Le but du problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions presque périodiques de Bohr, en particulier pour la transformation de Fourier. Du point de vue technique, ce problème contient tous les exemples d'interversion ($\lim\lim$, $\lim\sum$, $\lim\int$, $\sum\int$, $\int\int$*) dans un cadre élémentaire (fonctions continues et mesure finie, convergence uniforme). Voir en particulier la partie IV.*

Partie I

Notons que l'application de $\mathscr{F}$ dans $[0,+\infty]$ définie par $f \mapsto \|f\|$ satisfait les trois axiomes usuels des normes. Cependant, comme elle peut prendre la valeur $+\infty$, on dit que c'est un *écart*.

1. Soit $f \in \mathscr{F}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. De l'égalité

$$\{|f(x)|\ |x \in \mathbb{R}\} = \{|f(x+t)|\ |x \in \mathbb{R}\},$$

on déduit immédiatement l'égalité $\|\tau_t f\| = \|f\|$.
Il en résulte que $\|f-\tau_t f\| = \|\tau_{-t} f - f\|$ et donc pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, l'ensemble $T(f,\varepsilon)$ est symétrique par rapport à 0.
Comme

$$\|f-\tau_t f\| = \overline{\|f-\tau_t f\|} = \|\overline{f} - \overline{\tau_t f}\| = \|\overline{f} - \tau_t \overline{f}\|$$

on voit que $T(\overline{f},\varepsilon) = T(f,\varepsilon)$ pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|\lambda f - \tau_t \lambda f\| = \|\lambda(f-\tau_t f)\| = |\lambda|\ \|f-\tau_t f\|.$$

Donc, si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $T(\lambda f,\varepsilon) = T(f,\varepsilon/|\lambda|)$, et si $\lambda = 0$, $T(\lambda f,\varepsilon) = T(0,\varepsilon) = \mathbb{R}$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$.
Par inégalité triangulaire, $\|\,|f|-\tau_t|f|\,\| = \|\,|f|-|\tau_t f|\,\| \leqslant \|f-\tau_t f\|$, donc $T(|f|,\varepsilon)$ contient $T(f,\varepsilon)$ pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$.
Soient $t_1 \in T(f,\varepsilon_1)$ et $t_2 \in T(f,\varepsilon_2)$. Alors, comme

$$f-\tau_{t_1+t_2} f = f - \tau_{t_1}\tau_{t_2} f = f - \tau_{t_1} f + \tau_{t_1} f - \tau_{t_1}\tau_{t_2} f,$$

$$\|f-\tau_{t_1+t_2} f\| \leqslant \|f-\tau_{t_1} f\| + \|\tau_{t_1} f - \tau_{t_1}\tau_{t_2} f\| = \|f-\tau_{t_1} f\| + \|f-\tau_{t_2} f\| \leqslant \varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

Ce qui montre que $t_1+t_2 \in T(f,\varepsilon_1+\varepsilon_2)$.
D'ou l'inclusion $T(f,\varepsilon_1)+T(f,\varepsilon_2) \subset T(f,\varepsilon_1+\varepsilon_2)$.

2. Les fonctions de $\mathscr{P}$ sont dites presque-périodiques au sens de Bohr.
   (a) Par définition, même si $\ell \in \mathscr{L}(f,\varepsilon)$, alors $\ell' \in \mathscr{L}(f,\varepsilon)$ dés que $\ell' \geqslant \ell$. Il en résulte donc que $\mathscr{L}(f,\varepsilon)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[\ell_0,+\infty[$ ou $]\ell_0,+\infty[$, avec $\ell_0 \in \mathbb{R}^+$. Notons que si f est constante, $\mathscr{L}(f,\varepsilon) =]\ell_0,+\infty[$.

2.b. D'après I.1, $\mathscr{L}(f,\varepsilon) = \mathscr{L}(\overline{f},\varepsilon)$ et $\mathscr{L}(|f|,\varepsilon) \supset \mathscr{L}(f,\varepsilon)$ pour tout $f \in \mathscr{F}$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, donc $\overline{f} \in \mathscr{P}$ et $|f| \in \mathscr{P}$ si $f \in \mathscr{P}$ (puisque $\overline{f}$ et $|f|$ sont alors aussi continues).

On voit aussi que si $f \in \mathscr{F}$, $T(\tau_t f,\varepsilon) = T(f,\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, donc aussi $\mathscr{L}(f,\varepsilon) = \mathscr{L}(\tau_t f,\varepsilon)$, donc $\tau_t f \in \mathscr{P}$ si $f \in \mathscr{P}$.

Enfin, soit $f \in \mathscr{P}$ et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$. Alors d'après I.1, si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\mathscr{L}(\lambda f,\varepsilon) = \mathscr{L}(f,\varepsilon/|\lambda|) \neq \emptyset$, ce qui montre que $\lambda f \in \mathscr{P}$.

2.c. Soit f une fonction continue périodique, de période T. Alors $f = \tau_{nT} f$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et donc $T\mathbb{Z} \subset T(f,\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$. Donc si $\ell \geq T$, tout intervalle $[\alpha, \alpha+\ell[$ rencontre $T(f,\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon > 0$. Donc pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ $[T,+\infty[\subset \mathscr{L}(f,\varepsilon)$, soit

$$[T,+\infty[\subset \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}} \mathscr{L}(f,\varepsilon),$$

ce qui montre en particulier que $f \in \mathscr{P}$.

