
Chapitre 1

Coniques dans un plan affine euclidien

\mathcal{P} est un plan affine euclidien de direction $\vec{\mathcal{P}}$, le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de $\vec{\mathcal{P}}$ étant noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Si $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé de \mathcal{P} , on note alors (x, y) les coordonnées d'un point M de \mathcal{P} dans ce repère, ce qui signifie que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On écrira $M(x, y)$, pour simplifier.

Pour tous points A, B de \mathcal{P} , on note $d(A, B)$, AB ou $\|\vec{AB}\|$ la distance de A à B , $[A, B]$ le segment d'extrémités A et B et pour $A \neq B$, (AB) la droite passant par A et B .

1.1 Définition algébrique des coniques

Étant donnés des réels a, b, c, d, e, f avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, on désigne par φ la fonction polynomiale de degré 2 définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

On a $\varphi = q + \ell + f$, où q, ℓ désignent la forme quadratique non nulle et la forme linéaire respectivement définies par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \ell(x, y) = dx + ey$$

La courbe algébrique de degré 2 associée à φ dans le repère \mathcal{R} est la partie \mathcal{C}_φ de \mathcal{P} définie par $\mathcal{C}_\varphi = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid \varphi(x, y) = 0\}$. On dit aussi que \mathcal{C}_φ est la courbe d'équation $\varphi(x, y) = 0$ dans le repère \mathcal{R} .

Dans toute autre repère affine \mathcal{R}' du plan \mathcal{P} , orthonormé ou non, la courbe \mathcal{C}_φ a encore une équation polynomiale de degré 2.

Définition 1.1. Une conique dans le plan affine euclidien \mathcal{P} est une courbe algébrique \mathcal{C}_φ de degré 2. Dans le cas où \mathcal{C}_φ est non vide, on dit que c'est une conique propre si le polynôme φ est irréductible (i.e. ne s'écrit pas comme

produit de deux polynômes de degré 1) et qu'elle est dégénérée dans le cas contraire.

Exemples 1.1

1. Si le polynôme φ est réductible, il s'écrit alors $\varphi = \ell_1 \ell_2$, où ℓ_1, ℓ_2 sont deux formes affines non nulles et \mathcal{C}_φ est la conique dégénérée réunion des droites d'équations respectives $\ell_1(x, y) = 0$ et $\ell_2(x, y) = 0$.
2. Pour $a = c \neq 0$ et $b = 0$, on a :

$$\varphi(x, y) = a \left(\left(x + \frac{d}{2a} \right)^2 + \left(y + \frac{e}{2a} \right)^2 \right) + f - \frac{d^2 + e^2}{4a}$$

et \mathcal{C}_φ est soit vide, soit un cercle (éventuellement réduit à un point).

En se plaçant dans le plan affine $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ que l'on plonge dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on peut voir une conique comme l'intersection d'un cône et d'un plan. Pour ce faire, on désigne par Q la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, Q(x, y, z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2$$

($Q(X, Y, Z) = q(X, Y) + \ell(X, Y)Z + fZ^2$ est le polynôme homogénéisé de φ) et on constate que :

$$\mathcal{C}_\varphi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 \text{ et } Q(x, y, z) = 0\} = P \cap K$$

où P est le plan affine d'équation $z = 1$ et $K = Q^{-1}\{0\}$ est le cône isotrope de Q .

En désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres (réelles non toutes nulles) de la matrice $\begin{pmatrix} a & b & \frac{d}{2} \\ b & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$ de la forme quadratique Q dans la base canonique de \mathbb{R}^3 ,

il existe une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de \mathbb{R}^3 dans laquelle l'expression de Q est $Q(X) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2$ de sorte que, pour Q non dégénérée de signature $(2, 1)$, \mathcal{C}_φ est l'intersection du cône K d'équation $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0$ avec un plan P d'équation $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$ dans ce nouveau repère (figure 1.1).

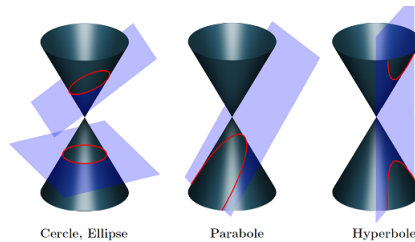


FIGURE 1.1 – Intersection d'un cône et d'un plan

Pour $M_0(x_0, y_0)$ et $M(x, y)$ dans \mathcal{P} , on a $\ell(x_0 + x, y_0 + y) = \ell(x_0, y_0) + \ell(x, y)$ et $q(x_0 + x, y_0 + y) = q(x_0, y_0) + 2B((x_0, y_0), (x, y)) + q(x, y)$, où B est la forme polaire de q , donc :

$$\begin{aligned}\varphi(x_0 + x, y_0 + y) &= q(x_0, y_0) + 2B((x_0, y_0), (x, y)) + q(x, y) \\ &\quad + \ell(x_0, y_0) + \ell(x, y) + f \\ &= \varphi(x_0, y_0) + 2B((x_0, y_0), (x, y)) + \ell(x, y) + q(x, y)\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser la différentielle $d\varphi(x_0, y_0)$ et la hessienne $d^2\varphi(x_0, y_0)$ de φ en (x_0, y_0) définies respectivement par :

$$\begin{aligned}d\varphi(x_0, y_0)(x, y) &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0, y_0)y \\ &= (2ax_0 + 2by_0 + d)x + (2cy_0 + 2bx_0 + e)y \\ &= 2B((x_0, y_0), (x, y)) + \ell(x, y)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}d^2\varphi(x_0, y_0)(x, y) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x_0, y_0)x^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x_0, y_0)xy + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x_0, y_0)y^2 \\ &= 2ax^2 + 4bxy + 2cy^2 = 2q(x, y)\end{aligned}$$

pour écrire que :

$$\begin{aligned}\varphi(x_0 + x, y_0 + y) &= \varphi(x_0, y_0) + d\varphi(x_0, y_0)(x, y) + \frac{1}{2}d^2\varphi(x_0, y_0)(x, y) \\ &= \varphi(x_0, y_0) + d\varphi(x_0, y_0)(x, y) + q(x, y)\end{aligned}$$

Définition 1.2. Soit \mathcal{C}_φ une conique non vide. On dit qu'un point $\Omega(x_0, y_0)$ dans \mathcal{P} est un centre de \mathcal{C}_φ si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x + x_0, y + y_0) = q(x, y) + \varphi(x_0, y_0)$$

La condition pour que Ω soit un centre de \mathcal{C}_φ , se traduit par $d\varphi(x_0, y_0) = 0$, soit par $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, c'est-à-dire que les centres de \mathcal{C}_φ sont les points singuliers de la fonction φ .

Définition 1.3. On dit que la conique \mathcal{C}_φ est à centre, si elle admet un unique centre.

Dans le cas où la conique \mathcal{C}_φ est à centre de centre $\Omega(x_0, y_0)$, en effectuant le changement de variables $(x, y) = (x_0 + x', y_0 + y')$ (ce qui revient à se placer dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ d'origine Ω), on a :

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_0 + x', y_0 + y') = q(x', y') + \varphi(x_0, y_0)$$

et tenant compte du fait que $q(x', y') = q(-x', -y')$ pour tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, on déduit que :

$$\begin{aligned} ((x_0 + x', y_0 + y') \in \mathcal{C}) &\Leftrightarrow q(x', y') = -\varphi(x_0, y_0) \Leftrightarrow q(-x', -y') = -\varphi(x_0, y_0) \\ &\Leftrightarrow \varphi(x_0 - x', y_0 - y') = 0 \Leftrightarrow ((x_0 - x', y_0 - y') \in \mathcal{C}) \end{aligned}$$

ce qui se traduit en disant que le centre Ω est un centre de symétrie pour \mathcal{C}_φ .

Théorème 1.1.

L'ensemble des centres d'une conique \mathcal{C}_φ est soit l'ensemble vide, soit réduit à un point, soit une droite. La conique \mathcal{C}_φ est à centre si, et seulement si, la forme quadratique q est non dégénérée.

Preuve. Les centres de \mathcal{C}_φ sont les solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2by_0 = -d \\ 2bx_0 + 2cy_0 = -e \end{cases} \quad (1.1)$$

où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est la matrice de la forme quadratique q dans la base canonique de \mathbb{R}^2 . Il y a alors deux possibilités.

Soit $\det(A) = ac - b^2 \neq 0$ (i.e. la forme quadratique q est non dégénérée) et dans ce cas, il y a un unique centre Ω , donc la conique \mathcal{C}_φ est à centre.

Soit $\det(A) = ac - b^2 = 0$ et dans ce cas notre système linéaire a une infinité de solutions ou pas de solution. Précisément l'ensemble de ces centres est une droite affine ou l'ensemble vide. En effet, comme $A \neq 0$, son noyau est de dimension 1 quand $\det(A) = 0$, donc s'il existe (x_0, y_0) solution du système linéaire (1.1) tout vecteur $(x_0 + x', y_0 + y')$ avec $(x', y') \in \ker(A)$ est encore solution et une solution est nécessairement de cette forme. Donc l'ensemble des centres est dans ce cas la droite affine $(x_0, y_0) + \ker(A)$ d'équation $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. \square

Exemples 1.2

1. La conique d'équation $x^2 + y^2 - 2xy - 8(x + y) + 16 = 0$ n'a pas de centre. En effectuant le changement de variable $X = x - y$, $Y = x + y$, cette équation s'écrit $X^2 - 8Y + 16 = 0$, soit $Y = \frac{1}{8}X^2 - 16$ et \mathcal{C}_φ est une parabole (figure ??).
2. La conique d'équation $x^2 + y^2 + 4xy + 4(x + y) - 8 = 0$ est à centre puisque la forme quadratique q de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est non dégénérée. Son centre est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$

soit $(x_0, y_0) = -\frac{2}{3}(1, 1)$. Le changement de variables $X = x + \frac{2}{3}$, $Y = y + \frac{2}{3}$ nous donne l'équation $(X + 2Y)^2 - 3Y^2 = \frac{32}{3}$ et \mathcal{C}_φ est une hyperbole (figure ??).

3. La conique d'équation $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$ est à centre puisque la forme quadratique q de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ est non dégénérée. Son centre est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}$$

soit $(x_0, y_0) = (-1, 0)$. Le changement de variables $X = x + 1$, $Y = y$ nous donne l'équation $\left(X - \frac{2}{3}Y\right)^2 + \frac{5}{9}Y^2 = \frac{5}{3}$ et C_φ est une ellipse (figure 1.2).

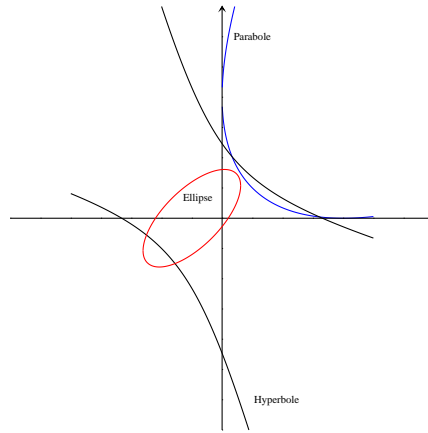


FIGURE 1.2 – Parabole, hyperbole et ellipse

Théorème 1.2.

Dans le cas où la forme quadratique q est dégénérée, la conique C_φ est soit vide, soit une droite, soit la réunion de deux droites parallèles, soit une parabole d'équation $X^2 = 2pY$ dans un repère adapté où $p \in \mathbb{R}^{+,*}$. Dans le cas d'une parabole l'ensemble des centre est vide et dans le cas d'une ou deux droites, l'ensemble des centres est une droite.

Preuve. Si la forme quadratique non nulle q est dégénérée, elle est alors de rang 1, ce qui revient à dire que sa matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est de rang 1, donc il existe un réel non nul λ tel que $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, de sorte que l'équation de C_φ devient $a(x^2 + 2\lambda xy + \lambda^2 y^2) + dx + ey + f = 0$, soit $a(x + \lambda y)^2 + dx + ey + f = 0$ avec $a \neq 0$. On distingue alors deux cas de figure.

Dans le cas où $e = \lambda d$, notre équation devient $a(x + \lambda y)^2 + d(x + \lambda y) + f = 0$, soit $\left(x + \lambda y + \frac{d}{2a}\right)^2 = \frac{\delta}{4a^2}$ en notant $\delta = d^2 - 4af$ le discriminant du polynôme $at^2 + dt + f$, ce qui définit un conique dégénérée réunion de deux droites parallèles si $\delta > 0$ (les droites d'équations $x + \lambda y = \frac{\sqrt{\delta} - d}{2a}$ et $x + \lambda y = -\frac{\sqrt{\delta} + d}{2a}$), une droite si $\delta = 0$ (la droite d'équation $x + \lambda y = -\frac{d}{2a}$) ou l'ensemble vide si $\delta < 0$.

Pour $\delta \geq 0$ l'ensemble des centres de \mathcal{C}_φ est la droite d'équation $x + \lambda y = -\frac{d}{2a}$ (on a $\lambda \neq 0$).

Pour $e \neq \lambda d$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= a(x + \lambda y)^2 + d(x + \lambda y) + (e - \lambda d)y + f \\ &= a\left(x + \lambda y + \frac{d}{2a}\right)^2 - \frac{\delta}{4a} + (e - \lambda d)y\end{aligned}$$

et \mathcal{C}_φ a pour équation $y + \frac{\delta}{4a(\lambda d - e)} = \frac{a}{\lambda d - e}\left(x + \lambda y + \frac{d}{2a}\right)^2$. En effectuant le changement de variables $(X, Y) = \left(x + \lambda y + \frac{d}{2a}, \varepsilon\left(y + \frac{\delta}{4a(\lambda d - e)}\right)\right)$ où $\varepsilon = \pm 1$ est le signe de $\frac{a}{\lambda d - e}$, cette équation devient $Y = \left|\frac{a}{\lambda d - e}\right|X^2 = \frac{1}{2p}X^2$. La conique \mathcal{C}_φ est une parabole et l'ensemble de ses centres est vide. \square

Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^2 , la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ de la forme quadratique q est diagonalisable dans une base orthonormée, ce qui signifie qu'il existe une base orthonormée (\vec{e}_1, \vec{e}_2) de \mathbb{R}^2 telle que $q(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$ pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, où λ_1, λ_2 sont les valeurs propres de A et dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ l'expression de φ est :

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + f$$

où $\alpha = \ell(\vec{e}_1)$, $\beta = \ell(\vec{e}_2)$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en désignant par P la matrice de passage de (\vec{i}, \vec{j}) à (\vec{e}_1, \vec{e}_2) (P est orthogonale).

Dans le cas où la forme quadratique q est dégénérée, les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = a + c \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ et une équation de \mathcal{C}_φ est :

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{\alpha}{2\lambda_1}\right)^2 + \beta x_2 + \gamma = 0$$

où $\gamma = f - \frac{\alpha^2}{4\lambda_1}$. Pour $\beta = 0$, cette équation devient $\lambda_1 \left(x_1 + \frac{\alpha}{2\lambda_1}\right)^2 + \gamma = 0$ et on retrouve le fait que \mathcal{C}_φ est soit vide, soit une droite, soit la réunion de deux droites parallèles. Pour $\beta \neq 0$, cette équation devient $\left(x_1 + \frac{\alpha}{2\lambda_1}\right)^2 =$

$-\frac{\beta}{\lambda_1} \left(x_2 + \frac{\gamma}{\beta} \right)$, soit une parabole d'équation $X^2 = 2pY$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{e}_1', \varepsilon \vec{e}_2')$, où ε est le signe de $-\frac{\beta}{\lambda_1}$ et la nouvelle origine Ω est définie par $\vec{O\Omega} = -\frac{\alpha}{2\lambda_1} \vec{e}_1' - \frac{\gamma}{\beta} \vec{e}_2'$.

Dans le cas où la forme quadratique q est non dégénérée, les valeurs propres λ_1, λ_2 sont non nulles, ce qui nous permet d'écrire que :

$$\varphi(x, y) = \lambda_1 \left(x_1 + \frac{\alpha}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(x_2 + \frac{\beta}{2\lambda_2} \right)^2 + \gamma \quad (1.2)$$

où $\gamma = f - \frac{\alpha^2}{4\lambda_1} - \frac{\beta^2}{4\lambda_2}$.

En effectuant le changement de variables :

$$(X, Y) = \left(x_1 + \frac{\alpha}{2\lambda_1}, x_2 + \frac{\beta}{2\lambda_2} \right) = (x_1 - X_0, y_1 - Y_0)$$

on obtient l'équation $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = -\gamma$ de la conique \mathcal{C}_φ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{e}_1', \vec{e}_2')$, où Ω est définie par $\vec{O\Omega} = X_0 \vec{e}_1' + Y_0 \vec{e}_2'$.

Le centre de la conique \mathcal{C}_φ est le point de coordonnées $(0, 0)$ dans le repère \mathcal{R}' , soit le point Ω .

La matrice P qui est orthogonale est de la forme $P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

ou $P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ et dans le repère \mathcal{R} , les coordonnées du centre de \mathcal{C}_φ sont données par $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$.

Pour λ_1, λ_2 de même signe, on aura $\mathcal{C}_\varphi = \emptyset$ si γ est non nulle de même signe et dans le cas contraire, \mathcal{C}_φ est une ellipse (si $\gamma \neq 0$) ou $\{\Omega\}$ (si $\gamma = 0$).

Pour λ_1, λ_2 de signe contraire, \mathcal{C}_φ est une hyperbole (si $\gamma \neq 0$) ou la réunion de deux droites concourantes en Ω (si $\gamma = 0$).

Exemples 1.3

1. Pour $\varphi(x, y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$, on a $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 5)$, $\vec{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{10}{\sqrt{2}}, -\frac{37}{8} \right)$ et on aboutit à l'équation de l'ellipse $\left(x_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 + 5 \left(x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{37}{8}$, où $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix}$.
2. Pour $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy + 4(x + y) - 8 = 0$, on a $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 3)$, $\vec{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta, \gamma) = \left(0, \frac{8}{\sqrt{2}}, -\frac{32}{3} \right)$ et on aboutit à l'équation de l'hyperbole $x_1^2 - 3 \left(x_2 + \frac{4}{3\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{32}{3}$, où $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -x + y \\ x + y \end{pmatrix}$.

En remplaçant au besoin le vecteur propre \vec{e}_2 par $-\vec{e}_2$, on peut se ramener à une matrice de rotation $P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et on peut aboutir à une équation de \mathcal{C}_φ de la forme (1.2) sans diagonaliser la matrice A . Pour ce faire, il suffit de déterminer un réel $\theta \in [0, 2\pi[$ qui élimine $x_1 x_2$ dans l'expression de $\varphi(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2)$. On a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) x_1 - \sin(\theta) x_2 \\ \sin(\theta) x_1 + \cos(\theta) x_2 \end{pmatrix}$ et le coefficient de $x_1 x_2$ dans l'expression :

$$\begin{aligned} q(x, y) &= a(\cos(\theta) x_1 - \sin(\theta) x_2)^2 \\ &\quad + 2b(\cos(\theta) x_1 - \sin(\theta) x_2)(\sin(\theta) x_1 + \cos(\theta) x_2) \\ &\quad + c(\sin(\theta) x_1 + \cos(\theta) x_2)^2 \end{aligned}$$

est :

$$\delta = 2(c - a) \sin(\theta) \cos(\theta) + 2b(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = (c - a) \sin(2\theta) + 2b \cos(2\theta)$$

Pour $c = a$, on prend $\theta = \frac{\pi}{4}$ et pour $c \neq a$, on choisit θ tel que $\tan(2\theta) = \frac{2b}{a - c}$, ce qui nous donne $\varphi(x, y) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + f$ avec :

$$\begin{cases} \lambda_1 = a \cos^2(\theta) + b \sin(2\theta) + c \sin^2(\theta), & \lambda_2 = a \sin^2(\theta) - b \sin(2\theta) + c \cos^2(\theta) \\ \alpha = d \cos(\theta) + e \sin(\theta), & \beta = -d \sin(\theta) + e \cos(\theta) \end{cases}$$

où λ_1, λ_2 sont bien les valeurs propres de A .

