22

Probabilités conditionnelles

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

22.1 Définition et propriétés des probabilités conditionnelles

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois un dé équilibré et les événements A et B définis par :

$$A = \text{« la somme des chiffres obtenus est 9»}$$

et

$$B = \text{« le premier lancé donne 5»}$$

En supposant qu'il y a équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Mais, si on sait que l'événement B est réalisé, c'est-à-dire que le premier lancé a donné 5, il semble raisonnable de dire que :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9}$$

Sachant que B est réalisé on est donc amené à changer d'univers. Dans le premier cas, où on ne dispose d'aucune information sur le premier lancé, un univers adapté est $\Omega = \{(i,j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$ avec la probabilité :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \dfrac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)} \end{array}$$

avec $\operatorname{card}(\Omega) = 6^2$ et dans le deuxième cas où on dispose de l'information « B est réalisé » un univers adapté est $\Omega_B = \{i \mid 1 \leq i \leq 6\}$ avec la probabilité :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_B: & \mathcal{P}(\Omega_B) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega_B)} \end{array}$$

avec $\operatorname{card}(\Omega_B) = 6$.

Pour calculer de telles probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_B(A)$, une idée naturelle est de répéter un grand nombre de fois l'expérience dans les mêmes conditions. Si pour n expériences, on note $n(E)$ le nombre de fois où un événement E est réalisé, la quantité :

$$f_B(A) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{n(A\cap B)}{n}\left(\frac{n(B)}{n}\right)^{-1}$$

est la fréquence relative de réalisation de A sur n coups sachant que B est réalisé. Plus n sera grand, plus $f_B(A)$ se rapprochera d'une quantité qui sera la probabilité de réalisation de A sachant que B est réalisé.

Il est donc naturel de poser :

$$\mathbb{P}_B(A) = \lim_{n\to+\infty} f_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Définition 22.1 *Soient A, B deux événements dans $\mathcal{B}$ avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. La probabilité de A sachant B est le réel :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Théorème 22.1 *Pour tout événement $B \in \mathcal{B}$ de probabilité non nulle, l'application :*

$$\begin{array}{rccc}\mathbb{P}_B : & \mathcal{B} & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}\end{array}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

Démonstration. On a :

–

$$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

– Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, il est de même de la suite $(A_n\cap B)_{n\in\mathbb{N}}$ et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n\cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}(A_n\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_B(A_n)\end{aligned}$$

■

On dit que $\mathbb{P}_B$ est la probabilité conditionnelle sur $(\Omega, \mathcal{B})$ sachant B et par définition, on a :

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}_B(A)\,\mathbb{P}(B)$$

On note aussi $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$.

Théorème 22.2 *Si $n \geq 2$ et $A_1, \cdots, A_n$ sont des événements dans $\mathcal{B}$ tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$, on a alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2\mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3\mid A_1\cap A_2)\cdots\mathbb{P}\left(A_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

Démonstration. Comme $\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} A_k \subset \bigcap\limits_{k=1}^{p} A_k$ pour tout p compris entre 1 et $n-1$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_k\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) > 0$$

et les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{\bigcap\limits_{k=1}^{p} A_k}$ sont bien définies.

On vérifie alors que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1)\prod_{p=1}^{n-1}\mathbb{P}\left(A_{p+1} \mid \bigcap_{k=1}^{p} A_k\right) &= \mathbb{P}(A_1)\frac{\mathbb{P}(A_1\cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)}\frac{\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1\cap A_2)}\cdots\frac{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} A_k\right)}\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right).\end{aligned}$$

■

Théorème 22.3 (Formule des probabilités totales) *Si $(A_1, \cdots, A_n)$ est un système complet d'événements dans $\mathcal{B}$ tel que $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$ pour tout k compris entre 1 et n, on a alors pour tout événement $A \in \mathcal{B}$:*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A \mid A_k)\,\mathbb{P}(A_k)$$

Démonstration. On a la partition :

$$A = A\cap\Omega = A\cap\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} A\cap A_k$$

qui nous donne :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A\cap A_k) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A \mid A_k)\,\mathbb{P}(A_k)$$

■

Exercice 22.1 *Un fumeur essaye de ne plus fumer. S'il ne fume pas un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $p \in]0,1[$. S'il fume un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $q \in]0,1[$.*

1. *Calculer la probabilité p_n que cette personne ne fume pas le n-ème jour.*
2. *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.*

Solution 22.1 *Pour $n \geq 0$, on note respectivement F_n et $\Omega \setminus F_n$ les événements :*

$$F_n : \text{ « il fume le n-ème jour »}$$

$$\overline{F_n} = \Omega\setminus F_n : \text{ « il ne fume pas le n-ème jour »}$$

On connaît $p = \mathbb{P}\left(\overline{F_n} \mid \overline{F_{n-1}}\right)$ et $p = \mathbb{P}\left(\overline{F_n} \mid F_{n-1}\right)$ pour $n \geq 1$.

