. Il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in [a,b] \cap \left]\alpha-\eta,\alpha\right[,\ \left\|f(x) - f\left(\alpha^-\right)\right\| < 1$$
   et :
$$\forall x \in [a,b] \cap \left]\alpha,\alpha+\eta\right[,\ \left\|f(x) - f\left(\alpha^+\right)\right\| < 1$$
   Il existe aussi un entier $n_0 \geq 1$ tel que :
$$\forall n \geq n_0,\ x_{\varphi(n)} \in \left]\alpha-\eta,\alpha+\eta\right[$$
   ce qui nous donne pour tout $n \geq n_0$:
$$\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(\alpha^-\right)\right\| < 1 \text{ ou } \left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(\alpha^+\right)\right\| < 1$$
   et en conséquence :
$$\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| < 1 + \left\|f\left(\alpha^-\right)\right\| \text{ ou } \left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| < 1 + \left\|f\left(\alpha^+\right)\right\|$$
   en contradiction avec $\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| \geq \varphi(n) \geq n$.
   Pour $\alpha = a$ [resp. $\alpha = b$], on procède de manière analogue en utilisant seulement la limite à droite [resp. à gauche].
   La fonction f est donc bornée.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réglées de $[a,b]$ dans E qui converge uniformément vers une fonction f.
   Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_ε tel que :
$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \sup_{x\in[a,b]} \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$
   La fonction f_{n_ε} ayant une limite à gauche en $\alpha \in \left]a,b\right]$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in [a,b] \cap \left]\alpha-\eta,\alpha\right[,\ \left\|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}\left(\alpha^-\right)\right\| < \varepsilon$$
   ce qui nous donne, pour tout x, y dans $[a,b] \cap \left]\alpha-\eta,\alpha\right[$:
$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\| &\leq \|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)\| + \left\|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}\left(\alpha^-\right)\right\| + \left\|f_{n_\varepsilon}\left(\alpha^-\right) - f_{n_\varepsilon}(y)\right\| + \|f_{n_\varepsilon}(y) - f(y)\| \\ &\leq 4\varepsilon\end{aligned}$$
   On déduit alors du critère de Cauchy que f admet une limite à gauche en α.
   De plus avec :
$$\left\|f_n\left(\alpha^-\right) - f\left(\alpha^-\right)\right\| = \lim_{x\to\alpha^-} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \sup_{x\in[a,b]} \|f_n(x) - f(x)\|$$
   on déduit que :
$$f\left(\alpha^-\right) = \lim_{n\to+\infty} f_n\left(\alpha^-\right)$$
   On procède de même pour la limite à droite.
3. Comme f admet une limite à droite en a, il existe un réel $\eta_a \in \left]0, b-a\right[$ tel que :
$$\forall t \in [a, a+\eta_a],\ \left\|f(t) - f\left(a^+\right)\right\| < \varepsilon$$
   donc en désignant par φ la fonction constante égale à $f\left(a^+\right)$ sur $[a, a+\eta_a]$, on a $\sup\limits_{t\in[a,a+\eta_a]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, ce qui signifie que $a + \eta_a \in E_\varepsilon$.
   L'ensemble E_ε est donc non vide majorée par b, donc il admet une borne supérieure $\beta \in \left]a,b\right]$ (on a

$a+\eta_a \leq \beta$).
Supposons que $\beta < b$. Comme f admet une limite à droite et à gauche en β, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $[\beta - \eta, \beta + \eta] \subset]a, b[$ et :

$$\forall t \in [\beta - \eta, \beta], \ \left\| f(t) - f\left(\beta^-\right) \right\| < \varepsilon$$

$$\forall t \in [\beta, \beta + \eta], \ \left\| f(t) - f\left(\beta^+\right) \right\| < \varepsilon$$

Par définition de la borne supérieure β, il existe $x \in]\beta - \eta, \beta] \cap E_\varepsilon$. On désigne alors par φ une fonction en escaliers sur $[a, x]$ telle que $\sup\limits_{t \in [a,x]} \| f(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon$ et on la prolonge en une fonction en escaliers sur $[a, \beta + \eta]$ en posant $\varphi(x) = f(\beta^-)$ pour $x \in]x, \beta]$ et $\varphi(x) = f(\beta^+)$ pour $x \in]\beta, \beta + \eta]$.
Comme $\beta + \eta \notin E_x$, il existe $t \in [a, \beta + \eta]$ tel que $\| f(t) - \varphi(t) \| \geq \varepsilon$, ce qui contredit le fait que $\| f(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon$ pour tout $t \in [a, \beta + \eta]$.
On a donc $\beta = b$.
Comme f admet une limite à gauche en b, il existe un réel $\eta_b > 0$ tel que $[b - \eta_b, b] \subset]a, b]$ et :

$$\forall t \in [b - \eta_b, b], \ \left\| f(t) - f\left(b^-\right) \right\| < \varepsilon$$

Prenant $x \in]b - \eta_b, b] \cap E_\varepsilon$, on désigne par φ une fonction en escaliers sur $[a, x]$ telle que $\sup\limits_{t \in [a,x]} \| f(t) - \varphi(t) \| <$ ε et on la prolonge en une fonction en escaliers sur $[a, b]$ en posant $\varphi(x) = f(b^-)$ (si $x = b$, il n'y a rien à faire), ce qui nous donne φ en escaliers sur $[a, b]$ telle que $\| f(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon$ pour tout $t \in [a, b]$.
On a donc $b \in E_\varepsilon$ et $\beta = b$.

4. Si f est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escaliers, elle est réglée comme limite uniforme d'une suite de fonctions réglées (une fonction en escaliers est réglée).
Réciproquement, soit $f : [a, b] \to E$ une fonction réglée. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $b \in E_{\frac{1}{n}}$, donc il existe φ_n en escaliers sur $[a, b]$ telle que $\sup\limits_{t \in [a,b]} \| f(t) - \varphi_n(t) \| < \dfrac{1}{n}$. La suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge donc uniformément vers f sur $[a, b]$.
5. Une limite simple de fonctions boréliennes étant borélienne, on en déduit qu'une fonction réglée est borélienne.
En particulier, les fonctions en escaliers, monotones, continues par morceaux, sont boréliennes.
Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction réglée et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions *en* escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble D_n des points de discontinuité de f_n est fini et la réunion $D = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} D_n$ est une partie dénombrable de de $[a, b]$. Toutes les fonctions f_n sont continues sur l'ouvert $[a, b] \setminus D$, donc il en est de même de f puisque cette fonction est limite uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, b] \setminus D$.
Les points de discontinuité de f sont tous de première espèce).
6. La fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ n'est pas réglée puisqu'elle est discontinue en tout point de $[0, 1]$.
En effet, si $a \in [0, 1]$ est un nombre rationnel [resp. irrationnel], alors pour tout réel $\eta > 0$, on peut trouver un nombre irrationnel [resp. rationnel] x dans $]a - \eta, a + \eta[\cap [0, 1]$ et on a $|f(x) - f(a)| = 1$, ce qui prouve la discontinuité de f en a.
Comme $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est un borélien de $\mathbb{R}$, cette fonction f est étagée.
7. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \in [0, 1]$, on a :

$$0 \leq \frac{E(nx)}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}$$

avec $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n} < +\infty$, donc la série de fonctions $\sum \dfrac{E(nx)}{2^n}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
Pour montrer que f est réglée, il nous suffit de vérifier que les sommes partielles de cette série de fonctions sont des fonctions en escaliers. Comme l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[0, 1]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il suffit de vérifier que chaque fonction :

$$f_n : x \in [0, 1] \mapsto E(nx)$$

est en escaliers.

Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ et tout $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, on a $E(nx) = k$ et pour $x = 1$, $E(nx) = n$, donc :

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[} + n \cdot \mathbf{1}_{\{1\}}$$

est en escaliers.

La fonction f est don réglée sur $[0,1]$ et en conséquence Riemann-intégrable. Comme la série de fonctions définissant f est uniformément convergente, on a :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{E(nx)}{2^n} dx$$

avec :

$$\int_0^1 E(nx)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{n-1}{2}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^3} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2^3} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exercice 20 $[a,b]$ *est un intervalle fermé borné fixé avec* $a < b$ *réels.*

1. *Montrer que les fonctions en escaliers positives sur* $[a,b]$ *sont exactement les fonctions du type :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, *les* a_k *sont des réels positifs ou nuls et les* I_k *sont des intervalles contenus dans* $[a,b]$.

2. *Montrer que si* $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ *est une suite finie de fonctions en escaliers sur* $[a,b]$, *alors la fonction* $\varphi = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \varphi_k$ *est aussi en escaliers.*

3. *Soit* f *une fonction réglée définie sur* $[a,b]$ *et à valeurs positives.*

   (a) *Montrer qu'il existe une suite* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$ *et telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ \varphi_n(x) \leq f(x)$$

   (b) *On désigne par* $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite de fonctions définie sur* $[a,b]$ *par* $\psi_0 = 0$ *et pour tout* $n \geq 1$ *:*

$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

   Monter que $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite croissante de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$.

   (c) *Montrer qu'il existe une suite* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série* $\sum f_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$.

4. *Montrer que les fonctions réglées à valeurs positives sur* $[a,b]$ *sont exactement les fonctions de la forme :*
$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$$
où les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels positifs ou nuls,* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'intervalles contenus dans* $[a,b]$ *et la série considérée converge uniformément sur* $[a,b]$.

Solution.

1. Si φ est une fonction en escaliers sur $[a,b]$, il existe alors un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision :
$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p = b$$
telle que φ soit constante sur chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq p-1)$, ce qui peut s'écrire :
$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$
où $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ est une partition de $[a,b]$ en n intervalles (les I_k sont les $]a_j, a_{j+1}[$, pour j compris entre 0 et $p-1$ et les $\{a_j\} = [a_j, a_j]$, pour j compris entre 0 et p, les a_k étant les valeurs constantes prises par φ sur chacun de ces intervalles).
Si φ est à valeurs positives, les a_k sont tous positifs ou nuls.
Réciproquement une telle fonction est en escaliers puisque l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a,b]$ est un espace vectoriel et elle est à valeurs positives si les a_k sont tous positifs ou nuls (en dehors de la réunion des I_k, la fonction φ est nulle).
2. Si $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$ est une fonction en escaliers sur $[a,b]$, alors la fonction $|\varphi| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \mathbf{1}_{I_k}$ est aussi en escaliers.
Il en résulte que, si ψ est une autre fonction en escaliers sur $[a,b]$, la fonction :
$$\max(\varphi, \psi) = \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{|\psi - \varphi|}{2}$$
en escaliers, puis par récurrence on en déduit que si $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$, alors la fonction $\max\limits_{1\leq k\leq n} \varphi_k$ est aussi en escaliers.
3.
   (a) Comme f réglée sur $[a,b]$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une fonction en escaliers f_n telle que :
$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n+1}$$
   La fonction $\varphi_n = f_n - \dfrac{1}{n+1}$ est aussi en escaliers et pour tout $x \in [a,b]$, on a :
$$-\frac{1}{n+1} < f(x) - f_n(x) < \frac{1}{n+1}$$
   donc :
$$0 < f(x) - \varphi_n(x) < \frac{2}{n+1}$$
   donc $\varphi_n < f$ et :
$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)| = \sup_{x\in[a,b]} (f(x) - \varphi_n(x)) \leq \frac{2}{n+1}$$
   ce qui signifie que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f par valeurs inférieures.

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction :

$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

est en escaliers et pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$\psi_0 = 0 \leq \psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x) < f(x)$$

(puisque $f \geq 0$ et $f \geq \varphi_k$ pour tout entier k) et :

$$0 < f(x) - \psi_n(x) \leq f(x) - \varphi_n(x) < \frac{2}{n+1}$$

donc $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément en croissant vers f sur $[a, b]$.

(c) On pose $f_0 = 0$ et $f_n = \psi_n - \psi_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives.
Avec :

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} (\psi_k - \psi_{k-1}) = \psi_n - \psi_0 = \psi_n$$

on déduit que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

4. Si $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$, où la série est uniformément convergentes, les a_n sont positifs et les I_n des intervalles contenus dans $[a, b]$, la fonction :

$$f = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

est alors limite uniforme d'une suite de fonctions réglées positives et en conséquence, elle est réglée positive.
Soit f une fonction réglée positive sur $[a, b]$.
Il existe alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
En écrivant chaque fonction en escaliers h_n sous la forme :

$$f_n = \sum_{k=1}^{p_n} a_{n,k} \mathbf{1}_{I_{n,k}}$$

où les $a_{n,k}$ sont des réels positifs ou nuls et les $I_{n,k}$ sont des intervalles contenus dans $[a, b]$, en notant $p_0 = 0$, on utilise la partition :

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{n\geq 1} \{p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1, \cdots, p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n\}$$

et le fait qu'il s'agit d'une séries de fonctions positives pour écrire que :

$$f = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \mathbf{1}_{I_j}$$

où pour $j = p_1 + \cdots + p_{n-1} + k$ avec $1 \leq k \leq p_n$, on note :

$$a_j \mathbf{1}_{I_j} = a_{n,k} \mathbf{1}_{I_{n,k}}$$

ce qui définit bien une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls et une suite $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'intervalles contenus dans $[a, b]$.
A priori la convergence de cette série est simple.

Pour tout entier $m \geq 1$ il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que $m \in \{p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1, \cdots, p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n$
et on a :

$$R_m = \sum_{j=m}^{+\infty} a_j \mathbf{1}_{I_j} \leq \sum_{j=p_1+\cdots+p_{n-1}+1}^{+\infty} a_j \mathbf{1}_{I_j} = \sum_{p=n}^{+\infty} f_p = R'_n$$

ce qui assure la convergence uniforme (pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $R'_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, donc pour tout $m \geq m_\varepsilon = p_1 + \cdots + p_{n_\varepsilon - 1} + 1$, on aura $R_m < \varepsilon$).

Exercice 21 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que sa dérivée f' est borélienne.*

Solution. On a $f = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n$, où $(f_n)_{n \geq 1}$ est la suite de fonctions définies sur $]0, 1[$ par :

$$f_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

Chaque fonction f_n étant continue par morceaux est borélienne, donc f' est borélienne comme limite simple de fonctions boréliennes.

Exercice 22

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente est-il ouvert ? fermé ?*
2. *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu borélienne).*
   Montrer que l'ensemble des éléments x de X tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente est mesurable.

Solution.

1. On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions affines par morceaux et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n \text{ si } x \leq -\frac{1}{n} \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

   (faire un dessin). L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente est l'intervalle $[0, 1[$ qui n'est ni ouvert ni fermé.
2. Notons :

$$A = \left\{x \in X \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\right\}$$

   Dire que la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente équivaut à dire qu'elle est de Cauchy, ce qui équivaut aussi à dire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n_k \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n_k,\ \forall q \geq n_k,\ |f_q(x) - f_p(x)| < \frac{1}{k}$$

   ou encore :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n_k \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n_k,\ \forall q \geq n_k,\ x \in (f_q - f_p)^{-1}\left(\left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[\right)$$

   donc :

$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{\substack{p \geq n \\ q \geq n}} (f_q - f_p)^{-1}\left(\left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[\right)$$

   et cet ensemble est mesurable dans $(X, \mathcal{A})$.

– III – Calculs de primitives

Exercice 23 *Calculer* $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\alpha}$ *pour tout nombre complexe non réel,* $\alpha = a + ib$ *(avec* $b \neq 0$*).*

Solution. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x-\alpha} &= \int \frac{dx}{(x-a)-ib} = \int \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} + ib\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right) + \frac{i}{b}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right) + i\int \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right) + i\arctan(t) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right) + i\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) \\
&= \ln\left(\sqrt{(x-a)^2+b^2}\right) + i\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 24 *Pour tout entier* $n \geq 1$*, on désigne par* $F_n : x \in \mathbb{R} \mapsto F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ *la primitive de* $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ *nulle en* 0*.*

1. *Calculer* F_1*.*
2. *Montrer que, pour tout réel* x*, on a :*
$$2F_2(x) = F_1(x) + \frac{x}{1+x^2}$$
et en déduire la valeur de F_2*.*
3. *Montrer que, pour tout entier* $n \geq 1$*, on a :*
$$2nF_{n+1}(x) = (2n-1)F_n(x) + \frac{x}{(1+x^2)^n}$$
4. *On note* $\alpha_n = \dfrac{(2^n n!)^2}{2n\,(2n)!}$ *pour tout* $n \geq 0$*.*
   (a) *Montrer que :*
   $$2n\alpha_n = (2n+1)\,\alpha_{n+1}$$
   (b) *Montrer que :*
   $$2\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k F_{k+1} = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)\,\alpha_k F_k + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^k}$$
   (c) *En déduire que :*
   $$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n\alpha_n}\left(\arctan(x) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^k}\right)$$

(d) *Préciser F_3.*

Solution.

1. On a :
$$F_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x)$$

2. On a :
$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^x \frac{1+t^2-t^2 dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2} t \cdot dt \\ &= F_1(x) - \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2} t \cdot dt \end{aligned}$$

   et une intégration par parties donne :
$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2} t \cdot dt &= \left[-\frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} F_1(x) \end{aligned}$$

   soit :
$$F_2(x) = \frac{1}{2} F_1(x) + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2}$$

   c'est-à-dire :
$$F_2(x) = \frac{1}{2} \arctan(x) + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2}$$

3. On a :
$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \int_0^x \frac{1+t^2-t^2 dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} - \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} t \cdot dt \\ &= F_n(x) - \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} t \cdot dt \end{aligned}$$

   et une intégration par parties donne :
$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} t \cdot dt &= \left[-\frac{1}{2n} \frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^x + \frac{1}{2n} \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \\ &= -\frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n} F_n(x) \end{aligned}$$

   soit :
$$F_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} F_n(x) + \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

4.
   (a) On a :
$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{\left(2^{n+1}(n+1)!\right)^2}{2(n+1)(2n+2)!} = \frac{4(n+1)^2}{2(n+1)(2n+2)(2n+1)} (2n) \alpha_n \\ &= \frac{2n}{2n+1} \alpha_n \end{aligned}$$

   (b) Pour tout entier $k \geq 1$, on a :
$$2k\alpha_k F_{k+1}(x) = (2k-1)\alpha_k F_k + \alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

   et on fait la somme.

(c) Avec :

$$2k\alpha_k = (2k+1)\,\alpha_{k+1}$$

on déduit que :

$$2\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k F_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} (2k+1)\,\alpha_{k+1}F_{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1} (2j-1)\,\alpha_j F_j$$

et :

$$\sum_{j=2}^{n+1} (2j-1)\,\alpha_j F_j = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)\,\alpha_k F_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^k}$$

soit :

$$\begin{aligned}(2n+1)\,\alpha_{n+1}F_{n+1} &= \alpha_1 F_1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^k}\\ &= \arctan(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{x}{(1+x^2)^k}\end{aligned}$$

avec $(2n+1)\,\alpha_{n+1} = 2n\alpha_n$, d'où le résultat.

(d) On a :

$$\begin{aligned}F_3(x) &= \frac{1}{4\alpha_2}\left(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} + \alpha_2 \frac{x}{(1+x^2)^2}\right)\\ &= \frac{3}{8}\left(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{3}\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)\end{aligned}$$

Exercice 25 *Pour tout* $p \in [1,+\infty]$, *on désigne par* $B_p = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1\right\}$ *la boule unité de* $\mathbb{R}^2$ *pour la norme* $\|\cdot\|_p$ *et par* $\mathcal{A}_p$ *l'aire de* B_p.
Montrer que l'application $\mathcal{A}$ *est croissante sur* $[p,+\infty[$, *déterminer sa borne inférieure et sa borne supérieure et calculer* $\mathcal{A}_p$ *pour tout* $p \geq 1$.