Pour $a = c$, cela donne :

$$\begin{cases} \lambda_1 = a + b \sin(2\theta) = a + b, & \lambda_2 = a - b \sin(2\theta) = a - b \\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(d + e), & \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-d + e) \end{cases}$$

et pour $c \neq a$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = (a - c) \cos^2(\theta) + b \sin(2\theta) + c, & \lambda_2 = a + c - \lambda_1 \\ \alpha = d \cos(\theta) + e \sin(\theta), & \beta = -d \sin(\theta) + e \cos(\theta) \end{cases}$$

On peut vérifier que $\lambda_1 = \cos(2\theta) \frac{(a - c)^2 + 4b^2}{2(a - c)} + \frac{a + c}{2}$.

Les droites $\Omega + \mathbb{R}\vec{e}_1$ et $\Omega + \mathbb{R}\vec{e}_2$, d'équations respectives $-\sin(\theta)(x - x_0) + \cos(\theta)(y - y_0) = 0$ et $\cos(\theta)(x - x_0) + \sin(\theta)(y - y_0) = 0$ sont des axes de symétrie pour la conique \mathcal{C}_φ (les axes principaux de la conique à centre). En résumé, on peut donner les définitions suivantes.

Définition 1.4. On appelle respectivement parabole, ellipse ou hyperbole, toute partie $\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_e$ ou \mathcal{C}_h du plan \mathcal{P} pour laquelle il existe un repère ortho-normé $(\Omega_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ dans lequel une équation de cette partie est :

$$X^2 = 2pY, \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

les réels p, a, b étant strictement positifs.

Une parabole, ellipse ou hyperbole est donc l'image par une isométrie d'une conique d'équation $X^2 = 2pY$, $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé. On a ainsi une classification euclidienne des coniques propres.

De ces équations implicites, on déduit que la tangente à une parabole \mathcal{C}_p , une ellipse \mathcal{C}_e ou une hyperbole \mathcal{C}_h en un point $M_0(X_0, Y_0)$ a pour équation dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$: $X_0(X - X_0) - p(Y - Y_0) = 0$, $\frac{X_0}{a^2}(X - X_0) + \frac{Y_0}{b^2}(Y - Y_0) = 0$ ou $\frac{X_0}{a^2}(X - X_0) - \frac{Y_0}{b^2}(Y - Y_0) = 0$, ce qui peut encore s'écrire $Y = \frac{X_0}{p}X - Y_0$, $\frac{X_0}{a^2}X + \frac{Y_0}{b^2}Y = 1$ ou $\frac{X_0}{a^2}X - \frac{Y_0}{b^2}Y = 1$.

De ces équations implicites on peut aussi déduire des paramétrisations des coniques.

Pour une parabole, prendre X comme paramètre est raisonnable, ce qui nous donne la paramétrisation $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(t, \frac{t^2}{2p}\right)$, la tangente en $\gamma(t_0) = \left(t_0, \frac{t_0^2}{2p}\right)$ étant dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\gamma'(t_0)} = \left(1, \frac{t_0}{p}\right)$. Une représentation paramétrique de cette tangente est donc : ??

$$\begin{cases} x = \frac{t_0}{p} + \lambda \\ y = \frac{t_0^2}{2p} + \frac{t_0}{p}\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour une ellipse, le résultat qui suit nous conduit à une paramétrisation.

Théorème 1.3.

Si x, y sont deux réels tels que $x^2 + y^2 = 1$, il existe alors un unique réel $t \in [-\pi, \pi[$ tel que $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$.

Preuve. Voir le théorème ??.

□

On en déduit la paramétrisation de l'ellipse \mathcal{C}_e :

$$t \in [-\pi, \pi[\mapsto \gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$$

Cette paramétrisation permet un tracé de l'ellipse. L'étude se fait pour t dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis on complète par symétrie par rapport aux axes. On a des tangentes verticales en $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ et des tangentes horizontales en $B(0, a)$, $B'(0, -a)$.

Théorème 1.4. (Appolonius)

Soient \mathcal{C}_e une ellipse de paramétrisation $t \mapsto \gamma(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$ dans un repère orthonormé adapté $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et M, N deux points de \mathcal{C}_e tels que la tangente à \mathcal{C}_e en N soit parallèle à (OM) . Dans ces conditions, on a $OM^2 + ON^2 = a^2 + b^2$ et l'aire du triangle OMN est égale à $\frac{ab}{2}$. De

plus, en désignant respectivement par I, J les projections de M, N sur l'axe des abscisses, on a $OI^2 + OJ^2 = a^2$.

Preuve. En notant $M = \gamma(t)$, dire que la tangente à \mathcal{C}_e en $N = \gamma(t')$ est parallèle à (OM) équivaut à dire que :

$$\begin{aligned} \det(\gamma(t), \gamma'(t')) &= \begin{vmatrix} a \cos(t) & -a \sin(t') \\ b \sin(t) & b \cos(t') \end{vmatrix} \\ &= ab(\cos(t) \cos(t') + \sin(t) \sin(t')) = ab \cos(t - t') = 0 \end{aligned}$$

ce qui équivaut à $t' = t \pm \frac{\pi}{2}$ modulo 2π et donne deux possibilités pour N . On a alors :

$$\begin{aligned} OM^2 + ON^2 &= a^2(\cos^2(t) + \cos^2(t')) + b^2(\sin^2(t) + \sin^2(t')) \\ &= a^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + b^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

et l'aire du triangle OMN est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} |\det(\gamma(t), \gamma(t'))| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a \cos(t) & a \cos(t') \\ b \sin(t) & b \sin(t') \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} ab |\cos(t) \sin(t') - \sin(t) \cos(t')| = \frac{1}{2} ab |\sin(t' - t)| = \frac{1}{2} ab \end{aligned}$$

On a aussi :

$$OI^2 + OJ^2 = a^2(\cos^2(t) + \cos^2(t')) = a^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = a^2$$

□

Pour une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé, en effectuant le changement de variable $y = b \operatorname{sh}(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$ (sh est bijective de \mathbb{R} sur \mathbb{R}), on a $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \operatorname{sh}^2(t) = \operatorname{ch}^2(t)$ et $x = \pm a \operatorname{ch}(t)$ où \pm est le signe de x . Réciproquement tout point $(\pm a \operatorname{ch}(t), b \operatorname{sh}(t))$ est sur l'hyperbole. On a donc $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, où Γ_1 et Γ_2 sont les courbes d'équations paramétriques respectives :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma_1(t) = (a \operatorname{ch}(t), b \operatorname{sh}(t)) \text{ et } t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma_2(t) = (-a \operatorname{ch}(t), b \operatorname{sh}(t))$$

Γ_1 et Γ_2 sont les deux branches de l'hyperbole.

De $\gamma_2(-t) = -\gamma_1(t)$, on déduit que Γ_2 est l'image de Γ_1 par la symétrie de centre O .

Ces paramétrisations nous permettent un tracé de Γ . Pour ce faire, il suffit de tracer Γ_1 . L'étude de γ_1 se fait pour $t \geq 0$ puis on complète le graphe obtenu par symétrie par rapport à l'axe Ox . Les fonctions ch et sh sont strictement croissantes, avec $\gamma_1'(0) = b \vec{j}$, on déduit qu'on a une tangente verticale en $A(a, 0)$ et avec $\frac{y_1(t)}{x_1(t)} = \frac{b e^t - e^{-t}}{a e^t + e^{-t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{b}{a}$, on déduit que la droite d'équation $ay - bx = 0$

est asymptote à l'infini. De même avec $\frac{y_1(t)}{x_1(t)} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} -\frac{b}{a}$, on déduit que la droite

d'équation $ay + bx = 0$ est asymptote à l'infini. Les tracés de Γ_1, Γ_2 et Γ s'en suivent.

Pour $a = b$, les diagonales d'équations $y = x$ et $y = -x$ sont asymptotes et on dit que \mathcal{C}_h est une hyperbole équilatère (les asymptotes sont perpendiculaires).

Une autre paramétrisation de \mathcal{C}_h peut s'obtenir comme suit.

En posant $y = b \tan(t)$ avec $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (\tan est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur \mathbb{R}), on a $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$ et $x = \pm \frac{a}{\cos(t)}$. Réciproquement tout point $\left(\pm \frac{a}{\cos(t)}, b \tan(t)\right)$ est sur l'hyperbole. On a donc $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, où Γ_1 et Γ_2 sont les courbes d'équations paramétriques respectives :

$$t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \gamma_1(t) = \left(\frac{a}{\cos(t)}, b \tan(t)\right)$$

$$t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \gamma_2(t) = \left(-\frac{a}{\cos(t)}, b \tan(t)\right)$$

En posant $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, on a $u \in]-1, 1[$, $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\tan(t) = \frac{2u}{1-u^2}$ et les paramétrisations rationnelles :

$$u \in]-1, 1[\mapsto \left(\pm a \frac{1+u^2}{1-u^2}, b \frac{2u}{1-u^2}\right)$$

1.2 Quadriques dans un espace affine euclidien

De manière plus générale, si \mathcal{E} est un espace affine euclidien de dimension $n \geq 2$ et $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère orthonormé de \mathcal{E} , une quadrique dans \mathcal{E} est une courbe algébrique de degré 2, c'est-à-dire une partie \mathcal{Q}_φ de \mathcal{E} définie par :

$$\mathcal{Q}_\varphi = \{M(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E} \mid \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

où $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n (a_{ii}x_i^2 + \alpha_i x_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j + \beta$ est une fonction polynomiale de degré 2, les coefficients a_{ij} n'étant pas tous nuls. On a $\varphi = q + \ell + \beta$, où q est une forme quadratique non nulle de forme polaire B et ℓ une forme linéaire. Pour tout réel non nul λ , la fonction polynomiale $\lambda\varphi$ définit la même quadrique.

Une telle quadrique est dite propre si la forme quadratique Q , homogénéisée de φ , définie sur \mathbb{R}^{n+1} par :

$$Q(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^n (a_{ii}x_i^2 + \alpha_i x_i x_{n+1}) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j + \beta x_{n+1}^2$$

est non dégénérée.

En utilisant la différentielle $d\varphi(\omega) = dq(\omega) + d\ell(\omega) = 2B(\omega, \cdot) + \ell$ et la hessienne $d^2\varphi(\omega) = d^2q(\omega) = 2q$ de φ en $\omega \in \mathbb{R}^n$ définies respectivement par :

$$d\varphi(\omega)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\omega) x_k = 2B(\omega, x) + \ell(x)$$

et :

$$d^2\varphi(\omega)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2}(\omega) x_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(\omega) x_i x_j = 2q(x)$$

on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\omega + x) &= \varphi(\omega) + d\varphi(\omega)(x) + \frac{1}{2}d^2\varphi(\omega)(x) \\ &= \varphi(\omega) + 2B(\omega, x) + \ell(x) + q(x) \end{aligned}$$

On dit qu'un point $\Omega(\omega)$ dans \mathcal{E} est un centre de \mathcal{Q}_φ si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \varphi(\omega + x) = \varphi(\omega) + q(x)$$

ce qui revient à dire que $d\varphi(\omega) = 0$, c'est-à-dire que les centres de \mathcal{Q}_φ sont les points singuliers de la fonction φ .

Comme pour les coniques, on vérifie qu'un centre de \mathcal{Q}_φ est un centre de symétrie de cette quadrique.

Les centres de \mathcal{Q}_φ sont déterminés par les solutions du système linéaire :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\omega) = 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \alpha_i = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

de matrice $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$ (la matrice de q dans la base $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$).

Pour q non dégénérée, cette matrice est inversible et la quadrique \mathcal{Q}_φ a un unique centre Ω . Dans ce cas, une équation de la quadrique \mathcal{Q}_φ dans le repère translaté $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ obtenue par le changement de variable $x = x' + \omega$ est :

$$\varphi(x) = \varphi(\omega + x') = \varphi(\omega) + q(x') = 0$$

D'autre part, il existe une base orthonormée $(\vec{e}_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ dans laquelle

une expression de q est $q(x') = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2$, les réels λ_k étant tous non nuls, ce qui

nous donne l'équation $\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 + \varphi(\omega) = 0$ de la quadrique \mathcal{Q}_φ dans le repère

$$\mathcal{R}'' = (\Omega, \vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n').$$

Pour $n = 3$, on a les possibilités suivantes :

- si $\Omega \notin \mathcal{Q}_\varphi$ et q est de signature $(3, 0)$ ou $(0, 3)$ (i.e. les λ_k sont tous de même signe), alors \mathcal{Q}_φ est vide pour $\varphi(\omega)$ de même signe que les λ_k ou un ellipsoïde pour $\varphi(\omega)$ de signe contraire ;

- si $\Omega \notin \mathcal{Q}_\varphi$ et q est de signature $(2, 1)$ ou $(1, 2)$, alors \mathcal{Q}_φ est un hyperboloïde ;
- si $\Omega \in \mathcal{Q}_\varphi$, l'équation de \mathcal{Q}_φ dans \mathcal{R}'' est $q(x') = 0$ et la quadrique est réduite à $\{\Omega\}$ pour q de signature $(3, 0)$ ou $(0, 3)$, ou un cône de sommet Ω pour q de signature $(2, 1)$ ou $(1, 2)$.

Exemple 1.1 Pour $\Omega \in \mathcal{Q}_\varphi$ et q de signature $(2, 1)$, en notant (x, y, z) pour (y_1, y_2, y_3) , une équation de \mathcal{Q}_φ dans \mathcal{R}'' est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Pour $a = b$, le cône est dit de révolution. L'intersection de \mathcal{Q}_φ avec le plan d'équation $z = 0$ est $\{\Omega\}$, l'intersection de \mathcal{Q}_φ avec un plan d'équation $z = \lambda \neq 0$ est une ellipse (un cercle pour $a = b$) et l'intersection de \mathcal{Q}_φ avec un plan d'équation $x = \lambda \neq 0$ est une hyperbole.

1.3 Définition par directrice, foyer et excentricité des coniques

On se donne une droite \mathcal{D} dans le plan affine euclidien \mathcal{P} , un point $F \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$, un réel $e > 0$ et on s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid d(M, F) = e \cdot d(M, \mathcal{D})\}$.

Comme F n'est pas sur \mathcal{D} , on a $d(M, \mathcal{D}) > 0$ pour tout $M \in \mathcal{C}$ et on peut écrire que :

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D} \mid \frac{MF}{MH} = e \right\}$$

où H est la projection orthogonale de M sur \mathcal{D} .

On se place dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (F, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, où \vec{e}_2 dirige la droite \mathcal{D} de sorte qu'une équation de \mathcal{D} dans ce repère est $x_1 = k$ avec $k > 0$.

On désigne par $\Delta = F + \mathbb{R}\vec{e}_1$ la perpendiculaire à \mathcal{D} passant par F et par K la projection orthogonale de F sur \mathcal{D} (figure 1.3).

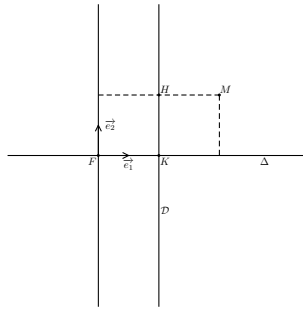


FIGURE 1.3 –

Lemme 1.1 La droite Δ coupe l'ensemble \mathcal{C} en un ou deux points, donc l'ensemble \mathcal{C} est non vide. Plus précisément :

1. pour $e = 1$, on a $\mathcal{C} \cap \Delta = \{A\}$, où A est le milieu du segment $[F, K]$;

2. pour $e \neq 1$, on a $\mathcal{C} \cap \Delta = \{A, A'\}$ où $A \left(\frac{ke}{1+e}, 0 \right)$ est le barycentre de $\{(F, 1), (K, e)\}$ et $A' \left(-\frac{ke}{1-e}, 0 \right)$ est le barycentre de $\{(F, 1), (K, -e)\}$.

Preuve. Le projeté orthogonal $K(k, 0)$ de F sur \mathcal{D} est aussi le projeté orthogonal sur \mathcal{D} de tout point $M(x_1, 0) \in \Delta$ et pour un tel point distinct de K , on a $\frac{MF}{MH} = \frac{|x_1|}{|x_1 - k|}$.

1. Pour $e = 1$, l'égalité $\frac{MF}{MH} = e$ avec $M \in D \setminus \{K\}$ équivaut à $x_1^2 = (x_1 - k)^2$, soit à $k(k - 2x_1) = 0$, ce qui nous donne $x_1 = \frac{k}{2}$ comme unique solution, ce qui signifie que $\mathcal{C} \cap \Delta = \{A\}$, où A est le milieu du segment $[F, K]$.
2. Pour $e \neq 1$, l'égalité $\frac{MF}{MH} = e$ avec $M \in D \setminus \{K\}$ équivaut à l'équation polynomiale de degré 2, $(1 - e^2)x_1^2 + 2ke^2x_1 - k^2e^2 = 0$ de discriminant $\delta = k^2e^4 + (1 - e^2)e^2k^2 = k^2e^2$, ce qui nous donne deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-ke^2 + ke}{1 - e^2} = \frac{ke}{1 + e}$ et $x_1' = \frac{-ke^2 - ke}{1 - e^2} = -\frac{ke}{1 - e}$, ce qui signifie que $\mathcal{C} \cap \Delta = \{A, A'\}$, où $A \left(\frac{ke}{1+e}, 0 \right)$ est le barycentre de $\{(F, 1), (K, e)\}$ et $A' \left(-\frac{ke}{1-e}, 0 \right)$ est le barycentre de $\{(F, 1), (K, -e)\}$.

On peut aussi raisonner géométriquement comme suit.

Pour $e = 1$, dire que $M \in \mathcal{C} \cap \Delta$ équivaut à dire que $M \in \Delta$ et $MF = MK$, ce qui revient à dire que M est à l'intersection de la médiatrice de $[F, K]$ et de Δ , c'est donc le milieu de $[F, K]$.

Pour $e \neq 1$, dire que $M \in \mathcal{C} \cap \Delta$ équivaut à dire que $M \in \Delta$ et $MF^2 = e^2 MK^2$, ce qui équivaut à $(\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK}) \cdot (\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK}) = 0$, les points M, K, F étant alignés (ils sont tous sur Δ), ce qui équivaut à $\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK} = \vec{0}$ encore équivalent à dire que M le barycentre de $\{(F, 1), (K, e)\}$ ou celui de $\{(F, 1), (K, -e)\}$.

