7

Généralités sur les fonctions numériques

Une fonction numérique est, de manière générale, une fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles.

7.1 Notions de base sur les fonctions

Si I, J sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$, on note J^I l'ensemble de toutes les fonctions définies sur I et à valeurs dans J. Les éléments de J^I sont plus simplement appelés fonctions de I dans J.

On notera :

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \rightarrow & J \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

ou $f : I \rightarrow J$ ou $f : x \mapsto f(x)$ une fonction de I dans J.

L'ensemble J^I est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative et unitaire en le munissant des opérations suivantes :

– pour f, g dans J^I, la somme $f + g$ est définie par :

$$\forall x \in I, \ (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

– pour f, g dans J^I, le produit $f \cdot g$ est définie par :

$$\forall x \in I, \ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

– pour f dans J^I et λ dans $\mathbb{R}$, le produit λf est définie par :

$$\forall x \in I, \ \lambda f(x) = \lambda f(x).$$

Pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^I$, on note $f(I)$ l'image de I. C'est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$y \in f(I) \Leftrightarrow \exists x \in I \mid y = f(x).$$

Si f est une fonction de I dans J et g une fonction définie sur J et à valeurs réelles, alors la composée $g \circ f$ est la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, \ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

On rappelle qu'une fonction f de I dans J est dite :

– injective si :
$$\forall (x, x') \in I^2, \ (f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'),$$
ou de manière équivalente si :
$$\forall (x, x') \in I^2, \ (x \neq x' \Leftrightarrow f(x) \neq f(x')),$$
– surjective de I sur J :
$$\forall y \in J, \ \exists x \in I \mid y = f(x),$$
ou de manière équivalente si $J = f(I)$,
– bijective de I sur J si elle est injective et surjective de I sur J, ce qui équivaut à dire que :
$$\forall y \in J, \ \exists! x \in I \mid y = f(x).$$
Dans ce cas la fonction réciproque de f est la fonction f^{-1} définie sur J et à valeurs dans I définie par :
$$\left(y \in J \text{ et } x = f^{-1}(y)\right) \ \Leftrightarrow \ (x \in I \text{ et } y = f(x)).$$

Dans le cas où I est un intervalle d'extrémités $-a$ et a avec $a > 0$, on dit que $f \in \mathbb{R}^I$ est paire [resp. impaire], si $f(-x) = f(x)$ [resp. $f(-x) = -f(x)$] pour tout $x \in I$.

Une fonction paire n'est jamais injective.

Exercice 7.1 *Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

Solution 7.1 *Supposons que $f = g + h$ avec g paire et h impaire. Avec :*
$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{array} \right.$$
pour tout réel x, on déduit que nécessairement g et h sont définies par $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ pour tout réel x, ce qui prouve l'unicité d'une telle décomposition. Et réciproquement, on vérifie que ces deux fonctions conviennent.

Les fonctions usuelles $\sqrt{\cdot}$, exp, ln, x^a, cos, sin, tan, $\cdots$ sont supposés connus. Elles seront définies plus loin.

7.2 Fonctions bornées

Définition 7.1 *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est majorée [resp. minorée] si l'ensemble $f(I)$ est majorée [resp. minorée] dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe un réel M [resp. m] tel que :*
$$\forall x \in I, \ f(x) \leq M \ \textit{[resp. } m \leq f(x)\textit{]}.$$

Définition 7.2 *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Du théorème de la borne supérieure, on déduit que si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction qui est majorée [resp. minorée], alors l'ensemble $f(I)$ admet une borne supérieure [resp. inférieure]. On note $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ [resp. $\inf\limits_{x\in I} f(x)$] cette borne supérieure [resp. inférieure]. On rappelle que la borne supérieure est le plus petit des majorants de $f(I)$, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) \leq \sup\limits_{x\in I} f(x) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in I \mid \sup\limits_{x\in I} f(x) - \varepsilon < f(x) \leq \sup\limits_{x\in I} f(x) \end{cases}$$

et que la borne inférieure est le plus grand des minorants de $f(I)$, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ \inf\limits_{x\in I} f(x) \leq f(x) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in I \mid \inf\limits_{x\in I} f(x) \leq f(x) < \inf\limits_{x\in I} f(x) + \varepsilon \end{cases}$$

7.3 Fonctions monotones

Définition 7.3 *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est croissante [resp. décroissante] si :*

$$\forall (x, x') \in I^2,\ (x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')\ \ \textit{[resp. } f(x) \geq f(x')\textit{]}).$$

On définit les notions de fonction strictement croissante ou strictement décroissante en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Définition 7.4 *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.*

Une fonction strictement monotone est une fonction strictement croissante ou strictement décroissante.

On résume avec le théorème suivant quelques résultats utiles relatifs aux opérations sur les fonctions monotones de même sens de variation.

