

# Devoir Numéro 6

Avec ce devoir nous revenons au thème des équations différentielles, qui était celui de l'épreuve de 2006.

Il faut comme d'habitude commencer par revoir le cours, généralités sur les équations différentielles, puis théorème de Cauchy-Lipschitz, solutions maximales...

Le problème commence, comme il se doit, pour un sujet relativement délicat, par étudier des exemples, puis passe aux propriétés générales des trajectoires, avec des techniques d'étude rappelant celle du problème d'agrégation de 2006, que vous pourrez traiter en complément de ce problème si vous ne l'avez jamais fait. Le cours mis en oeuvre est sensiblement le même.

Au début de la partie III est définie la notion de point d'équilibre, avant d'étudier la linéarisation du système au voisinage d'un point d'équilibre.

Le problème se termine par l'étude du cas particulier du pendule simple.

Encore un problème d'un bon niveau et relativement long.

On étudie qualitativement l'évolution d'un système régi par l'équation différentielle du second ordre autonome  $x'' = -f'(x)$  où la fonction  $f$  est paire et de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $x$  est l'état du système, fonction du temps  $t$ .

En introduisant la fonction auxiliaire  $y = x'$  et l'état vectoriel  $X = (x, y)$ , on se ramène à l'étude d'un système différentiel autonome du premier ordre de dimension deux, avec condition initiale :

$$(S) \quad \begin{cases} X' = \Phi(X) = \begin{pmatrix} y \\ -f'(x) \end{pmatrix} \\ X(t_0) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

## Rappels et définitions

Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi$  une fonction de classe  $C^1$  définie sur  $I$ , on dira que  $\varphi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $I$  sur son image si  $\varphi$  est une bijection de  $I$  sur  $\varphi(I)$  dont la fonction réciproque  $\varphi^{-1}$  est aussi de classe  $C^1$ . Cela équivaut à ce que  $\varphi'$  ne s'annule pas sur l'intérieur de  $I$ . Lorsque  $I = ]a, b[$ , alors  $\varphi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $]a, b[$  sur  $]\alpha, \beta[$  ou  $]\beta, \alpha[$  avec  $\alpha = \lim_{t \rightarrow a+} \varphi(t)$  et  $\beta = \lim_{t \rightarrow b-} \varphi(t)$ . Ces limites existent dans  $\overline{\mathbb{R}}$  en raison de la monotonie de  $\varphi$ .

**Théorème de Cauchy-Lipschitz** : soit  $g$  une fonction  $C^1$  sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}$ ; pour toute condition initiale  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$  le problème de Cauchy est de résoudre

$$(E) \quad x' = g(x) \text{ avec la condition initiale } x(t_0) = x_0.$$

Alors il existe un réel  $\eta > 0$  tel que  $(E)$  admet une unique solution définie sur  $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$ .

Si  $x_1, x_2$  sont deux solutions de  $(E)$  définies sur le même intervalle  $I$ , elles sont égales sur  $I$ .

**Plan de phase et trajectoire du système** : on appelle plan de phase du système l'espace  $P = \mathbb{R}^2$  dans lequel on représentera l'état  $X = (x, y) = (x, x')$ . Le système différentiel  $(S)$  est alors associé au *champ de vecteurs*  $\Phi(X)$ .

Une *trajectoire* du système partant du point  $X_0 = (x_0, y_0)$  est une courbe paramétrée définie par  $X(t) = (x(t), y(t))$   $t \in I$ , vérifiant le système  $(S)$  avec la condition initiale  $X(t_0) = X_0$ .

On notera que le choix de  $t_0$  est arbitraire et ne modifie pas la trajectoire.

### Questions préliminaires

1. Quel lien y a-t-il entre une trajectoire  $\gamma(t)$  du système et le champ  $\Phi(X)$  ?
2. Démontrer que si  $(X(t), t \in I)$  est une solution de  $(S)$ , la fonction d'énergie

$F(X) = \frac{y^2}{2} + f(x)$  est constante sur  $I$ . Pour toute trajectoire issue de  $X_0$ , on notera  $h = F(X_0)$  cette valeur constante, ou énergie de la trajectoire. Il en résulte que si  $X = (x, y)$ , la conservation de l'énergie

$$(H) \quad F(X) = h$$

donne une équation implicite des trajectoires dans le plan de phase  $P$ .