□

Théorème 1.5.

L'ensemble \mathcal{C} est un conique non dégénérée. Pour $e = 1$, c'est une parabole; pour $e < 1$, c'est une ellipse; pour $e > 1$, c'est une hyperbole.

Preuve. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$, on a l'équivalence :

$$(M \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((1 - e^2)x_1^2 + 2ke^2x_1 + x_2^2 - k^2e^2 = 0) \quad (1.3)$$

ce qui définit bien une conique.

Pour $e = 1$, il s'agit d'une parabole d'équation $x_1 = \frac{-1}{2k}x_2^2 + \frac{k}{2}$.

Pour $e \neq 1$, \mathcal{C} est une conique de centre $\Omega \left(-\frac{ke^2}{1-e^2}, 0 \right)$ et d'équation :

$$(1-e^2) \left(x_1 + \frac{ke^2}{1-e^2} \right)^2 + x_2^2 = \frac{k^2 e^2}{1-e^2} \quad (1.4)$$

soit une ellipse pour $0 < e < 1$ ou une hyperbole pour $e > 1$. \square

Définition 1.5. Avec les notations qui précèdent, la droite \mathcal{D} est la directrice, la droite Δ est l'axe focal (ou le grand axe), le point F est le foyer et le réel e l'excentricité de la conique \mathcal{C} .

Les points de $\mathcal{C} \cap \Delta$ sont les sommets de la conique.

Les tangentes à une parabole \mathcal{C}_p en un point $M \left(\frac{-1}{2k} x_2^2 + \frac{k}{2}, x_2 \right)$ ne sont jamais parallèles à l'axe focal puisque une telle tangente est dirigée par le vecteur $(-kx_2, 1)$ et Δ est dirigée par le vecteur $(1, 0)$.

Une telle tangente est parallèle à la directrice \mathcal{D} si, et seulement si, $x_2 = 0$ et $x_1 = \frac{k}{2}$, ce qui revient à dire que M est le sommet de la parabole (milieu de $[F, K]$).

Pour $e \neq 1$, en notant $a = \frac{ke}{|1-e^2|}$, l'équation (1.4) s'écrit :

$$\frac{1}{a^2} \left(x_1 + \frac{ke^2}{1-e^2} \right)^2 + \frac{1}{1-e^2} \frac{1}{a^2} x_2^2 = 1$$

ce qui donne l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}' = (M_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

où on a noté $b = \sqrt{|1-e^2|} a$ et $\varepsilon = \frac{|1-e^2|}{1-e^2}$ est le signe de $1-e^2$.

Pour $e \in]0, 1[$, on a $b^2 = (1-e^2) a^2$, soit $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ et pour $e > 1$, on a $b^2 = (e^2 - 1) a^2$, soit $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$.

Réciproquement une conique non dégénérée \mathcal{C} peut être définie à l'aide d'un foyer, d'une directrice et d'une excentricité.

Si \mathcal{C}_p est une parabole d'équation $x^2 = 2py$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ avec $p > 0$, on vérifie que la droite \mathcal{D} d'équation $y = -\frac{p}{2}$ est une directrice et le point $F \left(0, \frac{p}{2} \right)$ est un foyer. En effet, on a l'équivalence pour $M(x, y) \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} (M(x, y) \in \mathcal{C}_p) &\Leftrightarrow (x^2 = 2py) \Leftrightarrow \left(x^2 + \left(y - \frac{p}{2} \right)^2 = \left(y + \frac{p}{2} \right)^2 \right) \\ &\Leftrightarrow (MF = MH) \end{aligned}$$

Si \mathcal{C}_e est une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans \mathcal{R} , avec $a > b > 0$, on vérifie que la droite \mathcal{D} d'équation $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ est une directrice, que le point $F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ est un foyer et que le réel $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ est l'excentricité. En effet, on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} (MF^2 = e^2 MH^2) &\Leftrightarrow \left(\left(x - \sqrt{a^2 - b^2} \right)^2 + y^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \left(x - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right)^2 \right) \\ &\Leftrightarrow \left(x^2 - 2x\sqrt{a^2 - b^2} + a^2 - b^2 + y^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - 2x\sqrt{a^2 - b^2} + a^2 \right) \\ &\Leftrightarrow \left(-b^2 + y^2 = -\frac{b^2}{a^2} x^2 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right) \Leftrightarrow (M \in \mathcal{C}_e) \end{aligned}$$

Si \mathcal{C}_h est une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans \mathcal{R} , avec $a > b > 0$, on vérifie que la droite \mathcal{D} d'équation $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ est une directrice, que le point $F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ est un foyer et que le réel $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ est l'excentricité. En effet, on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} (MF^2 = e^2 MH^2) &\Leftrightarrow \left(\left(x - \sqrt{a^2 + b^2} \right)^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \left(x - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 \right) \\ &\Leftrightarrow \left(x^2 - 2x\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 - 2x\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 \right) \\ &\Leftrightarrow \left(b^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right) \Leftrightarrow (M \in \mathcal{C}_h) \end{aligned}$$

De l'équation (1.3), on déduit le résultat suivant.

Lemme 1.2 *L'axe focal Δ est un axe de symétrie de la conique \mathcal{C} .*

Preuve. Soit $\sigma : M(x_1, x_2) \mapsto M(x_1, -x_2)$ la symétrie orthogonale par rapport à Δ . L'équation (1.3) étant paire en x_2 , on a :

$$(M \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\sigma(M) \in \mathcal{C})$$

ce qui signifie que Δ est un axe de symétrie pour \mathcal{C} .

On peut aussi montrer ce résultat de façon géométrique comme suit.

On a $\sigma(F) = F$ et en remarquant que pour $M \in \mathcal{P}$, la projection orthogonale de $M' = \sigma(M)$ sur \mathcal{D} est $H' = \sigma(H)$ où H est la projection orthogonale sur \mathcal{D} de M (c'est-à-dire que $p_{\mathcal{D}} \circ \sigma = \sigma \circ p_{\mathcal{D}}$), on déduit que :

$$\frac{d(\sigma(M), F)}{d(\sigma(M), \mathcal{D})} = \frac{\sigma(M) \sigma(F)}{\sigma(M) \sigma(H)} = \frac{MF}{MH}$$

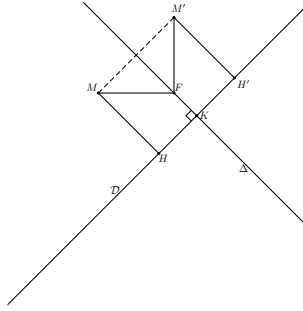


FIGURE 1.4 – L'axe focal est une axe de symétrie

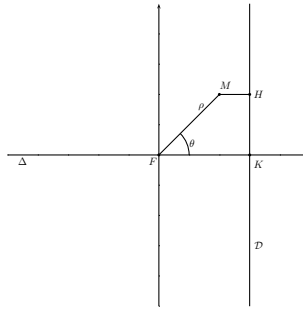


FIGURE 1.5 – Conique en coordonnées polaires

et en conséquence M est sur \mathcal{C} si, et seulement si, $\sigma(M)$ est sur \mathcal{C} (figure 1.4). \square

L'équation (1.3) nous permet aussi d'obtenir une représentation polaire de la conique \mathcal{C} dans le repère $\mathcal{R} = (F, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (figure 1.5).

Théorème 1.6.

Une ellipse \mathcal{C}_e a pour équation polaire dans le repère \mathcal{R} :

$$\theta \in]-\pi, \pi] \mapsto \rho(\theta) = \frac{ke}{1 + e \cos(\theta)}$$

Une parabole \mathcal{C}_p a pour équation polaire dans le repère \mathcal{R} :

$$\theta \in]-\pi, \pi[\mapsto \rho(\theta) = \frac{k}{1 + \cos(\theta)}$$

Une hyperbole \mathcal{C}_h est la réunion des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 d'équations polaires respectives dans le repère \mathcal{R} :

$$\theta \in]-(\pi - \alpha), \pi - \alpha[\mapsto \rho_1(\theta) = \frac{ke}{1 + e \cos(\theta)}$$

$$\theta \in]-\alpha, \alpha[\mapsto \rho_2(\theta) = -\frac{ke}{1 - e \cos(\theta)}$$

où $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ est tel que $\frac{1}{e} = \cos(\alpha)$.

Preuve. On a vu que $F \notin \mathcal{C}$, donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{P} \setminus \{F\}$. Pour tout point $M(x_1, x_2) \in \mathcal{P} \setminus \{F\}$, il existe un unique couple de réels $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi]$ tel que $(x_1, x_2) = \rho(\cos(\theta), \sin(\theta))$, donc en écrivant l'équation (1.3) sous la forme $x_1^2 + x_2^2 = e^2(x_1 - k)^2$, on aboutit à l'équation polaire équivalente $\rho^2 = e^2(\rho \cos(\theta) - k)^2$, soit à :

$$\rho = -e(\rho \cos(\theta) - k) \text{ ou } \rho = e(\rho \cos(\theta) - k)$$

ce qui est encore équivalent à :

$$\rho(1 + e \cos(\theta)) = ke \text{ ou } \rho(1 - e \cos(\theta)) = -ke$$

Pour $0 < e < 1$, on a $-1 < e \cos(\theta) < 1$ et $1 \pm e \cos(\theta) > 0$, la deuxième équation est donc impossible et une équation polaire de \mathcal{C}_e est :

$$\rho = \frac{ke}{1 + e \cos(\theta)} \quad (\theta \in]-\pi, \pi])$$

Pour $e = 1$, l'égalité $\rho(1 - \cos(\theta)) = -k$ avec $k > 0$, $\rho > 0$ et $1 - \cos(\theta) \geq 0$ est impossible, on a donc $\rho(1 + \cos(\theta)) = k$ avec $1 + \cos(\theta) > 0$, soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Une équation polaire de \mathcal{C}_p est donc :

$$\rho = \frac{k}{1 + \cos(\theta)} \quad (\theta \in]-\pi, \pi[)$$

Pour $e > 1$, il existe une unique réel $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\frac{1}{e} = \cos(\alpha)$ et les conditions :

$$1 + e \cos(\theta) = e(\cos(\alpha) + \cos(\theta)) > 0 \text{ ou } 1 - e \cos(\theta) = e(\cos(\alpha) - \cos(\theta)) < 0$$

imposent $\cos(\theta) > -\cos(\alpha) = \cos(\pi - \alpha)$ ou $\cos(\theta) > \cos(\alpha)$, ce qui équivaut à $\theta \in]-(\pi - \alpha), \pi - \alpha[$ ou $\theta \in]-\alpha, \alpha[$.

En définitive, on a $\mathcal{C}_h = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ où \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont les courbes d'équations polaires respectives :

$$\rho = \rho_1(\theta) = \frac{ke}{1 + e \cos(\theta)} \quad \theta \in]-(\pi - \alpha), \pi - \alpha[$$

$$\rho = \rho_2(\theta) = -\frac{ke}{1 - e \cos(\theta)} \quad \theta \in]-\alpha, \alpha[$$

□

Un procédé de construction de la tangente à une conique \mathcal{C} en point M qui n'est pas sur l'axe focal est donné par le résultat suivant.

Théorème 1.7.

Soient \mathcal{C} une conique de directrice \mathcal{D} et de foyer F et M un point de \mathcal{C} qui n'est pas sur l'axe focal Δ . La tangente à \mathcal{C} en M coupe la directrice \mathcal{D} en un point T tel que le triangle MFT soit rectangle en F (figure 1.6).

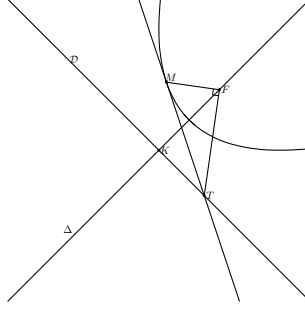


FIGURE 1.6 – Tangente en un point d'une conique

Preuve. Soit $M : t \mapsto M(t)$ une paramétrisation régulière de la conique \mathcal{C} dans le repère $\mathcal{R} = (F, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. En dérivant l'égalité $\|\vec{MF}\| = e \|\vec{MH}\|$ (où, pour simplifier, on a noté M et H pour $M(t)$ et $H(t)$), on obtient :

$$\frac{1}{\|\vec{MF}\|} \vec{MF} \cdot \frac{d}{dt} \vec{MF} = \frac{e}{\|\vec{MH}\|} \vec{MH} \cdot \frac{d}{dt} \vec{MH}$$

avec $\frac{1}{\|\vec{MH}\|} \vec{MH} = \pm \vec{e}_1$ puisque ces deux vecteurs sont colinéaires et de norme

1 et en notant $\vec{u}(t) = \frac{1}{\|\vec{M(t)F}\|} \vec{M(t)F}$, on a $\vec{u}(t) \cdot \frac{d}{dt} \vec{MF} = \pm e \left(\vec{e}_1 \cdot \frac{d}{dt} \vec{MH} \right)$

avec :

$$\vec{e}_1 \cdot \frac{d}{dt} \vec{MH} = \vec{e}_1 \cdot \frac{d}{dt} \vec{MF} + \vec{e}_1 \cdot \frac{d}{dt} \vec{FH}$$

et :

$$\vec{e}_1 \cdot \frac{d}{dt} \vec{FH} = \frac{d}{dt} (\vec{e}_1 \cdot \vec{FH}) = \frac{d}{dt} (\vec{e}_1 \cdot (\vec{FK} + \vec{KH})) = \frac{d}{dt} (\vec{e}_1 \cdot \vec{FK}) = 0$$

du fait que \vec{KH} est orthogonal à \vec{e}_1 et $\vec{e}_1 \cdot \vec{FK} = \|\vec{FK}\|$ ne dépend pas de t . On a donc $\vec{u}(t) \cdot \frac{d}{dt} \vec{MF} = \pm e \left(\vec{e}_1 \cdot \frac{d}{dt} \vec{MF} \right)$.

Si T est le point d'intersection de la tangente à \mathcal{C} en M avec la directrice \mathcal{D} , on a $\vec{MT} = \lambda \frac{d}{dt} \vec{MF}$ et :

$$\vec{u}(t) \cdot \vec{MT} = \lambda \vec{u}(t) \cdot \frac{d}{dt} \vec{MF} = \lambda e (\pm \vec{e}_1) \cdot \frac{d}{dt} \vec{MF} = e (\pm \vec{e}_1) \cdot \vec{MT}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT} &= \overrightarrow{FM} \cdot (\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MT}) = \|\overrightarrow{MF}\|^2 - \|\overrightarrow{MF}\| \|\overrightarrow{u(t)}\| \cdot \overrightarrow{MT} \\ &= \|\overrightarrow{MF}\| \left(\|\overrightarrow{MF}\| - e(\pm \vec{e}_1) \cdot \overrightarrow{MT} \right)\end{aligned}$$

avec $\vec{e}_1 \cdot \overrightarrow{MT} = \vec{e}_1 \cdot \overrightarrow{MH} + \vec{e}_1 \cdot \overrightarrow{HT} = \vec{e}_1 \cdot \overrightarrow{MH} = \pm \|\overrightarrow{MH}\|$, ce qui donne en définitive, $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT} = \|\overrightarrow{MF}\| \left(\|\overrightarrow{MF}\| - e \|\overrightarrow{MH}\| \right) = 0$, ce qui signifie que le triangle MFT est rectangle en F . \square

Des considérations géométriques élémentaires nous fournissent un procédé de construction de la parabole à la règle et au compas.

Pour $H \in \mathcal{D}$ on désigne par \mathcal{D}_H la perpendiculaire à \mathcal{D} passant par H et par \mathcal{D}'_H la médiatrice du segment $[HF]$ (comme $F \notin \mathcal{D}$, on a $H \neq F$). On a alors :

$$(M \in \mathcal{D}_H \cap \mathcal{C}_p) \Leftrightarrow (M \in \mathcal{D}_H \text{ et } MF = MH) \Leftrightarrow (M \in \mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}'_H)$$

L'intersection $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}'_H$ étant bien réduite à un point puisque \mathcal{D}'_H n'est pas parallèle à \mathcal{D}_H (sinon (HF) serait perpendiculaire à Δ et F serait sur \mathcal{D}).

Les points de la parabole sont donc les points d'intersection de la perpendiculaire \mathcal{D}_H à \mathcal{D} passant par H avec la médiatrice \mathcal{D}'_H du segment $[HF]$.

En notant $\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}'_H = \{M_H\}$, l'application $H \mapsto M_H$ nous donne une paramétrisation de la parabole dans un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, où O est le sommet de la parabole.

En notant $M_0(x_0, y_0) = M_H$ un point de la parabole ainsi construit, on a $H(-\frac{p}{2}, y_0)$, $F(\frac{p}{2}, 0)$, $\overrightarrow{HF} = (p, -y_0)$ et la médiatrice \mathcal{D}'_H a pour équation :

$$\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{M_0M} = p(x - x_0) - y_0(y - y_0) = 0$$

c'est donc la tangente à \mathcal{C}_p en M_0 . Cette tangente coupe $[HF]$ en son milieu $I_H(0, \frac{y_0}{2})$.

Théorème 1.8.

Soient \mathcal{C}_p une parabole, M un point de \mathcal{C}_p et H le projeté orthogonal de M sur la directrice \mathcal{D} . La tangente à \mathcal{C}_p en M est la médiatrice de $[HF]$. Si M n'est pas sur l'axe focal Δ , cette tangente est aussi la hauteur issue de M dans le triangle FMH et la bissectrice intérieure de l'angle en M (figure 1.7).

Preuve. On vient de voir que la tangente à \mathcal{C}_p en M est la médiatrice de $[HF]$. Considérant que le triangle MFH est isocèle en M ($MF = MH$), cette médiatrice est aussi la hauteur issue de M et la bissectrice intérieure de l'angle en M .

On peut aussi montrer ce résultat en utilisant une paramétrisation régulière :

$$\gamma : t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$$

de \mathcal{C}_p dans un repère orthonormé $(F, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, où $\vec{e}_1 = \frac{1}{FK} \overrightarrow{FK}$.

