CENTRALE PC 1

29/4/98

**Résumé**

Dans les parties 1 et 2 on étudie des fonctions f définies par une intégrale sur $R^+$ pour établir leur analycité en tout point . Puis après une étude de quelques propriétés de la transformée de Laplace en partie 3, on établit que pour f de la partie 1 , L(f) transformée de Laplace est définie sur $R^+$et que L(L(f))=f . On établit ensuite la formule des compléments pour la fonction Gamma et dans la partie 4 on applique les résultats au calcul de $\int_{R^+} \frac{u^{x-1}}{ue^{iy}+1} du$.

Remarque : en III)B)2) Une erreur de frappe claire avec le -1/n qu'il faut corriger en 1/n

## Première partie

# Etude de E

on notera $g : IxI \rightarrow C$ $(s,u) \rightarrow \frac{f(u)}{u+s}$ et $g_s : I \rightarrow C$ $g_s(u) = g(s,u)$ s dans I avec I=$R^+$

- A) Une combinaison linéaire de fonctions $R^+$integrables est $R^+$intégrable et une fonction h est $R^+$intégrable si et seulement $|h|$est $R^+$integrable .On en déduit que $\boxed{\text{E est un sous espace vectoriel de C}}$
  Avec f(x)=exp(x) . $g_s$ est continue sur [0,+$\infty$[ et $g_s(u)$ =o($\frac{1}{u^2}$) en $+\infty$ . On en déduit que f est dans $\boxed{E \neq \{0\}}$ .
- B)Soit f dans L (continue et I intégrable) . $g_s$est continue sur I et $|g_s(u)| \leq \frac{1}{s}|f(u)|$ donc $g_s$est I integrable . Soit Lest inclus dans E .
  En considérant f:$u \rightarrow \frac{1}{u+1}$ , f n'est pas dans L mais est dans E puisque $|g_s(u)| \leq \frac{1}{s}$ au voisinage de 0 et $|g_s(u)| \leq \frac{1}{u^2}$ en $+\infty$.
  $\boxed{\text{L est strictement inclus dans E}}$.
- C)Avec $f_\alpha(u) = u^{\alpha-1}$ , $g_s$ est continue sur I avec $g_s(u) \sim \frac{1}{s}u^{\alpha-1}$en 0 et $g_s(u) \sim u^{\alpha-2}$ en $+\infty$ . On en déduit que $g_s$ est I intégrable si et seulement si 1-$\alpha < 1$ et 2-$\alpha > 1$ soit $\alpha$ dans ]0,1[ .Conclusion $\boxed{f_\alpha \in E \Leftrightarrow \alpha \in ]0,1[}$

  Alors en utilisant le changement de variable u=st ($C^1$difféomorphisme de I)

$$\hat{}f(s) = \int_I \frac{u^{\alpha-1}}{u+s} du = s^{\alpha-1} \int_I \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = f(s)\,(\hat{}f(1))$$

## Deuxième partie

# Proprietés de ˆf avec f dans E:

- A)Soit a >0 .(u,s)$\in$ $[a,+\infty[xI \Rightarrow |g(s,u)| \leq |g_a(u)| = \frac{|f(u)|}{a+u} = \varphi(u)$. g est alors une fonction continue des deux variables (u,s) sur [a,+$\infty$[$xI$ majorée par $\varphi$ qui est continue sur I et I intégrable . ˆf est donc continue sur [a,+$\infty$[ pour tout a > 0 donc continue sur I (Théorème de convergence dominée appliqué aux intégrales à paramètres) . $\boxed{\hat{}f \text{ est continue sur I}}$

- B)1) Soit $(s_n)$ *une* suite de [1,+$\infty$[ de limite $+\infty$ .Pour tout u de I $g_{s_n}(u) = \frac{f(u)}{u+s_n} \to 0$ quand n$\to +\infty$ et $|g_{s_n}(u)| \leq \frac{|f(u)|}{u+1} = \varphi(u)$ . La suite de fonctions I integrables ($g_{s_n}$) converge simplement sur I vers la fonction nulle continue sur I et I integrable et est dominée par $\varphi$ continue et I intégrable . On en déduit que $lim_{n\to+\infty} \int_I g_{s_n} = 0$ . La caractérisation séquentielle des limites donne donc: $\boxed{lim_{s\to+\infty} \hat{} f(s) = 0.}$

- B)2)En travaillant comme en 1et en remarquant que $\left|\frac{f(u)}{\frac{u}{s}+1}\right| \leq |f(u)|$ on peut affirmer que s$\hat{}$f(s)=$\int_I \frac{f(u)}{\frac{u}{s}+1} du \to \int_I f(u)$ du quand n$\to +\infty$. Ceci permet d'obtenir l'équivalent : $\hat{} f(s) \sim_{+\infty} \frac{1}{s} \int_I f$ , quand l'intégrale n'est pas nulle .