## Partie I - Premiers exemples

On prend ici  $f(x) = \frac{k}{2}x^2$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

**I.A** - On suppose :  $k = \omega^2 > 0$ .

I.A.1) Déterminer la solution  $t \mapsto x(t)$  d'énergie  $h > 0$ . Quelle est la période  $T$  de cette solution ?

I.A.2) Démontrer que la trajectoire associée dans l'espace des phases est une courbe fermée  $\Gamma_h$  dont on précisera la nature et tracera le graphe

a) Donner son équation et ses points caractéristiques en fonction de  $\omega$  et  $h = F(X_0)$ .

b) Indiquer sur le graphe le sens de parcours de cette trajectoire.

I.A.3) Que vaut la solution  $t \mapsto X(t)$  si  $X_0 = (0, 0)$  ?

Quelles sont toutes les trajectoires d'énergie 0 ?

I.B - On suppose :  $k = -\omega^2 < 0$ .

I.B.1) Calculer la solution générale  $t \mapsto x(t)$ .

I.B.2) Donner l'équation des trajectoires  $\gamma_h$  et les représenter graphiquement selon que  $h > 0$ ,  $h < 0$  ou  $h = 0$  (on indiquera le sens de parcours de ces trajectoires). Quelle est la nature de ces courbes, sont-elles fermées ?

I.B.3) Que se passe-t-il si  $X_0 = (0, 0)$  ?

Quelles sont toutes les trajectoires d'énergie nulle ?

## Partie II - Propriétés générales des trajectoires

On s'intéresse ici aux solutions de  $(S)$  partant à l'instant  $t_0 = 0$  d'un point  $X_0 = (x_0, y_0)$  du demi-plan supérieur  $P^+ = \{(x, y) \mid y > 0\}$ . On pose, comme convenu,  $h = F(X_0)$ .

### II.A -

II.A.1) Soit  $U = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < h\}$ . Démontrer qu'il existe un unique intervalle ouvert non vide maximal  $I(x_0) = ]a, b[$  (avec  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ) tel que  $x_0 \in I(x_0) \subset U$ .

II.A.2) En résolvant l'équation  $(H)$  par rapport à  $y$ , obtenir une équation différentielle du premier ordre en  $x$ .

II.A.3) Montrer que la fonction  $\tau$ , définie par

$$\tau(x) = \int_{x_0}^x \frac{du}{\sqrt{2(h - f(u))}}$$

est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $I(x_0) = ]a, b[$  sur  $J(x_0) = ]\alpha, \beta[$ .

Résoudre sur l'intervalle  $J(x_0)$  l'équation obtenue à la question précédente.

II.B - Démontrer que la fonction  $\Psi : t \mapsto (\psi(t), \psi'(t))$  avec  $\psi(t) = \tau^{-1}(t)$  est solution de  $(S)$  définie sur l'intervalle  $J(x_0) = ]\alpha, \beta[$ .

II.C - On considère une autre solution de  $(S)$ , notée  $X_1 : t \mapsto (x_1(t), x'_1(t))$  qui est définie sur le même intervalle  $J(x_0)$  telle que  $X_1(0) = (x_0, y_0)$ .

Soit  $J_1 = ]u, v[ \subset J(x_0)$  l'intervalle maximal (contenant 0) sur lequel  $x'_1(t) > 0$ .

II.C.1) On suppose  $\alpha < u$  (resp.  $v < \beta$ ). Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz et en déduire une contradiction (examiner les signes de  $\psi'(u), x'_1(u)$ ).

II.C.2) En déduire que  $\Psi$  est l'unique solution de  $(S)$  définie sur  $J(x_0)$  satisfaisant à la condition initiale  $\Psi(0) = (x_0, y_0)$ .