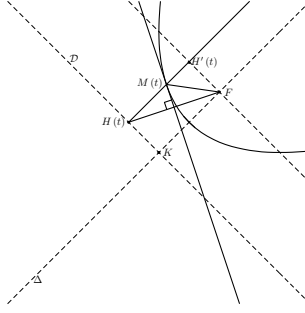


FIGURE 1.7 – Tangente à une parabole

En notant $H(t)$ la projection orthogonale de $M(t)$ sur \mathcal{D} et en dérivant l'égalité :

$$\|\overrightarrow{FM(t)}\|^2 - \|\overrightarrow{M(t)H(t)}\|^2 = 0$$

on a $\overrightarrow{FM(t)} \cdot \overrightarrow{FM'(t)} - \overrightarrow{M(t)H(t)} \cdot (\overrightarrow{FH'(t)} - \overrightarrow{FM'(t)}) = 0$. Comme $\overrightarrow{M(t)H(t)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et les points $F, H'(t)$ sont sur l'axe des ordonnées qui est parallèle à \mathcal{D} (on a $H(t) = (k, y(t))$ et $H'(t) = (0, y'(t))$), les vecteurs $\overrightarrow{M(t)H(t)}$ et $\overrightarrow{FH'(t)}$ sont orthogonaux, de sorte que $\overrightarrow{FM(t)} \cdot \overrightarrow{FM'(t)} + \overrightarrow{M(t)H(t)} \cdot \overrightarrow{FM'(t)} = 0$, soit $(\overrightarrow{FM(t)} + \overrightarrow{M(t)H(t)}) \cdot \overrightarrow{FM'(t)} = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{FH(t)} \cdot \overrightarrow{FM'(t)} = 0$. La tangente à \mathcal{C}_p en $M(t)$ qui est la droite passant par $M(t)$ et dirigée par $\overrightarrow{FM'(t)}$ est donc perpendiculaire à $[FH]$, ce qui signifie que c'est la hauteur issue de $M = M(t)$ dans le triangle MFH . Le triangle étant isocèle en M , on a les autres résultats. \square

Exemple 1.2 *Considérons, dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 muni de sa base canonique (O, \vec{i}, \vec{j}) la parabole ayant pour directrice la droite \mathcal{D} d'équation $x + y = 0$ et pour foyer le point $F(2, 2)$. La droite \mathcal{D} est dirigée par $\vec{v} = (-1, 1)$ et pour $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale $H(x_H, y_H)$ de M sur \mathcal{D} est définie par :*

$$\begin{cases} x_H + y_H = 0 & (H \in \mathcal{D}) \\ -(x - x_H) + (y - y_H) = 0 & (\overrightarrow{HM} \cdot \vec{v} = 0) \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} x_H + y_H = 0 \\ x_H - y_H = x - y \end{cases}$$

ce qui donne $y_H = -x_H = \frac{y-x}{2}$. En particulier, pour $M = F$, cette projection est $K(0, 0) = O$.

La condition $MF = MH$ se traduit alors par $(x-2)^2 + (y-2)^2 = \frac{(x+y)^2}{2}$, ou encore :

$$x^2 + y^2 - 2xy - 8(x+y) + 16 = 0 \quad (1.5)$$

Sur la figure 1.8, on représente cette parabole avec la construction du point intersection de la perpendiculaire \mathcal{D}_H à \mathcal{D} passant par $H(-1, 1)$ et de la médiatrice de $[HF]$. Le paramètre p de cette parabole est $p = KF = \|\vec{OF}\| = 2\sqrt{2}$, le sommet

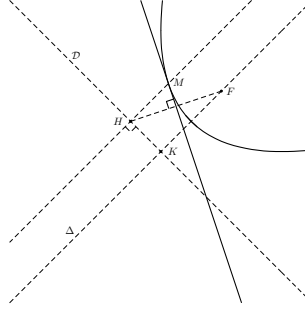


FIGURE 1.8 – Parabole : $x^2 + y^2 - 2xy - 8(x + y) + 16 = 0$

est le milieu $A(1, 1)$ de $[KF]$ (c'est aussi le point d'intersection de la parabole avec l'axe focal d'équation $y = x$, ce qui donne $2x^2 - 2x^2 - 16x + 16 = 0$) et dans un repère adapté, une équation est $Y^2 = 2pX = 4\sqrt{2}X$. Ce repère est $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, où $O(1, 1)$, $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$.

1.4 Définition bifocale des coniques à centre

On se donne deux points distincts F, F' dans le plan \mathcal{P} , un réel $a > 0$ et on s'intéresse aux ensembles \mathcal{E} et \mathcal{H} respectivement définis par :

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\} \text{ et } \mathcal{H} = \{M \in \mathcal{P} \mid |MF - MF'| = 2a\}$$

Pour $F = F'$, l'ensemble \mathcal{E} est le cercle de centre F et de rayon a et l'ensemble \mathcal{H} est vide.

Pour tout point M dans \mathcal{E} , en utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$FF' = \|\vec{FM} + \vec{MF'}\| \leq MF + MF' = 2a$$

donc l'ensemble \mathcal{E} est vide pour $a < \frac{FF'}{2}$ et pour $a = \frac{FF'}{2}$ c'est le segment $[F, F']$.

De même, pour tout $M \in \mathcal{H}$, on a :

$$2a = |MF - MF'| = \left| \|\vec{MF}\| - \|\vec{MF'}\| \right| \leq \|\vec{MF} - \vec{MF'}\| = FF'$$

donc l'ensemble \mathcal{H} est vide pour $a > \frac{FF'}{2}$ et pour $a = \frac{FF'}{2}$ c'est la droite (FF') privée de $]F, F'[,$

On note O le milieu de $[F, F']$ et on se place dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, où $\vec{e}_1 = \frac{1}{OF} \vec{OF}$, de sorte que $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ avec $c = OF = \frac{FF'}{2} > 0$.

Théorème 1.9.

Pour $a > \frac{FF'}{2}$ l'ensemble \mathcal{E} est une ellipse, qui n'est pas un cercle, d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère \mathcal{R} , où on a noté $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Pour $a < \frac{FF'}{2}$ l'ensemble \mathcal{H} est une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère \mathcal{R} , où on a noté $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Preuve. Pour $a > c = \frac{FF'}{2}$, l'ensemble \mathcal{E} qui contient les points $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ est non vide et pour tout point $M \in \mathcal{P}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} (M \in \mathcal{E}) &\Leftrightarrow ((MF + MF')^2 = 4a^2) \\ &\Leftrightarrow (2MF \cdot MF' = 4a^2 - (MF^2 + (MF')^2)) \end{aligned}$$

avec :

$$MF^2 + (MF')^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2)$$

et :

$$\begin{aligned} MF \cdot MF' &= \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} (M \in \mathcal{E}) &\Leftrightarrow ((x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = (2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2))^2) \\ &\Leftrightarrow ((x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + (x^2 + y^2 + c^2)^2) \\ &\Leftrightarrow (-c^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + c^2)) \\ &\Leftrightarrow ((a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right) \end{aligned}$$

en notant $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, ce qui est bien l'équation d'une ellipse. Comme $c > 0$, on a $a \neq b$ et cette ellipse n'est pas un cercle.

Pour $a < c = \frac{FF'}{2}$, l'ensemble \mathcal{H} qui contient les points $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ est non vide et pour tout point $M \in \mathcal{P}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
 (M \in \mathcal{H}) &\Leftrightarrow ((MF - MF')^2 = 4a^2) \\
 &\Leftrightarrow (2MF \cdot MF' = (MF^2 + (MF')^2) - 4a^2) \\
 &\Leftrightarrow ((x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = ((x^2 + y^2 + c^2) - 2a^2)^2) \\
 &\Leftrightarrow (-c^2x^2 = -a^2(x^2 + y^2 + c^2) + a^4) \\
 &\Leftrightarrow ((c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)
 \end{aligned}$$

en notant $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, ce qui est bien l'équation d'une hyperbole. \square

Réciproquement une conique à centre qui n'est ni un cercle ni la réunion de deux droites peut être définie à l'aide de ses foyers.

On a vu que si \mathcal{C}_φ est une conique à centre (i.e. la forme quadratique q associée est non dégénérée), il existe alors un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan \mathcal{P} dans laquelle une équation de \mathcal{C}_φ est :

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{\alpha}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(x_2 + \frac{\beta}{2\lambda_2}\right)^2 + \gamma = 0$$

les réels λ_1, λ_2 étant non nuls (λ_1, λ_2 sont les valeurs propres de la matrice de q , \vec{e}_1, \vec{e}_2 sont des vecteurs propres unitaires associés et $\gamma = f - \frac{\alpha^2}{4\lambda_1} - \frac{\beta^2}{4\lambda_2}$).

Le centre de cette conique est $M_0 \left(-\frac{\alpha}{2\lambda_1}, -\frac{\beta}{2\lambda_2}\right)$ et dans le repère orthonormé $(M_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ cette équation devient :

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \gamma = 0$$

Pour $\gamma < 0 < \lambda_2 < \lambda_1$ [resp. pour $\gamma > 0 > \lambda_2 > \lambda_1$], \mathcal{C}_φ est une ellipse qui n'est pas un cercle et en notant $(a, b) = \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{-\gamma}}, \sqrt{\frac{\lambda_2}{-\gamma}}\right)$ cette équation prend la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$.

On note $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ et pour tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(M_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on effectue le changement de variable $(x, y) = (au, bv)$. On note également $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ dans le repère $(M_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Avec ces notations, on a pour tout point M du plan affine \mathcal{P} :

$$\begin{aligned}
 MF^2 + (MF')^2 &= (x - c)^2 + y^2 + (x + c)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2) \\
 &= 2(a^2u^2 + b^2v^2 + a^2 - b^2) = 2(a^2(u^2 + 1) - b^2(1 - v^2)) \\
 &= 2a^2 \left((u^2 + 1) - \frac{b^2}{a^2}(1 - v^2) \right)
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 MF^2 (MF')^2 &= \left((x-c)^2 + y^2 \right) \left((x+c)^2 + y^2 \right) \\
 &= (x^2 + y^2 + c^2 - 2cx) (x^2 + y^2 + c^2 + 2cx) \\
 &= (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2 \\
 &= (a^2 (u^2 + 1) - b^2 (1 - v^2))^2 - 4a^2 (a^2 - b^2) u^2 \\
 &= a^4 \left(\left((u^2 + 1) - \frac{b^2}{a^2} (1 - v^2) \right)^2 - 4 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 \right)
 \end{aligned}$$

Pour $M \in \mathcal{C}_\varphi$, on a $u^2 + v^2 = 1$ et en conséquence :

$$MF^2 + (MF')^2 = 2a^2 \left(u^2 + 1 - \frac{b^2}{a^2} u^2 \right) = 2a^2 \left(\left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 + 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 MF^2 (MF')^2 &= a^4 \left(\left((u^2 + 1) - \frac{b^2}{a^2} u^2 \right)^2 - 4 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 \right) \\
 &= a^4 \left(\left(\left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 + 1 \right)^2 - 4 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 \right) \\
 &= a^4 \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 \right)^2
 \end{aligned}$$

avec $0 < \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 \leq 1 - \frac{b^2}{a^2} < 1$, donc $MFMF' = a^2 \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 \right)$ et :

$$\begin{aligned}
 (MF + MF')^2 &= 2a^2 \left(\left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 + 1 \right) + 2a^2 \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 \right) \\
 &= 4a^2
 \end{aligned}$$

soit $MF + MF' = 2a$.

Pour $\gamma < 0$ [resp. $\gamma > 0$] et $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, \mathcal{C}_φ est une hyperbole et en notant $(a, b) = \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{-\gamma}}, \sqrt{\frac{\lambda_2}{\gamma}} \right)$ cette équation prend la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

On note $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ et pour tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(M_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on effectue le changement de variable $(x, y) = (au, bv)$. On note également $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ dans le repère $(M_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Avec ces notations, on a pour tout point M du plan affine \mathcal{P} :

$$\begin{aligned}
 MF^2 + (MF')^2 &= 2(x^2 + y^2 + c^2) = 2(a^2 u^2 + b^2 v^2 + a^2 + b^2) \\
 &= 2(a^2(u^2 + 1) + b^2(1 + v^2)) = 2a^2 \left((u^2 + 1) + \frac{b^2}{a^2} (1 + v^2) \right)
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 MF^2 (MF')^2 &= (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2 \\
 &= (a^2 (u^2 + 1) + b^2 (1 + v^2))^2 - 4a^2 (a^2 + b^2) u^2 \\
 &= a^4 \left(\left((u^2 + 1) + \frac{b^2}{a^2} (1 + v^2) \right)^2 - 4 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 \right)
 \end{aligned}$$

Pour $M \in \mathcal{C}_\varphi$, on a $u^2 - v^2 = 1$ et en conséquence :

$$MF^2 + (MF')^2 = 2a^2 \left(u^2 + 1 + \frac{b^2}{a^2} u^2 \right) = 2a^2 \left(\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 + 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 MF^2 (MF')^2 &= a^4 \left(\left((u^2 + 1) + \frac{b^2}{a^2} u^2 \right)^2 - 4 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 \right) \\
 &= a^4 \left(\left(\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 + 1 \right)^2 - 4 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 \right) \\
 &= a^4 \left(\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 - 1 \right)^2
 \end{aligned}$$

avec $\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 \geq 1 + \frac{b^2}{a^2} > 1$, donc $MFMF' = a^2 \left(\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 - 1 \right)$ et :

$$\begin{aligned}
 (MF - MF')^2 &= 2a^2 \left(\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 + 1 \right) - 2a^2 \left(\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) u^2 - 1 \right) \\
 &= 4a^2
 \end{aligned}$$

soit $|MF - MF'| = 2a$.

Les points F et F' sont par définition les foyers de la conique à centre et le milieu O de $[F, F']$ est son centre.

Le réel $e = \frac{c}{a}$ est l'excentricité de cette conique. Pour une ellipse qui n'est pas un cercle, on a $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in]0, 1[$ et pour une hyperbole, on a $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$.

Dans le cas d'une ellipse, on dit que a est le demi grand axe (ou que $2a$ est le grand axe) et que b est le demi petit axe (ou que $2b$ est le petit axe).

On a vu que l'axe des abscisses coupe la conique en $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ et, pour une ellipse, on peut vérifier que l'axe des ordonnées la coupe en $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$. On dit que les points A, A', B, B' sont les sommets de l'ellipse et les points A, A' sont les sommets de l'hyperbole.

Dans le cas d'une ellipse, en utilisant le théorème de Pythagore, on a $FB^2 = OB^2 + OF^2 = b^2 + c^2 = a^2$, donc $FB = FB' = F'B = F'B' = a$.

Dans le cas d'une ellipse, de l'équation $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, on déduit que $x^2 \leq a^2 < \frac{a^2}{e^2}$, soit $-\frac{a}{e} < x_1 < \frac{a}{e}$ et l'ellipse est contenue dans la bande délimitée par les droites \mathcal{D} (d'équation $x = \frac{a}{e}$) et \mathcal{D}' (d'équation $x = -\frac{a}{e}$).

La définition bi-focale des coniques à centres peut être utilisée pour montrer les résultats suivants sur les tangentes.

Théorème 1.10.

Soient \mathcal{E} une ellipse qui n'est pas un cercle [resp. \mathcal{H} une hyperbole] de foyers F, F' et M un point de \mathcal{E} [resp. de \mathcal{H}]. La tangente à \mathcal{E} [resp. \mathcal{H}] en M est la bissectrice extérieure [resp. intérieure] issue de M du triangle MFF' .

Preuve. Soit $M : t \mapsto M(t)$ une paramétrisation régulière de \mathcal{E} . En dérivant l'égalité $\left\| \overrightarrow{M(t)F} \right\| + \left\| \overrightarrow{M(t)F'} \right\| = 2a$, on obtient :

$$\frac{1}{\left\| \overrightarrow{M(t)F} \right\|} \overrightarrow{M(t)F} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{M(t)F} + \frac{1}{\left\| \overrightarrow{M(t)F'} \right\|} \overrightarrow{M(t)F'} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{M(t)F'} = 0$$

En remarquant que $\frac{d}{dt} \overrightarrow{M(t)F'} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{M(t)F} + \frac{d}{dt} \overrightarrow{FF'} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{M(t)F}$ et en posant $\overrightarrow{u(t)} = \frac{1}{\left\| \overrightarrow{M(t)F} \right\|} \overrightarrow{M(t)F}$ et $\overrightarrow{v(t)} = \frac{1}{\left\| \overrightarrow{M(t)F'} \right\|} \overrightarrow{M(t)F'}$ on a $\left(\overrightarrow{u(t)} + \overrightarrow{v(t)} \right) \cdot$

$\frac{d}{dt} \overrightarrow{M(t)F} = 0$, ce qui signifie que le vecteur tangent $\frac{d}{dt} \overrightarrow{M(t)F}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u(t)} + \overrightarrow{v(t)}$ qui dirige la bissectrice intérieure issue de M du triangle MFF' , ce qui est encore équivalent à dire que la tangente à \mathcal{E} en M est la bissectrice extérieure issue de M du triangle MFF' .

On procède de manière analogue pour une parabole \mathcal{H} . Comme $M(t)F - M(t)F' \neq 0$ sur \mathcal{H} , par continuité le signe de cette quantité est constant au voisinage d'un point de l'hyperbole et le supposant positif dans un voisinage ouvert de t , en dérivant l'égalité $M(t)F - M(t)F' = 2a$, on aboutit à $\left(\overrightarrow{u(t)} - \overrightarrow{v(t)} \right) \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{M(t)F} = 0$, ce qui signifie que le vecteur tangent $\frac{d}{dt} \overrightarrow{M(t)F}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u(t)} - \overrightarrow{v(t)}$ qui dirige la bissectrice extérieure issue de M du triangle MFF' , ce qui est encore équivalent à dire que la tangente à \mathcal{H} en M est la bissectrice intérieure issue de M du triangle MFF' . \square

1.5 Définition par foyers et cercle directeur des coniques à centre

On rappelle quelques résultats sur la distance d'un point à une droite, l'intersection entre un cercle et une droite et l'intersection entre deux cercles.

Le plan affine euclidien \mathcal{P} étant muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, un cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$ de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$. C'est une conique particulière d'équation :

$$\Omega M^2 - R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$$

La tangente \mathcal{T}_{M_1} en un point $M_1(x_1, y_1)$ du cercle est la droite d'équation :

$$(x_1 - x_0)(x - x_1) + (y_1 - y_0)(y - y_1) = 0$$

ou encore : $\overrightarrow{(x_1 - x_0)} \cdot \overrightarrow{(x - x_0)} + (y_1 - y_0)(y - y_0) - R^2 = 0$. La première équation s'écrit $\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \overrightarrow{M_1 M} = 0$ et signifie que \mathcal{T}_{M_1} est la droite orthogonale à $(M_0 M_1)$ qui passe par M_1 (figure 1.9).

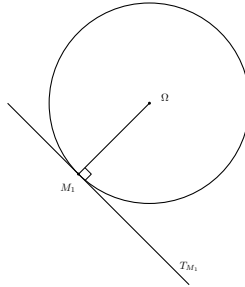


FIGURE 1.9 – Tangente à un cercle

Théorème 1.11.

Soient \mathcal{D} une droite et $M(x, y)$ un point du plan \mathcal{P} . Pour tout point A de \mathcal{D} , tout vecteur directeur \vec{v} de \mathcal{D} et tout vecteur non nul \vec{u} normal à \mathcal{D} , la distance de M à \mathcal{D} est :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v})|}{\|\vec{v}\|}$$

(figure 1.10). Si \mathcal{D} a pour équation $ax + by + c = 0$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, cette distance est également donnée par :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Preuve. Dans la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \left(\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}, \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} \right)$, on a :

$$\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$$

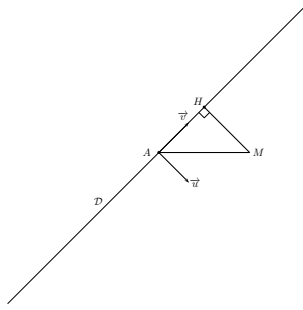


FIGURE 1.10 – Distance d'un point à une droite

en notant H le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} , donc :

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{D}) &= HM = \left| \overrightarrow{AM} \cdot \vec{e}_2 \right| = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|} \\ &= \frac{|\alpha(y-b) - \beta(x-a)|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v})|}{\|\vec{v}\|} \end{aligned}$$

On a aussi $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{e}_1) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{e}_1 & 1 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{e}_2 & 0 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{AM} \cdot \vec{e}_2$, donc :

$$d(M, \mathcal{D}) = \left| \det(\overrightarrow{AM}, \vec{e}_1) \right| = \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{v})|}{\|\vec{v}\|}$$

Si \mathcal{D} a pour équation $ax + by + c = 0$ dans \mathcal{R} , le vecteur $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ est alors orthogonal à \mathcal{D} et pour tout point $A(x_A, y_A)$ sur \mathcal{D} , on a :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|a(x - x_A) + b(y - y_A)|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

puisque $ax_A + by_A + c = 0$. □

Théorème 1.12.

