Chapitre 4

Séries dans un espace vectoriel normé

$\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes et $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé que l'on notera simplement E.

Les notions de base sur les fonctions d'une variable réelle (continuité, dérivabilité, intégrabilité au sens de Riemann, intégrales généralisées, fonctions usuelles, développements limités) sont supposées acquises.

Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, étudier la *série* de terme général u_n revient à étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *sommes partielles* définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On notera $\sum u_n$ comme raccourci pour « la série de terme général u_n ». On dit que u_n est le terme d'indice n et S_n la somme partielle d'indice n. Une telle suite (u_n) peut être indexée à partir de $n_0 \geq 0$ et dans ce cas les sommes partielles sont bien entendu les $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ pour tout $n \geq n_0$.

Définition 4.1. Une série $\sum u_n$ est dite *convergente* dans E, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente. Une série non convergente est dite *divergente*.

Dans le cas où la série $\sum u_n$ est convergente dans E, on notera $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on dit que c'est la somme de la série de terme général u_n. On peut alors définir la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes de cette série convergente par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$$

ce que l'on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ en disant que R_n est le reste d'ordre n de la série convergente $\sum u_n$. Cette suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et la convergence de la série $\sum u_n$ se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right\| < \varepsilon$$

Exemple 4.1 *Pour $a \in \mathbb{C}$, la* série géométrique $\sum a^n$ *converge si, et seulement si, $|a| < 1$. En effet, pour $a = 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$ et la série diverge. Pour $a \neq 1$, les sommes partielles de cette série sont données par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ et la série géométrique converge si, et seulement si, la suite géométrique $\left(a^{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, ce qui équivaut à $|a| < 1$ et dans ce cas, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \dfrac{1}{1 - a}$. Les restes d'ordre $n \in \mathbb{N}$ sont donnés par :*

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a} - \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Plus généralement dans une algèbre de Banach $\mathbb{A}$, une série géométrique $\sum a^n$ converge si, et seulement si, $\|a\| < 1$(exercice 4.5).

Pour ce qui est des opérations algébriques sur les séries, on dispose des résultats suivants.

Théorème 4.1.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries dans E et λ, μ deux scalaires.

1. *Si ces deux séries convergent, il en est alors de même de la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mu v_n$.*
2. *Si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge, la série $\sum (u_n + v_n)$ est alors divergente.*

Démonstration Se déduit immédiatement des résultats relatifs aux opérations algébriques sur les suites d'éléments de E (paragraphe 3.1). ■

Du corollaire 3.5 sur les suites d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on déduit le résultat suivant.

Théorème 4.2.

On suppose que E est de dimension finie et on se donne une base $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leq j\leq n}$ de F. Une série de terme général $u_k = \sum_{j=1}^{n} u_{k,j} e_j$ converge vers $\ell = \sum_{j=1}^{n} \ell_j e_j \in E$ si, et seulement si, chaque série numérique $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{k,j}$ converge vers $\ell_j \in \mathbb{K}$.

Dans le cas particulier des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$, on en déduit le résultat suivant où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes :

$$\left(\sum u_n \text{ converge}\right) \Leftrightarrow \left(\sum \mathrm{Re}\,(u_n) \text{ et } \sum \mathrm{Im}\,(u_n) \text{ convergent}\right) \Leftrightarrow \left(\sum \overline{u_n} \text{ converge}\right)$$

Une condition nécessaire de convergence, élémentaire mais parfois utile pour justifier la divergence d'une série, est donnée par le résultat suivant.

Théorème 4.3.

Si la série $\sum u_n$ est convergente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers 0.

Démonstration Résulte immédiatement de $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 1$. ■

Exemple 4.2 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| > 0$, la série $\sum u_n$ est alors divergente.*

La réciproque du théorème précédent est fausse comme le montrent les exemples des séries $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \leq 1$ est un réel (exercice 4.2).

L'étude d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E peut se ramener à celle d'une série : une telle suite est de même nature que la série de terme général u_n défini par $u_0 \in E$ et $u_n = x_{n-1} - x_n$ pour tout $n \geq 1$. De manière plus générale, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par une relation de récurrence du type $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum v_n$ est convergente.

4.1 Séries à termes réels positifs

En exploitant la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ on dispose de théorèmes de comparaison relativement efficaces sur les séries à termes réelles positifs. Ces résultats sont utiles pour étudier la convergence normale de certaines séries sur un espace de Banach (voir le paragraphe 4.2).

Dans le cas où une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positives, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est croissante et deux cas de figure peuvent se produire :

- soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et dans ce cas elle converge ;

- soit elle n'est pas majorée et dans ce cas on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, ce qui peut se noter $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Dans le cas des séries à termes positifs, on écrira $\sum u_n < +\infty$ pour signifier que cette dernière converge.

La condition nécessaire de convergence donnée par le théorème 4.3 peut être affinée comme suit dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle décroissante.

Théorème 4.4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs décroissante. Si la série $\sum u_n$ est convergente, on a alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Démonstration Pour $n > m \geq 1$, on a $\sum\limits_{k=m}^{n} u_k \geq (n-m+1)\, u_n$, soit :

$$0 \leq nu_n \leq \sum_{k=m}^{n} u_k + (m-1)\, u_n \leq \sum_{k=m}^{+\infty} u_k + mu_n = R_m + mu_n$$

Dans le cas où la série $\sum u_n$ est convergente, on a $\lim\limits_{m\to+\infty} R_m = 0$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m_\varepsilon \geq 1$ tel que $R_{m_\varepsilon} \leq \varepsilon$ et on a :

$$\forall n > m_\varepsilon,\ 0 \leq nu_n \leq \varepsilon + m_\varepsilon u_n$$

Pour m_ε ainsi fixé, tenant compte de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on peut trouver un entier $n_\varepsilon > m_\varepsilon$ tel que $m_\varepsilon u_n < \varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$. On a donc $nu_n < 2\varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$, soit que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. ■

Exemple 4.3 *Pour tout $\alpha \in [0,1[$ et tout réel positif β, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ diverge puisque $\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln(n))^\beta} = +\infty$ (domination à l'infini de $(\ln(n))^\beta$ par n^γ pour $\gamma > 0$).*

4.1.1 Comparaison des séries à termes réels positifs

On se donne deux séries à termes réels positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles respectivement associées et en cas de convergence, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(R'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des restes correspondants.

Théorème 4.5.

1. *S'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \geq n_0$, *alors :*
$$\left(\sum v_n < +\infty\right) \Rightarrow \left(\sum u_n < +\infty\right) \text{ et } \left(\sum u_n = +\infty\right) \Rightarrow \left(\sum v_n = +\infty\right)$$
2. *S'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *et deux réels* $M \geq m > 0$ *tels que* $v_n > 0$ *et* $m \leq \frac{u_n}{v_n} \leq M$ *pour tout* $n \geq n_0$, *les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont alors de même nature.*
3. *S'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_n > 0$, $v_n > 0$ *et* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ *pour tout* $n \geq n_0$, *alors :*
$$\left(\sum v_n < +\infty\right) \Rightarrow \left(\sum u_n < +\infty\right) \text{ et } \left(\sum u_n = +\infty\right) \Rightarrow \left(\sum v_n = +\infty\right)$$
4. *S'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *et un réel* $\lambda \in]0,1[$ *tels que* $u_n > 0$ *et* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$ *pour tout* $n \geq n_0$, *la série* $\sum u_n$ *est alors convergente.*
5. *S'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *et un réel* $\lambda \geq 1$ *tels que* $u_n > 0$ *et* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \lambda$ *pour tout* $n \geq n_0$, *la série* $\sum u_n$ *est alors divergente.*

Démonstration

1. Pour tout entier $n \geq n_0$, on a $S_n - S_{n_0} \leq T_n - T_{n_0}$, les suites $(S_n - S_{n_0})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n - T_{n_0})_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissantes, ce qui implique les résultats annoncés.

2. De $0 < u_n \leq Mv_n$ on déduit que si $\sum v_n$ converge, il en est alors de même de $\sum u_n$ et de $u_n \geq mv_n > 0$, on déduit que si $\sum v_n$ diverge, il en est alors de même de $\sum u_n$.

3. On a $u_{n_0+1} \leq u_{n_0} \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} = \lambda v_{n_0+1}$ et par récurrence $u_n \leq \lambda v_n$ pour tout $n \geq n_0 + 1$. En effet, c'est vrai pour $n_0 + 1$ et en supposant le résultat acquis au rang n, on a $u_{n+1} \leq u_n \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \lambda v_{n+1}$. On est donc ramené au premier point.

4. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n \geq n_0$ où $v_n = \lambda^n$ et $\sum v_n$ converge puisque $\lambda \in]0,1[$, donc $\sum u_n$ converge aussi.

5. On peut là aussi utiliser $v_n = \lambda^n$ ou tout simplement remarquer que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, donc $u_n \geq u_{n_0} > 0$ pour tout $n \geq n_0$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne peut tendre vers 0, la série $\sum u_n$ est donc divergente. ∎

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum v_n$ converge, on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
Plus généralement, on a pour les restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

Théorème 4.6.

On suppose que $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$ [resp. que $v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(u_n)$].

1. *Si la série $\sum u_n$ converge, il en est alors de même de $\sum v_n$ et on a $R'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(R_n)$ [resp. $R'_n = \underset{n\to+\infty}{O}(R_n)$].*
2. *Si la série $\sum v_n$ diverge, il en est alors de même de $\sum u_n$ et on a $T_n = \underset{n\to+\infty}{o}(S_n)$ [resp. $T_n = \underset{n\to+\infty}{O}(S_n)$].*

Démonstration Si $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$ [resp. $v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(u_n)$], il existe alors une constante réelle $\lambda > 0$ telle que $0 \leq v_n \leq \lambda u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le théorème 4.5 nous dit que $\sum v_n$ converge si $\sum u_n$ converge et $\sum u_n$ diverge si $\sum v_n$ diverge.

1. Si les u_n sont tous nuls à partir d'un rang n_0, il en est alors de même des v_n et on a $R'_n = R_n = 0$ pour tout $n \geq n_0$. Dans ce cas, on a bien $R'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(R_n)$ [resp. $R'_n = \underset{n\to+\infty}{O}(R_n)$]. Dans le cas contraire, les suites $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(R'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs strictement positives. Si $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$, on peut alors trouver pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier n_ε tel que $0 < v_n \leq \varepsilon u_n$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui implique que $0 < R'_n \leq \varepsilon R_n$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et signifie que $R'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(R_n)$. Si $v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(u_n)$, il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq v_n \leq \lambda u_n$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique que $0 < R'_n \leq \lambda R_n$ pour tout $n \geq n_0$ et signifie que $R'_n = \underset{n\to+\infty}{O}(R_n)$.

2. Si $\sum v_n = +\infty$, on a alors $\sum u_n = +\infty$ et les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes non majorées, donc strictement positives à partir d'un certain rang. Si $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_ε tel que $0 < v_n \leq \varepsilon u_n$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante non majorée, il existe un entier $n_1 \geq n_\varepsilon$ tel que $S_n \geq \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} v_k$, de sorte que :

$$\forall n \geq n_1,\ T_n = \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} v_k + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} v_k \leq \varepsilon S_n + \varepsilon \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} u_k \leq 2\varepsilon S_n$$

ce qui signifie que $T_n = \underset{n\to+\infty}{o}(S_n)$. Si $v_n = \underset{n\to+\infty}{O}(u_n)$, il existe alors un réel $\lambda > 0$ tel que $0 \leq v_n \leq \lambda u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique que $0 \leq T_n \leq \lambda S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et signifie que $T_n = \underset{n\to+\infty}{O}(S_n)$. ∎

Le théorème qui suit est souvent utilisé pour justifier la convergence ou la divergence de certaines séries positives.

Théorème 4.7.

On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} v_n$.

1. *Si* $\sum u_n$ *est convergente, il en est alors de même de* $\sum v_n$ *et les restes de ces séries sont équivalents.*
2. *Si* $\sum u_n$ *est divergente, il en est alors de même de* $\sum v_n$ *et les sommes partielles de ces séries sont équivalents.*

Démonstration Les suites à termes positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant équivalentes, il existe pour tout réel $\varepsilon \in]0,1[$ un entier n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ (1-\varepsilon)\,u_n \leq v_n \leq (1+\varepsilon)\,u_n$$

Dans ce qui suit on se donne un tel couple $(\varepsilon, n_\varepsilon)$.

1. Si $\sum u_n$ est convergente, on alors déduit des inégalités $0 \leq v_n \leq (1+\varepsilon)\,u_n$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, qu'il en est de même de la série de terme général v_n. On peut donc définir les restes d'ordre n de ces séries, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ et on a $(1-\varepsilon)\,R_n \leq R'_n \leq (1+\varepsilon)\,R_n$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui traduit l'équivalence de R_n et R'_n quand n tend vers l'infini.

2. Si $\sum u_n$ est divergente, on déduit alors des inégalités $v_n \geq (1-\varepsilon)\,u_n$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ avec $1-\varepsilon > 0$ et $u_n \geq 0$, qu'il en est de même de la série de terme général v_n. De plus, on a $S_n > 0$ à partir d'un certain rang $n_1 > n_\varepsilon$ et :

$$\forall n > n_1,\ (1-\varepsilon)\,(S_n - S_{n_\varepsilon-1}) \leq T_n - T_{n_\varepsilon-1} \leq (1+\varepsilon)\,(S_n - S_{n_\varepsilon-1})$$

ce qui entraîne que, pour tout $n > n_1$, on a :

$$(1-\varepsilon)\left(1 - \frac{S_{n_\varepsilon-1}}{S_n}\right) + \frac{T_{n_\varepsilon-1}}{S_n} \leq \frac{T_n}{S_n} \leq (1+\varepsilon)\left(1 - \frac{S_{n_\varepsilon-1}}{S_n}\right) + \frac{T_{n_\varepsilon-1}}{S_n}.$$

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{S_n} = 0$, on en déduit alors qu'il existe $n_2 \geq n_1$ tel que :

$$\forall n \geq n_2,\ 1 - 2\varepsilon \leq \frac{T_n}{S_n} \leq 1 + 2\varepsilon$$

ce qui traduit l'équivalence de S_n et T_n. ■

L'hypothèse de positivité de u_n et v_n peut être remplacée par u_n et v_n de mêmes signes (au moins à partir d'un certain rang) et elle est essentielle dans le théorème précédent. Par exemple pour $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la série $\sum v_n$ étant convergente et la série $\sum u_n$ divergente comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs convergentes telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} v_n$, on a alors seulement l'équivalence des restes, mais pas celle des sommes partielles. Par exemple, on a $\dfrac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \dfrac{1}{n^2}$ avec :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \backsim 1$$

et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} > 1 + \dfrac{1}{4}$ ne peut être équivalent à 1.

4.1.2 Les séries de Riemann et de Bertrand

Les *séries de Riemann* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ et les *séries de Bertrand* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ où α et β sont des réels positifs sont des séries de la forme $\sum f(n)$ où f est une fonction définie sur $[1, +\infty[$, à valeurs positives, continue et décroissante.

Théorème 4.8.

Soient $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante non identiquement nulle et F la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - F(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente et la série $\sum f(n)$ est de même nature que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Dans le cas où F est non identiquement nulle, en notant ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n) + \ell$.

Démonstration La fonction f qui est décroissante sur $[1, +\infty[$ est Riemann-intégrable sur tout segment $[1, x]$, ce qui justifie la définition de la fonction F. Pour tout réel $x \geq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(n+1) - (F(n+1) - F(n)) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t))\,dt \end{aligned}$$

avec $f(n+1) \leq f(t)$ pour tout $t \in [n, n+1]$ (décroissance de la fonction f), donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

La fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt = f(k)$ et pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_1^{n+1} f(t)\,dt = F(n+1)$$

et $u_n \geq F(n+1) - F(n) = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt \geq 0$ puisque f est à valeurs positives. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante minorée par 0 et en conséquence convergente vers un réel $\ell \geq 0$.

Comme f est à valeurs positives, la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à valeurs positives et on a deux possibilités. Soit cette suite est majorée et dans ce cas, elle converge vers un réel $\ell' \geq 0$, ce qui implique que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \ell + \ell'$. Soit on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(n) = +\infty$ et dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = +\infty$.

Dans le cas où la fonction croissante F n'est pas identiquement nulle, on aura $F(n) \geq F(n_0) > 0$ pour $n \geq n_0$ avec n_0 assez grand et :

$$\left| \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)}{F(n)+\ell} - 1 \right| = \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n) - \ell\right|}{F(n)+\ell} \leq \frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - F(n) - \ell\right|}{F(n_0)+\ell} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n) + \ell$. ■

Dans le cas où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(n) = +\infty$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n) + \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n)$.

Corollaire 4.1. *Soit α un réel. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, on a $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et pour $\alpha \in]0,1[$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.*

Démonstration Pour $\alpha \leq 0$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0.

Pour $\alpha > 0$, en utilisant la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, on a pour tout réel $x \geq 1$:

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \begin{cases} \ln(x) \text{ pour } \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}^{+,*} \setminus \{1\} \end{cases}$$

et le théorème 4.8 nous dit que :

pour $0 < \alpha < 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} F(n) = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$;

pour $\alpha = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} F(n) = \ln(n) \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$;

pour $\alpha > 1$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge puisque $\lim_{n \to +\infty} F(n) = \frac{1}{1-\alpha}$. ■

Pour $\alpha = 1$, la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la *constante d'Euler*.

Du corollaire précédent, on déduit que pour tout nombre complexe α tel que $\operatorname{Re}(\alpha) > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est normalement convergente puisque $\left| \frac{1}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(\alpha)}}$.

L'étude de la convergence d'une série de Riemann peut aussi se faire rapidement comme suit. Pour $\alpha \leq 0$, le terme général ne tend pas vers 0, donc la série diverge. Pour $0 < \alpha \leq 1$, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas un $\underset{n \to +\infty}{o} \left(\frac{1}{n} \right)$, donc la série diverge (théorème 4.4). Pour $\alpha > 1$, on a :

$$n^\alpha \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right) = n \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} - 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} - 1}{\frac{1}{n}}$$

avec $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\alpha-1} = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha - 1$ (dérivée en 0 de $x \mapsto (1+x)^{\alpha-1}$), ce qui nous dit que $\frac{\alpha - 1}{n^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$, la série $\sum \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right)$ étant convergente car de même nature que la suite $\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, ce qui implique la convergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Les critères de comparaison aux séries de Riemann qui suivent sont parfois intéressants.

Corollaire 4.2. *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.*

1. *S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée, la série $\sum u_n$ est alors convergente.*
2. *S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{n \to +\infty} (n^\alpha u_n) = +\infty$, la série $\sum u_n$ est alors divergente.*

Démonstration Dans le premier cas, il existe $M > 0$ tel que $0 \leq u_n \leq \dfrac{M}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ et dans le second on a $u_n \geq \dfrac{1}{n^\alpha}$ à partir d'un certain rang avec $\alpha \leq 1$. ■

Corollaire 4.3. *Soient α, β deux réels. La série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge si, et seulement si, on a $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.*

Démonstration Pour $\alpha < 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0.

Pour $\alpha \in [0, 1[$ et $\beta \in \mathbb{R}^{+,*}$, la suite positive décroissante $\left(\dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}\right)_{n \geq 2}$ n'est pas un $\underset{n \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ diverge (théorème 4.4).

Pour $\alpha \in [0, 1[$ et $\beta \in \mathbb{R}^-$, on a $\dfrac{(\ln(n))^{-\beta}}{n^\alpha} \geq \dfrac{(\ln(2))^{-\beta}}{n^\alpha} > 0$ pour tout $n \geq 2$, donc $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ diverge.

Pour $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, prenant $\gamma \in]1, \alpha[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^\gamma}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} = 0$, ce qui implique la divergence de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

Pour $\alpha = 1$ et $\beta \in \mathbb{R}^+$, la fonction f définie sur$[2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x (\ln(x))^\beta}$ est continue et décroissante (produit de deux fonctions continues décroissantes à valeurs strictement positives), donc $\sum \dfrac{1}{n (\ln(n))^\beta}$ est de même nature que la suite $(F(n))_{n \geq 2}$, où :

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t (\ln(t))^\beta} = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{du}{u^\beta} = \begin{cases} \dfrac{(\ln(x))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

Pour $0 \leq \beta \leq 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} F(n) = +\infty$, donc $\sum \dfrac{1}{n (\ln(n))^\beta}$ diverge. Pour $\beta > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} F(n) = \dfrac{(\ln(2))^{1-\beta}}{\beta - 1}$, donc $\sum \dfrac{1}{n (\ln(n))^\beta}$ converge. Pour $\beta < 0$, on a $\dfrac{(\ln(n))^{-\beta}}{n} \geq \dfrac{(\ln(2))^{-\beta}}{n} > 0$ pour tout $n \geq 2$, donc $\sum \dfrac{1}{n (\ln(n))^\beta}$ diverge. ■

4.1.3 Les théorèmes de Cauchy, de d'Alembert et de Raabe-Duhamel

Toujours dans le cadre des séries à termes positifs, on dispose des théorèmes de Cauchy et de d'Alembert pour prouver la convergence ou la divergence d'une série. La démonstration de ces théorèmes repose sur des comparaisons à des séries géométriques.