Solution. Sur la figure 7b, on a représenté les ensembles B_p pour $p = \frac{1}{2}$, $p = 1$, $p = 2$ et $p = +\infty$.
On constate que $B_{\frac{1}{2}}$ n'est pas convexe et en conséquence, $x \mapsto \|x\|_{\frac{1}{2}}$ n'est pas une norme.
La croissance bornée de $\mathcal{A}$ provient des inclusions :

$$\forall q > p \geq 1,\ B_p \subset B_q \subset B_\infty$$

ce qui peut se montrer comme suit.
Pour tout $x = (x_1, x_2) \in B_p$, on a $|x_1|^p + |x_2|^p \leq 1$, donc $|x_1| \leq 1$ et $|x_2| \leq 1$, soit $\|x\|_\infty$ et $x \in B_\infty$. On a donc $B_p \subset B_\infty$ pour tout $p \geq 1$.
Pour $q > p \geq 1$ et $t \in [0,1]$, on a $0 \leq t^q \leq t^p$ (on a $0 \leq t^{q-p} \leq 1$ pour $q - p > 0$ et $t \in [0,1]$), donc pour tout $x = (x_1, x_2) \in B_p$, on a :

$$|x_1|^q + |x_2|^q \leq |x_1|^p + |x_2|^p \leq 1$$

et $x = (x_1, x_2) \in B_q$.
On en déduit que :

$$\forall p \geq 1,\ \mathcal{A}_1 = 2 \leq \mathcal{A}_p \leq \mathcal{A}_\infty = 4$$

Par symétries, on a :

$$\mathcal{A}_p = 4\int_0^1 (1 - x_1^p)^{\frac{1}{p}}\, dx_1 = \frac{4}{p}\int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{p}}\, t^{\frac{1}{p}-1} dt = \frac{4}{p} B\left(\frac{1}{p}+1, \frac{1}{p}\right)$$

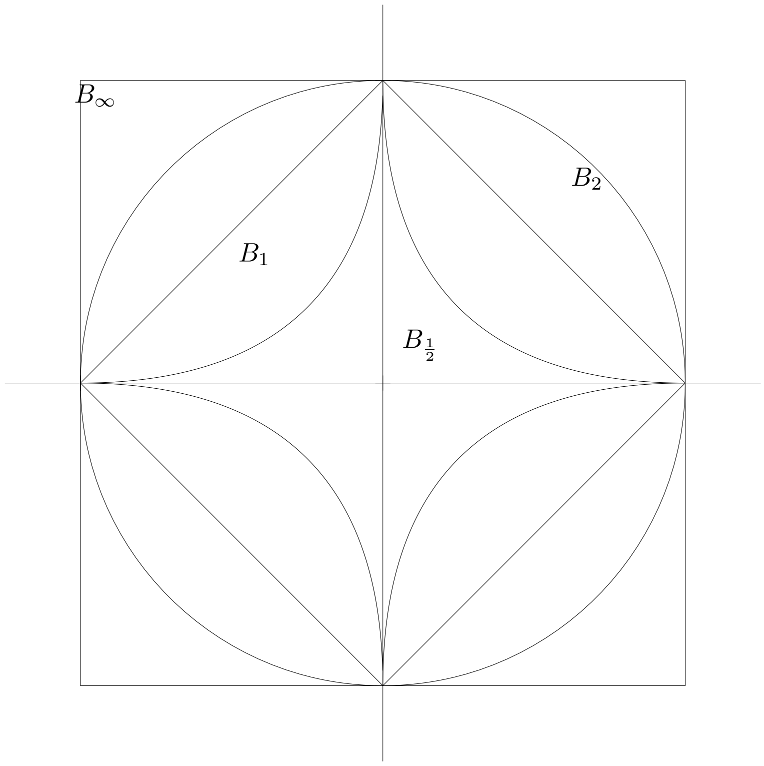

FIGURE 1 – Boules B_p pour $p = \dfrac{1}{2}, 1, 2, +\infty$

où B désigne la fonction beta définie par :

$$\forall x > 0,\ \forall y > 0,\ B(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}\, t^{y-1} dt$$

Sachant que $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, où la fonction Γ est définie par :

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

(voir l'exercice 43), on a la formule :

$$\mathcal{A}_p = \frac{4}{p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{p}+1\right)}$$

et avec $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on obtient :

$$\mathcal{A}_p = \frac{2}{p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}$$

Sachant que $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, on vérifie que $\mathcal{A}_2 = \pi$.
En écrivant que :

$$\mathcal{A}_p = 4 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{p}+1\right)}$$

et en utilisant la continuité de Γ en 1, on en déduit que :

$$\lim_{p\to+\infty} \mathcal{A}_p = 4 = \mathcal{A}_\infty$$

et $\mathcal{A}_\infty$ est bien la borne supérieure de $\mathcal{A}$.
La croissance $\mathcal{A}$ n'est pas une évidence sur les formules.

– IV – Intégration

Exercice 26 *Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0\left([a,b]\times[c,d],\mathbb{C}\right)$, où $a<b$ et $c<d$, on lui associe les fonctions α et β définies sur $[c,d]$ par :*

$$\forall z \in [c,d]\,,\ \begin{cases} \alpha(z) = \displaystyle\int_c^z \left(\int_a^b f(t,x)\,dt\right)dx \\ \beta(z) = \displaystyle\int_a^b \left(\int_c^z f(t,x)\,dx\right)dt \end{cases}$$

1. *Montrer que la fonction α est de classe C^1 sur $[c,d]$ et donner une expression de sa dérivée α'.*
2. *On désigne par γ la fonction définie sur le rectangle $R=[a,b]\times[c,d]$ par :*

$$\gamma(t,z) = \int_c^z f(t,x)\,dx$$

   Montrer que la fonction γ est continue sur R et qu'elle admet une dérivée partielle par rapport à z en tout point de R, cette dérivée $\dfrac{\partial\gamma}{\partial z}$ étant continue sur R.
3. *Montrer que la fonction β est de classe C^1 sur $[c,d]$ et donner une expression de sa dérivée β'.*
4. *Déduire de ce qui précède que :*

$$\forall z \in [c,d]\,,\ \int_c^z \left(\int_a^b f(t,x)\,dt\right)dx = \int_a^b \left(\int_c^z f(t,x)\,dx\right)dt$$

   et en particulier :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(t,x)\,dt\right)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(t,x)\,dx\right)dt$$

   (théorème de Fubini pour les fonctions continues sur un rectangle).

Solution.

1. La fonction f est continue des deux variables et l'intégration se fait sur un intervalle compact, donc la fonction :

$$\varphi : x \mapsto \int_a^b f(t,x)\,dt$$

   est continue sur $[c,d]$. La fonction α qui est une primitive de φ est de classes C^1 sur $[c,d]$, avec :

$$\forall z \in [c,d]\,,\ \alpha'(z) = \varphi(z) = \int_a^b f(t,z)\,dt$$

2. Pour $(t,z) \in [a,b] \times]c,d]$, le changement de variable $x = c + \theta(z-c)$ avec $0 \leq \theta \leq 1$ donne :

$$\gamma(t,z) = (z-c)\int_0^1 f(t, c+\theta(z-c))\, d\theta$$

ce résultat étant encore valable pour $z = c$.
Comme la fonction $(\theta,t,z) \mapsto f(t, c+\theta(z-c))$ est continue sur $[0,1] \times [a,b] \times [c,d]$ et l'intégration se fait sur un segment, on en déduit que la fonction γ est continue sur $R = [a,b] \times [c,d]$.
La fonction γ est dérivable par rapport à z avec :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z}(t,z) = f(t,z)$$

qui est continue sur R.

3. Les fonctions γ et $\dfrac{\partial \gamma}{\partial z}$ sont continues sur R et l'intégration se fait sur un segment, donc la fonction β est de classe C^1 sur $[c,d]$ avec :

$$\beta'(z) = \int_a^b \frac{\partial \gamma}{\partial z}(t,z)\, dt = \int_b^b f(t,z)\, dt$$

4. On a $\alpha' = \beta'$ sur $[c,d]$ avec $\alpha(c) = \beta(c) = 0$, ce qui équivaut à $\alpha = \beta$, soit à :

$$\forall z \in [c,d], \int_c^z \left(\int_a^b f(t,x)\, dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_c^z f(t,x)\, dx\right) dt$$

Exercice 27 *On se place sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu(A) = \mathrm{card}(A) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Calculer $\int_{\mathbb{N}} x d\mu$ *pour toute suite réelle positive* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs complexes soit sommable.*

Solution. En écrivant que $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \mathbf{1}_{\{n\}}$, les x_n étant positifs, on a :

$$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \int_{\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{n\}} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \mu\{n\} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

Une suite $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est sommable si, et seulement si, $\int_{\mathbb{N}} |x|\, d\mu < +\infty$, ce qui revient à dire que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty$.

Exercice 28 *On se place sur* $(X, \mathcal{P}(X))$ *muni d'une mesure de Dirac* $\mu = \delta_x$, *où* $x \in X$ *est fixé.*
Calculer $\int_X f d\mu$ *pour toute fonction* $f : X \to \mathbb{R}^+$.

Solution. Toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable car pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(X)$.
Pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}^+$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X telles que $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et on a par définition de l'intégrale :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \delta_x(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}(x) = f(x)$$

Exercice 29 *Soient X, Y deux espaces métriques munis de leur tribu borélienne respective. Montrer qu'une fonction $f : X \to Y$ qui est continue sur X privé d'un ensemble D dénombrable est borélienne.*

Solution. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de Y, en notant :

$$\mathcal{U} = \left(f^{-1}(\mathcal{O})\right) \cap (X \setminus D) \text{ et } \mathcal{V} = \left(f^{-1}(\mathcal{O})\right) \cap D$$

on a alors $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.
L'ensemble $\mathcal{V}$ qui est contenu dans D est dénombrable, donc borélien.
La restriction g de f à $X \setminus D$ est continue, donc :

$$\mathcal{U} = \{x \in X \setminus D \mid f(x) \in \mathcal{O}\} = \{x \in X \setminus D \mid g(x) \in \mathcal{O}\} = g^{-1}(\mathcal{O})$$

est un ouvert de $X \setminus D$, ce qui signifie qu'il existe un ouvert $\mathcal{W}$ de X tel que $\mathcal{U} = (X \setminus D) \cap \mathcal{W}$ et cet ensemble est un borélien de X comme intersection de deux boréliens ($X \setminus D$ est le complémentaire d'un borélien, donc un borélien et $\mathcal{W}$ est ouvert dans X, donc borélien).
En définitive, $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ est un borélien comme union de deux boréliens.

Exercice 30 *On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.*

1. *Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ouvert $\mathcal{O}$ dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(\mathcal{O}) < \varepsilon$.*
2. *Montrer qu'une partie mesurable bornée de $\mathbb{R}$ est de mesure finie. La réciproque est-elle vraie ?*
3. *Montrer qu'une partie mesurable de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide est de mesure non nulle. La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Montrer qu'une partie mesurable A de $[0, 1]$ de mesure égale à 1 est dense dans $[0, 1]$. Réciproquement un ouvert dense de $[0, 1]$ est-il de mesure égale à 1 ?*

Solution.

1. En désignant par $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres rationnels, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on désigne par $(I_n(\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'intervalles définie par :

   $$I_n(\varepsilon) = \left]r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right[$$

   et on désigne par $\mathcal{O}$ l'ouvert défini par :

   $$\mathcal{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n(\varepsilon)$$

   Comme $\mathcal{O}$ contient $\mathbb{Q}$, il est dense dans $\mathbb{R}$ et :

   $$\lambda(\mathcal{O}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n(\varepsilon)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$$

2. Si A est bornée, elle est alors contenue dans un segment $[a, b]$ et si de plus, elle est mesurable, on a alors $\lambda(A) \leq \lambda([a, b]) = b - a < +\infty$.
   La réciproque est fausse : l'ensemble $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle non borné.
   L'exemple précédent nous donne un exemple d'ouvert non borné de mesure finie aussi petite que l'on veut.

3. Si A est mesurable d'intérieur $\mathcal{O}$ non vide, il existe alors $x \in \mathcal{O}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathcal{O}$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc :
$$\lambda(A) \geq \lambda(\mathcal{O}) \geq \lambda(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[) = 2\varepsilon > 0$$
La réciproque est fausse.
Par exemple $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ est tel que $\lambda(A) = \lambda([0,1]) - \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 1$ et :
$$\overset{\circ}{A} = [0,1] \setminus \overline{[0,1] \cap \mathbb{Q}} = \emptyset$$
On rappelle que si E est un espace métrique (ou topologique) et F une partie de E, on a :
$$\overset{\circ}{\widehat{E \setminus F}} = E \setminus \overline{F}$$
En effet si $\mathcal{O}$ est un ouvert de E contenu dans $E \setminus F$, le fermé $E \setminus \mathcal{O}$ contient F, donc aussi son adhérence, soit $\overline{F} \subset E \setminus \mathcal{O}$ et $\mathcal{O} \subset E \setminus \overline{F}$. Comme $E \setminus \overline{F}$ est un ouvert de E contenu dans $E \setminus F$, on en déduit l'égalité $\overset{\circ}{\widehat{E \setminus F}} = E \setminus \overline{F}$.
4. Si A est mesurable de mesure égale à 1 dans $[0,1]$, son complémentaire $[0,1] \setminus A$ est de mesure nulle donc d'intérieur vide et comme :
$$\overset{\circ}{\widehat{[0,1] \setminus A}} = [0,1] \setminus \overline{A}$$
on en déduit que $\overline{A} = [0,1]$, ce qui signifie que A est dense dans $[0,1]$.
Une partie dense mesurable de $[0,1]$ n'est pas nécessairement de mesure égale à 1 comme le montre l'exemple de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Exercice 31 *$(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré avec $\mu \neq 0$, $\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel et les fonctions considérées sont à valeurs réelles.*

1. *Montrer que si f, g sont deux fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$, les fonctions $f+g$ et fg sont mesurables.*
2. *Montrer que la somme de deux fonctions intégrables est intégrable.*
3. *Le produit de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
4. *La composée de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
5. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable positive. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*
$$(A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < \eta) \Rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon$$
6. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) > 0$ et $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pour tous x, y dans A.*
7. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, on a :*
$$\mu\left(f^{-1}([\alpha, +\infty[)\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu$$
8. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que $\int_X f d\mu = 0$ si, et seulement si, f est nulle presque partout.*
9. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que si $\int_X f d\mu < +\infty$, on a alors $f(x) < +\infty$ presque partout.*

10. *Soient f, g deux fonctions mesurables positives sur X. Montrer que si $f = g$ presque partout, alors $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.*
11. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) > 0$ et f est bornée sur A.*
12. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f \neq 0$ presque partout. Montrer qu'il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ est minorée sur A par une constante strictement positive.*
13. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que si $\int_A f d\mu = 0$ pour toute partie A mesurable dans X, alors la fonction f est nulle presque partout.*

Solution.

1. L'application :
$$\begin{array}{cccc} \varphi & X & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$
est mesurable du fait que pour tout pavé $[a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble :
$$\varphi^{-1}([a, b] \times [c, d]) = f^{-1}([a, b]) \cap g^{-1}([c, d])$$
est mesurable (on rappelle que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendré par les pavés).
Comme la composée de deux fonctions mesurables est mesurable et les opérations d'addition et de multiplication sont continues (donc mesurables) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $f + g$ et fg sont mesurables.
2. Si f, g sont intégrables, on a alors :
$$\int_X |f + g| d\mu \leq \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu < +\infty$$
et $f + g$ est intégrable.
3. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ et son carré ne l'est pas.
4. Les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $g : x \mapsto x^2$ sont intégrables sur $]0, 1[$ et la composée $g \circ f : x \mapsto \frac{1}{x}$ ne l'est pas.
5. On rappelle que, pour tout mesurable $A \in \mathcal{A}$, et toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable positive, l'intégrale de f sur A est :
$$\int_A f d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_A d\mu$$
Si $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}$ est une fonction étagée intégrable positive, les réels a_k étant tous strictement positifs, pour tout réel $\eta > 0$ et tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \eta$, on a :
$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_X \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k} \cdot \mathbf{1}_A \right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_X \mathbf{1}_{A_k \cap A} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap A) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \eta \end{aligned}$$
donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, en prenant $\eta = \frac{\varepsilon}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$, on a $\int_A f d\mu < \varepsilon$.
Si $f : X \to \mathbb{R}^+$ est intégrable, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de

parties mesurables de X telles que $f = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et on a par définition de l'intégrale :

$$\int_A f d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_A d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mu(A_n \cap A) < +\infty$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que :

$$0 \leq \int_A f d\mu - \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap A) = \int_A \left(f - \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k} \right) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

et il existe $\eta > 0$ tel que tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \eta$, on a :

$$\int_A \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k} \right) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui nous donne $\int_A f d\mu < \varepsilon$.

6. En désignant par $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres rationnels, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on désigne par $(A_n(\varepsilon))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de parties mesurables de X définie par :

$$A_n(\varepsilon) = f^{-1}\left(\left] r_n - \frac{\varepsilon}{2}, r_n + \frac{\varepsilon}{2} \right[\right)$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on a :

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n(\varepsilon)$$

Si tous les $A_n(\varepsilon)$ sont de mesure nulle, on a alors $\mu(X) = 0$, ce qui n'est pas. Il existe donc un rationnel r_n tel que $\mu(A_n(\varepsilon)) > 0$ et pour tous x, y dans $A_n(\varepsilon)$, on a :

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - r_n| + |r_n - f(x)| < \varepsilon$$

7. Pour $\alpha > 0$, on note A_α l'ensemble mesurable :

$$A_\alpha = f^{-1}([\alpha, +\infty[)$$

Comme f est mesurable à valeurs positives, on a :

$$f \geq \alpha \mathbf{1}_{A_\alpha}$$

ce qui nous donne :

$$\int_X f d\mu \geq \alpha \int_X \mathbf{1}_{A_\alpha} d\mu = \alpha \mu(A_\alpha)$$

soit l'inégalité de Tchebychev :

$$\mu\left(f^{-1}([\alpha, +\infty[)\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu$$

8. Si $\int_X f d\mu = 0$, on a alors $\mu(A_\alpha) = \mu\left(f^{-1}([\alpha, +\infty[)\right) = 0$ pour tout réel $\alpha > 0$. La suite $\left(\mu\left(A_{\frac{1}{n}}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors une suite croissante d'ensemble de mesures nuls donc leur réunion :

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_{\frac{1}{n}} = f^{-1}\left(\mathbb{R}^{+,*}\right)$$

est mesurable de mesure nulle, ce qui signifie que f est nulle presque partout.
Réciproquement si f est nulle presque partout, l'ensemble $A = f^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})$ est alors de mesure nulle.

On a alors $f = f \cdot \mathbf{1}_A$ et en écrivant que $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables de X, on a :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n \cap A}$$

et :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mu (A_n \cap A) = 0$$

9. En notant $A_\infty = f^{-1}(\{\infty\})$, comme f est à valeurs positives, on a $f \geq n \mathbf{1}_{A_\infty}$ pour tout entier $n \geq 1$, donc $\int_X f d\mu \geq n\mu (A_\infty)$ et :

$$0 \leq \mu (A_\infty) \leq \frac{1}{n} \int_X f d\mu \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

si $\int_X f d\mu < +\infty$, ce qui nous donne $\mu (A_\infty) = 0$ et signifie que $f(x) < +\infty$ presque partout.

10. L'ensemble :

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = (f - g)^{-1} \{0\}$$

est mesurable. En écrivant que :

$$f = f \cdot \mathbf{1}_A + f \cdot \mathbf{1}_{X \setminus A}$$

on a :

$$\int_X f d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_A d\mu + \int_X f \cdot \mathbf{1}_{X \setminus A} d\mu$$

La fonction $f \cdot \mathbf{1}_{X \setminus A}$ est mesurable positive et nulle presque partout car :

$$\left\{x \in X \mid f \cdot \mathbf{1}_{X \setminus A}(x) \neq 0\right\} \subset X \setminus A$$

avec $X \setminus A$ de mesure nulle, donc :

$$\int_X f d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_A d\mu$$

ce résultat étant également valable pour g. Comme $f \cdot \mathbf{1}_A = g \cdot \mathbf{1}_A$, on en déduit que $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$. La réciproque est bien évidemment fausse.

