

# Coniques

On se place dans le plan affine euclidien  $\mathcal{P}$ .

On note  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  le produit scalaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Si  $A, B$  sont deux points de  $\mathcal{P}$ , on notera  $d(A, B)$ ,  $AB$  ou  $\|\overrightarrow{AB}\|$  la distance de  $A$  à  $B$ ,  $[AB]$  le segment d'extrémités  $A$  et  $B$  et pour  $A \neq B$ ,  $(AB)$  la droite passant par  $A$  et  $B$ .

Si  $A$  est un point de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$  une droite de  $\mathcal{P}$ , on note :

$$d(A, \mathcal{D}) = \inf_{M \in \mathcal{D}} AM$$

la distance de  $A$  à  $\mathcal{D}$ . En désignant par  $H$  la projection orthogonale de  $A$  sur  $\mathcal{D}$ , on a  $d(A, \mathcal{D}) = AH$  (figure 18.1). On a  $d(A, \mathcal{D}) = 0$  si, et seulement si,  $A \in \mathcal{D}$ .

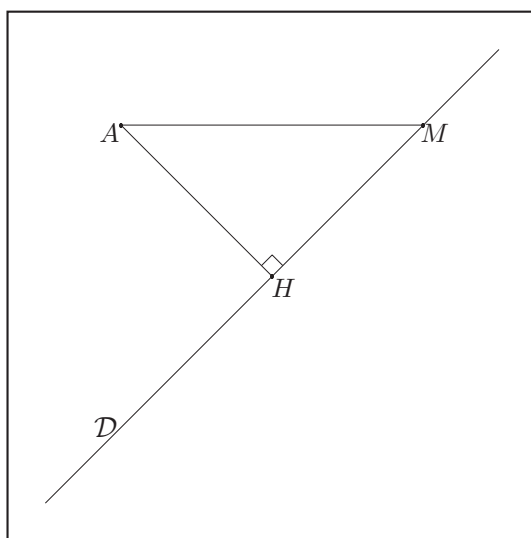


FIG. 18.1 – Projection orthogonale

On rappelle que le barycentre d'une famille de points pondérés  $\{(A_i, \alpha_i); 1 \leq i \leq n\}$ , la somme  $\sum_{i=1}^n \alpha_i$  étant non nulle, est le point défini par :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Ce point  $G$  est aussi défini par :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

## 18.1 Définition par directrice, foyer et excentricité

On se donne une droite  $\mathcal{D}$ , un point  $F \notin \mathcal{D}$  et un réel  $e > 0$ .

À l'origine les sections coniques ont été définies dans l'espace comme intersection d'un plan avec un cône, d'où leur nom.

Nous donnons dans ce paragraphe une première définition métrique des coniques.

**Définition 18.1** On appelle conique de directrice  $\mathcal{D}$ , de foyer  $F$  et d'excentricité  $e$  l'ensemble :

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \mid d(M, F) = e \cdot d(M, \mathcal{D})\}$$

- pour  $e < 1$ , on dit que  $\Gamma$  est une ellipse ;
- pour  $e = 1$ , on dit que  $\Gamma$  est une parabole ;
- pour  $e > 1$ , on dit que  $\Gamma$  est une hyperbole.

La distance  $d(M, \mathcal{D})$  étant nulle si, et seulement si  $M \in \mathcal{D}$ , on aura  $d(M, \mathcal{D}) > 0$  pour tout  $M \in \Gamma$  puisque  $F$  n'est pas sur  $\mathcal{D}$  et on peut écrire que :

$$\Gamma = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D} \mid \frac{d(M, F)}{d(M, \mathcal{D})} = e \right\}$$

ou encore, en désignant par  $H$  la projection orthogonale d'un point  $M$  du plan sur  $\mathcal{D}$  :

$$\Gamma = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D} \mid \frac{MF}{MH} = e \right\}$$

On peut aussi dire que  $\Gamma$  est une ligne de niveau de la fonction  $M \mapsto \frac{MF}{MH}$  définie sur  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$ .

On dit que la perpendiculaire  $\Delta$  à  $\mathcal{D}$  passant par  $F$  est l'axe focal de la conique  $\Gamma$  (le mot focal signifie « qui est relatif au(x) foyers(s) »).

Le point  $K$  à l'intersection de  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  est le projeté orthogonal de  $F$  sur  $\mathcal{D}$ .

La distance  $d = KF$  est non nulle et le réel  $p = ed$  est appelé paramètre de la conique.

Dans ce qui suit, on se donne une conique  $\Gamma$  de directrice  $\mathcal{D}$ , de foyer  $F$  et d'excentricité  $e$  et  $\Delta$  est son axe focal.

**Lemme 18.1** L'axe focal est un axe de symétrie de la conique.

**Démonstration.** En effet, on notant  $\sigma$  la symétrie orthogonale par rapport à  $\Delta$ , on a  $\sigma(F) = F$  et en remarquant que pour  $M \in \mathcal{P}$ , la projection orthogonale de  $M' = \sigma(M)$  sur  $\mathcal{D}$  est  $H' = \sigma(H)$  où  $H$  est la projection orthogonale sur  $\mathcal{D}$  de  $M$ , on a :

$$\frac{d(\sigma(M), F)}{d(\sigma(M), \mathcal{D})} = \frac{\sigma(M) \sigma(F)}{\sigma(M) \sigma(H)} = \frac{MF}{MH}$$

et en conséquence  $M$  est sur  $\Gamma$  si, et seulement si,  $\sigma(M)$  est sur  $\Gamma$  (figure 18.2). ■

Le résultat qui suit nous confirme qu'une conique n'est pas vide.

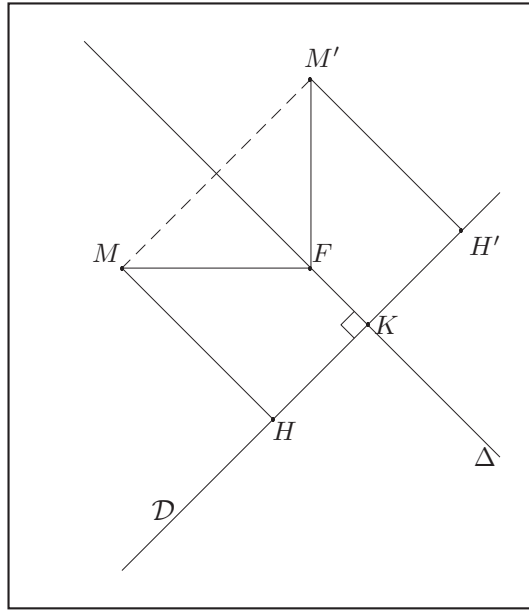


FIG. 18.2 – L'axe focal est une axe de symétrie

**Théorème 18.1**

1. L'intersection d'une parabole  $\Gamma$  avec son axe focal est réduite à un point qui est le milieu du segment  $[FK]$ .
2. L'intersection d'une ellipse ou d'une hyperbole  $\Gamma$  avec son axe focal est réduite aux deux points  $A, A'$  où  $A$  est le barycentre du système de points pondérés  $\{(F, 1), (K, e)\}$  et  $A'$  le barycentre de  $\{(F, 1), (K, -e)\}$ .

**Démonstration.**

1. On suppose que  $\Gamma$  est une parabole, c'est-à-dire que  $e = 1$ .

Dire  $M \in \Delta \cap \Gamma$  équivaut à dire que  $M \in \Delta$  et  $MF = d(M, \mathcal{D})$ , ce qui équivaut à  $M \in \Delta$  et  $MF = MK$  (les points de  $\Delta$  se projettent sur  $K$ ), ce qui revient à dire que  $M$  est à l'intersection de la médiatrice de  $[KF]$  et de  $\Delta$ , c'est donc le milieu de  $[KF]$ .

2. On suppose que  $e \neq 1$ .

Dire  $M \in \Delta \cap \Gamma$  équivaut à dire que  $M \in \Delta$  et  $MF^2 = e^2 MH^2$ , ce qui équivaut à :

$$(\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK}) \cdot (\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK})$$

les points  $M, K, F$  étant alignés (ils sont tous sur  $\Delta$ ), ce qui équivaut à  $\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK} = \vec{0}$  ou  $\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK} = \vec{0}$  (de manière générale, on a  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$  et ici  $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 \text{ modulo } \pi$ ) encore équivalent à dire que  $M$  le barycentre de  $\{(F, 1), (K, e)\}$  (on a  $1 + e \neq 0$ ) ou celui de  $\{(F, 1), (K, -e)\}$  (on a  $1 - e \neq 0$ ).

■

Le résultat suivant nous donne une autre définition de la parabole comme lieu géométrique.

On rappelle que si  $\mathcal{C}$  est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R > 0$  et  $\mathcal{D}$  une droite, on a alors, en notant  $d = d(O, \mathcal{D})$  :

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } d > R \\ \{H\} & \text{si } d = R \\ \{M_1, M_2\} & \text{si } d < R \end{cases}$$

où  $H$  est la projection orthogonale de  $O$  sur  $\mathcal{D}$  et  $M_1 \neq M_2$  pour  $d < R$ . Le cas où cette intersection est réduite à un point est équivalent à dire que le cercle et la droite sont tangents, ce qui équivaut encore à dire que  $O \notin \mathcal{D}$  et la droite  $\mathcal{D}$  est perpendiculaire à la droite  $(OH)$ .

**Lemme 18.2** *La parabole  $\Gamma$  de directrice  $\mathcal{D}$  et foyer  $F$  est aussi le lieu des centres des cercles tangents à  $\mathcal{D}$  et passant par  $F$  (figure 18.3).*

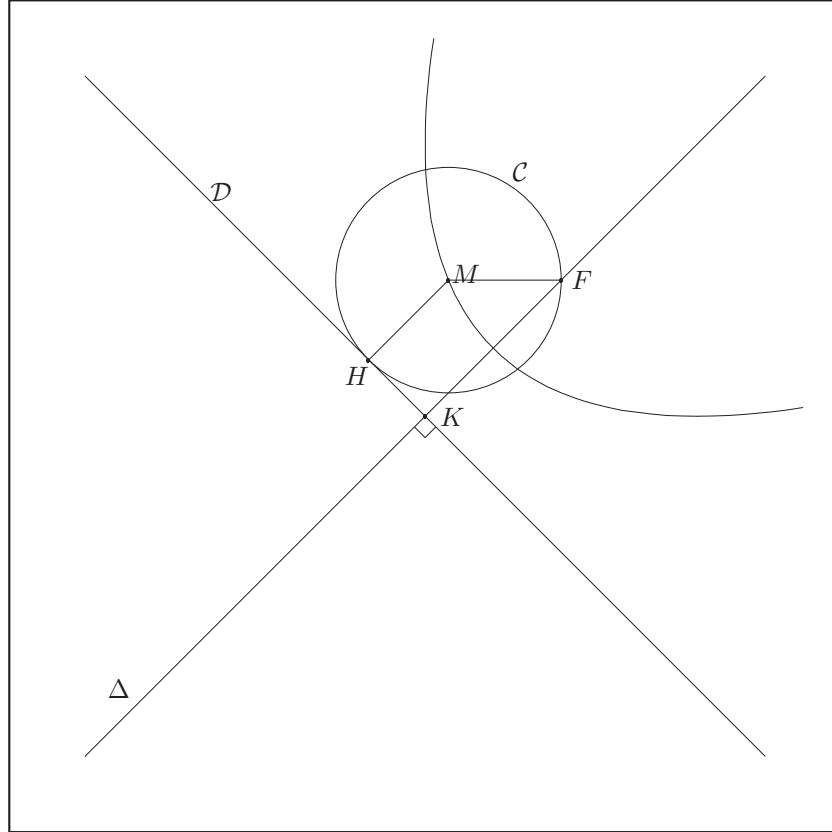


FIG. 18.3 – Parabole comme lieu des centres des cercles ...

**Démonstration.** Si  $M \in \Gamma$ , la condition  $MF = MH$  nous dit alors que le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $M$  et de rayon  $MF$  (donc passant par  $F$ ) est tangent à la droite  $\mathcal{D}$ .

Réciproquement si  $M \in \mathcal{P}$  est le centre d'un cercle  $\mathcal{C}$  tangent à  $\mathcal{D}$  et passant par  $F$ , on a alors  $R = MF = MH$  et  $M \in \Gamma$ . ■

## 18.2 Équation réduite d'une conique

Le lemme 18.1 nous incite à prendre l'axe focal  $\Delta$  pour axe des abscisses (ou des ordonnées) puisque c'est un axe de symétrie.

**Théorème 18.2** *Il existe un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  dans lequel la conique  $\Gamma$  a pour équation :*

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2(x_F - e^2x_K)x = e^2x_K^2 - x_F^2 \quad (18.1)$$

**Démonstration.** On se donne un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où l'origine  $O$  est sur l'axe focal  $\Delta$  et est à préciser et  $\vec{i}$  est un vecteur directeur unitaire de  $\vec{\Delta}$ . On note  $(x, y)$  les

coordonnées d'un point  $M \in \mathcal{P}$  dans ce repère. Les coordonnées du point  $F$  sont  $(x_F, 0)$  et l'équation de la droite  $\mathcal{D}$  est  $x = x_K$ . On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned}(M \in \Gamma) &\Leftrightarrow (MF^2 = e^2 MH^2) \Leftrightarrow ((x - x_F)^2 + y^2 = e^2 (x - x_K)^2) \\ &\Leftrightarrow ((1 - e^2) x^2 + y^2 - 2(x_F - e^2 x_K) x = e^2 x_K^2 - x_F^2)\end{aligned}$$

■

Les points d'intersection de la conique  $\Gamma$  avec l'axe focal sont les points  $M(x, y) \in \Gamma$  tels que  $y = 0$ , ce qui donne :

$$(1 - e^2) x^2 - 2(x_F - e^2 x_K) x = e^2 x_K^2 - x_F^2$$

Pour  $e = 1$ , on obtient :

$$2(x_F - x_K) x = x_K^2 - x_F^2$$

avec  $x_F \neq x_K$  puisque  $F \notin \mathcal{D}$ , ce qui donne :

$$x = \frac{x_F + x_K}{2}$$

et on retrouve le milieu du segment  $[FK]$  comme unique point d'intersection.

