Formes bilinéaires et quadratiques
– 0 – Prolégomènes[1]

Caractéristique d'un corps

Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un corps commutatif, alors l'application $\varphi : n \mapsto n \cdot 1_{\mathbb{K}}$, où $1_{\mathbb{K}}$ est l'élément neutre de $\mathbb{K}$ pour le produit, est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{K}$ et son noyau est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, il existe donc un unique entier naturel p tel que :

$$\ker(\varphi) = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}\} = p\mathbb{Z}$$

Cet entier p est la caractéristique de $\mathbb{K}$.

Comme $1 \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$, on a $p \neq 1$.

On a donc $p = 0$ ou $p \geq 2$ et dans ce cas $p = \inf \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \mid n \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}\}$.

Formes bilinéaires

Dans ce qui suit, E est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2.

On désigne par E^* l'espace dual de E, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Si E est de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E, on associe alors à tout vecteur $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E, le vecteur colonne $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $\mathbb{K}^n$.

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times E & \to & \mathbb{K} \\ & (x, y) & \mapsto & \varphi(x, y) \end{array}$$

telle que pour tout x dans E l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire et pour tout y dans E l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

On dit que φ est symétrique si $\varphi(y, x) = \varphi(x, y)$ pour tous x, y dans E.

On dit que φ est anti-symétrique (ou alternée) si $\varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$ pour tous x, y dans E.

On notera respectivement $Bil(E)$, $Bil_s(E)$ et $Bil_a(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires, bilinéaires symétriques et bilinéaires alternées sur E.

On vérifie facilement que $Bil(E)$ est un espace vectoriel et que $Bil_s(E)$ et $Bil_a(E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $Bil(E)$.

Si E est de dimension n et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E, alors la matrice d'une forme bilinéaire φ dans $\mathcal{B}$ est la matrice carrée d'ordre n :

$$A = ((\varphi(e_i, e_j)))_{1 \leq i,j \leq n}$$

et pour tous x, y dans E, on a :

$$\varphi(x, y) = {}^tXAY$$

La forme bilinéaire φ est symétrique [resp. alternée] si, et seulement si, A symétrique [resp. alternée].

Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors la matrice de φ dans $\mathcal{B}'$ est $A' = {}^tPAP$.

Le discriminant dans $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de φ est le déterminant de la matrice de φ dans cette base. On le note $\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a alors $\Delta_{\mathcal{B}'}(\varphi) = (\det(P))^2 \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Formes quadratiques

[1]Longue préface explicative en tête d'un livre. Exposé des principes dont la connaissance est nécessaire à l'étude d'une science.

Une forme quadratique sur E est une application q définie de E dans $\mathbb{K}$ par :

$$\forall x \in E,\ q(x) = \varphi(x, x)$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique.

L'ensemble $Q(E)$ des formes quadratiques sur E est un espace vectoriel et l'application qui associe à une forme quadratique q sa forme polaire φ réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels de $Q(E)$ sur l'espace $Bil_s(E)$ des formes bilinéaires symétriques sur E.

Dans le cas ou E est de dimension $n \geq 1$, le choix d'une base permet d'écrire une forme quadratique sous la forme :

$$q(x) = \varphi(x, x) = {}^t X A X = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Réciproquement une fonction q ainsi définie dans une base $\mathcal{B}$ de E est une forme quadratique de matrice $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ dans cette base.

Le choix d'une base de E permet donc de réaliser un isomorphisme d'espaces vectoriels de $Q(E)$ sur l'espace des polynômes homogènes de degré 2 à n variables.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit qu'un forme bilinéaire symétrique φ (ou de manière équivalente que la forme quadratique q) est positive [resp. négative] si $q(x) \geq 0$ [resp. $q(x) \leq 0$] pour tout x dans E.

On dit qu'une forme quadratique q sur E est définie si $q(x) \neq 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Orthogonalité, noyau et rang d'une forme quadratique

φ est une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée.

On dit que deux vecteurs x, y de E sont orthogonaux relativement à φ si $\varphi(x, y) = 0$.

Si X est une partie non vide E, l'orthogonal de X relativement à φ est le sous-ensemble de E formé des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de X. On le note $X^{\perp}$ et on a :

$$X^{\perp} = \{y \in E \mid \forall x \in X,\ \varphi(x, y) = 0\}.$$

Le noyau de q (ou de φ) est l'orthogonal de E. On le note $\ker(q)$ et on a :

$$\ker(q) = E^{\perp} = \{y \in E \mid \forall x \in E,\ \varphi(x, y) = 0\}$$

Ce noyau est un sous-espace vectoriel de E.