On se donne une série $\sum u_n$ à termes réels positifs.

Théorème 4.9. Cauchy

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$, *alors la série* $\sum u_n$ *est convergente pour* $\ell < 1$ *et divergente pour* $\ell > 1$.

Démonstration Pour $\ell < 1$, on peut trouver un réel λ tel que $\ell < \lambda < 1$ et un entier n_0 tel que $0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui revient à dire que $0 \leq u_n \leq \lambda^n$ pour tout $n \geq n_0$ et implique la convergence de la série $\sum u_n$.

Dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell > 1$, on aura $\sqrt[n]{u_n} > 1$ pour n assez grand, donc aussi $u_n > 1$ et $\sum u_n$ diverge. ∎

Pour $\ell = 1$ le théorème de Cauchy ne permet pas de conclure en général comme le montre l'exemple des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. En effet, on a :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = n^{-\frac{\alpha}{n}} = \exp\left(-\alpha \frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

pour tout réel α, alors que la série $\sum u_n$ diverge pour $\alpha \leq 1$ et converge pour $\alpha > 1$.

On dispose aussi de la version suivante du théorème de Cauchy qui utilise la notion de limite supérieure d'une suite réelle bornée (voir le paragraphe 2.5).

Théorème 4.10. Cauchy

Si la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas majorée, la série* $\sum u_n$ *est alors divergente, sinon elle est convergente dans le cas où* $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$ *et divergente dans le cas où* $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$.

Démonstration Si la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, on aura alors $\sqrt[n]{u_n} > 1$ pour une infinité d'indices n, donc aussi $u_n > 1$ pour ces indices et la série $\sum u_n$ est divergente puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 0.

Si elle est majorée, elle est alors bornée puisque positive et on peut définir sa limite supérieure $\ell = \limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{p\geq n} \sqrt[p]{u_p}\right)$ (en fait dans le cas où la suite n'est pas majorée sa limite supérieure est $+\infty$).

Si $\ell < 1$, on peut alors trouver un entier λ tel que $\ell < \lambda < 1$ et un entier n_0 tel que $\ell \leq \sup\limits_{p \geq n} \sqrt[p]{u_p} \leq \lambda$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne que $0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$ pour tout $n \geq n_0$ et revient à dire que $0 \leq u_n \leq \lambda^n$ pour tout $n \geq n_0$. Il en résulte que la série $\sum u_n$ est convergente comme la série géométrique $\sum \lambda^n$.

Si $\ell > 1$, on peut alors trouver un entier λ tel que $1 < \lambda < \ell$ et un entier n_0 tel que $v_n = \sup\limits_{p \geq n} \sqrt[p]{u_p} > \lambda$ pour tout $n \geq n_0$. Par définition de la borne supérieure, on peut trouver pour tout entier $n \geq n_0$ un entier $p_n \geq n$ tel que $1 < \lambda < \sqrt[p_n]{u_{p_n}} \leq v_n$ et on aura $u_{p_n} > 1$ pour un tel entier $p_n \geq n$. Dans une telle situation la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger vers 0 et la série $\sum u_n$ est divergente. ■

Dans le cas où $\limsup\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, on ne peut rien dire *a priori*.

Pour les théorèmes qui suivent, on suppose que les u_n sont strictement positifs à partie d'un certain rang $n_0 \geq 1$.

Théorème 4.11. d'Alembert

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, *la série* $\sum u_n$ *est alors convergente pour* $\ell < 1$ *et divergente pour* $\ell > 1$.

Démonstration Pour $\ell < 1$, on peut trouver un réel λ tel que $\ell < \lambda < 1$ et un entier $n_1 \geq n_0$ tel que $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$ pour tout $n \geq n_1$ et le théorème 4.5 nous dit que la série $\sum u_n$ est convergente.

Dans le cas où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$, on aura $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour n assez grand et en conséquence il existe un entier $n_2 \geq n_0$ tel que $u_n \geq u_{n_2} > 0$ pour $n \geq n_2$ (la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante) et $\sum u_n$ diverge puisque son terme général ne peut tendre vers 0. ■

Pour $\ell = 1$ le théorème de d'Alembert ne permet pas de conclure en général comme le montre l'exemple des séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Comme pour le théorème de Cauchy, on dispose d'un version du théorème de d'Alembert qui fait intervenir la notion de limite supérieure et inférieure.

Théorème 4.12. d'Alembert

Si $\limsup\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, *la série* $\sum u_n$ *est alors convergente et si* $\liminf\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, *elle est alors divergente.*

Dans le cas où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on peut utiliser les théorèmes de Raabe-Duhamel qui reposent sur la comparaison à une série de Riemann.

Théorème 4.13. Raabe-Duhamel

S'il existe un réel α tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, *la série* $\sum u_n$ *est alors convergente pour* $\alpha > 1$ *et divergente pour* $\alpha < 1$.

Démonstration L'idée est de comparer la série $\sum u_n$ à une série de Riemann. Si $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ où β est un réel à préciser, on a alors :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{n}(\beta - \alpha + \varepsilon_n)$ où $(\varepsilon_n)_{n\geq n_0}$ est une suite réelle qui tend vers 0.

Pour $\alpha > 1$, on choisit $\beta \in]1, \alpha[$ de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\beta - \alpha + \varepsilon_n) = \beta - \alpha < 0$ et il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que $\beta - \alpha + \varepsilon_n < 0$ pour tout $n \geq n_1$, ce qui donne $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n \geq n_1$ et $\sum u_n$ converge comme $\sum v_n$.

Pour $\alpha < 1$, on choisit $\beta \in]\alpha, 1[$ de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\beta - \alpha + \varepsilon_n) = \beta - \alpha > 0$ et il existe un entier $n_2 \geq n_0$ tel que $\beta - \alpha + \varepsilon_n > 0$ pour tout $n \geq n_2$, ce qui donne $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n \geq n_2$ et $\sum u_n$ diverge comme $\sum v_n$. ■

Le cas où $\alpha = 1$ peut être traité avec la version suivante du théorème de Raabe-Duhamel.

Théorème 4.14. Raabe-Duhamel

S'il existe un réel α et un réel $\gamma > 1$ tels que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$, *la série* $\sum u_n$ *est alors converge si, et seulement si, on a* $\alpha > 1$.

Démonstration Pour $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$, sachant que $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et on est ramené au théorème précédent.

Pour $\alpha = 1$, on introduit la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ définie par $v_n = \ln(nu_n)$ qui est de même nature que la série de terme général :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) + \left(-\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\min(3,\gamma)}}\right)
\end{aligned}$$

donc convergente puisque $\gamma > 1$. En notant ℓ la limite de la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = \lambda = e^\ell > 0$, donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\backsim} \dfrac{\lambda}{n}$ et $\sum u_n$ est divergente. ■

4.2 Convergence normale et commutative

Définition 4.2. Une série $\sum u_n$ est dite *normalement convergente* dans E, si la série réelle $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Pour une série numérique, soit pour $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue ou $E = \mathbb{C}$ muni du module, on dit « *absolument convergente* » pour « normalement convergente ».

Une série $\sum u_n$ est normalement convergente si, et seulement si, la suite réelle croissante $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \|u_k\|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Exemples 4.1

1. *Si $\sum \alpha_n$ est série de réels positifs convergente et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $\|u_n\| \leq \alpha_n$ à partie d'un certain rang, la série $\sum u_n$ est alors normalement convergente.*
2. *Si $\sum \alpha_n$ est série de réels positifs convergente et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de E, la série $\sum \alpha_n v_n$ est alors normalement convergente.*
3. *La série réelle $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente et non absolument convergente (exercice 4.3).*

Définition 4.3. Une série convergente et non normalement convergente est dite *semi-convergente*.

Théorème 4.15.

L'espace vectoriel normé E est complet si, et seulement si, toute série normalement convergente dans E est convergente.

Démonstration Supposons que E soit un espace de Banach et soit $\sum u_n$ une série normalement convergente dans E. En notant $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ les sommes partielles de cette série, on a pour tous $m > n$ dans $\mathbb{N}$:

$$\|S_m - S_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|u_k\| \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$, ce qui implique que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et en conséquence convergente puisque E est complet.

Réciproquement supposons que toute série normalement convergente dans E soit convergente. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E, on peut alors construire par récurrence une suite d'entiers $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que :

$$\forall m \geq \varphi(n), \ \left\|u_m - u_{\varphi(n)}\right\| \leq \frac{1}{2^n}$$

et en notant $v_n = u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}$, on a $\|v_n\| \leq \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique que la série de terme général v_n est normalement convergente dans E, donc convergente et revient à dire que la suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente étant nécessairement convergente (théorème 2.13), on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. ■

Dans le cas où E est un espace de Banach, en utilisant l'inégalité polygonale $\left\|\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right\| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \|u_k\|$, on déduit que si la série $\sum u_n$ est normalement convergente, on a alors $\left\|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$ (en faisant tendre n vers l'infini).

Exemples 4.2

1. *Dans une algèbre de Banach $(\mathbb{A}, \|\cdot\|)$ une série géométrique $\sum a^n$ converge si, et seulement si, $\|a\| < 1$ et dans ce cas on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = (1-a)^{-1}$ (exercice 4.5).*
   Cela s'applique en particulier à l'algèbre $\mathbb{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une quelconque norme sous-multiplicative.

2. *Sur $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \|P\|_\infty = \max\limits_{1\leq k\leq n} |a_k|$ qui n'est pas complet (voir le corollaire 3.3), la série $\sum \dfrac{1}{2^k} X^k$ est normalement convergente, mais non convergente. En effet, la série $\sum \left\|\dfrac{1}{2^k} X^k\right\|_\infty = \sum \dfrac{1}{2^k}$ est convergente comme série géométrique et si $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^k} X^k = P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a alors pour tout entier $k \geq n+1$ en notant $a_j = 0$ pour $j \geq n+1$:*

$$r_k = \left\|P(X) - \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2^j} X^j\right\|_\infty = \left\|\sum_{j=0}^{k} \left(a_j - \frac{1}{2^j}\right) X^j\right\|_\infty = \max_{1\leq j\leq k} \left|a_j - \frac{1}{2^j}\right| \geq \frac{1}{2^{n+1}}$$

   ce qui contredit le fait que $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k = 0$.

Des critères de Cauchy et de d'Alembert, on déduit les résultats suivants pour une série $\sum u_n$ dans un espace de Banach :

- si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\|u_n\|} < 1$, la série $\sum u_n$ est alors convergente ;
- si $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\|u_n\|} < 1$, la série $\sum u_n$ est alors convergente ;
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} < 1$, la série $\sum u_n$ est alors convergente ;
- si $\limsup\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} < 1$, la série $\sum u_n$ est alors convergente.

Définition 4.4. Une série $\sum u_n$ est dite *commutativement convergente* dans E, si pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Si $\sum u_n$ est une série commutativement convergente, on peut alors noter $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ pour $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ puisque l'ordre des indices n'a pas d'importance.

Théorème 4.16.

Dans un espace de Banach une série normalement convergente est commutativement convergente. Plus précisément, si $\sum u_n$ est normalement convergente, il en est alors de même de $\sum u_{\sigma(n)}$ pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left\|u_{\sigma(n)}\right\| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration Soient $\sum u_n$ une série normalement convergente dans un espace de Banach E et σ une permutation de $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en notant $m(n) = \max\limits_{0\leq k\leq n} \sigma(k)$:

$$T'_n = \sum_{k=0}^{n} \left\|u_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{j=1}^{m(n)} \|u_j\| \leq S' = \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

donc la suite réelle croissante $(T'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et en conséquence convergente, ce qui revient à dire que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est normalement convergente, donc convergente dans l'espace de Banach E. Faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left\|u_{\sigma(n)}\right\| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$. En utilisant la permutation σ^{-1} sur la série $\sum u_{\sigma(n)}$, on en déduit l'inégalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left\|u_{\sigma(n)}\right\|$ et en conséquence l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \left\|u_{\sigma(n)}\right\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en notant $N_n = \{0, \cdots, m(n)\} \setminus \{\sigma(0), \cdots, \sigma(n)\}$:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=0}^{m(n)} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}\right\| &= \left\|\sum_{k\in N_n} u_k\right\| \leq \sum_{k\in N_n} \|u_k\| = \sum_{k=0}^{m(n)} \|u_k\| - \sum_{k=0}^{n} \left\|u_{\sigma(k)}\right\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| - \sum_{k=0}^{n} \left\|u_{\sigma(k)}\right\|\end{aligned}$$

avec $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left\|u_{\sigma(k)}\right\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left\|u_{\sigma(n)}\right\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$ et $\lim_{n\to+\infty} m(n) = +\infty$ (on a $m(n) \geq n$ car σ est bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$), ce qui nous donne $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. ∎

La réciproque du théorème précédent est vrai pour un espace normé de dimension finie. En exploitant l'équivalence des normes en dimension finie, il nous suffit de considérer le cas des séries réelles (d'après le théorème 4.2).

Pour tout réel x, on note :

$$x^+ = \max(x, 0) = \frac{x + |x|}{2}, \quad x^- = \max(-x, 0) = \frac{|x| - x}{2}$$

et on a $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$.

Lemme 4.1 *Si $\sum u_n$ est une série réelle semi-convergente, les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont alors divergentes.*

Démonstration Comme $\sum u_n$ est convergente et $\sum |u_n|$ est divergente, les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont divergentes. Ces séries étant à valeurs positives, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = +\infty$. ∎

Lemme 4.2 *Soient σ_1, σ_2 deux applications injectives de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que l'on ait la partition $\mathbb{N} = \sigma_1(\mathbb{N}) \cup \sigma_2(\mathbb{N})$ et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. L'application $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :*

$$\sigma(n) = \begin{cases} \sigma_1(n) & \text{si } n \in \{0, \cdots, p_1\} \\ \sigma_1(n-k) & \text{si } n \in \{p_k + k + 1, \cdots, p_{k+1} + k\} \text{ où } k \geq 1 \\ \sigma_2(k-1) & \text{si } n = p_k + k \text{ où } k \geq 1 \end{cases}$$

est une permutation de $\mathbb{N}$.

Démonstration Pour $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante, la partition :

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{0,\cdots,p_1\}\cup\{p_1+1\}\cup\{p_1+2,\cdots,p_2+1\}\cup\{p_2+2\}\cup\{p_2+3,\cdots,p_3+2\}\cup\cdots\\ &= \{0,\cdots,p_1\}\cup\bigcup_{k=1}^{+\infty}\{p_k+k+1,\cdots,p_{k+1}+k\}\cup\bigcup_{k=1}^{+\infty}\{p_k+k\}\end{aligned}$$

nous permet de définir l'application $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ par :

$$\sigma(n)=\left\{\begin{array}{l}\sigma_1(n)\ \text{ si } n\in\{0,\cdots,p_1\}\\ \sigma_1(n-k)\ \text{ si } n\in\{p_k+k+1,\cdots,p_{k+1}+k\}\ \text{ où } k\geq 1\\ \sigma_2(k-1)\ \text{ si } n=p_k+k \text{ où } k\geq 1\end{array}\right.$$

Cette application σ réalise une bijection de $\{0,\cdots,p_1\}$ sur $\sigma_1(\{0,\cdots,p_1\})$ et, pour tout $k\geq 1$, une bijection de $\{p_k+k+1,\cdots,p_{k+1}+k\}$ sur $\sigma_1(\{p_k+1,\cdots,p_{k+1}\})$, donc une bijection de $\mathbb{N}\setminus\{p_k+k,\ k\geq 1\}$ sur $\sigma_1(\mathbb{N})$. Comme elle réalise aussi une bijection de $\{p_k+k,\ k\geq 1\}$ sur $\sigma_2(\mathbb{N})$, en tenant compte de la partition $\mathbb{N}=\sigma_1(\mathbb{N})\cup\sigma_2(\mathbb{N})$, on déduit que c'est une permutation de $\mathbb{N}$. ■

Théorème 4.17.

Si $\sum u_n$ est une série réelle semi-convergente, il existe alors une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit divergente.

Démonstration La série réelle $\sum u_n$ étant semi-convergente, les ensembles $N^+=\{n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 0\}$ et $N^-=\{n\in\mathbb{N},\ u_n<0\}$ sont infinis du fait que :

$$\sum_{n\in N^+}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^+=+\infty \text{ et } \sum_{n\in N^-}u_n=-\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^-=-\infty$$

et on a la partition $\mathbb{N}=N^+\cup N^-$. Il existe donc deux applications strictement croissantes (donc injectives) σ_1 et σ_2 de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que $N^+=\sigma_1(\mathbb{N})$ et $N^-=\sigma_2(\mathbb{N})$.

Du fait que $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_{\sigma_1(n)}=\sum_{n\in N^+}u_n=+\infty$, on peut définir l'entier p_1 comme étant le plus petit entier naturel tel que $u_{\sigma_2(0)}+\sum_{i=0}^{p_1}u_{\sigma_1(i)}\geq 1$, puis supposant définis les entiers $p_1<p_2<\cdots<p_k$ tels que $u_{\sigma_2(j-1)}+\sum_{i=p_{j-1}+1}^{p_j}u_{\sigma_1(i)}\geq 1$ pour $2\leq j\leq k$, on désigne par p_{k+1} le plus petit entier strictement supérieur à p_k tel que $u_{\sigma_2(k)}+\sum_{j=p_k+1}^{p_{k+1}}u_{\sigma_1(j)}\geq 1$. On associe alors aux injections σ_1,σ_2 et à la suite strictement croissante $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une permutation σ de $\mathbb{N}$ comme dans le lemme précédent et on a :

$$\sum_{j=0}^{p_1+1}u_{\sigma(j)}=\sum_{j=0}^{p_1}u_{\sigma_1(j)}+u_{\sigma_2(0)}\geq 1$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p_2+2} u_{\sigma(j)} &= \sum_{j=0}^{p_1+1} u_{\sigma(j)} + \sum_{j=p_1+2}^{p_2+1} u_{\sigma(j)} + u_{\sigma(p_2+2)} \\
&= \sum_{j=0}^{p_1} u_{\sigma_1(j)} + u_{\sigma_2(0)} + \sum_{j=p_1+2}^{p_2+1} u_{\sigma_1(j-1)} + u_{\sigma_2(1)} \\
&= \sum_{j=0}^{p_1} u_{\sigma_1(j)} + u_{\sigma_2(0)} + \sum_{j=p_1+1}^{p_2} u_{\sigma_1(i)} + u_{\sigma_2(1)} \geq 2
\end{aligned}
$$

puis en raisonnant par récurrence, on vérifie que $\sum_{j=0}^{p_k+k} u_{\sigma(j)} \geq k$. En effet, c'est vrai pour $k = 1$ et supposant le résultat acquis jusqu'au rang $k \geq 1$, on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p_{k+1}+k+1} u_{\sigma(j)} &= \sum_{j=0}^{p_k+k} u_{\sigma(j)} + \sum_{j=p_k+k+1}^{p_{k+1}+k} u_{\sigma(j)} + u_{\sigma(p_{k+1}+k+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{p_k+k} u_{\sigma(j)} + \sum_{j=p_k+k+1}^{p_{k+1}+k} u_{\sigma_1(j-k)} + u_{\sigma_2(k)} \\
&= \sum_{j=0}^{p_k+k} u_{\sigma(j)} + \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} u_{\sigma_1(i)} + u_{\sigma_2(k)} \geq k+1
\end{aligned}
$$

Il en résulte que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est divergente. ■

De manière plus générale, on a le résultat suivant.

Théorème 4.18.

Soit $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente. Pour tout réel S, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit convergente de somme S.

Démonstration La démonstration est analogue à celle du théorème précédent et tout aussi délicate à rédiger. Voir [10] volume 3. ■

Exemple 4.4 *On a* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ *(exercice 4.3) et pour tout couple* (p,q) *d'entiers naturels non nuls, on peut construire une permutation* σ *de* $\mathbb{N}$ *telle que* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)+1} = \ln(2) + \ln\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$ *(exercice 4.8).*

Théorème 4.19.

Sur un espace vectoriel normé de dimension finie, une série est normalement convergente si, et seulement si, elle est commutativement convergente.