Pour  $e \neq 1$ , on a une équation polynomiale de degré 2 de discriminant réduit :

$$\begin{aligned}\delta &= (x_F - e^2 x_K)^2 + (1 - e^2) (e^2 x_K^2 - x_F^2) \\ &= e^2 (x_F^2 + x_K^2 - 2x_F x_K) = e^2 (x_K - x_F)^2 = (ed)^2 = p^2\end{aligned}$$

et on a les deux solutions :

$$x_1 = \frac{x_F - e^2 x_K - ed}{1 - e^2} \text{ et } x_2 = \frac{x_F - e^2 x_K + ed}{1 - e^2}$$

ce qui s'écrit aussi, compte tenu de  $d = |x_K - x_F|$  :

$$x_1 = \frac{x_F - ex_K}{1 - e} \text{ et } x_2 = \frac{x_F + ex_K}{1 + e}$$

ou :

$$x_1 = \frac{x_F + ex_K}{1 + e} \text{ et } x_2 = \frac{x_F - ex_K}{1 - e}$$

et on retrouve les deux points d'intersection,  $A$  barycentre de  $\{(F, 1), (K, e)\}$  et  $A'$  barycentre de  $\{(F, 1), (K, -e)\}$ .

De ce résultat on déduit une représentation polaire de  $\Gamma$ .

**Théorème 18.3** Dans un repère orthonormé  $(F, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $\vec{i} = \frac{1}{FK} \overrightarrow{FK}$ , la conique  $\Gamma$  a pour équation polaire :

$$\rho = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta)}$$

avec  $\rho \in \mathbb{R}^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . (figure 18.4).

**Démonstration.** Prenant pour origine  $O = F$  et pour premier vecteur de base  $\vec{i} = \frac{1}{FK} \overrightarrow{FK}$ , on a  $x_F = 0$ ,  $x_K = FK = d$  et une équation cartésienne de  $\Gamma$  est :

$$(1 - e^2) x^2 + y^2 + 2e^2 dx - e^2 d^2 = 0.$$

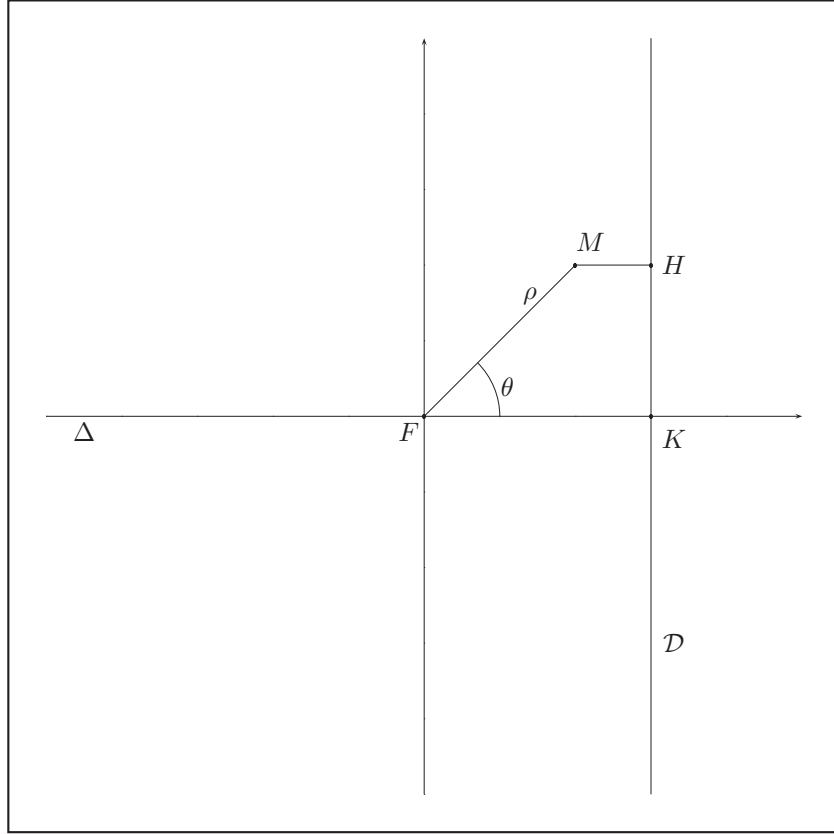


FIG. 18.4 – Conique en coordonnées polaires

En posant pour  $M = (x, y) \in \mathcal{P} \setminus \{F\}$  (on a  $M \neq F$  pour  $M \in \Gamma$ ),  $x = \rho \cos(\theta)$  et  $y = \rho \sin(\theta)$  avec  $\rho > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{cases} MF = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \\ MH = |x_H - x| = |x_K - x| = |d - x| = |d - \rho \cos(\theta)| \end{cases}$$

et l'égalité  $MF = eMH$  équivaut à  $\rho = e|d - \rho \cos(\theta)|$ , soit  $\rho = e(d - \rho \cos(\theta))$  ou  $\rho = -e(d - \rho \cos(\theta))$ , c'est-à-dire :

$$\rho = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta)} \text{ ou } \rho = -\frac{ed}{1 - e \cos(\theta)}$$

Réciproquement l'équation  $\rho = e|d - \rho \cos(\theta)|$  entraîne  $MF = eMH$ .

En désignant par  $\Gamma_1$  [resp.  $\Gamma_2$ ] la courbe d'équation polaire  $\rho = \rho_1(\theta) = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta)}$  [resp.  $\rho = \rho_2(\theta) = -\frac{ed}{1 - e \cos(\theta)}$ ], on a  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

En remarquant que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \rho_2(\theta + \pi) = -\rho_1(\theta)$$

en déduit, en notant  $\gamma_k$  une paramétrisation de  $\Gamma_k$ , que :

$$\begin{aligned} \gamma_2(\theta + \pi) &= \rho_2(\theta + \pi)(\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi)) \\ &= \rho_1(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \gamma_1(\theta) \end{aligned}$$

et  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ , donc  $\Gamma = \Gamma_1$ . ■

Nous allons maintenant revenir à la représentation cartésienne (18.1) en distinguant les cas  $e = 1$  et  $e \neq 1$ .

### 18.2.1 Les paraboles

#### Équation réduite d'une parabole

Si  $\Gamma$  est une parabole, on a alors  $e = 1$  et :

$$(M \in \Gamma) \Leftrightarrow (y^2 - 2(x_F - x_K)x = (x_F - x_K)(x_F + x_K))$$

ce qui nous conduit à choisir l'origine  $O$  de sorte que  $x_F = -x_K$ , c'est-à-dire que  $O$  est le milieu de  $[FK]$ , soit l'unique point d'intersection de  $\Gamma$  avec son axe focal. En prenant  $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ , on a alors  $x_F = OF = \frac{KF}{2} = \frac{p}{2}$ ,  $x_K = -x_F$  et  $x_F - x_K = p$ , de sorte que dans ce repère une équation de la parabole est  $y^2 = 2px$ .

On dit que le point  $O$ , milieu de  $[KF]$ , est le sommet de la parabole.

Réciproquement si  $\Gamma$  est une courbe d'équation  $y^2 = 2px$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  avec  $p > 0$ , en remontant les calculs précédents, on vérifie que  $\Gamma$  est une parabole de directrice  $\mathcal{D}$  d'équation  $x = -\frac{p}{2}$  et de foyer  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ . En effet, en posant  $x_F = \frac{p}{2}$  et  $x_K = -x_F$ , on a :

$$(y^2 = 2px) \Leftrightarrow ((x - x_F)^2 + y^2 = (x - x_K)^2) \Leftrightarrow (MF = MH).$$

Cette équation nous permet un tracé de la parabole  $\Gamma$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Avec la parité de  $y \mapsto \frac{1}{2p}y^2$ , on étudie cette courbe pour  $y \geq 0$ , puis on complète le graphe obtenu par symétrie par rapport à l'axe  $\Delta = Ox$ . Cette fonction est strictement croissante de  $\mathbb{R}^+$  sur  $\mathbb{R}^+$  avec  $\frac{x}{y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$ , on a donc une branche parabolique de direction  $Ox$  (c'est la définition). En  $O$  on a une tangente verticale. Le tracé du graphe de  $\Gamma$  s'en suit.

#### Paramétrisation et tangentes à une parabole

De cette équation cartésienne de la parabole dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on peut déduire la paramétrisation :

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$$

Le vecteur dérivé  $\gamma'(t) = \left(\frac{t}{p}, 1\right)$  ne s'annulant jamais, on déduit que la parabole  $\Gamma$  admet une tangente en chacun de ces points  $\gamma(t_0) = \left(\frac{t_0^2}{2p}, t_0\right)$ , cette tangente étant dirigée par  $\gamma'(t_0) = \left(\frac{t_0}{p}, 1\right)$ . Une représentation paramétrique de cette tangente est donc :

$$\begin{cases} x = \frac{t_0^2}{2p} + \lambda \frac{t_0}{p} \\ y = t_0 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Une équation cartésienne est obtenue en écrivant que :

$$\begin{vmatrix} x - \frac{t_0^2}{2p} & \frac{t_0}{p} \\ (y - t_0) & 1 \end{vmatrix} = x - \frac{t_0^2}{2p} - \frac{t_0}{p}(y - t_0) = 0$$

ce qui donne :

$$p(x - x_0) - y_0(y - y_0) = 0.$$

Cette équation cartésienne peut aussi être obtenue à partir de l'équation implicite  $f(x, y) = 2px - y^2 = 0$  de  $\Gamma$ . La différentielle de  $f$  ne s'annulant jamais, la tangente à  $\Gamma$  en  $M_0(x_0, y_0)$  a pour équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y - y_0) = 0$$

soit :

$$p(x - x_0) - y_0(y - y_0) = 0.$$

Ce qui peut aussi s'écrire, compte tenu de  $y_0^2 = 2px_0$  :

$$px - y_0y + px_0 = 0.$$

On peut remarquer que les tangentes à une parabole ne sont jamais parallèles à l'axe focal (l'axe des abscisses) puisque une telle droite serait d'équation  $ax + by + c = 0$  avec  $a = 0$  et le coefficient  $p$  est strictement positif.

Si une telle tangente est parallèle à la directrice  $\mathcal{D}$ , elle est alors perpendiculaire à l'axe focal donc d'équation  $x = x_0$  et  $y_0 = 0$  dans l'équation ci-dessus, ce qui donne  $x_0 = 0$  ( $y_0^2 = 2px_0$ ) et  $M_0$  est le sommet  $O$  de la parabole.

### Construction à la règle et au compas d'une parabole

Des considérations géométriques élémentaires nous fournissent un procédé de construction de la parabole à la règle et au compas.

Pour  $H \in \mathcal{D}$  on désigne par  $D_H$  la perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  passant par  $H$  et par  $D'_H$  la médiatrice du segment  $[HF]$  (comme  $F \notin \mathcal{D}$ , on a  $H \neq F$ ). On a alors :

$$(M \in D_H \cap \Gamma) \Leftrightarrow (M \in D_H \text{ et } MF = MH) \Leftrightarrow (M \in D_H \cap D'_H)$$

L'intersection  $D_H \cap D'_H$  étant bien réduite à un point puisque  $D'_H$  n'est pas parallèle à  $D_H$  (sinon  $(HF)$  serait perpendiculaire à  $\Delta$  et  $F$  serait sur  $\mathcal{D}$ ).

Les points de la parabole sont donc les points d'intersection de la perpendiculaire  $D_H$  à  $\mathcal{D}$  passant par  $H$  avec la médiatrice  $D'_H$  du segment  $[HF]$ .

**Remarque 18.1** En notant  $D_H \cap D'_H = \{M_H\}$ , l'application  $H \mapsto M_H$  nous donne une paramétrisation de la parabole dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $O$  est le sommet de la parabole.

En notant  $M_0(x_0, y_0) = M_H$  un point de la parabole ainsi construit, on a  $H(-\frac{p}{2}, y_0)$ ,  $F(\frac{p}{2}, 0)$ ,  $\overrightarrow{HF} = (p, -y_0)$  et la médiatrice  $D'_H$  a pour équation :

$$\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{M_0M} = p(x - x_0) - y_0(y - y_0) = 0$$

c'est donc la tangente à  $\Gamma$  en  $M_0$ . Cette tangente coupe  $[HF]$  en son milieu  $I_H(p, 0)$ .

**Théorème 18.4** Soient  $\Gamma$  une parabole,  $M$  un point de  $\Gamma$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur la directrice  $\mathcal{D}$ . La tangente à  $\Gamma$  en  $M$  est la médiatrice de  $[HF]$ . Si  $M$  n'est pas sur l'axe focal  $\Delta$ , cette tangente est aussi la hauteur issue de  $M$  dans le triangle  $FMH$  et la bissectrice intérieure de l'angle en  $M$  (figure 18.5).