Dans le cas $f = E_{2\pi}$, qui est 1-périodique, montrons l'égalité $[1,+\infty[= \cap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^{*+}} \mathscr{L}(f,\varepsilon)$. Il suffit de montrer l'inclusion $[1,+\infty[\supset \cap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^{*+}} \mathscr{L}(f,\varepsilon)$. Soit $\ell \in]0,1[$, et soit $t \in [0,\ell[$. Alors

$$\|E_{2\pi} - \tau_t E_{2\pi}\| = \left\|(1-e^{2\pi i t})E_{2\pi}\right\| > 0$$

et $t \notin T(f,\varepsilon)$ si $0 < \varepsilon < \|E_{2\pi} - \tau_t E_{2\pi}\|$, donc l'intervalle $[0,\ell[$ ne contient aucun point de $T(f,\varepsilon)$. Ceci montre que $\ell \notin \mathscr{L}(f,\varepsilon)$ si $0 < \varepsilon < \|E_{2\pi} - \tau_t E_{2\pi}\|$. L'inclusion cherchée en découle.

2.d. *Cette question, délicate malgré la simplicité des fonctions étudiées, montre tout l'intérêt des méthodes topologiques développées dans la partie suivante.*

Première méthode (dynamique). Si $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, nous allons montrer que $\mathscr{L}(f,\varepsilon) \neq \emptyset$. Plus précisément, nous allons montrer l'existence d'un entier $Q \geq 1$ tel que pour tout $n_0 \in \mathbb{Z}$, $[n_0, n_0+Q[\cap T(f,\varepsilon) \neq \emptyset$. Dès lors, si $\alpha \in \mathbb{R}$ est donné,

$$[\alpha, \alpha+Q+1[\cap T(f,\varepsilon) \supset [[\alpha]+1, [\alpha]+1+Q[\cap T(f,\varepsilon) \neq \emptyset$$

ce qui prouve que $Q+1 \in \mathscr{L}(f,\varepsilon)$. L'arbitraire sur ε montre alors que $f \in \mathscr{P}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, et soit $n_0 \in \mathbb{Z}$. Notons que si $n \in \mathbb{Z}$:

$$|f(x+n_0+n) - f(x)| = \left|e^{2i\pi\sqrt{2}(x+n_0+n)} - e^{2i\pi\sqrt{2}x}\right| = \left|e^{2i\pi(\sqrt{2}(n_0+n))} - 1\right|$$

et donc, pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$|f(x+n_0+n) - f(x)| = \left|e^{2i\pi(\sqrt{2}n_0+\sqrt{2}n+m)} - 1\right|.$$

Par continuité de l'exponentielle, il existe $\delta \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $\left|e^{2i\pi u} - 1\right| < \varepsilon$ dès que $|u| \leq \delta$. Introduisons l'ensemble

$$N(n_0,\delta) = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z}, \left|\sqrt{2}n_0 + \sqrt{2}n + m\right| \leq \delta\}$$

alors

$$\{n_0\} + N(n_0,\delta) \subset T(f,\varepsilon).$$

Nous allons donc étudier l'ensemble $N(n_0, \delta)$.

Comme $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on sait (théorème de Dirichlet) qu'il existe des entiers $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\operatorname{pgcd}(p,q) = 1, \qquad \frac{1}{q} < \frac{\delta}{2}, \qquad \left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}. \tag{1}$$

Comme $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$, la classe de p engendre $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$. Donc pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq q-1$, il existe $\nu_k \in \{0, \ldots, q-1\}$ tel que $\nu_k p \equiv k \ [\operatorname{mod} q]$ et donc il existe $\mu_k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\nu_k \frac{p}{q} = \mu_k + \frac{k}{q}. \tag{2}$$

Par ailleurs, comme l'ensemble $\{n_0\sqrt{2} + \frac{k}{q} \mid k \in \{0, \ldots, q\}\}$ réalise une subdivision de pas $1/q$ du segment $[n_0\sqrt{2}, n_0\sqrt{2}+1]$, il existe $k_0 \in \{0, \ldots, q-1\}$ tel que la partie décimale de $n_0\sqrt{2} + k_0/q$ soit dans $[0, 1/q]$. Donc si η_0 désigne la partie entière de $n_0\sqrt{2} + k_0/q$,

$$\left|n_0\sqrt{2} + \frac{k_0}{q} - \eta_0\right| \leq \frac{1}{q} \leq \frac{\delta}{2}. \tag{3}$$

Par (2) et (3), on obtient

$$\left|n_0\sqrt{2} + \nu_{k_0}\frac{p}{q} - (\mu_{k_0} + \eta_0)\right| \leq \frac{\delta}{2}. \tag{4}$$

Soit $m_0 = \mu_{k_0} + \eta_0$. Utilisons maintenant l'approximation donnée par (1):

$$\left|n_0\sqrt{2} + \nu_{k_0}\sqrt{2} - m_0\right| \leq \left|n_0\sqrt{2} + \nu_{k_0}\frac{p}{q} - m_0\right| + \nu_{k_0}\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\nu_{k_0}}{q^2} \leq \delta.$$

Ceci montre que $\nu_{k_0} \in N(n_0, \delta)$, et donc que $N(n_0, \delta) \cap \{0, \ldots, q-1\} \neq \emptyset$. Notre assertion initiale est donc prouvée, avec $Q = q$, et la conclusion en découle.

