– I – Polynômes d'interpolation de Fejér-Hermite

1. On désigne par $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie sur l'intervalle $I=[-1,1]$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in I,\ T_n(x)=\cos(n\arccos(x))$$

   (a) Déterminer T_0, T_1 et T_2.

   (b) Montrer que, pour tout entier $n\geq 1$, on peut exprimer T_{n+1} en fonction de T_n et T_{n-1}.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.

   (d) Déterminer, pour tout entier $n\geq 1$, les racines du polynôme T_n. On rangera ces racines dans l'ordre décroissant en les notant $x_1>x_2>\cdots>x_n$.

2. Soient f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et n un entier naturel non nul. On note $N=2n-1$ et on cherche un polynôme P_N de degré inférieur ou égal à N tel que :

$$P_N(x_i)=f(x_i),\ P_N'(x_i)=0\ \ (1\leq i\leq n)$$

   (a) Montrer que si ce polynôme existe, il est alors unique. En déduire l'existence de ce polynôme.

   On note, pour tout $n\geq 1$, tout $x\in I$:

$$\pi_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

   et pour tout entier i compris entre 1 et n :

$$L_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

   (b) Pour tout entier i compris entre 1 et n, exprimer $\pi_n'(x_i)$ en fonction de $\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)$.

   (c) Montrer que, pour tout $x\in I$, si l'on note pour i compris entre 1 et n :

$$F_i(x)=\left(1-\frac{\pi_n''(x_i)}{\pi_n'(x_i)}(x-x_i)\right)L_i^2(x)$$

   on a :

$$P_N(x)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)F_i(x)$$

   (d) Montrer que la famille $\mathcal{H}_n=\{L_i^2\mid 1\leq i\leq n\}\cup\{(x-x_i)L_i^2\mid 1\leq i\leq n\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

   (e) En utilisant la base $\mathcal{H}_n$, retrouver le résultat de **I.2.c.**

3. Montrer que, pour tout entier i compris entre 1 et n et tout $x\in I$, on a :

$$L_i(x)=\frac{(-1)^{i-1}\sqrt{1-x_i^2}}{n}\frac{T_n(x)}{x-x_i}$$

et :

$$F_i(x)=(1-x_ix)\left(\frac{T_n(x)}{n(x-x_i)}\right)^2$$

4. Montrer que, pour tout $x \in I$, on a :

$$|f(x) - P_N(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x) - f(x_i)| F_i(x)$$

5. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

   (a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tous x, x' dans I vérifiant $|x - x'| \leq \eta$, on ait $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$.

   (b) On note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$. Montrer que, pour tout $x \in I$, on a :

$$|f(x) - P_N(x)| \leq \varepsilon + \frac{4\|f\|_\infty}{n\eta^2}$$

   (c) En déduire que la suite de polynômes $(P_{2n-1})_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.

6. Plus généralement, pour n entier naturel non nul, on note $(x_{i,n})_{1 \leq i \leq n}$ une suite de n réels distincts de I. Montrer que la fonction f peut être approchée uniformément sur I par une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant :

$$P_n(x_{i,n}) = f(x_{i,n}) \ (1 \leq i \leq n)$$

Exemples de calculs de la norme d'une application linéaire continue

Exercice 1 *E et F sont des espaces vectoriels réels de dimensions respectives $n \geq 1$ et $m \geq 1$. Étant données une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E et une base $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de F, on munit ces espaces de la norme $\|\cdot\|_\infty$, soit :*

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E,\ \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

$$\forall y = \sum_{k=1}^{m} y_k e'_k \in F,\ \|y\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq m} |y_k|$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de matrice $A = ((a_{ij}))_{\substack{1 \leq im \\ 1 \leq j \leq n}}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Montrer que :

$$\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Les deux exercices qui suivent sont analogues au précédent, mais en dimension infinie.

Exercice 2 *L'espace $E = \ell^\infty$ des suites réelles bornées est normé par $x \mapsto \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. On se donne une suite $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ telle que la série $\sum \varphi_n$ soit absolument convergente et $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est définie par :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \varphi_n$$

Montrer que u est continue de $(E, \|f \cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec :

$$\|u\|_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n|$$

Exercice 3 *$E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est normé par $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. On se donne $\varphi \in E$ et $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est définie par :*

$$\forall f \in E,\ u(f) = \int_0^1 f(t)\, \varphi(t)\, dt$$

Montrer que u est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec :

$$\|u\|_\infty = \int_0^1 |\varphi(t)|\, dt$$

Exercice 4 *E et F sont des espaces vectoriels réels de dimensions respectives $n \geq 1$ et $m \geq 1$. Étant données une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E et une base $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de F, on munit ces espaces de la norme $\|\cdot\|_1$, soit :*

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E,\ \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\forall y = \sum_{k=1}^{m} y_k e'_k \in F,\ \|y\|_1 = \sum_{k=1}^{m} |y_k|$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de matrice $A = ((a_{ij}))_{\substack{1 \leq im \\ 1 \leq j \leq n}}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Montrer que :

$$\|u\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

L'exercice qui suit est analogue au précédent, mais en dimension infinie.

