Agrégation Externe

Anneaux principaux

On pourra consulter les ouvrages suivants.

P. Boyer, J. J. Risler : *Algèbre pour la licence 3. Groupes, anneaux, corps.* Dunod (2006).

F. Combes — *Algèbre et géométrie.* Bréal (2003).

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas : *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Algèbre 1.* Cassini (2001).

S. Francinou, H. Gianella. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation. Algèbre 1.* Masson (1994).

D. Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses (1996).

A. Szpirglas. *Mathématiques L3. Algèbre.* Pearson (2009).

$\mathbb{A}$ désigne un anneau commutatif, unitaire, intègre et on note :
– 0 et 1 les éléments neutres pour l'addition et la multiplication de $\mathbb{A}$, avec $0 \neq 1$;
– $\mathbb{A}^* = \mathbb{A} \setminus \{0\}$ l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{A}$;
– $\mathbb{A}^\times$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles (ou des unités) de $\mathbb{A}$.

Un stathme sur $\mathbb{A}$ est une application $\varphi : \mathbb{A}^* \to \mathbb{N}$.

On dit que l'anneau $\mathbb{A}$ est euclidien, s'il est intègre et s'il existe un stathme φ sur $\mathbb{A}$ tel que pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathbb{A} \times \mathbb{A}^*$, il existe un couple (q, r) dans $\mathbb{A}^2$ tel que :

$$a = bq + r \text{ avec } r = 0 \text{ ou } r \neq 0 \text{ et } \varphi(r) < \varphi(b)$$

1. Montrer que :
$$(\mathbb{A}[X] \text{ est euclidien}) \Leftrightarrow (\mathbb{A}[X] \text{ est principal}) \Leftrightarrow (\mathbb{A} \text{ est un corps})$$
2. Montrer que si l'anneau $\mathbb{A}$ est isomorphe à un anneau $\mathbb{B}$ principal [resp. euclidien], il est alors principal [resp. euclidien].
3. Montrer que l'anneau quotient $\dfrac{\mathbb{C}[X,Y]}{(Y - X^2)}$ est euclidien (donc aussi principal et factoriel).
4. On désigne par $\mathbb{K}$ le corps des fraction de l'anneau intègre $\mathbb{A}$.
   On se donne une partie S de $\mathbb{A}^*$ qui contient 1 et qui est stable pour le produit, c'est-à-dire que pour tout (a, b) dans S^2, le produit ab est dans S.
   (a) Montrer que l'ensemble :
   $$S^{-1}\mathbb{A} = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in \mathbb{A} \text{ et } s \in S \right\}$$
   est un sous-anneau du corps $\mathbb{K}$ qui contient $\mathbb{A}$.
   (b) Montrer que si $\mathbb{A}$ est principal, il en est alors de même de $S^{-1}\mathbb{A}$.
   (c) Montrer que si $\mathbb{A}$ est euclidien, il en est alors de même de $S^{-1}\mathbb{A}$.
5. Montrer que l'anneau $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est euclidien (donc principal).
6. Montrer que tout sous-anneau (unitaire) de $\mathbb{Q}$ est principal.
7.
   (a) Montrer que l'ensemble :
   $$\mathbb{A} = \left\{ \frac{P(X)}{X^n} \mid P \in \mathbb{C}[X] \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$$
   est un anneau euclidien.
   (b) Montrer que l'anneau quotient $\dfrac{\mathbb{C}[X,Y]}{(XY - 1)}$ est euclidien.