Démonstration Du fait qu'un espace vectoriel normé de dimension finie est complet, on déduit qu'une série normalement convergente est commutativement convergente (théorème 4.16).

Pour la réciproque, on se place tout d'abord dans le cas où E est un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$. Si $\sum u_k$ est une série d'éléments de E commutativement convergente et non normalement convergente, l'une des séries composantes $\sum u_{k,j}$ est commutativement convergente et non absolument convergente (toutes les normes sur E étant équivalentes, on peut utiliser la norme $\|\cdot\|_1$ associée à la base $\mathcal{B}$), mais alors on peut alors trouver une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\sigma(k),j}$ soit divergente, ce qui est contradictoire. Une série commutativement convergente est donc normalement convergente. Le résultat pour les $\mathbb{C}$-espaces normés se déduit du fait qu'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$. ■

Cette réciproque est fausse en général, même pour un espace complet. On peut donner un contre-exemple avec l'espace de Banach de dimension infinie ℓ^2 des suites réelles de carré sommable, c'est-à-dire l'espace des suites réelles $v = (v_k)_{k \geq 1}$ telles que $\sum v_k^2$ converge, muni de la norme $\|v\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (théorème 4.35). On pose, pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$\omega_n(k) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ \dfrac{1}{n} \text{ si } k = n \end{cases}$$

et on vérifie que, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, la série $\sum \omega_{\sigma(n)}$ converge dans ℓ^2 et que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \|\omega_n\|_2$ diverge.

4.3 La transformation d'Abel

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Théorème 4.20.

Soient $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour *tous les entiers $q > p \geq 1$, on a :*

$$\sum_{k=p}^{q} \alpha_k u_k = \alpha_q S_q - \alpha_p S_{p-1} - \sum_{k=p}^{q-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) S_k$$

Démonstration En écrivant que $u_k = S_k - S_{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{q} \alpha_k u_k &= \sum_{k=p}^{q} \alpha_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=p}^{q} \alpha_k S_k - \sum_{k=p}^{q} \alpha_k S_{k-1} \\ &= \sum_{k=p}^{q} \alpha_k S_k - \sum_{k=p-1}^{q-1} \alpha_{k+1} S_k = \alpha_q S_q - \alpha_p S_{p-1} - \sum_{k=p}^{q-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) S_k \end{aligned}$$

■

En utilisant cette transformation, on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.21. Abel

Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers 0 en décroissant et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit bornée. Dans ces conditions la série $\sum \alpha_n u_n$ est convergente et on a la majoration des restes $\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k u_k \right\| \leq 2\alpha_{n+1} \|S_n\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\|S_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n\|$.

Démonstration Il s'agit de montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum \alpha_n u_n$ est convergente. En utilisant pour $n \geq 2$, la transformation d'Abel :

$$\begin{aligned} T_n &= \alpha_0 u_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \alpha_0 u_0 + \alpha_n S_n - \alpha_1 S_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) S_k \\ &= \alpha_n S_n - \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) S_k \end{aligned}$$

($S_0 = u_0$) cela revient à montrer que la série $\sum (\alpha_{n+1} - \alpha_n) S_n$ est convergente (la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $(\alpha_n S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers 0). Pour ce faire nous allons montrer qu'elle est normalement convergente dans l'espace de Banach E, ce qui résulte des inégalités $\|(\alpha_{n+1} - \alpha_n) S_n\| \leq (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \|S_n\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum (\alpha_n - \alpha_{n+1})$ étant convergente puisque de même nature que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour ce qui est des majorations des restes, on utilise encore la transformation d'Abel qui nous permet d'écrire pour tout entier $m > n + 1$:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k u_k \right\| &= \left\| \alpha_m S_m - \alpha_{n+1} S_n - \sum_{k=n+1}^{m-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) S_k \right\| \\
&\leq \| \alpha_m S_m - \alpha_{n+1} S_n \| + \sum_{k=n+1}^{m-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \| S_k \| \\
&\leq \left(\alpha_m + \alpha_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \right) \| S_n \|_\infty = 2\alpha_{n+1} \| S_n \|_\infty
\end{aligned}$$

ce qui nous donne la majoration $\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k u_k \right\| \leq 2\alpha_{n+1} \| S_n \|_\infty$ en faisant tendre m vers l'infini. ∎

En utilisant la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient le théorème des séries alternées qui peut en fait se montrer plus simplement comme conséquence du théorème des suites adjacentes.

Définition 4.5. On dit qu'une série réelle est *alternée* si son terme général est de la forme $(-1)^n \alpha_n$, où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle de signe constant.

Théorème 4.22. Séries alternées

Soit $\sum (-1)^n \alpha_n$ *une série alternée. Si la suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* 0 *en décroissant, la série* $\sum (-1)^n \alpha_n$ *est alors convergente et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a la majoration du reste* $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \alpha_k \right| \leq \alpha_{n+1}$.

Démonstration On vérifie que si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de cette série, les suites $(T_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors adjacentes et en conséquence convergentes vers la même limite, ce qui équivaut à la convergence de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (exercice 2.7). En utilisant la décroissance de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} T_{2n+2} - T_{2n} = \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+1} \leq 0 \\ T_{2n+3} - T_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que $(T_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(T_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. De plus avec $\lim_{n\to+\infty} (T_{2n+1} - T_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} \alpha_{2n+1} = 0$, on déduit que ces suites sont convergentes et la convergence de la série $\sum (-1)^n \alpha_n$ en découle. En notant T la somme de cette séries, on a $T_{2n+1} \leq T \leq T_{2n+2} \leq T_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} -\alpha_{2n+1} \leq R_{2n} = T - T_{2n} \leq 0 \\ 0 \leq R_{2n+1} = T - T_{2n+1} \leq \alpha_{2n+2} \end{cases}$$

ou encore $|R_n| \leq \alpha_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ∎

Exemple 4.5 *Pour tout réel $\alpha > 0$, la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente. Précisément, elle est semi-convergente pour $0 < \alpha \leq 1$ et absolument convergente pour $\alpha > 1$.*

Une utilisation classique du théorème d'Abel est l'étude des séries trigonométriques.

Théorème 4.23.

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Si la série $\sum \alpha_n$ est convergente, la série $\sum \alpha_n e^{in\theta}$ est alors absolument convergente pour tout réel θ. Si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, la série $\sum \alpha_n e^{in\theta}$ est alors convergente pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration Le premier point résulte de $\left|\alpha_n e^{in\theta}\right| = \alpha_n$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour le deuxième point, on a pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

et $|S_n(\theta)| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$ (pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$). Le résultat découle alors du théorème d'Abel. ∎

Du théorème précédent, on déduit que si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, la série $\sum \alpha_n e^{-in\theta}$ est alors convergente pour tout réel $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (remplacer θ par $-\theta$) et en conséquence les séries $\sum \alpha_n \cos(n\theta)$ et $\sum \alpha_n \sin(n\theta)$ sont également convergentes. Pour $\theta = (2k+1)\pi \in \pi\mathbb{Z}$, on a $\cos(n\theta) = (-1)^n$, $\sin(n\theta) = 0$ pour tout n et les séries $\sum \alpha_n \cos(n\theta) = \sum (-1)^n \alpha_n$ et $\sum \alpha_n \sin(n\theta)$ sont encore convergentes (la première par le théorème des séries alternées).

Une petite modification de la transformation d'Abel permet de montrer le résultat suivant.

Théorème 4.24. Abel

Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telles que la série $\sum u_n$ soit convergente et la série $\sum (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$ absolument convergente. Dans ces conditions la série $\sum \alpha_n u_n$ est convergente.

Démonstration On utilise une transformation d'Abel qui fait intervenir les restes $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ de la série convergente $\sum u_n$ et non pas les sommes partielles S_n de cette série. Pour ce faire, on écrit que $u_k = R_{k-1} - R_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(R_{k-1} - R_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k R_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k R_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} R_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k R_k = \alpha_1 R_0 - \alpha_n R_n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\alpha_{k+1} - \alpha_k\right) R_k\end{aligned}$$

Comme $\sum \left(\alpha_{n+1} - \alpha_n\right)$ est absolument convergente, elle est convergente et cette série étant de même nature que la suite $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, cette dernière est convergente. Il en résulte que la suite $\left(\alpha_n R_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ($\left(R_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 puisque $\sum u_n$ converge). Enfin avec $\left\|\left(\alpha_{n+1} - \alpha_n\right) R_n\right\| \leq \left|\alpha_{n+1} - \alpha_n\right| \left\|R_n\right\|_{\infty}$, on déduit que la série $\sum \left(\alpha_{n+1} - \alpha_n\right) R_n$ est normalement convergente. En définitive, $\sum \alpha_n u_n$ est convergente. ∎

4.4 Produit de Cauchy de deux séries

Pour ce paragraphe, $(\mathbb{A}, \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach. On peut se contenter de $\mathbb{A} = \mathbb{C}$ muni du module.

Étant données deux suites $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{A}$, on peut définir naïvement le produit des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ comme la série $\sum u_n v_n$ (produit de Hadamard). Par exemple pour deux séries géométriques complexes convergentes $\sum a^n$ et $\sum b^n$, la série produit $\sum a^n b^n$ est encore une série géométrique convergente, mais dans le cas où $2ab \neq a + b$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n b^n = \frac{1}{1 - ab} \neq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^n\right) = \frac{1}{1 - a} \frac{1}{1 - b}$$

La définition qui suit du produit de deux séries est en fait plus commode.

Définition 4.6. Étant données deux suites $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{A}$, le *produit de Cauchy* (ou produit de convolution) des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Pour l'exemple des séries géométriques complexes convergentes, on a :

$$(b - a)\, w_n = (b - a) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = b^{n+1} - a^{n+1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$(b-a)\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1} = \frac{b}{1-b} - \frac{a}{1-a} = \frac{b-a}{(1-a)(1-b)}$$

et pour $a \neq b$, il en résulte que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-b} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^n\right)$$

ce résultat étant en fait aussi valable pour $a = b$.

Dans le cadre des séries à termes réels positifs, on a le résultat suivant.

Théorème 4.25.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs non identiquement nulles et $\sum w_n$ leur produit de Cauchy.

- *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, il en est alors de même de $\sum w_n$ et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.*
- *Si l'une des deux séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ est divergente, il en est alors de même de $\sum w_n$ et l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$ est encore vérifiée dans ce cas avec $+\infty$ pour valeur commune.*

Démonstration On note respectivement S_n, S'_n et S''_n les sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_n S'_n = \left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right) = \sum_{(i,j)\in A_n} u_i v_j$$

et :

$$S''_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k} u_i v_j = \sum_{(i,j)\in B_n} u_i v_j$$

où $A_n = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leq i,j \leq n\right\}$ et $B_n = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ 0 \leq i,j \leq n \text{ et } i+j \leq n\right\}$. Comme $B_n \subset A_n \subset B_{2n}$ et les séries sont à termes positifs, on a :

$$S''_n = \sum_{(i,j)\in B_n} u_i v_j \leq \sum_{(i,j)\in A_n} u_i v_j = S_n S'_n \leq \sum_{(i,j)\in B_{2n}} u_i v_j = S''_{2n}$$

En conséquence si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors majorées, donc aussi la suite $(S''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui équivaut à dire que la série à termes positifs $\sum w_n$ converge. Faisant tendre n vers l'infini dans l'encadrement précédent, on obtient l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Si l'une des deux séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ diverge, l'une des suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend alors vers $+\infty$ et il en est de même de $(S''_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ (les u_n, v_n sont positifs non tous nuls, donc S_n et S'_n sont croissantes et strictement positives pour n grand), la série $\sum w_n$ est donc divergente. ∎

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 4.26.

Le produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ normalement convergentes est normalement convergent et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Démonstration Le théorème précédent nous dit que le produit de Cauchy $\sum w'_n$ des séries $\sum \|u_n\|$, $\sum \|v_n\|$ est convergent et des inégalités :

$$\|w_n\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right\| \leq w'_n = \sum_{k=0}^{n} \|u_k\| \|v_{n-k}\|$$

on déduit que la série $\sum w_n$ est normalement convergente. En notant respectivement S_n, S'_n, S''_n les sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$ et T_n, T'_n, T''_n celles des séries $\sum \|u_n\|$, $\sum \|v_n\|$, $\sum w'_n$ on a en utilisant les notations de la démonstration du théorème précédent :

$$\begin{aligned} \|S_n S'_n - S''_n\| &= \left\| \sum_{(i,j)\in A_n} u_i v_j - \sum_{(i,j)\in B_n} u_i v_j \right\| = \left\| \sum_{(i,j)\in A_n\setminus B_n} u_i v_j \right\| \\ &\leq \sum_{(i,j)\in A_n\setminus B_n} \|u_i\| \|v_j\| = \sum_{(i,j)\in A_n} \|u_i\| \|v_j\| - \sum_{(i,j)\in B_n} \|u_i\| \|v_j\| = T_n T'_n - T''_n \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} (T_n T'_n - T''_n) = 0$ puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} w'_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|v_n\|\right)$. Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_n S'_n - S''_n) = 0$, les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergentes, ce qui implique que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} S''_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \lim_{n\to+\infty} S'_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

∎

Le résultat précédent peut se généraliser dans le cas de plusieurs séries numériques normalement convergentes comme suit.

Théorème 4.27.

Si $m \geq 2$ est un entier et $\sum u_{n,1}, \cdots, \sum u_{n,m}$ sont des séries normalement convergentes, on a alors :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,1}\right) \cdots \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{(k_1,\cdots,k_m)\in\mathbb{N}^m \\ k_1+\cdots+k_m=n}} u_{k_1,1} \cdots u_{k_m,m}$$

la série du second membre de cette égalité étant normalement convergente.

Démonstration On raisonne par récurrence sur l'entier $m \geq 2$. Pour $m = 2$, c'est le théorème précédent. Supposant le résultat acquis au rang $m - 1 \geq 2$, on a pour $\sum u_{n,1}, \cdots, \sum u_{n,m}$ normalement convergentes :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,1}\right) \cdots \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

où $v_n = \displaystyle\sum_{\substack{(k_1,\cdots,k_{m-1})\in\mathbb{N}^{m-1} \\ k_1+\cdots+k_{m-1}=n}} u_{k_1,1} \cdots u_{k_{m-1},m-1}$, la série $\sum v_n$ étant normalement convergente (hypothèse de récurrence), ce qui donne en exploitant le cas $m = 2$:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,1}\right) \cdots \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

où :

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k_m=0}^{n} v_{n-k_m} u_{k_m,m} = \sum_{k_m=0}^{n} \left(\sum_{\substack{(k_1,\cdots,k_{m-1})\in\mathbb{N}^{m-1} \\ k_1+\cdots+k_{m-1}=n-k_m}} u_{k_1,1} \cdots u_{k_{m-1},m-1} \right) u_{k_m,m} \\ &= \sum_{\substack{(k_1,\cdots,k_m)\in\mathbb{N}^m \\ k_1+\cdots+k_m=n}} u_{k_1,1} \cdots u_{k_m,m} \end{aligned}$$

la série $\sum w_n$ étant normalement convergente. ■

Exemples 4.3

1. *Pour a, b qui commutent dans $\mathbb{A}$ tels que $\|a\| < 1$ et $\|b\| < 1$, on a :*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

2. *La série* $\sum \frac{1}{n!} a^n$ *étant normalement convergente pour tout* $a \in \mathbb{A}$ *(critère de Cauchy ou de d'Alembert), on a en notant* $f(a)$ *sa somme,* $f(a) f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$ *pour tous* a, b *dans* $\mathbb{A}$ *et dans le cas particulier où* a *et* b *commutent on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} a^k b^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{1}{n!} (a+b)^n$$

On a donc $f(a) f(b) = f(a+b)$ *pour tous* a, b *dans* $\mathbb{A}$ *qui commutent avec* $f(0) = 1$*. Nous verrons un peu plus que cette fonction* f *est la fonction exponentielle définie au paragraphe 5.3.3 (corollaire 5.30).*

En réalité la convergence normale de l'une des deux séries suffit (l'autre série étant bien entendu convergente). Précisément on a le résultat suivant.

Théorème 4.28. Mertens

Le produit de Cauchy $\sum w_n$ *de deux séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergentes, l'une d'entre elles étant normalement convergente, est convergent et on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.

Démonstration On suppose que $\sum u_n$ est normalement convergente et que $\sum v_n$ est convergente. En désignant par S_n, S'_n et S''_n les sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S''_n = \sum_{k=0}^{n} w_k &= (u_0 v_0) + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0) \\ &= u_0 (v_0 + \cdots + v_n) + u_1 (v_0 + \cdots + v_{n-1}) + \cdots + u_n v_0 \\ &= u_0 S'_n + u_1 S'_{n-1} + \cdots + u_n S'_0 \end{aligned}$$

En notant $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ et $R'_n = S' - S'_n$, on a :

$$S''_n = \sum_{k=0}^{n} u_k S'_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k \left(S' - R'_{n-k} \right) = S_n S' - \sum_{k=0}^{n} u_k R'_{n-k} \tag{4.1}$$

et il s'agit alors de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k R'_{n-k} = 0$.

La série $\sum v_n$ étant convergente, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} R'_n = 0$, donc la suite $(R'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et il existe un réel $M' > 0$ tel que $\|R'_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La série $\sum u_n$ étant normalement convergente, on note $T = \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$ et T est strictement positif dans le cas où les u_n ne sont pas tous nuls (sans quoi il n'y a rien à prouver).

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que $\|R'_n\| < \varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$ et un entier m_ε tel que $T - \sum_{k=0}^{n} \|u_k\| < \varepsilon$ pour tout entier $n \geq m_\varepsilon$, ce qui nous donne pour $n > n_\varepsilon + m_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=0}^{n} u_k R'_{n-k} \right\| &\leq \sum_{k=0}^{m_\varepsilon} \|u_k\| \left\|R'_{n-k}\right\| + \sum_{k=m_\varepsilon+1}^{n} \|u_k\| \left\|R'_{n-k}\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m_\varepsilon} \|u_k\| \left\|R'_{n-k}\right\| + M \left(T - \sum_{k=0}^{m_\varepsilon} \|u_k\| \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{m_\varepsilon} \|u_k\| \left\|R'_{n-k}\right\| + M\varepsilon
\end{aligned}$$

avec $\left\|R'_{n-k}\right\| < \varepsilon$ pour $0 \leq k \leq m_\varepsilon$ (puisque $n-k \geq n-m_\varepsilon > n_\varepsilon$), ce qui implique que :

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} u_k R'_{n-k} \right\| \leq \left(\sum_{k=0}^{m_\varepsilon} \|u_k\| + M \right) \varepsilon \leq (T+M)\,\varepsilon$$

pour tout entier $n > n_\varepsilon + m_\varepsilon$ et prouve que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k R'_{n-k} = 0$. On déduit alors de (4.1) que $\lim_{n\to+\infty} S''_n = \left(\lim_{n\to+\infty} S_n \right) S' = SS'$, ce qui signifie que $\sum w_n$ converge et qu'on a l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$. ∎

Le théorème 4.26 peut se déduire du théorème de Mertens, mais sans aboutir à la convergence normale.

Le produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes, n'est pas nécessairement convergent comme le montre l'exemple du produit de Cauchy de la série semi-convergente $\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$ par elle même où $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ Le théorème des séries alternées nous dit que $\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$ est convergente et le produit de Cauchy de cette série par elle même est la série $\sum w_n$ définie par :

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{((k+1)(n-k+1))^\alpha}$$

où $(k+1)(n-k+1) \leq (n+1)^2$ pour tout entier k compris entre 0 et n, ce qui implique que $|w_n| \geq (n+1)^{1-2\alpha} \geq 1$ et $\sum w_n$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0.

4.5 Séries doubles dans un espace de Banach

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

De même que l'on considère des intégrales doubles, on peut définir la notion de série double. L'idée étant de donner un sens à une somme du type $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{0\leq k,\ell\leq n} u_{k,\ell} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=0}^{n} u_{k,\ell}\right) = \sum_{\ell=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n} u_{k,\ell}\right)$.

Définition 4.7. On dit qu'une suite double $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ d'éléments de E est *sommable* s'il existe un réel positif M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{0\leq k,\ell\leq n} \|u_{k,\ell}\| \leq M$$

Théorème 4.29.

Si $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est une suite double sommable d'éléments de E, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \sum_{0\leq k,\ell\leq n} u_{k,\ell}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est alors convergente.