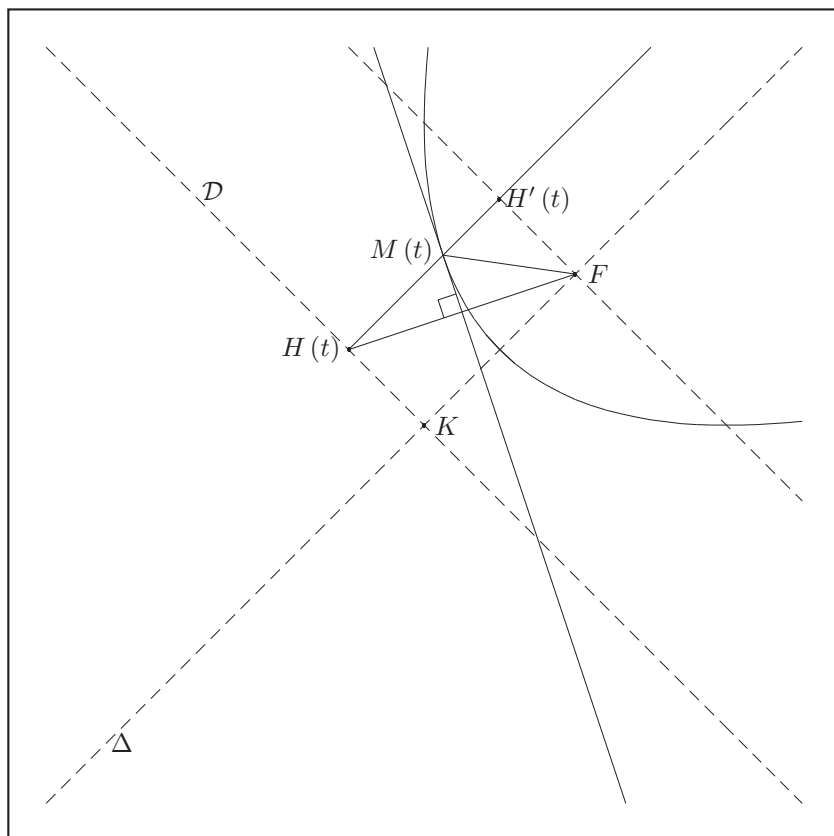


FIG. 18.5 – Tangente à une parabole

**Démonstration.** On vient de voir que la tangente à  $\Gamma$  en  $M$  est la médiatrice de  $[HF]$ . Considérant que le triangle  $MFH$  est isocèle en  $M$  ( $MF = MH$ ), cette médiatrice est aussi la hauteur issue de  $M$  et la bissectrice intérieure de l'angle en  $M$ .

On peut aussi montrer ce résultat en utilisant une paramétrisation régulière :

$$\gamma : t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$$

de  $\Gamma$  dans un repère orthonormé  $(F, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $\vec{i} = \frac{1}{FK} \overrightarrow{FK}$ .

En notant  $H(t)$  la projection orthogonale de  $M(t)$  sur  $\mathcal{D}$  et en dérivant l'égalité :

$$\left\| \overrightarrow{FM(t)} \right\|^2 - \left\| \overrightarrow{M(t)H(t)} \right\|^2 = 0,$$

on a :

$$\overrightarrow{FM}(t) \cdot \overrightarrow{FM'}(t) - \overrightarrow{M}(t) \cdot \overrightarrow{H}(t) \cdot \left( \overrightarrow{FH'}(t) - \overrightarrow{FM'}(t) \right) = 0.$$

Comme  $\overrightarrow{M(t)H(t)}$  est orthogonal à  $\overrightarrow{\mathcal{D}}$  et les points  $F, H'(t)$  sont sur l'axe des  $y$  qui est parallèle à  $\mathcal{D}$  (on a  $H(t) = (x_k, y(t))$  et  $H'(t) = (0, y'(t))$ ), les vecteurs  $\overrightarrow{M(t)H(t)}$  et  $\overrightarrow{FH'(t)}$  sont orthogonaux, de sorte que :

$$\overrightarrow{FM}(t) \cdot \overrightarrow{FM'}(t) + \overrightarrow{M}(t) \overrightarrow{H}(t) \cdot \overrightarrow{FM'}(t) = 0$$

soit :

$$\left( \overrightarrow{FM(t)} + \overrightarrow{M(t)H(t)} \right) \cdot \overrightarrow{FM'(t)} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{FH(t)} \cdot \overrightarrow{FM'(t)} = 0$$

La tangente à  $\Gamma$  en  $M(t)$  qui est la droite passant par  $M(t)$  et dirigée par  $\overrightarrow{FM'(t)}$  est donc perpendiculaire à  $[FH]$ , ce qui signifie que c'est la hauteur issue de  $M = M(t)$  dans le triangle  $MFH$ . Le triangle étant isocèle en  $M$ , on a les autres résultats. ■

De ce théorème, on déduit que tout rayon lumineux parallèle à l'axe focal  $\Delta$  se réfléchit en un rayon qui passe par le foyer. C'est le principe des miroirs paraboliques.

**Exercice 18.1** Soit  $\Gamma$  une parabole. Pour tout  $M \in \Gamma$  qui n'est pas sur l'axe focal, on désigne par  $P$  la projection orthogonale de  $M$  sur  $\Delta$  et par  $Q$  le point d'intersection de la normale à  $\Gamma$  en  $M$  avec  $\Delta$ . Montrer que la longueur  $PQ$  est constante.

**Solution 18.1** On utilise la paramétrisation :

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto \left( \frac{t^2}{2p}, t \right)$$

de  $\Gamma$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  où  $\vec{i}$  dirige  $\overrightarrow{\Delta}$  et on note  $M = \gamma(t)$  un point de  $\Gamma$ ,  $P\left(\frac{t^2}{2p}, 0\right) = P(t)$  sa projection orthogonale sur  $\Delta$  et  $Q(x_Q(t), 0) = Q(t)$  le point d'intersection de la normale à  $\Gamma$  en  $M$  avec  $\Delta$ . Avec la condition d'orthogonalité :

$$0 = \overrightarrow{QM} \cdot \gamma'(t) = \left( \frac{t^2}{2p} - x_Q(t) \right) \frac{t}{p} + t$$

et  $t \neq 0$  ( $M \notin \Delta$ ), on déduit que  $x_Q(t) = p + \frac{t^2}{2p}$  et :

$$PQ = |x_Q(t) - x_P(t)| = p = d(F, \mathcal{D}).$$

(figure ??).

## Un exemple de parabole

Considérons par exemple, dans le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni de sa base canonique  $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  la parabole ayant pour directrice la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $X + Y = 0$  et pour foyer le point  $F(2, 2)$ . La droite  $\mathcal{D}$  est dirigée par  $\vec{v} = (-1, 1)$  et pour  $M(X, Y) \in \mathbb{R}^2$  la projection orthogonale  $H(X_H, Y_H)$  de  $M$  sur  $\mathcal{D}$  est définie par :

$$\begin{cases} X_H + Y_H = 0 & (H \in \mathcal{D}) \\ -(X - X_H) + (Y - Y_H) = 0 & (\overrightarrow{HM} \cdot \vec{v} = 0) \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} X_H + Y_H = 0 \\ X_H - Y_H = X - Y \end{cases}$$

ce qui donne  $Y_H = -X_H = \frac{Y - X}{2}$ .

En particulier, pour  $M = F$ , cette projection est  $K(0, 0) = \Omega$ .

La condition  $MF = MH$  se traduit alors par :

$$(X - 2)^2 + (Y - 2)^2 = \frac{(X + Y)^2}{2}$$

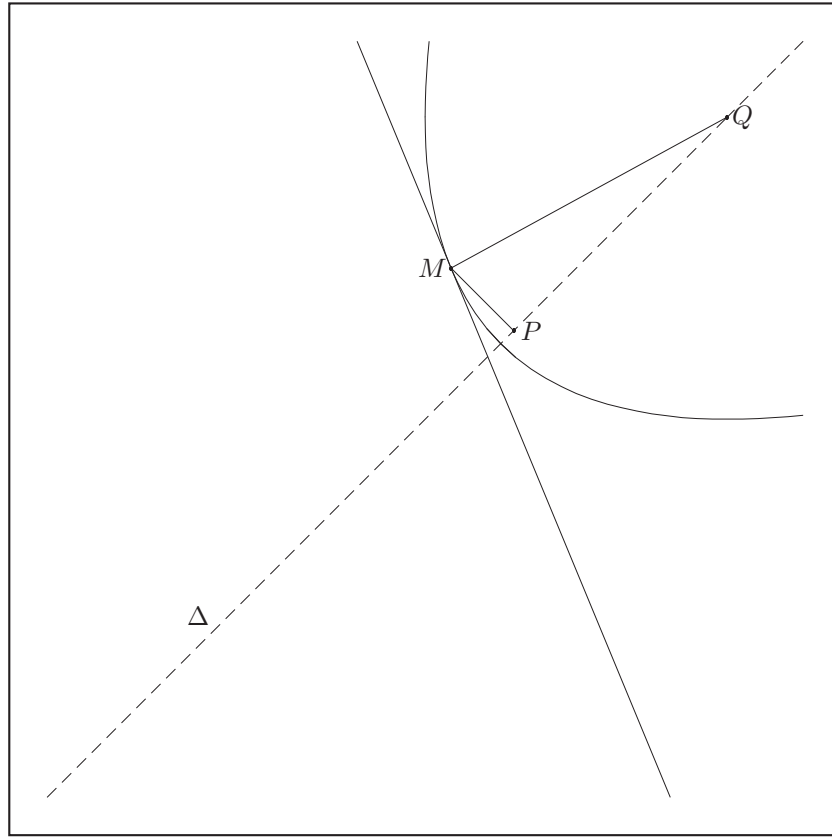


FIG. 18.6 – Sous-normale à une parabole

ou encore :

$$X^2 + Y^2 - 2XY - 8(X + Y) + 16 = 0 \quad (18.2)$$

(c'est l'équation de la parabole dans le repère  $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ).

Sur la figure 18.7, on représente cette parabole avec la construction du point intersection de la perpendiculaire  $D_H$  à  $\mathcal{D}$  passant par  $H(-1, 1)$  et de la médiatrice de  $[HF]$ .

Le paramètre  $p$  de cette parabole est  $p = KF = \|\vec{\Omega F}\| = 2\sqrt{2}$ , le sommet est le milieu  $O(1, 1)$  de  $[KF]$  (c'est aussi le point d'intersection de la parabole avec l'axe focal d'équation  $Y = X$ , ce qui donne  $2X^2 - 2X^2 - 16X + 16 = 0$ ) et dans un repère adapté, une équation est  $y^2 = 2px = 4\sqrt{2}x$ . Ce repère est  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $O(1, 1)$ ,  $\vec{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$  et  $\vec{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ .

Nous verrons plus loin comment trouver la directrice et le foyer d'une parabole définie par une équation du type 18.2.

### Intersection d'une parabole et d'une droite

Soit  $\Gamma$  une parabole et  $y^2 = 2px$  une équation réduite dans un repère adapté.

Les points d'intersection de cette parabole avec une droite d'équation  $ax + by + c = 0$  où  $(a, b) \neq (0, 0)$  sont obtenus en résolvant le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

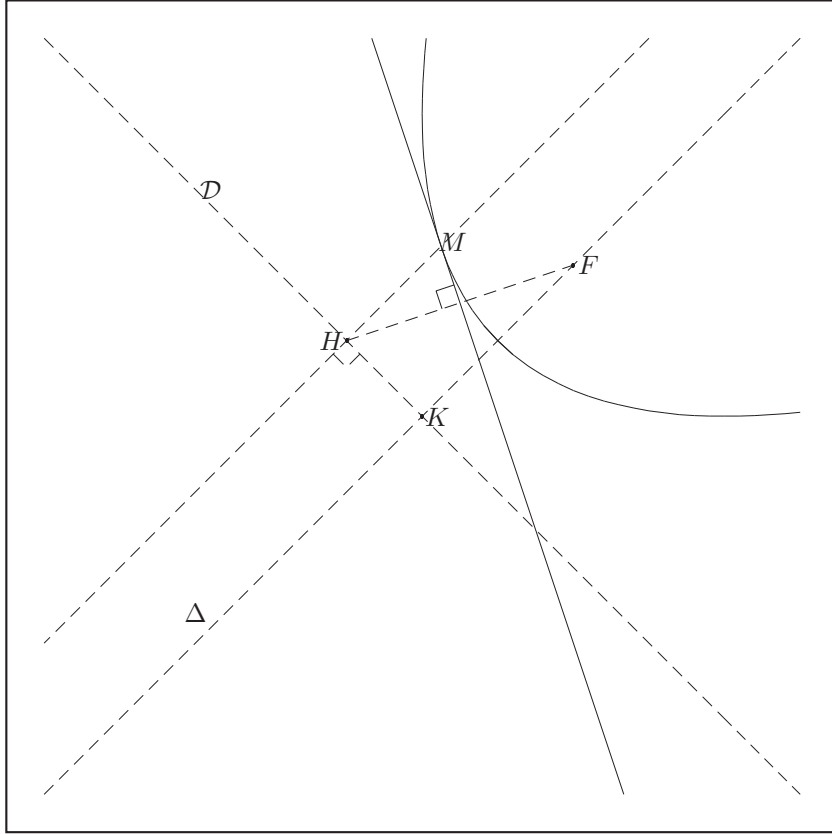


FIG. 18.7 – Parabole :  $X^2 + Y^2 - 2XY - 8(X + Y) + 16 = 0$

Si la droite est parallèle à l'axe focal  $\Delta$  (l'axe des abscisses), on a alors  $a = 0$ ,  $b \neq 0$  et le système d'équations précédent nous donne :

$$\begin{cases} y = -\frac{c}{b} \\ x = \frac{y^2}{2p} = \frac{c^2}{2pb^2} \end{cases}$$

ce qui donne un unique point d'intersection, à savoir  $M = \left( \frac{c^2}{2pb^2}, -\frac{c}{b} \right)$ .