Deuxième méthode (directe). Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, et soit δ comme ci-dessus, avec $\delta < 1$. Introduisons l'ensemble

$$A = \{q \in \mathbb{Z} \mid \exists p \in \mathbb{Z}, 0 < \left|q\sqrt{2} - p\right| < \delta\}$$

alors $A \subset T(f, \varepsilon)$. Comme $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$ (sous-groupes de $\mathbb{R}$). Soient $q_0 \in A$ et $p_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $0 < \eta = \left|q_0\sqrt{2} - p_0\right| < \delta$. Supposons par exemple que $q_0\sqrt{2} - p_0 > 0$. Pour $m \in \mathbb{Z}$, posons $N_m = [m/\eta] + 1$. Alors

$$m \leq N_m \eta \leq m + \eta < m + \delta.$$

Il en résulte que

$$0 < N_m q_0 \sqrt{2} - N_m p_0 - m < \delta$$

et donc $N_m q_0 \in A$. C'est clairement aussi le cas si $q_0\sqrt{2} - p_0 < 0$. Comme $\eta < 1$, on obtient donc ainsi une suite strictement croissante $(N_m q_0)_{m \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de A. Comme $N_{m+1} - N_m \leq 1 + 1/\eta$, la différence de deux éléments consécutifs de la suite est majorée par $q_0(1+1/\eta)$. Comme $\lim_{m\to\pm\infty} \eta_m = \pm\infty$, on vérifie que tout intervalle de la forme $[\alpha, \alpha+q_0(1+2/\eta)[$ contient donc un élément de la suite, ce qui montre que $\ell = q_0(1+2/\eta)$ est dans $T(f,\varepsilon)$, qui est donc non vide. L'arbitraire sur ε montre que $f \in \mathscr{P}$.

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite uniformément convergente de fonctions de $\mathscr{P}$, montrons que sa limite f est dans $\mathscr{P}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ donné. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_n\| < \varepsilon/3$. Nous allons vérifier que $\mathscr{L}(f,\varepsilon) \supset \mathscr{L}(f_n, \varepsilon/3)$, ce qui montrera bien que $\mathscr{L}(f,\varepsilon)$ est non vide.

Soit $\ell \in \mathscr{L}(f_n, \varepsilon/3)$, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. Il existe donc $t \in [\alpha, \alpha+\ell[$ tel que $\|f_n - \tau_t f_n\| \leq \varepsilon/3$, donc, comme $\|\tau_t f_n - \tau_t f\| \leq \varepsilon/3$

$$\|f - \tau_t f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n - \tau_t f_n\| + \|\tau_t f_n - \tau_t f\| \leq \varepsilon.$$

Il en résulte que $t \in T(f,\varepsilon) \cap [\alpha, \alpha+\ell[$. L'arbitraire sur α montre que $\ell \in \mathscr{L}(f,\varepsilon)$, ce qui prouve notre assertion.

4. Fixons $t \in \mathbb{R}$. Comme $T(tau_t f, \varepsilon) = T(f,\varepsilon)$ pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe $u \in [-t, -t+\ell[\cap T(tau_t f, \varepsilon)$ tel que $\|\tau_t f - \tau_u \tau_t f\| \leq \varepsilon$. Posons $s = u+t$. Alors $s \in [0, \ell[$ et $\|\tau_t f - \tau_s f\| \leq \varepsilon$.

5. Soit $f \in \mathscr{P}$, montrons que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ et soit $\ell \in \mathscr{L}(f,\varepsilon)$. Posons $M = \operatorname*{Sup}_{x\in[0,\ell]} |f(x)|$, qui est fini puisque f est continue et $[0,\ell]$ compact. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors il existe $s \in [0,\ell[$ tel que $|f(t) - f(s)| \leq \|\tau_t f - \tau_s f\| \leq \varepsilon$. Donc $|f(t)| \leq M + \varepsilon$, ce qui montre que f est bornée puisque t est arbitraire.

Montrons que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, $\ell \in \mathscr{L}(f,\varepsilon)$. Comme f est uniformément continue sur $[-1, \ell+1]$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $x \in [0,\ell]$ et $|h| < \delta$, $|f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon$. Si $t \in \mathbb{R}$, choisissons $s \in \mathbb{R}$ comme ci-dessus. Alors, si $|h| < \delta$,

$$|f(t) + f(t+h)| \leq |f(t) - f(s)| + |f(s) - f(s+h)| + |f(s+h) - f(t+h)|$$

donc

$$|f(t) + f(t+h)| \leq \|\tau_t f - \tau_s f\| + |f(s) - f(s+h)| + \|\tau_t f - \tau_s f\| \leq 3\varepsilon$$

ce qui prouve l'uniforme continuité de f.

Enfin, comme f est uniformément continue, si $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|\tau_h f - f\| \leq \varepsilon$ pour $|h| < \delta$, donc $]-\delta, \delta[\subset T(f,\varepsilon)$, ce qui montre que 0 est un point intérieur à $T(f,\varepsilon)$.

6. Soit $f \in \mathscr{P}$ et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, on note $L_0 = \operatorname{Inf} \mathscr{L}(f, \varepsilon/2)$. Soit $L = 1 + L_0$. Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il existe $\delta \in]0, 1/2[$ tel que $\|\tau_h f - f\| \leq \varepsilon/2$ si $|h| < \delta$. Soit $\ell \in]L_0, L_0 + 1/2[$, alors $\ell \in \mathscr{L}(f, \varepsilon/2)$, donc, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ donné, il existe $t \in [\alpha, \alpha+\ell[$ tel que $\|f - \tau_t f\| \leq \varepsilon/2$, et donc si $s \in]t-\delta, t+\delta[$

$$\|f - \tau_s f\| \leq \|f - \tau_t f\| + \|\tau_t f - \tau_s f\| \leq \varepsilon.$$

On voit que $]t, t+\delta[\subset T(f,\varepsilon) \cap]\alpha, \alpha+L[$, donc $T(f,\varepsilon) \cap]\alpha, \alpha+L[$ est d'intérieur non vide, donc L convient.

Partie II

1. Soit $f \in \mathscr{P}$, montrons que $\mathscr{U}(f)$ est précompact. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$. Soit $\ell \in \mathscr{L}(f, \varepsilon/2)$. Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il existe $\delta \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $\|\tau_h f - f\| \leq \varepsilon/2$ si $|h| \leq \delta$. Soit $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = \ell$ une subdivision de $[0, \ell]$ de pas inférieur à δ.