1. *Comme* $\left(F_{n-1}, \overline{F_{n-1}}\right)$ *est un système complet d'événements, on a :*

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}\left(\overline{F_n}\right) = q \cdot \mathbb{P}\left(F_{n-1}\right) + p \cdot \mathbb{P}\left(\overline{F_{n-1}}\right) \\ &= \left(1 - p_{n-1}\right) q + p_{n-1} p \\ &= \left(p - q\right) p_{n-1} + q \end{aligned}$$

La suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc une suite arithmético-géométrique et on a :*

$$p_n = r + \left(p_0 - r\right)\left(p - q\right)^n$$

où $r = \dfrac{q}{1 - (p - q)}$.

2. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(p_n\right) = r = \dfrac{q}{1 - (p - q)}$.

Théorème 22.4 (Formule de Bayes) *Si* $\left(A_1, \cdots, A_n\right)$ *est un système complet d'événements dans* $\mathcal{B}$ *tel que* $\mathbb{P}\left(A_k\right) \neq 0$ *pour tout* k *compris entre* 1 *et* n, *on a alors pour tout événement* $B \in \mathcal{B}$ *de probabilité non nulle et tout entier* j *compris entre* 1 *et* n *:*

$$\mathbb{P}\left(A_j \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B \mid A_j\right)\mathbb{P}\left(A_j\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(B \mid A_k\right)\mathbb{P}\left(A_k\right)}$$

Démonstration. On a :

$$\mathbb{P}\left(A_j \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A_j \cap B\right)}{\mathbb{P}\left(B\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(B \mid A_j\right)\mathbb{P}\left(A_j\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(B \mid A_k\right)\mathbb{P}\left(A_k\right)}$$

■

Exercice 22.2 *Des études sur une population ont montré que l'on pouvait admettre que la probabilité* p_n *qu'une famille ait exactement* n *enfants est définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ p_n = \alpha p^n$$

avec $0 < p < 1$, $\alpha > 0$ *et* $(1 + \alpha)\, p < 1$.
On suppose que les naissances des garçons et des filles sont équiprobables.

1. *Calculer la probabilité pour une famille de ne pas avoir d'enfants.*
2. *Calculer la probabilité pour une famille d'avoir exactement* k *garçons.*
3. *Étant donnée une famille ayant au moins un garçon, quelle est la probabilité qu'elle en ait deux ou plus ?*

Solution 22.2 *Pour tout entier* $n \geq 0$, *on note respectivement* E_n *et* G_n *les événements :*

$$E_n = \text{« la famille a } n \text{ enfants »}$$

$$G_n = \text{« la famille a } n \text{ garçons »}$$

1. *On a* $p_n = \mathbb{P}\left(E_n\right) = \alpha p^n$ *pour* $n \geq 1$ *et :*

$$p_0 = \mathbb{P}\left(E_0\right) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha p^n = 1 - \alpha \frac{p}{1 - p} = \frac{1 - (1 + \alpha)\, p}{1 - p}$$

2. *Comme* $(E_n)_{n\geq 0}$ *est un système complet d'événements, on a pour* $k \geq 1$ *:*

$$G_k = \bigcup_{n=0}^{+\infty} G_k \cap E_n = \bigcup_{n=k}^{+\infty} G_k \cap E_n$$

($G_k \cap E_n = \emptyset$ *pour* $0 \leq n < k$*) et :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(G_k \cap E_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)\,\mathbb{P}(G_k \mid E_n) \\ &= \alpha \sum_{n=k}^{+\infty} p^n C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\end{aligned}$$

(dans une famille de n *enfants, il y a* C_n^k *façons de placer l'ordre de naissance des garçons et par chacune d'elles la probabilité de réalisation est* $\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ *si les naissances des filles et des garçons sont supposées équiprobables). On a donc :*

$$\mathbb{P}(G_k) = \alpha \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k \left(\frac{p}{2}\right)^n = \frac{\alpha}{k!}\left(\frac{p}{2}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-(k-1))\left(\frac{p}{2}\right)^{n-k}$$

soit en tenant compte de :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-(k-1))\,x^{n-k} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

$$\mathbb{P}(G_k) = \frac{\alpha}{k!}\left(\frac{p}{2}\right)^k \frac{k!}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^{k+1}} = \frac{2\alpha}{2-p}\left(\frac{p}{2-p}\right)^k$$