11. Pour tout entier naturel n, l'ensemble :

$$A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \leq n\} = f^{-1}([-n, n])$$

est mesurable et $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, donc :

$$\mu (X) = \lim_{n \to +\infty} \mu (A_n)$$

et comme $\mu (X) > 0$, il existe un entier n tel que $\mu (A_n) > 0$, la fonction f étant bornée sur A_n (on peut aussi se contenter d'écrire que $0 < \mu (X) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu (A_n)$).

12. Pour tout entier naturel non nul n, l'ensemble :

$$A_n = \left\{x \in X \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\} = |f|^{-1} \left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[\right)$$

est mesurable et $f^{-1}(\mathbb{R}^{+,*}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, donc :

$$\mu \left(f^{-1} \left(\mathbb{R}^{+,*}\right)\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu (A_n)$$

En supposant que $f \neq 0$ presque partout, on a $\mu \left(f^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})\right) > 0$, donc il existe un entier n tel que $\mu (A_n) > 0$, la fonction f étant minorée par $\frac{1}{n}$ sur A_n (on peut aussi se contenter d'écrire que $0 < \mu \left(f^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu (A_n)$).

13. On suppose d'abord que f est à valeurs positive.
Pour tout entier naturel non nul n, l'ensemble :

$$A_n = \left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[\right)$$

est mesurable et on a :

$$0 = \int_{A_n} f d\mu \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(A_n)$$

donc $\mu(A_n)$ et $\mu\left(f^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$, ce qui signifie que f est nulle presque partout.
Pour le cas général, on introduit les ensembles mesurables :

$$A^+ = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \text{ et } A^- = \{x \in X \mid f(x) < 0\}$$

et les fonctions mesurables $f^+ = f \cdot \mathbf{1}_{A^+} \geq 0$ et $f^- = f \cdot \mathbf{1}_{A^-} \leq 0$.
Pour toute partie A mesurable dans X, on a :

$$\int_A f^\pm d\mu = \int_A f \cdot \mathbf{1}_{A^\pm} d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_{A^\pm}\mathbf{1}_A d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_{A^\pm \cap A} d\mu = \int_{A^\pm \cap A} f d\mu = 0$$

Il en résulte que $f^\pm$ est nulle presque partout, ce qui signifie que $\mu(A^\pm) = 0$ ou encore que f est nulle presque partout ($f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est la réunion de A^+ et A^-).
La réciproque est bien évidemment vraie (si f est nulle presque partout, il en est alors de même de $|f|$, donc $\int_A |f| d\mu = 0$ pour tout $\mathcal{A}$, et avec $\left|\int_A f d\mu\right| \leq \int_A |f| d\mu$, on déduit que $\int_A f d\mu = 0$).

Exercice 32 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, la mesure μ étant finie, et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel). On définit les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de X par :*

$$A_n = f^{-1}([n, +\infty[), \ B_n = f^{-1}([n, n+1[)$$

et g est la fonction définie sur X par :

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{1}_{B_n}$$

1. *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(B_k)$$

2. *Montrer que $g \leq f < g + 1$.*
3. *Montrer que f est intégrable si, et seulement si, la série $\sum n\mu(B_n)$ est convergente.*
4. *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} k\mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - n\mu(A_{n+1})$$

5. *Montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.*
6. *Montrer que f est intégrable si, et seulement si, la série $\sum \mu(A_n)$ est convergente.*
7. *Le résultat précédent est-il valable dan le cas où $\mu(X) = +\infty$?*

Solution. Comme $\mu(X) < +\infty$, toutes les parties mesurables de X sont de mesure finie. C'est donc le cas pour tous les ensembles A_n et B_n.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a la partition :

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} B_k$$

donc :

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(B_k)$$

la série considérée étant convergente (puisque $\mu(A_n) < +\infty$).

2. Pour tout $x \in X$, en désignant par $n_x \in \mathbb{N}$ la partie entière de $f(x)$, on a :

$$n_x \leq f(x) < n_x + 1$$

donc $x \in B_{n_n}$ et $g(x) = n_x$, ce qui nous donne l'encadrement :

$$g(x) \leq f(x) < g(x) + 1$$

3. La fonction f qui est mesurable positive est intégrable si, et seulement si, $\int_X f d\mu < +\infty$, ce qui équivaut, compte tenu de l'encadrement $g \leq f < g+1$, à :

$$\int_X g d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(B_n) < +\infty$$

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier k compris entre 1 et n, on a :

$$\mu(A_k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \mu(B_j) = \sum_{j=k}^{n} \mu(B_j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} \mu(B_j) = \sum_{j=k}^{n} \mu(B_j) + \mu(A_{n+1})$$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} \mu(B_j) + n\mu(A_{n+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} \mu(B_j) + n\mu(A_{n+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} j\mu(B_j) + n\mu(A_{n+1})\end{aligned}$$

5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $A_{n+1} \subset A_n$, donc $\mu(A_{n+1}) \leq \mu(A_n)$ et la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $\mu(A_0) = \mu(X)$ est fini et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, on en déduit que :

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

(si tous les $\mu(A_n)$ sont infinis, ce résultat n'est plus vrai comme le montre l'exemple de $A_n = [n, +\infty[$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue. On a $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$).

6. Si f est intégrable, la série $\sum n\mu(B_n)$ est alors convergente et avec l'inégalité :

$$n\mu(A_{n+1}) = n\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mu(B_k)$$

on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\mu(A_{n+1}) = 0$$

ce qui entraîne la convergence de la série $\sum \mu(A_n)$ avec l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(B_n)$$

Réciproquement si la série $\sum \mu(A_n)$ est convergente, des inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n} k\mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - n\mu(A_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

on déduit alors que la série $\sum n\mu(B_n)$ est convergente, ce qui revient à dire que f est intégrable.

7. En se plaçant sur $X = \mathbb{R}$ muni de la tribu de Borel, la fonction constante égale à $\frac{1}{2}$ est telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = +\infty$.

Exercice 33 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.*

1. *Montrer que s'il existe une fonction intégrable $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ telle $|f| \leq \varphi$ presque partout, la fonction f est alors intégrable.*
2. *Montrer que si f est bornée presque partout et $\mu(X)$ est fini, la fonction f est alors intégrable. En particulier, une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est mesurable et bornée presque partout est intégrable.*

Solution.

1. En notant :

$$A = \{x \in X \mid |f(x)| \leq \varphi(x)\} = (\varphi - |f|)^{-1}(\mathbb{R}^+)$$

on définit un ensemble mesurable et $\mu(X \setminus A) = 0$. On a alors :

$$\int_X |f|\,d\mu = \int_X |f| \cdot \mathbf{1}_A d\mu + \int_X |f| \cdot \mathbf{1}_{X\setminus A} d\mu$$

avec $|f| \cdot \mathbf{1}_{X\setminus A} = 0$ presque partout (cette fonction est nulle sur A, donc l'ensemble des points où elle est non nulle est contenu dans $X \setminus A$ qui est de mesure nulle), donc :

$$\int_X |f|\,d\mu = \int_X |f| \cdot \mathbf{1}_A d\mu \leq \int_X \varphi \cdot \mathbf{1}_A d\mu \leq \int_X \varphi d\mu < +\infty$$

et f est intégrable.

2. Si f est presque partout bornée sur X, il existe une constante $M \geq 0$ telle que $|f| \leq M$ presque partout et dans le cas où $\mu(X)$ fini, la fonction constante égale à M est intégrable ($M = M \cdot \mathbf{1}_X$, donc $\int_X M d\mu = \mu(X) < +\infty$), ce qui entraîne l'intégrabilité de f.

Exercice 34

1. *Soient I un intervalle réel non réduit à un point et $a \in I$.*
   Pour tout $x \in I$, on désigne par $I_{a,x}$ l'intervalle fermé d'extrémités a et x.
   On se donne une fonction mesurable bornée, $f : I \to \mathbb{R}$ et on désigne par F la fonction définie sur I par :
$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_{I_{a,x}} f(t)\,dt$$
   soit :
$$F(x) = \begin{cases} \int_a^x f(t)\,dt \text{ si } a \leq x \\ \int_x^a f(t)\,dt \text{ si } x \leq a \end{cases}$$
   Montrer que F est lipschitzienne (donc uniformément continue) sur I et qu'elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$ où la fonction f est continue avec $F'(x_0) = f(x_0)$.
2. *Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable de dérivée bornée, alors f' est intégrable sur $[a,b]$ et :*
$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$
3. *En considérant la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par $f(0) = 0$ et :*
$$f(x) = \frac{x}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
   pour $x \neq 0$, vérifier que le résultat précédent n'est plus valable pour f dérivable de dérivée non bornée.

Solution.

1. Comme f est mesurable et bornée, elle est intégrable sur tout segment $I_{a,x}$ contenu dans I et la fonction F est bien définie.
   Pour tous $x < y$ dans $[a,b]$, on a :
$$F(y) = \int_a^y f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^y f(t)\,dt = F(x) + \int_x^y f(t)\,dt$$
   donc :
$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt$$
   et :
$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq M(y-x)$$
   où M est un majorant de $|f|$.
   De même, pour $y < x$, on a :
$$|F(y) - F(x)| \leq M(x-y)$$
   On a donc $|F(y) - F(x)| \leq M|y-x|$ pour tous x, y dans I, ce qui signifie que la fonction F est lipschitzienne sur I et en conséquence, elle est uniformément continue.
   Supposons que f soit continue en un point $x_0 \in I$.
   Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$(t \in I \text{ et } |t - x_0| < \eta) \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$
   donc pour $x \in I$ tel que $0 < |x - x_0| < \eta$ et tout t compris entre x_0 et x, on a :
$$|t - x_0| \leq |x - x_0| < \eta$$

(le segment d'extrémités t et x_0 est contenu dans le segment d'extrémités x_0 et x qui a une longueur strictement inférieure à η) et :

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| &= \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{I_{x_0,x}}(f(t)-f(x_0))\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|x-x_0|}\int_{I_{x_0,x}}|f(t)-f(x_0)|\,dt \\ &\leq \frac{1}{|x-x_0|}\varepsilon\,|x-x_0| = \varepsilon\end{aligned}$$

On a donc ainsi prouvé que :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$$

ce qui signifie que F est dérivable en x_0 de nombre dérivé $F'(x_0) = f(x_0)$.
Si F est dérivable, sa dérivée F' doit vérifier la propriété des valeurs intermédiaires (théorème de Darboux), donc l'égalité $F' = f$ ne sera pas réalisée pour f ne vérifiant pas la propriété des valeurs intermédiaires.
Par exemple la fonction en escaliers $f = 0\cdot\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} + 1\cdot\mathbf{1}_{]\frac{1}{2},1]}$ est mesurable bornée sur $[0,1]$ et $F(x) = 0\cdot\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\mathbf{1}_{]\frac{1}{2},1]}$ est non dérivable en $\frac{1}{2}$.

2. On a $f' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$, où $(f_n)_{n\geq 2}$ est la suite de fonctions définies sur $[a,b]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases}\dfrac{n}{b-a}\left(f\left(x+\dfrac{b-a}{n}\right)-f(x)\right) \text{ si } a\leq x\leq b-\dfrac{b-a}{n}\\ 0 \text{ si } b-\dfrac{b-a}{n}\leq x\leq b\end{cases}$$

Chaque fonction f_n étant continue par morceaux est borélienne, donc f' est borélienne comme limite simple de fonctions boréliennes.
Si de plus f' est bornée, elle est intégrable sur $[a,b]$.
En notant M un majorant de $|f'|$, le théorème des accroissements finis nous dit que $|f_n|\leq M$ pour tout $n\geq 2$ et le théorème de convergence dominée nous dit que :

$$\int_a^b f'(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt$$

En désignant par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

la primitive de f nulle en a (f est continue et on utilise la convention $\int_a^x f(t)\,dt = -\int_x^a f(t)\,dt$ pour $x<a$), on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f_n(t)\,dt &= \frac{n}{b-a}\int_a^{b-\frac{b-a}{n}}\left(f\left(t+\frac{b-a}{n}\right)-f(t)\right)dt \\ &= \frac{n}{b-a}\left(\int_a^{b-\frac{b-a}{n}} f\left(t+\frac{b-a}{n}\right)dt - \int_a^{b-\frac{b-a}{n}} f(t)\,dt\right) \\ &= \frac{n}{b-a}\left(\int_{a+\frac{b-a}{n}}^b f(x)\,dx - F\left(b-\frac{b-a}{n}\right)\right) \\ &= \frac{n}{b-a}\left(F(b)-F\left(a+\frac{b-a}{n}\right)-F\left(b-\frac{b-a}{n}\right)\right) \\ &= \frac{n}{b-a}\left(F(b)-F\left(b-\frac{b-a}{n}\right)\right) - \frac{n}{b-a}\left(F\left(a+\frac{b-a}{n}\right)-F(a)\right)\end{aligned}$$

et comme F est dérivable de dérivée $F' = f$, on déduit que :

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(t)\,dt &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = F'(b) - F'(a)\\ &= f(b) - f(a)\end{aligned}$$

3. La fonction f est dérivable sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ avec :

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\ln^2(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x\ln(|x|)}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

pour $x \neq 0$ et :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(on a $\left|\frac{1}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{\ln(|x|)} \underset{x\to 0}{\to} 0$).

La fonction g définie sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par $g(0) = 0$ et :

$$g : x \mapsto \frac{1}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{\ln(|x|)}\right)$$

pour $x \neq 0$ est continue sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (on a $|g(x)| \leq \frac{1}{\ln(|x|)}\left(1 - \frac{1}{\ln(|x|)}\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$) donc intégrable, mais la fonction

$$h : x \mapsto \frac{1}{x\ln(|x|)}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

ne l'est pas. En effet, le changement de variable $t = \frac{1}{x}$ nous donne :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |h(x)\,dx| = \int_2^{+\infty}\frac{|\sin(t)|}{t\cdot\ln(t)}dt \geq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t\cdot\ln(t)}dt$$

et pour tout $n \geq 1$, le changement de variable $t = n\pi + u$ nous donne :

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t\cdot\ln(t)}dt &= \int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{(n\pi+u)\ln(n\pi+u)}du\\ &\geq \frac{1}{(n+1)\pi\ln((n+1)\pi)}\int_0^{\pi}\sin(u)\,du = \frac{2}{(n+1)\pi\ln((n+1)\pi)}\end{aligned}$$

la série $\sum\frac{1}{n\ln(n\pi)}$ étant divergente, donc $\int_0^{\frac{1}{2}}|h(x)\,dx| = +\infty$.

La dérivée f' n'est pas bornée sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right) = -\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}{\ln\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} = -\infty$$

– V – Convergence monotone, dominée

Exercice 35 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$ qui converge vers une fonction f. Montrer que s'il existe une constante $M > 0$ telle que $\int_X f_n d\mu \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\int_X f d\mu \leq M$.*
2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$ qui converge presque partout vers une fonction f.*
   Montrer que si f_0 est intégrable, il en est alors de même de toutes les fonctions f_n ainsi que de f et qu'on a :
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$
   Le résultat subsiste-t-il si $\int_X f_0 d\mu = +\infty$?
3. *Soient $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de parties mesurables de X définie par :*
   $$A_n = |f|^{-1}\left([n, +\infty[\right)$$
   (a) *Montrer que f est finie presque partout et que :*
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} |f|\, d\mu = 0$$
   (b) *Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*
   $$(A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < \eta) \Rightarrow \int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$$
   (c) *En prenant $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue, montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :*
   $$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$
   est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ($\int_0^x f(t)\, dt$ désigne l'intégrale de f sur l'intervalle d'extrémités 0 et x).

Solution.

1. En utilisant le lemme de Fatou, on a :
   $$\int_X f d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} (f_n)\, d\mu = \int_X \liminf_{n\to+\infty} (f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \leq M$$
   On rappelle que :
   $$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{p\geq n} u_p\right) \text{ et } \limsup_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{p\geq n} u_p\right)$$
2. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout en décroissant vers f, on a $0 \leq f \leq f_n \leq f_0$ presque partout pour tout $n \in \mathbb{N}$ et l'intégrabilité de f_0 entraîne celle des f_n et de f.
   Comme $(f_0 - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions intégrables positives qui converge presque partout vers la fonction intégrable $f_0 - f$, le théorème de convergence monotone (Beppo Levi) nous dit que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_X (f_0 - f_n)\, d\mu = \int_X (f_0 - f)\, d\mu$$

et donc $\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.
On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée : les f_n et f sont mesurables avec $|f_n| = f_n \leq f_0$, la fonction f_0 étant positive intégrable, donc $\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.
En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\mathbf{1}_{[n,+\infty[}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $\lim_{n\to+\infty}(f_n) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\mu = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.

(a) Comme f est intégrable, elle est finie presque partout. En effet, dans le cas contraire l'ensemble mesurable :

$$A_\infty = |f|^{-1}(\{+\infty\})$$

est de mesure strictement positive et :

$$\int_X |f|\, d\mu \geq \int_{A_\infty} |f|\, d\mu = \int_{A_\infty} (+\infty)\, d\mu = +\infty \cdot \mu(A_\infty) = +\infty$$

On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{A_\infty} = 0 \; p.p.$$

(on a $\int_X \mathbf{1}_{A_\infty} d\mu = \mu(A_\infty) = 0$, ce qui revient à dire que $\mathbf{1}_{A_\infty} = 0$ $p.p.$), ce qui entraîne que $\lim_{n\to+\infty} |f| \cdot \mathbf{1}_{A_n} = 0$ presque partout avec $|f| \cdot \mathbf{1}_{A_n} \leq |f|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $|f|$ étant intégrable. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{A_n} |f|\, d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_X |f| \cdot \mathbf{1}_{A_n} d\mu = 0$$

(b) Ce résultat a été montré en approchant $|f|$ par des fonctions étagées positives.
On va le retrouver en utilisant la question précédente.
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad \int_{A_n} |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \eta$, où η est à préciser, on a :

$$\int_A |f|\, d\mu = \int_{A\cap A_n} |f|\, d\mu + \int_{A\cap(X\setminus A_n)} |f|\, d\mu$$

avec :

$$\int_{A\cap A_n} |f|\, d\mu \leq \int_{A_n} |f|\, d\mu$$

et :

$$\int_{A\cap(X\setminus A_n)} |f|\, d\mu \leq n\int_{A\cap(X\setminus A_n)} d\mu \leq n\int_A d\mu = n\mu(A) < n\cdot\eta$$

ce qui nous donne :

$$\int_A |f|\, d\mu \leq \int_{A_n} |f|\, d\mu + n\cdot\eta$$

Prenant $n = n_\varepsilon$ et $\eta = \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, on obtient $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$.

(c) Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\lambda(A) < \eta$.
Pour x, y dans $\mathbb{R}$ tels que $0 < y - x < \eta$, on a :

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_{[x,y]} f(t)\, dt\right| \leq \int_{[x,y]} |f(t)|\, dt < \varepsilon$$

puisque $\lambda([x,y]) = y - x < \eta$. Cette inégalité étant encore valable pour $0 < x - y < \eta$.
On a donc $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$ pour tous réels x, y tels que $|y - x| < \eta$, ce qui signifie que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 36 *On se place sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu(A) = \text{card}(A) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on désigne par* δ_n *la mesure de Dirac en* n.

1. *Montrer que :*
$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$$
2. *Montrer que pour toute suite réelle positive* $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *on a :*
$$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$$
3. *Calculer :*
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right)$$

Solution.

1. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a :
$$\mu(A) = \text{card}(A) = \sum_{n \in A} 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_A(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n(A)$$
2. En écrivant que $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbf{1}_{\{n\}}$, les x_n étant positifs, on a par définition de l'intégrale des fonctions mesurables positives :
$$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mu(\{n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par x_n la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$x_n(k) = \frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right)$$
et on a :
$$\int_{\mathbb{N}} x_n d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} x_n(k) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right)$$
cette série à termes positifs étant convergente puisque :
$$\frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite x_n est sommable et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\lim_{n \to +\infty} x_n(k) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right) = \frac{1}{k^2}$$
c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la suite $x : k \mapsto \frac{1}{k^2}$.
Comme $|x_n(k)| \leq \frac{1}{k^2}$ (on a $0 \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $x \in [0, 1]$), la suite x étant sommable, on déduit du théorème de convergence dominée que :
$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{N}} x_n d\mu = \int_{\mathbb{N}} \lim_{n \to +\infty} x_n d\mu = \int_{\mathbb{N}} x d\mu$$
soit :
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 37 *Calculer*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^2x\,(1-x)^n\,dx$$

et conclure.

Solution. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x)=n^2x\,(1-x)^n$ sur $I=[0,1]$. Cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle et :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\underset{n\to+\infty}{\to}1$$

On peut conclure qu'il est impossible de dominer la convergence.

Exercice 38 *Pour tout réel $\alpha>0$, on désigne par $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :*

$$I_n(\alpha)=\int_0^{n^{\frac{1}{\alpha}}}\left(1-\frac{x^\alpha}{n}\right)^n dx$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Solution. On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x^\alpha}{n}\right)^n \text{ si } x\in\left]0,n^{\frac{1}{\alpha}}\right[\\ 0 \text{ si } x\geq n^{\frac{1}{\alpha}}\end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ avec :

$$\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\ \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=e^{-x^\alpha}\\ \forall n\geq 1,\ |f_n(x)|\leq e^{-x^\alpha}\end{cases}$$

et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}dx=\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{t^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha}dt=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}$$

On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}$$

Exercice 39 *Pour tout réel $\alpha>0$, on désigne par $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :*

$$I_n(\alpha)=\int_1^{+\infty} n^\alpha\sin\left(\frac{x}{n}\right)e^{-n^2x^2}dx$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Solution. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = n^\alpha \sin\left(\frac{x}{n}\right) e^{-n^2x^2}$ sur $I = [1, +\infty[$. On a :

$$\forall x \geq 1,\ |f_n(x)| \leq n^\alpha e^{-n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

avec :

$$\forall x \geq 1,\ |f_n(x)| \leq n^\alpha e^{-\frac{n}{2}^2} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(la suite $\left(n^\alpha e^{-\frac{n}{2}^2}\right)_{n\geq 1}$ est majorée puisque convergente vers 0). On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = 0$$

Exercice 40

1. *Montrer que :*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt$$
2. *Montrer que :*
$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\, dt = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right)$$
En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt$.

Solution.

1. On désigne par $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :
$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) \text{ si } t \in]0, n[\\ 0 \text{ si } t \geq n \end{cases}$$
Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ avec :
$$\forall t \in]0, +\infty[,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t) = e^{-t} \ln(t)$$
et :
$$\forall t \in]0, n[,\ |f_n(t)| = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n |\ln(t)| \leq \varphi(t) = e^{-t} |\ln(t)|$$
$$\forall t \geq n,\ |f_n(t)| = 0 \leq \varphi(t)$$
(pour $0 < x < 1$, on a $\ln(1 - x) \leq -x$, donc $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$ pour $t \in]0, n[$ et $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$) la fonction φ étant continue et intégrable sur $]0, +\infty[$. On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt$$
2. On a :
$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\, dt = \int_0^1 (1 - x)^n \ln(nx)\, n dx = \frac{n \ln(n)}{n+1} + nJ_n$$

et une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \int_0^1 (1-x)^{n+1} \ln(x)\, dx = (n+1) \int_0^1 (1-x)^n (x \ln(x) - x)\, dx \\ &= -(n+1) J_{n+1} + (n+1) J_n - (n+1) \int_0^1 x (1-x)^n\, dx \end{aligned}$$

On a donc la relation de récurrence $(n+2) J_{n+1} = (n+1) J_n - \dfrac{1}{n+2}$, avec $J_0 = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, dx = -1$, ce qui donne $(n+1) J_n = -\sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k}$ et $I_n = \dfrac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k}\right)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt &= \lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right) \\ &= -\gamma \backsimeq -0.577215664 \end{aligned}$$

Exercice 41

1. *Montrer que, tout réel x et tout réel $t \in \left]-1, 1\right[$ la série $\sum t^{n-1} \sin(nx)$ est convergente et calculer sa somme. On notera $f(x,t)$ cette somme.*
2. *Montrer que, pour tout réel $x \in \left]0, \pi\right[$, on a :*

$$\int_0^1 f(x,t)\, dt = \frac{\pi - x}{2}$$

3. *Monter que, pour tout réel $x \in \left]0, \pi\right[$, on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$

Solution.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, tout réel x et tout réel $t \in \left]-1, 1\right[$, on note :

$$S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} \sin(kx)$$

la somme partielle de la série considérée.
On a :

$$\begin{aligned} S_n(x,t) &= \Im\left(\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} e^{ikx}\right) = \Im\left(e^{ix} \sum_{k=1}^{n} \left(te^{ix}\right)^{k-1}\right) = \Im\left(e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} \left(te^{ix}\right)^{k}\right) \\ &= \Im\left(e^{ix} \frac{1 - t^n e^{inx}}{1 - te^{ix}}\right) \end{aligned}$$

et comme $|t| < 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} S_n(x,t) &= \Im\left(\frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}}\right) = \frac{1}{\left|1 - te^{ix}\right|^2} \Im\left(e^{ix} - t\right) \\ &= \frac{\sin(x)}{1 - 2t\cos(x) + t^2} = f(x,t) \end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in]0, \pi[$, on a :

$$\int_0^1 f(x,t)\,dt = \sin(x) \int_0^1 \frac{dt}{1 - 2t\cos(x) + t^2} = \sin(x) \int_0^1 \frac{dt}{(t - \cos(x))^2 + \sin^2(x)}$$
$$= \frac{1}{\sin(x)} \int_0^1 \frac{dt}{1 + \left(\frac{t - \cos(x)}{\sin(x)}\right)^2}$$

($\sin(x) \neq 0$ pour $x \in]0, \pi[$) et le changement de variable $u = \dfrac{t - \cos(x)}{\sin(x)}$ nous donne :

$$\int_0^1 f(x,t)\,dt = \int_{-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}^{\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}} \frac{du}{1+u^2} = \int_{-\operatorname{cotan}(x)}^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{du}{1+u^2}$$
$$= \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \arctan(\operatorname{cotan}(x))$$
$$= \frac{x}{2} + \arctan(\operatorname{cotan}(x))$$

et avec $\arctan(\operatorname{cotan}(x)) = \dfrac{\pi}{2} - x$ (cette fonction est définie et dérivable sur $]0, \pi[$ de dérivée $-\dfrac{1}{\sin^2(x)} \dfrac{1}{1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}} = -1$, elle est donc égale à $-x + c$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ donne $c = \dfrac{\pi}{2}$), on déduit que $\displaystyle\int_0^1 f(x,t)\,dt = \frac{\pi - x}{2}$.

3. Pour x fixé dans $]0, \pi[$, la suite de fonctions $(S_n(x, \cdot))_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction $t \mapsto f(x,t)$, toutes les fonctions considérées étant continues sur $]0, 1[$ avec :

$$|S_n(x,t)| = \left| \Im\left(e^{ix} \frac{1 - t^n e^{inx}}{1 - te^{ix}} \right) \right| \leq \left| e^{ix} \frac{1 - t^n e^{inx}}{1 - te^{ix}} \right|$$
$$\leq \frac{2}{|1 - te^{ix}|} = \frac{2}{\sqrt{1 - 2t\cos(x) + t^2}} = \varphi(t)$$

la fonction φ étant continue sur $[0, 1]$, donc intégrable. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\frac{\pi - x}{2} = \int_0^1 f(x,t)\,dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 S_n(x,t)\,dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n t^{k-1} \sin(kx) \right) dt$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Exercice 42 *Soient $a < b$ deux réels et $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ deux suites réelles telles que :*

$$\forall x \in]a, b[\,,\ \lim_{n \to +\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0$$

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$ (lemme de Cantor).
On peut raisonner par l'absurde en utilisant une suite de fonctions définie par :

$$f_k(x) = \frac{(a_{n_k} \cos(n_k x) + b_{n_k} \sin(n_k x))^2}{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2}$$

où la suite d'entiers $(n_k)_{k \geq 1}$ est judicieusement choisie.

Solution. Supposons que l'une des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ ou $(b_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0. La suite $\left(a_n^2+b_n^2\right)_{n\geq 1}$ ne peut alors converger vers 0 et il existe alors un réel $\varepsilon>0$ tel que pour tout entier $k\geq 1$, il existe un entier $n>k$ tel que $a_n^2+b_n^2>\varepsilon$. On peut alors construire une suite strictement croissante d'entier $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $a_{n_k}^2+b_{n_k}^2>\varepsilon$ pour tout $k\geq 1$. On définit alors la suite de fonctions $(f_k)_{k\geq 1}$ par $f_k(x)=\dfrac{(a_{n_k}\cos(n_kx)+b_{n_k}\sin(n_kx))^2}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$, on a pour tout $x\in\,]a,b[$:

$$0\leq f_k(x)\leq\frac{\left(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2\right)\left(\cos^2(n_kx)+\sin^2(n_kx)\right)}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}=\varphi(x)=1$$

et par hypothèse, la suite $(f_k)_{k\geq 1}$ converge simplement vers 0 puisque :

$$0\leq f_k(x)\leq\frac{(a_{n_k}\cos(n_kx)+b_{n_k}\sin(n_kx))^2}{\varepsilon}$$

On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx=0.$$

En développant $(a_{n_k}\cos(n_kx)+b_{n_k}\sin(n_kx))^2$, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f_k(x)\,dx&=\int_a^b\frac{a_{n_k}^2\cos^2(n_kx)+2a_{n_k}b_{n_k}\cos(n_kx)\sin(n_kx)+b_{n_k}^2\sin(n_kx)^2}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}dx\\&=\int_a^b\frac{a_{n_k}^2+a_{n_k}b_{n_k}\sin(2n_kx)+\left(b_{n_k}^2-a_{n_k}^2\right)\sin(n_kx)^2}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}dx\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}\int_a^b f_k(x)\,dx&=\frac{a_{n_k}^2(b-a)}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}+\frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\cos(2n_ka)-\cos(2n_kb)}{2n_k}+\frac{\left(b_{n_k}^2-a_{n_k}^2\right)}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\int_a^b\frac{1-\cos(2n_kx)}{2}dx\\&=\frac{a_{n_k}^2(b-a)}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}+\frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\cos(2n_ka)-\cos(2n_kb)}{2n_k}\\&\quad+\frac{\left(b_{n_k}^2-a_{n_k}^2\right)}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{1}{2}\left(b-a-\frac{\sin(2n_kb)-\sin(2n_ka)}{2n_k}\right)\\&=\frac{b-a}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\left(a_{n_k}^2+\frac{b_{n_k}^2-a_{n_k}^2}{2}\right)+\frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\cos(2n_ka)-\cos(2n_kb)}{2n_k}\\&\quad-\frac{\left(b_{n_k}^2-a_{n_k}^2\right)}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\sin(2n_kb)-\sin(2n_ka)}{4n_k}\\&=\frac{b-a}{2}+\frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\cos(2n_ka)-\cos(2n_kb)}{2n_k}-\frac{b_{n_k}^2-a_{n_k}^2}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\sin(2n_kb)-\sin(2n_ka)}{4n_k}\end{aligned}$$

avec :

$$\left|\frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\cos(2n_ka)-\cos(2n_kb)}{2n_k}\right|\leq\frac{1}{2n_k}\underset{k\to+\infty}{\to}0$$

(en utilisant $|a_{n_k}b_{n_k}|\leq\dfrac{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}{2}$) et :

$$\left|\frac{b_{n_k}^2-a_{n_k}^2}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\sin(2n_kb)-\sin(2n_ka)}{4n_k}\right|\leq\frac{1}{2n_k}\underset{k\to+\infty}{\to}0$$

ce qui entraîne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx=\frac{b-a}{2}>0$ et une contradiction.

Exercice 43 *On désigne par $\mathcal{H}$ le demi plan complexe défini par :*

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

1. *Montrer que, pour tout nombre complexe z, la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$.*
2. *Soit z un nombre complexe. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement si, $z \in \mathcal{H}$.*
   La fonction gamma d'Euler est la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :
   $$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$
3. *Montrer que :*
   $$\Gamma(1) = 1 \text{ et } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$
4. *Montrer que la fonction gamma vérifie l'équation fonctionnelle :*
   $$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2}$$
5. *Montrer que pour tout entier naturel n, on a :*
   $$\Gamma(n+1) = n! \text{ et } \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$
6.
   (a) *Soient z et α deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $(z, \alpha) \in \mathcal{H}^2$.*

   (b) *Montrer que :*
   $$\forall (z, \alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}}dt = \Gamma(z+1)\zeta(z+1, \alpha)$$
   où ζ est la fonction dzéta de Hurwitz définie par :
   $$\forall (z, \alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*},\ \zeta(z+1, \alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{z+1}}$$
   En particulier, pour $\alpha = 1$, on a :
   $$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{e^t - 1}dt = \Gamma(z+1)\zeta(z+1)$$
   où ζ est la fonction dzéta de Riemann.
7. *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on note :*
   $$I_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$
   (a) *Montrer que :*
   $$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = I_n(z)$$

(b) *En déduire que :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

(formule d'Euler).

8. *Montrer que :*

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}$$

soit :

$$\binom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

(formule de Wallis).

9.

(a) *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$I_{2n}(z) = 2^{z-1}\left(1 + \frac{z}{2n+1}\right) \frac{I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}$$

(b) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

(formule de Legendre).

10. *On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}$ par :*

$$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R},\ f(x,u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \leq -\sqrt{x} \\ \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} \text{ si } u > -\sqrt{x} \end{cases}$$

(a) *Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :*

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\, du$$

(b) *Montrer que, pour tout réel u, on a :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(c) *Montrer que pour tout $(x,u) \in [1, +\infty[\times \mathbb{R}$, on a :*

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u) = \begin{cases} e^{-\frac{u^2}{2}} \text{ si } u \leq 0 \\ (1+u)\, e^{-u} \text{ si } u > 0 \end{cases}$$

(d) *En déduire la formule de Stirling :*

$$\Gamma(x+1) \underset{x \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Pour $x = n$ entier naturel non nul, on retrouve la formule usuelle :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

11. *Montrer que la fonction gamma est continue sur $\mathcal{H}$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec pour tout entier naturel non nul n et tout réel strictement positif x :*

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n \, t^{x-1} e^{-t} dt$$

12. *En utilisant l'équation fonctionnelle (2), montrer que la fonction Γ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et que ce prolongement vérifie la même équation fonctionnelle. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, on notera encore $\Gamma(z)$ ce prolongement.*

13. *Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :*

$$\Gamma(z) \underset{z \to -n}{\backsim} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

14. ***La formule des compléments.***
On désigne par φ la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H}, \ \varphi(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1+t} dt$$

et par $\mathcal{D}$ la bande ouverte du plan complexe définie par :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(z) < 1\}$$

(a) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

(b) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

(c) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$$

(d) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2}$$

(e) *Montrer que, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et tout réel $t \in [0, \pi]$, on a :*

$$\cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \left(\frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} \cos(nt) \right)$$

(f) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

(g) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}$$

(h) *En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Solution.

1. Pour tout nombre complexe z, la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
Avec $\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\Re(z)-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$, on déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ converge absolument pour tout nombre complexe z.
2. Avec $\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\Re(z)-1}e^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{\Re(z)-1}$, on déduit que l'intégrale $\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt$ converge absolument si, et seulement si, $\Re(z) > 0$.
3. On a :
$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$$
En effectuant le changement de variable $t = x^2$, le calcul de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ se ramène au calcul de l'intégrale de Gauss :
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$
(voir l'exercice 5).
4. Une intégration par parties donne pour $z \in \mathcal{H}$ et $0 < \varepsilon < R$:
$$\int_\varepsilon^R t^z e^{-t}dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_\varepsilon^R + z\int_\varepsilon^R t^{z-1}e^{-t}dt$$
et le passage à la limite quand (ε, R) tend vers $(0, +\infty)$ donne le résultat.
5. De l'équation fonctionnelle (2), on déduit facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$$
et :
$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$
6.
   (a) Pour tous nombres complexes z et α, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   Avec $\left|\dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}\right| = \dfrac{t^{\Re(z)}e^{-\Re(\alpha)t}}{1-e^{-t}} \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\Re(z)}}$, on déduit que l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}dt$ converge absolument si, et seulement si, $\Re(z) > 0$.
   Pour $\Re(z) > 0$, on a $\left|\dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}\right| = \dfrac{t^{\Re(z)}e^{-\Re(\alpha)t}}{1-e^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{\Re(z)}e^{-\Re(\alpha)t}$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}dt$ converge absolument si, et seulement si, $\Re(\alpha) > 0$ (pour $\Re(\alpha) > 0$, on a $t^{\Re(z)}e^{-\Re(\alpha)t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et pour $\Re(\alpha) \le 0$, on a $t^{\Re(z)}e^{-\Re(\alpha)t} > 1$ pour t grand).

(b) Pour tout $(z, \alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*}$, et tout réel $t > 0$, on a $0 < e^{-t} < 1$ et :

$$\frac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^z e^{-(n+\alpha)t}$$

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}}$ et $t \mapsto t^z e^{-(n+\alpha)t}$, pour $n \geq 0$, sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left| t^z e^{-(n+\alpha)t} \right| dt &= \int_0^{+\infty} t^{\Re(z)} e^{-(n+\alpha)t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\Re(z)}}{(n+\alpha)^{\Re(z)}} e^{-x} \frac{dx}{n+\alpha} \\ &= \frac{1}{(n+\alpha)^{\Re(z)+1}} \Gamma\left(\Re(z) + 1\right)\end{aligned}$$

et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left| t^z e^{-nt} \right| dt = \Gamma\left(\Re(z) + 1\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{\Re(z)+1}} < +\infty$$

On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^z e^{-(n+\alpha)t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \Gamma(z+1) \frac{1}{(n+\alpha)^{z+1}} \\ &= \Gamma(z+1) \zeta(z+1, \alpha)\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$ et $z = 1$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \Gamma(2) \zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

7.

(a) Pour $n \geq 1$ et $z \in \mathcal{H}$, le changement de variable $t = nx$ nous donne :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^1 (1-x)^n x^{z-1} n^z dx = n^z J_n(z)$$

Une intégration par parties nous donne :

$$J_{n+1}(z) = \int_0^1 (1-x)^{n+1} x^{z-1} dx = \frac{n+1}{z} \int_0^1 (1-x)^n x^z dx = \frac{n+1}{z} J_n(z+1)$$

et par récurrence, on déduit que :

$$\begin{aligned}J_n(z) &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} J_0(z+n) \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 t^{z+n-1} dt \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)}\end{aligned}$$

On peut aussi écrire que :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{t^{k+z-1}}{n^k} dt = n^z \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k} (-1)^k}{k+z}$$

et constater que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $P_n(z) = \dfrac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)}$ s'écrit $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^n \dfrac{\alpha_k}{k+z}$, les coefficients α_k étant donnés par :

$$\alpha_k = \left((z+k) P_n(z)\right)_{|z=-k} = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{n!}$$

(b) On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \text{ si } t \in]0,n[\\ 0 \text{ si } t \geq n \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ avec :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}t^{z-1} \\ \forall n \geq 1, \ |f_n(t)| \leq e^{-t}t^{\Re(z)-1} = f(t) \end{cases}$$

la fonction f étant continue et intégrable sur $]0,+\infty[$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = \Gamma(z)$$

soit :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} I_n(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

8. Pour $z=\dfrac{1}{2}$, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n!\sqrt{n}}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2}\right)} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1}\sqrt{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

et de la formule d'Euler, on déduit la formule de Wallis :

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} I_n\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}\sqrt{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Comme :

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{2^{2n+1}}{2n} = \frac{2^{2n}}{n}$$

on a aussi :

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}$$

soit :

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

9.