Montrons que $\mathscr{U}(f) \subset \cup_{k=0}^m B(\tau_{s_k} f, \varepsilon]$. Soit $t \in \mathbb{R}$ donné. Alors il existe $s \in [0, \ell[$ tel que $\|\tau_t f - \tau_s f\| \leq \varepsilon/2$. Il existe $k \in \{0, \ldots, m\}$ tel que $|s - s_k| \leq \delta$, donc $\|\tau_t f - \tau_{s_k} f\| \leq \varepsilon$, donc $\tau_t f \in B(\tau_{s_k} f, \varepsilon]$, ce qui montre l'assertion puisque t est arbitraire. Il en résulte que $\mathscr{U}(f)$ est précompact.

Soit $f \in \mathscr{B}$. Supposons $\mathscr{U}(f)$ précompact. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$. On peut trouver des réels $t_1, \ldots, t_m$ tels que $\mathscr{U}(f) \subset \cup_{k=0}^m B(\tau_{t_k} f, \varepsilon]$, avec $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$. Posons $\ell = t_m - t_1 + 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ donné, posons $u = t_m + \alpha$. Il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\left\|\tau_u f - \tau_{t_j} f\right\| \leq \varepsilon$. Donc

$$\left\|\tau_{\alpha + (t_m - t_j)} f - f\right\| = \left\|\tau_u f - \tau_{t_j} f\right\| \leq \varepsilon$$

ce qui montre que l'intervalle $[\alpha, \alpha + \ell[$ contient un point $t = \alpha + (t_m - t_j)$ de $T(f, \varepsilon)$; l'arbitraire sur α montre que $\mathscr{L}(f, \varepsilon)$ est non vide. L'arbitraire sur ε montre que $f \in \mathscr{P}$.

2. Nous avons déjà vu que $\mathscr{P}$ est stable par multiplication par un scalaire.

– Soient f et g dans $\mathscr{P}$, montrons que $f + g \in \mathscr{P}$. Comme

$$\mathscr{U}(f+g) = \{\tau_t(f+g) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{\tau_t f + \tau_t g \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathscr{U}(f) + \mathscr{U}(g)$$

et comme toute partie d'un espace précompact est précompacte, il suffit de montrer que $\mathscr{U}(f) + \mathscr{U}(g)$ est précompact. Plus généralement, montrons que si A et B sont deux parties précompactes d'un espace normé, leur somme est précompacte. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$. On peut trouver des boules fermées $B(a_k, \varepsilon/2]$, $1 \leq k \leq m$ qui recouvrent A, et des boules fermées $B(b_l, \varepsilon/2]$, $1 \leq l \leq n$ qui recouvrent B. Alors les boules $B(a_k + b_l, \varepsilon]$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$, recouvrent évidemment $A + B$, ce qui montre la propriété. Donc $\mathscr{U}(f+g)$ est précompact et $f + g \in \mathscr{P}$.

On déduit immédiatement de ce résultat que la fonction étudiée en I.2.d. est dans $\mathscr{P}$, comparer les deux approches.

– Soient maintenant f et g dans $\mathscr{P}$, montrons que $fg \in \mathscr{P}$. On voit que

$$\mathscr{U}(fg) = \{\tau_t(fg) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{\tau_t f \tau_t g \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathscr{U}(f)\mathscr{U}(g)$$

Si (E, N) est une algèbre normée et si A et B sont des parties précompactes de E, leur produit est précompact. En effet, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, et soit R tel que A et B soient contenues dans $B_N(0, R]$, ce qui est licite puisque toute partie précompacte est bornée. On peut trouver des boules fermées $B(a_k, \varepsilon/2R]$, $1 \leq k \leq m$, qui recouvrent A, et des boules fermées $B(b_l, \varepsilon/2R]$, $1 \leq l \leq n$, qui recouvrent B. Alors les boules $B(a_k b_l, \varepsilon]$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$, recouvrent AB, puique si $a \in A$ et $B \in B$, et si $a \in B(a_k, \varepsilon/2R]$ et $b \in B(b_l, \varepsilon/2R]$,

$$N(ab - a_k b_l) = N(a(b - b_l) + b_l(a - a_k)) \leq N(a)N(b - b_l) + N(b_l)N(a - a_k) \leq 2R\varepsilon/2R = \varepsilon.$$

En particulier $\mathscr{U}(f)\mathscr{U}(g)$ est précompact, ce qui entraîne que $fg \in \mathscr{P}$.

En conclusion, $\mathscr{P}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{B}$.

3. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\ell^1(\mathbb{C})$, et comme $\|E_{\lambda_n}\| \leq 1$ pour tout n, la série $\sum a_n E_{\lambda_n}$ est normalement convergente dans $\mathbb{R}$. Elle est donc uniformément convergente. Soit $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles. Chaque S_N est dans $\mathscr{P}$ d'aprés la question précédente, généralisée par récurrence aux sommes finies de fonctions de $\mathscr{P}$. La suite (S_N) converge uniformément vers la somme de la série, qui est donc dans $\mathscr{P}$ par I.3.

4. La suite $(1/n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dans $\ell^1(\mathbb{C})$, donc la somme $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} E_{1/n}$ est dans $\mathscr{P}$. La fonction f n'est pas périodique. En effet $f(0) = \zeta(2)$, et l'égalité $f(x) = \zeta(2)$ entraîne

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(x/n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(x/n)}{n^2} = 0$$

ce qui n'est possible que si $\cos(x/n) = 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Mais cette dernière propriété entraîne que $x = 0$, car $\cos u < 1$ si $|u|$ est assez petit et non nul. Donc $f(x) \neq f(0)$ si $x \neq 0$, donc f ne peut être périodique.