Démonstration La suite de réels positifs $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = \sum_{0\leq k,\ell\leq n} \|u_{k,\ell}\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est croissante et majorée par M, donc convergente vers une limite $V \in \mathbb{R}^+$. Pour tous les entiers $m > n \geq 0$, on a :

$$\|U_m - U_n\| = \left\| \sum_{(k,\ell)\in[0,m]^2\setminus[0,n]^2} u_{k,\ell} \right\| \leq \sum_{(k,\ell)\in[0,m]^2\setminus[0,n]^2} \|u_{k,\ell}\| = V_m - V_n \leq V - V_n$$

avec $\lim_{n\to+\infty} (V - V_n) = 0$. Il en résulte que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach E et en conséquence convergente. ∎

Si $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est une suite double sommable d'éléments de E, on note alors $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$ la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit :

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leq k,\ell\leq n} u_{k,\ell}$$

Dans le cas où $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est une suite sommable de réels positifs, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée et on a :

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leq k,\ell\leq n} u_{k,\ell} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{0\leq k,\ell\leq n} u_{k,\ell}$$

Théorème 4.30.

Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres réels positifs. Cette suite est sommable si, et seulement si, elle vérifie les propriétés suivantes :

- *pour tout $k\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$ est convergente ;*
- *la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell}\right)$ est convergente.*

Dans ce cas, pour tout $\ell\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$ est convergente, la série $\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell}\right)$ est convergente et on a les égalités :

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} u_{k,\ell} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$$

Démonstration On note $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_n = \sum_{0\leq k,\ell\leq n} u_{k,\ell}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. On suppose que $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et on note $S = \lim_{n\to+\infty} U_n$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout entier $n\geq k$, on a :

$$\sum_{\ell=0}^{n} u_{k,\ell} \leq U_n = \sum_{0\leq j,\ell\leq n} u_{j,\ell} \leq S = \lim_{n\to+\infty} U_n$$

(la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée), donc la suite croissante $\left(\sum_{\ell=0}^{n} u_{k,\ell}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par S, ce qui implique que la série $\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$ est convergente de somme $S_k\leq S$. Avec $\sum_{k=0}^{n} S_k = \lim_{m\to+\infty}\sum_{\ell=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n} u_{k,\ell}\right)$ et :

$$\forall m\geq n,\ \sum_{\ell=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n} u_{k,\ell}\right) \leq \sum_{\ell=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{m} u_{k,\ell}\right) = U_m$$

on déduit que $\sum_{k=0}^{n} S_k \leq \lim_{m\to+\infty} U_m = S$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n \leq S$. D'autre part, avec :

$$U_n = \sum_{0\leq k,\ell\leq n} u_{k,\ell} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=0}^{n} u_{k,\ell}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} S_k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} S_n$$

on déduit que $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n$ et qu'on a l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n = S$. Comme k et ℓ jouent des rôles symétriques, on a aussi $T_\ell = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell} < +\infty$ pour tout ℓ et $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} T_m = S$. On a donc les égalités :

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} u_{k,\ell} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell} \tag{4.2}$$

2. Réciproquement, on suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$ est convergente de somme S_k et que la série $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} S_k$ est convergente de somme S. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_n = \sum_{0\leq k,\ell\leq n} u_{k,\ell} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=0}^{n} u_{k,\ell}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} S_k \leq S$$

donc la suite double $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable. La preuve de la condition nécessaire nous dit qu'on a les égalités (4.2) . ∎

Dans le cas où l'une des sommes positives $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ ou $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ est infinie, il en est de même de l'autre, puisque si l'une est finie l'autre l'est. L'égalité $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ est donc valable dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ pour toute suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs.

Dans le cas où l'une des sommes $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ ou $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ est finie (les $u_{n,m}$ étant positifs), on dit que la série double $\sum u_{n,m}$ est convergente et on note $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$ la valeur commune de $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$.

Théorème 4.31. Fubini pour les familles sommables

Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double d'éléments de E. Montrer que cette suite est sommable si, et seulement si, elle vérifie les propriétés suivantes :

- *pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} \|u_{k,\ell}\|$ est convergente ;*

- *la série* $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\|u_{k,\ell}\|\right)$ *est convergente.*

Dans ce cas, pour tout $k \in \mathbb{N}$, *la série* $\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$ *est convergente, pour tout* $\ell \in \mathbb{N}$, *la série* $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$ *est convergente, les séries* $\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell}\right)$ *et* $\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell}\right)$ *sont convergentes et on a les égalités :*

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} u_{k,\ell} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$$

Démonstration On note $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_n = \sum_{0\leq k,\ell\leq n} u_{k,\ell}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose que $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et on note $S = \lim_{n\to+\infty} U_n$. Dans ce cas, la suite double de réels positifs $(\|u_{k,\ell}\|)_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}$ est également sommable et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\|u_{k,\ell}\|\right) = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\|u_{k,\ell}\|\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{0\leq k,\ell\leq n}\|u_{k,\ell}\| = S' < +\infty$$

Il en résulte que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ la série $\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$ est convergente de somme S_k, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell}$ est convergente de somme T_ℓ (car $\sum_{\ell=0}^{+\infty}\|u_{k,\ell}\| \leq S'$ et $\sum_{k=0}^{+\infty}\|u_{k,\ell}\| \leq S'$). De même avec les inégalités $\sum_{k=0}^{n}\|S_k\| \leq \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\|u_{k,\ell}\|\right) \leq S'$ et $\sum_{\ell=0}^{n}\|T_\ell\| \leq \sum_{\ell=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\|u_{k,\ell}\|\right) \leq S'$, on déduit que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n$ et $\sum_{m=0}^{+\infty} T_m$ sont convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{n} S_k - U_n\right\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell}\right) - \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=0}^{n} u_{k,\ell}\right)\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=n+1}^{+\infty} u_{k,\ell}\right)\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=n+1}^{+\infty}\|u_{k,\ell}\|\right) \leq \varepsilon_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\|u_{k,\ell}\|\right) - \sum_{0\leq k,\ell\leq n}\|u_{k,\ell}\| \\
&\leq \varepsilon_n = S' - \sum_{0\leq k,\ell\leq n}\|u_{k,\ell}\|
\end{aligned}$$

avec$\varepsilon_n = 0$. Il en résulte que $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leq k,\ell\leq n} u_{k,\ell}$. Comme k et ℓ jouent des rôles symétriques, on a de manière analogue $\sum_{m=0}^{+\infty} T_m = \lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leq k,\ell\leq n} u_{k,\ell}$.

2. Réciproquement, on suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{\ell=0}^{+\infty} \|u_{k,\ell}\|$ est convergente de somme S'_k et que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} S'_k$ est convergente de somme S'. Dans ce cas, la suite double $(\|u_{k,\ell}\|)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et il en est de même de $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$, ce qui nous donne les résultats annoncés. ∎

Le théorème précédent n'est pas valable *a priori* sans hypothèse de convergence normale. Les sommes $\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ peuvent être définies et différentes (exercice 4.13).

On dispose aussi pour les séries doubles du résultat suivant qui est l'analogue du théorème de convergence dominée de Lebesgue dans le cadre de la théorie de l'intégration.

Théorème 4.32. Convergence dominée

Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double d'éléments de E telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{n,m})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément u_m de E. S'il existe une suite $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls telle que la série $\sum \alpha_m$ soit convergente et $\|u_{n,m}\| \leq \alpha_m$ pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{m\in\mathbb{N}} u_{n,m}$ converge absolument vers un élément S_n de E, la série $\sum_{m\in\mathbb{N}} u_m$ converge normalement vers un élément S de E et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, soit $\lim_{n\to+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} u_{n,m}$.

Démonstration Des conditions $\|u_{n,m}\| \leq \alpha_m$ pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ on déduit en faisant tendre n vers l'infini pour $m \in \mathbb{N}$ fixé que $\|u_m\| \leq \alpha_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. La convergence de la série $\sum \alpha_m$ entraîne alors que les séries $\sum_{m\in\mathbb{N}} u_{n,m}$, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $\sum_{m\in\mathbb{N}} u_m$ sont convergentes dans l'espace de Banach E. En notant S_n et S

les sommes respectives de ces séries, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|S_n - S\| &\leq \sum_{m=0}^{p} \|u_{n,m} - u_m\| + \sum_{m=p+1}^{+\infty} (\|u_{n,m}\| + \|u_m\|) \\ &\leq \sum_{m=0}^{p} \|u_{n,m} - u_m\| + 2 \sum_{m=p+1}^{+\infty} \alpha_m \end{aligned}$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier p tel que $\sum\limits_{m=p+1}^{+\infty} \alpha_m < \varepsilon$ (convergence de $\sum \alpha_m$). Pour ε et p ainsi choisis, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{m=0}^{p} \|u_{n,m} - u_m\| = 0$, donc il existe un entier n_0 tel que $\sum\limits_{m=0}^{p} \|u_{n,m} - u_m\| < \varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_0$, ce qui donne $|S_n - S| < 3\varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers S. ■

4.6 Les espaces ℓ^p pour $1 \leq p \leq +\infty$

En notant $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ (suites numériques), on désigne par ℓ^∞ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ formé des suites bornées et pour tout réel $p \geq 1$ par ℓ^p le sous-ensemble de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n^p$ soit absolument convergente. Pour toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, on note $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ et pour tout réel $p \geq 1$, toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, on note $\|u\|_p = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Le fait que ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ se vérifie facilement.

Pour $p \geq 1$, on peut vérifier que ℓ^p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ comme suit. La suite nulle est dans ℓ^p et pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \ell^p$, il est clair que $\lambda u \in \ell^p$. Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$, on a $|u_n + v_n| \leq 2 \max(|u_n|, |v_n|)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} |u_k + v_k|^p &\leq 2^p \sum_{k=0}^{n} (\max(|u_k|, |v_k|))^p \\ &\leq 2^p \sum_{k=0}^{n} (|u_k|^p + |v_k|^p) \leq 2^p \left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p \right) \end{aligned}$$

ce qui implique que $u + v \in \ell^p$.

Du fait que le terme général d'une série convergente tend vers 0, on déduit que ℓ^p est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞ pour tout réel $p \geq 1$.

Pour $p \geq 1$ et toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, on a $|u_n|^p \leq \|u\|_p^p = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p$, soit $|u_n| \leq \|u\|_p$, ce qui implique que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_p$.

Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc il existe un entier n_0 tel que $|u_n| \leq 1$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui implique que pour tout réel $q > p$, on a $|u_n|^q \leq |u_n|^p$ pour tout $n \geq n_0$, et la convergence de la série $\sum |u_n|^p$ entraîne celle de $\sum |u_n|^q$, ce qui signifie que $u \in \ell^q$. On a donc $\ell^p \subset \ell^q$ pour tous $1 \leq p < q \leq +\infty$ et $\|u\|_q^q \leq \|u\|_p^p$ pour tout $u \in \ell^p$.

Théorème 4.33.

L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel ℓ^∞ et $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Démonstration Avec les notations de l'exercice 3.6, on a $\ell^\infty = \mathcal{F}_b(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et cet exercice nous dit que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. ■

En utilisant l'inégalité de convexité $x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha) y$ où $\alpha \in]0,1[$ et x, y sont réels positifs (exercice 3.1), on a le résultat suivant.

Théorème 4.34. Inégalité de Hölder

Soient p, q deux réels dans $]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour toutes suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$, la suite $w = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans ℓ^1 et on a $\|w\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$. L'égalité étant réalisée si, et seulement si, $u = 0$ ou $v = 0$ ou u, v sont non nuls et il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $|v_n| = \lambda^p |u_n|^{p-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration Pour $u = 0$ ou $v = 0$, on a $w = 0$ et l'égalité de Hölder est trivialement vérifiée.

Pour u et v non nuls dans ℓ^p et ℓ^q respectivement tels que $|v_n| = \lambda^p |u_n|^{p-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $\lambda > 0$, on a vu avec l'exercice 3.1 que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} |u_k v_k| = \left(\sum_{k=0}^{n} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} |v_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

ce qui implique que $w \in \ell^1$ et $\|w\|_1 = \|u\|_p \|v\|_q$.

Pour u, v non nulles, en utilisant les résultats de l'exercice 3.1 on a pour tout réel $\lambda > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} |u_k| |v_k| &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda |u_k|) \frac{|v_k|}{\lambda} \leq \frac{\lambda^p}{p} \sum_{k=0}^{n} |u_k|^p + \frac{1}{q\lambda^q} \sum_{k=0}^{n} |v_k|^q \\ &\leq \varphi(\lambda) = \frac{\lambda^p}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q\lambda^q} \|v\|_q^q\end{aligned}$$

ce qui implique que $w \in \ell^1$ et que $\|w\|_1 \leq \inf\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^{+,*}} \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_0) = \|u\|_p \|v\|_q$, où $\lambda_0 = \dfrac{\|v\|_q^{\frac{1}{p}}}{\|u\|_p^{\frac{1}{q}}}$ est l'unique zéro de la dérivée φ' sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (reprendre le raisonnement de l'exercice 3.1). Si l'égalité est réalisée, on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| |v_n| = \varphi(\lambda_0) = \frac{\lambda_0^p}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q\lambda_0^q} \|v\|_q^q = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_0^p}{p} |u_n|^p + \frac{1}{q\lambda_0^q} |v_n|^q \right)$$

ce qui équivaut à $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_0^p}{p} |u_n|^p + \frac{1}{q\lambda_0^q} |v_n|^q - |u_n| |v_n| \right) = 0$, chaque terme de cette somme étant positif (inégalité de Young pour $(\lambda |u_n|) \frac{|v_n|}{\lambda}$), ce qui impose les égalité $(\lambda_0 |u_n|) \frac{|v_n|}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0^p}{p} |u_n|^p + \frac{1}{q\lambda_0^q} |v_n|^q$ qui sont équivalentes à $\lambda_0^p |u_n|^p = \frac{|v_n|^q}{\lambda_0^q}$ ou encore à $\lambda_0^{p+q} |u_n|^p = \lambda_0^{pq} |u_n|^p = |v_n|^q$, soit à $|v_n| = \lambda_0^p |u_n|^{\frac{p}{q}} = \lambda_0^p |u_n|^{p-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ∎

Les conditions $|v_n| = \lambda^p |u_n|^{p-1}$ sont équivalentes à $|u_n| = \lambda^q |u_n|^{q-1}$ (permuter les rôles de p et q).

Pour tous $u \in \ell^1$ et $v \in \ell^\infty$, on a $|u_n v_n| \leq \|v\|_\infty |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\|w\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \|u\|_1 \|v\|_\infty$, c'est-à-dire que l'inégalité de Hölder est encore valable pour $p = 1$ et $q = +\infty$. Elle est également valable pour $p = +\infty$ et $q = 1$.

Cette inégalité de Hölder pour $1 < p, q < +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nous dit que pour toute suite $v \in \ell^q$ la forme linéaire L_v définie sur ℓ^p par $L_v(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ pour tout $u \in \ell^p$ est continue de norme $N(L_v) = \|v\|_q$. En effet, pour $v = 0$ c'est clair et pour $v \neq 0$, des inégalités :

$$|L_v(u)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

pour tout $u \in \ell^p$, on déduit que L_v est continue telle que $N(L_v) \leq \|v\|_q$. La suite u définie par $u_n = \frac{|v_n|^q}{v_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \neq 0$ et $u_n = 0$ pour $v_n = 0$ est dans $\ell^p \setminus \{0\}$ (on a $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p = \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^{pq-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^q$ puisque $pq = p + q$) et on a :

$$|L_v(u)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^q = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| = \|u\|_p \|v\|_q$$

(on a $|u_n| = \lambda^q |u_n|^{q-1}$ avec $\lambda = 1$), donc $N(L_v) = \|v\|_q$.

Ce résultat est encore valable pour $(p, q) = (+\infty, 1)$. La continuité de L_v se déduit de l'inégalité de Hölder. Pour $v \in \ell^1 \setminus \{0\}$ prenant $u \in \ell^\infty$ définie par $u_n = \frac{\overline{v_n}}{v_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \neq 0$ et $u_n = 0$ pour $v_n = 0$, on a :

$$|L_v(u)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| = \|u\|_\infty \|v\|_1$$

donc $N(L_v) = \|v\|_1$.

Théorème 4.35.

Pour $p \geq 1$, l'application $\|\cdot\|_p$ est une norme sur l'espace vectoriel ℓ^p et $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$ est un espace de Banach.

Démonstration On vérifie tout d'abord que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur ℓ^p. Les propriétés d'homogénéité ($\|\lambda u\|_p = |\lambda| \|u\|_p$) et de séparation ($\|u\|_p = 0$ si, et seulement si, $u = 0$) se vérifiant facilement, il reste à prouver l'inégalité triangulaire. Pour $p = 1$, cette inégalité est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ ou le module sur $\mathbb{C}$. Pour $p > 1$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$, en utilisant les résultats de l'exercice 3.1 on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} |u_k| |u_k + v_k|^{p-1} &\leq \left(\sum_{k=0}^{n} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} |u_k + v_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|u\|_p \|u+v\|_p^{\frac{p}{q}} \leq \|u\|_p \|u+v\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

et :

$$\sum_{k=0}^{n} |u_k + v_k|^p \leq \left(\|u\|_p + \|v\|_p\right) \|u+v\|_p^{p-1}$$

ce qui entraîne en faisant tendre n vers $+\infty$ que $\|u+v\|_p^p \leq \left(\|u\|_p + \|v\|_p\right) \|u+v\|_p^{p-1}$ ou encore que $\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$.

Soit $\left(u^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de ℓ^p où $u^{(n)} = \left(u_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Si $\left(u^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$, on déduit des inégalités $\left|u_k^{(m)} - u_k^{(n)}\right| \leq \left\|u^{(m)} - u^{(n)}\right\|_p$ que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $\left(u_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ et en conséquence convergente vers un scalaire $u_k \in \mathbb{K}$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que $\left\|u^{(m)} - u^{(n)}\right\|_p < \varepsilon$ pour tous les entiers $m > n \geq n_\varepsilon$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, des inégalités :

$$\sum_{j=0}^{r} \left|u_j^{(m)} - u_j^{(n)}\right|^p \leq \left\|u^{(m)} - u^{(n)}\right\|_p^p < \varepsilon^p$$

on déduit en faisant tendre m vers l'infini que $\sum_{j=0}^{r} \left|u_j - u_j^{(n)}\right|^p \leq \varepsilon^p$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui implique que $\sum_{j=0}^{+\infty} \left|u_j - u_j^{(n)}\right|^p \leq \varepsilon^p$. Il en résulte que $u - u^{(n_\varepsilon)} \in \ell^p$, $u = \left(u - u^{(n_\varepsilon)}\right) + u^{(n_\varepsilon)} \in \ell^p$ et $\left\|u - u^{(n)}\right\|_p < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui nous dit que $\left(u^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$. En conclusion, cet espace est complet. ∎

4.7 Moyennes de Toeplitz, Cesàro et Euler

4.7.1 Théorème de Toeplitz

Pour ce paragraphe, $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et on se donne une suite double $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq n}$ de scalaires telle que :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,k} = 0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1$;
- il existe un réel $C > 0$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_{n,k}| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas où les $a_{n,k}$ sont tous réels positifs, la troisième condition est inutile car conséquence de la deuxième.

On associe à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses *moyennes de Toepliz* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} u_k$$

Théorème 4.36. Toeplitz

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers la même limite.

Démonstration Notons ℓ la limite dans E de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En exploitant le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1$, il existe pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\left| \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} - 1 \right| < \varepsilon$ et $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$, ce qui nous donne pour tout entier $n > n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\|v_n - \ell\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} (u_k - \ell) + \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} - 1 \right) \ell \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |a_{n,k}| \, \|u_k - \ell\| + \varepsilon \left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |a_{n,k}| + \|\ell\| \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |a_{n,k}| \, \|u_k - \ell\| + \varepsilon (C + \|\ell\|) \leq M \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |a_{n,k}| + \varepsilon (C + \|\ell\|)
\end{aligned}$$

en notant $M = \sup\limits_{0\leq k\leq n_\varepsilon} \|u_k - \ell\|$. Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,k} = 0$ pour tout entier k compris entre 0 et n_ε, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n_\varepsilon} |a_{n,k}| = 0$ et il existe un entier $m_\varepsilon > n_\varepsilon$ tel que

$\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |a_{n,k}| < \varepsilon$ pour tout $n \geq m_\varepsilon$, ce qui donne au final $\|v_n - \ell\| \leq (M + C + \|\ell\|)\,\varepsilon$ pour tout $n \geq m_\varepsilon$ et prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$. ■

Dans le cas où la suite $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq n}$ est à valeurs réelles strictement positives, le résultat précédent est valable pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, ce qui est faux sans hypothèse de positivité des $a_{n,k}$ (exercice 4.24).

Ce théorème de Toeplitz peut se généraliser comme suit.