(a) On a :

$$\begin{aligned} I_{2n}(z) &= \frac{(2n)!2^z n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)(z+n+1)\cdots(z+2n)} \\ &= \frac{(2n)!2^z n^z}{z(z+2)\cdots(z+2n)(z+1)\cdots(z+1+2(n-1))} \\ &= \frac{(2n)!2^z n^z\left(\frac{z+1}{2}+n\right)}{2^{2n+1}\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right)\left(\frac{z+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+(n-1)\right)\left(\frac{z+1}{2}+n\right)} \end{aligned}$$

avec :

$$\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right) = \frac{n!n^{\frac{z}{2}}}{I_n\left(\frac{z}{2}\right)}$$

et :

$$\left(\frac{z+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+n\right) = \frac{n!n^{\frac{z+1}{2}}}{I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}I_{2n}(z) &= \frac{(2n)!2^z n^z\left(\frac{z+1}{2}+n\right)}{2^{2n+1}(n!)^2 n^{\frac{2z+1}{2}}} I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{2^z}{2^{2n+1}}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{z+1}{2}+n\right) I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)\end{aligned}$$

et tenant compte de :

$$I_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{2n+1}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}I_{2n}(z) &= \frac{1}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{2^z}{2n+1}\left(\frac{z+1}{2}+n\right) I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right) \\ &= 2^{z-1}\left(1+\frac{z}{2n+1}\right)\frac{I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}\end{aligned}$$

(b) En faisant tendre n vers l'infini dans ce qui précède, on obtient :

$$\Gamma(z) = 2^{z-1}\frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

10.

(a) Pour $x > 0$ fixé, le changement de variable $t = x + u\sqrt{x}$ nous donne :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}\left(x+u\sqrt{x}\right)^x e^{-\left(x+u\sqrt{x}\right)}\sqrt{x}du \\ &= \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}}du \\ &= \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,du\end{aligned}$$

(b) Pour $u = 0$ et $x > 0$, on a $u > -\sqrt{x}$ et :

$$f(x,u) = \left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} = 1 \underset{x\to+\infty}{\to} 1 = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

On se fixe un réel $u \neq 0$ et on désigne par x_u un réel strictement positif tel que $\sqrt{x_u} > -u$. Pour tout réel $x > x_u$, on a $u > -\sqrt{x_u} > -\sqrt{x}$ et :

$$f(x,u) = \left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\ln(f(x,u)) &= x\left(\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)-\frac{u}{\sqrt{x}}\right) \\ &= x\left(-\frac{u^2}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= -\frac{u^2}{2}+o(1) \underset{x\to+\infty}{\to} -\frac{u^2}{2}\end{aligned}$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(c) On se fixe $x \geq 1$.

Pour $u \leq -\sqrt{x}$, on a $f(x,u) = 0 \leq e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Pour $u > -\sqrt{x}$, on a :

$$f(x,u) = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} = \left(\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) e^{-\frac{u}{\sqrt{x}}}\right)^x$$

Pour $-\sqrt{x} < u \leq 0$, on a $\dfrac{u}{\sqrt{x}} \in \left]-1, 0\right]$ et de **I.5** on déduit que :

$$0 \leq f(x,u) \leq e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(la fonction $f : t \mapsto (1+t) e^{\frac{t^2}{2} - t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(t) = e^{\frac{t^2}{2}-t}(1 + (1+t)(t-1)) = t^2 e^{\frac{t^2}{2}-t} \geq 0$, donc f est croissante et $f(t) \leq f(0) = 1$ pour tout $t \leq 0$, soit $(1+t)e^{-t} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $0 \leq (1+t)e^{-t} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$ pour tout $t \in [-1, 0]$).

Pour $u > 0$, avec la décroissance sur $\mathbb{R}^+$ de l'application $t \mapsto (1+t)e^{-t}$, on déduit que :

$$\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) e^{-\frac{u}{\sqrt{x}}} \leq (1+u)e^{-u} \leq 1$$

et :

$$0 \leq f(x,u) \leq \left((1+u)e^{-u}\right)^x \leq (1+u)e^{-u}$$

On a donc pour tout réel $x \geq 1$ et tout réel u :

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u) = \begin{cases} e^{-\frac{u^2}{2}} \text{ si } u \leq 0 \\ (1+u)e^{-u} \text{ si } u > 0 \end{cases}$$

(d) Pour tout réel u, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

les fonctions $u \mapsto f(x,u)$ étant continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ pour tout réel $x \geq 1$, avec :

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u)$$

pour tout réel $x \geq 1$ et tout réel u, la fonction φ étant continue intégrable sur $\mathbb{R}$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,du &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

et :

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,du \underset{x \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

11. La fonction $(z,t) \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*}$ et pour tous réels $0 < a < b$, tout nombre complexe $z \in \mathcal{H}$ tel que $a \leq \Re(z) \leq b$, tout réel $t > 0$, on a :

$$\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\Re(z)-1}e^{-t} \leq \varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} \text{ si } 0 < t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t} \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

la fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (pour $a > 0$, la fonction t^{a-1} est intégrable sur $]0,1[$ et avec $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{b-1}e^{-\frac{t}{2}} = 0$, on déduit que $\varphi(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$ pour t assez grand, la fonction $e^{-\frac{t}{2}}$ étant intégrable sur $]1, +\infty[$). Il en résulte que la fonction Γ est continue sur toute bande fermée $\mathcal{H}_{a,b} = \{z \in \mathcal{H} \mid a \leq \Re(z) \leq b\}$, donc sur $\mathcal{H}$.

On peut aussi procéder comme suit.

Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $(z,t) \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathcal{H}_{a,b} \times \left[\frac{1}{n}, n\right]$, donc la fonction $\Gamma_n : z \mapsto \int_{\frac{1}{n}}^{n} t^{z-1}e^{-t}dt$ est continue sur $\mathcal{H}_{a,b}$ et avec :

$$\begin{aligned}
|\Gamma(z) - \Gamma_n(z)| &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^{\Re(z)-1}e^{-t}dt + \int_n^{+\infty} t^{\Re(z)-1}e^{-t}dt \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^{a-1}e^{-t}dt + \int_n^{+\infty} t^{b-1}e^{-t}dt \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^{a-1}dt + e^{-n}\int_n^{+\infty} t^{b-1}dt = \frac{1}{a \cdot n^a} + \frac{n^b}{b \cdot e^n}
\end{aligned}$$

on déduit que la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers Γ sur $\mathcal{H}_{a,b}$. Il en résulte que Γ est continue sur $\mathcal{H}_{a,b}$.

La fonction $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est indéfiniment dérivable sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$ avec pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+,*}$ (avec $a < b$) et $x \in [a,b]$:

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln(t)|^n t^{x-1}e^{-t} \leq g_n(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^n t^{a-1} \text{ si } 0 < t \leq 1 \\ |\ln(t)|^n t^{b-1}e^{-t} \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

la fonction g_n étant continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (on a $\lim\limits_{t\to 0^+} |\ln(t)|^n t^{\frac{a}{2}} = 0$, donc pour $t > 0$ assez petit on a $|g_n(t)| \leq t^{\frac{a}{2}-1}$, la fonction $t^{\frac{a}{2}-1}$ étant intégrable sur $]0,1[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} |\ln(t)|^n t^{b-1}e^{-\frac{t}{2}} = 0$, donc $|g_n(t)| \leq e^{-\frac{t}{2}}$ pour t assez grand, la fonction $e^{-\frac{t}{2}}$ étant intégrable sur $]1,+\infty[$). On en déduit alors que la fonction Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et qu'on peut dériver sous le signe d'intégration.

12. On utilise le découpage :

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^- = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n$$

où on a noté :

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$$

et pour tout entier $n \geq 1$:

$$\mathcal{H}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid -n < \Re(z) \leq -(n-1)\} \setminus \{-(n-1)\}$$

On peut définir, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction Γ_n sur $\mathcal{H}_n$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H}_n,\ \Gamma_n(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^{+\infty} t^{z+(n-1)}e^{-t}dt$$

($\Gamma(z+n)$ est bien défini puisque $\Re(z+n) = \Re(z) + n > 0$ et $z \notin \{-(n-1), \cdots, -1, 0\}$ valide la division par $z(z+1)\cdots(z+n-1)$).

Comme Γ est continue sur $\mathcal{H}$, chaque fonction Γ_n est continue sur $\mathcal{H}_n$, comme quotient de deux fonctions continues.

On peut donc prolonger la fonction Γ en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-,\ \widetilde{\Gamma}(z) = \begin{cases} \Gamma(z) \text{ si } \Re(z) > 0 \\ \Gamma_n(z) \text{ si } -n < \Re(z) \leq -(n-1) \text{ et } z \neq -(n-1) \end{cases}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tel que $\Re(z) > 0$, on a $\Re(z+1) > 0$ et :

$$\widetilde{\Gamma}(z+1) = \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z\widetilde{\Gamma}(z)$$

et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tel que $-n < \Re(z) \leq -(n-1)$, on a $-(n-1) < \Re(z+1) \leq -(n-2)$ et :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}(z+1) = \Gamma_{n-1}(z+1) &= \frac{\Gamma(z+1+n-1)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+1+n-1)} = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \\
&= z\Gamma_n(z) = z\widetilde{\Gamma}(z)
\end{aligned}$$

13. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tel que $-(n+1) < \Re(z) \leq -(n-1)$, on a :

$$\Gamma(z) = \Gamma_{n+1}(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)}$$

donc :

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) &= \lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}\end{aligned}$$

soit :

$$\Gamma(z) \underset{z\to -n}{\backsim} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$$

En particulier :

$$\Gamma(z) \underset{z\to 0}{\backsim} \frac{1}{z}$$

14.

(a) La condition $0 < \Re(z) < 1$ nous assure que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{z-1}}{1+t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$.

Le changement de variable $t = \dfrac{1}{\theta}$, nous donne :

$$\int_1^{+\infty}\frac{t^{z-1}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{\theta^{-z}}{1+\theta}d\theta = \varphi(1-z)$$

et le résultat annoncé.

(b) En utilisant le théorème de Fubini-Lebesgue, on a pour tout $z \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^{+\infty} u^{z-1}e^{-u}du\int_0^{+\infty} v^{-z}e^{-v}dv \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u^{z-1}e^{-u}v^{-z}e^{-v}du\right)dv \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-v}\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{v}\right)^{z-1}e^{-u}\frac{du}{v}\right)dv\end{aligned}$$

et en faisant, pour tout $v > 0$ fixé, le changement de variable $w = \dfrac{u}{v}$, $dw = \dfrac{du}{v}$, on obtient, en utilisant encore le théorème de Fubini-Lebesgue :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^{+\infty} e^{-v}\left(\int_0^{+\infty} w^{z-1}e^{-vw}dw\right)dv \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-v}e^{-vw}dv\right)w^{z-1}dw \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(w+1)v}dv\right)w^{z-1}dw \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{w^{z-1}}{1+w}dw = \varphi(z) + \varphi(1-z)\end{aligned}$$

(c) Pour tout entier $n \geq 1$, tout $z \in \mathcal{H}$ et tout réel $t \in \left]0,1\right[$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{z+k-1} = t^{z-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = t^{z-1}\frac{1-(-t)^n}{1+t}$$

$$\begin{aligned}\frac{t^{z-1}}{1+t} &= t^{z-1}\frac{(1-(-t)^n)}{1+t} + \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{1+t} = t^{z-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k + \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{1+t} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{z+k-1} + \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{1+t}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^1 t^{z+k-1}dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{z+n-1}}{1+t}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+z} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{z+n-1}}{1+t}dt\end{aligned}$$

avec :

$$0 \leqslant \left|\int_0^1 \frac{t^{z+n-1}}{1+t}dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)+n-1}dt = \frac{1}{\mathrm{Re}(z)+n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Ce qui nous donne :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+z}$$

(d) Pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a $1-z \in \mathcal{D}$ et en utilisant la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \varphi(z) + \varphi(1-z) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+z} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-z} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+z} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-z} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n-z}\right) \\ &= \frac{1}{z} - 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-z^2}\end{aligned}$$

(e) Pour $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ fixé, on désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui est 2π-périodique et telle que :

$$\forall t \in [-\pi,\pi],\ f(t) = \cos(zt)$$

Cette fonction est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle est donc développable en série de Fourier, soit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin(nt)$$

Comme f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(zt)\cos(nt)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos((z+n)t) + \cos((n-z)t))\,dt \\ &= \frac{(-1)^n\sin(z\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n-z}\right) \\ &= -2\frac{(-1)^n z\sin(z\pi)}{\pi}\frac{1}{n^2-z^2}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall t \in [0,\pi]\,,\ \cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}\left(\frac{1}{z} - 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-z^2}\cos(nt)\right)$$

(f) Prenant $t=0$ dans le développement en série de Fourier précédent, on a pour tout $z \in \mathcal{D}$:

$$1 = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}\left(\frac{1}{z} - 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-z^2}\right)$$

et :

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} - 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-z^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

(g) En désignant par θ la fonction définie sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},\ \theta(z) = \Gamma(z)\,\Gamma(1-z)\sin(\pi z)$$

le résultat précédent nous dit que cette fonction est constante égale à π sur $\mathcal{D}$.
Comme, pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, on a $z+1 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ et :

$$\begin{aligned}\theta(z+1) &= \Gamma(z+1)\,\Gamma(-z)\sin(-\pi z)\\ &= z\Gamma(z)\,\frac{\Gamma(1-z)}{-z}\,(-\sin(\pi z)) = \theta(z)\end{aligned}$$

on déduit que θ est constante égale à π sur $\displaystyle\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}\mathcal{D}_n$, en notant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{D}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid n < \Re(z) < n+1\}$$

puis, par continuité, que θ est constante égale à π sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.
On en déduit en particulier que $\Gamma(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ (pour $z \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n) = n! \neq 0$).
Prenant $z = \dfrac{1}{2}$, on retrouve les égalités $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(h) En écrivant que $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$, la formule des compléments s'écrit aussi :

$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},\ \Gamma(z)\,\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}$$

(i) Avec :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{1}{z}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^z}{(1+z)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$

et :

$$\Gamma(-z) = -\frac{1}{z}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{-z}}{(1-z)\cdots\left(1-\frac{z}{n}\right)}$$

on déduit que :

$$-\frac{\pi}{z\sin(\pi z)} = \Gamma(z)\,\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1-z^2)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)}$$

et :

$$\begin{aligned}\sin(\pi z) &= \pi z\lim_{n\to+\infty}(1-z^2)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\\ &= \pi z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

cette formule étant valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ (pour $z \in \mathbb{Z}$, tout est nul).

Exercice 44 ***Utilisation d'une intégrale double pour calculer*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

1. *Montrer que :*
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=-\int_0^1\frac{\ln(1-y)}{y}dy$$
2. *En déduire que :*
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\int\int_{[0,1]^2}\frac{dxdy}{1-xy}$$
3. *Montrer que l'application $\varphi:(u,v)\mapsto(u-v,u+v)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même et préciser son inverse.*
4. *Déterminer l'image par φ^{-1} du carré $[0,1]^2$.*
5. *Montrer que pour tout $u\in\,]0,1[\,,$ on a :*
$$\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)=\arcsin(u)$$
et :
$$\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\arcsin(u)}{2}$$
6. *En utilisant le changement de variable $(x,y)=\varphi(u,v)\,,$ montrer que $\displaystyle\iint\frac{dxdy}{1-xy}=\frac{\pi^2}{6}$ et en conséquence $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.*

Solution.

1. Pour tout $y\in\,]0,1[\,,$ on a :
$$-\frac{\ln(1-y)}{y}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y^{n-1}}{n}$$
les fonctions considérées étant toutes à valeurs positives et continues sur $]0,1[\,.$ Tenant compte de :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\frac{y^{n-1}}{n}dy=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$$
on déduit du théorème de convergence monotone que :
$$-\int_0^1\frac{\ln(1-y)}{y}dy=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\frac{y^{n-1}}{n}dy=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$
2. Pour y fixé dans $]0,1[\,,$ on a :
$$\int_0^1\frac{dx}{1-xy}=\left[-\frac{\ln(1-xy)}{y}\right]_0^1=-\frac{\ln(1-y)}{y}$$
et le théorème de Fubini-Tonelli nous donne :
$$\int\int_{[0,1]^2}\frac{dxdy}{1-xy}=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{dx}{1-xy}\right)dy=-\int_0^1\frac{\ln(1-y)}{y}dy=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

3. L'application $\varphi : (u,v) \mapsto (u-v, u+v)$ est linéaire bijective de $\mathbb{R}^2$ sur lui même (son déterminant vaut $2 \neq 0$) d'inverse $\varphi^{-1} : (x,y) \mapsto \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{y-x}{2}\right)$ et en conséquence réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même.
4. L'image par φ^{-1} du carré $[0,1]^2$ est le carré $\mathcal{C}$ de sommets $\varphi^{-1}(0,0) = (0,0)$, $\varphi^{-1}(1,0) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\varphi^{-1}(1,1) = (1,0)$ et $\varphi^{-1}(0,1) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.
En effet, en désignant par (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, un point du carré $[0,1]^2$ s'écrit $xe_1 + ye_2$ avec $0 \leq x, y \leq 1$ et son image par φ^{-1} est $x\left(\dfrac{1}{2}e_1 - \dfrac{1}{2}e_2\right) + y\left(\dfrac{1}{2}e_1 - \dfrac{1}{2}e_2\right)$, elle est donc dans le carré $\mathcal{C}$ et réciproquement tout point de $\mathcal{C}$ s'écrit $\varphi^{-1}(xe_1 + ye_2)$ avec $xe_1 + ye_2 \in [0,1]^2$).
5. Si $g(u) = \arctan\left(\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$, on a pour $u \in]0,1[$:
$$g'(u) = \frac{\sqrt{1-u^2} - u\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} \frac{1}{1+\frac{u^2}{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin'(u)$$
donc $g(u) = \arcsin(u) + c$, où c est une constante réelle. Faisant tendre u vers 0, on a $c = 0$ et $g(u) = \arcsin(u)$.
De même, si $h(u) = \arctan\left(\dfrac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$, on a pour $u \in]0,1[$:
$$h'(u) = \frac{-\sqrt{1-u^2} - (1-u)\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} \frac{1}{1+\frac{(1-u)^2}{1-u^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{2}\arcsin'(u)$$
donc $h(u) = -\dfrac{1}{2}\arcsin(u) + c$, où c est une constante réelle. Faisant tendre u vers 0, on a $c = \dfrac{\pi}{4}$ et $h(u) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\arcsin(u)$.
6. Le changement de variable $(x,y) = \varphi(u,v) = (u-v, u+v)$ nous donne $dxdy = 2dudv$ et :
$$\begin{aligned} I &= \iint_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{1-xy} = 2\iint_{\varphi^{-1}([0,1]^2)} \frac{dudv}{1-u^2+v^2} \\ &= 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-u}^{u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right) du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{-(1-u)}^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right) du\right) \\ &= 4\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right) du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right) du\right) \end{aligned}$$
avec, pour u fixé dans $]0,1[$:
$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{1-u^2+v^2} &= \frac{1}{1-u^2}\int \frac{dv}{1+\frac{v^2}{1-u^2}} = \frac{1}{1-u^2}\int \frac{dv}{1+\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\frac{I}{4} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(u)}{\sqrt{1-u^2}} du + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(u)\right) du \\
&= \left[\frac{\arcsin^2(u)}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\left[\arcsin(u)\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\arcsin^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{72}\right) = \frac{\pi^2}{24}
\end{aligned}$$

et $I = \dfrac{\pi^2}{6}$.