II.D - Démontrer que  $Z : t \mapsto (\psi(-t), -\psi'(-t))$  est l'unique solution de  $(S)$  sur  $]-\beta, -\alpha[$  partant à l'instant  $t = 0$  du point  $Z_0 = (x_0, -y_0)$ .

II.E - On veut ici caractériser les différents types de trajectoires possibles.

II.E.1) On suppose ici que  $-\infty < a$ ,  $f'(a) \neq 0$  et  $b < +\infty$ ,  $f'(b) \neq 0$ .

Démontrer les propriétés suivantes :

a)  $f(a) = f(b) = h$ ,  $f'(a) < 0$ ,  $f'(b) > 0$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

b) Déterminer  $\lim_{t \rightarrow \alpha+} \Psi(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow \beta-} \Psi(t)$ , puis montrer que  $\Psi$  se prolonge sur  $[\alpha, \beta]$ .

c) Montrer que la trajectoire  $\Psi$  se prolonge par la fonction  $t \mapsto Z(t - 2\beta)$  définie sur l'intervalle  $]\beta, 2\beta - \alpha[$  en une solution  $t \mapsto X(t)$  de  $(S)$  définie sur  $]\alpha, 2\beta - \alpha[$  dont les deux extrémités coïncident.

d) Montrer que  $t \mapsto X(t)$  se prolonge en une solution périodique sur  $\mathbb{R}$  en posant  $X(\alpha) = (a, 0)$ . Exprimer la période  $T$  sous forme intégrale, représenter le graphe de la trajectoire  $\Gamma$  dans  $P$ , en précisant les temps associés aux points  $(a, 0)$ ,  $X_0$ ,  $(b, 0)$ ,  $Z_0$ ,  $(a, 0)$ .

II.E.2) On suppose ici que  $-\infty < a$ ,  $f(a) = h$  et  $f'(a) = 0$ ,  $f''(a) \neq 0$ .

Démontrer que  $f''(a) < 0$  et  $\alpha = -\infty$ . Énoncer le résultat équivalent pour  $b$ .

II.E.3) On suppose ici que  $a = -\infty$ . Que peut-on dire de la trajectoire sur l'intervalle de temps  $]a, 0[$ ? Énoncer le résultat équivalent pour  $b$ .

II.E.4) Pour les trajectoires  $\Gamma_h$  ou  $\gamma_h$  étudiées en partie I, préciser les points  $a, b$  et leur nature (type II.E.1) ou II.E.2) ou II.E.3)).

### Partie III - Linéarisation autour d'un équilibre

Soit  $e \in \mathbb{R}$ , on dit que  $E = (e, 0)$  est un point d'équilibre du système  $(S)$  si

$$\Phi(E) = 0 \Leftrightarrow f'(e) = 0.$$

On associe alors à  $(S)$  le système linéarisé au voisinage de  $E$  :

$$(L) \quad \begin{cases} u' = v \\ v' = -f''(e)u \end{cases}$$

Ses solutions donnent une première approximation de celles de  $(S)$  pour des conditions initiales proches de  $E$ .

III.A - Quelle est la solution de  $(S)$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , partant de  $X_0 = E$ ?

III.B - Déterminer les solutions de  $(L)$  (on posera  $f''(e) = \pm\gamma^2$  avec  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ ).

III.C - Le point d'équilibre  $(e, 0)$  est dit *stable* si les solutions de  $(L)$  restent bornées lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $(e, 0)$  soit un équilibre stable.

On se place dans cette hypothèse pour la suite de cette partie.

*Dans toute la suite de cette partie on désigne par  $e$  un nombre réel pour lequel  $(e, 0)$  est un point d'équilibre stable tel que  $f(e) = 0$ .*

#### III.D -

III.D.1) Démontrer qu'il existe un intervalle  $[c, d]$  contenant  $e$  tel que la restriction de  $f$  à  $[c, e]$  (resp.  $[e, d]$ ) soit un  $C^1$ -difféomorphisme sur son image  $[0, f(c)]$  (resp.  $[0, f(d)]$ ).