On se donne une suite double $(b_{n,k})_{n\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq n}$ de scalaires telle que :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n,k} = b_k$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} = B$;
- il existe un réel $D > 0$ tel que $\sum_{k=0}^{n} |b_{n,k}| \leq D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

et on associe à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} u_k$$

Lemme 4.3 *Avec les hypothèses précédentes, la série $\sum b_k$ est absolument convergente.*

Démonstration Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \geq m$, on a :

$$\sum_{k=0}^{m} |b_{n,k}| \leq \sum_{k=0}^{n} |b_{n,k}| \leq D$$

ce qui nous donne en faisant tendre n vers l'infini à m fixé, $\sum_{k=0}^{m} |b_k| \leq D$ et cela implique que la série $\sum b_n$ est absolument convergente. ■

On note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

Théorème 4.37.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E vers ℓ, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} u_k = (B - S)\,\ell + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n$$

Démonstration Si $S \neq B$, en posant $a_{n,k} = \dfrac{b_{n,k} - b_k}{B - S}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et k entier compris entre 0 et n, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n,k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \frac{1}{B - S} \left(\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} - \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k \right) = 1$$

avec la domination $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |a_{n,k}| \leq \frac{1}{|B - S|} \left(\sum_{k=0}^{n} |b_{n,k}| + \sum_{k=0}^{n} |b_k| \right) \leq \frac{2D}{|B - S|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de Toeplitz nous dit alors que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} u_k = \ell$. De plus, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant convergente, elle est bornée et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|b_n u_n\| \leq \left(\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| \right) |b_n|$ avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| < +\infty$, ce qui implique que la série $\sum b_n u_n$ est normalement convergente dans E, donc convergente. On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} u_k = (B - S)\, \ell + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n$$

Dans le cas où $S = B$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left\| w_n - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k u_k \right\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} (b_{n,k} - b_k)\, u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k u_k \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} (b_{n,k} - b_k)\, (u_k - \ell) + \sum_{k=0}^{n} (b_{n,k} - b_k)\, \ell - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k u_k \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} |b_{n,k} - b_k|\, \|u_k - \ell\| + \left| \sum_{k=0}^{n} (b_{n,k} - b_k) \right| \|\ell\| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |b_k|\, \|u_k\|
\end{aligned}$$

avec $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |b_k|\, \|u_k\| = 0$ puisque $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|\, \|u_n\| < +\infty$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (b_{n,k} - b_k) = B - S = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - \ell\| = 0$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} |b_k|\, \|u_k\| < \varepsilon$ et $\displaystyle\left| \sum_{k=0}^{n} (b_{n,k} - b_k) \right| < \varepsilon$ pour tout entier $n > n_\varepsilon$, ce qui nous donne en notant $M = \sup\limits_{0 \leq k \leq n_\varepsilon} \|u_k - \ell\|$:

$$\left\| w_n - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k u_k \right\| \leq M \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |b_{n,k} - b_k| + \varepsilon \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |b_{n,k} - b_k| + 2\varepsilon$$

avec $\displaystyle\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |b_{n,k} - b_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |b_{n,k}| + \sum_{k=0}^{n} |b_k| \leq 2D$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |b_{n,k} - b_k| = 0$, donc il existe un entier $m_\varepsilon > n_\varepsilon$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |b_{n,k} - b_k| < \varepsilon$ pour tout $n \geq m_\varepsilon$, ce qui nous donne $\displaystyle\left\| w_n - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k u_k \right\| \leq (M + 2D + 2)\,\varepsilon$ pour tout $n \geq m_\varepsilon$ et prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n$.

On a donc, dans tous les cas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} u_k = (B - S)\,\ell + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n$. ■

4.7.2 Théorème de Cesàro

Le théorème de Toeplitz peut être utilisé pour prouver le classique théorème de Cesàro.

On se donne une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, on associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses moyennes pondérées de Cesàro définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k$$

où on a noté $\displaystyle A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 4.38. Cesàro

Avec les notations qui précèdent, la condition $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$ équivaut à dire que pour toute suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses moyennes pondérées de Cesàro converge vers la même limite.

Démonstration Supposons que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$. En notant $\displaystyle a_{n,k} = \frac{\alpha_k}{A_{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier k compris entre 0 et n, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \frac{1}{A_{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_{n,k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_k}{A_{n+1}} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_{n+1} = +\infty$. Les hypothèses du théorème de Toeplitz sont donc vérifiées et il en résulte que pour toute suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{A_n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k u_k\right)=$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n,k}u_k=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

Sans utiliser le théorème de Toeplitz, on peut procéder de manière plus classique comme suit. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E convergente vers $\ell\in E$, on a alors :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\geq n_\varepsilon,\ \|u_n-\ell\|<\varepsilon$$

ce qui nous donne pour tout entier $n\geq n_\varepsilon+1$:

$$\begin{aligned}\|v_n-\ell\| &= \frac{1}{A_n}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(u_k-\ell)\right\| \leq \frac{1}{A_n}\left\|\sum_{k=0}^{n_\varepsilon-1}\alpha_k(u_k-\ell)\right\|+\frac{1}{A_n}\sum_{k=n_\varepsilon}^{n-1}\alpha_k\|u_k-\ell\|\\ &\leq \frac{C_\varepsilon}{A_n}+\frac{1}{A_n}\sum_{k=n_\varepsilon}^{n-1}\alpha_k\varepsilon\leq\frac{C_\varepsilon}{A_n}+\varepsilon\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n=+\infty$, ce qui implique l'existence de $m_\varepsilon\geq n_\varepsilon+1$ tel que $\|v_n-\ell\|\leq 2\varepsilon$ pour tout $n\geq m_\varepsilon$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)=\ell$.

Réciproquement, supposons que pour toute suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite. Si $A=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n<+\infty$, en se donnant $x\in E\setminus\{0\}$ et en considérant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\alpha_n x)_{n\in\mathbb{N}}$, on a alors $v_n=\dfrac{1}{A_n}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k^2\right)x$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=A>\alpha_0>0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ (de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n<+\infty$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$), ce qui implique que $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n^2\right)x=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k^2\right)x=\lim\limits_{n\to+\infty}A_nv_n=0$ ou encore $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n^2=0$, ce qui est impossible car les α_n sont tous non nuls. On a donc nécessairement $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n=+\infty$. ∎

La condition nécessaire du théorème de Cesàro est valable pour les suites réelles divergentes vers $\pm\infty$, c'est-à-dire que si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n=+\infty$, alors pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ (exercice 4.14).

Le théorème de Cesàro est souvent utilisé en considérant les moyennes arithmétiques, c'est-à-dire avec la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire sur 1. Précisément, on a :

$$\left(\lim_{n\to+\infty}(u_n)=\ell\right)\Rightarrow\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right)=\ell\right)$$

Dans le cas des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles strictement positives, on déduit du théorème de Cesàro que la convergence au sens usuel entraîne la convergence en moyenne harmonique ou géométrique.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\ell\geq 0$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n}=\nu$ avec $\nu=\dfrac{1}{\ell}$ pour $\ell>0$ ou $\nu=+\infty$ pour $\ell=0$ et le théorème de Cesàro nous dit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k}=\dfrac{1}{\ell}$, ou encore que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k}}=\ell$ (convergence en moyenne harmonique).

On a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(u_n))=\ln(\ell)\in[-\infty,+\infty[$ et le théorème de Cesàro nous dit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}u_k}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(u_k)\right)=\mu$$

avec $\mu=\ln(\ell)$ pour $\ell>0$ ou $\mu=-\infty$ pour $\ell=0$, ce qui nous donne au final $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{\prod\limits_{k=0}^{n-1}u_k}\right)=e^{\mu}=\ell$ (convergence en moyenne géométrique).

On en déduit que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\ell$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{u_n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{u_0}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{u_{k+1}}{u_k}}\right)=\ell$ (sachant que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{u_0}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln(u_0)}{n}}=1$).

La réciproque du résultat précédent est fausse comme le montre l'exemple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{2n}=u_{2n+1}=2^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En effet, on a $\sqrt[2n]{u_{2n}}=\sqrt{2}$ et $\sqrt[2n+1]{u_{2n+1}}=2^{\frac{n}{2n+1}}\underset{n\to+\infty}{\backsim}\sqrt{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{u_n}\right)=\sqrt{2}$, alors que $\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}}=1$ et $\dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}=2$, donc $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Définition 4.8. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E *converge au sens de Cesàro* vers $\ell\in E$, si la suite $\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Le théorème de Cesàro nous dit en particulier qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E convergente est convergente au sens de Cesàro. En considérant les suites réelles définies par $u_n=(-1)^n$ ou plus généralement par $u_n=e^{in\theta}$ où $\theta\in\,]0,2\pi[$, on voit que la réciproque de ce résultat est fausse (exercice 4.15).

Dans le cas des suites réelles monotones, la convergence est équivalente à la convergence au sens de Cesàro (exercice 4.17).

Les deux théorèmes qui suivent nous donnent des exemples de situations où cette équivalence est encore vraie.

Théorème 4.39. Hardy faible

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* E *telle que* $u_n - u_{n-1} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ *est convergente si, et seulement si, elle est convergente au sens de Cesàro.*

Démonstration La condition nécessaire est déjà prouvée (que $(n(u_n - u_{n-1}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ou non). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} ku_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)u_k = n\left(u_n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right)$$

(transformation d'Abel), soit $u_n - v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1})$ et en appliquant le théorème de Cesàro à la suite $(n(u_n - u_{n-1}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (qui converge vers 0 par hypothèse), on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ et dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers $\ell \in E$, il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. ■

Le théorème précédent est un cas particulier du théorème suivant de démonstration plus délicate.

Théorème 4.40. Hardy

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $(E, \|\cdot\|)$ *telle que* $u_n - u_{n-1} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ *est convergente si, et seulement si, elle est convergente au sens de Cesàro.*

Démonstration On a déjà la condition nécessaire (que $(n(u_n - u_{n-1}))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée ou non). En notant $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour $m > n$:

$$v_m = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n-1}u_k + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}u_k = \frac{n}{m}v_n + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}u_k$$

et :

$$\begin{aligned}
u_m - v_m &= u_m - \frac{n}{m}v_n - \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}u_k \\
&= u_m - \frac{n}{m}v_n - \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}(u_k - u_m) - \frac{m-n}{m}u_m \\
&= \frac{n}{m}(u_m - v_n) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}(u_m - u_k)
\end{aligned}$$

soit $u_m - v_m = \dfrac{n}{m}(u_m - v_m) + \dfrac{n}{m}(v_m - v_n) + \dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=n}^{m-1}(u_m - u_k)$, ou encore :

$$\frac{m-n}{m}(u_m - v_m) = \frac{n}{m}(v_m - v_n) + \frac{1}{m}\sum_{k=n}^{m-1}(u_m - u_k)$$

donc $u_m - v_m = \dfrac{n}{m-n}(v_m - v_n) + \dfrac{1}{m-n}\sum\limits_{k=n}^{m-1}(u_m - u_k)$. Dire que $u_n - u_{n-1}$ est un $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ signifie que la suite $(n(u_n - u_{n-1}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et en notant $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n(u_n - u_{n-1})$, on a pour $m > n$ et k compris entre n et $m-1$:

$$\|u_m - u_k\| \leq \sum_{j=k+1}^{m}\|u_j - u_{j-1}\| \leq M\sum_{j=k+1}^{m}\frac{1}{j} \leq M\frac{m-k}{k+1} \leq M\frac{m-n}{n+1}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\|u_m - v_m\| &\leq \frac{n}{m-n}\|v_m - v_n\| + \frac{M}{m-n}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{m-n}{n+1}\\ &\leq \frac{n}{m-n}\|v_m - v_n\| + M\frac{m-n}{n+1}\end{aligned}$$

Dans le cas où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est en particulier de Cauchy, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $n_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$ (ce choix sera justifié plus loin) tel que :

$$\forall m > n \geq n_\varepsilon,\ \|v_m - v_n\| < \varepsilon^2$$

ce qui donne :

$$\forall m > n \geq n_\varepsilon,\ \|u_m - v_m\| \leq \frac{n}{m-n}\varepsilon^2 + M\frac{m-n}{n+1}$$

Pour $m > n_\varepsilon$ assez grand, on cherche un entier n compris entre n_ε et m tel que $\dfrac{n}{m-n} < \dfrac{1}{\varepsilon}$ et $\dfrac{m-n}{n+1} < \varepsilon$, ou encore $\dfrac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} < n < \dfrac{m}{\varepsilon+1}$. Pour ce faire, il suffit de prendre n tel que $n = E\left(\dfrac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) + 1$ où m est choisi tel que $m > n_\varepsilon + \varepsilon(n_\varepsilon + 1)$. En effet, on a $n - 1 \leq \dfrac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} < n$, donc $n \leq \dfrac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} + 1 = \dfrac{m+1}{\varepsilon+1} < m$ puisque $m > n_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$ et $n > \dfrac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} \geq n_\varepsilon$ si $m > \varepsilon(n_\varepsilon + 1) + n_\varepsilon$. On a donc pour $\varepsilon > 0$ donné et $m > n_\varepsilon + \varepsilon(n_0 + 1)$, en prenant $n = E\left(\dfrac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) + 1$:

$$\|u_m - v_m\| \leq \frac{n}{m-n}\varepsilon^2 + M\frac{m-n}{n+1} < (M+1)\varepsilon$$

On a ainsi prouvé que $\lim\limits_{m\to+\infty}(u_m - v_m) = 0$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} u_m = \lim\limits_{m\to+\infty} v_m = \ell$. ■

Le théorème précédent est encore valable pour une suite réelle divergente vers $-\infty$ ou $+\infty$.

Définition 4.9. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *conserve la convergence au sens de Cesàro*, si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge au sens de Cesàro vers ℓ, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers $f(\ell)$.

Théorème 4.41.

Les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui conservent la convergence au sens de Cesàro sont les fonctions affines.

Démonstration Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui conserve la convergence au sens de Cesàro. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{2k} = x$ et $u_{2k+1} = y$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Avec :

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} u_k = \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{2k+1}\right) = \frac{x+y}{2}$$

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} u_k = \frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} u_{2k} + \sum_{k=0}^{n} u_{2k+1}\right) = \frac{n(x+y)}{2n+1} + \frac{y}{2n+1}$$

on déduit que cette suite converge au sens de Cesàro vers $\frac{x+y}{2}$ (voir aussi l'exercice 4.16), donc la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, ce qui implique que :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f(u_k) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

c'est-à-dire que f vérifie l'équation fonctionnelle de Jensen $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ et en conséquence est affine puisque continue (théorème **??**). Réciproquement, il est clair que les fonctions affines conservent la convergence au sens de Cesàro. ∎

4.7.3 Quelques applications du théorème de Cesàro

Le résultat qui suit est souvent utilisé pour obtenir des équivalents ou des développements asymptotiques de certaines suites numériques (voir les exercices 4.18 et 4.19 ainsi que la fin de ce paragraphe).

Théorème 4.42. Stolz

Si $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle strictement croissante non majorée avec $\gamma_0 > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\gamma_{n+1} - \gamma_n} (u_{n+1} - u_n) \right) = \ell$ *(avec* ℓ *éventuellement infini pour une suite réelle), on a alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\gamma_n} u_n \right) = \ell$.

Démonstration La suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant strictement croissante avec $\gamma_0 > 0$, les suites $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\gamma_{n+1} - \gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont à valeurs strictement positives. Si de plus la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non majorée, elle diverge alors vers $+\infty$ et on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \right) = \lim_{n \to +\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_0) = +\infty$$

En écrivant que :

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\gamma_{k+1} - \gamma_k} (u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{\gamma_n - \gamma_0} (u_n - u_0)$$

on déduit du théorème de Cesàro que si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\gamma_{n+1} - \gamma_n} (u_{n+1} - u_n) \right) = \ell$, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\gamma_n - \gamma_0} (u_n - u_0) = \ell$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\gamma_n - \gamma_0} u_n = \ell$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \gamma_n = +\infty$. Avec $\dfrac{1}{\gamma_n - \gamma_0} u_n \underset{n \to +\infty}{\backsim} \dfrac{1}{\gamma_n} u_n$, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\gamma_n} u_n \right) = \ell$. ■

Corollaire 4.4. *Si* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* E *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$, *on a alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} u_n = \ell$ *(avec* ℓ *éventuellement infini pour une suite réelle).*

Démonstration Il suffit de prendre $\gamma_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans le théorème de Stolz. ■

Pour ce qui suit, on se donne une fonction continue $f : [0, 1[\to [0, 1[$ admettant au voisinage de 0 un développement asymptotique de la forme :

$$f(x) = x - ax^{\alpha+1} - bx^{2\alpha+1} + \underset{x \to 0^+}{o} \left(x^{2\alpha+1} \right)$$

où a et α sont deux réels strictement positifs et b est un réel non nul.

L'intervalle $[0, 1[$ étant stable par la fonction f, on peut définir la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 \in [0, 1[$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 4.4 *Il existe un réel* $\eta \in]0, 1[$ *tel que pour tout* $x_0 \in]0, \eta[$, *la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est convergente de limite nulle.*

Démonstration La fonction f étant continue sur $[0, 1[$, on a :

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \left(1 - ax^{\alpha} + \underset{x \to 0^+}{o} (x^{\alpha}) \right) = 0$$

Avec $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-x}{x^{\alpha+1}} = -a < 0$, on déduit qu'il existe un réel $\eta \in]0,1[$ tel que $0 < f(x) < x \leq \eta$ pour tout $x \in]0,\eta]$. Le segment $[0,\eta]$ est donc stable par f (on a $f(0)=0$), ce qui implique que pour tout $x_0 \in]0,\eta[$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0,\eta[$ et strictement décroissante minorée par 0, donc convergente vers un point fixe de f sur $[0,\eta]$, soit vers 0 puisque c'est l'unique point fixe de f dans $[0,\eta]$. ∎

Lemme 4.5 *Pour tout $x_0 \in]0,\eta[$, on a* $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha a)^{\frac{1}{\alpha}}} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$.

Démonstration Pour tout réel non nul δ et tout $x \in]0,\eta[$, on a $f(x) > 0$ et :

$$\begin{aligned}(f(x))^\delta - x^\delta &= x^\delta \left(\left(1 - ax^\alpha + \underset{x\to 0^+}{o}(x^\alpha)\right)^\delta - 1\right) = x^\delta \left(-\delta a x^\alpha + \underset{x\to 0^+}{o}(x^\alpha)\right) \\ &= -x^{\delta+\alpha}\left(\delta a + \underset{x\to 0^+}{o}(1)\right) \underset{x\to 0^+}{\backsim} -\delta a x^{\delta+\alpha}\end{aligned}$$

Prenant $\delta = -\alpha$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{(f(x))^\alpha} - \dfrac{1}{x^\alpha}\right) = \alpha a$, ce qui implique compte tenu de la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 pour $x_0 \in]0,\eta[$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{x_n^\alpha}\right) = \alpha a$. Le théorème de Cesàro nous dit alors que :

$$\alpha a = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_{k+1}^\alpha} - \frac{1}{x_k^\alpha}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_n^\alpha} - \frac{1}{x_0^\alpha}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n x_n^\alpha}\right)$$

soit $x_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\alpha a}$, ou encore $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha a)^{\frac{1}{\alpha}}} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$. ∎

Du lemme précédent, on déduit que pour $\alpha \in]0,1[$, la série $\sum x_n$ est convergente et pour $\alpha \geq 1$, elle est divergente.

Théorème 4.43.

