Une construction de l'intégrale des fonctions réglées

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre seront définies sur un segment de **R** et à valeurs dans un espace vectoriel normé complet E, dont la norme sera notée $\| \ \|$.

1. Intégration des fonctions en escalier.

Définition 1 : Soit $[a,b]$ un segment de **R**. On appelle subdivision de $[a,b]$ toute suite finie strictement croissante de points de $[a,b]$, de premier terme a et de dernier terme b.

Une subdivision σ de $[a,b]$ sera notée $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$. Son pas est le réel $\sup (x_{i+1} - x_i)$.

Définition 2 : On appelle fonction en escalier sur $[a,b]$ toute fonction f définie sur $[a,b]$ pour laquelle il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$., dite adaptée à f, telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

Une telle subdivision adaptée n'est bien sûr pas unique. Toute subdivision "plus fine", c'est-à-dire comprenant les mêmes points plus d'autres, est encore adaptée à f.

Cette constatation permet de voir sans peine que les fonctions en escalier sur $[a,b]$ et à valeurs dans E constituent un espace vectoriel. Celui-ci sera noté $Esc([a,b],E)$.

Enfin, une fonction en escalier est bornée, puisqu'elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Théorème et définition : Soit f un élément de $Esc([a,b],E)$ et $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Posons $I(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f_i$, où f_i est la valeur constante prise par f sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Alors le vecteur $I(f,\sigma)$ est indépendant de la subdivision adaptée σ choisie. On l'appelle intégrale de f sur $[a,b]$, et on le note $\int_a^b f$.

L'indépendance de $I(f,\sigma)$ vis-à-vis de σ ne pose aucun problème théorique, juste des problèmes d'écriture.

Ceci étant posé, et l'intégrale d'une fonction en escalier se réduisant à une formule très simple dans laquelle ne figure qu'une somme finie, les résultats qui suivent sont parfaitement évidents :

Propriété 1 : Une fonction qui est nulle, sauf en un nombre fini de points, est en escalier et d'intégrale nulle.

Propriété 2 : Additivité par rapport aux intervalles.
Soit f en escalier sur $[a,b]$ et c un point de ce segment. Alors les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ (que nous noterons encore f pour des commodités d'écriture) sont encore en escalier et l'on a :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \ .$$

Propriété 3 : Linéarité par rapport aux fonctions.
Soient f et g deux éléments de $Esc([a,b],E)$ et x et y deux scalaires. Alors :

$$\int_a^b (xf + yg) = x\int_a^b f + y\int_a^b g \ .$$

Propriété 4 : Positivité de l'intégrale.
Soit f une fonction numérique positive et en escalier sur $[a,b]$. Alors $\int_a^b f \geq 0$.

Cette propriété, combinée avec la propriété de linéarité de l'intégrale, donne immédiatement :

> Propriété 5 : Croissance de l'intégrale.
> Si f et g sont toutes deux des fonctions numériques en escalier sur $[a,b]$, et si l'on a $f \leq g$, alors :
> $$\int_a^b f \leq \int_a^b g \ .$$

> Propriété 6 : Soit f en escalier sur $[a,b]$. Alors l'application définie sur $[a,b]$ par $t \mapsto \| f(t) \|$ est aussi en escalier et l'on a :
> $$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \| f \| \ .$$

2. Généralisation.

On cherche ici à généraliser la notion d'intégrale à une classe de fonctions un peu moins restreinte que la seule classe des fonctions en escalier, et ce de telle sorte que les six propriétés-clefs qui viennent d'être énoncées soient conservées.

Pour cela, une idée assez naturelle consiste à envisager les fonctions que l'on peut "approcher" par des fonctions en escalier. Puis, si c'est possible, on définira leur intégrale comme limite des intégrales des fonctions en escalier qui s'en rapprochent.

> Proposition : Soit $f : [a,b] \to E$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
> *i.* $\forall \varepsilon > 0$, il existe une fonction φ en escalier sur $[a,b]$ telle que $\| f - \varphi \|_\infty \leq \varepsilon$.
> *ii.* Il existe une suite (φ_n) de fonctions en escalier telle que $\| f - \varphi_n \|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

L'équivalence de ces deux propriétés est une évidence. Dans ce cours, nous conviendrons de qualifier de "réglée" une fonction vérifiant *i.* ou *ii.*.

Quelques évidences :

— Une fonction réglée est bornée.
— L'ensemble $R([a,b],E)$ des fonctions réglées sur $[a,b]$ à valeurs dans E est un espace vectoriel.