On peut remarquer qu'on a une infinité de telles droites coupant  $\Gamma$  en un seul point et aucune de ces droites n'est tangente à  $\Gamma$ .

Si cette droite n'est pas parallèle à l'axe focal, on a alors  $a \neq 0$  et une équation de la droite est  $x = \alpha y + \beta$  et du système :

$$\begin{cases} x = \alpha y + \beta \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

on déduit que  $y$  est solution de l'équation de degré 2 :

$$y^2 - 2p\alpha y - 2p\beta = 0$$

qui peut avoir 0, 1 ou 2 solutions réelles.

On aura un unique solution si, et seulement si,  $\delta = p^2\alpha^2 + 2p\beta = 0$ , ce qui équivaut à  $\beta = -\frac{p\alpha^2}{2}$  et l'équation de la droite est  $x = \alpha y - \frac{p\alpha^2}{2}$ , le point d'intersection étant  $M_0 =$

$(x_0, y_0) = \left( \frac{p\alpha^2}{2}, p\alpha \right)$ . La droite a donc pour équation :

$$x = \frac{y_0}{p}y - x_0 = \frac{y_0}{p}(y - y_0) + \frac{y_0^2}{p} - x_0 = \frac{y_0}{p}(y - y_0) + 2x_0 - x_0$$

ou encore  $p(x - x_0) - y_0(y - y_0) = 0$  et cette droite est la tangente à  $\Gamma$  en  $M_0$ .

Réciproquement, les tangentes à  $\Gamma$  sont les droites non parallèles à l'axe focal qui coupent  $\Gamma$  en un seul point.

### 18.2.2 Les coniques à centres, ellipses et hyperboles

On suppose pour ce paragraphe que  $e \neq 1$ , c'est-à-dire que  $\Gamma$  est une ellipse ou une hyperbole. Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on a une équation :

$$(M \in \Gamma) \Leftrightarrow ((1 - e^2)x^2 + y^2 - 2(x_F - e^2x_K)x = e^2x_K^2 - x_F^2) \quad (18.3)$$

#### Équation réduite des coniques à centre

On choisit l'origine  $O$  sur l'axe focal  $\Delta$  de sorte que  $x_F - e^2x_K = 0$ , ce qui équivaut à  $\overrightarrow{OF} - e^2\overrightarrow{OK} = \vec{0}$  et revient à dire que  $O$  est le barycentre de  $\{(F, 1), (K, -e^2)\}$  (on a  $1 - e^2 \neq 0$ ).

En désignant par  $A$  et  $A'$  les points d'intersection de la conique  $\Gamma$  avec son axe focal  $\Delta$ , on a :

$$x_A = \frac{x_F + ex_K}{1 + e} = ex_K \text{ et } x_{A'} = \frac{x_F - ex_K}{1 - e} = -ex_K$$

c'est-à-dire que  $O$  est le milieu de  $[AA']$ .

En notant  $a = x_A$  l'abscisse de  $A$  dans ce repère, on a  $K\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ ,  $F(ea, 0)$  et (18.3) devient :

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2 - a^2e^2$$

ou encore :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

Avec cette équation, on retrouve le fait que  $\Delta$  est un axe de symétrie et on constate aussi que le point  $O$ , milieu de  $[AA']$  est un centre de symétrie et l'axe des  $y$ , à savoir la perpendiculaire à  $\Delta$  passant par  $O$  est un axe de symétrie.

Précisément, on déduit de cette équation le résultat suivant.

**Théorème 18.5** *Si  $\Gamma$  est une conique d'excentricité  $e \neq 1$ , alors :*

1.  $\Gamma$  a un unique centre de symétrie qui est le milieu  $O$  de  $[AA']$ , où  $A$  est le barycentre de  $\{(F, 1), (K, e)\}$  et  $A'$  celui de  $\{(F, 1), (K, -e)\}$ ;
2.  $\Gamma$  est aussi la conique de directrice  $\mathcal{D}'$ , de foyer  $F'$  et d'excentricité  $e$ , où  $\mathcal{D}'$  [resp.  $F'$ ] est le symétrique de  $\mathcal{D}$  [resp.  $F$ ] par rapport à  $O$ .

On dit que le point  $O$  est le centre de la conique et que  $\Gamma$  est une conique à centre.

**Exercice 18.2** *Montrer que les paraboles n'ont pas de centre de symétrie.*

Pour  $e > 1$ ,  $\Gamma$  est une hyperbole et en posant  $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ , elle a pour équation réduite dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On dit que  $a$  est le demi axe (ou que  $2a$  est l'axe) de l'hyperbole.

On peut remarquer que l'axe des  $x$  (l'axe focal) coupe l'hyperbole en  $A(a, 0)$  et  $A'(-a, 0)$  et que l'axe des  $y$  ne coupe pas  $\Gamma$ .

On dit que les points  $A, A'$  sont les sommets de l'hyperbole.

L'excentricité est  $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ , la directrice  $\mathcal{D}$  a pour équation  $x = x_K = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  et le foyer est  $F(x_F, 0)$  avec  $x_F = ea = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Réciproquement une courbe  $\Gamma$  d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans un repère orthonormé est une hyperbole d'excentricité, directrice et foyer définis ci-dessus (il suffit de remonter les calculs).

De  $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$ , on déduit que  $x^2 \geq a^2$  et l'hyperbole est strictement contenu dans  $\mathcal{P}$  privé de la bande délimité par les droites  $\mathcal{D}$  (d'équation  $x = x_K = \frac{a}{e}$ ) et  $\mathcal{D}'$  (d'équation  $x = -\frac{a}{e}$ ).

On déduit de cette équation implicite que la tangente à l'hyperbole  $\Gamma$  en  $M_0(x_0, y_0)$  a pour équation :

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

ce qui peut encore s'écrire compte tenu de  $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$  :

$$\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1.$$

Pour  $e < 1$ ,  $\Gamma$  est une ellipse et en posant  $b^2 = a^2(1 - e^2)$ , elle a pour équation dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec  $0 < b < a$ .

L'excentricité est  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ , la directrice  $\mathcal{D}$  a pour équation  $x = x_K = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$  et le foyer est  $F(x_F, 0)$  avec  $x_F = ea = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

Réciproquement une courbe  $\Gamma$  d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  avec  $0 < b < a$  dans un repère orthonormé est une ellipse d'excentricité, directrice et foyer définis ci-dessus (il suffit de remonter les calculs).

**Remarque 18.2** Pour  $a = b$ , l'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  définit un cercle qui n'est pas une ellipse définie par directrice foyer et excentricité (on verra qu'un cercle peut être vu comme une ellipse d'excentricité nulle et de directrice rejetée à l'infini).

On dit que  $a$  est le demi grand axe (ou que  $2a$  est le grand axe) et que  $b$  est le demi petit axe (ou que  $2b$  est le petit axe) de l'ellipse.

On peut remarquer que l'axe des  $x$  coupe l'ellipse en  $A(a, 0)$  et  $A'(-a, 0)$  et que l'axe des  $y$  la coupe en  $B(0, b)$  et  $B'(0, -b)$ .

On dit que les points  $A, A', B, B'$  sont les sommets de l'ellipse.

**Remarque 18.3** En utilisant le théorème de Pythagore, on a :

$$FB^2 = OB^2 + OF^2 = b^2 + e^2 a^2 = a^2.$$

Il en résulte que :

$$FB = FB' = F'B = F'B' = a$$

De  $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ , on déduit que  $x^2 \leq a^2 < \frac{a^2}{e^2}$ , soit  $-\frac{a}{e} < x < \frac{a}{e}$  et l'ellipse est strictement contenu dans la bande délimitée par les droites  $\mathcal{D}$  (d'équation  $x = x_K = \frac{a}{e}$ ) et  $\mathcal{D}'$  (d'équation  $x = -\frac{a}{e}$ ).

On déduit de cette équation implicite que la tangente à l'ellipse  $\Gamma$  en  $M_0(x_0, y_0)$  a pour équation :

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

ce qui peut encore s'écrire compte tenu de  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$  :

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1.$$

**Exercice 18.3** Soit  $\Gamma$  une ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , avec  $0 < b < a$ .

Montrer que le produit des distances des foyers de  $\Gamma$  à une tangente quelconque est constant égal à  $b^2$  (le carré du demi petit axe).

**Solution 18.2** On a  $F(x_F, 0)$  et  $F'(-x_F, 0)$  avec  $x_F = ea = \sqrt{a^2 - b^2}$  et la tangente  $T_0$  à  $\Gamma$  en  $M_0(x_0, y_0)$  a pour équation :

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1.$$

avec  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ .

La distance d'un point  $M$  à  $T_0$  est donnée par :

$$d(M, T_0) = \frac{\left| \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - 1 \right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}$$

et :

$$\begin{aligned} d(F, T_0) d(F', T_0) &= \frac{\left| \frac{x_0}{a^2}x_F - 1 \right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} \frac{\left| \frac{x_0}{a^2}x_F + 1 \right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{\left| \frac{x_0^2}{a^4}x_F^2 - 1 \right|}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \\ &= b^4 \frac{|x_0^2 x_F^2 - a^4|}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} = b^4 \frac{|x_0^2 (a^2 - b^2) - a^4|}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} \end{aligned}$$

ce qui s'écrit, compte tenu de  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$  :

$$\begin{aligned} d(F, T_0) d(F', T_0) &= b^4 \frac{|x_0^2(a^2 - b^2) - a^4|}{b^4 x_0^2 + a^4 b^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)} \\ &= b^2 \frac{|x_0^2(a^2 - b^2) - a^4|}{b^2 x_0^2 + a^4 - a^2 x_0^2} = b^2. \end{aligned}$$

### Paramétrisation des coniques à centre

Ces équations implicites de  $\Gamma$  permettent d'obtenir des paramétrisation.

Pour l'hyperbole, en posant  $y = b \operatorname{sh}(t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$  ( $\operatorname{sh}$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ ), on a  $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \operatorname{sh}^2(t) = \operatorname{ch}^2(t)$  et  $x = \pm a \operatorname{ch}(t)$  où  $\pm$  est le signe de  $x$ . Réciproquement tout point  $(\pm a \operatorname{ch}(t), b \operatorname{sh}(t))$  est sur l'hyperbole. On a donc  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont les courbes d'équations paramétriques respectives :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma_1(t) = (a \operatorname{ch}(t), b \operatorname{sh}(t))$$

et :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma_2(t) = (-a \operatorname{ch}(t), b \operatorname{sh}(t))$$

$\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont les deux branches de l'hyperbole.

De  $\gamma_2(-t) = -\gamma_1(t)$ , on déduit que  $\Gamma_2$  est l'image de  $\Gamma_1$  par la symétrie de centre  $O$ .

Ces paramétrisations nous permettent un tracé de  $\Gamma$ . Pour ce faire, il suffit de tracer  $\Gamma_1$ . L'étude de  $\gamma_1$  se fait pour  $t \geq 0$  puis on complète le graphe obtenu par symétrie par rapport à l'axe  $Ox$ . Les fonctions  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$  sont strictement croissantes, avec  $\gamma_1'(0) = b \vec{j}$ , on déduit qu'on a une tangente verticale en  $A(a, 0)$  et avec  $\frac{y_1(t)}{x_1(t)} = \frac{b e^t - e^{-t}}{a e^t + e^{-t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{b}{a}$ , on déduit que la droite d'équation  $ay - bx = 0$  est asymptote à l'infini.

De même avec  $\frac{y_1(t)}{x_1(t)} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} -\frac{b}{a}$ , on déduit que la droite d'équation  $ay + bx = 0$  est asymptote à l'infini.

Les tracés de  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma$  s'en suivent.

Pour  $a = b$ , les diagonales d'équations  $y = x$  et  $y = -x$  sont asymptotes et on dit que  $\Gamma$  est une hyperbole équilatère (les asymptotes sont perpendiculaires). Dans ce cas, de  $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ , on déduit que  $e = \sqrt{2}$ .

Une hyperbole équilatère est donc une conique d'excentricité  $\sqrt{2}$ .

Une autre paramétrisation peut s'obtenir comme suit.

En posant  $y = b \tan(t)$  avec  $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  ( $\tan$  est bijective de  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  sur  $\mathbb{R}$ ), on a  $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$  et  $x = \pm \frac{a}{\cos(t)}$ . Réciproquement tout point  $\left(\pm \frac{a}{\cos(t)}, b \tan(t)\right)$  est sur l'hyperbole. On a donc  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont les courbes d'équations paramétriques respectives :

$$t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \mapsto \gamma_1(t) = \left(\frac{a}{\cos(t)}, b \tan(t)\right)$$

et :

$$t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \mapsto \gamma_2(t) = \left(-\frac{a}{\cos(t)}, b \tan(t)\right)$$



En posant  $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ , on a  $u \in ]-1, 1[$ ,  $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ,  $\tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}$  et les paramétrisations :

$$u \in ]-1, 1[ \mapsto \left( \pm a \frac{1+u^2}{1-u^2}, b \frac{2u}{1-u^2} \right).$$

Pour l'ellipse, le résultat qui suit nous conduit à une paramétrisation.

**Théorème 18.6** *Si  $x, y$  sont deux réels tels que  $x^2 + y^2 = 1$ , il existe alors un unique réel  $t \in [-\pi, \pi[$  tel que  $x = \cos(t)$  et  $y = \sin(t)$ .*

**Démonstration.** Comme  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x$  est dans  $[-1, 1]$  et il existe un unique réel  $\alpha \in [0, \pi]$  tel que  $x = \cos(\alpha)$ . Avec  $y^2 = 1 - x^2 = \sin^2(\alpha)$ , on déduit que  $y = \pm \sin(\alpha)$ , soit  $y = \sin(\pm\alpha)$ . Avec la parité de la fonction  $\cos$ , on peut écrire que  $x = \cos(\pm\alpha)$  et on aboutit à  $(x, y) = (\cos(t), \sin(t))$  avec  $t \in [-\pi, \pi[$  (pour  $(x, y) = (\cos(\pi), \sin(\pi)) = (-1, 0)$ , on écrit  $(x, y) = (\cos(-\pi), \sin(-\pi))$ ).

