Notions sur les ensembles dénombrables

L'ambition de ce polycopié est des plus modestes : il s'agit, sans bien entendu remonter à la genèse de la théorie des ensembles (ni encore moins soulever de problème théorique, voire philosophique), de préciser quelques résultats de base sur la notion de cardinal d'un ensemble, et d'étudier plus particulièrement la notion d'ensemble dénombrable, c'est-à-dire, intuitivement, d'ensemble dont on peut "numéroter" les éléments.

1. Cardinal d'un ensemble

Première définition, et premier problème : c'est quoi un ensemble ? Ne comptez pas sur moi pour vous le dire ici, et contentez-vous de la notion intuitive d'ensemble que la sagesse populaire vous a léguée…

> Définition : Deux ensembles A et B sont dits équipotents s'il existe une bijection de A sur B.

On vérifie sans peine (compositions de bijections) que l'on définit ainsi une relation d'équivalence (il y a là un abus : une relation d'équivalence est censée être définie sur un ensemble. Or notre relation d'équipotence est définie sur "l'ensemble de tous les ensembles", et celui-ci n'est pas un ensemble ! Passons pudiquement…).

La classe d'équivalence d'un ensemble pour la relation d'équipotence sera dite cardinal de cet ensemble.

Notons qu'il est alors possible de donner la première définition rigoureuse d'un ensemble fini : c'est un ensemble qui n'est équipotent à aucun de ses sous-ensembles autres que lui-même. Le cardinal d'un tel ensemble sera dit fini. On peut alors prouver que la "collection" des cardinaux finis constitue un ensemble : celui-ci sera noté $\mathbf{N}$ et appelé ensemble des entiers naturels.

Dernier point : autant il est évident pour tout le monde qu'il existe des tas de cardinaux finis possibles (et même une infinité), autant dès que l'on passe aux ensembles infinis, les choses paraissent nettement moins claires : pourtant, c'est un fait, il existe une infinité d'infinis ! Plus précisément, on a le résultat suivant :

> Théorème (Cantor) : Soit E un ensemble. Alors il n'existe pas de bijection de E sur $\mathcal{P}(E)$, ensemble des parties de E.

Ainsi, si l'on prend un ensemble infini E quelconque, E n'est pas équipotent à $\mathcal{P}(E)$. Puisque E s'injecte trivialement dans $\mathcal{P}(E)$ par l'application $x \mapsto \{x\}$, c'est donc que l'infini de $\mathcal{P}(E)$ est "strictement plus grand" que celui de E.

Preuve : Par l'absurde. Soit f une bijection de E sur $\mathcal{P}(E)$. Construisons une partie de E en posant :

$$A = \{x \in E \ / \ x \notin f(x)\}.$$

Puisque f est une bijection de E sur $\mathcal{P}(E)$, A possède un antécédant par f : notons le x_0.

Alors, par définition même de la partie A, il vient

$$x_0 \notin A \Leftrightarrow x_0 \in f(x_0) \Leftrightarrow x_0 \in A \ !$$

On notera que ce résultat qui vient d'être prouvé a, entre autres, pour conséquence que l'ensemble de tous les ensembles n'est pas un ensemble. En effet, s'il en était un, il devrait avoir pour éléments toutes ses propres parties (puisque ce sont des ensembles), et son cardinal serait donc plus grand que celui de l'ensemble de ses parties…

Dans toute la suite de ce cours, les propriétés usuelles de l'ensemble **N** *et des ensembles finis seront supposées connues.*

2. La notion d'ensemble dénombrable

> Définition : Un ensemble X est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec une partie de **N** (ou, ce qui revient au même, s'il est équipotent à une partie de **N**).

À partir de cette définition, explorons un peu : soit X un ensemble quelconque.

1er cas : Supposons X fini. Posons alors $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors l'application ϕ, de $\{1, \ldots, n\}$ dans X, qui à i associe x_i est trivialement une bijection. Ainsi, avec la définition donnée, X est dénombrable.

Tout ensemble fini est dénombrable.

2ème cas : Supposons X non fini, et X dénombrable. X est donc en bijection avec une partie P de **N**, et P est infinie sinon X (qui est équipotent à P) serait fini.

Prouvons que P est en bijection avec **N**. Alors, par composition de bijections, X sera lui-même en bijection avec **N**. Pour cela, nous allons "numéroter" les éléments de P dans leur ordre naturel :

a. P est une partie non vide de **N**, il possède un plus petit élément $\phi(0)$.

b. $P - \{\phi(0)\}$ est une partie non vide de **N** (P est infini), donc possède un plus petit élément $\phi(1)$.

c. Supposons construits les entiers $\phi(0)$, $\phi(1)$, … , $\phi(n)$. Alors, puisque P est infini, l'ensemble $P - \{\phi(0), \phi(1), \ldots, \phi(n)\}$ est une partie non vide de **N**, donc possède un plus petit élément $\phi(n+1)$.