Pour $k = 0$*, on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_0) &= 1 - \frac{2\alpha}{2-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{p}{2-p}\right)^k = 1 - \frac{2\alpha}{2-p}\frac{p}{2-p}\frac{1}{1-\frac{p}{2-p}} \\ &= 1 - \frac{\alpha p}{(1-p)(2-p)} = \frac{2-(3+\alpha)p+p^2}{(1-p)(2-p)}\end{aligned}$$

3. *La probabilité cherchée est :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} G_k \mid \bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} G_k\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k\right)} = \frac{1-\mathbb{P}(G_0)-\mathbb{P}(G_1)}{1-\mathbb{P}(G_0)} \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(G_1)}{1-\mathbb{P}(G_0)} = \frac{p}{2-p}\end{aligned}$$

Exercice 22.3 *Deux joueurs* A *et* B *possèdent un capital de* a *et* b *euros respectivement. Ils jouent à pile ou face en misant* 1 *euro par partie jusqu'à la ruine de l'un d'eux. Déterminer la probabilité de ruine de chacun.*

Solution 22.3 *On désigne, pour tout entier $n \geq 0$, par A_n l'événement :*

$$A_n = \text{« } A \text{ possède } n \text{ euros et terminera ruiné »}$$

et par A l'événement :

$$A = \text{« } A \text{ gagne un tirage de Pile ou Face »}$$

Pour $n \geq 1$, on a :

$$A_n = (A_{n-1} \cap A) \cup (A_{n+1} \cap (\Omega \setminus A))$$

et en notant $p_n = \mathbb{P}(A_n)$, on déduit que :

$$p_n = \frac{1}{2}(p_{n-1} + p_{n+1})$$

avec $p_0 = 1$, $p_{a+b} = 0$, ce qui donne $p_n = 1 - \dfrac{n}{a+b}$ et :

$$\mathbb{P}(A \text{ perd}) = p_a = \frac{b}{a+b},\ \mathbb{P}(B \text{ perd}) = p_b = \frac{a}{a+b}.$$

22.2 Événements indépendants

Dans le cas où $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, on déduit que le fait que soit B soit réalisé ne change rien sur le calcul de $\mathbb{P}(A)$. Dans ces conditions, on dit que A et B sont des événements indépendants.

Définition 22.2 *On dit que deux événements A et B dans $\mathcal{B}$ sont indépendants (ou stochastiquement indépendants) si :*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Remarque 22.1 *Si $P(B) = 0$, on a alors, pour tout $A \in \mathcal{B}$, $0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) = 0$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = 0$ et A et B sont indépendants.*
Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.

Remarque 22.2 *Deux événements peuvent être incompatibles, sans être indépendants. Par exemple, si $\mathbb{P}(A) = p \in \left]0,1\right[$, on a alors :*

$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = p(1-p) \neq 0 = \mathbb{P}(A \cap (\Omega \setminus A)).$$

Exercice 22.4 *Soit$(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Soient A, B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0.2$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.5$. Quelle est la valeur de $\mathbb{P}(B)$ si A et B sont incompatibles ?*
2. *Soient A, B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0.1$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.6$. Quelle est la valeur de $\mathbb{P}(B)$ si A et B sont indépendants ?*

Solution 22.4

1. *Si A et B sont incompatibles, on a alors :*

$$0.5 = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0.2 + \mathbb{P}(B)$$

et $\mathbb{P}(B) = 0.3$.

2. *Si A et B sont indépendants, on a alors :*

$$\begin{aligned}0.6 = \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.1 + 0.9 \cdot \mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

et $\mathbb{P}(B) = \dfrac{5}{9}$.

Exercice 22.5 *Montrer que A et B sont indépendants dans $\mathcal{B}$ si, et seulement si, A et $\Omega \setminus B$ sont indépendants et que A et $\Omega \setminus B$ sont indépendants si et seulement si, $\Omega \setminus A$ et $\Omega \setminus B$ sont indépendants.*

Solution 22.5 *On a $A \cap (\Omega \setminus B) = A \setminus (A \cap B)$ et :*

$$\mathbb{P}(A \cap (\Omega \setminus B)) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

ce qui donne pour A et B sont indépendants :

$$\mathbb{P}(A \cap (\Omega \setminus B)) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\Omega \setminus B)$$

qui signifie que A et $\Omega \setminus B$ sont indépendants.
Réciproquement si A et $\Omega \setminus B$ sont indépendants, il en est alors de même de A et $B = \Omega \setminus (\Omega \setminus B)$.
Comme A et B jouent des rôles symétriques, il en résulte que :

$$(A \text{ et } \Omega \setminus B \text{ indépendants}) \Leftrightarrow (\Omega \setminus A \text{ et } \Omega \setminus B \text{ indépendants})$$

Plus généralement, on définit l'indépendance mutuelle de plusieurs événements comme suit.