Si  $t' \in [-\pi, \pi[$  est une autre solution, de  $\cos(t) = \cos(t')$ , on déduit que  $t' = \pm t$ . Si  $t' = t$ , c'est terminé, sinon  $t' = -t$  et de  $\sin(t) = \sin(t') = -\sin(t)$ , on déduit que  $t$  vaut 0 ou  $-\pi$ , 0 étant la seule solution puisque  $t' = \pi \notin [-\pi, \pi[$ . D'où l'unicité. ■

On en déduit la paramétrisation de l'ellipse :

$$t \in [-\pi, \pi[ \mapsto \gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$$

Là encore, cette paramétrisation permet un tracé de l'ellipse. L'étude se fait pour  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  puis on complète par symétrie par rapport aux axes. On a des tangentes verticales en  $A, A'$  et des tangentes horizontales en  $B, B'$ .

## Un exemple d'hyperbole

Considérons dans le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni de sa base canonique  $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  l'hyperbole ayant pour excentricité  $e = 2$ , pour directrice la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $X + Y = 0$  et pour foyer le point  $F(2, 2)$ . La droite  $\mathcal{D}$  est dirigée par  $\vec{v} = (-1, 1)$  et pour  $M(X, Y) \in \mathbb{R}^2$  on a déjà vu que la projection orthogonale  $H(X_H, Y_H)$  de  $M$  sur  $\mathcal{D}$  est définie par  $Y_H = -X_H = \frac{Y - X}{2}$ .

En particulier, pour  $M = F$ , cette projection est  $K(0, 0) = \Omega$ .

La condition  $MF = 2MH$  se traduit alors par :

$$(X - 2)^2 + (Y - 2)^2 = 2(X + Y)^2$$

ou encore :

$$X^2 + Y^2 + 4XY + 4(X + Y) - 8 = 0 \quad (18.4)$$

(c'est l'équation de l'hyperbole dans le repère  $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ).

Les sommets de cette hyperbole sont les points d'intersection avec l'axe focal d'équation  $Y = X$ , ce qui donne l'équation  $3X^2 + 4X - 4 = 0$  de racines  $-2$  et  $\frac{2}{3}$  et les sommets  $A\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$  et  $A'(-2, -2)$ .

Le centre est le milieu de  $[AA']$ , soit  $O\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ .

Le demi axe est  $a = OA = \frac{4\sqrt{2}}{3}$  et dans un repère adapté, une équation est  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  où  $b = a\sqrt{e^2 - 1} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ . Ce repère est  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $O\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ,  $\vec{i} = \frac{3}{4\sqrt{2}}\vec{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ ,

$\vec{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$  et l'équation est :

$$9x^2 - 3y^2 = 32.$$

(figure 18.8).

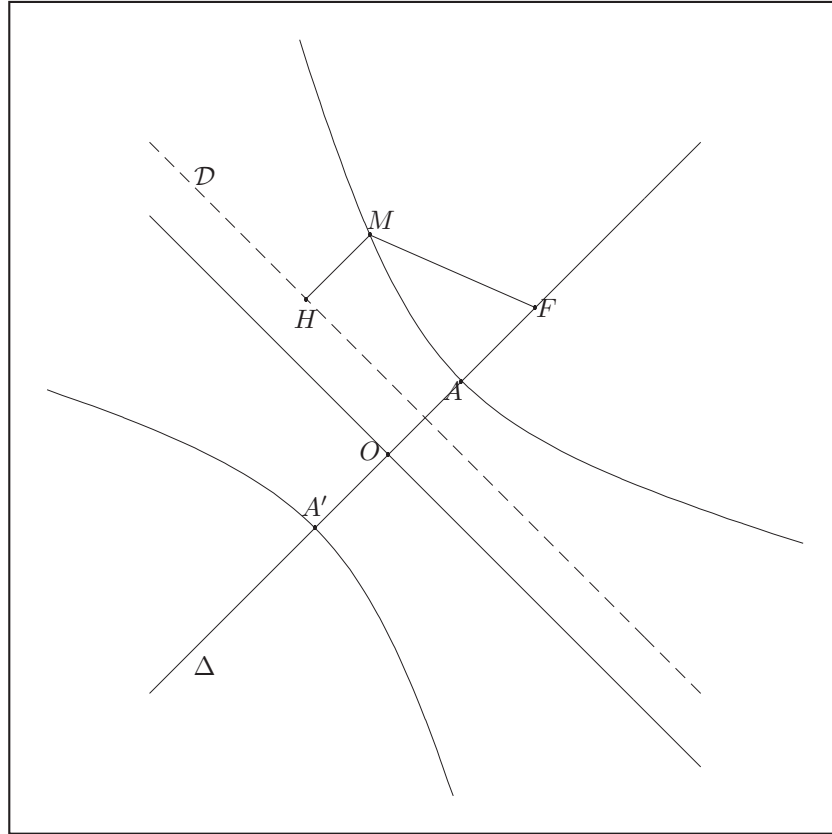


FIG. 18.8 – Hyperbole :  $X^2 + Y^2 + 4XY + 4(X + Y) - 8 = 0$

### Un exemple d'ellipse

Considérons aussi, dans le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni de sa base canonique  $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  l'ellipse ayant pour excentricité  $e = \frac{1}{2}$ , pour directrice la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $X + Y = 0$  et pour foyer le point  $F(2, 2)$ . La droite  $\mathcal{D}$  est dirigée par  $\vec{v} = (-1, 1)$  et pour  $M(X, Y) \in \mathbb{R}^2$  la projection orthogonale  $H(X_H, Y_H)$  de  $M$  sur  $\mathcal{D}$  est définie par  $Y_H = -X_H = \frac{Y - X}{2}$ .

En particulier, pour  $M = F$ , cette projection est  $K(0, 0) = \Omega$ .

La condition  $MF = \frac{1}{2}MH$  se traduit alors par :

$$(X - 2)^2 + (Y - 2)^2 = \frac{(X + Y)^2}{8}$$

ou encore :

$$7X^2 + 7Y^2 - 2XY - 32(X + Y) + 64 = 0 \quad (18.5)$$

(c'est l'équation de l'ellipse dans le repère  $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ).

Les sommets de cette ellipse sont les points d'intersection de l'ellipse avec l'axe focal d'équation  $Y = X$ , ce qui donne l'équation  $3X^2 - 16X + 16 = 0$  de racines  $\frac{4}{3}$  et 4 et les sommets  $A(4, 4)$  et  $A'\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ .

Le centre est le milieu de  $[AA']$ , soit  $O\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ .

Le demi axe est  $a = OA = \frac{4}{3}\sqrt{2}$  et dans un repère adapté, une équation est  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  où  $b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ . Ce repère est  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $O\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ ,  $\vec{i} = \frac{1}{OA}\vec{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ ,  $\vec{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$  et l'équation est :

$$9x^2 + 12y^2 = 32.$$

(figure 18.9).

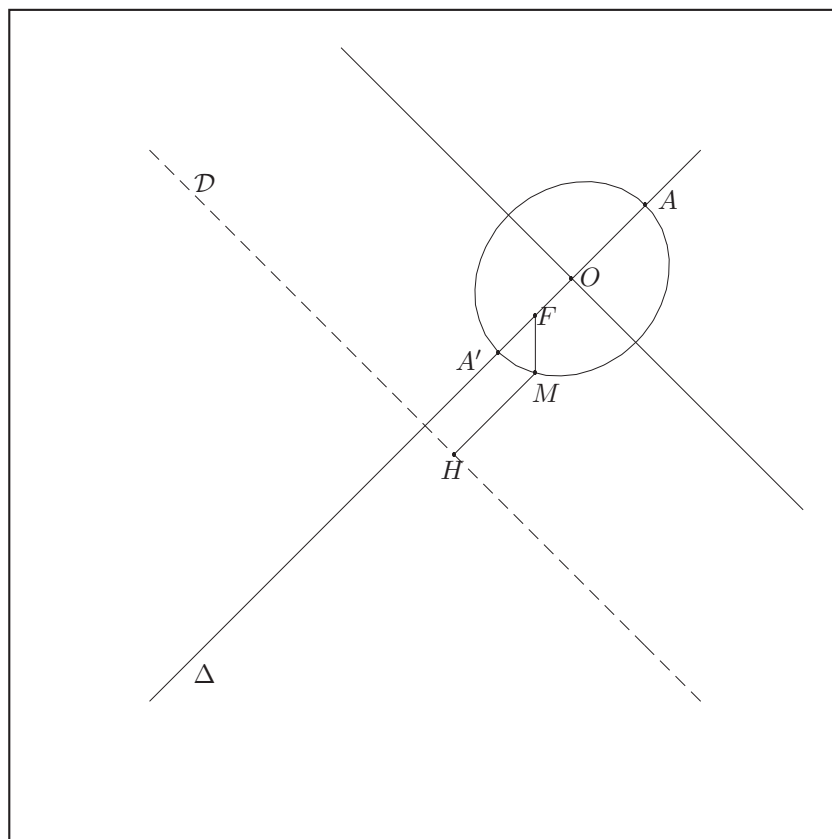


FIG. 18.9 –  $7X^2 + 7Y^2 - 2XY - 32(X + Y) + 64 = 0$

### Intersection d'une ellipse et d'une droite

Soit  $\Gamma$  une ellipse. Dans un repère orthonormé adapté  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , cette ellipse a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec  $0 < b < a$ .

On se donne une droite  $D$  d'équation :

$$ux + vy + w = 0$$

avec  $(u, v) \neq (0, 0)$ .

Un vecteur directeur de  $D$  est  $\vec{V} = (-v, u)$  et désignant par  $M_0(x_0, y_0)$  un point quelconque de  $D$ , une paramétrisation de cette droite est :

$$\begin{cases} x = x_0 - \lambda v \\ y = y_0 + \lambda u \end{cases}$$

L'intersection  $D \cap \Gamma$  est non vide si, et seulement si, il existe un réel  $\lambda$  tel que :

$$\begin{cases} x = x_0 - \lambda v \\ y = y_0 + \lambda u \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

ce qui entraîne que  $\lambda$  est solution de l'équation :

$$b^2(x_0 - \lambda v)^2 + a^2(y_0 + \lambda u)^2 = a^2b^2$$

qui est équivalente à :

$$(a^2u^2 + b^2v^2)\lambda^2 + 2(a^2uy_0 - b^2vx_0)\lambda + (a^2y_0^2 + b^2x_0^2 - a^2b^2) = 0.$$

Cette équation est de degré 2 puisque  $a^2u^2 + b^2v^2 \neq 0$  du fait que  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $(u, v) \neq (0, 0)$ . Elle a donc 0, 1 ou 2 solutions réelles.

Le discriminant de cette équation est :

$$\begin{aligned} \delta &= (a^2uy_0 - b^2vx_0)^2 - (a^2u^2 + b^2v^2)(a^2y_0^2 + b^2x_0^2 - a^2b^2) \\ &= a^2b^2(a^2u^2 + b^2v^2 - u^2x_0^2 - 2uvx_0y_0 - v^2y_0^2) \\ &= a^2b^2(a^2u^2 + b^2v^2 - (ux_0 + vy_0)^2) \end{aligned}$$

soit en tenant compte de  $ux_0 + vy_0 = -w$  ( $M_0 \in D$ ) :

$$\delta = a^2b^2(a^2u^2 + b^2v^2 - w^2).$$

On en déduit alors que :

- si  $a^2u^2 + b^2v^2 < w^2$ , alors  $\delta < 0$  et  $D$  ne coupe pas  $\Gamma$  ;
- si  $a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$ , alors  $\delta = 0$  et  $D$  coupe  $\Gamma$  en un unique point. Prenant ce point comme origine  $M_0$  de  $D$ , on a  $M_0 \in D \cap \Gamma$  et :

$$a^2y_0^2 + b^2x_0^2 - a^2b^2 = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

de sorte que :

$$0 = \delta = (a^2uy_0 - b^2vx_0)^2$$

et :

$$a^2uy_0 - b^2vx_0 = a^2b^2\left(u\frac{y_0}{b^2} - v\frac{x_0}{a^2}\right)$$

ce qui signifie que  $\vec{V} = (-v, u)$  est orthogonal au vecteur  $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$  qui est orthogonal à la tangente à  $\Gamma$  en  $M_0$ . La droite  $D$  est donc tangente à  $\Gamma$ .

- si  $a^2u^2 + b^2v^2 > w^2$ , alors  $\delta > 0$  et  $D$  coupe  $\Gamma$  en deux points distincts. En prenant pour origine  $M_0$  de  $D$  l'un de ces points de contact, on a  $\delta = (a^2uy_0 - b^2vx_0)^2 > 0$ , donc le produit scalaire de  $\vec{V}$  avec le vecteur  $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$  qui est orthogonal à la tangente à  $\Gamma$  en  $M_0$  n'est pas nul et  $D$  n'est pas tangente à  $\Gamma$  en  $M_0$ .

On a donc montré le résultat suivant.

**Théorème 18.7** *Soit  $D$  une droite d'équation  $ux + vy + w = 0$  avec  $(u, v) \neq (0, 0)$ .*

- si  $a^2u^2 + b^2v^2 < w^2$ , alors  $D$  ne coupe pas  $\Gamma$  ;
- si  $a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$ , alors  $D$  coupe  $\Gamma$  en un unique point  $M_0$  et est tangente à  $\Gamma$  en ce point ;
- si  $a^2u^2 + b^2v^2 > w^2$ , alors  $D$  coupe  $\Gamma$  en deux points distincts et n'est pas tangente à  $\Gamma$ .