Je viens de construire ainsi une application ϕ de **N** dans P. Je dis que ϕ est bijective. En effet :

α. Par construction, ϕ est strictement croissante donc injective.

β. Prouvons que ϕ est surjective. Soit donc p un élément de P.

Puisque ϕ est une application strictement croissante de **N** dans **N**, ϕ tend évidemment vers l'infini à l'infini. D'autre part, p est un élément de P, donc p est plus grand que $\phi(0)$.

Il existe donc un entier k tel que $\phi(k) \le p < \phi(k+1)$. Mais p est un élément de P et par construction, $\phi(k+1)$ est le plus petit élément de P qui soit strictement plus grand que $\phi(k)$. Il en résulte que $p = \phi(k)$, et donc que ϕ est surjective.

Bilan : Un ensemble dénombrable est un ensemble qui est soit fini, soit en bijection avec **N**.

Exemple 1 : **Z** est dénombrable

C'est tout simple, il suffit pour cela de construire l'application ϕ suivante, qui est évidemment une bijection entre **Z** et **N** :

$$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, -2 \mapsto 4, \dots, n \mapsto 2n-1, -n \mapsto 2n, \dots$$

Exemple 2 : **N**^{2} est dénombrable

C'est plus délicat ; il suffit de disposer les éléments de **N**^{2} dans une "matrice infinie", l'intersection de la ligne i et de la colonne j représentant le couple (i,j), et de les numéroter en diagonale comme suit :

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**
0	0	2	5	9	14	
1	1	4	8	13		
2	3	7	12			
3	6	11	…			
4	10	16				
…	15					

Il est possible de donner une démonstration arithmétique plus directe de ce résultat : il est en effet bien connu, d'après le théorème de décomposition en produit de facteurs premiers, que tout entier n non nul s'écrit de manière unique comme le produit d'une puissance de 2 par un nombre impair, c'est-à-dire sous la forme $2^a(2b+1)$. L'application Π, de **N**^{2} dans **N***, qui au couple (a,b) associe l'entier $2^a(2b+1)$ est donc bijective, et par suite, **N**^{2} est dénombrable.

3. Critères de dénombrabilité

Il s'agit ici d'établir quelques résultats simples permettant de prouver en pratique qu'un ensemble donné est dénombrable.

Théorème 1 : Soit X un ensemble. S'il existe une injection de X dans **N**, alors X est dénombrable.

Preuve : Soit f une injection de X dans **N**. Alors l'application g de X dans $f(X)$, qui à un élément x de X associe $f(x)$, est évidemment bijective (on a rendu f surjective en restreignant son ensemble d'arrivée). On a ainsi construit une bijection de X sur une partie de **N**, X est dénombrable par définition.

Théorème 2 : Soit X un ensemble. S'il existe une surjection de **N** sur X, alors X est dénombrable.

Preuve : Soit ϕ une surjection de **N** sur X. Soit x un élément de X. ϕ étant surjective, l'ensemble des antécédents de x par ϕ est une partie non vide de **N**. Soit $a(x)$ son plus petit élément.

Construisons une partie de **N** en posant $P = \{a(x)\,;\, x \in X\}$. Alors l'application de P dans X qui à $a(x)$ associe x est évidemment une bijection ; on a mis X en bijection avec une partie de **N**, X est dénombrable.

(N.B. Qu'a-t-on fait ? Pour rendre ϕ injective, on a sélectionné un et un seul antécédent par ϕ de chaque élément x de X. Notant P l'ensemble de tous ces gens-là, il suffit de restreindre ϕ à P pour la rendre injective…).

Théorème 3 : Soit X un ensemble. Alors X est dénombrable si et seulement s'il existe une suite (X_n) de parties de X ayant les propriétés suivantes :

pour tout entier n, l'ensemble X_n est fini ;

la suite (X_n) est croissante au sens de l'inclusion ;

$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} X_n = X$.

Preuve : la démonstration qui suit peut être légèrement délicate à suivre, si l'on ne cherche pas à bien comprendre au fur et à mesure ce que l'on fait.

Sens direct : Si X est fini, il suffit de prendre $X_n = X$ pour tout n.

Si X est infini, il existe alors une bijection ϕ de **N** sur X. Posons évidemment $X_n = \{\phi(0), \phi(1), \dots, \phi(n)\}$. Il est alors clair, grâce notamment à la surjectivité de ϕ, que la suite (X_n) possède les propriétés voulues.

