Coniques

Dans tout ce problème, on se donne $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, un repère orthonormé direct du plan.

On rappelle que si D est une droite donnée, et M un point quelconque, la distance $d(M,D)$ de M à D est égale à la longueur du segment $[MH]$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.

1. Soient x,y deux réels tels que $x^2+y^2=1$. Montrer qu'il existe un unique réel θ dans $[0,2\pi[$ tel que $x=\cos(\theta)$ et $y=\sin(\theta)$ (on pourra se souvenir de la définition géométrique de sinus et cosinus).
2. Soit $\mathscr{C}=\{M(x;y)\mid (x-1)^2+(y-2)^2=4\}$. Donner une représentation graphique de l'ensemble $\mathscr{C}$. Montrer qu'un point $M(x;y)$ appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, il existe un unique réel θ dans $[0,2\pi[$ tel que $x=1+2\cos(\theta)$ et $y=2+2\sin(\theta)$.
3. Soit $\mathscr{E}=\left\{M(x;y)\mid \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\right\}$.

   (a) Montrer qu'un point $M(x;y)$ appartient à $\mathscr{E}$ si, et seulement si, il existe un unique réel $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $x=2\cos(\theta)$ et $y=\sin(\theta)$.

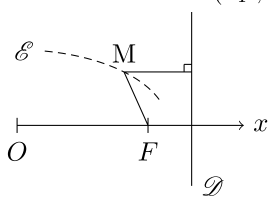
   (b) Montrer que pour tout point $M(x;y)$ dans $\mathscr{E}$, on a $-2\le x\le 2$ et $-1\le y\le 1$, et que, de plus, les points de coordonnées $(-x,y)$, $(x,-y)$ et $(-x,-y)$ appartiennent à $\mathscr{E}$. En déduire que $\mathscr{E}$ admet deux axes de symétrie (orthogonale) et un centre de symétrie.

   (c) Donner une représentation graphique de l'ensemble $\mathscr{E}$.

   (d) On va montrer qu'il existe un point F, une droite $\mathscr{D}$ et un nombre $e\in]0,1[$ tels que $\mathscr{E}$ soit l'ensemble des points M vérifiant l'équation (donnée par "foyer et directrice")

   $$\text{(F \& D)}\qquad MF=e\ d(M,\mathscr{D}).$$

   Alors, F est appelé un *foyer* de $\mathscr{E}$, $\mathscr{D}$ la *directrice* associée, et e est l'*excentricité* de $\mathscr{E}$. On cherchera F et $\mathscr{D}$ sous la forme $F(x_F;0)$ et $\mathscr{D}=\{M(x;y)\mid x=\delta\}$, pour des valeurs x_F, $\delta>0$ à déterminer.

   Anim. GeoGebra possible…

   i. On rappelle que, pour $M(x;y)$, on a $d(M,\mathscr{D})=|x-\delta|$. Montrer qu'un point $M(x;y)$ vérifie (F & D) si et seulement si il vérifie l'équation polynomiale

   $$\text{(P)}\qquad (1-e^2)x^2+2(\delta e^2-x_F)x+y^2=e^2\delta^2-x_F^2.$$

   ii. Déterminer des valeurs e, x_F et δ telles que $\mathscr{E}$ soit l'ensemble des points M vérifiant (F & D).

   Remarque : on constate que $\mathscr{E}$ est aussi représentée par l'équation

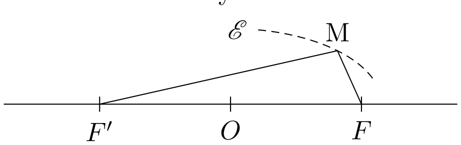
   $$\text{(F' \& D')}\qquad MF'=e\ d(M,\mathscr{D}'),$$

   pour $F'(-x_F;0)$ et $\mathscr{D}'=\{M(x;y)\mid x=-\delta\}$.