On dit que q (ou φ) est non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Si E est de dimension n, le rang de q (ou de φ) est l'entier :

$$\mathrm{rg}(q) = n - \dim(\ker(q)).$$

Dans le cas où E est de dimension n, on dit qu'une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale relativement à q (ou à φ, ou q-orthogonale), si $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour tous $i \neq j$ compris entre 1 et n.

– I – Généralités

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique p.
   (a) Montrer que p est soit nulle soit un nombre premier.
   (b) Dans le cas où $p = 0$, montrer que le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels s'injecte dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}$ est infini.
   (c) Dans le cas où $p \geq 2$ est un nombre premier, montrer que le corps fini $\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ s'injecte dans $\mathbb{K}$. En déduire qu'un corps fini est de cardinal p^n où p est un nombre premier égal à la caractéristique de $\mathbb{K}$.
2. Montrer que :
$$Bil\,(E) = Bil_s\,(E) \oplus Bil_a\,(E)$$
3. Montrer que si E est de dimension n, alors :
$$\dim_{\mathbb{K}}\,(Bil\,(E)) = n^2,\ \dim\,(Bil_s\,(E)) = \frac{n\,(n+1)}{2},\ \dim\,(Bil_a\,(E)) = \frac{n\,(n-1)}{2}$$
4. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F de E, la restriction d'une forme quadratique q à F est une forme quadratique sur F et que cette restriction est non dégénérée si, et seulement si, $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.
5. Si E est de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E, A la matrice de la forme quadratique q dans la base $\mathcal{B}$ et u l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$, montrer alors que :
$$\ker\,(q) = \ker\,(u)\,.$$
6. On suppose que E est de dimension $n \geq 1$, q est une forme quadratique sur E et F est un sous-espace vectoriel de E.
   (a) Montrer que :
$$\dim\,(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) \geq \dim\,(E)$$
   l'égalité étant réalisée pour q non dégénérée.
   (b) Montrer que $E = F \oplus F^{\perp}$ si, et seulement si, la restriction de q à F est non dégénérée.
7. Soient E, F deux espaces vectoriels, u une application linéaire de E dans F et φ une forme bilinéaire sur F.
   (a) Montrer que l'application ψ définie sur E^2 par :
$$\forall\,(x, y) \in E^2,\ \psi\,(x, y) = \varphi\,(u\,(x)\,, u\,(y))$$
   est bilinéaire.
   (b) En supposant E et F de dimension finie et en désignant par $\mathcal{B}_1$ une base de E, $\mathcal{B}_2$ une base de F, A la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et par B la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_2$, déterminer la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}_1$.
   (c) On suppose ici que E est de dimension $n \geq 1$ et que φ est une forme bilinéaire sur E. On appelle matrice de Gram d'une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E, la matrice :
$$G\,(x_1, \cdots, x_n) = ((\varphi\,(x_i, x_j)))_{1 \leq i,j \leq n}$$
   et le déterminant de cette matrice, noté $g\,(x_1, \cdots, x_n)$, est appelé déterminant de Gram de la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

i. En désignant par $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E, montrer que :

$$g(x_1, \cdots, x_n) = (\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n))^2 \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

ii. Montrer que pour tout endomorphisme u de E, on a :

$$g(u(x_1), \cdots, u(x_n)) = (\det(u))^2 g(x_1, \cdots, x_n)$$

8. Montrer que si q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, alors sa forme polaire φ est donnée par :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) y_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial y_i}(y) x_i$$

9. On suppose que E est de dimension $n \geq 1$. Montrer que pour toute base $(\ell_i)_{1 \leq i \leq n}$ de l'espace dual E^*, il existe une unique base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que :

$$\ell_i(f_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

(on dit que $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base anté-duale de $(\ell_i)_{1 \leq i \leq n}$).

10. Montrer que si q est une forme quadratique définie (dans le sens où $q(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$) sur un espace vectoriel réel E de dimension finie, elle est alors positive ou négative.
11. Montrer que si q est une forme quadratique positive sur un espace vectoriel réel E, on a alors pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{R}^n$:

$$|\varphi(x, y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)},$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz). En déduire que $\ker(q) = q^{-1}\{0\}$ (le noyau de q est égal à son cône isotrope).