Partie III

1. Avec les notations de l'énoncé:

$$|\varphi_f(t) - \varphi_f(nt)| \leq \frac{1}{t} \left| \int_0^t f(x)\,dx - \int_0^{nT} f(x)\,dx \right| + \left| \frac{1}{t} \int_0^{nT} f(x)\,dx - \frac{1}{nT} \int_0^{nT} f(x)\,dx \right|.$$

D'une part:

$$\frac{1}{t} \left| \int_0^t f(x)\,dx - \int_0^{nT} f(x)\,dx \right| = \frac{1}{t} \left| \int_{nT}^t f(x)\,dx \right| \leq \frac{t - nT}{t} \|f\| \leq \frac{1}{n} \|f\|$$

et d'autre part

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^{nT} f(x)\,dx - \frac{1}{nT} \int_0^{nT} f(x)\,dx \right| = \left(\frac{1}{nT} - \frac{1}{t} \right) \left| \int_0^{nT} f(x)\,dx \right| \leq \frac{t - nT}{nTt} nT \|f\| \leq \frac{1}{n} \|f\|.$$

On obtient donc

$$|\varphi_f(t) - \varphi_f(nT)| \leq \frac{2}{n} \|f\|.$$

2. Si f est continue et T-périodique:

$$\varphi_f(nT) = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} f(x)\,dx = \frac{1}{nT} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\,dx = \varphi_f(T).$$

D'après III.1, en résulte que

$$\limsup_{t\to\infty}\varphi_f(t)\leq\limsup_{t\to\infty}\varphi_f([\tfrac{t}{T}]T)+\limsup_{t\to\infty}(\varphi_f(t)-\varphi_f([\tfrac{t}{T}]T))=\lim_{t\to\infty}\varphi_f([\tfrac{t}{T}]T)=\varphi_f(T),$$

et

$$\liminf_{t\to\infty}\varphi_f(t)\geq\liminf_{t\to\infty}\varphi_f([\tfrac{t}{T}]T)+\liminf_{t\to\infty}(\varphi_f(t)-\varphi_f([\tfrac{t}{T}]T))=\lim_{t\to\infty}\varphi_f([\tfrac{t}{T}]T)=\varphi_f(T),$$

ce qui prouve que $\lim_{t\to\infty}\varphi_f(t)$ existe et est égale à $\varphi_f(T)$.

La moyenne de E_λ sur une période est nulle si $\lambda\neq 0$, et égale à 1 si $\lambda=0$.

3.a. Soient $f\in\mathscr{P}$, $\varepsilon\in\mathbb{R}^{*+}$, et $\ell\in\mathscr{L}(f,\varepsilon)$. Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $t\in\mathbb{R}$, et soit $u\in[\alpha,\alpha+\ell[\cap T(f,\varepsilon)$. Alors

$$\int_0^t f(x)\,dx-\int_\alpha^{\alpha+t}f(x)\,dx=\int_0^t(f(x)-\tau_\alpha f(x))\,dx$$

et donc

$$\int_0^t f(x)\,dx-\int_\alpha^{\alpha+t}f(x)\,dx=\int_0^t(f(x)-\tau_u f(x))\,dx+\int_0^t(\tau_u f(x)-\tau_\alpha f(x))\,dx.$$

D'une part

$$\left|\int_0^t(f(x)-\tau_u f(x))\,dx\right|\leq\varepsilon t,$$

et d'autre part

$$\int_0^t(\tau_u f(x)-\tau_\alpha f(x))\,dx=\int_u^{u+t}f(x)\,dx-\int_\alpha^{\alpha+t}f(x)\,dx$$

d'où

$$\left|\int_0^t(\tau_u f(x)-\tau_\alpha f(x))\,dx\right|\leq\int_\alpha^u|f(x)|\,dx+\int_{\alpha+t}^{u+t}|f(x)|\,dx\leq 2\ell\,\|f\|\,.$$

On obtient donc

$$\left|\int_0^t f(x)\,dx-\int_\alpha^{\alpha+t}f(x)\,dx\right|\leq\varepsilon t+\leq 2\ell\,\|f\|$$

et l'arbitraire sur $\ell\in\mathscr{L}(f,\varepsilon)$ montre l'inégalité demandée, par passage à la borne inférieure.

3.b. Ecrivons

$$\varphi_f(t)-\varphi_f(nt)=\frac{1}{nt}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\int_0^t f(x)\,dx-\int_{kt}^{(k+1)t}f(x)\,dx\Big).$$

On en déduit d'après la question précédente, avec $\alpha=kt$ dans chaque terme:

$$|\varphi_f(t)-\varphi_f(nt)|\leq\frac{1}{nt}\Big(n(\varepsilon t+2\,\|f\|\,L(f,\varepsilon))\Big)=\varepsilon+\frac{2\,\|f\|\,L(f,\varepsilon)}{t}.$$

3.c. Soit $\eta \in \mathbb{R}^{*+}$. Soit $T > 0$ tel que $\dfrac{2\|f\| L(f,\eta/8)}{T} < \dfrac{\eta}{8}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|\varphi_f(nT) - \varphi_f(T)| \leq \frac{\eta}{8} + \frac{\eta}{8} = \frac{\eta}{4},$$

d'après III.3.b. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2\|f\|/n_0 \leq \eta/4$. Alors pour $t \geq n_0 T$, d'après III.1,

$$\left|\varphi_f(t) - \varphi_f([\tfrac{t}{T}]T)\right| \leq \frac{2\|f\|}{[T/t]} \leq \frac{2\|f\|}{n_0} \leq \frac{\eta}{4}.$$