   (e) On va montrer ici que $\mathscr{E}$ est aussi la solution du "problème du jardinier", c'est-à-dire que

   $$\mathscr{E}=\{M\mid MF+MF'=4\},$$

   avec F et F' les foyers déterminés ci-dessus. La longueur de la "corde du jardinier" est ici 4.

   i. En remarquant l'inégalité $\delta>2$, montrer que, si M vérifie (F & D) et (F' & D'), alors $MF+MF'=2e\delta$. Noter que $2e\delta=4$.

   ii. Pour tout $M(x;y)$, calculer $MF^2-MF'^2$ (en fonction de x seul, la valeur de x_F étant connue). Lorsque M vérifie $MF+MF'=4$, en déduire une expression de $MF-MF'$, puis de MF, et en conclure que M vérifie (F & D).
4. Intermède : changement de repère. On considère deux vecteurs unitaires $\vec{I}$ et $\vec{J}$ faisant avec $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ un angle donné $(\vec{\imath},\vec{I})=(\vec{\jmath},\vec{J})=\theta$, où θ est un réel donné.

(a) Justifier le fait que $(O, \vec{I}, \vec{J})$ est un repère orthonormé. Une figure sera utile.

(b) Exprimer les vecteurs $\vec{I}, \vec{J}$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et du réel θ.

(c) Soit M un point du plan. En désignant par (x, y) les coordonnées de ce point dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et par (X, Y) celles dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, montrer que l'on a $x = X\cos(\theta) - Y\sin(\theta)$ et $y = X\sin(\theta) + Y\cos(\theta)$.

5. Soit $\mathscr{F} = \{M(x; y) \mid 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 6x - 4y - 2 = 0\}$.

(a) Si un point un point M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et (X, Y) dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ de la question précédente, calculer $x^2 + y^2$ et xy en fonction de X, Y et θ. En déduire une équation satisfaite par les coordonnées (X, Y) d'un point M de $\mathscr{F}$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

(b) Montrer qu'il est possible de trouver un réel θ de sorte que $\mathscr{F}$ admette dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ une équation de la forme

$$X^2 + 5Y^2 + c_1X + c_2Y + c_3 = 0,$$

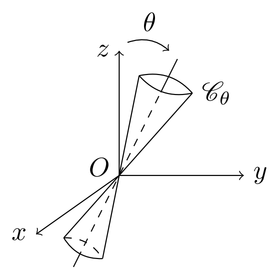
où c_1, c_2, c_3 sont des réels à déterminer.

(c) Déterminer a, b, α, β tels que $\mathscr{F}$ soit décrit par l'équation $\dfrac{(X-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(Y-\beta)^2}{b^2} = 1$.

(d) Donner une représentation graphique de l'ensemble $\mathscr{F}$ en faisant apparaître son centre de symétrie.

6. Dans l'espace à trois dimensions, muni d'un repère ortonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, l'équation $z^2 = x^2 + y^2$ définit un cône de sommet O : si $M(x; y; z)$ appartient à cet ensemble, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $M_\lambda(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$ aussi.
Ce cône admet l'axe (Oz) comme axe "de révolution", c'est-à-dire que le cône est inchangé si on le fait "tourner" autour de cet axe. Si on "penche" l'axe de révolution dans le plan (Oyz) d'un angle θ, le cône penché obtenu $\mathscr{C}_\theta$ a pour équation :

$$\cos(2\theta)z^2 + 2\sin(2\theta)yz = x^2 + \cos(2\theta)y^2.$$



Dans chacun des cas suivants, donner une équation décrivant l'intersection du cône $\mathscr{C}_\theta$ avec le plan horizontal d'équation $z = 1$, et donner une représentation graphique de cette intersection :

(a) $\theta = 0$; On voit ainsi qu'on a un cône à base circulaire.

(b) $\theta = \pi/8$;

(c) $\theta = \pi/4$;

(d) $\theta = \pi/2$. Visualiser $y^2 - x^2 = 1$ avec un logiciel ?

Remarque : Avec GeoGebra, on peut visualiser l'intersection du cône $\{z^2 = x^2 + y^2\}$ avec les plans $z = cx + 1$, c curseur variant de 0.1 en 0.1 entre -2 et 2 : on passe par les types ellipse (dont cercle), parabole ($y = x^2$) et hyperbole ($xy = 1$)...