Exercice 5 *$E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ est normé par $f \mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$. On se donne $\varphi \in E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ est définie par :*

$$\forall f \in E,\ u(f) = \int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

Montrer que u est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, avec :

$$\|u\|_1 = \|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|$$

Exercice 6 *$(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et u^* son adjoint défini par :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u^*(y) \rangle$$

On désigne par $\mathrm{sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u et par $\rho(u) = \max_{\lambda\in\mathrm{sp}(u)} |\lambda|$ le rayon spectral de u.

1. *Montrer que si u est symétrique (i. e. $u^* = u$), on a alors :*

$$\|u\|_2 = \rho(u)$$

2. *Montrer que $\|u^*\|_2 = \|u\|_2$.*
3. *Montrer que :*

$$\|u\|_2 = \sqrt{\|u^* \circ u\|_2} = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$$

4. *Soient u et v deux endomorphismes symétriques. Montrer que :*

$$\rho(u \circ v) \leq \rho(u)\,\rho(v)$$

Exercice 7 *$(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien (de dimension finie ou non) et $\|\cdot\|_2$ est la norme associée.*

1. *Montrer que si u est continue, on a alors :*

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1} |\langle u(x) \mid y \rangle|$$

2. *On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u(y) \rangle$$

   Montrer que si u est continue et symétrique, on a alors :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_2 = 1} |\langle u(x) \mid x \rangle|$$

Exercice 8 *Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $\varphi \in E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par :*

$$\forall f \in E,\ u(f) = \int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

1. *En munissant* E *de la norme* $f \mapsto \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt}$, *montrer que* u *est continue de* $(E, \|\cdot\|_2)$ *dans* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, *avec :*
$$\|u\|_2 = \|\varphi\|_2$$
2. *On suppose que* φ *est à valeurs positives et on se donne un réel* $p > 1$.
En munissant E *de la norme* $f \mapsto \|f\|_p = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(t)|^p\,dt}$, *montrer que* u *est continue de* $\left(E, \|\cdot\|_p\right)$ *dans* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, *avec :*
$$\|u\|_p = \|\varphi\|_q$$
où $q > 1$ *est tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Exercice 9 *Soient* $I = [a, b]$ *un intervalle réel fermé borné avec* $a < b$ *et* $\mathcal{C}(I)$ *l'algèbre des fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{R}$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_\infty$.

1. *Pour tout entier naturel non nul* n, *on se donne une suite* $(x_{n,i})_{0 \leq i \leq n}$ *de réels deux à deux distincts dans* I *et une suite* $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$ *de fonctions dans* $\mathcal{C}(I)$. *Montrer que l'opérateur* u *définie sur* $\mathcal{C}(I)$ *par :*
$$\forall f \in \mathcal{C}(I),\ \forall x \in [a, b],\ u(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,\lambda_k(x)$$
est continue avec :
$$\|u\| = \sup_{x \in I} \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k(x)|.$$
2. *Pour tout fonction* f *appartenant à* $\mathcal{C}(I)$, *on note* $L_n(f)$ *le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par :*
$$\begin{cases} L_n(f) \in \mathbb{R}_n[x] \\ L_n(f)(x_{n,i}) = f(x_{n,i}) \ (0 \leq i \leq n) \end{cases}$$
   (a) *Montrer que :*
$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_{n,i})\,L_{n,i},$$
   avec :
$$L_{n,i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_{n,j}}{x_{n,i} - x_{n,j}} \ (0 \leq i \leq n).$$
   puis que l'opérateur linéaire L_n *est un continu de* $\mathcal{C}(I)$ *dans* $\mathbb{R}_n[x]$ *avec :*
$$\|L_n\| = \sup_{x \in I} \sum_{i=0}^{n} |L_{n,i}(x)|$$
   La suite $(\lambda_n)_{n \geq 1} = (\|L_n\|)_{n \geq 1}$ *est la suite des constantes de Lebesgue associées à la suite double* $(x_{n,i})_{0 \leq i \leq n < +\infty}$.

   (b) *On note* $E_n(f) = d(f, \mathbb{R}_n[x]) = \inf_{P \in \mathbb{R}_n[x]} \|f - P\|_\infty$ *le degré d'approximation uniforme par des polynômes de degré au plus* n *d'une fonction* $f \in \mathcal{C}(I)$. *Montrer que, pour toute fonction* f *dans* $\mathcal{C}(I)$, *on a :*
$$\forall n \geq 1,\ E_n(f) \leq \|f - L_n(f)\|_\infty \leq (1 + \lambda_n)\,E_n(f)$$

(c) *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} E_n(f) = 0.$

(d) *Montrer que si* f *est une fonction appartenant à* $\mathcal{C}(I)$ *telle* $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n E_n(f) = 0$, *alors la suite* $(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *des polynômes d'interpolation de Lagrange de* f *converge uniformément vers* f *sur* I.

(e) *Montrer que pour des points d'interpolation équidistants dans* I, *on a :*

$$\forall n \geq 1,\ \frac{2^n}{4n^2} \leq \lambda_n \leq 2^n.$$