Définition 22.3 *On dit que des événements $A_1, \cdots, A_n$, où $n \geq 2$, sont mutuellement indépendants dans $\mathcal{B}$ si pour toute partie J non vide de $\{1, 2, \cdots, n\}$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Remarque 22.3 *Des événements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants (il suffit de considérer toutes les parties à 2 éléments de $\{1, 2, \cdots, n\}$), mais la réciproque est fausse.*
En effet, considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé deux fois et les événements A, B, C définis respectivement par « le premier chiffre est pair », « le deuxième chiffre est impair », « la somme des chiffres est paire ». En supposant l'équiprobabilité, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

donc les événements A, B, C sont deux à deux indépendants, mais :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

et A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 22.6 *Soient $A_1, \cdots, A_n$, où $n \geq 2$, des événements mutuellement indépendants dans $\mathcal{B}$.*

1. *Montrer que $\Omega \setminus A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants.*
2. *En déduire que pour tout entier k compris entre 1 et n, les événements $\Omega \setminus A_1, \cdots, \Omega \setminus A_k, A_{k+1}, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants.*

Solution 22.6

1. *On note $A'_1 = \Omega \setminus A_1$, $A'_k = A_k$ pour k compris entre 2 et n et on se donne une partie J non vide de $\{1, 2, \cdots, n\}$.*
   Si $1 \notin J$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A'_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}\left(A'_j\right).$$

   Si J a plus de 2 éléments et $1 \in J$ (pour $J = \{1\}$, il n'y a rien à montrer), on a alors :

$$\bigcap_{j \in J} A'_j = (\Omega \setminus A_1) \cap \left(\bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j\right) = \bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j \setminus \bigcap_{j \in J} A_j$$

   et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A'_j\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J \setminus \{1\}} A_j\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \\ &= \prod_{j \in J \setminus \{1\}} \mathbb{P}(A_j) - \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j) \\ &= (1 - \mathbb{P}(A_1)) \prod_{j \in J \setminus \{1\}} \mathbb{P}(A_j) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}\left(A'_j\right)\end{aligned}$$

2. *On procède récurrence finie.*

Exercice 22.7 *Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On choisit de manière équiprobable un entier compris entre 1 et n. Soient p un diviseur positif de n et A_p l'événement :« le nombre choisi est divisible par p ».*

1. *Calculer $\mathbb{P}(A_p)$.*
2. *Montrer que si $p_1, \cdots, p_r$ sont les diviseurs premiers de n, alors les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.*
3. *On désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler définie sur $\mathbb{N}^*$ par*

$$\varphi(n) = \operatorname{card}\{k \in \{1, \cdots, n\} \mid k \wedge n = 1\}$$

   Montrer que

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \text{ divise } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Solution 22.7 *On se place sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où $\Omega = \{1, \cdots, n\}$ et :*

$$\forall k \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}.$$

1. *Pour p divisant n, on a $n = pq$ et :*

$$A_p = \{k \in \Omega \mid \exists j \in \Omega \;;\; k = pj\} = \{p, 2, \cdots, qp\}$$

donc :

$$\mathbb{P}(A_p) = \frac{\mathrm{card}(A_p)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{q}{n} = \frac{1}{p}.$$

2. *Soit J une partie non vide de $\{1, 2, \cdots, r\}$. Les entiers p_j pour $j \in J$ sont premiers et distincts, donc premiers entre eux et un entier est divisible par tous les p_j si, et seulement si, il est divisible par leur produit. On a donc :*

$$\bigcap_{j \in J} A_{p_j} = A_{\prod\limits_{j \in J} p_i}$$

et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_{p_j}\right) = \mathbb{P}(A_{\prod\limits_{j \in J} p_i}) = \frac{1}{\prod\limits_{j \in J} p_i} = \prod_{j \in J} \frac{1}{p_j} = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_{pj}).$$

Donc les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

3. *Si A désigne l'événement : « l'entier choisi est premier avec n », on a alors :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\varphi(n)}{n}$$

et en désignant par $p_1, \cdots, p_r$ tous les diviseurs premiers de n, on aura $k \in A$ si, et seulement si, k n'est divisible par aucun des p_i, donc :

$$A = \bigcap_{i=1}^{r} (\Omega \setminus A_{p_i}).$$

Comme les événements $\Omega \setminus A_{p_i}$ sont indépendants (exercice précédent), on en déduit que :