III.D.2) En déduire l'existence de  $H > 0$  tel que, pour tout  $h \in ]0, H]$ , l'équation  $f(x) = h$  admet deux solutions  $x^-(h)$ ,  $x^+(h)$  avec

$$x^-(h) < e < x^+(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} x^-(h) = \lim_{h \rightarrow 0} x^+(h) = e.$$

III.D.3) Démontrer que  $(e, 0)$  est un minimum local strict de  $F(X)$ , en déduire qu'il existe  $R > 0$  tel que, pour toute condition initiale  $X_0 \in B(E, R)$  (disque de centre  $E$  et de rayon  $R$ ), la trajectoire associée est périodique. Déterminer la période  $T(h)$  comme intégrale fonction de  $h$ .

III.E - Soit une suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  positive avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ .

On pose, pour simplifier,  $x_n^+ = x^+(h_n)$ ,  $x_n^- = x^-(h_n)$ ,  $T_n = T(h_n)$ .

III.E.1) Donner le développement limité à l'ordre 2 de  $f(u)$  au voisinage de  $e$ .

En déduire une expression de  $h_n$  en fonction de  $x_n^+$  et  $v$ .

III.E.2) En paramétrant le segment  $[e, x_n^+]$  par  $v \in [0, 1]$ , démontrer l'existence d'une suite de fonctions continues  $(\varepsilon_n^+)$  qui tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, telle que

$$\int_e^{x_n^+} \frac{du}{\sqrt{2(h_n - f(u))}} = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)f''(e) + \varepsilon_n^+(v)}}$$

Énoncer le résultat analogue sur l'intervalle  $[x_n^-, e]$ .

III.E.3) En déduire  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$  puis  $\lim_{h \rightarrow 0} T(h)$  (énoncer précisément le théorème utilisé). Quelle période retrouve-t-on?

## Partie IV - Le pendule non linéaire

On prend ici  $f(x) = -\cos(x)$ . Le système  $(S)$  représente alors le mouvement d'un pendule non linéaire (grandes elongations). Le champ de vecteur  $\Phi(X)$  est alors  $2\pi$ -périodique en  $x$ .

**IV.A** - Déterminer tous les points d'équilibre. Lesquels sont stables ?

**IV.B** - Démontrer que toute trajectoire du système d'énergie  $h \in ]0, 1[$  est périodique. Comment sont définis les points  $a, b$  ?

**IV.C** - Pour une condition initiale  $X_0 \in P^+$  d'énergie  $h > 1$ , préciser les points  $a, b$  et leur type (cf. II.E).

Démontrer qu'alors on a  $\alpha = -\infty$ ,  $\beta = +\infty$ , tracer qualitativement la trajectoire en indiquant le sens du parcours.

**IV.D** - On prend ici une condition initiale  $X_0 = (0, y_0)$  d'énergie  $h = 1$ .

Que vaut  $y_0 > 0$  ?

IV.D.1) Préciser les points  $a, b$  et utiliser II.E. Quelle est le type des points  $a, b$  ? Que valent ici  $\alpha, \beta$  ? Interpréter le résultat par rapport au pendule.

IV.D.2) Calculer explicitement la fonction  $\tau(x)$ , en déduire  $x(t)$ .

IV.D.3) Démontrer que la trajectoire  $X(t)$  et sa symétrique  $Z(t)$  séparent les trajectoires périodiques des trajectoires non périodiques.

IV.D.4) Représenter qualitativement les trois familles de trajectoires dans le plan  $P$ , avec les sens de parcours.

**IV.E** - On perturbe le pendule, et la fonction  $f$  devient ici  $f(x) = -\cos(x) + \frac{1}{20}x^2$ .

IV.E.1) Déterminer le nombre de points d'équilibre et leur stabilité.

IV.E.2) Démontrer que toutes les trajectoires sont ici du type II.E.1, à l'exception de celles passant par les équilibres instables.

IV.E.3) Établir un programme pour calculer la position du point d'équilibre  $(e, 0)$  le plus proche à droite de  $(0, 0)$ .