Soient $\mathcal{C}(\Omega, R)$ un cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$ et \mathcal{D} une droite du plan \mathcal{P} .

1. *Si $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ est vide ;*
2. *si $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{H\}$ où H est le projeté orthogonal de Ω sur \mathcal{D} et la droite \mathcal{D} est tangente au cercle \mathcal{C} en ce point ;*
3. *si $d(\Omega, \mathcal{D}) < R$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ est formé de deux points distincts.*

Preuve. On a :

$$(M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}) \Leftrightarrow (M \in \mathcal{D} \text{ et } \Omega M = R)$$

Si $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$, on a alors pour tout point $M \in \mathcal{D}$, $\Omega M \geq d(\Omega, \mathcal{D}) > R$, donc $M \notin \mathcal{C}$. Il en résulte que $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \emptyset$.

Si $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$, en désignant par H le projeté orthogonal de Ω sur \mathcal{D} , on utilise un repère orthonormé $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = \frac{1}{\Omega H} \overrightarrow{\Omega H} = \frac{1}{R} \overrightarrow{\Omega H}$. Si $\vec{v} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} , on a alors :

$$R = d(\Omega, \mathcal{D}) = \frac{|\det(\overrightarrow{\Omega H}, \vec{v})|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|\det(R\vec{e}_1, \vec{v})|}{\|\vec{v}\|} = \frac{R|\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

donc $\beta^2 = \alpha^2 + \beta^2$, soit $\alpha = 0$ et $\mathcal{D} = H + \mathbb{R}\vec{e}_2$ (droite passant par $H(R, 0)$ et dirigée par \vec{e}_2) a pour équation $x = R$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} (M(x, y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}) &\Leftrightarrow (x = R \text{ et } R^2 = \Omega M^2 = x^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow ((x, y) = (R, 0)) \Leftrightarrow (M = H) \end{aligned}$$

soit $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{H\}$ et \mathcal{D} est tangente à \mathcal{C} en H (l'équation de cette tangente est $R(x - R) = 0$, soit $x = R$).

Pour $d = d(\Omega, \mathcal{D}) < R$, on a :

$$\begin{aligned} (M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}) &\Leftrightarrow (\overrightarrow{HM} = \lambda \vec{v} \text{ et } R^2 = \Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2) \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{HM} = \lambda \vec{v} \text{ et } \lambda^2 \|\vec{v}\|^2 = R^2 - d^2) \end{aligned}$$

ce qui donne deux solutions distinctes pour λ et en conséquence, $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ est formé de deux points distincts. \square

Le cas où $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{H\}$ est encore équivalent à dire que $\Omega \notin \mathcal{D}$ et la droite \mathcal{D} est perpendiculaire à la droite (ΩH) .

Le théorème précédent nous permet de donner une définition de la parabole comme lieu géométrique.

Théorème 1.13.

La parabole \mathcal{C}_p de directrice \mathcal{D} et foyer F est le lieu des centres des cercles tangents à \mathcal{D} et passant par F (figure 1.11).

Preuve. Si M est un point de la parabole \mathcal{C}_p de directrice \mathcal{D} et foyer F , en notant H le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} , la condition $MF = MH = d(M, \mathcal{D})$ nous dit que le cercle de centre M et de rayon MF (donc passant par F) est tangent à la droite \mathcal{D} . Réciproquement si $M \in \mathcal{P}$ est le centre d'un cercle tangent à \mathcal{D} et passant par F , on a alors $R = MF = MH$ et $M \in \mathcal{C}_p$. \square

Théorème 1.14.

Soient $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(\Omega_1, R_1)$, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(\Omega_2, R_2)$ deux cercles de centres respectifs Ω_1, Ω_2 et de rayons respectifs R_1, R_2 non nuls.

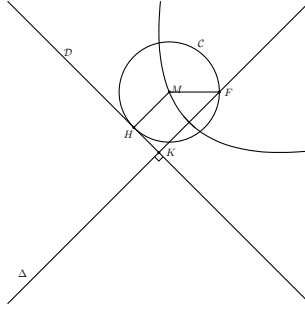


FIGURE 1.11 – Parabole comme lieu des centres des cercles ...

1. Pour $\Omega_1 = \Omega_2$ (cercles concentriques), on a $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ si $R_1 \neq R_2$ ou $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ si $R_1 = R_2$.
2. Pour $\Omega_1 \neq \Omega_2$ (cercles non concentriques) on a :
 - soit $\Omega_1 \Omega_2 \notin [|R_2 - R_1|, R_1 + R_2]$ et dans ce cas, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$;
 - soit $\Omega_1 \Omega_2 \in \{|R_2 - R_1|, R_1 + R_2\}$ et dans ce cas, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_1 = \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_2 = \{H\}$, où \mathcal{D} est une droite tangente à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 en H ;
 - soit $\Omega_1 \Omega_2 \in]|R_2 - R_1|, R_1 + R_2[$ et dans ce cas, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_1 = \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_2 = \{H, K\}$, où $H \neq K$ et \mathcal{D} est une droite passant par H et K .

Preuve. Les deux cercles jouant des rôles symétriques, on peut supposer que $R_1 \geq R_2$.

1. Pour $\Omega_1 = \Omega_2$, un point M du plan \mathcal{P} est dans l'intersection $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ si, et seulement si, on a $R_1 = M_1 M = R_2$, donc $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ si $R_1 \neq R_2$ et pour $R_1 = R_2$, on a $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$, soit $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2$ par symétrie.
2. Pour $\Omega_1 \neq \Omega_2$, on note $\delta = \Omega_1 \Omega_2$ et on utilise un repère orthonormé $(\Omega_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = \frac{1}{\delta} \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2}$. Dans ce repère, on a $\Omega_2(\delta, 0)$ et les cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont pour équations respectives $x^2 + y^2 = R_1^2$ et $(x - \delta)^2 + y^2 = R_2^2$, de sorte que :

$$\begin{aligned}
 (M(x, y) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 = R_1^2 \text{ et } (x - \delta)^2 + y^2 = R_2^2) \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 = R_1^2 \text{ et } -2\delta x + \delta^2 + R_1^2 - R_2^2 = 0) \\
 &\Leftrightarrow (M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_1)
 \end{aligned}$$

où \mathcal{D} est la droite d'équation $-2\delta x + \delta^2 + R_1^2 - R_2^2 = 0$.

La distance de $\Omega_1(0, 0)$ à \mathcal{D} est $d_1 = d(\Omega_1, \mathcal{D}) = \frac{\delta^2 + R_1^2 - R_2^2}{2\delta}$ et on a :

$$d_1 - R_1 = \frac{\delta^2 + R_1^2 - R_2^2 - 2\delta R_1}{2\delta} = \frac{(\delta - R_1)^2 - R_2^2}{2\delta}$$

On déduit alors du théorème précédent que :

- $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ pour $|\delta - R_1| > R_2$, ce qui équivaut à $\delta > R_1 + R_2$ ou $\delta < R_1 - R_2$, soit $\delta \notin [R_1 - R_2, R_1 + R_2]$;
- $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{H\}$ pour $|\delta - R_1| = R_2$, ce qui équivaut à $\delta = R_1 + R_2$ ou $\delta = R_1 - R_2$, la droite \mathcal{D} étant tangente à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ($\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ jouent des rôles symétriques);
- $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est formé de deux points distincts, pour $|\delta - R_1| < R_2$, ce qui équivaut à $\delta \in]R_1 - R_2, R_1 + R_2[$.

□

Dans le cas où $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est réduit à un point, on dit que les deux cercles sont tangents.

On se donne deux points distincts F, F' dans le plan \mathcal{P} , un réel $a > 0$ et on désigne par $\mathcal{C}(F', 2a)$ le cercle de centre F' et de rayon $2a$. Pour tout point M du plan \mathcal{P} , on note $\mathcal{C}(M, MF)$ le cercle de centre M et de rayon MF (cercle de centre M et passant par F) et on s'intéresse à l'ensemble \mathcal{C} des points M tels que le cercle $\mathcal{C}(M, MF)$ est tangent au cercle $\mathcal{C}(F', 2a)$ (figure 1.12).

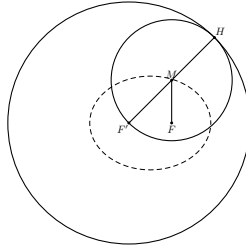


FIGURE 1.12 – Cercle directeur d'une ellipse

Si $FF' = 2a$, le point F est alors sur le cercle $\mathcal{C}(F', 2a)$

Théorème 1.15.

Pour $FF' < 2a$ l'ensemble des points M du plan \mathcal{P} tels que le cercle $\mathcal{C}(M, MF)$ est tangent au cercle $\mathcal{C}(F', 2a)$ est l'ellipse de foyers F, F' et de grand axe $2a$.

Pour $FF' > 2a$ l'ensemble des points M du plan \mathcal{P} tels que le cercle $\mathcal{C}(M, MF)$ est tangent au cercle $\mathcal{C}(F', 2a)$ est l'hyperbole de foyers F, F' et de grand axe $2a$.

Preuve. Le théorème 1.14 nous dit que :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{M \in \mathcal{P} \mid \mathcal{C}(M, MF) \text{ est tangent à } \mathcal{C}(F', 2a)\} \\ &= \{M \in \mathcal{P} \mid M \neq F' \text{ et } MF' \in \{|2a - MF|, MF + 2a\}\} \end{aligned}$$

1. Supposons que $FF' < 2a$ (i.e. F est intérieur au cercle $\mathcal{C}(F', 2a)$). Dans ce cas, on a pour tout point $M \in \mathcal{P}$:

$$MF' \leq MF + FF' < MF + 2a$$

donc $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid M \neq F' \text{ et } MF' = |2a - MF|\}$. Si $M \in \mathcal{C}$ est tel que $MF \geq 2a$, on a alors :

$$FF' \geq MF - MF' = MF - (MF - 2a) = 2a$$

ce qui n'est pas. On a donc $MF < 2a$ pour tout $M \in \mathcal{C}$ et en conséquence $MF' = 2a - MF$, soit $MF + MF' = 2a$, ce qui signifie que M est sur l'ellipse de foyers F, F' et de grand axe $2a$. Réciproquement, si M est sur cette ellipse, on a alors $MF + MF' = 2a$ avec $M \neq F'$ puisque $FF' > 2a$ et $|2a - MF| = 2a - MF = MF$, ce qui signifie que $M \in \mathcal{C}$. En conclusion, on a bien $\mathcal{C} = \mathcal{C}_e$.

2. Supposons que $FF' > 2a$ (i.e. F est extérieur au cercle $\mathcal{C}(F', 2a)$). Pour $M \in \mathcal{C}$ tel que $MF \geq 2a$, on a $MF' = MF - 2a$ ou $MF' = MF + 2a$, soit $MF - MF' = 2a$ ou $MF' - MF = 2a$, c'est-à-dire $|MF - MF'| = 2a$. Pour $M \in \mathcal{C}$ tel que $MF < 2a$, l'égalité $MF' = 2a - MF$ donnerait $FF' \leq MF + MF' = 2a$, ce qui n'est pas, donc on a $MF' = MF + 2a$ et $|MF - MF'| = 2a$. L'ensemble \mathcal{C} est donc contenu dans l'hyperbole \mathcal{C}_h de foyers F, F' et de grand axe $2a$. Réciproquement si $M \in \mathcal{C}_h$, on a soit $MF - MF' = 2a$, soit $MF' - MF = 2a$, ce qui nous donne $|2a - MF| = MF'$ ou $MF + 2a = MF'$, ce qui signifie que $M \in \mathcal{C}$. En conclusion, on a bien $\mathcal{C} = \mathcal{C}_h$.

□

1.6 Lieu orthoptique d'une conique

Étant donnée une conique \mathcal{C}_φ de type ellipse, hyperbole ou parabole, on s'intéresse au lieu orthoptique des points M du plan euclidien \mathcal{P} d'où l'on peut mener deux tangentes à \mathcal{C}_φ qui sont orthogonales. Pour ce faire, on étudie tout d'abord l'ensemble des points d'intersection entre une conique non vide \mathcal{C}_φ et une droite \mathcal{D} d'origine M_0 dirigée par un vecteur non nul \vec{V} .

On utilise un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on a $M_0(x_0, y_0)$, $\vec{V} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ et on note de façon usuelle $\varphi = q + \ell + f$ avec $q \neq 0$.

Une paramétrisation de la droite \mathcal{D} dans ce repère est $(x, y) = (x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta)$, où $t \in \mathbb{R}$ et l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_\varphi$ est non vide si, et seulement si, l'équation polynomiale :

$$P(t) = \varphi(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) = \varphi(x_0, y_0) + d\varphi(x_0, y_0)(\alpha, \beta)t + q(\alpha, \beta)t^2 = 0$$

a une ou deux racines réelles.

Dans le cas où la forme quadratique q est dégénérée, la conique \mathcal{C}_φ est soit une droite, soit la réunion de deux droites distinctes parallèles, soit une parabole (théorème 1.2). Si \mathcal{C}_φ est une droite ou la réunion de deux droites, $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_\varphi$ est soit vide, soit réduite à un ou deux points, soit égale à \mathcal{D} . Si \mathcal{C}_φ est une parabole, le repère \mathcal{R} peut alors être choisi de sorte que $\varphi(x, y) = x^2 - 2py$ où $p > 0$, ce qui

nous donne $P(t) = \varphi(x_0, y_0) + 2(x_0\alpha - p\beta)t + \alpha^2 t^2$. Pour $\alpha = 0$, on a $\beta \neq 0$ (\vec{V} est non nul) et $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_\varphi$ est réduite à un point $M_1(x_1, y_1)$. La tangente à \mathcal{C}_φ en M_1 étant dirigée par $p\vec{i} + x_1\vec{j}$, la droite \mathcal{D} dirigée par $(0, \beta)$ n'est pas tangente à \mathcal{C}_φ . Pour $\alpha \neq 0$, le discriminant de P est $\delta = 4p(2\alpha(\alpha y_0 - \beta x_0) + p\beta^2)$ et $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_\varphi$ est vide pour $\delta < 0$, formée de deux points pour $\delta > 0$ et réduite à un point pour $\delta = 0$. Pour $\delta \geq 0$, en prenant l'un des points d'intersection comme origine de \mathcal{D} , notre équation polynomiale s'écrit $P(t) = 2(x_0\alpha - p\beta)t + \alpha^2 t^2 = 0$ et il y a un unique point d'intersection si, et seulement si, $x_0\alpha - p\beta = 0$, ce qui revient à dire que \mathcal{D} est tangente à \mathcal{C}_φ en M_0 .

Dans le cas où la forme quadratique q est non dégénérée, on peut choisir un repère \mathcal{R} de sorte que $\varphi(x, y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - \gamma$ où γ est un réel et λ_1, λ_2 sont des réels non nuls, ce qui nous donne :

$$P(t) = \varphi(x_0, y_0) + 2(\lambda_1 x_0 \alpha + \lambda_2 y_0 \beta)t + (\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2)t^2$$

Pour $\gamma = 0$ et λ_1, λ_2 de même signe, \mathcal{C}_φ est réduit à $\{(0, 0)\}$ et $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_\varphi = \mathcal{C}_\varphi$ si ce point est sur \mathcal{D} , $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$ sinon.

Pour $\gamma = 0$ et λ_1, λ_2 de signe contraire, \mathcal{C}_φ est la réunion de deux droites concourantes et $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_\varphi$ est réduite à un ou deux points ou égal à \mathcal{D} tout entier.

Pour γ non nul et λ_1, λ_2 de même signe contraire à celui de γ , on a $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_\varphi = \mathcal{C}_\varphi = \emptyset$ (ce qui est supposé exclu).

Pour $\gamma, \lambda_1, \lambda_2$ de même signe, \mathcal{C}_φ est une ellipse et il y a 0, 1 ou 2 points d'intersection en fonction du signe du discriminant :

$$\delta = \alpha^2 \gamma \lambda_1 + \beta^2 \gamma \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2 (\alpha y_0 - \beta x_0)^2$$

Pour γ non nul et λ_1, λ_2 de signe contraire, \mathcal{C}_φ est une hyperbole et il y a 0, 1 ou 2 points d'intersection en fonction du signe du discriminant δ .

Dans le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole, pour $\delta \geq 0$, en prenant l'un des points de $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_\varphi$ comme origine de \mathcal{D} , notre équation polynomiale s'écrit :

$$P(t) = 2(\lambda_1 x_0 \alpha + \lambda_2 y_0 \beta)t + (\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2)t^2 = 0$$

et il y a une unique solution si, et seulement si, $\lambda_1 x_0 \alpha + \lambda_2 y_0 \beta = 0$, ce qui signifie que \mathcal{D} est tangente à \mathcal{C}_φ en M_0 .

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 1.16.

Soit \mathcal{D} une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ dans \mathcal{R} avec $(u, v) \neq (0, 0)$.

1. Soit \mathcal{C}_p une parabole d'équation $x^2 = 2py$ dans \mathcal{R} .

- (a) Si $pu^2 < 2vw$, alors \mathcal{D} ne coupe pas \mathcal{C}_p .*
- (b) Si $pu^2 = 2vw$, alors \mathcal{D} coupe \mathcal{C}_p en un unique point et est tangente à \mathcal{C}_h en ce point.*
- (c) Si $pu^2 > 2vw$, alors \mathcal{D} coupe \mathcal{C}_p en deux points distincts et n'est pas tangente à \mathcal{C}_p .*

2. Soit C_ε une ellipse ou hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans \mathcal{R} avec $\varepsilon = 1$ pour une ellipse et $\varepsilon = -1$ pour une hyperbole.

- (a) Si $\varepsilon a^2 u^2 + b^2 v^2 < \varepsilon w^2$, alors \mathcal{D} ne coupe pas C_ε .
- (b) Si $\varepsilon a^2 u^2 + b^2 v^2 = \varepsilon w^2$, alors \mathcal{D} coupe C_ε en un unique point et est tangente à C_ε en ce point.
- (c) Si $\varepsilon a^2 u^2 + b^2 v^2 > \varepsilon w^2$, alors \mathcal{D} coupe C_ε en deux points distincts et n'est pas tangente à C_ε .

Preuve. La droite \mathcal{D} est dirigée par le vecteur $\vec{V} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ où $(\alpha, \beta) = (-v, u)$ et pour tout point $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, on a $ux_0 + vy_0 = -w$.