Les droites tangentes à une ellipse sont donc celles qui coupent cette ellipse en un unique point (un point double). On peut remarquer que ce résultat est faux pour la parabole.

## Les théorèmes d'Appolonius

Soit  $\Gamma$  une ellipse de paramétrisation :

$$t \mapsto \gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$$

dans un repère orthonormé adapté  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Théorème 18.8 (premier théorème d'Appolonius)** *Soient  $M \in \Gamma$  et  $N \in \Gamma$  tel que la tangente à  $\Gamma$  en  $N$  soit parallèle à  $(OM)$ . L'aire du triangle  $OMN$  est alors constante égale à  $\frac{ab}{2}$  et  $OM^2 + ON^2 = a^2 + b^2$ .*

**Démonstration.** En notant  $M = \gamma(t)$ , dire que la tangente à  $\Gamma$  en  $N = \gamma(t')$  est parallèle à  $OM$  équivaut à dire que :

$$\begin{aligned} \det(\gamma(t), \gamma'(t')) &= \begin{vmatrix} a \cos(t) & -a \sin(t') \\ b \sin(t) & b \cos(t') \end{vmatrix} \\ &= ab(\cos(t) \cos(t') + \sin(t) \sin(t')) \\ &= ab \cos(t - t') = 0 \end{aligned}$$

ce qui est encore équivalent à  $t' = t \pm \frac{\pi}{2}$  modulo  $2\pi$  et donne deux possibilités pour  $N$ .

L'aire du triangle  $OMN$  est alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} |\det(\gamma(t), \gamma(t'))| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a \cos(t) & a \cos(t') \\ b \sin(t) & b \sin(t') \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} ab |\cos(t) \sin(t') - \sin(t) \cos(t')| \\ &= \frac{1}{2} ab |\sin(t' - t)| = \frac{1}{2} ab. \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} OM^2 + ON^2 &= a^2 (\cos^2(\theta) + \cos^2(\theta')) + b^2 (\sin^2(\theta) + \sin^2(\theta')) \\ &= a^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + b^2 (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

■

**Théorème 18.9 (deuxième théorème d'Appolonius)** *En gardant les notations du théorème précédent, on désigne par  $I$  la projection de  $M$  sur l'axe focal (l'axe des abscisses) et par  $J$  celle de  $N$ . On a alors :*

$$OI^2 + OJ^2 = a^2.$$

**Démonstration.** On a :

$$\begin{aligned} OI^2 + OJ^2 &= a^2 (\cos^2(\theta) + \cos^2(\theta')) \\ &= a^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = a^2. \end{aligned}$$

■

### Projection orthogonale d'un cercle de l'espace sur un plan

Les ellipses peuvent aussi être vues comme les projections orthogonales d'un cercle de l'espace euclidien sur un plan.

**Théorème 18.10** *Soient  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  deux plans non orthogonaux de l'espace et  $\mathcal{C}$  un cercle inclus dans  $\mathcal{P}$ . La projection orthogonale de  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{P}'$  est une ellipse ou un cercle.*

Si les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont orthogonaux, cette projection est alors un segment que l'on peut voir comme une ellipse écrasée.

### 18.2.3 Construction des tangentes à une conique

Un procédé de construction de la tangente à une conique en point  $M$  qui n'est pas sur l'axe focal est donné par le résultat suivant.

**Théorème 18.11** *Soient  $\Gamma$  une conique et  $M$  un point de  $\Gamma$  qui n'est pas sur l'axe focal  $\Delta$ . La tangente à  $\Gamma$  en  $M$  coupe la directrice  $\mathcal{D}$  en un point  $T$  tel que le triangle  $MFT$  soit rectangle en  $F$  (figure 18.10).*

**Démonstration.** Soit  $\gamma : t \mapsto M(t)$  une paramétrisation régulière de  $\Gamma$  dans un repère orthonormé  $(F, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $\vec{i} = \frac{1}{FK} \overrightarrow{FK}$ .

En dérivant l'égalité  $\|\overrightarrow{MF}\| = e \|\overrightarrow{MH}\|$ , on a :

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{MF}\|} \overrightarrow{MF} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{MF} = \frac{e}{\|\overrightarrow{MH}\|} \overrightarrow{MH} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{MH}.$$

avec  $\frac{1}{\|\overrightarrow{MH}\|} \overrightarrow{MH} = \pm \vec{i}$  puisque ces deux vecteurs sont colinéaires et de norme 1 et en notant  $\vec{u}(t) = \frac{1}{\|\overrightarrow{MF}\|} \overrightarrow{MF}$ , on a :

$$\vec{u}(t) \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{MF} = \pm e \vec{i} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{MH},$$

avec :

$$\vec{i} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{MH} = \vec{i} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{MF} + \vec{i} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{FH}$$

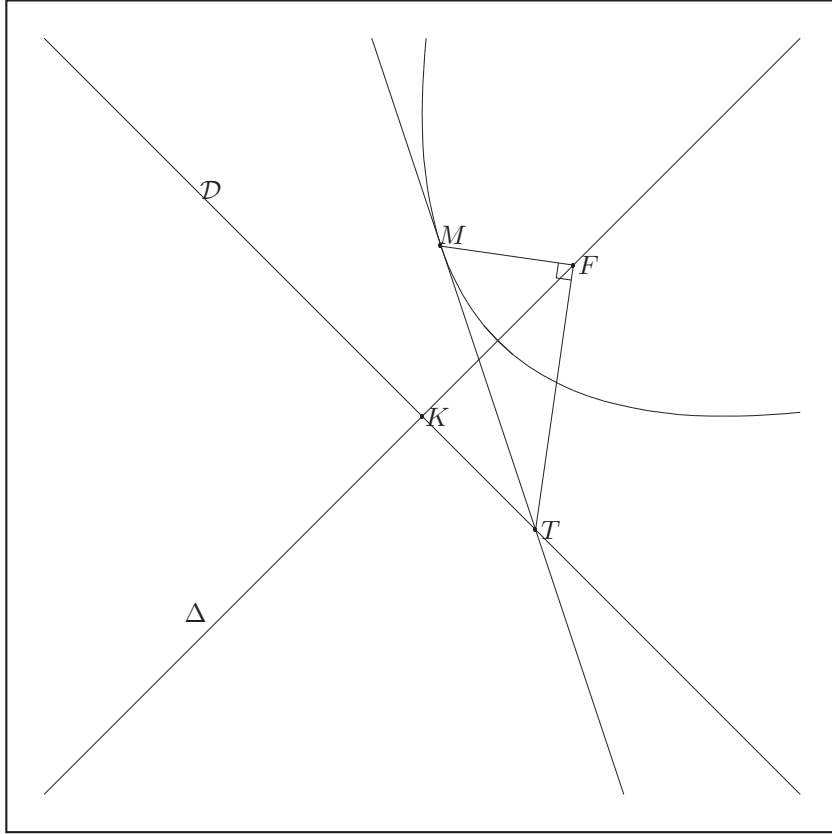


FIG. 18.10 – Tangente en un point d'une conique

et :

$$\vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{FH} = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \overrightarrow{FH}) = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot (\overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KH})) = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \overrightarrow{FK}) = 0$$

du fait que  $\overrightarrow{KH}$  est orthogonal à  $\vec{v}$  et  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{FK} = \|\overrightarrow{FK}\|$  ne dépend pas de  $t$ . On a donc :

$$\overrightarrow{u(t)} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{MF} = \pm e \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{MF}.$$

Si  $T$  est le point d'intersection de la tangente à  $\Gamma$  en  $M$  avec la directrice  $\mathcal{D}$ , on a  $\overrightarrow{MT} = \lambda \frac{d}{dt} \overrightarrow{MF}$  et :

$$\overrightarrow{u(t)} \cdot \overrightarrow{MT} = \lambda \overrightarrow{u(t)} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{MF} = \lambda e (\pm \vec{v}) \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{MF} = e (\pm \vec{v}) \cdot \overrightarrow{MT}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT} &= \overrightarrow{FM} \cdot (\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MT}) = \|\overrightarrow{MF}\|^2 - \|\overrightarrow{MF}\| \overrightarrow{u(t)} \cdot \overrightarrow{MT} \\ &= \|\overrightarrow{MF}\| (\|\overrightarrow{MF}\| - e (\pm \vec{v}) \cdot \overrightarrow{MT}) \end{aligned}$$

avec :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{MT} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{MH} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{HT} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{MH} = \pm \|\overrightarrow{MH}\|,$$

ce qui donne en définitive :

$$\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT} = \|\overrightarrow{MF}\| (\|\overrightarrow{MF}\| - e \|\overrightarrow{MH}\|) = 0,$$

c'est-à-dire que le triangle  $MFT$  est rectangle en  $F$ . ■

### 18.3 Définition bifocale des coniques à centre

On a vu qu'une conique à centre a deux foyers et deux directrices (théorème 18.5).

De ce résultat nous allons déduire une autre caractérisation métrique des coniques à centre.

**Théorème 18.12** *Soit  $\Gamma$  une ellipse de directrice  $\mathcal{D}$ , de foyer  $F$  et d'excentricité  $e < 1$ . En désignant par  $F'$  le deuxième foyer de  $\Gamma$  (le symétrique de  $F$  par rapport au centre  $O$  de  $\Gamma$ ) et par  $2a$  le grand axe, on a :*

$$\Gamma \subset \{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$$

avec  $2a > FF'$ .

**Démonstration.** On se place dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $O$  est le centre de  $\Gamma$  et  $\vec{i} = \frac{1}{OA} \overrightarrow{OA}$ . Dans ce repère, en notant  $a = OA$ , on a  $K\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ ,  $F(ea, 0)$ ,  $F'(-ea, 0)$  et pour tout point  $M(x, y)$  de l'ellipse, on a :

$$MF^2 = (x - ea)^2 + y^2 = e^2 MH^2 = e^2 \left(x - \frac{a}{e}\right)^2$$

soit :

$$MF = e \left|x - \frac{a}{e}\right|$$

et :

$$(MF')^2 = (x + ea)^2 + y^2 = e^2 (MH')^2 = e^2 \left(x + \frac{a}{e}\right)^2$$

soit :

$$MF' = e \left|x + \frac{a}{e}\right|$$

Sachant que  $x^2 \leq a^2 < \frac{a^2}{e^2}$  (dédit de  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  et  $e < 1$ ), on déduit que  $-\frac{a}{e} < x < \frac{a}{e}$  et :

$$MF + MF' = e \left(\frac{a}{e} - x\right) + e \left(x + \frac{a}{e}\right) = 2a.$$

De plus  $FF' = 2ea < 2a$  puisque  $e < 1$ . ■

On peut aussi remarquer que l'encadrement  $-\frac{a}{e} < x < \frac{a}{e}$  pour  $M(x, y) \in \Gamma$  nous dit que l'ellipse  $\Gamma$  est strictement contenue dans la bande verticale limitée par les directrices  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  (d'équations respectives  $x = \frac{a}{e}$  et  $x = -\frac{a}{e}$ ). Il en résulte que tout point  $M$  de l'ellipse est à l'intérieur du segment  $[HH']$  et en conséquence :

$$MF + MF' = e(MH + MH') = eHH' = eKK' = 2a.$$

Réciproquement, on a le résultat suivant.

**Théorème 18.13** *Si  $F, F'$  sont deux points distincts de  $\mathcal{P}$  et  $a$  un réel tel que  $2a > FF'$ , alors l'ensemble :*

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$$

*est une ellipse de foyers  $F, F'$  et de grand axe  $2a$ .*



**Démonstration.** On note  $O$  le milieu de  $[FF']$  et on se place dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $\vec{i} = \frac{1}{OF} \overrightarrow{OF}$ . Les calculs précédents nous conduisent à poser  $x_F = OF = ea$ , soit  $e = \frac{OF}{a} = \frac{FF'}{2a} < 1$  et à définir la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $x = \frac{a}{e}$ .

De  $MF + MF' = 2a$ , on déduit que :

$$MF^2 - (MF')^2 = (MF + MF')(MF - MF') = 2a(MF - MF')$$

avec :

$$MF^2 = (x - ea)^2 + y^2 \text{ et } (MF')^2 = (x + ea)^2 + y^2$$

ce qui donne :

$$2a(MF - MF') = -2eax$$

et de :

$$\begin{cases} MF + MF' = 2a \\ MF - MF' = -2ex \end{cases}$$

on déduit que :

$$MF = a - ex > 0.$$

Le projeté orthogonal de  $M \in \Gamma$  sur  $\mathcal{D}$  étant  $H\left(\frac{a}{e}, y\right)$ , on a :

$$MH = \left| \frac{a}{e} - x \right| = \frac{1}{e}(a - ex)$$

et  $MF = eMH$ . Donc  $\Gamma$  est contenu dans l'ellipse de foyers  $F, F'$  et de grand axe  $2a$ .

La réciproque a été établie avec le théorème précédent.

On peut aussi travailler analytiquement toujours dans le même repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

La condition  $MF + MF' = 2a$  équivaut à  $MF^2 + MF'^2 + 2MF \cdot MF' = 4a^2$ , soit à :

$$(x - ea)^2 + y^2 + (x + ea)^2 + y^2 + 2MF \cdot MF' = 4a^2$$

ou encore à :

$$x^2 + y^2 + e^2a^2 + MF \cdot MF' = 2a^2$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$MF \cdot MF' = 2a^2 - x^2 - y^2 - e^2a^2$$

On a donc :

$$\begin{aligned} (M \in \Gamma) &\Rightarrow (MF^2 \cdot MF'^2 = (2a^2 - x^2 - y^2 - e^2a^2)^2) \\ &\Rightarrow ((x - ea)^2 + y^2)((x + ea)^2 + y^2) = (2a^2 - x^2 - y^2 - e^2a^2)^2 \\ &\Rightarrow ((1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)) \end{aligned}$$

avec  $0 < e < 1$  et  $\Gamma$  est contenu dans l'ellipse de foyers  $F, F'$  et de grand axe  $2a$ .