Si $t' \geq n_0$ et $t'' \geq n_0$, on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi_f(t') - \varphi_f(t'')| \leq & \left|\varphi_f(t') - \varphi_f([\tfrac{t'}{T}]T)\right| + \left|\varphi_f([\tfrac{t'}{T}]T) - \varphi_f(T)\right| \\ & + \left|\varphi_f([\tfrac{t''}{T}]T) - \varphi_f(T)\right| + \left|\varphi_f(t'') - \varphi_f([\tfrac{t''}{T}]T)\right| \leq \eta. \end{aligned}$$

3.d. Le critère de Cauchy montre donc que φ possède une limite M_f en $+\infty$. Un passage à la limite pour $n \to \infty$ dans III.3.b permet de montrer par prolongement des inégalités que pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ et $t \in \mathbb{R}^{*+}$:

$$|\varphi_f(t) - M_f| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\| L(f,\varepsilon)}{t}.$$

4. L'application $\mathscr{M} : f \mapsto M_f$ est clairement linéaire. De plus $|M_f| \leq \|f\|$, donc $\mathscr{M}$ est continue sur $\mathscr{P}$.

Soit f une fonction de $\mathscr{P}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Raisonnons par l'absurde et supposons f non nulle. Alors comme f est continue il existe un intervalle sur lequel $f(x) \geq \rho > 0$. Soit $\ell \in \mathscr{L}(f,\rho/2)$. En translatant f, ce qui ne change pas $\mathscr{M}(f)$ (voir III.5), on peut supposer que $f(x) \geq \rho$ si $x \in [0,\delta]$, avec $0 < \delta < \ell$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe dans $[2n\ell,(2n+2)\ell]$ un intervalle de longueur δ sur lequel f est minorée par $\rho/2$. En effet, soit $t \in T(f,\rho/2) \cap [2n\ell,(2n+1)\ell[$. Alors si $x \in [0,\delta]$, $f(x+t) \geq f(x) - \rho/2 \geq \rho/2$. Comme $[t,t+\delta] \subset [2n\ell,(2n+1)\ell+\delta] \subset [2n\ell,(2n+2)\ell]$, ceci prouve notre assertion. Il en résulte que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi_f(2n\ell) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\ell}^{(2k+2)\ell} f(x)\,dx \geq \frac{1}{2n}\,n\,\frac{\rho}{2}\,\delta = \frac{\rho\delta}{4}.$$

Donc $\mathscr{M}(f) = \lim_{x\to\infty}\varphi_f(x) \geq \dfrac{\rho\delta}{4} \neq 0$. Il en résulte que f est nulle si $\mathscr{M}(f) = 0$.

5. Soit $f \in \mathscr{P}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\varphi_{\tau_a f}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \tau_a f(x)\,dx = \frac{1}{t}\Big(\int_0^t f(x)\,dx + \int_t^{t+a} f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx\Big)$$

donc

$$|\varphi_{\tau_a f}(t) - \varphi_f(t)| \leq \frac{2\|f\|\,a}{t},$$

ce qui montre que $\mathscr{M}(\tau_a f) = \mathscr{M}(f)$ (il suffit donc d'utiliser le fait que f est bornée).

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ donné. Soit $a \in \mathbb{R}$. Il est clair que $\mathscr{L}(f,\varepsilon) = \mathscr{L}(\tau_a f,\varepsilon)$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $2\,\|f\|\,L(f,\varepsilon)/t_0 \leq \varepsilon$. Alors, si $t \geq t_0$,

$$|\varphi_{\tau_a f}(t) - \mathscr{M}(f)| = |\varphi_{\tau_a f}(t) - \mathscr{M}(\tau_a f)| \leq \varepsilon + \frac{2\,\|\tau_a f\|\,L(\tau_a f,\varepsilon)}{t_0} \leq 2\varepsilon.$$

L'arbitraire sur ε et a montre que la convergence de $\varphi_{\tau_a f}(t)$ vers $\mathscr{M}(f)$ est uniforme en a.

6. On peut dans cette question reprendre les question précédentes, en les modifiant si nécessaire. On voit d'abord que si $f \in \mathscr{B}$, et si $T \in \mathbb{R}^{*+}$ et $t \geq T$,

$$\left|\varphi_f(t) - \varphi(nT)\right| \leq \frac{2}{n}\,\|f\|\,\|g\|\,.$$

Si $f \in \mathscr{P}$, et si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ et $t \in \mathbb{R}^{*+}$

$$\left|\int_0^t f(x)\,dx - \int_\alpha^{\alpha+t} f(x)\,dx\right| \leq \Big(\varepsilon t + \leq 2L(f,\varepsilon)\,\|f\|\Big)\,\|g\|$$

d'où l'on déduit que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^{*+}$

$$|\varphi_f(t) - \varphi_f(nt)| \leq \Big(\varepsilon + \frac{2\,\|f\|\,L(f,\varepsilon)}{t}\Big)\,\|g\|\,.$$

La question III.3.c se transpose alors directement et on en déduit l'existence de la limite

$$\mathscr{M}^{(g)}(f) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(x)g(x)\,dx.$$

L'application $f \mapsto \mathscr{M}^{(g)}(f)$ est clairement linéaire et continue, de norme majorée par $\|g\|$. Notons qu'il suffit dans ce raisonnement que g soit continue et bornée. Mais comme l'énoncé supposait $g \in \mathscr{P}$, on peut aussi simplement remarquer que le produit fg est dans $\mathscr{P}$ et l'existence de la limite découle de ce qui précède.

Partie IV

Notons d'abord que la limite $\mathscr{M}^{(E_{-\lambda})}$ existe, par III.6, puisque $E_{-\lambda}$ est dans $\mathscr{P}$.