– VI – Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne la tribu de toutes les parties de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ (i. e. la tribu engendrée par les intervalles ouverts).

On rappelle (voir l'exercice 11) que :

– la longueur d'un intervalle réel I d'extrémités $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ est définie par :

$$\ell(I) = b - a \in [0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

– si I est un intervalle et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles telle que :

$$I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

on a alors :

$$\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

(on dit que ℓ est sous-additive) ;

– si I est un intervalle et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles deux à deux disjoints telle que :

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

on a alors :

$$\ell(I) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

(on dit que ℓ est σ-additive).

Pour tout partie A de $\mathbb{R}$, on note :

$$\ell^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n} \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) \in \overline{\mathbb{R}^+}$$

la borne inférieure étant prise sur toutes les suites d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est négligeable si $\ell^*(A)=0$, ce qui revient à dire que pour tout réel $\varepsilon>0$ il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles telle que :

$$A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n)<\varepsilon$$

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable (on dira simplement mesurable) si pour toute partie E de $\mathbb{R}$, on a :

$$\ell^*(E)=\ell^*(E\cap A)+\ell^*(E\setminus A)$$

où $E\setminus A=E\cap(\mathbb{R}\setminus A)$ (condition de Carathéodory).

La famille de toutes les parties de $\mathbb{R}$ qui sont Lebesgue-mesurable est une tribu qui contient la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On la note $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Pour toute partie mesurable $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R})$, on note $\lambda(A)=\ell^*(A)$ et λ est une mesure sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ (mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R},\mathcal{L}(\mathbb{R}))$).

Exercice 45 *Montrer que $\ell^*(I)=\ell(I)$ pour tout intervalle réel I et que ℓ^* est une mesure extérieure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que :*

$$\ell^*(\emptyset)=0$$
$$A\subset B\Rightarrow\ell^*(A)\leq\ell^*(B)$$

et pour toute partie A de $\mathbb{R}$, toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}$, telles que $A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, on a :

$$\ell^*(A)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell^*(A_n)$$

Solution. Si I est un intervalle réel, il fait alors partie des recouvrements possibles de I par des intervalles et on a $\ell^*(I)\leq\ell(I)$.
Du fait de la sous-additivité de ℓ, on a $\ell(I)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n)$ pour tout recouvrement de I par des intervalles, donc $\ell(I)\leq\ell^*(I)$ et on a l'égalité $\ell^*(I)=\ell(I)$.
En particulier, on a $\ell^*(\emptyset)=\ell(\emptyset)=0$.
Supposons que $A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, où A et les A_n sont des parties de $\mathbb{R}$.
S'il existe un entier p tel que $\ell^*(A_p)=+\infty$, l'inégalité $\ell^*(A)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell^*(A_n)=+\infty$ est alors assurée.
En supposant que $\ell^*(A_n)<+\infty$, pour tout entier naturel n, étant donné un réel $\varepsilon>0$, on peut trouver pour chacun de ces entiers n, une suite d'intervalles $(I_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $A_n\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}}I_{n,k}$ et :

$$\ell^*(A_n)\leq\sum_{k\in\mathbb{N}}\ell(I_{n,k})<\ell^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

(définition de la borne inférieure), ce qui nous donne :

$$A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}I_{n,k}$$

et :

$$\begin{aligned}\ell^*(A)&\leq\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}\ell(I_{n,k})=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\ell(I_{n,k})\right)\\&\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\ell^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell^*(A_n)+\varepsilon\end{aligned}$$

Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $\ell^*(A)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell^*(A_n)$.

Exercice 46

1. *Montrer qu'une partie négligeable de $\mathbb{R}$ est mesurable de mesure nulle.*
2. *Montrer que toute partie d'un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}$ est négligeable et qu'une réunion dénombrable de parties négligeables est négligeable.*
3. *Montrer qu'une partie négligeable de $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide. La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est négligeable si, et seulement si, elle est contenue dans un borélien de mesure nulle.*

Solution.

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$ telle $\ell^*(A) = 0$.
   Comme ℓ^* est sous-additive, pour toute partie E de $\mathbb{R}$, on a :
   $$\begin{aligned}\ell^*(E) &= \ell^*((E \cap A) \cup (E \setminus A)) \\ &\leq \ell^*(E \cap A) + \ell^*(E \setminus A)\end{aligned}$$
   Puis avec :
   $$E \cap A \subset A \Rightarrow \ell^*(E \cap A) \leq \ell^*(A) = 0$$
   $$E \setminus A \subset E \Rightarrow \ell^*(E \setminus A) \leq \ell^*(E)$$
   on déduit que :
   $$\ell^*(E \cap A) + \ell^*(E \setminus A) \leq \ell^*(E)$$
   et l'égalité :
   $$\ell^*(E) = \ell^*(E \cap A) + \ell^*(E \setminus A)$$
   Donc A est mesurable et $\lambda(A) = 0$.
2. Si B est négligeable et $A \subset B$, on a alors $0 \leq \ell^*(A) \leq \ell^*(B) = 0$ et $\ell^*(A) = 0$, ce qui signifie que A est négligeable.
   Si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, où $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de négligeables, on a alors :
   $$0 \leq \ell^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell^*(A_n) = 0$$
   donc $\ell^*(A) = 0$ et A est négligeable.
3. C'est déjà vu avec l'exercice 30.
   Si A est mesurable d'intérieur $\mathcal{O}$ non vide, il existe alors $x \in \mathcal{O}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \mathcal{O}$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc :
   $$\lambda(A) \geq \lambda(\mathcal{O}) \geq \lambda(]x - \varepsilon, x + \varepsilon[) = 2\varepsilon > 0$$
   La réciproque est fausse.
   Par exemple $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ est d'intérieur vide ($\overset{\circ}{A} = [0,1] \setminus \overline{[0,1] \cap \mathbb{Q}} = \emptyset$) et $\lambda(A) = \lambda([0,1]) - \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 1$ (λ est une mesure).
4. Si A est contenu dans un borélien négligeable, il est lui même négligeable.
   Soit A négligeable. Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une suite $(I_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles telle que :
   $$A \subset B_m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{n,m} \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_{n,m}) < \frac{1}{m}$$
   L'ensemble :
   $$B = \bigcap_{m \geq 1} (B_1 \cap \cdots \cap B_m)$$

est un borélien qui contient A et on a :

$$\lambda(B) = \lim_{m \to +\infty} \lambda(B_1 \cap \cdots \cap B_m)$$

(suite décroissante de boréliens) avec :

$$0 \leq \lambda(B_1 \cap \cdots \cap B_m) \leq \lambda(B_m) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_{n,m}) < \frac{1}{m} \underset{m \to +\infty}{\to} 0$$

donc $\lambda(B) = 0$.

Exercice 47 *Montrer que, pour toutes parties A, B de $\mathbb{R}$, on a :*

$$\ell^*(A \cup B) + \ell^*(A \cap B) \leq \ell^*(A) + \ell^*(B)$$

Solution. Si $\ell^*(A) + \ell^*(B) = +\infty$, l'inégalité est alors vérifiée.
Supposons que $\ell^*(A) < +\infty$ et $\ell^*(B) < +\infty$.
Dans le cas où A et B sont mesurables (de mesure finie), on a :

$$\begin{aligned} \ell^*(A \cup B) = \lambda(A \cup B) &= \lambda((A \cap B) \cup (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)) \\ &= \lambda(A \cap B) + \lambda(A \setminus A \cap B) + \lambda(B \setminus A \cap B) \end{aligned}$$

avec :

$$\lambda(A \setminus A \cap B) = \lambda(A) - \lambda(A \cap B)$$

et :

$$\lambda(B \setminus A \cap B) = \lambda(B) - \lambda(A \cap B)$$

(exercice 16), ce qui nous donne :

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B)$$

Dans le cas général pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des suites d'intervalles $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $A \subset A' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, $A \subset B' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ et :

$$\ell^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) < \ell^*(A) + \varepsilon$$

$$\ell^*(B) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(J_n) < \ell^*(B) + \varepsilon$$

On a alors $A \cup B \subset A' \cup B'$ et $A \cap B \subset A' \cap B'$, les ensembles A' et B' étant mesurables (comme réunions de boréliens), donc :

$$\begin{aligned} \ell^*(A \cup B) + \ell^*(A \cap B) &\leq \ell^*\left(A' \cup B'\right) + \ell^*\left(A' \cap B'\right) = \lambda\left(A' \cup B'\right) + \lambda\left(A' \cap B'\right) \\ &\leq \lambda\left(A'\right) + \lambda\left(B'\right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(J_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(J_n) \\ &< \ell^*(A) + \ell^*(B) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

et faisant tendre ε vers 0, on a l'inégalité annoncée.

Exercice 48 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ contenu dans un mesurable B. Montrer que pour toute partie C de $\mathbb{R}$ telle que $B \cap C = \emptyset$, on a :*

$$\ell^* (A \cup C) = \ell^* (A) + \ell^* (C)$$

Solution. Comme $A \subset B$ avec B mesurable, la caractérisation de Carathéodory des mesurables nous donne :

$$\ell^* (A \cup C) = \ell^* ((A \cup C) \cap B) + \ell^* ((A \cup C) \setminus B)$$

avec :

$$(A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B) = A \cap B = A$$

et :

$$(A \cup C) \setminus B = (A \setminus B) \cup (C \setminus B) = \emptyset \cup C = C$$

donc :

$$\ell^* (A \cup C) = \ell^* (A) + \ell^* (C)$$

Exercice 49 *Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $d(A, B) > 0$. Montrer que :*

$$\ell^* (A \cup B) = \ell^* (A) + \ell^* (B)$$

Solution. Soit $\delta = d(A, B) = \inf\limits_{(x,y) \in A \times B} |x - y| > 0$. L'ouvert :

$$\mathcal{O} = \bigcup_{x \in A} \left] x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2} \right[$$

est disjoint de B et mesurable (un ouvert est réunion dénombrable d'intervalles deux à deux disjoints, donc mesurable), donc :

$$\ell^* (A \cup B) = \ell^* (A) + \ell^* (B)$$

De ce résultat, on déduit que la restriction de ℓ^* à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une mesure.

Exercice 50 *Soit B une partie négligeable de $\mathbb{R}$. Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{R}$ on a :*

$$\ell^* (A \cup B) = \ell^* (A) = \ell^* (A \setminus B)$$

Solution. On a :

$$\ell^* (A) \leq \ell^* (A \cup B) \leq \ell^* (A) + \ell^* (B) = \ell^* (A)$$

donc :

$$\ell^* (A \cup B) = \ell^* (A)$$

En écrivant que $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ avec $\ell^* (A \cap B) = 0$, on en déduit que :

$$\ell^* (A) = \ell^* (A \setminus B)$$

Exercice 51 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est mesurable ;*
2. *pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tel que $\ell^* (\mathcal{O} \setminus A) < \varepsilon$;*
3. *pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que $\ell^* (A \setminus \mathcal{F}) < \varepsilon$.*

Solution.

(1) $\Rightarrow$ (2) Soit A mesurable de mesure finie.
Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles telle que :

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ et } \lambda(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, l'intervalle I_n est borné et on peut trouver un intervalle ouvert $I_n(\varepsilon)$ tel que :

$$I_n \subset I_n(\varepsilon) \text{ et } \ell(I_n(\varepsilon)) = \ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$$

(pour I_n d'extrémités $\alpha < \beta$, on prend $I_n(\varepsilon) = \left]\alpha - \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}, \beta + \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}\right[$).
L'ensemble $\mathcal{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n(\varepsilon)$ est alors un ouvert qui contient A et on a :

$$\lambda(\mathcal{O}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n(\varepsilon)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda(A) + \varepsilon$$

Comme A est mesurable de mesure finie, on a pour toute partie B de $\mathbb{R}$ qui contient A :

$$\ell^*(B \setminus A) = \ell^*(B) - \lambda(A)$$

En effet, en utilisant la caractérisation de Carathéodory, on a :

$$\ell^*(B) = \ell^*(B \cap A) + \ell^*(B \setminus A)$$

et pour B contenant A, cela donne :

$$\ell^*(B) = \ell^*(A) + \ell^*(B \setminus A) = \lambda(A) + \ell^*(B \setminus A)$$

soit, puisque $\lambda(A)$ est fini :

$$\ell^*(B \setminus A) = \ell^*(B) - \lambda(A)$$

Pour $B = \mathcal{O}$, cela nous donne :

$$\ell^*(\mathcal{O} \setminus A) = \ell^*(\mathcal{O}) - \lambda(A) = \lambda(\mathcal{O}) - \lambda(A) < \varepsilon$$

Pour le cas général, on écrit que :

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$$

où :

$$A_n = A \cap [-n, n]$$

Chaque ensemble A_n étant mesurable de mesure finie, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}_n$ de $\mathbb{R}$ qui contient A_n tel que $\ell^*(\mathcal{O}_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. L'ouvert $\mathcal{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{O}_n$ contient alors A et :

$$\begin{aligned} \ell^*(\mathcal{O} \setminus A) &= \ell^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\mathcal{O}_n \setminus A)\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ell^*(\mathcal{O}_n \setminus A_n) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow$ (3) Si A est mesurable, il en est alors de même $\mathbb{R} \setminus A$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{R} \setminus A$ tel que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)) < \varepsilon$.
L'ensemble $\mathcal{F} = \mathbb{R} \setminus \mathcal{O}$ est alors un fermé contenu dans A avec :

$$\ell^*(A \setminus \mathcal{F}) = \ell^*(A \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathcal{O})) = \ell^*(\mathcal{O} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)) < \varepsilon$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Si (2) est vérifie, pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver un ouvert $\mathcal{O}_n$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tel que $\ell^* (\mathcal{O}_n \setminus A) < \dfrac{1}{n}$. L'ensemble $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{O}_n$ est alors un borélien qui contient A et on a :

$$\ell^* (B \setminus A) = \ell^* \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (\mathcal{O}_n \setminus A) \right) \leq \ell^* (\mathcal{O}_n \setminus A) < \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

ce qui nous donne $\ell^* (B \setminus A) = 0$. L'ensemble $B \setminus A$ est donc négligeable et en conséquence mesurable. Il en résulte que $A = B \setminus (B \setminus A)$ est mesurable.

(3) $\Rightarrow$ (1) Si (3) est vérifie, pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver un fermé $\mathcal{F}_n$ de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que $\ell^* (A \setminus \mathcal{F}_n) < \dfrac{1}{n}$. L'ensemble $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{F}_n$ est alors un borélien contenu dans A et on a :

$$\ell^* (A \setminus B) = \ell^* \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (A \setminus \mathcal{F}_n) \right) \leq \ell^* (A \setminus \mathcal{F}_n) < \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

ce qui nous donne $\ell^* (A \setminus B) = 0$. L'ensemble $A \setminus B$ est donc négligeable et en conséquence mesurable. Il en résulte que $A = B \cup (A \setminus B)$ est mesurable.

Exercice 52 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A est mesurable de mesure finie si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $\mathbb{R}$ contenu dans A et un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tels que $\ell^* (\mathcal{O} \setminus K) < \varepsilon$.*

Solution. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme A est mesurable, il existe un fermé $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que $\ell^* (A \setminus \mathcal{F}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
On notant, pour tout entier $n \geq 1$, $K_n = \mathcal{F} \cap [-n, n]$, on définit une suite croissante de compacts de $\mathbb{R}$ (les K_n sont fermés et bornés) telle que $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$ et :

$$\ell^* (\mathcal{F}) = \lambda (\mathcal{F}) = \lim_{n \to +\infty} \lambda (K_n)$$

Dans le cas où A est de mesure finie, $\lambda (\mathcal{F})$ est fini et il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\lambda (\mathcal{F}) - \frac{\varepsilon}{2} < \lambda (K_{n_0}) < \lambda (\mathcal{F}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc $K = K_{n_0}$ est un compact de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que :

$$\begin{aligned} \lambda (A \setminus K) &= \lambda (A) - \lambda (K) = (\lambda (A) - \lambda (\mathcal{F})) + (\lambda (\mathcal{F}) - \lambda (K)) \\ &= \lambda (A \setminus \mathcal{F}) + (\lambda (\mathcal{F}) - \lambda (K)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

En désignant par $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient A et tel que $\ell^* (\mathcal{O} \setminus A) < \varepsilon$, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \ell^* (\mathcal{O} \setminus K) &= \lambda (\mathcal{O} \setminus K) = \lambda ((\mathcal{O} \setminus A) \cup (A \setminus K)) \\ &= \lambda (\mathcal{O} \setminus A) + \lambda (A \setminus K) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

Réciproquement soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $\mathbb{R}$ contenu dans A et un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tels que $\ell^* (\mathcal{O} \setminus K) < \varepsilon$.
Dans ces conditions, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un compact K_n contenu dans A et un ouvert $\mathcal{O}_n$ qui

contient A tels que $\ell^*(\mathcal{O}_n \setminus K_n) < \dfrac{1}{n}$.
L'ensemble $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} K_n$ est alors un borélien contenu dans A et on a, pour tout entier $n \geq 1$:

$$A \setminus B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (A \setminus K_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (\mathcal{O}_n \setminus K_n) \subset \mathcal{O}_n \setminus K_n$$

donc :

$$\ell^*(A \setminus B) \leq \ell^*(\mathcal{O}_n \setminus K_n) < \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui nous donne $\ell^*(A \setminus B) = 0$. L'ensemble $A \setminus B$ est alors négligeable et en conséquence mesurable. Il en résulte que $A = B \cup (A \setminus B)$ est mesurable.
En écrivant que :

$$A = K_1 \cup (A \setminus K_1) \subset K_1 \cup (\mathcal{O}_1 \setminus K_1)$$

on déduit que :

$$\lambda(A) \leq \lambda(K_1) + \lambda(\mathcal{O}_1 \setminus K_1) < \lambda(K_1) + 1 < +\infty$$

(un compact est mesurable de mesure finie).