Sens retour : chaque ensemble X_n étant fini, il existe pour tout entier n une surjection ϕ_n de **N** sur X_n. Alors il est à peu près clair que l'application :

$$\begin{aligned}\phi : \quad & \mathbf{N}^2 \to X \\ & (n, p) \to \phi_n(p)\end{aligned}$$

est une surjection. $\mathbf{N}^2$ étant lui-même dénombrable, il y a une bijection de **N** sur $\mathbf{N}^2$. Celle-ci, composée à gauche avec une surjection, donne une surjection de **N** sur X. Le théorème 2 du paragraphe précédent permet alors d'affirmer que X est dénombrable.

4. Exemples d'ensembles dénombrables et non dénombrables

Le théorème 3 du paragraphe précédant doit être vu comme l'outil le plus commode pour prouver qu'un ensemble donné est dénombrable. Quelques exemples pour illustrer son efficacité :

Propriété 1 : **Q** est dénombrable.

Preuve : Posons $\mathbf{Q}_n = \left\{ \dfrac{p}{q} ; |p| \le n, |q| \le n+1, q \ne 0 \right\}$.

Il est totalement évident que les ensembles $\mathbf{Q}_n$ sont finis, que la suite ($\mathbf{Q}_n$) croît au sens de l'inclusion et que la réunion des $\mathbf{Q}_n$ est égale à **Q**. **Q** est donc dénombrable.

Propriété 2 : L'ensemble A des nombres complexes algébriques sur **Q** est dénombrable.

Preuve : rappelons que A est l'ensemble des nombres complexes qui sont racines d'un polynôme non nul à coefficients dans **Z**.

Soit $P = a_p X^p + \ldots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers de degré p. Posons $\nu(P) = p + \sum_{k=0}^{p} |a_k|$ (l'entier $\nu(P)$ s'appelle le poids du polynôme P).

Pour n entier naturel, notons A_n l'ensemble des racines complexes des polynômes de poids plus petit que n. Il est parfaitement clair que la suite (A_n) croît au sens de l'inclusion, et que la réunion des A_n est l'ensemble A. Reste à voir que chaque ensemble A_n est fini : il suffit pour cela de constater qu'il existe un nombre fini de polynômes de poids plus petit que n (un polynôme de poids plus petit que n a son degré majoré par n, et chacun de ses coefficients est un entier majoré par n en valeur absolue, ce qui ne lui laisse qu'un nombre fini de valeurs possibles), et que chacun de ces polynômes n'a qu'un nombre fini de racines.

Le théorème 3 s'applique donc et permet d'affirmer que A est dénombrable.

Propriété 3 : Tout produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Preuve : La démonstration de cette propriété est laissée à titre d'exercice : c'est une simple application du théorème 3 du paragraphe précédent.

Propriété 4 : Toute réunion d'ensembles dénombrables, indexée par un ensemble dénombrable, est un ensemble dénombrable.

Preuve : Posons $D = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} D_n$, chaque ensemble D_n étant supposé dénombrable. Il existe donc pour tout entier n une bijection ϕ_n de **N** sur D_n. Alors il est à peu près clair que l'application :

$$\phi : \quad \begin{array}{l} \mathbf{N}^2 \to D \\ (n, p) \to \phi_n(p) \end{array}$$

est une surjection. $\mathbf{N}^2$ étant lui-même dénombrable, le théorème 2 du paragraphe précédent permet d'affirmer que D est dénombrable.

Propriété 5 : **R** n'est pas dénombrable.

Preuve : Ceci a été démontré comme application des résultats concernant l'existence et l'unicité du développement décimal propre d'un nombre réel positif. Remarquons que ce résultat, combiné à la propriété 2 affirmant le caractère dénombrable de l'ensemble des réels algébriques, donne une démonstration de l'existence de nombres transcendants, même s'il ne donne aucun moyen d'en construire un effectivement…

Un dernier point : on connaît un autre exemple d'ensemble non dénombrable, c'est l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ des parties de **N** (Cf. théorème de Cantor au début de ce polycopié). Il est d'ailleurs possible de prouver que **R** et $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ sont équipotents. Quant au problème de savoir s'il existe des ensembles dont le cardinal est strictement compris entre celui de **N** et celui de **R** (ou de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$), c'est une question délicate qui a reçu une réponse pour le moins inattendue en 1960 grâce au logicien Paul Cohen : celui-ci a prouvé que ce résultat est *indécidable* ! Plus précisément, Cohen a prouvé que l'on n'aboutit à aucune contradiction en ajoutant ce résultat, ou son contraire, aux axiomes de la théorie des ensembles… mais là, on commence à voler dans de très hautes sphères !