1. Pour une parabole, les calculs précédents donnent $\delta = 4p(pu^2 - 2vw)$, de sorte que pour $pu^2 < 2vw$, on a $\delta < 0$ et $\mathcal{D} \cap C_p = \emptyset$; pour $pu^2 = 2vw$, on a $\delta = 0$ et $\mathcal{D} \cap C_p = \{M_1\}$, la droite \mathcal{D} étant tangente à C_p en M_1 ; pour $pu^2 > 2vw$, on a $\delta > 0$ et $\mathcal{D} \cap C_p = \{M_2, M_3\}$ la droite \mathcal{D} n'étant pas tangente à C_p .
2. Pour une ellipse ou une hyperbole, les calculs précédents avec $\lambda_1 = \frac{1}{a^2}$, $\lambda_2 = \frac{\varepsilon}{b^2}$ et $\gamma = 1$ nous donnent $\delta = \frac{1}{a^2 b^2} (\varepsilon a^2 u^2 + b^2 v^2 - \varepsilon w^2)$, de sorte que pour $\varepsilon a^2 u^2 + b^2 v^2 < \varepsilon w^2$, on a $\delta < 0$ et $\mathcal{D} \cap C_\varepsilon = \emptyset$; pour $\varepsilon a^2 u^2 + b^2 v^2 = \varepsilon w^2$, on a $\delta = 0$ et $\mathcal{D} \cap C_\varepsilon = \{M_1\}$, la droite \mathcal{D} étant tangente à C_ε en M_1 ; pour $\varepsilon a^2 u^2 + b^2 v^2 > \varepsilon w^2$, on a $\delta > 0$ et $\mathcal{D} \cap C_\varepsilon = \{M_2, M_3\}$ la droite \mathcal{D} n'étant pas tangente à C_ε .

□

Corollaire 1.1. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de \mathcal{P} .

1. Soit C_p une parabole d'équation $x^2 = 2py$ dans \mathcal{R} .

- (a) Si $2py_0 > x_0^2$, il ne passe alors aucune tangente à C_p par M_0 .
- (b) Si $2py_0 = x_0^2$ (M_0 sur C_p), il passe alors une seule tangente à C_p par M_0 .
- (c) Si $2py_0 < x_0^2$, il passe alors exactement deux tangentes à C_p par M_0 .

2. Soit C_ε une ellipse ou hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans \mathcal{R} avec $\varepsilon = 1$ pour une ellipse, $\varepsilon = -1$ pour une hyperbole et $a > b > 0$.

- (a) Si $\varepsilon \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < \varepsilon$, il ne passe alors aucune tangente à C_ε par M_0 .
- (b) Si $\varepsilon \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \varepsilon$ (M_0 sur C_ε), il passe alors une seule tangente à C_ε par M_0 .
- (c) Si $\varepsilon \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > \varepsilon$, il passe alors exactement deux tangentes à C_ε par M_0 .

Preuve. Une droite \mathcal{D}_0 passant par M_0 a une équation de la forme :

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0$$

où $(u, v) \neq (0, 0)$.

1. Pour une parabole, le théorème précédent nous dit que la droite \mathcal{D}_0 est tangente à \mathcal{C}_p si, et seulement si, $pu^2 = -2v(ux_0 + vy_0)$, ce qui signifie que (u, v) est dans le cône isotrope de la forme quadratique non nulle Q_0 définie sur \mathbb{R}^2 par $Q_0(x, y) = px^2 + 2x_0xy + 2y_0y^2$. Le discriminant dans la base canonique de \mathbb{R}^2 de cette forme quadratique est :

$$\text{discr}(Q_0) = \begin{vmatrix} p & x_0 \\ x_0 & 2y_0 \end{vmatrix} = 2py_0 - x_0^2$$

Pour $2py_0 > x_0^2$, Q_0 est de signature $(2, 0)$ ou $(0, 2)$, donc de cône isotrope réduit à $\{(0, 0)\}$ et en conséquence, il ne passe pas de tangente à \mathcal{C}_p par M_0 puisque $(u, v) \neq (0, 0)$. Pour $2py_0 = x_0^2$, Q_0 est de signature $(1, 0)$ ou $(0, 1)$, donc son cône isotrope Δ est une droite vectorielle $\mathbb{R}(u_0, v_0)$ et il passe une seule tangente à \mathcal{C}_p par M_0 , à savoir $\mathcal{D}_0 = M_0 + \Delta^\perp$. Pour $2py_0 < x_0^2$, Q_0 est de signature $(1, 1)$, donc son cône isotrope est réunion de deux droites $\Delta_1 = \mathbb{R}(u_1, v_1)$ et $\Delta_2 = \mathbb{R}(u_2, v_2)$ et il passe deux tangentes à \mathcal{C}_p par M_0 , à savoir $M_0 + \Delta_1^\perp$ et $M_0 + \Delta_2^\perp$.

2. Pour une ellipse ou une hyperbole, la droite \mathcal{D}_0 est tangente à \mathcal{C}_ε si, et seulement si, $\varepsilon a^2 u^2 + b^2 v^2 = \varepsilon(ux_0 + vy_0)^2$, ce qui équivaut à :

$$(a^2 - x_0^2)u^2 - 2x_0y_0uv + (\varepsilon b^2 - y_0^2)v^2 = 0 \quad (1.6)$$

et signifie que (u, v) est dans le cône isotrope de la forme quadratique non nulle Q_0 définie sur \mathbb{R}^2 par $Q_0(x, y) = (a^2 - x_0^2)x^2 - 2x_0y_0xy + (\varepsilon b^2 - y_0^2)y^2$. Le discriminant dans la base canonique de \mathbb{R}^2 de cette forme quadratique est :

$$\text{discr}(Q_0) = \begin{vmatrix} a^2 - x_0^2 & -x_0y_0 \\ -x_0y_0 & \varepsilon b^2 - y_0^2 \end{vmatrix} = a^2b^2 \left(\varepsilon - \varepsilon \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \right)$$

Pour $\varepsilon \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < \varepsilon$, on a $\text{discr}(Q_0) > 0$ et Q est de signature $(2, 0)$ ou $(0, 2)$, donc de cône isotrope réduit à $\{(0, 0)\}$ et en conséquence, il ne passe pas de tangente à \mathcal{C}_ε par M_0 . Pour $\varepsilon \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \varepsilon$, on a $\text{discr}(Q_0) = 0$ et Q est de signature $(1, 0)$ ou $(0, 1)$, donc son cône isotrope Δ est une droite vectorielle et il passe une seule tangente à \mathcal{C}_ε par M_0 , à savoir $\mathcal{D}_0 = M_0 + \Delta^\perp$. Pour $\varepsilon \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > \varepsilon$, on a $\text{discr}(Q_0) < 0$ et Q est de signature $(1, 1)$, donc son cône isotrope est réunion de deux droites $\Delta_1 = \mathbb{R}(u_1, v_1)$ et $\Delta_2 = \mathbb{R}(u_2, v_2)$ et il passe deux tangentes à \mathcal{C}_ε par M_0 , à savoir $M_0 + \Delta_1^\perp$ et $M_0 + \Delta_2^\perp$.

□

Théorème 1.17.

1. Soit C_p une parabole d'équation $x^2 = 2py$ dans \mathcal{R} . Le lieu des points M du plan euclidien \mathcal{P} d'où l'on peut mener deux tangentes à C_p qui sont orthogonales est la directrice \mathcal{D} d'équation $y = -\frac{p}{2}$.
2. Soit C_ε une ellipse ou hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans \mathcal{R} avec $\varepsilon = 1$ pour une ellipse, $\varepsilon = -1$ pour une hyperbole et $a > b > 0$. Le lieu des points M du plan euclidien \mathcal{P} d'où l'on peut mener deux tangentes à C_ε qui sont orthogonales est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2 + \varepsilon b^2$. Dans le cas d'une ellipse, cet ensemble est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $a^2 + b^2$ et dans le cas d'une hyperbole, c'est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $a^2 - b^2$ (figure 1.13).

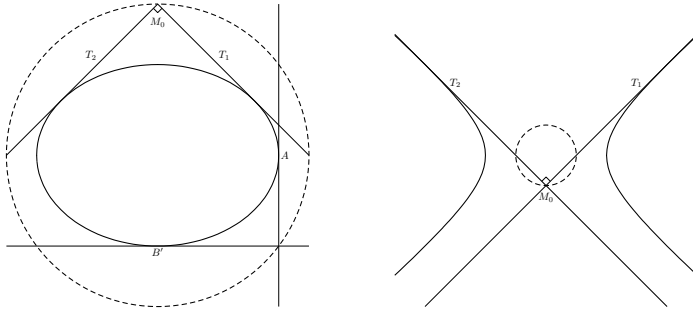


FIGURE 1.13 – Cercles orthoptiques

Preuve. En reprenant les notations de la démonstration du théorème précédent et en notant Λ le lieu orthoptique étudié, on a :

$$(M_0(x_0, y_0) \in \Lambda) \Leftrightarrow (Q_0^{-1}(0) = \mathbb{R}(u_1, v_1) \oplus \mathbb{R}(u_2, v_2) \text{ avec } u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0)$$

1. Dans le cas d'une parabole, pour $M_0 \in \Lambda$ il existe une base orthogonale $((u_1, v_1), (u_2, v_2))$ de \mathbb{R}^2 telle que :

$$\begin{cases} pu_1^2 + 2x_0 u_1 v_1 + 2y_0 v_1^2 = 0 \\ pu_2^2 + 2x_0 u_2 v_2 + 2y_0 v_2^2 = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Multipliant la première équation par $u_2 v_2$, la seconde par $u_1 v_1$ et faisant la différence des deux équations obtenues, on obtient :

$$(u_1 v_2 - u_2 v_1)(pu_1 u_2 - 2y_0 v_1 v_2) = 0$$

soit $pu_1 u_2 - 2y_0 v_1 v_2 = 0$ puisque $u_1 v_2 - u_2 v_1 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$, ce qui compte tenu de $u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0$ nous donne $(p + 2y_0)u_1 u_2 = 0$. Si $u_1 = 0$, l'égalité

$u_1u_2 + v_1v_2 = 0$ avec $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$ donne $v_2 = 0$ et la deuxième égalité de (1.7) donne u_2 , ce qui n'est pas possible. De même, on a $u_2 \neq 0$. On a donc $y_0 = -\frac{p}{2}$. Réciproquement, si $M_0 \in \mathcal{D}$, on a alors $2py_0 < 0 \leq x_0^2$ et il passe par M_0 exactement deux tangentes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 à \mathcal{C}_p , le cône isotrope de Q_0 étant $\vec{\mathcal{T}}_1^\perp \oplus \vec{\mathcal{T}}_2^\perp$ où $\vec{\mathcal{T}}_k^\perp = \mathbb{R}(u_k, v_k)$ pour $k = 1, 2$, les vecteurs indépendants (u_k, v_k) vérifiant les égalités (1.7) qui nous donnent encore $pu_1u_2 - 2y_0v_1v_2 = 0$, ce qui compte tenu de $y_0 = -\frac{p}{2}$, s'écrit $p(u_1u_2 + v_1v_2) = 0$ et nous dit que les tangentes $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sont orthogonales. En conclusion, on a bien l'égalité $\Delta = \mathcal{D}$.

2. Dans le cas d'une ellipse ou d'une hyperbole, pour $M_0 \in \Lambda$, il existe une base orthogonale $((u_1, v_1), (u_2, v_2))$ de \mathbb{R}^2 telle que :

$$\begin{cases} (a^2 - x_0^2)u_1^2 - 2x_0y_0u_1v_1 + (\varepsilon b^2 - y_0^2)v_1^2 = 0 \\ (a^2 - x_0^2)u_2^2 - 2x_0y_0u_2v_2 + (\varepsilon b^2 - y_0^2)v_2^2 = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Multipliant la première équation par u_2v_2 , la seconde par u_1v_1 et faisant la différence des deux équations obtenues, on obtient :

$$(u_1v_2 - u_2v_1)((a^2 - x_0^2)u_1u_2 - (\varepsilon b^2 - y_0^2)v_1v_2) = 0$$

soit $(a^2 - x_0^2)u_1u_2 - (\varepsilon b^2 - y_0^2)v_1v_2 = 0$, ce qui compte tenu de $u_1u_2 + v_1v_2 = 0$ (orthogonalité de (u_1, v_1) et (u_2, v_2)) nous donne $((a^2 - x_0^2) + (\varepsilon b^2 - y_0^2))u_1u_2 = 0$. Si $u_1 = 0$, l'égalité $u_1u_2 + v_1v_2 = v_1v_2 = 0$ avec $u_1v_2 - u_2v_1 = -u_2v_1 \neq 0$ donne $v_2 = 0$ et les égalités (1.8) deviennent $(\varepsilon b^2 - y_0^2)v_1^2 = (a^2 - x_0^2)u_2^2 = 0$ avec u_2 et v_1 non nuls, ce qui donne $\varepsilon b^2 - y_0^2 = a^2 - x_0^2 = 0$, donc $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + \varepsilon b^2$. De même $u_2 = 0$ conduit à $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + \varepsilon b^2$. Enfin pour u_1 et u_2 non nuls, on a $(a^2 - x_0^2) + (\varepsilon b^2 - y_0^2) = 0$, soit $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + \varepsilon b^2$. L'ensemble Λ est donc contenu dans $\Gamma = \{M_0 \in \mathcal{P} \mid x_0^2 + y_0^2 = a^2 + \varepsilon b^2\}$. Réciproquement pour tout $M_0 \in \Gamma$, on a :

$$\varepsilon \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \varepsilon \frac{a^2 + \varepsilon b^2 - y_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \varepsilon + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2 - \varepsilon b^2}{a^2 b^2} y_0^2 > \varepsilon$$

et le théorème précédent nous dit qu'il passe par M_0 exactement deux tangentes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 à \mathcal{C}_ε , le cône isotrope de Q_0 étant $\vec{\mathcal{T}}_1^\perp \oplus \vec{\mathcal{T}}_2^\perp$ où $\vec{\mathcal{T}}_k^\perp = \mathbb{R}(u_k, v_k)$ pour $k = 1, 2$, les vecteurs indépendants (u_k, v_k) vérifiant les égalités (1.8) qui nous donnent encore $(a^2 - x_0^2)u_1u_2 - (\varepsilon b^2 - y_0^2)v_1v_2 = 0$, ce qui compte tenu de $\varepsilon b^2 - y_0^2 = x_0^2 - a^2$, s'écrit $(a^2 - x_0^2)(u_1u_2 + v_1v_2) = 0$. Pour $x_0^2 = a^2$, on a $y_0 = \varepsilon b^2$ ($M_0(\pm a, \pm b)$ est sommet d'un rectangle) et le cône isotrope de $Q_0(x, y) = -2x_0y_0xy$ est $\mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j}$, donc les tangentes $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sont orthogonales. Pour $x_0^2 \neq a^2$, on obtient $u_1u_2 + v_1v_2 = 0$, ce qui nous dit que les tangentes $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sont orthogonales. En conclusion, on a bien l'égalité $\Delta = \Gamma$. □

Dans le cas d'une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, le lieu orthoptique est vide pour $a < b$. En effet, la démonstration de l'inclusion $\Delta \subset \Gamma$ est valable dans ce cas de figure avec $\Gamma = \emptyset$.

1.7 Cocyclicité de 4 points sur une conique

On donne ici des conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points d'une parabole, d'une ellipse ou d'une hyperbole soient cocycliques.

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Théorème 1.18.

Soient \mathcal{C}_p une parabole d'équation cartésienne $x^2 = 2py$ dans \mathcal{R} et $(M_k(x_k, y_k))_{1 \leq k \leq 4}$ une suite de quatre points distincts de cette parabole.

Ces points sont cocycliques si, et seulement si, $\sum_{k=1}^4 x_k = 0$.

Preuve. Dire que ces points de \mathcal{C}_p sont cocycliques équivaut à dire qu'il existe un point $\Omega(x_0, y_0)$ de \mathcal{P} et un réel $R > 0$ tels que :

$$\begin{cases} x_k^2 = 2py_k \\ (x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2 = R^2 \end{cases} \quad (1 \leq k \leq 4)$$

donc les réels x_k , pour k compris entre 1 et 4, sont racines du polynôme 4 :

$$Q(X) = (X - x_0)^2 + \left(\frac{1}{2p} X^2 - y_0 \right)^2 - R^2$$

soit de $P(X) = X^4 + 4p(p - y_0)X^2 - 8p^2x_0X + 4p^2(x_0^2 + y_0^2 - R^2)$. La somme des racines de P est alors $\sum_{k=1}^4 x_k = 0$ (le coefficient de X^3 est nul).

Réciproquement, soit $(M_k(x_k, y_k))_{1 \leq k \leq 4}$ une suite de quatre points distincts sur la parabole \mathcal{C}_p telle que $\sum_{k=1}^4 x_k = 0$. Le cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle de sommets M_1, M_2, M_3 coupe Γ en un point $M'_4(x'_4, y'_4)$ (éventuellement égal à M_1, M_2 ou M_3) et ce qui précède nous dit que l'on a alors $\sum_{k=1}^3 x_k + x'_4 = 0$, donc $x_4 = x'_4$, $y_4 = y'_4$ et les M_k , pour k compris entre 1 et 4 sont cocycliques. \square

On peut déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle \mathcal{C} passant par les points de la parabole \mathcal{C}_p en procédant comme suit. Si $(M_k(x_k, y_k))_{1 \leq k \leq 4}$ est telle que

$\sum_{k=1}^4 x_k = 0$, on définit les réels x_0 et y_0 par :

$$\begin{cases} \sum_{1 \leq k < \ell \leq 4} x_k x_\ell = 4p(p - x_0) \\ \sum_{1 \leq k < \ell < p \leq 4} x_k x_\ell x_p = 8p^2 y_0 \end{cases}$$

et le réel R par $\prod_{k=1}^4 x_k = 4p^2(x_0^2 + y_0^2 - R^2)$.

L'existence du cercle \mathcal{C} nous assure l'existence de R , ce que l'on peut vérifier en remarquant que les conditions imposées nous disent que les x_k sont racines du polynôme P et $P(x_1) = 0$ équivaut à :

$$Q(x_1) = (x_1 - x_0)^2 + \left(\frac{1}{2p}x_1^2 - y_0\right)^2 - R^2 = 0$$

soit à $R^2 = (x_1 - x_0)^2 + \left(\frac{1}{2p}x_1^2 - y_0\right)^2 > 0$ ($R = 0$ donnerait $x_1 = x_0$ et $y_0 = \frac{1}{2p}x_1^2 = \frac{1}{2p}x_0^2$, soit $\Omega \in \mathcal{C}_p$, ce qui n'est pas).