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}(\Omega \setminus A_{p_i}) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Exercice 22.8 *On se fixe un réel $s > 1$ et on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où $\Omega = \mathbb{N}^*$ et :*

$$\forall n \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}$$

en désignant par ζ la fonction de Riemann définie par $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par A_n l'événement :

$$A_n = \{\textit{multiples de } n\} = \{k \cdot n \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

1. *Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \geq 1$.*
2. *Montrer que, si $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers, alors la famille $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est indépendante, c'est-à-dire que pour toute suite finie $(p_k)_{1 \leq k \leq r}$ de nombres premiers distincts, les événement $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.*

3. *En déduire que :*

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

puis l'identité d'Euler :

$$\forall s > 1,\ \zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Solution 22.8

1. *On a :*

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{k\cdot n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^s}.$$

2. *Pour $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ dans $\mathcal{P}$, comme les p_k sont premiers entre eux, on a :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_{p_k}\right) &= \mathbb{P}(\{\textit{multiples de } p_1, p_2, \cdots, p_r\}) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{\textit{multiples de } \prod_{k=1}^{r} p_k\right\}\right) = \mathbb{P}\left(A_{\prod\limits_{k=1}^{r} p_k}\right) \\
&= \frac{1}{\left(\prod\limits_{k=1}^{r} p_k\right)^s} = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{p_k^s} = \prod_{k=1}^{r} \mathbb{P}(A_{p_k})
\end{aligned}$$

et les événement $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

3. *L'entier* 1 *n'est divisible par aucun nombre premier, donc :*

$$\{1\} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} (\Omega \setminus A_p)$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{1\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{P}} (\Omega \setminus A_p)\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{P}(\Omega \setminus A_p) \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} (1 - \mathbb{P}(A_p)) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)
\end{aligned}$$

et comme $\mathbb{P}(\{1\}) = \dfrac{1}{\zeta(s)}$, *il en résulte que :*

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Une définition équivalente de la notion de famille d'événements mutuellement indépendants est donnée par le théorème suivant.

Théorème 22.5 *Soient $A_1, \cdots, A_n$, où $n \geq 2$, des événements dans $\mathcal{B}$. Ces événements sont mutuellement indépendants si, et seulement si, pour toute partie J de $\{1, 2, \cdots, n\}$ telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j\in J} A_j\right) \neq 0$ et tout indice $i \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus J$, on a :*

$$\mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{j\in J} A_j\right) = \mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration. Supposons $A_1, \cdots, A_n$ mutuellement indépendants. Pour $J \subsetneq \{1, 2, \cdots, n\}$ telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j \in J} A_j\right) \neq 0$ et $i \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus J$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J \cup \{i\}} A_j\right) &= \prod_{j \in J \cup \{i\}} \mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(A_i) \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j) \\
&= \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)
\end{aligned}$$

et :

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j \in J \cup \{i\}} A_j\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j \in J} A_j\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(A_i \cap \bigcap\limits_{j \in J} A_j\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j \in J} A_j\right)} = \mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap_{j \in J} A_j\right).$$

Réciproquement, supposons que $\mathbb{P}\left(A_i \mid \bigcap\limits_{j \in J} A_j\right) = \mathbb{P}(A_i)$ pour tout $J \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j \in J} A_j\right) \neq 0$ et $i \in \{1, 2, \cdots, n\} \setminus J$.

Soit $I = \{i_1, \cdots, i_r\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ avec $r \geq 2$.

Si $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) \neq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_j\right) &= \mathbb{P}(A_{i_1})\, \mathbb{P}(A_{i_2} \mid A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}\left(A_{i_r} \mid \bigcap_{k=1}^{r-1} A_{i_k}\right) \\
&= \mathbb{P}(A_{i_1})\, \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_r}) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)
\end{aligned}$$

Si $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) = 0$, il existe alors un entier $p \in \{1, 2, \cdots, r\}$ tel que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{p-1} A_{i_k}\right) \neq 0$ et $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{p} A_{i_k}\right) = 0$. Pour $p = 1$, on a $\mathbb{P}(A_{i_1}) = 0$ et $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) = \prod\limits_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$ et pour $p \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
0 = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_{i_k}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p-1} A_{i_k}\right) \mathbb{P}\left(A_{i_p} \mid \bigcap_{k=1}^{p-1} A_{i_k}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{p-1} A_{i_k}\right) \mathbb{P}\left(A_{i_p}\right)
\end{aligned}$$

et $\mathbb{P}\left(A_{i_p}\right) = 0$ qui entraîne encore $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) = \prod\limits_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$. ■