Nous allons maintenant donner un sens à l'intégrale d'une fonction réglée. Pour cela, fixons une telle fonction, que nous n'hésiterons pas (quelle audace !) à noter f. Soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier telles que $\| f - \varphi_n \|_\infty \xrightarrow[n\infty]{} 0$. Une telle suite sera dite associée à f. Il semble évidemment raisonnable de définir l'intégrale de f comme la limite des intégrales des fonctions φ_n. Pour cela, deux précautions s'imposent :

— La première, évidente, consiste à vérifier que la suite $(\int_a^b \varphi_n)$ est bien convergente.

— La seconde, qui saute moins aux yeux, consiste à justifier que la limite ainsi obtenue ne dépend que de f, mais pas de la suite (φ_n) associée à f choisie.

Prouvons donc ces deux résultats :

1^er^ point : Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $\| f - \varphi_n \|_\infty \leq \varepsilon$. Alors un petit coup d'inégalité triangulaire prouve sans douleur que, dès que p et q sont supérieurs à N, on a : $\| \varphi_p - \varphi_q \|_\infty \leq 2\varepsilon$.

Mais alors, grâce aux propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier, il vient :

$$\forall p,q \geq N \left\| \int_a^b \varphi_p - \int_a^b \varphi_q \right\| \leq \int_a^b \| \varphi_p - \varphi_q \| \leq \int_a^b \| \varphi_p - \varphi_q \|_\infty \leq 2\varepsilon(b-a) \ .$$

On vient très exactement de prouver que la suite des intégrales des fonctions φ_n est une suite de Cauchy. Voilà pourquoi on avait pris la précaution, dès la première ligne de ce cours, de supposer l'espace E complet ! La théorie de l'intégration ne se conçoit que pour les fonctions à valeurs dans un espace complet.

Cette suite est donc convergente, ce que l'on voulait démontrer.

2nd point : Soient (ϕ_n) et (μ_n) deux suites associées à une même fonction f. Grâce encore à l'inégalité triangulaire, on a : $\|\phi_n - \mu_n\|_\infty \le \|\phi_n - f\|_\infty + \|f - \mu_n\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0$.

D'où : $\left\| \int_a^b \phi_n - \int_a^b \mu_n \right\| \le \int_a^b \|\phi_n - \mu_n\| \le \int_a^b \|\phi_n - \mu_n\|_\infty = (b-a)\|\phi_n - \mu_n\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0$.

Ainsi, les deux suites des intégrales des ϕ_n et des μ_n, dont on a vu qu'elles étaient convergentes, ont même limite. C'est là encore ce que l'on désirait prouver.

Ceci étant fait, il est désormais parfaitement légitime de poser la définition suivante :

> Définition : Soit f une fonction réglée, et (ϕ_n) une suite associée de fonctions en escalier. On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le vecteur :
>
> $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_n \int_a^b \phi_n .$$

Bien entendu, si f est une fonction en escalier, on vérifie sans peine que cette nouvelle valeur de l'intégrale de f coïncide avec l'ancienne (il suffit de prendre $\phi_n = f$ pour tout n).

Ce qui est remarquable, c'est que cette définition de l'intégrale d'une fonction réglée va permettre de généraliser très rapidement les différentes propriétés vues au paragraphe **1.** pour les fonctions en escalier, grâce à un simple passage à la limite.

3. Propriétés élémentaires de l'intégrale des fonctions réglées.

> Propriété 2 bis : Soit f une fonction de $[a,b]$ dans E, et c un point de $[a,b]$. Alors f est réglée sur $[a,b]$ si et seulement si ses restrictions à $[a,c]$ et $[c,b]$ sont réglées, et dans ce cas, on a la relation dite de Chasles :
>
> $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$

dém : Si f est réglée, elle peut être approchée à ε près par une fonction en escalier ϕ. Alors la restriction de f à $[a,c]$ est approchée à ε près par la restriction de ϕ à $[a,c]$ qui est bien entendu en escalier.

Inversement, si f est approchée à ε près par ϕ_1 sur $[a,c]$ et par ϕ_2 sur $[c,b]$, construisons la fonction en escalier ϕ qui coïncide avec ϕ_1 sur $[a,c]$ et avec ϕ_2 sur $]c,b]$. Alors ϕ approche f à ε près et f est donc réglée.

La formule de Chasles proprement dite s'obtient alors par passage à la limite dans la formule analogue pour les fonctions en escalier.

> Propriété 3 bis : Soient f et g deux fonctions réglées sur $[a,b]$ à valeurs dans E, x et y deux scalaires. Alors $xf + yg$ est réglée et l'on a :
>
> $$\int_a^b (xf + yg)(t)\mathrm{d}t = x\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + y\int_a^b g(t)\mathrm{d}t .$$

dém : Si (ϕ_n) est une suite associée à f, et si (μ_n) est une suite associée à g, il est parfaitement clair que la suite $x\phi_n + y\mu_n$ est une suite associée à $xf + yg$. On passe alors à la limite dans la relation de linéarité pour les fonctions en escalier.