En supposant $c = \dfrac{b}{a} + \dfrac{\alpha+1}{2}a$ non nul, on a $\dfrac{1}{x_{n+1}^\alpha} - \dfrac{1}{x_n^\alpha} - \alpha a \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{c}{n}$ *et le développement asymptotique :*

$$x_n = \frac{1}{(\alpha a)^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{c}{\alpha} \frac{1}{(\alpha a)^{1+\frac{1}{\alpha}}} \frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)$$

Démonstration En utilisant le développement asymptotique :

$$f(x) = x\left(1 - ax^\alpha - bx^{2\alpha} + \underset{x\to 0^+}{o}\left(x^{2\alpha}\right)\right) = x(1 - u(x))$$

on obtient en posant $c = \frac{b}{a} + \frac{\alpha+1}{2} a$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(f(x))^{\alpha}} &= \frac{1}{x^{\alpha}} (1 - u(x))^{-\alpha} \\
&= \frac{1}{x^{\alpha}} \left(1 + \alpha x^{\alpha} (a + b x^{\alpha}) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} x^{2\alpha} (a + b x^{\alpha})^2 + \underset{x \to 0^+}{o} \left(x^{2\alpha}\right) \right) \\
&= \frac{1}{x^{\alpha}} \left(1 + \alpha a x^{\alpha} + \alpha a \left(\frac{b}{a} + \frac{\alpha+1}{2} a \right) x^{2\alpha} + \underset{x \to 0^+}{o} \left(x^{2\alpha}\right) \right) \\
&= \frac{1}{x^{\alpha}} + \alpha a + \alpha a c x^{\alpha} + \underset{x \to 0^+}{o} (x^{\alpha})
\end{aligned}$$

soit $\frac{1}{(f(x))^{\alpha}} - \frac{1}{x^{\alpha}} - \alpha a = \alpha a c x^{\alpha} + \underset{x \to 0^+}{o} (x^{\alpha})$ et :

$$\frac{1}{x_{n+1}^{\alpha}} - \frac{1}{x_n^{\alpha}} - \alpha a = \alpha a c x_n^{\alpha} \left(1 + \underset{n \to +\infty}{o} (1) \right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \alpha a c x_n^{\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{c}{n}$$

La série $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente, on a l'équivalence des sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x_{n+1}^{\alpha}} - \frac{1}{x_n^{\alpha}} - \alpha a \right) \underset{n \to +\infty}{\sim} c \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} c \ln(n)$$

(théorème 4.7 et corollaire 4.1), soit $\frac{1}{x_n^{\alpha}} - \frac{1}{x_1^{\alpha}} - (n-1) \alpha a \underset{n \to +\infty}{\sim} c \ln(n)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n x_n^{\alpha}} &= \alpha a + \left(\frac{1}{x_1^{\alpha}} - \alpha a \right) \frac{1}{n} + c \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n} \right) \\
&= \alpha a + c \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n} \right) = \alpha a \left(1 + \frac{c}{\alpha a} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n} \right) \right)
\end{aligned}$$

ou encore :

$$n x_n^{\alpha} = \frac{1}{\alpha a} \left(1 + \frac{c}{\alpha a} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n} \right) \right)^{-1} = \frac{1}{\alpha a} \left(1 - \frac{c}{\alpha a} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n} \right) \right)$$

soit :

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{(\alpha a n)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{c}{\alpha a} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{(\alpha a n)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{c}{\alpha^2 a} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n} \right) \right) \\
&= \frac{1}{(\alpha a n)^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{c}{\alpha} \frac{1}{(\alpha a)^{1+\frac{1}{\alpha}}} \frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{1}{\alpha}}} \right)
\end{aligned}$$

■

Exemples 4.4 *Pour* $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, *on a* $a = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $b = -\frac{1}{3}$, *et* $c = -\frac{1}{6}$ *ce qui nous donne pour* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $x_0 \in \mathbb{R}^{+,*}$ *et* $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$ *:*

$$x_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{3}\frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Pour $f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$, *on a* $a = \frac{1}{3!}$, $\alpha = 2$, $b = -\frac{1}{5!}$, *et* $c = \frac{1}{5}$ *ce qui nous donne pour* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $x_0 \in \mathbb{R}^{+,*}$ *et* $x_{n+1} = \sin(x_n)$ *:*

$$x_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

4.7.4 Moyennes d'Euler

À tout couple (a,b) de scalaires non nuls tels que $a+b \neq 0$, on associe l'opérateur d'Euler $T_{a,b}$ qui associe à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $T_{a,b}(u) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses *moyennes d'Euler* de paramètre (a,b) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{(a+b)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}u_k$$

En écrivant que $v_n = \frac{b^n}{(a+b)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{a}{b}\right)^k u_k = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}+1\right)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{a}{b}\right)^k u_k$, on constate que $T_{a,b} = T_{\lambda,1}$, où $\lambda = \frac{a}{b} \in \mathbb{K}\setminus\{0,-1\}$, ce qui nous ramène à l'étude de l'opérateur que nous noterons plus simplement T_λ qui associe à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $T_\lambda(u) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des moyennes d'Euler de paramètre $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0,-1\}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{(\lambda+1)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k u_k$$

Dans un premier temps, on se place dans le cadre des suites réelles ou complexes en désignant par $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites réelles ou complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Théorème 4.44. Une formule d'inversion

Pour tout réel $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0,-1\}$, *l'application* T_λ *réalise un automorphisme de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *d'inverse* $T_{-(\lambda+1)}$, *ce qui nous dit que pour toutes suites réelles ou* *complexes* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *, et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *, on a l'équivalence :*

$$\left(\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{1}{(\lambda+1)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k u_k\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(\lambda+1)^k v_k\right)$$

Démonstration Il est clair que l'application T_λ est un un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. En notant $\mu=\dfrac{1}{\lambda+1}$, $U_{n+1}=\begin{pmatrix}u_0\\u_1\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}$ et $V_{n+1}=\begin{pmatrix}v_0\\v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$, l'égalité $v=T_\lambda(u)$ se traduit par $V_{n+1}=P_{n+1}U_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, où P_{n+1} est la matrice réelle d'ordre $n+1$ définie par :

$$\begin{aligned}P_{n+1}&=\begin{pmatrix}\binom{0}{0}&0&\cdots&\cdots&0\\ \mu\binom{1}{0}&\mu\binom{1}{1}\lambda&0&\cdots&0\\ \mu^2\binom{2}{0}&\mu^2\binom{2}{1}\lambda&\mu^2\binom{2}{2}\lambda^2&\ddots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\ \mu^n\binom{n}{0}&\mu^n\binom{n}{1}\lambda&\cdots&\mu^n\binom{n}{n-1}\lambda^{n-1}&\mu^n\binom{n}{n}\lambda^n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&0\\0&\mu&0&\cdots&0\\0&0&\mu^2&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\cdots&0&\mu^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\binom{0}{0}&0&\cdots&\cdots&0\\ \binom{1}{0}&\binom{1}{1}\lambda&0&\cdots&0\\ \binom{2}{0}&\binom{2}{1}\lambda&\binom{2}{2}\lambda^2&\ddots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\ \binom{n}{0}&\binom{n}{1}\lambda&\cdots&\binom{n}{n-1}\lambda^{n-1}&\binom{n}{n}\lambda^n\end{pmatrix}\\
&=D_{n+1}(\mu)\,Q_{n+1}(\lambda)\end{aligned}$$

avec des notations évidentes. Comme $\det(P_{n+1})=\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\neq 0$, la matrice P_{n+1} est inversible et on a la formule d'inversion $U_{n+1}=P_{n+1}^{-1}V_{n+1}$ qui nous dit que T_λ est un automorphisme (pour toute suite $v\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'égalité $T_\lambda(u)=v$ équivaut à $V_{n+1}=P_{n+1}U_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, ce qui nous donne pour unique solution la suite u définie par $U_{n+1}=P_{n+1}^{-1}V_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$). Il s'agit alors de calculer l'inverse de $Q_{n+1}(\lambda)$ pour tout réel non nul λ, l'inverse de $D_{n+1}\left(\dfrac{1}{\lambda+1}\right)$ étant $D_{n+1}(\lambda+1)$. Les égalités $(\lambda X+1)^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^jX^j$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ pour k compris entre 0 et n nous disent que la transposée de $Q_{n+1}(\lambda)$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0=\left(X^k\right)_{0\le k\le n}$ à la base $\mathcal{B}_1=\left((\lambda X+1)^k\right)_{0\le k\le n}$ de $\mathbb{K}_n[X]$ et on en déduit que l'inverse de ${}^tQ_{n+1}(\lambda)$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_0$ qui s'obtient avec les égalités $\lambda^k X^k = (\lambda X + 1 - 1)^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (\lambda X + 1)^j$ pour k compris entre 0 et n. On a donc :

$$
{}^tQ_{n+1}^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & -\frac{1}{\lambda}\binom{1}{0} & \frac{1}{\lambda^2}\binom{2}{0} & \cdots & (-1)^n \frac{1}{\lambda^n}\binom{n}{0} \\
0 & \frac{1}{\lambda}\binom{1}{1} & -\frac{1}{\lambda^2}\binom{2}{1} & \cdots & (-1)^{n-1}\frac{1}{\lambda^n}\binom{n}{1} \\
0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2}\binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\lambda^n}\binom{n}{n-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda^n}\binom{n}{n}
\end{pmatrix}
$$

soit :

$$
Q_{n+1}^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
-\binom{1}{0}\frac{1}{\lambda} & \binom{1}{1}\frac{1}{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\
\binom{2}{0}\frac{1}{\lambda^2} & -\binom{2}{1}\frac{1}{\lambda^2} & \binom{2}{2}\frac{1}{\lambda^2} & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
(-1)^n\binom{n}{0}\frac{1}{\lambda^n} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\frac{1}{\lambda^n} & \cdots & -\binom{n}{n-1}\frac{1}{\lambda^n} & \binom{n}{n}\frac{1}{\lambda^n}
\end{pmatrix}
$$

et :

$$
P_{n+1}^{-1} = Q_{n+1}^{-1}(\lambda)\, D_{n+1}^{-1}\left(\frac{1}{\lambda+1}\right) = Q_{n+1}^{-1}(\lambda)\, D_{n+1}(\lambda+1)
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
-\binom{1}{0}\frac{1}{\lambda} & \binom{1}{1}\frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\
\binom{2}{0}\frac{1}{\lambda^2} & -\binom{2}{1}\frac{\lambda+1}{\lambda^2} & \binom{2}{2}\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2} & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
(-1)^n\binom{n}{0}\frac{1}{\lambda^n} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\frac{\lambda+1}{\lambda^n} & \cdots & -\binom{n}{n-1}\frac{(\lambda+1)^{n-1}}{\lambda^n} & \binom{n}{n}\frac{(\lambda+1)^n}{\lambda^n}
\end{pmatrix}
$$

ce qui nous dit que $u_n = \frac{1}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}(\lambda+1)^k v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit que $u = T_{-(\lambda+1)}(v)$. On a donc $T_\lambda^{-1} = T_{-(\lambda+1)}$. ∎

Cette formule d'inversion est en fait valable pour les suites d'éléments de E, ce qui peut se voir par la simple vérification dans E :

$$
\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}(\lambda+1)^k v_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^j u_j
$$

$$
= \sum_{0\leq j\leq k\leq n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}\lambda^j u_j = \sum_{0\leq j\leq k\leq n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{j!\,(k-j)!}\lambda^j u_j
$$

$$
= \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!}\left(\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!\,(k-j)!}\right)\lambda^j u_j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^i\binom{n-j}{i}\right)\lambda^j u_j
$$

$$
= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1-1)^{n-j}\lambda^j u_j = \lambda^n u_n
$$

Pour $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, on a $-(\lambda+1) = \lambda$, soit $T_{-\frac{1}{2}}^{-1} = T_{-\frac{1}{2}}$, ce qui signifie que l'opérateur d'Euler $T_{-\frac{1}{2}}$ défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} u_k$$

est involutif.

Théorème 4.45.

Pour tout réel $\lambda >$ et toute suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses moyennes d'Euler de paramètre λ converge vers la même limite.

Démonstration On peut utiliser le théorème de Toeplitz.

En notant $a_{n,k} = \binom{n}{k} \dfrac{\lambda^k}{(\lambda+1)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier k compris entre 0 et n, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} = \dfrac{1}{(\lambda+1)^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n,k} = \dfrac{\lambda^k}{k!} \lim\limits_{n\to+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\left(\dfrac{1}{\lambda+1}\right)^n = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puisque :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, donc en particulier pour $x = \dfrac{1}{\lambda+1}$. Les hypothèses du théorème de Toeplitz étant vérifiées, il en résulte que pour toute suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{(\lambda+1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k u_k\right) = \lim_{n\to+\infty} (u_n)$$

On peut aussi prouver ce résultat sans utiliser le théorème de Toeplitz.

En notant ℓ la limite dans E de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui nous donne pour tout $n > n_\varepsilon$, compte tenu de l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k = (\lambda+1)^n$:

$$\begin{aligned}
\|v_n - \ell\| &= \frac{1}{(\lambda+1)^n} \left\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k (u_k - \ell) \right\| \\
&\leq \frac{1}{(\lambda+1)^n} \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} \binom{n}{k} \lambda^k \|u_k - \ell\| + \frac{\varepsilon}{(1+\lambda)^n} \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \\
&\leq \frac{1}{(\lambda+1)^n} \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} \binom{n}{k} \lambda^k \|u_k - \ell\| + \varepsilon
\end{aligned}$$

avec $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leq n(n-1)\cdots(n-k+1) \leq n^k$. En notant $M = \sup\limits_{0\leq k\leq n_\varepsilon} \|u_k - \ell\|$, on en déduit que pour tout $n > m_\varepsilon = \max\left(n_\varepsilon, \dfrac{2}{\lambda}\right)$ (de sorte que $n\lambda - 1 > 1$), on a :

$$\|v_n - \ell\| \leq \frac{M}{(\lambda+1)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon} (n\lambda)^k = \frac{M}{(\lambda+1)^n}\frac{(n\lambda)^{n_\varepsilon+1}-1}{n\lambda-1} < \varepsilon_n = \frac{M}{(\lambda+1)^n}(n\lambda)^{n_\varepsilon+1}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \dfrac{1}{\lambda+1}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n_\varepsilon+1} = \dfrac{1}{\lambda+1} < 1$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$. ∎

Le théorème précédent est valable dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui converge vers $\pm\infty$ (exercice 4.22).

Pour $\lambda = 1$, ce théorème nous dit que :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k = \ell\right)$$

La convergence au sens d'Euler n'entraîne pas nécessairement la convergence au sens usuel. Par exemple si $\lambda = 1$ et $u_n = (-1)^n$, on a alors pour tout $n \geq 1$, $v_n = \dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Dans le cas des suites réelles monotones, la convergence est équivalente à la convergence au sens de d'Euler (exercice 4.23).

Théorème 4.46.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses moyennes d'Euler de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{+,*}$. Si la série $\sum u_n$ est convergente, il en est alors de même de la série $\sum v_n$ et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \dfrac{\lambda+1}{\lambda}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de E définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et par $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la transformée d'Euler de paramètre λ correspondante. On vérifie tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sigma_{n+1} - \sigma_n = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}v_n$. Pour $n = 0$, on a $\sigma_0 = S_0 = 0$, $v_0 = u_0$ et :

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \sigma_1 = \frac{\lambda}{\lambda+1}S_1 = \frac{\lambda}{\lambda+1}u_0 = \frac{\lambda}{\lambda+1}v_0$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sigma_n = \frac{1}{(\lambda+1)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k S_k = \frac{1}{(\lambda+1)^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k S_k$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}-\sigma_n &= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\lambda^k S_k-(\lambda+1)\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k S_k\right)\\ &= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1}{k}-(\lambda+1)\binom{n}{k}\right)\lambda^k S_k+\lambda^{n+1}S_{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}\right)\lambda^k S_k-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}S_k+\lambda^{n+1}S_{n+1}\right)\end{aligned}$$

avec $\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}$ pour k compris entre 1 et n (triangle de Pascal), donc :

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1}-\sigma_n &= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\lambda^k S_k-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}S_k+\lambda^{n+1}S_{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\lambda^{j+1}S_{j+1}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}S_k+\lambda^{n+1}S_{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}\left(S_{k+1}-S_k\right)+\lambda^{n+1}\left(S_{n+1}-S_n\right)\right)\\ &= \frac{1}{(\lambda+1)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}\left(S_{k+1}-S_k\right)\\ &= \frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{1}{(\lambda+1)^{n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k}u_k=\frac{\lambda}{\lambda+1}v_n\end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}v_k=\frac{\lambda+1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sigma_{k+1}-\sigma_k\right)=\frac{\lambda+1}{\lambda}\sigma_n$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$ d'après le théorème de Cesàro, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}v_k=\dfrac{\lambda+1}{\lambda}S$, soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}v_n=\dfrac{\lambda+1}{\lambda}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$. ∎

En supposant connus les résultats de base sur les séries entières (voir le chapitre **??**), on a le résultat et les exemples d'application qui suivent.

Corollaire 4.5. *Soient $R\in\mathbb{R}^{+,*}$ et $f:x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$, les a_n étant réels. Pour tout réel*

$x \in]0, R[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right) \frac{x^n}{(1+x)^{n+1}}$$

Démonstration En désignant, pour tout $x \in]0, R[$, par $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des moyennes d'Euler de paramètre $\frac{1}{x}$ de la suite $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n(x) = \frac{x^n}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = b_n \frac{x^n}{(1+x)^n}$$

en notant $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$ et du théorème précédent, on déduit que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{(1+x)^{n+1}}$$

■

Exemples 4.5

1. *Pour tout $x \in]0, 1[$, on a $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ et :*

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^k dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-t)^k \right) dt = \int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

ce qui nous donne $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}$. La série de fonctions du second membre étant uniformément convergente sur $[0, 1]$, ce résultat est aussi valable pour $x = 1$ par continuité, ce qui nous donne $\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\, 2^{n+1}}$ avec une convergence plus rapide que celle de la classique série $\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

L'égalité précédente s'écrit aussi :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \right)^{n+1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

2. Pour tout $x \in \left]0,1\right[$, *on a* $\dfrac{\arctan(x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} = xf\left(x^2\right)$ *en notant* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *avec* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ *et :*

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-t^2\right)^k \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)\, dt = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \end{aligned}$$

(voir le théorème **??** *sur les intégrales de Wallis), ce qui nous donne :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \frac{x^n}{(1+x)^{n+1}}$$

et :

$$\arctan(x) = xf\left(x^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \frac{x^{2n+1}}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$$

La série de fonctions du second membre étant uniformément convergente sur $[0,1]$, *ce résultat est aussi valable pour* $x = 1$ *par continuité, ce qui nous donne* $\dfrac{\pi}{4} = \arctan(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$, *ou encore* $\pi = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$.

4.8 Exercices

Exercice 4.1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E *pour laquelle il existe un réel* $\lambda \in \left[0,1\right[$ *et une suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels positifs tels que* $\|u_{n+1}\| \leq \lambda \|u_n\| + \varepsilon_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Solution. Par récurrence, on a pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall n \geq n_0,\ \|u_{n+1}\| \leq \lambda^{n-n_0+1} \|u_{n_0}\| + \lambda^{n-n_0} \varepsilon_{n_0} + \lambda^{n-n_0-1} \varepsilon_{n_0+1} + \cdots + \lambda \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ 0 \leq \varepsilon_n < \varepsilon,\ 0 \leq \lambda^{n-n_\varepsilon+1} < \varepsilon$$

ce qui nous donne pour $n \geq n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u_{n+1}\| &\leq \lambda^{n-n_\varepsilon+1} \|u_{n_0}\| + \left(\lambda^{n-n_\varepsilon} + \lambda^{n-n_\varepsilon-1} + \cdots + \lambda + 1\right)\varepsilon \\ &\leq \varepsilon \|u_{n_\varepsilon}\| + \frac{1-\lambda^{n-n_\varepsilon+1}}{1-\lambda}\varepsilon \leq \left(\|u_{n_\varepsilon}\| + \frac{1}{1-\lambda}\right)\varepsilon \end{aligned}$$

et prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 4.2. *Montrer que les séries* $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *et* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, *où* $\alpha \leq 1$ *est un réel, sont divergentes.*

Solution. Des inégalités $x^\alpha \geq x \geq \ln(1+x)$ pour tout $x \in]0,1]$ tout $\alpha \geq 1$, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$$

ce qui implique la divergence de $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 4.3. *On se propose de montrer de façon élémentaire que pour tout réel* $\alpha > 0$, *on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha}$. *On se fixe un réel* $\alpha > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$, *on note* $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{\alpha k}$.

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in [0,1]$, *on a :*

$$f_n(x) = \frac{1+(-1)^n x^{\alpha(n+1)}}{1+x^\alpha}$$

2. *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\alpha k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{\alpha(n+1)}}{1+x^\alpha} dx$$

3. *Conclure et préciser les résultats obtenus pour* $\alpha = 1, 2$.

Solution.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x^\alpha)^k = \frac{1-(-x^\alpha)^{n+1}}{1+x^\alpha} = \frac{1+(-1)^n x^{\alpha(n+1)}}{1+x^\alpha}$$

2. En intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{\alpha k} dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\alpha k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{\alpha(n+1)}}{1+x^\alpha} dx$$

3. Avec :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{\alpha(n+1)}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{\alpha(n+1)} dx = \frac{1}{\alpha(n+1)+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\alpha k+1}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^\alpha}$, soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha n+1}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^\alpha}$.

(a) Pour $\alpha=1$ on a, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln(2)$.

(b) Pour $\alpha=2$ on a, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 4.4. *Soient $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E.*

1. *Montrer que l'application $\|\cdot\|'$ définie sur l'espace vectoriel quotient $\frac{E}{F}$ par $\|\overline{x}\|'=\inf\limits_{y\in\overline{x}}\|y\|$ pour tout $\overline{x}=x+F\in\frac{E}{F}$ définit une norme.*
2. *Montrer que la surjection canonique $\pi:x\mapsto\overline{x}$ est linéaire uniformément continue de E sur $\frac{E}{F}$.*
3. *Montrer que si E est est un espace de Banach, il en est alors de même de l'espace quotient $\left(\frac{E}{F},\|\cdot\|'\right)$.*

Solution. On rappelle que pour tout $x\in E$, la classe d'équivalence de x modulo F est $\overline{x}=x+F$. Pour tout $x\in E$, le réel $\|\overline{x}\|'=\inf\limits_{u\in F}\|x+u\|=\inf\limits_{v\in F}\|x-v\|=d(x,F)$ est bien défini comme borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0.