– II – Réduction des formes quadratiques

E est de dimension $n \geq 1$, q est une forme quadratique non nulle sur E de forme polaire φ.

1. Montrer qu'il existe une base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E orthogonale pour q (théorème de réduction de Gauss).
2. Dans une telle base orthogonale, l'expression de q est :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

où $\lambda_i = q(f_i)$ et $y_i = \ell_i(x)$ pour i compris entre 1 et n, en désignant par $(\ell_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base duale de la base q-orthogonale $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$.
Comme q est non nulle, les λ_i ne sont pas tous nuls et on peut ordonner la base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de sorte les λ_i pour i compris entre 1 et p soient tous non nuls et les autres nuls.
Montrer que l'entier p ainsi défini est le rang de q et que pour $1 \leq p \leq n-1$, on a :

$$\begin{aligned} \ker(q) &= \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i \in E \mid y_1 = \cdots = y_p = 0 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\{e_{p+1}, \cdots, e_n\} \end{aligned}$$

(pour $p = n$, q est non dégénérée et $\ker(q) = \{0\}$).

3. Déduire de ce qui précède que pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice inversible P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.
4. Le théorème de réduction de Gauss peut aussi s'exprimer en disant que, pour q non nulle, il existe un entier p compris entre 1 et n, des scalaires non nuls $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ et des formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_p$ indépendantes dans l'espace dual E^* tels que :
$$\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x)$$
Rappeler comment l'algorithme de Gauss permet de déterminer de tels scalaires λ_i et de telles formes linéaires ℓ_i.
5. En gardant toujours les mêmes notations, en déduire que la forme polaire φ de q est définie par :
$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j(x) \ell_j(y).$$
6. Expliquer comment l'algorithme de Gauss permet de déterminer une base q-orthogonale.
7. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :
$$q(x) = x^2 + (1+a)y^2 + \left(1 + a + a^2\right) z^2 + 2xy - 2ayz$$
où a est un scalaire donné.
   (a) Donner la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Pour quelles valeurs de A la forme q est-elle non dégénérée ?
   (c) Réduire q et donner son rang en fonction de a.
   (d) Déterminer une base orthogonale pour q.
   (e) En déduire une matrice inversible P telle que $D = {}^tPAP$ soit diagonale.
8. On note $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on désigne par q la forme quadratique définie dans cette base par :
$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$
   (a) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer le noyau et le rang de q.
   (c) On suppose que $n = 2$.
      i. Effectuer la décomposition en carrés de Gauss de q.
      ii. En déduire une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^2$.
      iii. Écrire la matrice de q dans cette base.
   (d) On suppose que $n = 3$.
      i. Effectuer la décomposition en carrés de Gauss de q.
      ii. En déduire une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^2$.
      iii. Écrire la matrice de q dans cette base.
   (e) On suppose que $n \geq 4$ et on note $f_1 = e_1$.
      i. Déterminer l'orthogonal relativement à q de e_1. On notera H cet orthogonal.

ii. Pour tout j compris entre 2 et n, on note $f_j = e_1 + \cdots + e_{j-1} - je_j$.
Montrer que $(f_j)_{2 \leq j \leq n}$ est une base de H.

iii. Calculer Af_j pour tout j compris entre 2 et n.

iv. Montrer que $\mathcal{B}' = (f_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

v. Écrire la matrice de q dans la base $\mathcal{B}'$.

vi. En déduire une décomposition de q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

– III – Formes quadratiques réelles en dimension finie. Signature

q est une forme quadratique non nulle sur un espace vectoriel réel E de dimension $n \geq 1$ et on note φ sa forme polaire.

En désignant par $\mathcal{P}$ [resp. $\mathcal{N}$] l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels F de E tels que la restriction de q à F soit définie positive [resp. définie négative] ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{N}$ peut être vide), on définit la signature (s, t) de q par :

$$s = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{P} = \emptyset \\ \max\limits_{F \in \mathcal{P}} \dim(F) \text{ si } \mathcal{P} \neq \emptyset \end{cases}$$

et :

$$t = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{N} = \emptyset \\ \max\limits_{F \in \mathcal{N}} \dim(F) \text{ si } \mathcal{N} \neq \emptyset \end{cases}$$

1. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si la restriction de q à F est définie positive et la restriction de q à G est négative, alors $F \cap G = \{0\}$.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base q-orthogonale de E. Montrer que :
$$s = \operatorname{card}\{i \in \{1, \cdots, n\} \mid q(e_i) > 0\}$$
$$t = \operatorname{card}\{i \in \{1, \cdots, n\} \mid q(e_i) < 0\}$$
et que $s + t = \operatorname{rg}(q)$.
3. Montrer que si q est de signature (s, t), on a la décomposition :
$$q = \sum_{j=1}^{s} \ell_j^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} \ell_j^2$$
où les ℓ_i sont des formes linéaires indépendantes et il existe une base q-orthogonale de E dans laquelle la matrice de q est :
$$D = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(les blocs diagonaux I_s, $-I_t$ ou 0 n'existent pas si $s = 0$, $s = n$ ou $s + t = n$). Ce résultat est le théorème de Sylvester.
4. On désigne par $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de q dans une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E. Montrer que q est définie positive si, et seulement si, tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs (les mineurs principaux de A sont les déterminants des matrices extraites $A_k = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq k}$ où k est compris entre 1 et n).
5. Montrer que l'ensemble $Q^{++}(E)$ des formes quadratiques définies positives sur E est un ouvert de $Q(E)$.

– IV – La forme quadratique $\mathrm{Tr}\left(M^2\right)$ sur $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$

Soient $E = \mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels d'ordre $n \geq 2$ et q l'application définie sur E par :

$$\forall M \in E,\ q\left(M\right) = \mathrm{Tr}\left(M^2\right).$$

1. En notant $M = \left((x_{ij})\right)_{1\leq i,j\leq n}$ un élément de E, donner une expression de q.
2. Montrer que q est une forme quadratique sur E.
3. Donner une expression la forme polaire φ de q.
4. Effectuer une réduction de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes dans le dual E^*.
5. Déterminer le rang, le noyau et la signature de q.
6. Soient $E_1 = \left\{M \in E \mid {}^tM = M\right\}$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices symétriques et $E_2 = \left\{M \in E \mid {}^tM = -M\right\}$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices antisymétriques.
   (a) Donner la dimension de E_1 en précisant une base.
   (b) Que dire des termes diagonaux d'une matrice $M = \left((x_{ij})\right)_{1\leq i,j\leq n} \in E_2$?
   (c) Donner la dimension de E_2 en précisant une base.
   (d) Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
   (e) Montrer que $E_2 \subset E_1^{\perp}$, où $E_1^{\perp}$ désigne l'orthogonal de E_1 relativement à φ.
   (f) Déterminer $E_1^{\perp}$.
   (g) Montrer que la restriction de q à E_1 est définie positive et que la restriction de q à E_2 est définie négative.

– V – Formes quadratiques sur un corps fini

$\mathbb{K}$ est un corps fini (donc commutatif) de caractéristique $p \geq 3$, q une forme quadratique non nulle sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$ et on note φ sa forme polaire.

Le cardinal de $\mathbb{K}$ est p^r avec $r \geq 1$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est un carré s'il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda = \mu^2$.

1.
   (a) Déterminer le noyau du morphisme de groupes multiplicatifs :

$$f:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^* & \rightarrow & \mathbb{K}^* \\ t & \mapsto & t^2 \end{array}$$

   (b) Montrer qu'il y a dans $\mathbb{K}$, $\dfrac{p^r+1}{2}$ carrés et $\dfrac{p^r-1}{2}$ non carrés.
   (c) Soient a, b, c dans $\mathbb{K}$ avec a et b non nuls. Montrer que l'équation $a\lambda^2 + b\mu^2 = c$ aux inconnues λ, μ dans $\mathbb{K}$, a au moins une solution. En prenant $a = b = 1$ et c quelconque dans $\mathbb{K}$, on déduit que tout élément de $\mathbb{K}$ est somme de deux carrés.
2. Montrer que si q est de rang r, on a alors l'une des décompositions :

$$q = \sum_{j=1}^{r} \ell_j^2$$

si le discriminant de q dans une base de E est un carré, ou :

$$q = \sum_{j=1}^{r-1} \ell_j^2 + \delta \ell_r^2$$

dans le cas contraire, où les ℓ_i sont des formes linéaires indépendantes et δ est non carré dans $\mathbb{K}^*$ pour le deuxième cas. En déduire qu'il existe une base q-orthogonale de E dans laquelle la matrice de q est de l'une des formes suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} \text{ ou } D = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

avec δ non carré dans $\mathbb{K}^*$ (le blocs diagonaux I_{r-1} n'existe pas si $r = 1$).