Propriété 4 bis : Soit f une fonction réglée sur $[a,b]$, à valeurs réelles. On suppose f positive sur $[a,b]$. Alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$.

dém : Soit $\varepsilon > 0$, et soit (ϕ_n) une suite associée à f. $\exists N$ tel que $\forall n \geq N, \| f - \phi_n \|_\infty \leq \varepsilon$. Alors, pour tout t de $[a,b]$ et tout n plus grand que N, on a : $\phi_n(t) \geq f(t) - \varepsilon \geq -\varepsilon$. D'où $\int_a^b \phi_n(t)\mathrm{d}t \geq -\varepsilon(b-a)$.

Faisons tendre n vers l'infini, il vient $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq -\varepsilon(b-a)$. Ceci étant vrai pour tout ε, on en déduit sans problème que l'intégrale de f est positive.

Combinée à la linéarité, cette propriété de positivité de l'intégrale donne immédiatement la propriété de croissance :

Propriété 5 bis : Si f et g sont toutes deux des fonctions numériques réglées sur $[a,b]$, et si l'on a $f \leq g$, alors : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Propriété 6 bis : Soit f une fonction réglée sur $[a,b]$. Alors l'application définie sur $[a,b]$ par $t \mapsto \| f(t) \|$ est aussi réglée et l'on a : $\left\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \| f(t) \| \mathrm{d}t$.

dém : Si (ϕ_n) est une suite associée à f, on vérifie sans difficulté que $(\|\phi_n\|)$ est une suite associée à $\|f\|$, puis on passe à la limite dans la propriété analogue pour les fonctions en escalier.

Corollaire : Soit f une fonction réglée sur $[a,b]$ vérifiant $\forall t \in [a,b], \| f(t) \| \leq k$ (k réel donné). Alors $\left\| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\| \leq k(b-a)$.

dém : il suffit d'utiliser tour à tour les propriétés 6 bis et 5 bis.

Nous avons ainsi dégagé les principales propriétés de l'intégrale des fonctions réglées. Reste un dernier obstacle à franchir : trouver une famille assez vaste, et suffisante dans la pratique, de fonctions qui soient réglées.

4. Une grande classe de fonctions réglées : les fonctions continues par morceaux.

Définition : Une fonction f de $[a,b]$ dans E est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue et possède une limite finie en x_i et x_{i+1}.

Nous allons prouver que les fonctions continues par morceaux sur un segment sont réglées. Il sera donc légitime de parler de leur intégrale.

Lemme : Toute fonction continue sur un segment est réglée.

dém : Soit $\varepsilon > 0$. Le théorème de Heine assure l'uniforme continuité d'une fonction f continue sur un segment de **R**. Il existe donc $\eta > 0$ tel que : $\forall x,y \in [a,b], |x-y| \leq \eta \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| \leq \varepsilon$. Fixons un entier N tel que $(b-a)/N$ soit inférieur à η, et découpons l'intervalle $[a,b]$ en N parties égales.

On posera $x_k = a + k(b-a)/N$. On construit alors une fonction en escalier ϕ de la façon suivante : sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$, ϕ est constante égale à $f(x_i)$, et $\phi(b) = f(b)$ (dessin !).

On vérifie alors trivialement que $\| f(x) - \phi(x)\| \leq \varepsilon$ pour tout x de $[a,b]$, c'est-à-dire que $\| f - \phi\|_\infty \leq \varepsilon$. On a approché f à ε près par une fonction en escalier, f est réglée.

<u>Corollaire fondamental</u> : Toute fonction continue par morceaux sur un segment est réglée.

démonstration abrégée : Sur chaque intervalle de continuité de f, on applique le lemme (pourquoi est-ce possible ?), ce qui permet sur chacun de ces intervalles d'approcher f à ε près par une fonction en escalier, puis on "recolle" ces fonctions en une fonction en escalier définie globalement sur $[a,b]$ et qui approche f à ε près.

Ce qui précède ne constitue qu'une présentation partielle de l'intégrale de Riemann, puisqu'il existe des fonctions Riemann-intégrables qui ne sont pas réglées (par exemple la fonction qui envoie 0 sur 0 et x élément de]0,1] sur $\sin(1/x)$ *). Mais la démarche qui précède est assez intuitive, c'est pourquoi je l'ai privilégiée.*

Il est possible de prouver que les fonctions réglées, telles qu'elles ont été définies ici, sont exactement les fonctions qui possèdent en tout point des limites à droite et à gauche. En particulier, une fonction numérique monotone est donc réglée, en vertu du "théorème de la limite monotone".