1. Pour F fermé, on a $\|\overline{x}\|'=d(x,F)=0$ si, et seulement si, $x\in F$ ce qui équivaut à $\overline{x}=\overline{0}$. Pour $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et $\overline{x}\in\frac{E}{F}$, on a :
$$\|\lambda\overline{x}\|'=\left\|\overline{\lambda x}\right\|'=\inf_{z\in F}\|\lambda x+z\|=\inf_{t\in F}|\lambda|\,\|x+t\|=|\lambda|\,\|\overline{x}\|$$
ce résultat étant encore valable pour $\lambda=0$. Pour $\overline{x}$ et $\overline{y}$ dans $\frac{E}{F}$ il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de F telles que $\|\overline{x}\|'=\lim\limits_{n\to+\infty}\|x+u_n\|$ et $\|\overline{y}\|'=\lim\limits_{n\to+\infty}\|y+v_n\|$, ce qui entraîne que :
$$\|\overline{x}+\overline{y}\|'=\|\overline{x+y}\|'\leq\|x+y+u_n+v_n\|\leq\|x+u_n\|+\|y+v_n\|$$
et par passage à la limite, il en résulte que $\|\overline{x}+\overline{y}\|'\leq\|\overline{x}\|'+\|\overline{y}\|'$. En conclusion, $\|\cdot\|'$ est bien une norme sur $\frac{E}{F}$.
2. Pour tout x dans E, on a $\|\pi(x)\|'=\|\overline{x}\|'\leq\|x\|$, donc π est 1-lipschitzienne et en conséquence uniformément continue.

3. On suppose que E est complet. Soit $\sum \overline{x_n}$ une série normalement convergente dans $\frac{E}{F}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver $u_n \in F$ tel que $\|x_n + u_n\| \leq 2 \|\overline{x_n}\|'$ (dans le cas où $x_n \in F$, on a $\|\overline{x_n}\|' = 0$ et $u_n = -x_n$ convient, pour $x \notin F$, on a $\|\overline{x_n}\|'$ et par définition de la borne inférieure il existe $u_n \in F$ tel que $\|\overline{x_n}\|' \leq \|x_n + u_n\| < 2 \|\overline{x_n}\|'$), ce qui implique que la série $\sum (x_n + u_n)$ est normalement convergente, donc convergente dans l'espace de Banach E et son image par l'application continue π est convergente dans $\frac{E}{F}$, cette image étant la série $\sum \overline{x_n}$. On conclut alors avec le théorème 4.15.

Exercice 4.5. *Soit* $(\mathbb{A}, \|\cdot\|)$ *une algèbre de Banach. On note* 1 *l'unité de* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{A}^{\times}$ *le groupe multiplicatif des éléments inversibles de* $\mathbb{A}$.

1. *Montrer qu'une série géométrique* $\sum a^n$ *converge si, et seulement si,* $\|a\| < 1$.
2. *Montrer que pour tout* $a \in \mathbb{A}$ *tel que* $\|a\| < 1$, $1-a$ *est inversible d'inverse* $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$.
3. *Montrer que* $\mathbb{A}^{\times}$ *est ouvert dans* $\mathbb{A}$.
4. *Montrer que l'application* $a \mapsto a^{-1}$ *est continue sur* $\mathbb{A}^{\times}$.

Solution.

1. Pour $a \in \mathbb{A}$ tel que $\|a\| \geq 1$, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série géométrique $\sum a^n$ diverge. Pour $\|a\| < 1$, on a $\|a^n\| \leq \|a\|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série géométrique réelle $\sum_{k=0}^{n} \|a\|^n$ étant convergente, ce qui implique la convergence normale de $\sum a^n$ et en conséquence la convergence dans l'algèbre de Banach $\mathbb{A}$.
2. Avec $\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right)(1-a) = 1 - a^{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la continuité du produit dans une algèbre normée, on déduit que :
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right)(1-a) = 1 - \lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = 1$$
ce qui signifie que $1-a$ est inversible d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$.
3. Soit $a \in \mathbb{A}^{\times}$. Pour tout $h \in B\left(0, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right)$, on a $\|a^{-1}h\| \leq \|a^{-1}\| \|h\| < 1$, ce qui implique que $1 - a^{-1}h \in \mathbb{A}^{\times}$ et $a - h = a\left(1 - a^{-1}h\right) \in \mathbb{A}^{\times}$. On a donc $B\left(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}\right) \subset \mathbb{A}^{\times}$ et cela prouve que $\mathbb{A}^{\times}$ est ouvert dans $\mathbb{A}$.

4. Soient $a \in \mathbb{A}^\times$ et $\delta = \dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$. Pour tout $h \in B(0,\delta)$, on a $a - h \in \mathbb{A}^\times$ et :

$$\begin{aligned}\left\|(a-h)^{-1} - a^{-1}\right\| &= \left\|a^{-1}\left(\left(1-a^{-1}h\right)^{-1} - 1\right)\right\| \\ &= \left\|a^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a^{-1}h\right)^n\right\| = \left\|\left(a^{-1}\right)^2 h\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a^{-1}h\right)^n\right)\right\| \\ &\leq \left\|a^{-1}\right\|^2 \|h\| \sum_{n=0}^{+\infty}\left\|a^{-1}h\right\|^n = \frac{\|h\|}{\delta^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\|a^{-1}h\right\|^n\end{aligned}$$

Prenant $h \in B\left(0,\dfrac{\delta}{2}\right)$, on a $\left\|a^{-1}h\right\| \leq \left\|a^{-1}\right\| \|h\| < \dfrac{1}{2}$ et :

$$\left\|(a-h)^{-1} - a^{-1}\right\| \leq \frac{\|h\|}{\delta^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{2\|h\|}{\delta^2} \underset{h\to 0}{\to} 0$$

ce qui prouve que l'application $a \mapsto a^{-1}$ est continue sur $\mathbb{A}^\times$.

Exercice 4.6. *Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que la suite $(\sigma(n) - n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Montrer que pour toute série convergente $\sum u_n$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente et qu'on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Solution. Si la suite $(\sigma(n) - n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe alors un entier N tel que $|\sigma(n) - n| \leq N$, ou encore $n - N \leq \sigma(n) \leq n + N$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme σ est bijective, pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$ il existe un entier j tel que $k = \sigma(j)$ et avec $j - N \leq \sigma(j) = k \leq j + N$, on déduit que cet entier j est compris entre 0 et $k + N$. Il en résulte que la somme partielle $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est une partie de la somme $\sum\limits_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)}$ et $\sum\limits_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)} - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{\substack{j=0\\ \sigma(j)\geq n+1}}^{n+N} u_{\sigma(j)}$. De plus avec $\sigma(j) \leq j + N \leq n + 2N$, on déduit que :

$$\{\sigma(j),\ 0 \leq j \leq n+N \text{ et } \sigma(j) \geq n+1\} \subset \{n+1, \cdots, n+2N\}$$

et $\left\|\sum\limits_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)} - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right\| \leq \sum\limits_{\substack{j=0\\ \sigma(j)\geq n+1}}^{n+N} \left\|u_{\sigma(j)}\right\| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+2N} \|u_k\| = \varepsilon_n$. Comme chacune des suites $(\|u_{n+r}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ pour r compris entre 1 et $2N$ tend vers 0, la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers 0 (somme finie de suites qui tendent vers 0). Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{j=0}^{n+N} u_{\sigma(j)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, ce qui signifie que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 4.7. *On s'intéresse à la série de Riemann alternée* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$*.*
En notant σ *la permutation de* $\mathbb{N}$ *qui l'ordonne comme suit :*

$$\sigma(\mathbb{N}) = \{0\} \cup \{1,3\} \cup \{2\} \cup \{5,7\} \cup \{4\} \cup \cdots \cup \{2k\} \cup \{4k+1, 4k+3\} \cup \cdots$$

montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \frac{1}{2} \ln(2)$*.*

Solution. L'application σ peut être définie par :

$$\sigma(n) = \left\{ \begin{array}{l} 2k \text{ si } n = 3k \\ 4k+1 \text{ si } n = 3k+1 \\ 4k+3 \text{ si } n = 3k+2 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 2k \text{ si } n = 3k \\ 4k+2r-1 \text{ si } n = 3k+r \text{ où } r \in \{1,2\} \end{array} \right.$$

pour tout $n = 3k + r \in \mathbb{N}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$ (division euclidienne par 3).

1. On vérifie tout d'abord que σ est bien permutation de $\mathbb{N}$. Soient $n = 3k + r$ et $m = 3k' + r'$ où k, k' sont dans $\mathbb{N}$ et r, r' dans $\{0, 1, 2\}$. Si $\sigma(n) = \sigma(m)$, les restes r et r' sont soit tous les deux nuls, soit tous les deux non nuls, sinon $\sigma(n)$ et $\sigma(m)$ sont deux entiers de parités différentes. En supposant qu'ils sont tous deux nuls, l'égalité $\sigma(n) = \sigma(m)$ se traduit par $2k = 2k'$, soit par $k = k'$ et $n = m$. En supposant qu'ils sont tous deux non nuls, l'égalité $\sigma(n) = \sigma(m)$ se traduit par $4k + 2r - 1 = 4k' + 2r' - 1$ soit par $2k + r = 2k' + r'$ avec $1 \leq r, r' \leq 2$, ce qui équivaut à $r = r'$ (argument de parité) et $k = k'$, ce qui donne $n = m$. L'application σ est donc injective. Si m est un entier pair, il s'écrit alors $m = 2k = \sigma(3k)$. Si m est un entier impair, il s'écrit alors $m = 4k + 1$ ou $m = 4k + 3$, soit $m = \sigma(3k + 1)$ ou $m = \sigma(3k + 2)$. L'application σ est donc surjective.

2. On note $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, $v_n = u_{\sigma(n)}$ et $S_n = \sum_{j=0}^{n} v_j$. Soit $n = 3k + r$ un entier avec $k \geq 1$ et $0 \leq r \leq 2$. Pour $r = 2$, on a $S_n = S_{3k+2}$, pour $r = 0$ ou 1, on a :

$$S_n = \sum_{j=0}^{3k+2} v_j - \sum_{j=3k+r+1}^{3k+2} v_j = S_{3k+2} - \varepsilon_k$$

avec $|\varepsilon_k| \leq |v_{3k+1}| + |v_{3k+2}| \leq \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$.

(a) On a :

$$\begin{aligned}
S_{3k+2} &= \sum_{j=0}^{3k+2} u_{\sigma(j)} = \sum_{i=0}^{k} u_{\sigma(3i)} + \sum_{i=0}^{k} u_{\sigma(3i+1)} + \sum_{i=0}^{k} u_{\sigma(3i+2)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} u_{2i} + \sum_{i=0}^{k} u_{4i+1} + \sum_{i=0}^{k} u_{4i+3} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{4i+2} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{4i+4} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{4i+4} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{2k+1} \frac{1}{j+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2i+2} \right) - \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i+1}
\end{aligned}$$

soit :

$$S_{3k+2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{2k+1} \frac{1}{j+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i+1} \right) = \frac{1}{2} \left(H_{2k+2} - H_{k+1} \right)$$

où $H_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i+1}$.

(b) On rappelle que $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \gamma$, ce qui s'écrit $H_n = \ln(n) + \delta_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = \gamma$. On en déduit alors que :

$$S_{3k+2} = \frac{1}{2} \left(H_{2k+2} - H_{k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{2k+2}{k+1} \right) + \delta_{2k+2} - \delta_{k+1} \right)$$

et $\lim_{k\to+\infty} S_{3k+2} = \frac{1}{2} \ln(2)$.

(c) Les trois suites extraites $(S_{3k+r})_{k\geq 1}$, pour $r = 0, 1, 2$ convergent alors vers la même limite, ce qui revient à dire que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers cette limite, soit que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)+1} = \frac{1}{2} \ln(2)$.

Exercice 4.8. *On s'intéresse à l'action de certaines permutations sur la série de Riemann alternée* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. *On se donne* $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *et on* *désigne par σ la permutation de $\mathbb{N}$ qui ordonne $\mathbb{N}$ comme suit :*

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbb{N}) = &\{0,2,\cdots,2(p-1)\} \cup \{1,3,\cdots,2q-1\} \\ &\cup \{2p,\cdots,2(2p-1)\} \cup \{2q+1,\cdots,4q-1\} \cup \cdots\end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on place les p premiers entiers pairs, puis les q premiers entiers impairs, puis les p entiers pairs suivants, les q entiers impairs suivants, et ainsi de suite. En effectuant la division euclidienne par $p+q$, tout entier n s'écrit de manière unique $n = (p+q)k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r \leq p+q-1$ et une telle permutation σ peut être définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) = \begin{cases} 2(pk+r) & si\ 0 \leq r \leq p-1 \\ 2(qk+r-p)+1 & si\ p \leq r \leq p+q-1 \end{cases}$$

1. *Montrer que σ est bien permutation de $\mathbb{N}$.*
2. *En notant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, on désigne par $\sum v_n$ la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$. On se donne un entier $n \geq p+q$ et on écrit $n = (p+q)k+r$ sa division euclidienne par $p+q$ avec $k \geq 1$ et $0 \leq r \leq p+q-1$.*
   (a) *Écrire la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} v_j$ sous la forme $S_n = T_k - \varepsilon_k$ où $T_k = S_{(p+q)k+p+q-1}$ et $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \varepsilon_k = 0$.*
   (b) *Pour tout entier $k \geq 1$, on note $H_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i+1}$. Montrer que :*
   $$T_k = T_k = H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}\left(H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)}\right)$$
   (c) *En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$.*

Solution.

1. Soient n, m deux entiers naturels et $n = (p+q)k + r$, $m = (p+q)k' + r'$ les divisions euclidiennes de ces entiers par $p+q$. Si $\sigma(n) = \sigma(m)$, les restes r et r' sont tous deux dans $\{0,1,\cdots,p-1\}$ ou $\{p,\cdots,p+q-1\}$, sinon $\sigma(n)$ et $\sigma(m)$ sont deux entiers de parités différente. En supposant qu'ils sont tous deux dans $\{0,1,\cdots,p-1\}$ [resp. dans $\{p,\cdots,p+q-1\}$] l'égalité $\sigma(n) = \sigma(m)$ se traduit par $2(pk+r) = 2(pk'+r')$ [resp. par $2(qk+r-p)+1 = 2(qk'+r'-p)+1$] soit par $pk+r = pk'+r'$ [resp. par $qk+r-p = qk'+r'-p$] avec $0 \leq r, r' \leq p-1$ [resp. $0 \leq r-p, r'-p \leq q-1$] ce qui équivaut à $k = k'$ et $r = r'$ du fait de l'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne par p [resp. par q]. On a donc $n = m$ et σ est injective. Si m est un entier pair, il s'écrit alors $m = 2s = 2(pk+r)$ avec $0 \leq r \leq p-1$ en effectuant la division euclidienne de s par p, soit $m = \sigma(n)$ où $n = (p+q)k+r$. Si m est impair, il s'écrit alors

$m = 2s + 1 = 2\left(qk + r'\right) + 1$ avec $0 \leq r' \leq q - 1$ en effectuant la division euclidienne de s par q, soit $m = \sigma(n)$ où $n = (p+q)k + p + r'$. L'application σ est donc surjective.

2. Soit $n = (p+q)k + r$ un entier avec $k \geq 1$ et $0 \leq r \leq p + q - 1$.
   (a) Pour $r = p + q - 1$, on a $S_n = T_k$ et $\varepsilon_k = 0$, pour $0 \leq r \leq p + q - 2$, on a :
   $$S_n = \sum_{j=0}^{(p+q)k+p+q-1} v_j - \sum_{j=(p+q)k+r+1}^{(p+q)k+p+q-1} v_j = T_k - \varepsilon_k$$
   avec $T_k = S_{(p+q)k+p+q-1}$ et :
   $$|\varepsilon_k| \leq \left|v_{(p+q)k+1}\right| + \cdots + \left|v_{(p+q)k+p+q-1}\right| \leq \frac{p+q-1}{k} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$
   (b) On a :
   $$\begin{aligned} T_k &= \sum_{j=0}^{(p+q)k+p+q-1} u_{\sigma(j)} = \sum_{r=0}^{p+q-1} \sum_{i=0}^{k} u_{\sigma((p+q)i+r)} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} u_{2(pi+r)} + \sum_{r=p}^{p+q-1} \sum_{i=0}^{k} u_{2(qi+r-p)+1} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2(pi+r)+1} - \sum_{r=p}^{p+q-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2(qi+r-p)+2} \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2(pi+r)+1} - \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{qi+s+1} \end{aligned}$$
   En utilisant la division euclidienne par q, on a :
   $$\{qi + s + 1,\ 0 \leq i \leq k \text{ et } 0 \leq s \leq q-1\} = \{1, 2, \cdots, qk + q\}$$
   et $\displaystyle\sum_{s=0}^{q-1}\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{qi+s+1} = \sum_{j=1}^{q(k+1)} \frac{1}{j} = H_{q(k+1)}$. En remarquant que les entiers de la forme $2(pi+r)+1$ où $0 \leq i \leq k$ et $0 \leq s \leq p-1$ sont les entiers impairs compris entre 1 et $2pk + 2p - 1$ (division euclidienne par $2p$), on a :
   $$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2(pi+r)+1} &= \sum_{s=0}^{2p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2pi+s+1} - \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2pi+2r+2} \\ &= \sum_{s=0}^{2p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2pi+s+1} - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{pi+r+1} \\ &= \sum_{j=1}^{2p(k+1)} \frac{1}{j} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p(k+1)} \frac{1}{j} = H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2} H_{p(k+1)} \end{aligned}$$
   On a donc au final $T_k = H_{2p(k+1)} - \dfrac{1}{2}\left(H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)}\right)$.

(c) En utilisant $H_n = \ln(n) + \delta_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_n = \gamma$ (constante d'Euler), on a :

$$\begin{aligned} T_k &= H_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}\left(H_{p(k+1)} + H_{q(k+1)}\right) \\ &= \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right) + \delta_{2p(k+1)} - \frac{1}{2}\left(\delta_{p(k+1)} + \delta_{q(k+1)}\right) \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{k \to +\infty} T_k = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$. Toutes les suites extraites $\left(S_{(p+q)k+r}\right)_{k\geq 1}$ pour $0 \leq r \leq p+q-1$ convergent alors vers la même limite, ce qui revient à dire que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers cette limite, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)}}{\sigma(n)+1} = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

Exercice 4.9. *Montrer que la suite* $\left(\frac{1}{n^2m^2}\right)_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ *est sommable et calculer* $\sum\limits_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{n^2m^2}$. *On peut admettre que* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution. En notant $u_{n,m} = \frac{1}{n^2m^2}$ pour $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a :

$$\sum_{1\leq k,\ell\leq n} |u_{k,\ell}| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell^2} \leq \frac{\pi^2}{6} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi 4}{36}$$

donc la famille $\left(\frac{1}{n^2m^2}\right)_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{n^2m^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}\right) = \frac{\pi^2}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^4}{36}$$

Exercice 4.10. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes complexes absolument convergentes. Montrer que la famille* $(u_k v_\ell)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable et calculer* $\sum\limits_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} u_k v_\ell$.

Solution. C'est la même démonstration que pour l'exercice 4.9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{0\leq k,\ell\leq n} |u_{k,\ell}| = \sum_{k=0}^{n} |u_k| \left(\sum_{\ell=0}^{n} |v_\ell|\right) \leq M = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\right)\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} |v_\ell|\right) < +\infty$$

donc la famille $(u_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} u_k v_\ell = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} v_\ell\right)$$

> ***Exercice 4.11.*** *En justifiant la convergence, calculer la somme* $\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^m}$.

Solution. En notant $u_{n,m}=\dfrac{1}{n^m}$ pour $n\geq 2$ et $m\geq 2$, on a :

$$\sum_{2\leq k,\ell\leq n} |u_{k,\ell}| = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\sum_{\ell=2}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^{\ell-2} \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)} = 1$$

donc la famille $\left(\dfrac{1}{n^m}\right)_{\substack{n\geq 2\\ m\geq 2}}$ est sommable et on a :

$$\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^m} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{m=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^m = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)} = 1$$

En désignant par ζ la fonction dzeta de Riemann définie par $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^z}$ pour z complexe tel que $\mathrm{Re}(z)>1$, ce résultat s'écrit $\sum_{m=2}^{+\infty}(\zeta(m)-1)=1$. On peut donc calculer la valeur de cette somme sans connaître toutes les valeurs de $\zeta(m)$ pour $m\geq 2$.