Réciproquement si  $M$  est un point de l'ellipse de foyers  $F, F'$  et de grand axe  $2a$ , ses coordonnées vérifient l'équation  $x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = a^2$ , ce qui équivaut à :

$$MF^2 \cdot MF'^2 = (2a^2 - x^2 - y^2 - e^2a^2)^2$$

et avec  $x^2 \leq a^2$ ,  $\frac{y^2}{1-e^2} \leq a^2$ , on déduit que :

$$2a^2 - x^2 - y^2 - e^2a^2 = (a^2 - x^2) + (1 - e^2) \left( a^2 - \frac{y^2}{1-e^2} \right) \geq 0$$

et  $MF \cdot MF' = 2a^2 - x^2 - y^2 - e^2a^2$ , ce qui équivaut à  $MF + MF' = 2a$ . ■

**Remarque 18.4** Dans le cas où les foyers  $F$  et  $F'$  sont confondus, on obtient le cercle d'équation  $MF = a$  que l'on peut voir comme une ellipse d'excentricité nulle et de directrice rejetée à l'infini.

**Remarque 18.5** Si  $M \in \mathcal{P}$  est tel que  $MF + MF' = 2a$  où  $a > 0$  est donné, en utilisant l'inégalité triangulaire, on déduit que :

$$FF' \leq FM + MF' = 2a$$

l'inégalité étant stricte si  $M \notin [FF']$ , en conséquence l'ensemble  $\{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$  est vide si  $2a < FF'$  et pour  $2a = FF'$  c'est le segment  $[FF']$ .

Pour ce qui est des hyperboles, on a des résultats similaires.

**Théorème 18.14** Soit  $\Gamma$  une hyperbole de directrice  $\mathcal{D}$ , de foyer  $F$  et d'excentricité  $e > 1$ . En désignant par  $F'$  le deuxième foyer de  $\Gamma$  (le symétrique de  $F$  par rapport au centre  $O$  de  $\Gamma$ ) et par  $2a$  le grand axe, on a :

$$\Gamma \subset \{M \in \mathcal{P} \mid |MF - MF'| = 2a\}$$

avec  $2a < FF'$ .

**Démonstration.** On se place dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $O$  est le centre de  $\Gamma$  et  $\vec{i} = \frac{1}{OA} \vec{OA}$ . Dans ce repère, en notant  $a = OA$ , on a  $K\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ ,  $F(ea, 0)$  et  $F'(-ea, 0)$  et pour tout point  $M(x, y)$  de l'hyperbole, on a :

$$MF^2 = (x - ea)^2 + y^2 = e^2 MH^2 = e^2 \left(x - \frac{a}{e}\right)^2$$

soit :

$$MF = e \left| x - \frac{a}{e} \right|$$

et :

$$(MF')^2 = (x + ea)^2 + y^2 = e^2 (MH')^2 = e^2 \left(x + \frac{a}{e}\right)^2$$

soit :

$$MF' = e \left| x + \frac{a}{e} \right|$$

Sachant que  $x^2 \geq a^2 > \frac{a^2}{e^2}$  (dédit de  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  et  $e > 1$ ), on déduit que  $x < -\frac{a}{e}$  ou  $x > \frac{a}{e}$  et :

$$MF - MF' = \begin{cases} e \left(\frac{a}{e} - x\right) + e \left(x + \frac{a}{e}\right) = 2a \\ \text{ou} \\ e \left(x - \frac{a}{e}\right) - e \left(x + \frac{a}{e}\right) = -2a \end{cases}.$$

soit  $|MF - MF'| = 2a$

De plus  $FF' = 2ea > 2a$  puisque  $e > 1$ . ■

**Théorème 18.15** Si  $F, F'$  sont deux points distincts de  $\mathcal{P}$  et  $a$  un réel tel que  $0 < 2a < FF'$ , alors l'ensemble :

$$\Gamma = \{M \in \mathcal{P} \mid |MF - MF'| = 2a\}$$

est une hyperbole de foyers  $F, F'$  et de grand axe  $2a$ .

**Démonstration.** Démonstration analogue à celle concernant l'ellipse. ■

**Remarque 18.6** Si  $M \in \mathcal{P}$  est tel que  $|MF - MF'| = 2a$  où  $a > 0$  est donné, en utilisant l'inégalité triangulaire, on déduit que :

$$2a = |MF - MF'| \leq FF'$$

l'inégalité étant stricte si  $M \notin [FF']$ , en conséquence l'ensemble  $\{M \in \mathcal{P} \mid |MF - MF'| = 2a\}$  est vide si  $2a > FF'$  et pour  $2a = FF'$ , on a :

$$|MF - MF'| = 2a = FF' \Leftrightarrow \begin{cases} MF - MF' = FF' \\ \text{ou} \\ MF' - MF = FF' \end{cases}$$

ce qui équivaut à dire que  $\Gamma$  est la droite  $(FF')$  privée du segment ouvert  $]FF'[,$

En utilisant la définition bi-focale des coniques à centres, on a les résultats suivants sur les tangentes.

**Théorème 18.16** Soient  $\Gamma$  une ellipse de foyers  $F, F'$  et  $M$  un point de  $\Gamma$ . La tangente à  $\Gamma$  en  $M$  est la bissectrice extérieure issue de  $M$  du triangle  $MFF'$ .

**Démonstration.** Soit  $M : t \mapsto M(t)$  une paramétrisation régulière de  $\Gamma$ . En dérivant l'égalité  $\|\overrightarrow{MF}\| + \|\overrightarrow{MF'}\| = 2a$ , on a :

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{MF}\|} \overrightarrow{MF} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{MF} + \frac{1}{\|\overrightarrow{MF'}\|} \overrightarrow{MF'} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{MF'} = 0.$$

En remarquant que :

$$\frac{d}{dt} \overrightarrow{MF'} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{MF} + \frac{d}{dt} \overrightarrow{FF'} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{MF}$$

et en posant  $\overrightarrow{u}(t) = \frac{1}{\|\overrightarrow{MF}\|} \overrightarrow{MF}$  et  $\overrightarrow{v}(t) = \frac{1}{\|\overrightarrow{MF'}\|} \overrightarrow{MF'}$  on a :

$$\left( \overrightarrow{u}(t) + \overrightarrow{v}(t) \right) \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{MF} = 0$$

ce qui signifie que le vecteur tangent  $\frac{d}{dt} \overrightarrow{MF}$  est orthogonal au vecteur  $\overrightarrow{u}(t) + \overrightarrow{v}(t)$  qui dirige la bissectrice intérieure issue de  $M$  du triangle  $MFF'$ , encore équivalent à dire que la tangente à  $\Gamma$  en  $M$  est la bissectrice extérieure issue de  $M$  du triangle  $MFF'$ . ■

Une démonstration analogue donne le résultat suivant pour l'hyperbole.

**Théorème 18.17** Soient  $\Gamma$  une hyperbole de foyers  $F, F'$  et  $M$  un point de  $\Gamma$ . La tangente à  $\Gamma$  en  $M$  est la bissectrice intérieure issue de  $M$  du triangle  $MFF'$ .

## 18.4 Lieu orthoptique d'une conique

Étant donnée une conique  $\Gamma$ , on s'intéresse au lieu des points  $M$  du plan euclidien  $\mathcal{P}$  d'où l'on peut mener deux tangentes à  $\Gamma$  qui sont orthogonales.

### 18.4.1 Lieu orthoptique d'une ellipse

Soit  $\Gamma$  une ellipse dans le plan euclidien  $\mathcal{P}$  d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (18.6)$$

dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $0 < b < a$ .

On rappelle que la tangente à  $\Gamma$  en  $M_1(x_1, y_1)$  est la droite d'équation :

$$\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y = 1.$$

De l'équation cartésienne (18.6), on déduit la paramétrisation :

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (a \cos(t), b \sin(t))$$

et la tangente à  $\Gamma$  en  $\gamma(t)$  est dirigée par  $\gamma'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$ . Une équation de cette tangente est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x - a \cos(t) & -a \sin(t) \\ y - b \sin(t) & b \cos(t) \end{vmatrix} &= b \cos(t) (x - a \cos(t)) + a \sin(t) (y - b \sin(t)) \\ &= b \cos(t) x + a \sin(t) y - ab = 0 \end{aligned}$$

**Lemme 18.3** Soit  $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ .

1. Si  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$  (i. e.  $M_0$  est extérieur à  $\Gamma$ ), il ne passe alors aucune tangente à  $\Gamma$  par  $M_0$ ;
2. si  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$  (i. e.  $M_0$  sur  $\Gamma$ ), il passe alors une seule tangente à  $\Gamma$  par  $M_0$ ;
3. si  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$  (i. e.  $M_0$  est intérieur à  $\Gamma$ ), il passe alors exactement deux tangentes à  $\Gamma$  par  $M_0$ .

**Démonstration.** Une droite  $D_0$  passant par  $M_0$  a une équation de la forme :

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0$$

où  $(u, v) \neq (0, 0)$  et elle est tangente à  $\Gamma$  si, et seulement si :

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = (ux_0 + vy_0)^2$$

ce qui est encore équivalent à :

$$(a^2 - x_0^2) u^2 - 2x_0 y_0 uv + (b^2 - y_0^2) v^2 = 0 \quad (18.7)$$

qui signifie que  $(u, v)$  est dans le cône isotrope de la forme quadratique  $q$  définie par :

$$q(X, Y) = (a^2 - x_0^2) X^2 - 2x_0 y_0 XY + (b^2 - y_0^2) Y^2.$$

Le discriminant de cette forme quadratique est :

$$\begin{aligned}\delta &= \begin{vmatrix} a^2 - x_0^2 & -x_0 y_0 \\ -x_0 y_0 & b^2 - y_0^2 \end{vmatrix} = (a^2 - x_0^2)(b^2 - y_0^2) - x_0^2 y_0^2 \\ &= -a^2 b^2 \left( \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 \right) = -\delta'\end{aligned}$$

( $\delta'$  est le discriminant des équations de degré au plus égal à 2,  $(a^2 - x_0^2)t^2 - 2x_0 y_0 t + (b^2 - y_0^2)$  et  $(a^2 - x_0^2) - 2x_0 y_0 t + (b^2 - y_0^2)t^2$ ).

Pour  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$ , on a  $\delta > 0$ , donc  $(a^2 - x_0^2)(b^2 - y_0^2) \neq 0$  et les équations de degré 2  $(a^2 - x_0^2)t^2 - 2x_0 y_0 t + (b^2 - y_0^2)$  et  $(a^2 - x_0^2) - 2x_0 y_0 t + (b^2 - y_0^2)t^2$  n'ont pas de racine réelle (puisque  $\delta' < 0$ ), ce qui entraîne que le cône isotrope de  $q$  est réduit à  $\{(0, 0)\}$  et il ne passe pas de tangente à  $\Gamma$  par  $M_0$ .

Pour  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ , on a  $\delta = \delta' = 0$ , donc  $(a^2 - x_0^2)(b^2 - y_0^2) \neq 0$  et les équations de degré 2  $(a^2 - x_0^2)t^2 - 2x_0 y_0 t + (b^2 - y_0^2)$  et  $(a^2 - x_0^2) - 2x_0 y_0 t + (b^2 - y_0^2)t^2$  ont une unique racine réelle, ce qui entraîne que le cône isotrope de  $q$  est une droite vectorielle et il passe une seule tangente à  $\Gamma$  par  $M_0$ .

Pour  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$ , on a  $\delta < 0$ .

Si  $(x_0^2, y_0^2) = (a^2, b^2)$ , l'équation (18.7) devient :

$$2x_0 y_0 uv = 0$$

et  $u = 0$  ou  $v = 0$ , de sorte que  $D_0$  est une droite passant par  $(\pm a, \pm b)$  parallèle à l'un des axes. Cette droite et sa perpendiculaire en  $M_0$  sont alors tangentes à  $\Gamma$  (par exemple pour  $M_0 = (a, b)$ , la tangente à  $\Gamma$  en  $A(a, 0)$  est la droite d'équation  $x = a$  et la tangente en  $B(0, b)$  est la droite  $y = b$ ).

Si  $(x_0^2, y_0^2) \neq (a^2, b^2)$ , alors l'une des équations de degré 2  $(a^2 - x_0^2)t^2 - 2x_0 y_0 t + (b^2 - y_0^2)$  ou  $(a^2 - x_0^2) - 2x_0 y_0 t + (b^2 - y_0^2)t^2$  ( $\delta' > 0$ ) a deux racines réelles distinctes et le cône isotrope de  $q$  est la réunion de deux droites vectorielles distinctes. Il passe donc exactement deux tangentes à  $\Gamma$  par  $M_0$ . ■

**Remarque 18.7** On peut aussi utiliser la signature de  $q$  dans la démonstration précédente.

- Si  $\text{sgn}(q) = (2, 0)$  ou  $(0, 2)$ , son discriminant  $\delta$  est strictement positif et la forme  $q$  est définie (positive ou négative), donc son cône isotrope est réduit à  $\{(0, 0)\}$ .
- Si  $\text{sgn}(q) = (1, 0)$  ou  $(0, 1)$ , son discriminant est nul, donc  $q$  se réduit à  $q(X) = \ell_1^2(X)$  et son cône isotrope est la droite d'équation  $\ell_1(X) = 0$ .
- Si  $\text{sgn}(q) = (1, 1)$ , son discriminant est strictement négatif, donc  $q$  se réduit à  $q(X) = \ell_1^2(X) - \ell_2^2(X)$  et son cône isotrope est la réunion des deux droites distinctes d'équations respectives  $\ell_1(X) - \ell_2(X) = 0$  et  $\ell_1(X) + \ell_2(X) = 0$ .