Exercice 53 ***Fonctions Riemann-intégrables.***
On se donne deux réels $a < b$ et une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in [a, b]$, l'oscillation de f en x est le réel :

$$\omega(x) = \inf_{\eta>0} \sup_{]x-\eta,x+\eta[\cap[a,b]} |f(y) - f(z)|$$

1. *Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est :*

$$C = \{x \in [a, b] \mid \omega(x) = 0\}$$

2. *Montrer que la fonction ω est semi-continue supérieurement.*
3. *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble :*

$$D_n = \left\{x \in [a, b] \mid \omega(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

   est un fermé et en déduire que l'ensemble D des points de discontinuité de f est mesurable.
4. *On se propose de montrer dans cette question, qu'une fonction Riemann-intégrable est continue presque partout.*
   On suppose que la fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.
   On se donne un réel $\varepsilon > 0$ et un entier $n \geq 1$.
   (a) *Justifier l'existence de deux fonctions en escaliers φ et ψ telles que $|f - \varphi| \leq \psi$ et $\displaystyle\int_a^b \psi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2n}$.*
   On se donne une subdivision $a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ de $[a, b]$ telle que $\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \varphi_k \mathbf{1}_{[a_k,a_{k+1}[}$ et $\psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \psi_k \mathbf{1}_{[a_k,a_{k+1}[}$ (la valeur de ces fonctions en b est sans importance).
   (b) *Montrer que :*

$$\forall x \in [a, b] \setminus \{a_0, a_1, \cdots, a_p\},\ \omega(x) < 2\psi(x)$$

(c) *En déduire que* $0 \leq \lambda(D_n) < \varepsilon$ *et conclure.*

5. *On se propose de montrer dans cette question, la réciproque du résultat précédent, à savoir qu'une fonction bornée* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *qui est continue presque partout est Riemann-intégrable. On suppose que l'ensemble* D *des points de discontinuité de la fonction bornée* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est négligeable et pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *on note :*

$$D_\varepsilon = \{x \in [a,b] \mid \omega(x) \geq \varepsilon\}$$

(a) *Montrer qu'il existe une suite finie* $(I_k)_{1\leq k\leq p}$ *d'intervalles ouverts telle que :*

$$D_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^{p} I_k \text{ et } \sum_{k=1}^{p} \ell(I_k) < \varepsilon$$

(b) *Montrer qu'il existe une suite* $(J_k)_{1\leq k\leq m}$ *d'intervalles ouverts telle que :*

$$K_\varepsilon = [a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k \subset \bigcup_{k=1}^{m} J_k$$

avec :

$$\forall k \in \{1, \cdots, m\}, \sup_{(y,z)\in J_k^2} |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

(c) *On ordonne les extrémités des intervalles de* $R_1 = (I_k)_{1\leq k\leq p}$ *et de* $R_2 = (J_k)_{1\leq k\leq m}$ *en une subdivision* $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq r}$ *de* $[a,b]$, *chaque intervalle ouvert* $]a_k, a_{k+1}[$ *étant dans au moins un des* I_j *ou un des* J_i.
On note E_1 *l'ensemble des indices* k *compris entre* 0 *et* $r-1$ *tels que* $]a_k, a_{k+1}[$ *est dans au moins un des* I_j *et* E_2 *le complémentaire de cet ensemble.*
On note M *la borne supérieure de* $|f|$ *sur* $[a,b]$ *et on définit les fonctions en escaliers* φ *et* ψ *par :*

$$\forall k \in E_1 \text{ et } \forall t \in]a_k, a_{k+1}[, \ \varphi(t) = 0, \ \psi(t) = M$$

$$\forall k \in E_2 \text{ et } \forall t \in]a_k, a_{k+1}[, \ \varphi(t) = f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right), \ \psi(t) = \varepsilon$$

(la définition de ces fonctions aux points de la subdivision σ *n'ayant pas d'importance).*
Montrer que $|f - \varphi| \leq \psi$ *et* $\int_a^b \psi(x)\,dx < (M + b - a)\varepsilon$. *Conclure.*

Solution. Pour tout $x \in [a,b]$ et tout réel $\eta > 0$, on note :

$$\mathcal{V}_{x,\eta} =]x - \eta, x + \eta[\cap [a,b]$$

Le diamètre de $f(\mathcal{V}_{x,\eta})$ est le réel :

$$\delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) = \sup_{y,z\in\mathcal{V}_{x,\eta}} |f(y) - f(z)|$$

Comme la fonction f est supposée bornée, il existe un réel $M > 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a,b]$, donc l'ensemble $\left\{|f(y) - f(z)| \mid (y,z) \in (\mathcal{V}_{x,\eta})^2\right\}$ est borné et le diamètre $\delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta}))$ est bien définie. Il en résulte que l'oscillation de f en $x \in [a,b]$:

$$\omega(x) = \inf_{\eta>0} \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta}))$$

est bien définie.

1. La fonction f est continue en $x \in [a,b]$ si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall t \in \mathcal{V}_{x,\eta},\ |f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
Il en résulte que pour tous y, z dans $\mathcal{V}_{x,\eta}$, on a $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$, donc $\delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) \leq \varepsilon$ et $0 \leq \omega(x) \leq \varepsilon$. Faisant tendre ε vers 0^+, on en déduit que $\omega(x) = 0$.
Réciproquement la condition $\omega(x) = 0$ signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$0 \leq \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) < \varepsilon$$
ce qui nous donne pour tout réel $t \in \mathcal{V}_{x,\eta}$:
$$|f(t) - f(x)| \leq \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) < \varepsilon$$
et cela signifie que f est continue en x.
2. On rappelle qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite est semi-continue supérieurement si, pour tout réel α l'ensemble :
$$\varphi^{-1}(]-\infty, \alpha[) = \{x \in [a,b] \mid \varphi(x) < \alpha\}$$
est un ouvert de $[a,b]$.
Pour $\alpha \leq 0$, l'ensemble $\omega^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ est vide, donc ouvert.
Pour $\alpha > 0$ et $x \in [a,b]$ tel que $\omega(x) < \alpha$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\omega(x) \leq \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) < \alpha$$
Pour tout réel $t \in \left]x - \frac{\eta}{2}, x + \frac{\eta}{2}\right[$, on a :
$$\left]t - \frac{\eta}{2}, t + \frac{\eta}{2}\right[\subset]x - \eta, x + \eta[$$
donc :
$$\mathcal{V}_{t,\frac{\eta}{2}} \subset \mathcal{V}_{x,\eta} \text{ et } \delta\left(f\left(\mathcal{V}_{t,\frac{\eta}{2}}\right)\right) \leq \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) < \alpha$$
ce qui nous donne $\omega(t) < \alpha$.
On a donc $\left]x - \frac{\eta}{2}, x + \frac{\eta}{2}\right[\cap [a,b] \subset \omega^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ et l'ensemble $\omega^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ est un ouvert.
3. De la semi-continuité supérieure de ω, on déduit que, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble :
$$D_n = \left\{x \in [a,b] \mid \omega(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$
est un fermé de $[a,b]$ et en particulier, il est mesurable. En écrivant que l'ensemble des points de discontinuité de f est :
$$D = [a,b] \setminus C = \{x \in [a,b] \mid \omega(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$$
on en déduit que D est mesurable.
4.
   (a) Comme f est Riemann-intégrable, il existe deux fonctions en escaliers φ et ψ telles que $|f - \varphi| \leq \psi$ et $\int_a^b \psi(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{2n}$.
   (b) Pour tout entier k compris entre 0 et $p-1$ et tout réel $x \in]a_k, a_{k+1}[$, on a :
$$|f(x) - \varphi_k| = |f(x) - \varphi(x)| \leq \psi(x) = \psi_k$$
donc pour $\eta > 0$ tel que $]x - \eta, x + \eta[\subset]a_k, a_{k+1}[$ et y, z dans $]x - \eta, x + \eta[$, on a $|f(y) - f(z)| < 2\psi_k = 2\psi(x)$, ce qui nous donne :
$$\omega(x) \leq \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) < 2\psi_k = 2\psi(x)$$
En conclusion, on a :
$$\forall x \in [a,b] \setminus \{a_0, a_1, \cdots, a_p\},\ \omega(x) < 2\psi(x)$$

(c) De la question précédente, on déduit que :

$$\begin{aligned} D_n &= \left\{ x \in [a,b] \mid \omega(x) \geq \frac{1}{n} \right\} \\ &\subset \left\{ x \in [a,b[\mid \psi(x) \geq \frac{1}{2n} \right\} \cup \{a_0, a_1, \cdots, a_p\} \end{aligned}$$

ce qui nous donne, en notant :

$$\Delta_n = \left\{ x \in [a,b[\mid \psi(x) \geq \frac{1}{2n} \right\}$$

$$\lambda(D_n) \leq \lambda(\Delta_n)$$

($\{a_0, a_1, \cdots, a_p\}$ est négligeable et les ensembles D_n et Δ_n sont mesurables).
Comme :

$$\Delta_n = \bigcup_{k \mid \psi_k \geq \frac{1}{2n}} [a_k, a_{k+1}[$$

on a :

$$\begin{aligned} \lambda(\Delta_n) &= \sum_{k \mid \psi_k \geq \frac{1}{2n}} (a_{k+1} - a_k) \leq 2n \sum_{k \mid \psi_k \geq \frac{1}{2n}} \psi_k (a_{k+1} - a_k) \\ &\leq 2n \sum_{k=0}^{p-1} \psi_k (a_{k+1} - a_k) = 2n \int_a^b \psi(x)\, dx < \varepsilon \end{aligned}$$

En définitive, on a $0 \leq \lambda(D_n) < \varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon > 0$, ce qui revient à dire que $\lambda(D_n) = 0$.
On a donc montré que tous les ensembles D_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, sont négligeables et en conséquence l'ensemble D des points de discontinuité de la fonction f est négligeable, ce qui revient à dire que f est continue presque partout.

5.

(a) L'ensemble :

$$D_\varepsilon = \{ x \in [a,b] \mid \omega(x) \geq \varepsilon \}$$

est un compact négligeable (ω est semi-continue supérieurement, donc D_ε est fermé et comme il est borné, il est compact ; D_ε étant contenu dans D est négligeable), donc on peut le recouvrir par une réunion d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est inférieure à ε et de ce recouvrement, on extrait un sous-recouvrement fini, ce qui signifie qu'il existe une suite $(I_k)_{1 \leq k \leq p}$ d'intervalles ouverts telle que :

$$D_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^{p} I_k \text{ et } \sum_{k=1}^{p} \ell(I_k) < \varepsilon$$

(b) L'ensemble :

$$K_\varepsilon = [a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k = [a,b] \cap \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k \right)$$

est fermé, borné, donc compact.
Pour tout $x \in K_\varepsilon$, on a $\omega(x) < \varepsilon$ (puisque $x \notin D_\varepsilon$), donc il existe un réel $\eta_x > 0$ tel que :

$$\omega(x) \leq \delta\left(f\left(\mathcal{V}_{x,\eta_x}\right)\right) = \sup_{(y,z) \in \left(\mathcal{V}_{x,\eta_x}\right)^2} |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

Du recouvrement ouvert du compact K_ε par la réunion des $]x - \eta_x, x + \eta_x[$, pour x décrivant K_ε, on extrait un sous recouvrement fini, ce qui signifie qu'il existe une suite $(J_k)_{1 \leq k \leq m} = (]x_k - \eta_{x_k}, x_k + \eta_{x_k}[)_{1 \leq k \leq m}$ d'intervalles ouverts telle que :

$$K_\varepsilon = [a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k \subset \bigcup_{k=1}^{m} J_k$$

avec :

$$\forall k \in \{1, \cdots, m\}, \quad \sup_{(y,z)\in J_k^2} |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

(c) Pour $k \in E_1$, $t \in \left]a_k, a_{k+1}\right[$, on a :

$$|f(t) - \varphi(t)| = |f(t)| \leq M = \psi(t)$$

et pour $k \in E_2$, $t \in \left]a_k, a_{k+1}\right[$, on a $t \in \bigcup_{k=1}^{m} J_k$, donc :

$$|f(t) - \varphi(t)| = \left| f(t) - f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) \right| \leq \varepsilon = \psi(t)$$

avec :

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(t)\,dt &= \sum_{k\in E_1} M(a_{k+1} - a_k) + \sum_{k\in E_2} \varepsilon(a_{k+1} - a_k) \\ &\leq M \sum_{k=1}^{p} \ell(I_k) + \varepsilon(b-a) \leq (M + b - a)\,\varepsilon \end{aligned}$$

La fonction f est donc Riemann-intégrable.

Exercice 54 *Montrer que la fonction* $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ *est Lebesgue-intégrable et non Riemann-intégrable sur* $[0,1]$.

Solution. Comme $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est dénombrable, il est négligeable et en conséquence mesurable de mesure nulle, donc $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est Lebesgue-intégrable d'intégrale nulle.
Comme f est discontinue en tout point de $[0,1]$ (si $a \in [0,1]$ est rationnel [resp. irrationnel], pour tout réel $\eta > 0$, on peut trouver un nombre irrationnel [resp. rationnel] x dans $\left]a-\eta, a+\eta\right[$ et on a $|f(x) - f(a)| = 1$, donc f est discontinue en a), elle n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 55 *Soient* I, *un intervalle réel d'intérieur non vide,* a *un point de* I *et* f, g *deux fonctions intégrables de* I *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer* $f = g$ *presque partout si, et seulement si,* $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt$ *pour tout* $x \in I$.

Solution. Avec la linéarité de l'intégrale, il revient au même de montrer que, pour toute fonction intégrable $f : I \to \mathbb{R}$, on a :

$$(f = 0 \; p.p.) \Leftrightarrow \left(\forall x \in I, \int_a^x f(t)\,dt = 0\right)$$

Si f est nulle presque partout, il en est alors de même de $|f|$, ce qui signifie que l'ensemble $A = |f|^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})$ est de mesure nulle.
Comme $|f|$ est mesurable, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de I telles que $|f| = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et en écrivant que $|f| = |f| \cdot \mathbf{1}_A$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_I |f|\,d\lambda = \int_I |f| \cdot \mathbf{1}_A d\lambda &= \int_I \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n\cap A}\right) d\lambda \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu(A_n \cap A) = 0 \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités $\displaystyle\int_a^x |f(t)|\,dt \leq \int_I |f|\,d\lambda$ pour $x \leq a$ et $\displaystyle\int_x^a |f(t)|\,dt \leq \int_I |f|\,d\lambda$ pour $x \geq a$, on en déduit que $\displaystyle\int_x^a |f(t)|\,dt = 0$ pour tout $x \in I$.
Enfin avec $\left|\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt\right| \leq \displaystyle\int_x^a |f(t)|\,dt$, on en déduit que $\displaystyle\int_x^a f(t)\,dt = 0$ pour tout $x \in I$.
Réciproquement, si $\displaystyle\int_x^a f(t)\,dt = 0$ pour tout $x \in I$, comme la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^a f(t)\,dt$ est dérivable de dérivée égale à f presque partout (théorème de différentiation de Lebesgue), on en déduit que $f = 0$ presque partout.

– VII – Théorèmes de changement de variables et de Fubini sur $\mathbb{R}^n$

Nous avons déjà rencontré le théorème de Fubini pour les fonctions continues sur un rectangle :
Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b] \times [c,d], \mathbb{C})$, où $a < b$ et $c < d$, on a :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$$

Ce théorème se prouvant de façon élémentaire (exercice 26).
Relativement à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, on a les théorèmes suivants.
Théorème de Fubini-Tonelli : Si $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^+$ est mesurable, alors toutes les intégrales considérées ci-dessous sont définies dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ et on a l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx\right) dy$$

Théorème de Fubini-Lebesgue : Une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{C}$ est intégrable si, et seulement si :

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dy\right) dx < +\infty$$

et dans ce cas, pour presque tout $y \in \mathbb{R}^q$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$, la fonction définie presque partout sur $\mathbb{R}^q$ par $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx$ est intégrable sur $\mathbb{R}^q$ et on a l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx\right) dy$$

(les rôles de x et y pouvant être inversés).
Pour ce qui est du changement de variables, on a le résultat suivant.
Théorème : Soient $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable, $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et J_φ son déterminant jacobien. La fonction f est intégrable sur $\mathcal{V}$ si, et seulement si, la fonction $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ est intégrable sur $\mathcal{U}$ et dans ce cas, on a :

$$\int_{\mathcal{V}} f(y)\,dy = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(x)) \cdot |J_\varphi(x)|\,dx$$

Exercice 56 *Soient deux réels $a < b$ et φ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le triangle :*

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq y \leq b\right\}$$

1. *Montrer que la fonction ψ définie sur le carré $C = [a, b]^2$ par :*

$$\forall (x, y) \in C,\ \psi(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) - \varphi(x, x) & si\ (x, y) \in T \\ 0 & si\ (x, y) \notin T \end{cases}$$

est continue sur C.

2. *Soit $k \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que :*

$$\forall z \in [a, b],\ \int_a^z \left(\int_a^y k(x)\, dx \right) dy = \int_a^z \left(\int_x^z k(x)\, dy \right) dx$$

3. *Déduire de ce qui précède que :*

$$\forall z \in [a, b],\ \int_a^z \left(\int_a^y \varphi(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^z \left(\int_x^z \varphi(x, y)\, dy \right) dx$$

et en particulier :

$$\int_a^b \left(\int_a^y \varphi(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_x^b \varphi(x, y)\, dy \right) dx$$

(théorème de Fubini sur un triangle).

Solution.

1. On désigne par :

$$\Delta = \{(x, x) \mid a \leq x \leq b\}$$

la diagonale du carré C.
La continuité de la fonction ψ sur $C \setminus \Delta$ ne pose pas de problème.
On se donne un point $(x_0, x_0) \in \Delta$.
La fonction φ étant continue en $(x_0, x_0) \in T$, pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$(x, y) \in T,\ |x - x_0| \leq \eta,\ |y - x_0| \leq \eta,\ \Rightarrow\ |\varphi(x, y) - \varphi(x_0, x_0)| < \varepsilon$$

Pour $(x, y) \in C$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$ et $|y - x_0| \leq \eta$, on a soit $(x, y) \notin T$ et dans ce cas $\psi(x, y) - \psi(x_0, x_0) = 0$, soit $(x, y) \in T$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned} |\psi(x, y) - \psi(x_0, x_0)| &= |\psi(x, y)| = |\varphi(x, y) - \varphi(x, x)| \\ &\leq |\varphi(x, y) - \varphi(x_0, x_0)| + |\varphi(x, x) - \varphi(x_0, x_0)| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

On a donc ainsi prouvé la continuité de ψ en (x_0, x_0).

2. On définit les fonctions α et β sur $[a, b]$ par :

$$\begin{cases} \alpha(z) = \displaystyle\int_a^z \left(\int_a^y k(x)\, dx \right) dy \\ \beta(z) = \displaystyle\int_a^z \left(\int_x^z k(x)\, dy \right) dx = \int_a^z (z - x) k(x)\, dx = z \int_a^z k(x)\, dx - \int_a^z x k(x)\, dx \end{cases}$$

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ avec :

$$\begin{cases} \alpha'(z) = \displaystyle\int_a^z k(x)\, dx \\ \beta'(z) = \displaystyle\int_a^z k(x)\, dx + z k(z) - z k(z) = \int_a^z k(x)\, dx \end{cases}$$

On a donc $\alpha' = \beta'$ avec $\alpha(a) = \beta(a) = 0$, ce qui équivaut à $\alpha = \beta$ sur $[a, b]$.

3. Le théorème de Fubini appliqué à la fonction continue ψ sur le rectangle $[a,b]\times[a,z]$ donne :

$$\forall z\in[a,b]\,,\ \int_a^z\left(\int_a^b\psi(x,y)\,dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_a^z\psi(x,y)\,dy\right)dx$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_a^z\left(\int_a^b\psi(x,y)\,dx\right)dy&=\int_a^z\left(\int_a^y\psi(x,y)\,dx\right)dy\\&=\int_a^z\left(\int_a^y\varphi(x,y)\,dx\right)dy-\int_a^z\left(\int_a^y\varphi(x,x)\,dx\right)dy\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\int_a^b\left(\int_a^z\psi(t,x)\,dx\right)dt=\int_a^z\left(\int_a^z\psi(t,x)\,dx\right)dt&=\int_a^z\left(\int_t^z\psi(t,x)\,dx\right)dt\\&=\int_a^z\left(\int_t^z\varphi(t,x)\,dx\right)dt-\int_a^z\left(\int_t^z\varphi(t,t)\,dx\right)dt\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité :

$$\int_a^z\left(\int_a^y\varphi(x,x)\,dx\right)dy=\int_a^z\left(\int_x^z\varphi(x,x)\,dy\right)dx$$

$(k(x)=\varphi(x,x))$, on déduit que :

$$\int_a^z\left(\int_a^y\varphi(x,y)\,dx\right)dy=\int_a^z\left(\int_x^z\varphi(x,y)\,dy\right)dx$$

Exercice 57 *Quelle est l'image de $\mathcal{U}=\left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ par l'application qui à (x,y) associe $(x+y,y)$? Montrer que cette application est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur son image. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathcal{U}}e^{-(x+y)^2}dx\,dy$.*

Solution. Notons

$$\mathcal{U}=\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}_+^\star \text{ et } \mathcal{V}=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}_+^\star\mid u>v\right\}$$

L'application $\varphi:(x,y)\mapsto(x+y,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$. Elle est injective ($(x+y,y)=(x'+y',y')$ impose $y=y'$ et $x=x'$) et surjective (tout $(u,v)\in\mathcal{V}$ s'écrit $(u,v)=(x+y,y)$ avec $y=v>0$ et $x=u-v>0$), c'est donc une bijection. Comme $\varphi^{-1}:(u,v)\mapsto(u-v,v)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$, cette application φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$.
On peut utiliser le théorème de changement de variables pour écrire que :

$$\begin{aligned}I&=\int_{\mathcal{U}}e^{-(x+y)^2}dx\,dy=\int_{\mathcal{V}}e^{-u^2}\left|J_{\varphi^{-1}}(u,v)\right|du\,dv=\int_{\mathcal{V}}e^{-u^2}du\,dv\\&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^u e^{-u^2}dv\right)du=\int_0^{+\infty}ue^{-u^2}du=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exercice 58 *Soient a et b deux réels tels que $-1<a<b$.*

1. *Montrer que la fonction la fonction $(x,y)\mapsto f(x,y)=y^x$ est intégrable sur le rectangle $[a,b]\times[0,1]$.*
2. *En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1\frac{y^b-y^a}{\ln(y)}\,dy$.*

Solution.