> ***Exercice 4.12.*** *Soient* $\alpha\in\mathbb{R}^{+,*}$ *et* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ *la suite double définie par* $u_{n,m}=\dfrac{1}{n^\alpha+m^\alpha}$ *pour* $(n,m)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}$. *Montrer que cette suite est sommable si, et seulement si,* $\alpha>2$.

Solution.

1. On se place d'abord dans le cas où $\alpha=2$. Pour $(n,m)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}$ et (x,y) dans le rectangle $R_{n,m}=[n,n+1]\times[m,m+1]$, on a $x^2+y^2\geq n^2+m^2$, donc

$\dfrac{1}{n^2+m^2} \geq \displaystyle\iint_{R_{n,m}} \dfrac{dxdy}{x^2+y^2}$. Il en résulte que :

$$\sum_{\substack{0\leq k,\ell\leq n \\ (k,\ell)\neq(0,0)}} \frac{1}{k^2+\ell^2} \geq \sum_{\substack{0\leq k,\ell\leq n \\ (k,\ell)\neq(0,0)}} \iint_{R_{k,\ell}} \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \iint_{[0,n+1]^2\setminus[0,1]^2} \frac{dxdy}{x^2+y^2}$$
$$\geq \iint_{2\leq x^2+y^2\leq(n+1)^2} \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \int_{\sqrt{2}}^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho d\rho d\theta}{\rho^2} = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right)$$

avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right) = +\infty$. Il en résulte que la suite $\left(\dfrac{1}{n^2+m^2}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ n'est pas sommable.

2. Pour $0<\alpha\leq 2$, on a $\dfrac{1}{n^\alpha+m^\alpha} \geq \dfrac{1}{n^2+m^2}$ pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}$, donc la suite $\left(\dfrac{1}{n^\alpha+m^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ n'est pas sommable.

3. Pour $\alpha>2$, on a $\dfrac{1}{n^\alpha+m^\alpha} \leq \dfrac{1}{2n^{\frac{\alpha}{2}}m^{\frac{\alpha}{2}}}$ pour tout $(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$, donc :

$$\sum_{\substack{0\leq k,\ell\leq n \\ (k,\ell)\neq(0,0)}} \frac{1}{k^\alpha+\ell^\alpha} = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell^\alpha} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} + \sum_{1\leq k,\ell\leq n}\frac{1}{k^\alpha+\ell^\alpha}$$
$$\leq 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell^\alpha}\right) < 2\zeta(\alpha) + \frac{1}{2}\left(\zeta\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$$

Il en résulte que $\left(\dfrac{1}{n^\alpha+m^\alpha}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est sommable.

Exercice 4.13. *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ la suite double réelle définie par :*

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ u_{n,m} = \begin{cases} 0 \ \text{si } n=m \\ \dfrac{1}{n^2-m^2} \ \text{si } n\neq m \end{cases}$$

Montrer que les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ et $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ sont définies et différentes. La suite $(u_{n,m})_{(n,m)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ n'est donc pas sommable.

Solution. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé et $n > k$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} u_{j,k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{1}{j^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \left(\frac{1}{j-k} - \frac{1}{j+k} \right) = \frac{1}{2k} \left(\sum_{\substack{j=1-k \\ j \neq 0}}^{n-k} \frac{1}{j} - \sum_{\substack{j=k+1 \\ j \neq 2k}}^{n+k} \frac{1}{j} \right)$$
$$= \frac{1}{2k} \left(\sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=k+1}^{n+k} \frac{1}{j} + \frac{1}{2k} \right)$$
$$= \frac{1}{2k} \left(\sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n+k} \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{2k} - \sum_{j=n-k+1}^{n+k} \frac{1}{j} \right)$$

avec :

$$0 < \sum_{j=n-k+1}^{n+k} \frac{1}{j} \leq 2k \frac{1}{n-k+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} u_{j,k} = \dfrac{3}{4k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ ou encore $T_k = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} = \dfrac{3}{4k^2}$. La série $\sum T_m$ est donc convergente avec $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} T_m = \dfrac{3}{4} \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \dfrac{1}{m^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$, ce qui signifie que $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,m} \right) = \dfrac{\pi^2}{8}$. De manière analogue, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_{n,m} \right) = -\dfrac{\pi^2}{8}$.

Exercice 4.14. *Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle divergente vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$], on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sum\limits_{0 \leq k \leq n-1} \alpha_k} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k = +\infty$ [resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sum\limits_{0 \leq k \leq n-1} \alpha_k} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k = -\infty$].*

Solution. Quitte à remplacer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut supposer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$. On a alors :

$$\forall M > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ u_n > M$$

ce qui nous donne pour tout entier $n \geq n_\varepsilon + 1$, en notant $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k$:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k = \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n_\varepsilon - 1} \alpha_k u_k + \frac{1}{A_n} \sum_{k=n_\varepsilon}^{n-1} \alpha_k u_k \\ &> \frac{C_\varepsilon}{A_n} + \frac{A_n - A_{n_\varepsilon}}{A_n} M = M + \frac{C_\varepsilon - A_{n_\varepsilon} M}{A_n} \end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{C_\varepsilon - A_{n_\varepsilon} M}{A_n} \right) = 0$ et on peut alors trouver un entier $m_\varepsilon \geq n_\varepsilon + 1$ tel que $\frac{C_\varepsilon - A_{n_\varepsilon} M}{A_n} > -\frac{M}{2}$ pour tout $n \geq m_\varepsilon$, ce qui nous donne $v_n > \frac{M}{2}$ pour tout $n \geq m_\varepsilon$, et le résultat annoncé.

Exercice 4.15.

1. *Soient $\theta \in \left]0, 2\pi\right[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite complexe définie par $u_n = e^{in\theta}$. Étudier la convergence au sens usuel et au sens de Cesàro de cette suite.*
2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence au sens usuel et au sens de Cesàro de cette suite.*

Solution.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_{n+1} - u_n| = \left| e^{i\theta} - 1 \right| = \left| e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right| = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| = \frac{1}{n} \left| e^{i\frac{n-1}{2}\theta} \frac{\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right| \leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

(pour $\theta \in \left]0, 2\pi\right[$ on a $e^{i\theta} \neq 1$ et $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$) ce qui implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers 0.

2. Une suite périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ converge si, et seulement si, elle est constante, ce qui revient à dire que l'on a $p = 1$ (exercice 2.7). En notant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des moyennes de Cesàro de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on se donne un entier $n = pq + r$, où $q \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{0, \cdots, p-1\}$. Pour $r = 0$, on a :

$$\begin{aligned} v_{pq} &= \frac{1}{pq} \left(\sum_{k=0}^{p-1} u_k + \sum_{k=p}^{2p-1} u_k + \cdots + \sum_{k=(q-1)p}^{qp-1} u_k \right) \\ &= \frac{1}{pq} \left(\sum_{k=0}^{p-1} u_k + \sum_{k=0}^{p-1} u_{k+p} + \cdots + \sum_{k=0}^{p-1} u_{k+(q-1)p} \right) = \frac{1}{pq} q \sum_{k=0}^{p-1} u_k = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_k = \ell \end{aligned}$$

et pour $r \in \{1, \cdots, p-1\}$, on a :

$$
\begin{aligned}
v_{pq+r} &= \frac{1}{pq+r}\left(\sum_{k=0}^{qp-1} u_k + \sum_{k=qp}^{qp+r-1} u_k\right) = \frac{pq}{pq+r} v_{qp} + \frac{1}{pq+r}\sum_{k=0}^{r-1} u_{qp+k} \\
&= \frac{pq}{pq+r}\ell + \frac{1}{pq+r}\sum_{k=0}^{r-1} u_k
\end{aligned}
$$

ce qui nous donne :

$$
\|v_{pq+r} - \ell\| = \left\|\frac{1}{pq+r}\sum_{k=0}^{r-1} u_k - \frac{r}{pq+r}\ell\right\| \leq \frac{1}{pq+r}\sum_{k=0}^{r-1}\|u_k\| + \frac{p-1}{pq+r}\|\ell\|
$$

soit $\|v_{pq+r} - \ell\| \leq \dfrac{a}{pq+r}$, où $a = \sum\limits_{k=0}^{p-1}\|u_k\| + (p-1)\|\ell\|$, cette dernière inégalité étant aussi valable pour $r = 0$. On a donc au final $\|v_n - \ell\| \leq \dfrac{a}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell = \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1} u_k$, soit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers ℓ.

Exercice 4.16. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell_2$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Cesàro vers $\dfrac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)$.*

Solution. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{2n} = u_{2n} - \ell_1$ et $x_{2n+1} = u_{2n+1} - \ell_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} = 0$, donc cette suite converge au sens usuel et au sens de Cesàro vers 0. Ses moyennes de Cesàro y_n sont données, en notant v_n celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par :

$$
\begin{aligned}
y_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k = \frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{n-1}(u_{2j} - \ell_1) + \frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{n-1}(u_{2j+1} - \ell_2) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} u_k - \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) = v_{2n} - \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)
\end{aligned}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
y_{2n-1} &= \frac{1}{2n-1}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k = \frac{1}{2n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(u_{2j} - \ell_1) + \frac{1}{2n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(u_{2j+1} - \ell_2) \\
&= \frac{1}{2n-1}\sum_{k=0}^{2n-1} u_k - \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) = v_{2n-1} - \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)
\end{aligned}
$$

Il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(y_n + \frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2)\right) = \frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2)$.

Exercice 4.17. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle monotone et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de ses moyennes de Cesàro définie par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.*

1. *Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone de même sens de variation que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty+\infty\}$ si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.*

Solution. Remplaçant éventuellement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que cette suite est croissante.

1. On a $v_{n+1} = \frac{n}{n+1}v_n + \frac{u_n}{n+1} = v_n + \frac{1}{n+1}(u_n - v_n)$, soit :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1}(u_n - v_n) = \frac{1}{n+1}\left(u_n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(nu_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) = \frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(u_n - u_k)\right) \geq 0 \end{aligned}$$

   ce qui signifie que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. La condition nécessaire est le théorème de Cesàro. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante elle a une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a la même limite (théorème de Cesàro) et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ entraîne $\ell = \ell'$.

Exercice 4.18. *Soient $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}^{\alpha+1} - u_n^{\alpha+1}\right) = \alpha+1$, puis donner un équivalent de u_n à l'infini.*

Solution. On vérifie facilement par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs strictement positives. Il en résulte que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha} > u_n$, ce qui signifie que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Si elle était bornée, elle serait alors convergente de limite ℓ vérifiant $\ell = \ell + \frac{1}{\ell^\alpha} > \ell$, ce qui est impossible. On a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ce qui nous permet d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1}^{\alpha+1} = u_n^{\alpha+1}\left(1+\frac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)^{\alpha+1} = u_n^{\alpha+1}\left(1+\frac{\alpha+1}{u_n^{\alpha+1}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)\right)$$
$$= u_n^{\alpha+1} + \alpha + 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

et cela implique que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}^{\alpha+1} - u_n^{\alpha+1}\right) = \alpha+1$. En utilisant le corollaire 4.4 du théorème de Stolz, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n^{\alpha+1}}{n} = \alpha+1$, ce qui signifie que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left((\alpha+1)\,n\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$.

> ***Exercice 4.19.*** *Pour tout réel $\alpha > -1$ et tout entier $n \geq 1$, on note $S_\alpha(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$. Montrer que $S_\alpha(n) \underset{n\to+\infty}{\backsim} \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.*

Solution. Pour tout réel α, la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $u_{n+1} - u_n = (n+1)^\alpha = n^\alpha\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $\alpha > -1$, la suite réelle $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(n^{\alpha+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante non majorée telle que :

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = (n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} = n^{\alpha+1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right)$$
$$= n^{\alpha+1}\left(\frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^\alpha\left(\alpha+1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)$$

Il en résulte que :

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{\gamma_{n+1}-\gamma_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}{\alpha+1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{\alpha+1}$$

et le théorème de Stolz dit qu'on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\gamma_n}u_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{S_\alpha(n)}{n^{\alpha+1}}\right) = \dfrac{1}{\alpha+1}$, soit $S_\alpha(n) \underset{n\to+\infty}{\backsim} \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Pour α entier naturel, on peut procéder par récurrence sur $\alpha \geq 1$ sans utiliser le théorème de Stolz. Pour $\alpha = 0$, on a $S_0(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$ et pour $\alpha = 1$, on a $S_1(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \dfrac{n^2}{2}$. Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $\alpha - 1 \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{\alpha+1}(n+1) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\alpha+1} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{j}k^j = \sum_{j=0}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{j}\sum_{k=0}^{n}k^j$$
$$= \sum_{j=0}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{j}S_j(n) = S_{\alpha+1}(n) + (\alpha+1)\,S_\alpha(n) + \sum_{j=0}^{\alpha-1}\binom{\alpha+1}{j}S_j(n)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}(\alpha+1) S_\alpha(n) &= S_{\alpha+1}(n+1) - S_{\alpha+1}(n) - \sum_{j=0}^{\alpha-1}\binom{\alpha+1}{j} S_j(n) \\ &= (n+1)^{\alpha+1} - \sum_{j=0}^{\alpha-1}\binom{\alpha+1}{j} S_j(n)\end{aligned}$$

avec $S_j(n) \underset{n\to+\infty}{\backsim} \dfrac{n^{j+1}}{j+1}$ pour tout j compris entre 0 et $\alpha-1$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{j=0}^{\alpha-1}\binom{\alpha+1}{j} S_j(n) = \sum_{j=0}^{\alpha-1}\binom{\alpha+1}{j} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-j}} \frac{S_j(n)}{n^{j+1}} = 0$$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\alpha+1) S_\alpha(n)}{n^{\alpha+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} = 1$, soit $S_\alpha(n) \underset{n\to+\infty}{\backsim} \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Exercice 4.20. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E. Montrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} u_k = \ell$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge au sens de Cesàro vers 0.*

Solution. En notant $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} u_k$ pour $n \geq 1$, on a $w_1 = u_1$, $w_n - w_{n-1} = \dfrac{1}{n} u_n$ pour tout entier $n \geq 2$ et :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \frac{1}{n}\left(w_1 + \sum_{k=2}^{n} k(w_k - w_{k-1})\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k w_k - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) w_k\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(n w_n - \sum_{k=1}^{n-1} w_k\right) = w_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k + \frac{1}{n} w_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell - \ell + 0 = 0\end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Cesàro à la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4.21. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'. Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\ell'$.*

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en notant $w_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$:

$$\begin{aligned}
|w_n - \ell\ell'| &= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}(u_k v_{n-k} - \ell\ell')\right| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k(v_{n-k}-\ell') + \ell'(u_k - \ell))\right| \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k|\,|v_{n-k}-\ell'| + \frac{|\ell'|}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k - \ell| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|\,\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|v_k - \ell'| + |\ell'|\,\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k - \ell|
\end{aligned}$$

(la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée puisque convergente). On conclut alors avec le théorème de Cesàro.

Exercice 4.22. *Soit λ un réel strictement positif. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle divergente vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$], on a alors en notant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses moyennes d'Euler de paramètre λ, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ [resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$].*

Solution. Quitte à remplacer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut supposer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$. On a alors dans ce cas :

$$\forall M > 1,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ u_n > M$$

donc pour tout $n > n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\binom{n}{k}\lambda^k u_k + \frac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k u_k \\
&> \frac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\binom{n}{k}\lambda^k u_k + \frac{M}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k \\
&> \frac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\binom{n}{k}\lambda^k u_k + M\left(1 - \frac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\binom{n}{k}\lambda^k\right) \\
&> M + \frac{1}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\binom{n}{k}\lambda^k(u_k - 1) = M + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

avec $0 < |\varepsilon_n| \leq \dfrac{M'}{(1+\lambda)^n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}(n\lambda)^k \leq \dfrac{M'}{(1+\lambda)^n}(n\lambda)^{n_\varepsilon+1}$ pour tout entier naturel $n > m_\varepsilon = \max\left(n_\varepsilon, \dfrac{2}{\lambda}\right)$ en notant $M' = \sup\limits_{0\leq k\leq n_\varepsilon}|u_k - 1|$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 4.23. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle monotone et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses moyennes d'Euler de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{+,*}$.*

1. *Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone de même sens de variation que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty+\infty\}$ si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.*

Solution. Remplaçant éventuellement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que cette suite est croissante.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$(\lambda+1)^{n+1}(v_{n+1}-v_n) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\lambda^k u_k - (\lambda+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k u_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}\right)\lambda^k u_k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}u_k + \lambda^{n+1}u_{n+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\lambda^k u_k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}u_k + \lambda^{n+1}u_{n+1}$$
$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\lambda^{j+1}u_{j+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}u_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{k+1}(u_{k+1}-u_k) \geq 0$$

ce qui signifie que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. La condition nécessaire est le théorème 4.45. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante elle a une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a la même limite (théorème 4.45 et exercice 4.22) et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ entraîne $\ell = \ell'$.

Exercice 4.24. *Dans le cas où $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N},\ 0\leq k\leq n}$ est une suite à valeurs réelles strictement positives, montrer que le théorème 4.36 est valable pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$ [resp. vers $-\infty$]. Qu'en-est-il sans hypothèse de positivité des $a_{n,k}$?*

Solution.

1. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (en remplaçant u_n par $-u_n$, on peut se ramener à ce cas). En exploitant l'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1$, il existe pour tout réel $M>0$ un entier $n_0\geq 1$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} > \dfrac{1}{2}$ et $u_n > M$ pour tout $n\geq n_0$, ce

qui nous donne pour tout $n \geq n_0 + 1$, compte tenu de la positivité des $a_{n,k}$:

$$\begin{aligned} v_n &\geq \sum_{k=0}^{n_0} a_{n,k} u_k + M \sum_{k=n_0+1}^{n} a_{n,k} \geq \sum_{k=0}^{n_0} a_{n,k} u_k + M \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{n_0} a_{n,k} \right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{n_0} a_{n,k} (u_k - M) + \frac{M}{2} \end{aligned}$$

Vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n,k} = 0$ pour $k \in \{0, \cdots, n_0\}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n_0} a_{n,k} (u_k - M) = 0$ et il existe $n_1 > n_0$ tel que $\sum_{k=0}^{n_0} a_{n,k} (u_k - M) > -\frac{M}{4}$ pour tout $n \geq n_1$, ce qui nous donne $v_n \geq -\frac{M}{4} + \frac{M}{2} = \frac{M}{4}$. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

2. Pour $a_{n,k} = \frac{(-1)^k}{n}$ où $0 \leq k \leq n$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_{n,k}| = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ pour tout entier k compris entre 1 et n, $\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \in \left\{0, -\frac{1}{n}\right\}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1$ et $\sum_{k=0}^{n} |a_{n,k}| = \frac{n+1}{n} \leq 2$. Les hypothèses du théorème de Toeplitz sont donc satisfaites. Prenant $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et :

$$v_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} (2j - (2j-1)) = \frac{1}{2}$$

donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne diverge pas vers l'infini.

Exercice 4.25. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergente vers $\ell \in E$.*

1. *Montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k u_k = \frac{1}{2} \ell$.
2. *Montrer que, pour tout réel $\alpha > -1$, on a* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{n} k^\alpha u_k = \frac{1}{\alpha+1} \ell$.
3. *Que peut-on dire pour $\alpha = -1$?*

Solution.

1. Prenant $a_{n,k} = \frac{2k}{n^2}$ pour $0 \leq k \leq n$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n,k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et :

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$$

donc le théorème de Toeplitz nous dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} u_k = \ell$, ou encore que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=0}^{n} k u_k = \frac{1}{2}\ell$.

2. Prenant $a_{n,k} = \frac{(\alpha+1) k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ pour $0 \leq k \leq n$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n,k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et, en notant $S_\alpha(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}} S_\alpha(n) \underset{n \to +\infty}{\to} 1$$

(exercice 4.19), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} u_k = \ell$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum\limits_{k=0}^{n} k^\alpha u_k = \frac{1}{p+1}\ell$. Pour $\alpha = 0$, on retrouve le théorème de Cesàro, pour $\alpha = 1$, on retrouve $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k u_k = \frac{1}{2}\ell$ et pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k} u_k = 2\ell$.

3. Pour $\alpha = -1$, en notant $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, le théorème de Cesàro nous dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{H_n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} u_k = \ell$ et sachant que $H_n \underset{n \to +\infty}{\backsim} \ln(n)$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} u_k = \ell$.