**Théorème 18.18** Le lieu des points  $M$  du plan euclidien  $\mathcal{P}$  d'où l'on peut mener deux tangentes à l'ellipse  $\Gamma$  qui sont orthogonales est le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

(figure 18.11).

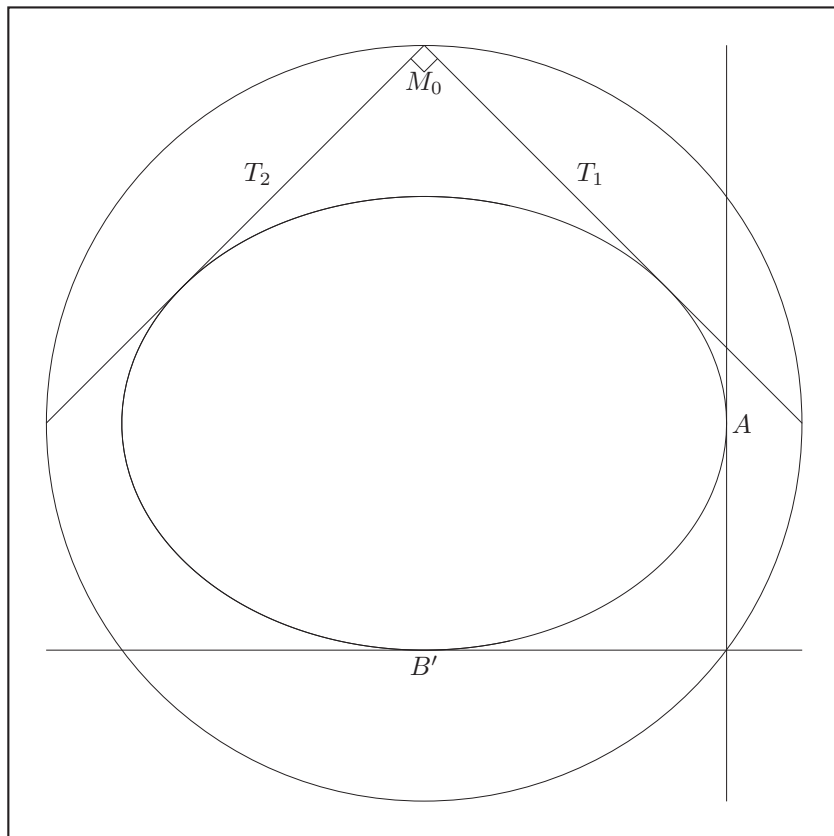


FIG. 18.11 – Cercle orthoptique à une ellipse

**Démonstration.** Notons  $\Lambda$  ce lieu orthoptique.

Si  $M_0(x_0, y_0) \in \Lambda$ , il passe alors par  $M_0$  exactement deux tangentes à  $\Gamma$ . Ces tangentes  $T_1$  et  $T_2$  ont pour équation :

$$u_k(x - x_0) + v_k(y - y_0) = 0 \quad (k = 1, 2)$$

où  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation :

$$(a^2 - x_0^2)u^2 - 2x_0y_0uv + (b^2 - y_0^2)v^2 = 0$$

et dire qu'elles sont orthogonales signifie que :

$$u_1u_2 + v_1v_2 = 0 \tag{18.8}$$

(le vecteur  $(u_k, v_k)$  est orthogonal à  $T_k$  pour  $k = 1, 2$ ).

Supposons d'abord  $a^2 \neq x_0^2$ . Si  $v_k = 0$ , on a alors  $(a^2 - x_0^2)u_k^2 = 0$  et  $u_k = 0$ , ce qui est impossible. Donc  $v_k \neq 0$  pour  $k = 1, 2$  et  $m_k = \frac{u_k}{v_k}$  sont les deux solutions réelles de :

$$(a^2 - x_0^2)t^2 - 2x_0y_0t + (b^2 - y_0^2) = 0$$

et le produit de ces racines d'une équation de degré 2 est :

$$m_1m_2 = \frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2},$$

mais en divisant (18.8) par  $v_1 v_2$ , on a :

$$m_1 m_2 = \frac{u_1 u_2}{v_1 v_2} = -1$$

et  $\frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2} = -1$ , ce qui équivaut à  $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$ .

Si  $a^2 = x_0^2$  et  $b^2 \neq y_0^2$ ,  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation :

$$(-2x_0 y_0 u + (b^2 - y_0^2) v) v = 0$$

et  $u_k \neq 0$  pour  $k = 1, 2$ . Avec  $u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0$ , on déduit que  $v_k \neq 0$  pour  $k = 1, 2$  et  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  sont solutions de :

$$-2x_0 y_0 u + (b^2 - y_0^2) v = 0$$

donc sur une même droite, ce qui n'est pas possible. On a donc  $b^2 = y_0^2$  pour  $a^2 = x_0^2$  et encore  $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$ .

On donc montré que  $\Lambda$  est contenu dans le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ .

Réciproquement soit  $M_0(x_0, y_0)$  sur le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ . On a alors :

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{a^2 + b^2 - y_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} + y_0^2 \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) > 1$$

et il passe par  $M_0$  exactement deux tangentes  $T_1$  et  $T_2$  à  $\Gamma$ .

Si  $x_0^2 = a^2$ , on a alors  $y_0 = b^2$ , soit  $M_0(\pm a, \pm b)$  (ce sont les sommets d'un rectangle) et ces deux tangentes sont l'une parallèle à l'axe  $Ox$  et l'autre parallèle à l'axe  $Oy$ , donc perpendiculaires. Par exemple pour  $M_0(a, b)$ ,  $T_1$  est la tangente à  $\Gamma$  en  $M_1(0, b)$  d'équation  $\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y = 1$ , soit  $y = b$  et  $T_2$  est la tangente à  $\Gamma$  en  $M_1(a, 0)$  d'équation  $\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y = 1$ , soit  $x = a$ .

Si  $x_0^2 \neq a^2$ , alors l'équation  $(a^2 - x_0^2)t^2 - 2x_0 y_0 t + (b^2 - y_0^2) = 0$  a deux racines réelles distinctes  $m_1$  et  $m_2$  qui sont les pentes de ces tangentes et la relation  $m_1 m_2 = \frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2} = -1$  nous dit que ces tangentes sont orthogonales. ■

## 18.4.2 Lieu orthoptique d'une hyperbole

Soit  $\Gamma$  une hyperbole dans le plan euclidien  $\mathcal{P}$  d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (18.9)$$

dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $0 < b < a$ .

**Théorème 18.19** *Le lieu des points  $M$  du plan euclidien  $\mathcal{P}$  d'où l'on peut mener deux tangentes à l'hyperbole  $\Gamma$  qui sont orthogonales est le cercle d'équation :*

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2.$$

## 18.4.3 Lieu orthoptique d'une parabole

Soit  $\Gamma$  une parabole et  $y^2 = 2px$  une équation réduite dans un repère adapté.

**Théorème 18.20** *Le lieu des points  $M$  du plan euclidien  $\mathcal{P}$  d'où l'on peut mener deux tangentes à la parabole  $\Gamma$  qui sont orthogonales est la directrice  $\mathcal{D}$  d'équation  $x = -\frac{p}{2}$ .*

## 18.5 Cocyclicité de 4 points sur une conique

### 18.5.1 Cocyclicité de 4 points sur une parabole

Soit  $\Gamma$  une parabole et  $y^2 = 2px$  une équation réduite dans un repère adapté.

Dire que les quatre points  $M_k(x_k, y_k)$  de  $\Gamma$  sont cocycliques équivaut à dire qu'il existe un point  $M_0(x_0, y_0)$  de  $\mathcal{P}$  et un réel  $R > 0$  tels que :

$$\begin{cases} y_k^2 = 2px_k \\ (x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

et les 4 réels  $y_k$  sont nécessairement racines du polynôme de degré 4 :

$$Q(t) = \left( \frac{1}{2p} t^2 - x_0 \right)^2 + (t - y_0)^2 - R^2$$

soit de :

$$P(t) = t^4 + 4p(p - x_0)t^2 - 8p^2 y_0 t + 4p^2(x_0^2 + y_0^2 - R^2).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P(t) &= t^4 + 4p(p - x_0)t^2 - 8p^2 y_0 t + 4p^2(x_0^2 + y_0^2 - R^2) \\ &= \prod_{k=1}^4 (t - y_k) = t^4 - \sigma_1 t^3 + \sigma_2 t^2 - \sigma_3 t + \sigma_4 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sum_{k=1}^4 y_k = 0 \\ \sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} y_i y_j = 4p(x_0 - p) \\ \sigma_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} y_i y_j y_k = -8p^2 y_0 \\ \sigma_4 = y_1 y_2 y_3 y_4 = 4p^2(x_0^2 + y_0^2 - R^2) \end{cases}$$

(fonctions symétriques élémentaires des racines).

Une condition nécessaire de cocyclicité est donc  $\sigma_1 = \sum_{k=1}^4 y_k = 0$ , les réels  $y_k$  étant deux à deux distincts.

Réciproquement, étant donnés des réels  $y_1, y_2, y_3, y_4$  deux à deux distincts tels que  $\sigma_1 = \sum_{k=1}^4 y_k = 0$ , on définit les réels  $x_0$  et  $y_0$  par :

$$\begin{cases} 4p(x_0 - p) = \sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} y_i y_j \\ -8p^2 y_0 = \sigma_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} y_i y_j y_k \end{cases}$$

et le réel  $r$  par :

$$4p^2(x_0^2 + y_0^2 - r) = \sigma_4 = y_1 y_2 y_3 y_4.$$

Il s'agit alors de vérifier que  $r > 0$ . Les conditions imposées nous disent que les  $y_k$  sont racines de :

$$\begin{aligned} P(t) &= t^4 - \sigma_1 t^3 + \sigma_2 t^2 - \sigma_3 t + \sigma_4 \\ &= t^4 + 4p(p - x_0)t^2 - 8p^2 y_0 t + 4p^2(x_0^2 + y_0^2 - r) \end{aligned}$$



et en remarquant que  $P(y_1) = 0$  équivaut à :

$$Q(y_1) = \left( \frac{1}{2p} y_1^2 - x_0 \right)^2 + (y_1 - y_0)^2 - r = 0,$$

on déduit que :

$$r = \left( \frac{1}{2p} y_1^2 - x_0 \right)^2 + (y_1 - y_0)^2 > 0$$

( $r = 0$  donnerait  $y_1 = y_0$  et  $x_0 = \frac{1}{2p} y_1^2 = \frac{1}{2p} y_0^2$ , soit  $M_0 \in \Gamma$ , ce qui n'est pas) et peut poser  $r = R^2$  avec  $R > 0$ . Les conditions  $Q(y_k) = 0$  pour  $1 \leq k \leq 4$  nous disent alors que les points  $M_k$  sont cocycliques.

On a donc montré le résultat suivant.

**Théorème 18.21** *Les points deux à deux distincts  $M_k(x_k, y_k)$ , pour  $1 \leq k \leq 4$ , sont cocycliques sur la parabole  $\Gamma$  d'équation  $y^2 = 2px$  si, et seulement si,  $\sum_{k=1}^4 y_k = 0$ .*

### 18.5.2 Cocyclicité de 4 points sur une ellipse

Soit  $\Gamma$  une ellipse de paramétrisation :

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (a \cos(t), b \sin(t))$$

dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $0 < b < a$ .

**Théorème 18.22 (Joachimstal)** *Les points deux à deux distincts  $M_k(x_k, y_k)$ , pour  $1 \leq k \leq 4$ , sont cocycliques sur l'ellipse  $\Gamma$  de paramétrisation  $(x, y) = (a \cos(t), b \sin(t))$  si, et seulement si,  $\sum_{k=1}^4 y_k \equiv 0$  modulo  $2\pi$ .*

## 18.6 Équations des coniques dans un repère quelconque

On peut définir une conique dans un repère cartésien (non nécessairement orthonormé) par une équation implicite  $\varphi(x, y) = 0$  où  $\varphi = q + h$  est la somme d'une forme quadratique non nulle et d'une fonction affine, soit :

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \text{ et } h(x, y) = 2dx + 2ey + f$$

avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  et  $(d, e, f) \in \mathbb{R}^3$ .

Le réel  $\delta = b^2 - ac$  est le discriminant (réduit) de la forme quadratique  $q$ .

On désigne par  $\Gamma$  une telle courbe d'équation  $\varphi(x, y) = 0$ .

### Théorème 18.23

1. Si  $\delta < 0$ , alors  $\Gamma$  est soit vide, soit une ellipse, soit un cercle éventuellement réduit à un point.
2. Si  $\delta = 0$ , alors  $\Gamma$  est soit vide, soit une droite, soit la réunion de deux droites parallèles, soit une parabole.
3. Si  $\delta > 0$ , alors  $\Gamma$  est soit la réunion de deux droites sécantes, soit une hyperbole.

Dans le cas où  $\delta \neq 0$  et  $\Gamma$  est une conique, les valeurs propres de la matrice  $A$  de  $q$  définissent les directions principales (ou les axes) de la conique. Cette conique est à centre et les coordonnées du centre s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} f(x, y) = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} ax + by + d = 0 \\ bx + cy + e = 0 \end{cases}$$