Théorème 1.19. (Joachimsthal)

Soient $a > b > 0$ deux réels, \mathcal{C}_e une ellipse d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases} \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

dans \mathcal{R} et $(M_k)_{1 \leq k \leq 4}$ une suite de quatre points distincts de cette ellipse de paramètres respectifs $(t_k)_{1 \leq k \leq 4} \in [0, 2\pi[$. Ces points sont cocycliques si, et seulement si, $\sum_{k=1}^4 t_k \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Preuve. Dire que ces points de \mathcal{C}_e sont cocycliques équivaut à dire qu'il existe un point $\Omega(x_0, y_0)$ de \mathcal{P} et un réel $R > 0$ tels que :

$$(a \cos(t_k) - x_0)^2 + (b \sin(t_k) - y_0)^2 = R^2 \quad (1 \leq k \leq 4)$$

ce qui revient à dire que les t_k , pour k compris entre 1 et 4, sont solutions distinctes dans $[0, 2\pi[$ de l'équation :

$$a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t) - 2ax_0 \cos(t) - 2by_0 \sin(t) + \gamma = 0$$

où $\gamma = x_0^2 + y_0^2 - R^2$. En notant $z = e^{it}$ dans \mathbb{C} , cette dernière équation devient :

$$\frac{a^2}{4} \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{b^2}{4} \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 - ax_0 \left(z + \frac{1}{z}\right) + iby_0 \left(z - \frac{1}{z}\right) + \gamma = 0$$

ou encore $a^2(z^2 + 1)^2 - b^2(z^2 - 1)^2 - 4ax_0(z^3 + z) + 4iby_0(z^3 - z) + 4\gamma z^2 = 0$, soit $P(z) = 0$ où :

$$P(X) = X^4 - 4 \frac{ax_0 - iby_0}{a^2 - b^2} X^3 + 2 \frac{a^2 + b^2 + 2\gamma}{a^2 - b^2} X^2 - 4 \frac{ax_0 + iby_0}{a^2 - b^2} X + 1$$

(on a $a^2 - b^2 > 0$). En conclusion les $(z_k)_{1 \leq k \leq 4} = (e^{it_k})_{1 \leq k \leq 4}$ sont les 4 racines complexes distinctes de ce polynôme de degré 4, donc $\prod_{k=1}^4 z_k = \exp\left(i \sum_{k=1}^4 t_k\right) = 1$,

ce qui est encore équivalent à $\sum_{k=1}^4 t_k \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Réciproquement, soit $(M_k)_{1 \leq k \leq 4}$ une suite de quatre points distincts sur l'ellipse \mathcal{C}_e de paramètres respectifs $(t_k)_{1 \leq k \leq 4} \in [0, 2\pi[$ telle que $\sum_{k=1}^4 t_k \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Le cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle de sommets M_1, M_2, M_3 coupe \mathcal{C}_e en un point M'_4 (éventuellement égal à M_1, M_2 ou M_3) de paramètre t'_4 et ce qui précède nous dit que l'on a alors $\sum_{k=1}^3 t_k + t'_4 \equiv 0 \pmod{2\pi}$, donc $t_4 \equiv t'_4 \pmod{2\pi}$ et les M_k , pour k compris entre 1 et 4 sont cocycliques.

On peut aussi procéder comme suit. Dans le plan complexe, \mathcal{C}_e est paramétrée par $\zeta(t) = a \cos(t) + ib \sin(t) = \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{b}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)$ où z décrit le cercle unité et l'intersection de \mathcal{C}_e avec un cercle \mathcal{C} de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ et de rayon $R > 0$ est définie par l'équation $|\zeta(t) - z_0|^2 = R^2$, soit l'équation :

$$\left| \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{b}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) - z_0 \right|^2 = R^2$$

où $|z| = 1$, ou encore en tenant compte de $\frac{1}{z} = \bar{z}$:

$$\left(a \left(z + \frac{1}{z} \right) + b \left(z - \frac{1}{z} \right) - 2z_0 \right) \left(a \left(z + \frac{1}{z} \right) - b \left(z - \frac{1}{z} \right) - 2\bar{z}_0 \right) = 4R^2$$

ce qui donne l'équation polynomiale de degré 4 :

$$(a(z^2 + 1) + b(z^2 - 1) - 2z_0 z^2) (a(z^2 + 1) - b(z^2 - 1) - 2\bar{z}_0 z^2) - 4R^2 z^2 = 0$$

En notant $Q(z) = 0$ cette équation, le produit des 4 racines de Q est $\frac{Q(0)}{a_4} = 1$, ce

qui nous donne la condition nécessaire $\prod_{k=1}^4 z_k = \exp \left(i \sum_{k=1}^4 t_k \right) = 1$ et justifie aussi l'existence de M'_4 pour la condition suffisante. \square

Théorème 1.20.

Soient $a > b > 0$ deux réels, \mathcal{C}_h une branche d'hyperbole d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch}(t) \\ y = b \operatorname{sh}(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

dans \mathcal{R} et $(M_k)_{1 \leq k \leq 4}$ une suite de quatre points distincts de cette branche de paramètres respectifs $(t_k)_{1 \leq k \leq 4}$. Ces points sont cocycliques si, et seulement

$$\text{si, } \sum_{k=1}^4 t_k = 0.$$

Preuve. Dire que ces points de \mathcal{C}_h sont cocycliques équivaut à dire qu'il existe un point $\Omega(x_0, y_0)$ de \mathcal{P} et un réel $R > 0$ tels que :

$$(a \operatorname{ch}(t_k) - x_0)^2 + (b \operatorname{sh}(t_k) - y_0)^2 = R^2 \quad (1 \leq k \leq 4)$$

ce qui revient à dire que les t_k , pour k compris entre 1 et 4, sont solutions distinctes dans \mathbb{R} de l'équation :

$$a^2 \operatorname{ch}^2(t) + b^2 \operatorname{sh}^2(t) - 2ax_0 \operatorname{ch}(t) - 2by_0 \operatorname{sh}(t) + \gamma = 0$$

où $\gamma = x_0^2 + y_0^2 - R^2$. En notant $z = e^t$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$, cette dernière équation devient :

$$\frac{a^2}{4} \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \frac{b^2}{4} \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 - ax_0 \left(z + \frac{1}{z}\right) - by_0 \left(z - \frac{1}{z}\right) + \gamma = 0$$

ou encore $a^2(z^2 + 1)^2 + b^2(z^2 - 1)^2 - 4ax_0(z^3 + z) - 4by_0(z^3 - z) + 4\gamma z^2 = 0$, soit $P(z) = 0$ où :

$$P(X) = X^4 - 4\frac{ax_0 + by_0}{a^2 + b^2}X^3 + 2\frac{a^2 - b^2 + 2\gamma}{a^2 + b^2}X^2 - 4\frac{ax_0 + by_0}{a^2 - b^2}X + 1$$

En conclusion les $(z_k)_{1 \leq k \leq 4} = (e^{t_k})_{1 \leq k \leq 4}$ sont les 4 racines distinctes dans $\mathbb{R}^{+,*}$ de ce polynôme de degré 4, donc $\prod_{k=1}^4 z_k = \exp\left(\sum_{k=1}^4 t_k\right) = 1$, ce qui est encore

équivalent à $\sum_{k=1}^4 t_k = 0$. Réciproquement, soit $(M_k)_{1 \leq k \leq 4}$ une suite de quatre points

distincts sur \mathcal{C}_h de paramètres respectifs $(t_k)_{1 \leq k \leq 4}$ dans \mathbb{R}^4 telle que $\sum_{k=1}^4 t_k = 0$.

Le cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle de sommets M_1, M_2, M_3 coupe \mathcal{C}_h en un point M'_4 (éventuellement égal à M_1, M_2 ou M_3) de paramètre t'_4 et ce qui précède nous

dit que l'on a alors $\sum_{k=1}^3 t_k + t'_4 = 0$, donc $t_4 = t'_4$ et les M_k , pour k compris entre 1

et 4 sont cocycliques. □

1.8 Exercices

Sauf précision contraire, \mathcal{P} [resp. \mathcal{E}] est un plan [resp. un espace] affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ [resp. $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$] et on note $M(x, y)$ [resp. $M(x, y, z)$] un point M de coordonnées (x, y) [resp. (x, y, z)] dans ce repère.

Exercice 1.1. Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq 5}$ une suite de cinq points dans \mathcal{P} telle que trois quelconques de ces points ne soient pas alignés. Montrer qu'il passe une unique conique propre par ces cinq points.

Solution. On se place dans le repère affine $(A_1, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})$. Si \mathcal{C} est une conique d'équation $\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ dans ce repère passant par les cinq points avec $(ab, c) \neq (0, 0, 0)$, on a alors $f = \varphi(0, 0) = 0$ ($A_1(0, 0) \in \mathcal{C}$), $a + d = \varphi(1, 0) = 0$ ($A_2(1, 0) \in \mathcal{C}$) et $c + e = \varphi(0, 1) = 0$ ($A_3(0, 1) \in \mathcal{C}$), donc $\varphi(x, y) = ax(x - 1) + 2bxy + cy(y - 1)$ et les conditions $A_k(\alpha_k, \beta_k) \in \mathcal{C}$ pour $k \in \{4, 5\}$ se traduisent par le système linéaire de deux équations aux trois inconnues a, b, c :

$$\begin{cases} a\alpha_4(\alpha_4 - 1) + 2b\alpha_4\beta_4 + c\beta_4(\beta_4 - 1) = 0 \\ a\alpha_5(\alpha_5 - 1) + 2b\alpha_5\beta_5 + c\beta_5(\beta_5 - 1) = 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que le vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ est dans le noyau de l'application

linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha_4(\alpha_4 - 1) & 2\alpha_4\beta_4 & \beta_4(\beta_4 - 1) \\ \alpha_5(\alpha_5 - 1) & 2\alpha_5\beta_5 & \beta_5(\beta_5 - 1) \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques. Les points $A_1, A_3, A_k, A_1, A_2, A_k, A_1, A_2, A_5$ pour $k \in \{4, 5\}$ et A_2, A_4, A_5 n'étant pas alignés, on a :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha_4(\alpha_4 - 1) & 2\alpha_4\beta_4 \\ \alpha_5(\alpha_5 - 1) & 2\alpha_5\beta_5 \end{vmatrix} &= 2\alpha_4\alpha_5 \begin{vmatrix} \alpha_4 - 1 & \beta_4 \\ \alpha_5 - 1 & \beta_5 \end{vmatrix} = 2\alpha_4\alpha_5 \begin{vmatrix} \alpha_4 - 1 & \alpha_5 - 1 \\ \beta_4 & \beta_5 \end{vmatrix} \\ &= 2\alpha_4\alpha_5 \det(\overrightarrow{A_2A_4}, \overrightarrow{A_2A_5}) \neq 0 \end{aligned}$$

donc A est de rang 2 et $\ker(f)$ est une droite vectorielle, ce qui nous assure l'existence et l'unicité d'une conique passant par les 5 points. Si cette conique est dégénérée, elle est alors réunion de deux droites et 3 points parmi les 5 seraient alignés, ce qui n'est pas. \diamond

Exercice 1.2. Étant donné un réel $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et une droite \mathcal{D} passant par un point $\Omega(a, b, c)$ dirigée par un vecteur unitaire $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$, le cône de révolution sommet Ω , d'axe \mathcal{D} et d'angle θ est l'ensemble :

$$\Lambda = \left\{ M \in \mathcal{E} \mid \left| \overrightarrow{\Omega M} \cdot \vec{v} \right| = \Omega M \cos(\theta) \right\}.$$

1. Donner une équation implicite du cône Λ dans le repère \mathcal{R} .
2. Décrire l'intersection du cône Λ avec un plan \mathcal{P} d'équation $z = 0$ dans le repère \mathcal{R} .

Solution.

1. Un point $M(x, y, z)$ de l'espace \mathcal{E} appartient au cône Λ si, et seulement si :

$$(\alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c))^2 = \cos^2(\theta) \left((x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \right)$$

2. Un point $M(x, y, 0)$ du plan \mathcal{P} appartient au cône Λ si, et seulement si :

$$(\alpha(x - a) + \beta(y - b) - \gamma c)^2 = \cos^2(\theta) \left((x - a)^2 + (y - b)^2 + c^2 \right)$$

ce qui équivaut à $q(x, y) + 2\ell(x, y) + \delta = 0$, où q est la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^2 par $q(x, y) = (\alpha^2 - \cos^2(\theta))x^2 + 2\alpha\beta xy + (\beta^2 - \cos^2(\theta))y^2$, ℓ la forme linéaire définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\ell(x, y) = (a(\cos^2\theta - \alpha^2) - (b\beta + c\gamma)\alpha)x + (b(\cos^2\theta - \beta^2) - (a\alpha + c\gamma)\beta)y$$

et $\delta = (\alpha^2 - \cos^2(\theta))a^2 + (\beta^2 - \cos^2(\theta))b^2 + (\gamma^2 - \cos^2(\theta))c^2$. L'intersection $\Lambda \cap \mathcal{P}$ est donc une conique du plan \mathcal{P} . Le discriminant dans la base (\vec{i}, \vec{j}) de q est :

$$\begin{aligned} \text{discr}(q) &= \begin{vmatrix} \alpha^2 - \cos^2(\theta) & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 - \cos^2(\theta) \end{vmatrix} \\ &= (\alpha^2 - \cos^2(\theta))(\beta^2 - \cos^2(\theta)) - \alpha^2\beta^2 \\ &= \cos^2(\theta)(\cos^2(\theta) - \alpha^2 - \beta^2) \end{aligned}$$

Comme $0 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq \|\vec{v}\|^2 = 1$, il existe un unique réel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\alpha^2 + \beta^2 = \cos^2(\varphi)$ (ce qui peut aussi se voir en passant en coordonnées sphérique : $\alpha = \cos(\varphi)\cos(\omega)$, $\beta = \cos(\varphi)\sin(\omega)$, $\gamma = \sin(\varphi)$), de sorte que $\text{discr}(q) = \cos^2(\theta)(\cos^2(\theta) - \cos^2(\varphi))$ avec $\cos(\theta) \in]0, 1[$.

- (a) Pour $\varphi = \theta$, la forme quadratique q est dégénérée et $\Lambda \cap \mathcal{P}$ est soit vide, soit une droite, soit la réunion de deux droites parallèles, soit une parabole.
- (b) Pour $0 \leq \varphi < \theta < \frac{\pi}{2}$, la forme quadratique q est non dégénérée et $\Lambda \cap \mathcal{P}$ est une ellipse, un point ou l'ensemble vide.
- (c) Pour $0 < \theta < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, la forme quadratique q est non dégénérée et $\Lambda \cap \mathcal{P}$ est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.

◇

Exercice 1.3. On désigne par \mathcal{Q} la quadrique définie par :

$$\mathcal{Q} = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E} \mid f(x, y, z) = 0\}$$

$$\text{où } f(x, y, z) = x^2 - 3xy + y^2 + x - y - \frac{1}{2}z^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}z.$$

1. Montrer que \mathcal{Q} est un cône et préciser son sommet.
2. Préciser la nature de la conique \mathcal{C} intersection de \mathcal{Q} avec le plan d'équation $z = 0$ dans le repère \mathcal{R} .

Solution. On utilise l'écriture $f = q + \ell + \beta$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est la matrice de la forme quadratique q dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On a $\det(A) = \frac{5}{8}$, donc q est non dégénérée et \mathcal{Q} a un unique centre défini par :

$$2x - 3y = -1; \quad -3x + 2y = 1; \quad z = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

ce qui nous donne le point $\Omega \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5} \right)$ qui est sur la quadrique. Les valeurs propres de A sont $-\frac{1}{2}$ qui est double de plan propre $\mathcal{P} = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$, $\vec{e}_2 = \vec{k}$ et $\frac{5}{2}$ de droite propre $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{e}_3)$ où $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$. La signature de q étant $(1, 2)$, on en déduit que \mathcal{Q} est le cône de révolution d'équation $x_1^2 + x_2^2 = 5x_3^2$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, où :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ \sqrt{2}y \\ x-y \end{pmatrix}$$

La droite \mathcal{D} est l'axe du cône.

2. La conique $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}$ a pour équation $x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}_{\mathcal{P}} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan \mathcal{P} . Cette conique est à centre puisque la forme quadratique q de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ est non dégénérée. Son centre est solution du système linéaire :

$$2x - 3y = -1; \quad -3x + 2y = 1$$

soit $(x_0, y_0) = \frac{1}{5}(-1, 1)$. Le changement de variables $X = x + \frac{1}{5}$, $Y = y - \frac{1}{5}$ nous donne l'équation $X^2 - 3XY + Y^2 = \frac{1}{5}$, soit $\left(X - \frac{3}{2}Y\right)^2 - \frac{5}{4}Y^2 = \frac{1}{5}$ et \mathcal{C} est une hyperbole.

◇

Exercice 1.4. En désignant par \mathcal{D} la droite d'équation $x+y=0$ et par F le point de coordonnées $(2, 2)$ dans le plan \mathcal{P} , donner une équation implicite de :

1. l'ellipse \mathcal{C}_e d'excentricité $e = \frac{1}{2}$, de directrice \mathcal{D} et de foyer F en précisant ses sommets et son centre;
2. l'hyperbole \mathcal{C}_h d'excentricité $e = 2$, de directrice \mathcal{D} et de foyer F en précisant ses sommets et son centre;
3. la parabole \mathcal{C}_p de directrice \mathcal{D} et de foyer F en précisant son sommet.

Solution. La droite \mathcal{D} est dirigée par $\vec{v} = (-1, 1)$ et la projection orthogonale $H(x_H, y_H)$ d'un point $M(x, y)$ de \mathcal{P} sur \mathcal{D} est définie par $y_H = -x_H = \frac{y-x}{2}$. Dans les trois cas, l'axe focal $\Delta = F + \vec{\mathcal{D}}$ de la conique a pour équation $y = x$ et la condition $MF = eMH$ se traduit par $(x-2)^2 + (y-2)^2 = \frac{e^2}{2}(x+y)^2$ ou encore $(2-e^2)x^2 + (2-e^2)y^2 - 2e^2xy - 8(x+y) + 16 = 0$.

1. Une équation implicite de \mathcal{C}_e est $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 32(x + y) + 64 = 0$. Les sommets sont les points d'intersection de \mathcal{C}_e avec Δ , ce qui donne l'équation $3x^2 - 16x + 16 = 0$ de racines $\frac{4}{3}$ et 4 et les sommets $A(4, 4)$ et $A'(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, le centre est le milieu de $[AA']$, soit $\Omega(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$, le demi axe est $a = OA = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ et dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, où $\vec{e}_1 = \frac{1}{OA}\vec{\Omega A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$, une équation de \mathcal{C}_h est $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ où $b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, soit $9X^2 + 12Y^2 = 32$ (figure 1.14).
2. Une équation implicite de \mathcal{C}_h est $x^2 + y^2 + 4xy + 4(x + y) - 8 = 0$. Les sommets sont les points d'intersection de \mathcal{C}_h avec Δ , ce qui donne l'équation $3x^2 + 4x - 4 = 0$ de racines -2 et $\frac{2}{3}$ et les sommets $A(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ et $A'(-2, -2)$, le centre est le milieu de $[AA']$, soit $\Omega(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, le demi axe est $a = \Omega A = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ et dans le repère $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, où $\vec{e}_1 = \frac{1}{OA}\vec{\Omega A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$, une équation de \mathcal{C}_h est $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ où $b = a\sqrt{e^2 - 1} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, soit $9X^2 - 3Y^2 = 32$ (figure 1.14).
3. Une équation implicite de \mathcal{C}_p est $(x - y)^2 - 8(x + y) + 16 = 0$. Le sommet est le point d'intersection $A(1, 1)$ de \mathcal{C}_p avec Δ et dans le repère $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, où $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$, une équation de \mathcal{C}_p est $X^2 = 8Y$ (figure 1.14).