- B)3)En supposant que pour tout k de N :u $\to u^k f(u)$ est I integrable on peut écrire : $\hat{} f(s) = \int_I \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{u^k}{s^{k+1}} f(u) + (-1)^n \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{1}{u+s} f(u) du$
  et par linéarité de l'intégrale u$\to \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{1}{u+s} f(u)$ est intégrable et
  $\hat{} f(s) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{s^{k+1}} \int_I u^k f(u) du + R_n(s)$ avec

  $|R_n(s)| = \left|\int_I \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{1}{u+s} f(u) du\right| \leq \frac{1}{s^{n+1}} \int_I |u^n f(u)|\, du = o\left(\frac{1}{s^n}\right) en\ +\infty$ .

  Conclusion sous l'hypothèse faite $\hat{}$f admet un développement limité à tout ordre en $+\infty$ . *La* foncti

- C) Avec a>0 et $|h| < a$ toutes les fonctions intervenant étant intégrables puisque :

$$\left|\frac{f(u)}{(u+a)^{p+1}}\right| \sim_{0^+} \frac{|f(u)|}{a^p\,(u+a)}\text{et } \left|\frac{f(u)}{(u+a)^{p+1}}\right| \leq \frac{|f(u)|}{(u+a)}\text{pour u} \geq 1$$

On peut écrire : $\hat{} f(a+h) = \int_I \frac{f(u)}{(u+a)\left(1+\frac{h}{u+a}\right)} du$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_I \frac{f(u)}{u+a} (-1)^k \left(\frac{h}{u+a}\right)^k du + \int_I (-1)^n \frac{f(u)}{u+a+h} \left(\frac{h}{u+a}\right)^n du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_I \frac{f(u)}{u+a} (-1)^k \left(\frac{h}{u+a}\right)^k du + R_n(h) \text{ avec} \\ |R_n(h)| &= \left|\int_I (-1)^n \frac{f(u)}{u+a+h} \left(\frac{h}{u+a}\right)^n du\right| \leq \left|\frac{h}{a}\right|^n \int_I \frac{|f(u)|}{u+a-|h|} du \to 0 \text{ quand } n \to +\infty. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion } \hat{} f(a+h) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\int_I \frac{f(u)}{(u+a)^{p+1}} du\right) h^p.}$ Ce qui démontre que $\hat{}$f est développable en série entière au voisinage de tout point a de I ( avec un rayon de convergence supérieur à a) et donc que $\boxed{\text{f est de classe } C^{+\infty} \text{ sur I .}}$
Remarque :On pourrait invoquer le corollaire du théorème de convergence monotone avec la série des $N_1(w_p)$. où $w_p = (-1)^p \left(\frac{f(u)}{(u+a)^{p+1}}\right) h^p$

# Troisième partie

# Expression de ˆf comme transformée de Laplace.

on notera $h : IxI \rightarrow C(x,u) \rightarrow e^{-xu}f(u)$ et $h_x : I \rightarrow C$ $h_x(u) = h(x,u)$ x dans I avec I=R$^+$

- A)1) x>0 $m_x$ :u→ $e^{-xu}(1+u)$ est une fonction continue sur [0,+∞[ de limite nulle en +∞ .Elle y est donc bornée ce qui justifie l'existence de M(x)=$\sup_{u>0}(m_x(u))$ .

  Avec 0<x<y $m_y(u) \leq$ m$_x(u)$ . D'ou $\boxed{0 < x < y \Rightarrow M(y) \leq M(x)}$.

