agrégation de Mathématiques **Université Joseph Fourier**
Année 2013-2014

quelques exercices

1. (a) Soient $a_1, ..., a_n$ n points du plan. Peut-on trouver n points $b_1, ..., b_n$tels que a_i soit le milieu de $[b_i; b_{i+1}]$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et a_n celui de $[b_1; b_n]$?
   (b) Montrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes. En déduire que les hauteurs le sont aussi.

2. Soit $[a; b; c]$ un triangle, peut-on construire a',b' et c' tels que b' soit le milieu de $[a; c']$, c' celui de $[b; a']$ et a' celui de $[c; b']$?

3. Deux droites D et D' non parallèles sont tracées sur une feuille. Leur point d'intersection I se situe en dehors de la feuille. Pour un point M de la feuille, comment tracer la droite (IM) ?

4. Soit D et D' deux droites sécantes du plan et b un point du plan n'appartenant ni à D ni à D'. Construire un cercle tangent à D et à D' passant par b.

5. Soit $[a; b; c]$ un triangle. Construire des points m et n sur (bc), p sur (ab) et q sur (ac) tels que $[m; n; p; q]$ soit un carré.

6. Soient D et D' deux droites parallèles et a et b deux points du plan .
   (a) Peut-on construire un point m sur D et un point m' sur D' tels que $am = bm'$?
   (b) Peut-on construire un point m sur D et un point m' sur D' tels que les droites (am) et (bm') soient orthogonales ?

7. Soit $[a; b; c]$ un triangle et m_0 un point du segment $[a; b]$.
   La droite parallèle à (bc) qui contient m_0 coupe (ac) en m_1.
   La droite parallèle à (ab) qui contient m_1 coupe (bc) en m_2.
   La droite parallèle à (ac) qui contient m_2 coupe (ab) en m_3.
   La droite parallèle à (bc) qui contient m_3 coupe (ac) en m_4.
   La droite parallèle à (ab) qui contient m_0 coupe (bc) en m_5.
   La droite parallèle à (ac) qui contient m_5 coupe (ab) en m_6.
   Montrer que $m_0 = m_6$.

8. Soit $\mathcal{E}$ une ellipse et m_0 un point de $\mathcal{E}$. Soient D_1 , D_2 et D_3 trois droites du plan ayant trois directions différentes.
   La droite parallèle à D_1 qui contient m_0 coupe $\mathcal{E}$ en m_1.
   La droite parallèle à D_2 qui contient m_1 coupe $\mathcal{E}$ en m_2.
   La droite parallèle à D_3 qui contient m_2 coupe $\mathcal{E}$ en m_3.
   La droite parallèle à D_1 qui contient m_3 coupe $\mathcal{E}$ en m_4.
   La droite parallèle à D_2 qui contient m_4 coupe $\mathcal{E}$ en m_5.
   La droite parallèle à D_3 qui contient m_5 coupe $\mathcal{E}$ en m_6.
   Montrer que $m_0 = m_6$.

9. Soit $[a;b;c]$ un triangle. Montrer qu'il existe une ellipse tangente aux trois milieux de ses cotés.

10. Un sous-ensemble borné du plan peut-il avoir deux centres de symétrie distincts ?

11. Soit $[a;b;c]$ un triangle direct. On construit p,q,r tels que les triangles $[p;b;c]$, $[a;q;c]$, $[a;b;r]$ soient équilatéraux directs.
    (a) Montrer que $rc = qb = pa$.
    (b) Soit i le centre du triangle $[p;b;c]$, j celui de $[q;a;c]$ et k celui de $[a;b;r]$. Montrer que le triangle $[i;j;k]$ est équilatéral.

12. Soit $[a;b;c]$ un triangle équilatéral direct, m un point de $[b;c]$, e et f les points du plan tels que les triangles $[e;b;m]$ et $[f;m;c]$ soient équilatéraux indirects. Soient g, g_1 et g_2 les centres respectifs des triangles $[a;b;c]$, $[e;b;m]$ et $[f;m;c]$. Montrer que le triangle $[g;g_1;g_2]$ est équilatéral.