1. La fonction $f : (x, y) \mapsto y^x = e^{x\ln(y)}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+,*}$, donc mesurable, à valeurs strictement positives. Dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, on a :

$$\int_{[a,b]\times[0,1]} f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_0^1 y^x dy\right) dx = \int_a^b \left[\frac{y^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 dx$$
$$= \int_a^b \frac{dx}{x+1} = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right) \in \mathbb{R}^+$$

donc f est intégrable sur $[a, b] \times [0, 1]$ avec :

$$\int_{[a,b]\times[0,1]} f(x, y)\, dxdy = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

2. On a aussi :

$$\int_{[a,b]\times[0,1]} f(x, y)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_a^b e^{x\ln(y)} dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{e^{x\ln(y)}}{\ln(y)}\right]_a^b dy$$
$$= \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln(y)}\, dy$$

donc :

$$\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln(y)}\, dy = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

Exercice 59 *La fonction* $f : (x, y) \mapsto e^{-xy}\sin(x)\sin(y)$ *est-elle intégrable sur* $\mathcal{U} = \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ *?*

Solution. La fonction f est continue, donc mesurable sur $\mathbb{R}^2$.

On partitionne l'ouvert $\mathcal{U}$ sous la forme $\mathcal{U} = \bigcup_{k=1}^{4} R_k$, où :

$$R_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1 \text{ et } 0 < y \leq 1\right\}$$

$$R_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1 \text{ et } 0 < y \leq 1\right\}$$
$$R_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1 \text{ et } y > 1\right\}$$
$$R_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1 \text{ et } y > 1\right\}$$

Comme f est continue sur le compact $[0, 1]^2$, elle y est intégrable, donc f est intégrable sur $R_1 \subset [0, 1]^2$.

$$\int_1^1 \int_0^1 e^{-xy}\sin(x)\sin(y)\, dxdy$$

Pour tout $(x, y) \in R_2$, on a $|f(x, y)| \leq ye^{-xy}$ avec :

$$\int_{R_2} ye^{-xy} dxdy = \int_0^1 \left(\int_1^{+\infty} ye^{-xy} dx\right) dy = \int_1^{+\infty} \left[-e^{-xy}\right]_{x=1}^{x=+\infty} dy$$
$$= \int_1^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{1}{e}$$

donc f est intégrable sur R_2.
Comme x et y jouent des rôles symétrique, f est intégrable sur R_3.
Pour tout $(x, y) \in R_4$, on a $|f(x, y)| \leq e^{-xy}$ avec :

$$\int_{R_4} e^{-xy} dxdy = \int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} e^{-xy} dx\right) dy = \int_1^{+\infty} \left[-\frac{e^{-xy}}{y}\right]_{x=1}^{x=+\infty} dy$$
$$= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy < +\infty$$

donc f est intégrable sur R_4.
En conclusion, f est intégrable sur $\left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$.

Exercice 60 *Soit f la fonction définie sur $R =]0,1[^2$ par :*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1. *La fonction f est-elle intégrable sur R ?*
2. *Calculer une primitive de $\dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ sur $\mathbb{R}$.*
3. *Calculer, pour tout $y \in]0,1[$:*
$$\varphi(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$$
4. *Montrer que :*
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx$$

Solution.

1. La fonction f est continue sur R, donc mesurable sur R.
En désignant par C le quart de disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1 contenu dans C, on a :
$$\int_R |f(x,y)|\,dxdy \geq \int_C |f(x,y)|\,dxdy$$
et le passage en coordonnées polaires, nous donne :
$$\begin{aligned}\int_C |f(x,y)|\,dxdy &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos(\theta)-\sin(\theta)|}{r^2} drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(\theta)-\sin(\theta)|\,d\theta \int_0^1 \frac{dr}{r^2} = +\infty\end{aligned}$$
donc f n'est pas intégrable sur R.
2. Le changement de variable $t = \mathrm{sh}(x)$ nous donne :
$$\begin{aligned}F(t) &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\mathrm{ch}(x)\,dx}{\left(1+\mathrm{sh}^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2(x)} = \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \\ &= \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

3. Pour $y \in \left]0,1\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= \int_0^1 \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \left[-\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{x=0}^{x=1} - y \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{y^2} \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{y} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{y\sqrt{y^2+1}} \\
&= \frac{1}{y}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \\
&= \frac{1}{y}\frac{\sqrt{y^2+1}-1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \\
&= \frac{y}{\sqrt{y^2+1}\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}
\end{aligned}$$

cette fonction étant continue sur $[0,1]$.

4. Sans calculs, on peut remarquer que φ est de signe constant.
En effet, cette fonction est continue sur $[0,1]$ et on a :

$$(\varphi(y) = 0) \Leftrightarrow \left(\sqrt{y^2+1} = 1+y\right) \Leftrightarrow (y=0)$$

alors que $\varphi(0) = -1$.
On a donc $\varphi(y) < 0$ pour tout $y \in [0,1]$ et $I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = \int_0^1 \varphi(y)\,dy < 0$.
Comme $h(x,y) = -h(y,x)$, on a :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 h(x,y)\,dy\right) dx = -\int_0^1 \left(\int_0^1 h(y,x)\,dy\right) dx > 0$$

et :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx$$

Pour le calcul, on peut procéder comme suit.
On a :

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{y}\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)-1\right)\frac{dy}{\sqrt{y^2+1}}$$

Le changement de variable $y = \mathrm{sh}(t)$, $dy = \mathrm{ch}(t)\,dt = \sqrt{y^2+1}dt$ donne :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\mathrm{argsh}(1)} \left(\frac{\mathrm{ch}(t)-1}{\mathrm{sh}(t)} - 1\right) dt \\
&= \int_0^{\mathrm{argsh}(1)} \left(\frac{\mathrm{ch}^2(t)-1}{\mathrm{sh}(t)(\mathrm{ch}(t)+1)} - 1\right) dt \\
&= \int_0^{\mathrm{argsh}(1)} \left(\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)+1} - 1\right) dt \\
&= \left[\ln(\mathrm{ch}(t)+1) - t\right]_0^{\mathrm{argsh}(1)} = \ln(\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(1))+1) - \mathrm{argsh}(1) - \ln(2)
\end{aligned}$$

avec :

$$\mathrm{argsh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

et :

$$2\operatorname{ch}\left(\operatorname{argsh}\left(x\right)\right) = e^{\operatorname{argsh}(x)} + \frac{1}{e^{\operatorname{argsh}(x)}} = x + \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

donc :

$$\begin{aligned}\ln\left(\operatorname{ch}\left(\operatorname{argsh}\left(1\right)\right)+1\right) &= \ln\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)+1\right)\\ &= \ln\left(\sqrt{2}+1\right) = \operatorname{argsh}\left(1\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 h\left(x,y\right)dx\right)dy = -\ln\left(2\right)$$

Comme $h\left(x,y\right) = -h\left(y,x\right)$, on a :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 h\left(x,y\right)dy\right)dx = -\int_0^1 \left(\int_0^1 h\left(y,x\right)dy\right)dx = \ln\left(2\right)$$

En conclusion, le théorème de Fubini n'est pas utilisable, ce qui signifie que g n'est pas intégrable sur R.

Exercice 61 ***Fonction Béta.***

On désigne par $\mathcal{H}$ le demi plan complexe défini par :

$$\mathcal{H} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \Re\left(z\right) > 0\right\}$$

1. *Soient u, v deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{u-1}\left(1-t\right)^{v-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement si, $(u,v) \in \mathcal{H}^2$.*

   Définition : *la fonction béta (ou fonction de Bessel de seconde espèce) est la fonction définie sur $\mathcal{H}^2$ par :*

$$\forall\left(u,v\right)\in\mathcal{H}^2,\ B\left(u,v\right) = \int_0^1 t^{u-1}\left(1-t\right)^{v-1}dt$$

2. *Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :*

$$B\left(u,v\right) = B\left(v,u\right) \text{ et } B\left(u+1,v\right) = \frac{u}{u+v}B\left(u,v\right)$$

3. *Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} n^u B\left(u, v+n+1\right) = \Gamma\left(u\right)$$

4. *Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a $B\left(u,v\right) = \dfrac{\Gamma\left(u\right)\Gamma\left(v\right)}{\Gamma\left(u+v\right)}$.*

5. *Calculer $B\left(n+1,m+1\right)$, pour n, m entiers naturels.*

Solution.

1. On a $\left|t^{u-1}\left(1-t\right)^{v-1}\right| \underset{t\to0^+}{\backsim} t^{\Re(u)-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 t^{\Re(u)-1}dt < +\infty$ si, et seulement si, $\Re\left(u\right) > 0$. De manière analogue, on a $\left|t^{u-1}\left(1-t\right)^{v-1}\right| \underset{t\to1^-}{\backsim} \left(1-t\right)^{\Re(v)-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(1-t\right)^{\Re(v)-1}dt < +\infty$ si, et seulement si, $\Re\left(v\right) > 0$.

2. Le changement de variable $t = 1 - x$ nous donne :

$$B(u,v) = \int_0^1 (1-x)^{u-1} x^{v-1} dx = B(v,u)$$

La deuxième identité est équivalente à :

$$vB(u+1,v) = u(B(u,v) - B(u+1,v))$$

soit à :

$$v\int_0^1 t^u (1-t)^{v-1} dt = u\int_0^1 t^{u-1} (1-t)^v dt$$

Une intégration par parties nous donne, pour $[a,b] \subset]0,1[$:

$$v\int_a^b t^u (1-t)^{v-1} dt = \left[-t^u (1-t)^v\right]_a^b + u\int_a^b t^{u-1} (1-t)^v dt$$

et faisant tendre (a,b) vers $(0,1)$, on obtient le résultat annoncé.

3. Pour tout entier $n \geq 1$, le changement de variable $t = \dfrac{x}{n}$ nous donne :

$$B(u, v+n+1) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v+n} dt = \frac{1}{n^u}\int_0^n x^{u-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{v+n} dx$$

On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} x^{u-1}\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{v+n} & \text{si } x \in]0,n[\\ 0 \text{ si } x \geq n \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ avec :

$$\forall x \in]0,+\infty[\,, \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}x^{u-1} \\ \forall n \geq 1,\ |f_n(x)| \leq e^{-x}x^{\Re(u)-1} = f(x) \end{cases}$$

(on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^v = 1$ et, pour $x \in]0,n[\,$, $\left|\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^v\right| = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{\Re(v)} \leq 1$) la fonction f étant continue et intégrable sur $]0,+\infty[$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} n^u B(u,v+n+1) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n x^{u-1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{v+n} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{u-1}dx = \Gamma(u)$$

4. Pour u, v dans $\mathcal{H}$, en effectuant les changements de variables $t = x^2$ dans $\Gamma(u)$ et $t = y^2$ dans $\Gamma(v)$, puis en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(u)\Gamma(v) &= 4\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2u-1}dx\int_0^{+\infty} e^{-y^2}y^{2v-1}dy \\ &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}x^{2u-1}y^{2v-1}dxdy\end{aligned}$$

Le passage en coordonnées polaires nous donne :

$$\begin{aligned}\Gamma(u)\Gamma(v) &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}r^{2(u+v)-1}\cos^{2u-1}(\theta)\sin^{2v-1}(\theta)\,drd\theta \\ &= 2\Gamma(u+v)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2u-1}(\theta)\sin^{2v-1}(\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

puis en effectuant le changement de variable $t = \cos^2(\theta)$, on obtient :

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \Gamma(u+v)\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt = \Gamma(u+v)B(u,v)$$

La formule des compléments (question **VII.16**) nous assure que $\Gamma(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, ce qui nous donne :

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

On retrouve :

$$B(u+1,v) = \frac{\Gamma(u+1)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v+1)} = \frac{u\Gamma(u)\Gamma(v)}{(u+v)\Gamma(u+v)} = \frac{u}{u+v}B(u,v)$$

et :

$$\begin{aligned} B(u,v+n+1) &= \frac{\Gamma(u)\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(u+v+n+1)} \\ &= \Gamma(u)\frac{(v+n)(v+n-1)\cdots v\Gamma(v)}{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)\Gamma(u+v)} \end{aligned}$$

avec :

$$(v+n)(v+n-1)\cdots v\Gamma(v) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^v n!$$

et :

$$(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)\Gamma(u+v) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{u+v}n!$$

ce qui nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} n^u \frac{(v+n)(v+n-1)\cdots v\Gamma(v)}{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)\Gamma(u+v)} = 1$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^u B(u,v+n+1) = \Gamma(u)$.

On peut aussi montrer l'égalité $B(u,v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ à partir de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^u B(u,v+n+1) = \Gamma(u)$.

Pour ce faire, on écrit que :

$$B(u,v) = \frac{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)}{(v+n)(v+n-1)\cdots v}B(u,v+n+1)$$

avec :

$$\frac{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)}{(v+n)(v+n-1)\cdots v} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{u+v}n!}{\Gamma(u+v)}\frac{\Gamma(v)}{n^v n!} = \frac{n^u\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

et faisant tendre n vers l'infini, on a le résultat attendu.

5. Pour n, m entiers naturels, on a :

$$\begin{aligned} B(n+1,m+1) &= \int_0^1 t^n(1-t)^m\,dt = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+2)} = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} \\ &= \frac{1}{n+m+1}\frac{1}{\binom{n+m}{n}} \end{aligned}$$

Ce résultat pouvant aussi se démontrer directement par récurrence.

Exercice 62 *Pour tout intervalle réel I non réduit à un point, on désigne par $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.*
$I = \mathbb{R}^+$ ou $I = [0,X]$ pour un réel $X > 0$, E est l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et T est l'opérateur de Volterra (ou opérateur de primitivation) défini par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in I,\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Pour toutes fonctions f, g dans E, on définit le produit de convolution $f * g$ par :

$$\forall x \in I,\ f * g(x) = \int_0^x f(x-t)\,g(t)\,dt$$

1. *Montrer que :*
   (a) *la loi $*$ est une loi de composition interne sur E ;*
   (b) *cette loi est commutative ;*
   (c) *cette loi est associative ;*
   (d) *il n'existe pas d'élément neutre pour cette loi.*
2. *Montrer que pour toutes fonctions f, g dans E, on a :*
$$T(f * g) = T(f) * g = f * T(g)$$
et pour tout entier naturel n :
$$T^n(f * g) = T^n(f) * g = f * T^n(g)$$
3. *On suppose que f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Montrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec :*
$$(f * g)' = f(0)\, g + f' * g = g(0)\, f + f * g'$$
4. *On prend ici $I = [0, 1]$ et on se propose de montrer le cas particulier suivant du théorème de Titchmarsh : si f, g sont deux fonctions développables en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ où $R > 1$ telles que $f * g = 0$, on a alors $f = 0$ ou $g = 0$.*
   (a) *On suppose que f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ avec $f(0) \neq 0$. Montrer que si $f * g = 0$, on a alors $g^{(n)}(0) = 0$ et $f * g^{(n+1)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (b) *On suppose que f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ et $f * g = 0$. Montrer qu'on a $f' * g = 0$ et $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (c) *Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$. Montrer que si $f * g = 0$, on a alors $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (d) *Soient f, g deux fonctions développables en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ où $R > 1$. Montrer que si $f * g = 0$, on a alors $f = 0$ ou $g = 0$.*

Solution.

1.
   (a) Pour f, g dans E, la fonction :
$$x \in I \mapsto f * g(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt = x \int_0^1 f((1-\theta)x)\, g(\theta x)\, d\theta$$
   est continue (la fonction $(\theta, x) \mapsto f((1-\theta)x)\, g(\theta x)$ est continue sur $[0, 1] \times I$ et on intègre sur un segment),, donc $*$ est une loi de composition interne sur E.
   (b) Le changement de variable $y = x - t$ donne pour tout $x \in I$:
$$f * g(x) = \int_0^x f(y)\, g(x-y)\, dy = g * f(x)$$
   D'où la commutativité du produit de convolution.
   (c) Soient f, g, h dans E. Pour tout réel $z \in I$, on a :
$$\begin{aligned} f * (g * h)(z) &= \int_0^z f(z-x)\, g * h(x)\, dx = \int_0^z \left(\int_0^x f(z-x)\, g(x-t)\, h(t)\, dt \right) dx \\ &= \iint_{0 \leq t \leq x \leq z} f(z-x)\, g(x-t)\, h(t)\, dt dx \end{aligned}$$

et en utilisant le théorème de Fubini sur le triangle $T = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq x \leq z\right\}$, on aboutit à :

$$f * (g * h)(z) = \int_0^z \left(\int_t^z f(z-x) g(x-t)\, dx \right) h(t)\, dt$$

Le changement de variable $y = x - t$, à t fixé dans $[0, z]$ donne :

$$\begin{aligned} f * (g * h)(z) &= \int_0^z \left(\int_0^{z-t} f((z-t)-y) g(y)\, dy \right) h(t)\, dt \\ &= \int_0^z (f * g)(z-t) h(t)\, dt = (f * g) * h(z) \end{aligned}$$

Ce qui montre que le produit de convolution est associatif.

(d) Si $g \in E$ est un élément neutre pour la loi $*$, on a alors $f * g = f$ pour tout $f \in E$, donc $f(0) = f * g(0) = 0$, ce qui n'est pas vérifié par toutes les fonctions f de E.

2. Pour $f \in E$, $T(f)$ est la primitive de f nulle en 0.
On peut aussi remarquer que :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in I,\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt = (T * 1)(x)$$

Pour f, g dans E, du fait de l'associativité et de la commutativité du produit de convolution, on a :

$$T(f * g) = (f * g) * 1 = f * (g * 1) = f * T(g)$$

et :

$$T(f * g) = T(g * f) = T(g) * f = f * T(g)$$

On peut aussi le vérifier directement par le calcul en utilisant le théorème de Fubini sur un triangle :

$$\begin{aligned} T(f * g)(x) &= \int_0^x (f * g)(t)\, dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(t-y) g(y)\, dy \right) dt \\ &= \int_0^x \left(\int_y^x f(t-y)\, dt \right) g(y)\, dy = \int_0^x \left(\int_0^{x-y} f(u)\, du \right) g(y)\, dy \\ &= \int_0^x T(f)(x-y) g(y)\, dy = (T(f) * g)(x) \end{aligned}$$

Par récurrence, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T^n(f * g) = T^n(f) * g = f * T^n(g)$$

C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ et supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a :

$$T^{n+1}(f * g) = T(T^n(f * g)) = T(T^n(f) * g) = T^{n+1}(f) * g$$

Puis par commutativité du produit de convolution, on a la deuxième égalité.

3. On suppose d'abord que $f(0) = 0$. Dans cas, on a :

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\, dt = T(f')(x)$$

et :

$$f * g = T(f') * g = T(f' * g)$$

ce qui donne par dérivation (la fonction $T(f' * g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc aussi $f * g$) :

$$(f * g)' = \left(T(f' * g)\right)' = f' * g$$

Dans le cas général, en notant $h = f - f(0)$, on a :

$$\begin{aligned} (f * g)' &= ((h + f(0)) * g)' = (h * g)' + f(0)(1 * g)' \\ &= h' * g + f(0)(T(g))' = f' * g + f(0)\, g \end{aligned}$$

Puis par commutativité du produit de convolution, on a la deuxième égalité.