- A)2)Pour f dans E , $|h_x(u)| = \left|e^{-xu}(1+u)\frac{f(u)}{1+u}\right| \leq M(x)\left|\frac{f(u)}{1+u}\right|$ , h$_x est$ donc continue sur I , majorée en module par une fonction I intégragle , elle est I intégrable . Conclusion f est dans F , soit $\boxed{\text{E est contenu dans F}}$

- A)3)a) Avec a> 0 , *et* f dans E ; h est continue en deux variables (x,u) sur [a,+∞[$xI$ et pour tout (x,u) de [a,+∞[$xI$ $|h(x,u)| \leq e^{-au}|f(u)| = |h_a(u)|$ avec h$_a$ qui est I intégrable .Le théorème de convergence dominée appliqué aux integrales à paramètres donne Lf est continue sur [a,+∞[ pour tout a>0 . Donc $\boxed{\text{Lf est continue sur I .}}$
  Avec $(x_n)$ une suite de [1,+∞[ tendant vers +∞ , La suite $(h_{x_n})$ de fonctions converge simplement vers 0 sur I et est dominée par :$|h_{x_n}(u)| \leq e^{-u}|f(u)| = |h_1(u)|$ qui est I intégrable . Le théorème de convergence dominée s'applique et donc $\lim_{n\rightarrow+\infty} Lf(x_n) = 0$ . $\boxed{\text{Par suite } \lim_{x\rightarrow+\infty} Lf(x) =}$

- A)3)b)Sous l'hypothése f est continue et I intégrable en travaillant comme précédemment avec une suite (x$_n$) de limite nulle dans ]0,1] on justifie que :

$$Lf(x) = \int_I e^{-xu}f(u)du \rightarrow_{x\rightarrow 0^+} \int_I f$$

  En considérant f$_{1/2}$ : $u \rightarrow \frac{1}{\sqrt{u}}$ qui est dans E , Lf$_{1/2}(x) = \int_I e^{-xu}\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_I e^{-xu}\frac{d(xu)}{\sqrt{xu}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int_I e^{-y}\frac{dy}{\sqrt{y}}\right) \rightarrow_{x\rightarrow 0^+} +\infty$ .

- B)1) Avec f dns E , h est continue des deux variables (x,u) sur I$x[1/n,n]$ *donc* par application du théorème des intégrales paramétrées sur un segment $g_n : x \rightarrow \int_{1/n}^n e^{-xu}f(u)du$ est continue sur I . h$_x$étant I intégrable et la suite I$_n$ = $[1/n,n]$ étant une suite croissante de segments d'union I,
  $\boxed{(g_n) \text{ est une suite de fonctions de limite simple Lf sur I}}$

- B)2) k, k(x,u)=h(x,s+u) est une fonction continue en deux variables (x,u) sur [a,b]x[1/n,n] .Le théoréme d'integration sur un segment des intégrales à paramètre sur un segment conduit donc à :

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{-sx}g_n(x)dx &= \int_a^b\left(\int_{1/n}^n e^{-sx-xu}f(u)du\right)dx = \int_a^b\left(\int_{1/n}^n h(x,s+u),du\right)dx \\
&= \int_a^b\left(\int_{1/n}^n k(x,u)du\right)dx = \int_{1/n}^n\left(\int_a^b k(x,u)dx\right)du \\
&= \int_{1/n}^n\left(\int_a^b e^{-sx-xu}f(u)dx\right)du = \int_{1/n}^n f(u)\left(\int_a^b e^{-x(s+u)}dx\right)du
\end{aligned}$$

D'ou on déduit que $\boxed{\int_a^b e^{-sx} g_n(x)dx = e^{-sa}\int_{1/n}^n e^{-au}\frac{f(u)}{u+s}du - e^{-sb}\int_{1/n}^n e^{-bu}\frac{f(u)}{u+s}du}$

Les fonctions u$\to e^{-au}\frac{f(u)}{u+s}$ et u$\to e^{-bu}\frac{f(u)}{u+s}$ sont I intégrables car majorées en module par $\left|\frac{f(u)}{u+s}\right|$ *et* f dans E , donc le membre de droite du résultat précédent admet la limite $e^{-sa}\int_I e^{-au}\frac{f(u)}{u+s}du - e^{-sb}\int_I e^{-bu}\frac{f(u)}{u+s}du$quand n tend vers $+\infty$.