◇

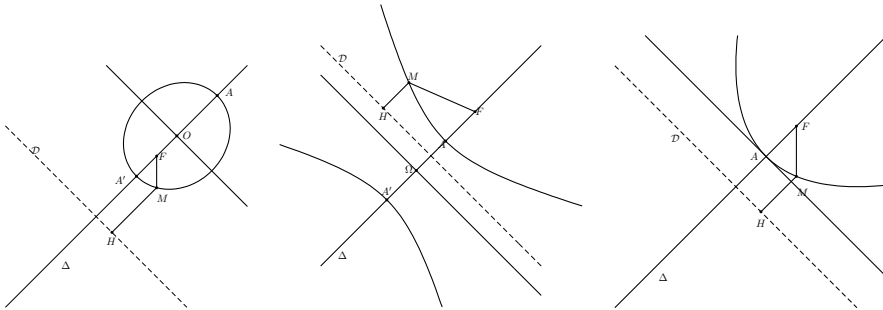


FIGURE 1.14 – Ellipse, hyperbole, parabole

Exercice 1.5. Soient $\alpha < \beta$ deux réels. Pour tout réel $t \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}$, on désigne par \mathcal{C}_t la courbe algébrique d'équation $\frac{x^2}{\beta-t} + \frac{y^2}{\alpha-t} = 1$.

1. Montrer que \mathcal{C}_t est soit vide, soit une ellipse ou une hyperbole dont on précisera les caractéristiques.
2. Montrer que, pour $s \neq t$ dans $\mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}$ tels que l'intersection $\mathcal{C}_s \cap \mathcal{C}_t$ soit non vide, les deux coniques sont de nature différente et les tangentes à \mathcal{C}_s et \mathcal{C}_t en chaque point d'intersection sont orthogonales (on dit que les coniques sont orthogonales en ces points).

Solution.


1. Pour $t > \beta$, on a $\alpha - t < 0$ et $\beta - t < 0$, donc $\mathcal{C}_t = \emptyset$. Pour $t \in]\alpha, \beta[$, on a $\alpha - t = -b^2 < 0$, $\beta - t = a^2 > 0$, donc \mathcal{C}_t est une hyperbole de directrice la droite \mathcal{D} d'équation $x = \frac{\beta-t}{\sqrt{\beta-\alpha}}$, de foyer $F(\sqrt{\beta-\alpha}, 0)$ et d'excentricité $e = \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta-t}}$. Pour $t < \alpha$, on a $\alpha - t = b^2 > 0$, $\beta - t = a^2 > 0$, donc \mathcal{C}_t est une ellipse de directrice la droite \mathcal{D} d'équation $x = \frac{\beta-t}{\sqrt{\beta-\alpha}}$, de foyer $F(\sqrt{\beta-\alpha}, 0)$ et d'excentricité $e = \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta-t}}$. Lorsque \mathcal{C}_t est non vide, le deuxième foyer est $F'(-\sqrt{\beta-\alpha}, 0)$ et ces deux foyers sont indépendants de t .
2. L'intersection $\mathcal{C}_s \cap \mathcal{C}_t$ étant supposée non vide, on a $s < \beta$ et $t < \beta$. Si \mathcal{C}_s et \mathcal{C}_t sont deux hyperboles (i.e. s, t dans $] \alpha, \beta[$) [resp. deux ellipses (i.e. s, t dans $] -\infty, \alpha[$), on a alors pour tout point $M_0 \in \mathcal{C}_s \cap \mathcal{C}_t$, $|M_0F - M_0F'| = 2\sqrt{\beta-s} = 2\sqrt{\beta-t}$ [resp. $M_0F + M_0F' = 2\sqrt{\beta-s} = 2\sqrt{\beta-t}$] et en conséquence $s = t$, ce qui n'est pas. Les deux coniques sont donc de nature différente. Si \mathcal{C}_s est une ellipse et \mathcal{C}_t une hyperbole (part exemple), alors la tangente à \mathcal{C}_s [resp. à \mathcal{C}_t] en M_0 est la bissectrice extérieure [resp. intérieure] issue de M_0 du triangle M_0FF' (les foyers ne dépendent pas de t), donc ces tangentes sont orthogonales. On peut aussi procéder de façon calculatoire comme suit. Une équation de la tangente à \mathcal{C}_s [resp. à \mathcal{C}_t] en $M_0 \in \mathcal{C}_s \cap \mathcal{C}_t$ a pour équation $\frac{x_0}{\beta-s}x + \frac{y_0}{\alpha-s}y = 1$ [resp. $\frac{x_0}{\beta-t}x + \frac{y_0}{\alpha-t}y = 1$] et on a :

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{\beta-s} \frac{x_0}{\beta-t} + \frac{y_0}{\alpha-s} \frac{y_0}{\alpha-t} &= \frac{x_0^2}{(\beta-s)(\beta-t)} + \frac{y_0^2}{(\alpha-s)(\alpha-t)} \\ &= \frac{x_0^2}{s-t} \left(\frac{1}{\beta-s} - \frac{1}{\beta-t} \right) + \frac{y_0^2}{s-t} \left(\frac{1}{\alpha-s} - \frac{1}{\alpha-t} \right) \\ &= \frac{1}{s-t} \left(\frac{x_0^2}{\beta-s} + \frac{y_0^2}{\alpha-s} - \left(\frac{x_0^2}{\beta-t} + \frac{y_0^2}{\alpha-t} \right) \right) \\ &= \frac{1}{s-t} (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

ce qui traduit l'orthogonalité des deux tangentes.



Exercice 1.6. Soient A, B deux points distincts du plan \mathcal{P} et I le milieu du segment $[A, B]$. Montrer que l'ensemble des points M de \mathcal{P} tels que $MI^2 = MA \cdot MB$ est une hyperbole dont on précisera les caractéristiques.

Solution. Dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (I, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{IA} \vec{IA}$, on a $A(\alpha, 0)$ et $B(-\alpha, 0)$ où $\alpha = \frac{AB}{2}$. La condition $MI^2 = MA \cdot MB$ se traduit par $(x^2 + y^2)^2 = ((x - \alpha)^2 + y^2)((x + \alpha)^2 + y^2)$ et équivaut à $\frac{2}{\alpha^2}x^2 - \frac{2}{\alpha^2}y^2 = 1$, ce qui définit une hyperbole équilatère de foyer $F\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}, 0\right)$, de directrice la droite \mathcal{D} d'équation $x = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ et d'excentricité $e = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2}}$. 

Exercice 1.7. Soient F, F' deux points distincts du plan \mathcal{P} , a un réel strictement positif, O le milieu du segment $[F, F']$ et $c = OF$. Montrer que l'ellipse de foyers F, F' et de grand axe $2a$ est aussi l'ensemble des points M de \mathcal{P} tels que $MF \cdot MF' + OM^2 = 2a^2 - c^2$.

Solution. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$, on a :

$$\begin{aligned} OM^2 &= \left\| \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM} \right\|^2 = OF^2 + 2\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{FM} + MF^2 \\ &= \left\| \overrightarrow{OF'} + \overrightarrow{F'M} \right\|^2 = (OF')^2 + 2\overrightarrow{OF'} \cdot \overrightarrow{F'M} + (MF')^2 \end{aligned}$$

avec $OF^2 = (OF')^2 = c^2$ et :


$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{OF'} \cdot \overrightarrow{F'M} = \overrightarrow{OF} \cdot (\overrightarrow{FM} - \overrightarrow{F'M}) = \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{FF'} = -2OF^2 = -2c^2$$

ce qui nous donne en additionnant les deux premières égalités :

$$2OM^2 = 2c^2 - 4c^2 + MF^2 + (MF')^2 = MF^2 + (MF')^2 - 2c^2$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} (MF \cdot MF' + OM^2 &= 2a^2 - c^2) \\ \Leftrightarrow (2MF \cdot MF' + MF^2 + (MF')^2 - 2c^2 &= 4a^2 - 2c^2) \\ \Leftrightarrow ((MF + MF')^2 &= 4a^2) \Leftrightarrow (MF + MF' = 2a) \end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé. 

Exercice 1.8. Soit \mathcal{C}_e une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans \mathcal{R} avec $0 < b < a$.

1. Montrer que le produit des distances des foyers de \mathcal{C}_e à une tangente quelconque est constant égal à b^2 (le carré du demi petit axe).
2. Soient M, N deux points de \mathcal{C}_e tels que (OM) soit orthogonale à (ON) . Montrer que la quantité $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$ est constante.
3. Montrer que la droite (MN) est tangente au cercle de centre O et de rayon $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (figure 1.15).

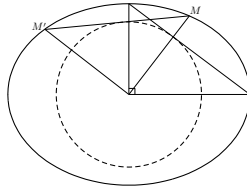


FIGURE 1.15 –

Solution.

1. Dans le repère \mathcal{R} , on a $F(x_F, 0)$, $F'(-x_F, 0)$ avec $x_F = ea = \sqrt{a^2 - b^2}$, la tangente T_0 à \mathcal{C}_e en $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$ et la distance d'un point M à T_0 est donnée par :

$$d(M, T_0) = \frac{\left| \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - 1 \right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{|b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}}$$

donc :

$$\begin{aligned} d(F, T_0) d(F', T_0) &= \frac{|b^2x_0x_F - a^2b^2| |b^2x_0x_F + a^2b^2|}{b^4x_0^2 + a^4y_0^2} \\ &= b^4 \frac{|x_0^2x_F^2 - a^4|}{b^4x_0^2 + a^4y_0^2} = b^4 \frac{|x_0^2(a^2 - b^2) - a^4|}{b^4x_0^2 + a^4y_0^2} \end{aligned}$$

ce qui s'écrit, compte tenu de $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$:

$$d(F, T_0) d(F', T_0) = b^4 \frac{|x_0^2(a^2 - b^2) - a^4|}{b^4 x_0^2 + a^4 b^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)} = b^2 \frac{|x_0^2(a^2 - b^2) - a^4|}{b^2 x_0^2 + a^4 - a^2 x_0^2} = b^2$$

2. En utilisant les coordonnées polaires, on a $M(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ avec $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{\rho^2 \cos^2(\theta)}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2(\theta)}{b^2} = 1$ et $N(r \cos(\theta'), r \sin(\theta'))$ avec $\theta' = \theta \pm \frac{\pi}{2}$ (orthogonalité) et $r > 0$ tel que $\frac{r^2 \sin^2(\theta)}{a^2} + \frac{r^2 \cos^2(\theta)}{b^2} = 1$, de sorte que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} &= \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{\cos^2(\theta)}{a^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{b^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{a^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} d(O, (MN)) &= \frac{|\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MN})|}{\|\overrightarrow{MN}\|} = \frac{\begin{vmatrix} \rho \cos(\theta) & r \cos(\theta') \\ \rho \sin(\theta) & r \sin(\theta') \end{vmatrix}}{\|\overrightarrow{MN}\|} \\ &= \frac{\rho r |\cos(\theta) \sin(\theta') - \sin(\theta) \cos(\theta')|}{\sqrt{r^2 - 2\rho r \cos(\theta') \cos(\theta) + \rho^2 - 2\rho r \sin(\theta') \sin(\theta)}} \\ &= \frac{\rho r}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

car $\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin(\theta)$ et $\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos(\theta)$, donc la droite (MN) est tangente au cercle de centre 0 et de rayon $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

◇

Exercice 1.9. Soit \mathcal{C}_p une parabole de sommet O . Pour tout point $M \in \mathcal{C}_p \setminus \{O\}$, on désigne par P la projection orthogonale de M sur Δ et par Q le point d'intersection de la normale à \mathcal{C}_p en M avec Δ .

1. Montrer que la longueur PQ est constante.
2. Montrer la normale (MQ) recoupe la parabole \mathcal{C}_p en un deuxième point M' .
3. Calculer le minimum de MM' quand M décrit $\mathcal{C}_p \setminus \{O\}$.

Solution. On utilise la paramétrisation $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(t, \frac{t^2}{2p}\right)$ de \mathcal{C}_p dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) où \vec{i} dirige la directrice $\vec{\mathcal{D}}$ et \vec{j} dirige l'axe focal Δ .

1. On note $M = \gamma(t)$ un point de \mathcal{C}_p , $P\left(0, \frac{t^2}{2p}\right) = P(t)$ sa projection orthogonale sur Δ et $Q(0, y_Q(t)) = Q(t)$ le point d'intersection de la normale à \mathcal{C}_p en M avec Δ . Avec la condition d'orthogonalité :

$$0 = \overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} = t + \left(\frac{t^2}{2p} - y_Q(t)\right) \frac{t}{p}$$

et $t \neq 0$ ($M \neq O$), on déduit que $y_Q(t) = p + \frac{t^2}{2p}$ et :

$$PQ = |y_Q(t) - y_P(t)| = p = d(F, \mathcal{D})$$

(figure 1.16).

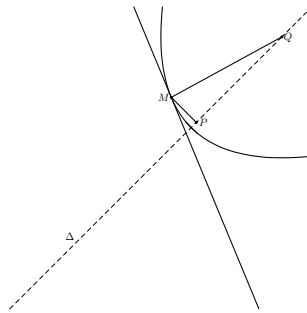


FIGURE 1.16 – Sous-normale à une parabole

2. La normale à \mathcal{C}_p en $\gamma(t)$ est la droite d'équation $(x - t) + \left(y - \frac{t^2}{2p}\right) \frac{t}{p} = 0$ et l'intersection de cette normale avec \mathcal{C}_p est définie par l'équation :

$$0 = (x - t) + \left(\frac{x^2}{2p} - \frac{t^2}{2p}\right) \frac{t}{p} = (x - t) \left(1 + \frac{x + t}{2p} \frac{t}{p}\right)$$

ce qui donne $x = t$ (le point M) et $x = -\left(t + \frac{2p^2}{t}\right)$, soit le point :

$$M' \left(-t - \frac{2p^2}{t}, \frac{1}{2p} \left(t + \frac{2p^2}{t}\right)^2\right) \neq M$$

3. Il s'agit de déterminer le minimum de la fonction δ définie sur \mathbb{R}^* par :

$$\begin{aligned} \delta(t) &= (MM')^2 = \left(2t + \frac{2p^2}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{2p} \left(t + \frac{2p^2}{t}\right)^2 - \frac{t^2}{2p}\right)^2 \\ &= 4t^2 \left(1 + \frac{p^2}{t^2}\right)^2 + 4p^2 \left(1 + \frac{p^2}{t^2}\right)^2 = 4t^2 \left(1 + \frac{p^2}{t^2}\right)^3 \end{aligned}$$

Par parité, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^{+,*}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \delta(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(t) = +\infty$ et $\delta'(t) = 8 \left(1 + \frac{p^2}{t^2}\right)^2 \left(t - 2\frac{p^2}{t}\right)$ s'annule pour $t = \sqrt{2}p$, donc $\inf_{t \in \mathbb{R}^*} \delta(t) = 27p^2$ et $\inf_{M \in \mathcal{C}_p \setminus \{O\}} MM' = 3\sqrt{3}p$.

◇

Exercice 1.10. Soient \mathcal{C} un cercle de centre O et de rayon $R > 0$, A un point fixé sur \mathcal{C} et Δ la droite orthogonale à (OA) passant par O . À tout point M de $\mathcal{C} \setminus (OA)$, on associe son projeté orthogonal M' sur Δ et le point d'intersection I_M des droites (OM) et (AM') . Montrer que l'ensemble des points I_M ainsi construit est une parabole dont on précisera les caractéristiques.

Solution. On se place dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, où $\vec{i} = \frac{1}{R} \overrightarrow{OA}$. Dans ce repère, on a $A(R, 0)$, $M(R \cos(\theta), R \sin(\theta))$ et $M'(0, R \sin(\theta))$ pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus (OA)$. Les droites (OM) et (AM') ont pour équations respectives, $\sin(\theta)x - \cos(\theta)y = 0$ et $\sin(\theta)x + y = R \sin(\theta)$, ce qui nous pour le point d'intersection de ces deux droites, $I \left(\frac{R \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}, \frac{R \sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)} \right)$ (comme $M \notin (OA)$, on a $\sin(\theta) \neq 0$ et $\cos(\theta) \neq -1$). L'ensemble cherché a donc pour équation polaire, $\rho = \frac{R}{1 + \cos(\theta)}$, ce qui définit bien une parabole de foyer O et de directrice $\mathcal{D} = A + \vec{\Delta}$ puisque $OI_M = \frac{R}{1 + \cos(\theta)} = R \left(1 - \frac{\cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)} \right) = d(I_M, \mathcal{D})$ (figure 1.17).

◇

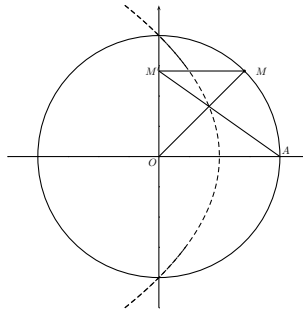


FIGURE 1.17 –

Exercice 1.11. Soient \mathcal{C}_p une parabole d'équation $x^2 = 2py$ dans \mathcal{R} et de directrice \mathcal{R} , $M_0 \left(x_0, -\frac{p}{2} \right) \in \mathcal{D}$, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ les deux tangentes orthogonales à la

parabole passant par M_0 (théorème 1.17) et M_1, M_2 les points d'intersection de ces tangentes avec \mathcal{C}_p . Montrer que le foyer F de la parabole appartient au segment $[M_1, M_2]$.

Solution. Pour $k = 1, 2$, l'équation de la tangente \mathcal{T}_k à \mathcal{C}_p en M_k est $x_k(x - x_k) - p(y - y_k) = 0$, soit $x_k^2 - 2x_kx + 2py = 0$ et on a $x_k^2 - 2x_kx_0 - p^2 = 0$ ($M_0 \in \mathcal{T}_k$) avec $\frac{x_1}{p} \frac{x_2}{p} = -1$ (orthogonalité de \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2), ce qui nous donne $x_1 = x_0 - \sqrt{x_0^2 + p^2}$, $y_1 = \frac{x_1^2}{2p}$, $x_2 = x_0 + \sqrt{x_0^2 + p^2}$ et $y_2 = \frac{x_2^2}{2p}$. Le foyer $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ est sur $[M_1, M_2]$ si, et seulement si, il existe un réel $t \in]0, 1[$ tel que $x_1 + t(x_2 - x_1) = 0$ et $y_1 + t(y_2 - y_1) = \frac{p}{2}$, ce qui nous donne $t = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + p^2}}\right)$ qui vérifie bien :

$$\begin{aligned} y_1 + t(y_2 - y_1) &= \frac{(x_0 - \sqrt{x_0^2 + p^2})^2}{2p} + \frac{1}{p} \left(1 - \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + p^2}}\right) \sqrt{x_0^2 + p^2} x_0 \\ &= \frac{(x_0 - \sqrt{x_0^2 + p^2})^2}{2p} + \frac{(\sqrt{x_0^2 + p^2} - x_0) x_0}{p} \\ &= \frac{(\sqrt{x_0^2 + p^2} - x_0)(\sqrt{x_0^2 + p^2} + x_0)}{2p} = \frac{p}{2} \end{aligned}$$

◇