1. Soit f une fonction continue 2π périodique. Alors, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{2n\pi} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\lambda(x+2k\pi)}\,dx.$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, écrivons:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\lambda(x+2k\pi)} = e^{-i\lambda x}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\lambda 2k\pi} = e^{-i\lambda x}\frac{1-e^{-i\lambda 2n\pi}}{1-e^{-i\lambda 2\pi}} = e^{-i\lambda x}\frac{\sin(\pi\lambda n)}{\sin(\pi\lambda)}e^{-i\pi\lambda(n-1)}.$$

Il en résulte que
$$\left|\int_0^{2n\pi} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx\right| \leq \frac{1}{|\sin(\pi\lambda)|}\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx.$$
et donc
$$a_f(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_0^{2n\pi} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx = 0.$$

2.a. On remarque que
$$|f-P_N|^2 = |f|^2 - \sum_{n=0}^{N}(u_n\overline{f}E_{\lambda_n} + \overline{u_n}f\overline{E}_{\lambda_n}) + \sum_{n=0}^{N}|u_n|^2.$$
Donc, par linéarité et définition de $\mathscr{M}$ et a_f:
$$\begin{aligned}\mathscr{M}(|f-P_N|^2) &= \mathscr{M}(|f|^2) - \sum_{n=0}^{N}(u_n\mathscr{M}(\overline{f}E_{\lambda_n}) + \overline{u_n}\mathscr{M}(f\overline{E}_{\lambda_n})) + \sum_{n=0}^{N}|u_n|^2\\ &= \mathscr{M}(|f|^2) - \sum_{n=0}^{N}(u_n\overline{a_f(\lambda_n)} + \overline{u_n}\,a_f(\lambda_n)) + \sum_{n=0}^{N}|u_n|^2\\ &= \mathscr{M}(|f|^2) + \sum_{n=0}^{N}|u_n - a_f(\lambda_n)|^2 - \sum_{n=0}^{N}|a_f(\lambda_n)|^2.\end{aligned}$$

2.b. L'expression $\mathscr{M}(|f-P_N|^2)$ est clairement minimale lorsque $u_n = a_f(\lambda_n)$ pour tout n dans $\{0,\dots,N\}$.

2.c. On veut montrer que la famille $(|a_f(\lambda)|^2)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est sommable. Considérons une partie finie $\Lambda = \{\lambda_0,\dots,\lambda_N\} \subset \mathbb{R}$ et posons $P_N = \sum_{n=0}^{N} a_f(\lambda_n)E_{\lambda_n}$. Alors la question précédente montre que
$$\sum_{n=0}^{N}|a_f(\lambda_n)|^2 = \mathscr{M}(|f|^2) - \mathscr{M}(|f-P_N|^2) \leq \mathscr{M}(|f|^2).$$
Comme Λ est arbitraire, ceci montre que
$$\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}|a_f(\lambda_n)|^2 = \operatorname*{Sup}_{\Lambda\in\mathcal{P}_f(\mathbb{R})}\sum_{\lambda\in\Lambda}|a_f(\lambda_n)|^2 \leq \mathscr{M}(|f|^2)$$
et la famille est donc sommable. Il en résulte en particulier que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble
$$\Lambda_m = \{\lambda\in\mathbb{R} \mid |a_f(\lambda)|^2 \geq \tfrac{1}{m}\}$$
est fini, donc que $\Lambda(f) = \cup_{m\in\mathbb{N}^*}\Lambda_m$ est au plus dénombrable.

3. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels *deux à deux distincts* et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{C})$. Alors la fonction $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_nE_{\lambda_n}$ est bien définie et est dans $\mathscr{P}$, d'après II.3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors, puisque la série de fonctions $\sum_n E_{\lambda_n}$ est uniformément convergente sur l'intervalle $[0,t]$, de mesure finie, il est possible d'intervertir $\sum$ et $\int$:

$$\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n E_{\lambda_n}(x) E_{-\lambda}(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^t E_{\lambda_n-\lambda}(x)\, dx.$$

Il en résulte que

$$a_f(\lambda) = \lim_{t\to\infty} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{t} \int_0^t E_{\lambda_n-\lambda}(x)\, dx \Big).$$

Notons A_n la fonction de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$ définie par $A_n(t) = \frac{1}{t}\int_0^m E_{\lambda_n-\lambda}(x)\, dx$, pour $n \in \mathbb{N}$. Alors comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{C})$, et comme $\|A_n(t)\|_\infty \leq 1$, la série de fonctions $\sum a_n A_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{*+}$, il est possible d'intervertir somme et limite. On obtient

$$a_f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E_{\lambda_n-\lambda}(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathscr{M}(E_{\lambda_n-\lambda}).$$

Il en résulte par III.2 que $a_f(\lambda) \neq 0$ si et seulement si $\lambda \in \Lambda = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, et si $\lambda = \lambda_n$, on obtient $a_f(\lambda_n) = a_n$. La famille associée à f est donc (avec un léger abus de notation) $(a_n E_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

4. a. Posons $\Gamma_m(x) = \psi(x,m)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\Gamma_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ainsi définie est continue puisque l'intervalle d'intégration $[0,m]$ est compact, donc de mesure finie, et la fonction $(x,u) \mapsto f(x+u)\overline{f}(u)$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,m]$. Elle est de plus dans $\mathscr{P}$. En effet, si $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ et $t \in T(f,\varepsilon)$, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$|\Gamma_m(x+t) - \Gamma_m(x)| \leq \frac{1}{m} \int_0^m |f(x+t+u) - f(x+u)|\, |f(u)|\, du \leq \varepsilon\, \|f\|,$$

ce qui montre que $t \in T(f, \|f\|\,\varepsilon)$. On en déduit que $\mathscr{L}(\Gamma_m,\varepsilon) \supset \mathscr{L}(f, \varepsilon/\|f\|) \neq \emptyset$ pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ (si f n'est pas la fonction nulle), donc $\Gamma_m \in \mathscr{P}$. Si $f \equiv 0$, $\Gamma_m \equiv 0 \in \mathscr{P}$, on exclut ce cas trivial dans la suite.