La suite (x$\to$ $e^{-sx}g_n(x)$) converge simplement sur[a,b] vers (x$\to$ $e^{-sx}Lf(x)$) et est dominée par $e^{-sx}L\left|f\right|(x) = \varphi(x)$ avec $\varphi$ continue intégrable sur [a,b] (f dans E alors |f| est dans E) . Le théorème de convergence dominée s'applique et conduit donc au résultat:

$$\boxed{\int_a^b e^{-sx}Lf(x)dx = e^{-sa}\int_I e^{-au}\frac{f(u)}{u+s}du - e^{-sb}\int_I e^{-bu}\frac{f(u)}{u+s}du}$$

- B3) En utilisant une suite ($a_n$) de limite nulle et le théorème de convergence dominée , on justifie comme en III A)3)a) que $\int_I e^{-au}\frac{f(u)}{u+s} \to \int_I \frac{f(u)}{u+s}du = \hat{} f(s)$ quand a $\to 0$ , et , avec une suite ($b_n$) tendant vers +, que $\int_I e^{-bu}\frac{f(u)}{u+s}du \to 0$ quand b$\to +\infty$ . On en déduit que $\boxed{\int_a^b e^{-sx}Lf(x)dx \to \hat{} f(s) \text{ quand a} \to 0 \text{ et b} \to +\infty.}$

- B4)Avec x dans I $|e^{-sx}Lf(x)| \leq e^{-sx}L\left|f\right|(x)$ et la question 3 appliquée à $|f|$ prouve , puisque cette fonction est positive continue( III A ) , que x$\to$ $e^{-sx}L\left|f\right|(x)$ est I intégrable et par suite par le théorème de majoration que $x \to e^{-sx}$Lf(x) , qui est continue sur I , est I intégrable . Donc $\boxed{\text{f dans E Lf est dans F}}$ *et* le calcul du B)3) indique que : $\boxed{LLf(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}Lf(x)dx = \hat{}f(s).}$

- B)5)$\hat{}f_\alpha(1) = \int_I \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}du = \int_I e^{-1x}\left(\int_I e^{-xy}f_\alpha(y)dy\right)dx = \int_I e^{-x}\left(\int_I e^{-xy}y^{\alpha-1}dy\right)dx$
  en posant y=v/x , $\hat{}f_\alpha(1) = \int_I e^{-x}\left(\int_I e^{-v}v^{\alpha-1}x^{1-\alpha}dy\right)dx = \left(\int_I e^{-x}x^{1-\alpha}dx\right)\left(\int_I e^{-v}v^{\alpha-1}dy\right)$
  D'où $\boxed{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_I \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}du \text{ avec } \alpha \text{ dans ]0,1[ .}}$
  Remarque $\alpha$ et 1-$\alpha$ sont dans ]0,1[ donc d'après le IC et le IIIA2 , $\Gamma(\alpha)$ et $\Gamma(1-\alpha)$ sont bien définis.

## Quatrième partie

# Calcul de $\int_0^{+\infty}\frac{u^{\alpha-1}}{1+u}du.$

- A)$\psi : u \to \frac{u^{\alpha-1}}{1+ue^{i\lambda}}$ est continue sur I ( car $|\lambda| < \pi$ , avec : en 0 $|\psi(u)| \sim u^{\alpha-1}$ et en $+\infty$ $|\psi(u)| \sim u^{\alpha-2}$. Donc par comparaison aux intégrales de Rieman $\psi$ est I intégrable

- B)$\left|ue^{i\lambda}+1\right|^2 = u^2+2u\cos(\lambda)+1 \geq u^2+2u\cos(\lambda_o)+1 = \left|ue^{i\lambda_o}+1\right|^2$ avec $|\lambda| \leq \lambda_o < \pi$. Donc : $\omega : (\lambda, u) \to \frac{u^{\alpha-1}}{1+ue^{i\lambda}}$ est de classe $C^1$*sur* [-$\lambda_o, \lambda_o] * I$ , avec $|\omega(\lambda,u)| \leq |\omega(\lambda_o,u)|$ fonction de U I integrable *et* $\left|\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}(\lambda,u)\right| = \left|ie^{i\lambda}u\frac{u^{\alpha-1}}{\left(1+ue^{i\lambda}\right)^2}\right| \leq \frac{u^\alpha}{\left|ue^{i\lambda_o}+1\right|^2}$ fonction de u I integrable . Le corollaire du théorème de convergence dominée appliquée à la derivation des intégrales à paramètre s'applique et autorise le calcul sur tout [-$\lambda_o, \lambda_o$] , donc sur ]-$\pi, \pi$[:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial\lambda}(\alpha,\lambda) &= i\alpha e^{i\alpha}\int_I \frac{u^{\alpha-1}}{1+ue^{i\lambda}}du - e^{i\alpha}\int_I ie^{i\lambda}u\frac{u^{\alpha-1}}{(1+ue^{i\lambda})^2}du \\ &= ie^{i\alpha}\left\{\left[\frac{u^\alpha}{1+ue^{i\lambda}}\right]_0^{+\infty} + \int_I \frac{u^\alpha e^{i\lambda}}{(1+ue^{i\lambda})^2}\right\} - e^{i\alpha}\int_I ie^{i\lambda}u\frac{u^{\alpha-1}}{(1+ue^{i\lambda})^2}du = 0\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La fonction } \lambda \to \gamma(\alpha,\lambda) \text{ est donc constante]-}\pi,\pi\text{[}}$