Théorème 7.1 *Soient f, g deux fonctions croissantes [resp. décroissantes] de I dans $\mathbb{R}$.*

1. *La somme $f + g$ est croissante [resp. décroissante] ;*
2. *si f et g sont à valeurs positives, alors le produit $f \cdot g$ est croissant [resp. décroissant] ;*
3. *si f est à valeurs strictement positives, alors l'inverse $\dfrac{1}{f}$ est décroissante [resp. croissante].*

Démonstration. On suppose les fonctions f et g croissantes et on se donne x, x' dans I tels que $x \leq x'$.

1. Résulte de :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(x') + g(x') = (f+g)(x').$$

2. De $f(x) \leq f(x')$ et $g(x) \geq 0$, on déduit que $f(x)g(x) \leq f(x')g(x)$ et de $g(x) \leq g(x')$ et $f(x') \geq 0$, on déduit que $f(x')g(x) \leq f(x')g(x')$, ce qui donne $f(x)g(x) \leq f(x')g(x')$.
3. De $0 < f(x) \leq f(x')$, on déduit que $\dfrac{1}{f(x')} \leq \dfrac{1}{f(x)}$.

$\blacksquare$

Théorème 7.2 *Soient f une fonction monotone de I dans $\mathbb{R}$ et g une fonction monotone définie sur une partie J de $\mathbb{R}$ qui contient $f(I)$. La fonction $g \circ f$ est alors monotone sur I. Cette fonction est croissante si f et g sont de même sens de variation et décroissante sinon.*

Démonstration. Soient x, x' dans I tels que $x \leq x'$.
Si f et g sont croissantes, alors $f(x) \leq f(x')$ et $g(f(x)) \leq g(f(x'))$.
Si f et g sont décroissantes, alors $f(x) \geq f(x')$ et $g(f(x)) \leq g(f(x'))$.
Si f est croissante et g décroissante, alors $f(x) \leq f(x')$ et $g(f(x)) \geq g(f(x'))$.
Si f est décroissante et g croissante, alors $f(x) \geq f(x')$ et $g(f(x)) \geq g(f(x'))$. ■

Théorème 7.3 *Si f est une application strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$, elle réalise alors une bijection de I sur $f(I)$ d'inverse strictement monotone et de même sens de variation que f.*

Démonstration. En remplaçant éventuellement f par $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante. Si $x \neq y$ dans I on a $x < y$ ou $y < x$ (l'ordre de $\mathbb{R}$ est total) ce qui entraîne $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$, soit $f(x) \neq f(y)$ dans tous les cas. La fonction f est donc injective et elle réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Il est facile de vérifier que la fonction réciproque f^{-1} est également strictement croissante. ■

Le théorème de la borne supérieure nous permet de montrer le résultat suivant important dans l'étude des points fixes.

Exercice 7.2 *Montrer que toute fonction croissante f de $I = [a, b]$ dans I, admet au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un réel α dans I tel que $f(\alpha) = \alpha$.*

Solution 7.2 *L'ensemble :*

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq x\}$$

est non vide ($f(a) \in [a, b]$ entraîne $f(a) \geq a$) majoré par b, il admet donc une borne supérieure $\alpha \in [a, b]$.
Si $\alpha = a$ alors $f(x) < x$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a + \frac{1}{n_0} \leq b$ on a, du fait de la croissance de f sur I :

$$\forall n \geq n_0,\ a \leq f(a) \leq f\left(a + \frac{1}{n}\right) < a + \frac{1}{n}$$

qui par passage à la limite quand n tend vers l'infini donne $a = f(a)$.
Si $\alpha > a$, par définition de la borne supérieure, on peut trouver pour tout entier naturel non nul n un réel $x_n \in \left]\alpha - \frac{1}{n}, \alpha\right] \cap E$ et :

$$\forall n \geq 1,\ f(\alpha) \geq f(x_n) \geq x_n > \alpha - \frac{1}{n}$$

qui par passage à la limite quand n tend vers l'infini donne $f(\alpha) \geq \alpha$, c'est-à-dire que α est dans E.
Si $\alpha = b$ alors $\alpha \leq f(\alpha) \leq b = \alpha$ et $\alpha = f(\alpha)$.
Si $\alpha < b$, pour n assez grand on a $\alpha \leq f(\alpha) \leq f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) < \alpha + \frac{1}{n}$ qui par passage à la limite donne $\alpha = f(\alpha)$.
En définitive α est un point fixe de f dans I.

Remarque 7.1 *Le résultat de l'exercice précédent n'est plus valable pour f décroissante comme le montre l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $f(x) = 0$ si $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.*
Il n'est pas valable non plus sur un intervalle fermé non borné comme le montre l'exemple de $f(x) = x + 1$ sur $[0, +\infty[$.

Dans le cas d'une fonction décroissante on a le résultat suivant.

Exercice 7.3 *Montrer qu'une fonction décroissante f de $I = [a, b]$ dans I admet au plus un point fixe dans I.*

Solution 7.3 *Si $\alpha \leq \beta$ sont deux points fixes de f dans I, on a alors pour f décroissante :*

$$\alpha = f(\alpha) \geq f(\beta) = \beta,$$

et $\alpha = \beta$. La fonction f admet donc au plus un point fixe dans I.