Pour montrer que $\gamma_f \in \mathscr{P}$, nous allons montrer que la convergence de la suite $(\Gamma_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ vers la fonction γ_f est uniforme. Remarquons d'abord que si $t \in T(f, \frac{\varepsilon}{2\|f\|})$ et si $x \in \mathbb{R}$:

$$\left\|\tau_t((\tau_x f)\,\overline{f}) - (\tau_x f)\,\overline{f}\right\| \leq \left\|(\tau_t\tau_x f - \tau_x f)\tau_t\overline{f}\right\| + \left\|\tau_x f(\tau_t\overline{f} - \overline{f})\right\| \leq \varepsilon.$$

Donc $t \in T((\tau_x f)\,\overline{f}, \varepsilon)$. Il en résulte que $\mathscr{L}((\tau_x f)\,\overline{f}, \varepsilon) \supset \mathscr{L}(f, \frac{\varepsilon}{2\|f\|})$. Ceci entraîne par III.3.d appliqué à la fonction $(\tau_x f)\,\overline{f}$, avec $t = m$:

$$|\Gamma_m(x) - \gamma_f(x)| = \left|\varphi_{(\tau_x f)\,\overline{f}}(m) - \mathscr{M}((\tau_x f)\,\overline{f})\right| \leq \varepsilon + \frac{2\,\|f\|^2\, L(f, \frac{\varepsilon}{2\|f\|})}{m}.$$

L'arbitraire sur x montre notre assertion, la suite $(\Gamma_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers γ_f. Comme chaque Γ_m est dans $\mathscr{P}$, γ_f est dans $\mathscr{P}$.

Calculons maintenant $\mathscr{M}(\Gamma_m)$. Remarquons que

$$\frac{1}{t}\int_0^t \Big(\frac{1}{m}\int_0^m f(x+u)\overline{f}(u)\, du\Big)\, dx = \frac{1}{m}\int_0^m \overline{f}(u)\Big(\frac{1}{t}\int_0^t f(x+u)\, dx\Big)\, du$$

(théorème de Fubini, licite puisque les fonctions sont continues sur $[0,t] \times [0,m]$). On en déduit

$$\mathscr{M}(\Gamma_m) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{m} \int_0^m \overline{f}(u)\Big(\frac{1}{t}\int_0^t f(x+u)\,dx\Big)\,du$$

et on sait que la convergence de $\varphi_{\tau_u f}(t)$ vers $\mathscr{M}(f)$ est uniforme en u. On peut donc, puisque l'intervalle $[0,m]$ est de mesure finie, intervertir limite et intégrale. On obtient:

$$\mathscr{M}(\Gamma_m) = \frac{1}{m}\int_0^m \overline{f}(u)\mathscr{M}(f)\,du$$

Comme $\mathscr{M}$ est continue sur $\mathscr{P}$, $\lim_{m\to\infty}\mathscr{M}(\Gamma_m) = \mathscr{M}(\gamma_f)$. Donc

$$\mathscr{M}(\gamma_f) = \mathscr{M}(f)\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int_0^m \overline{f}(u)\,du = |\mathscr{M}(f)|^2.$$

Enfin, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'applique (continuité et compacité) et conduit à

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t f(x+u)\overline{f}(u)\,du\right| \le \Big(\frac{1}{t}\int_0^t |f(x+u)|^2\,du\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{t}\int_0^t |\overline{f}(u)|^2\,du\Big)^{1/2}$$

et par passage à la limite et prolongement des inégalités

$$|\gamma_f(x)| = \lim_{t\to\infty}\left|\frac{1}{t}\int_0^t f(x+u)\overline{f}(u)\,du\right| \le \mathscr{M}(|f|^2) = \gamma_f(0).$$

4.b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$\begin{aligned}
a_{\gamma_f}(\lambda) &= \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_0^s\Big(\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(x+u)\overline{f}(u)\,du\Big)e^{-i\lambda x}\,dx && (1)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n\Big(\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int_0^m f(x+u)\overline{f}(u)\,du\Big)e^{-i\lambda x}\,dx && (2)\\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n\Big(\frac{1}{m}\int_0^m f(x+u)\overline{f}(u)e^{-i\lambda x}\,du\Big)\,dx && (3)\\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m}\int_0^n\int_0^m f(x+u)e^{-i\lambda(x+u)}\overline{f}(u)e^{i\lambda u}\,du\,dx && (4)\\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{n}\int_0^m\Big(\overline{f}(u)e^{i\lambda u}\int_0^n f(x+u)e^{-i\lambda(x+u)}dx\Big)\,du && (5)\\
&= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{n}\int_0^m\Big(\overline{f}(u)e^{i\lambda u}\int_0^n f(x+u)e^{-i\lambda(x+u)}dx\Big)\,du && (6)\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int_0^m\Big(\overline{f}(u)e^{-i\lambda u}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(x+u)e^{i\lambda(x+u)}dx\Big)\,du && (7)\\
&= |a_f(\lambda)|^2 && (8)
\end{aligned}$$

Dans cette suite d'équations, (1) est la simple définition des diverses fonctions, (2) découle de l'existence des limites (n et m sont supposés entiers), (3) vient de la convergence uniforme des fonctions Γ_m, (4) vient des propriétés de l'exponentielle, (5) vient du théorème de Fubini, licite grâce à la continuité des fonctions et la compacité des intervalles, (6) du théorème d'interversion des limites en cas de convergence uniforme, (7) est analogue à (3), et (8) est clair.

Il en résulte que la famille associée à γ_f est $(|a_f(\lambda)|^2 E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda(f)}$.