- C)1)On peut donc écrire:

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha,\lambda)\sin(\lambda\alpha) &= \frac{1}{2i}\left(\gamma(\alpha,-\lambda)e^{i\lambda}-\gamma(\alpha,\lambda)e^{-i\lambda}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\int_I u^{\alpha-1}\left(\frac{1}{ue^{-i\lambda}+1}-\frac{1}{ue^{i\lambda}+1}\right)du\\ &= \sin(\lambda)\int_I \frac{u^\alpha}{u^2+2u\cos(\lambda)+1}du\end{aligned}$$

Ceci s'écrit encore:

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha,\lambda)\sin(\lambda\alpha) &= \int_I \frac{u^\alpha}{\frac{u^2+2u\cos(\lambda)+1}{\sin(\lambda)^2}}d\left(\frac{u}{\sin(\lambda)}\right)\\ &= \int_I \frac{u^\alpha}{(\frac{u}{\sin(\lambda)}+\cot an(\lambda))^2+1}d\left(\frac{u}{\sin(\lambda)}+\cot an(\lambda)\right)\\ &= \boxed{\int_{\cot an(\lambda)}^{+\infty}\frac{(v\sin(\lambda)-\cos(\lambda))^\alpha}{v^2+1}\mathrm{dv}=\gamma(\alpha,\lambda)\sin(\lambda\alpha)}\end{aligned}$$

- C)2) Le résultat précédent s'écrit encore avec la suite $\lambda_n=(1-\frac{1}{n+1})\pi$:

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha,\lambda_n)\sin(\lambda_n\alpha) &= \int_R \frac{(v\sin(\lambda_n)-\cos(\lambda_n))^\alpha}{v^2+1}\chi_{]\cot an(\lambda_n),+\infty[}dv\\ &= \int_R \Phi_n(v)dv\end{aligned}$$

avec $\Phi_n$ R intégrable , $|\Phi_n(v)|\leq\frac{(|v|+1)^\alpha}{v^2+1}=\varphi(v)$ qui est R intégrable *et* la suite $(\Phi_n)$ qui converge simplement sur R vers : u$\rightarrow\frac{1}{1+u^2}$ qui est continue sur R . Par application du théorème de convergence dominée :lorsque n tend vers $+\infty$ on obtient donc , en tenant compte de $\lambda\rightarrow\gamma(\alpha,\lambda)$ constante :

$$\gamma(\alpha,\lambda)\sin(\pi\alpha)=\int_R\frac{1}{1+v^2}dv=\pi$$

Par suite : $\boxed{\int_I\frac{u^{\alpha-1}}{1+ue^{i\lambda}}du=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}e^{-i\lambda\alpha}}$ et $\boxed{\int_I\frac{u^{\alpha-1}}{1+u}du=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}}$ avec $\lambda=0$

En utilisant le changement de variable t=$\sqrt{u}$, C$^1$*difféomorphisme* de I

$\int_I e^{-t^2}dt=\int_I\frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}du=\frac{1}{2}\Gamma(1/2)=\frac{1}{2}\sqrt{\Gamma(1/2)\Gamma(1-1/2)}$gr âce au III)B)5) et la positivité de $\Gamma(1/2)$ et $\boxed{\int_I\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{dt}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ en faisant $\lambda=0$ et $\alpha=1/2$ dans le résultat précédent .