L3 A, intégration : M363

– I – Exercices préliminaires

On présente ici quelques méthodes de raisonnement qui seront utilisées en théorie de la mesure.

Exercice 1 *Pour tout entier naturel non nul n, on définit les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_{n,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, l'entier k étant compris entre 0 et n, par :*

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sigma_{n,k}(\alpha) = \begin{cases} 1 \ \text{si } k = 0 \\ \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k} \ \text{si } k \in \{1, \cdots, n\} \end{cases}$$

Soit $P(X) = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$ un polynôme scindé unitaire de degré $n \geq 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que l'on a $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$ avec :

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\},\ a_k = (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

Solution. Ces expressions sont qualifiées de symétriques, car pour toute permutation τ de $\{1, \cdots, n\}$, on a :

$$\sigma_{n,k}\left(\alpha_{\tau(1)}, \cdots, \alpha_{\tau(n)}\right) = \sigma_{n,k}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

On procède par récurrence sur $n = \deg(P) \geq 1$.
Pour $n = 1$, on a $P(X) = X - \alpha_1 = a_0 X + a_1$ avec $a_0 = 1 = \sigma_{1,0}(\alpha_1)$ et $a_1 = -\alpha_1 = -\sigma_{1,1}(\alpha_1)$.
Supposons le résultat acquis pour les polynômes scindés unitaires de degré $n - 1 \geq 1$ et soit $P(X) = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$ un polynôme scindé unitaire de degré n.
En notant $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a :

$$\sigma_{n,0}(\alpha) = \sigma_{n-1,0}\left(\alpha'\right) = 1$$

$$\sigma_{n,n}(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_n \sigma_{n-1,n-1}\left(\alpha'\right)$$

et pour k compris entre 1 et $n - 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{n,k}(\alpha) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k} &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k} + \alpha_n \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq n-1} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_{k-1}} \\ &= \sigma_{n-1,k}\left(\alpha'\right) + \alpha_n \sigma_{n-1,k-1}\left(\alpha'\right) \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\prod_{k=1}^{n-1} (X - \alpha_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k X^{n-1-k}$$

avec $a'_k = (-1)^k \sigma_{n-1,k}(\alpha')$ pour $0 \leq k \leq n-1$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
P(X) &= (X-\alpha_n)\prod_{k=1}^{n-1}(X-\alpha_k) = (X-\alpha_n)\sum_{k=0}^{n-1} a'_k X^{n-1-k} \\
&= (X-\alpha_n)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sigma_{n-1,k}\left(\alpha'\right) X^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sigma_{n-1,k}\left(\alpha'\right) X^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\alpha_n\sigma_{n-1,k}\left(\alpha'\right) X^{n-(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sigma_{n-1,k}\left(\alpha'\right) X^{n-k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\alpha_n\sigma_{n-1,k-1}\left(\alpha'\right) X^{n-k} \\
&= X^n + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left(\sigma_{n-1,k}\left(\alpha'\right)+\alpha_n\sigma_{n-1,k-1}\left(\alpha'\right)\right)X^{n-k} + (-1)^n\alpha_n\sigma_{n-1,n-1}\left(\alpha'\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_{n,k}(\alpha)X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}
\end{aligned}$$

avec $a_k = (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha)$ pour tout k compris entre 0 et n.

Exercice 2 *Soit Ω un ensemble non vide.*
À toute partie A de Ω, on associe la fonction indicatrice (ou caractéristique) de A définie par :

$$\begin{array}{rccl}
\mathbf{1}_A : & \Omega & \to & \{0,1\} \\
& x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array}\right.
\end{array}$$

On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω.

1. *Montrer que l'application qui associe à une partie A de Ω sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ réalise une bijection de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $\{0,1\}^\Omega$ (ensemble des applications de Ω dans $\{0,1\}$). Préciser son inverse.*
2. *Soient A, B deux parties de Ω. Exprimer $\mathbf{1}_{\Omega \setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\cap B}$, $\mathbf{1}_{AUB}$, $\mathbf{1}_{B\setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\Delta B}$, en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.*
3. *Plus généralement, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ de parties de Ω, exprimer $\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k}$ et $\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_k}$.*
4. *Montrer qu'il n'existe pas de bijection de Ω sur $\mathcal{P}(\Omega)$ (théorème de Cantor).*
   On en déduit en particulier que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.
5. *Soient $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite finie de parties de Ω et A une partie de Ω. Montrer que :*

$$\left((A_k)_{1\leq k\leq n} \text{ est une partition de } A\right) \Leftrightarrow \left(\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{A_k}\right)$$

Solution. Les fonctions indicatrices permettent de transformer des opérations ensemblistes en opérations algébriques sur des fonctions.

1. Notons :

$$\begin{array}{rccc}
\chi : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & \{0,1\}^\Omega \\
& A & \mapsto & \mathbf{1}_A
\end{array}$$

Si A, B dans $\mathcal{P}(\Omega)$ sont tels que $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$, on a alors pour tout $x \in \Omega$:

$$(x \in A) \Leftrightarrow (\mathbf{1}_A(x) = 1) \Leftrightarrow (\mathbf{1}_B(x) = 1) \Leftrightarrow (x \in B)$$

soit, $A = B$.
L'application χ est donc injective.
Pour toute application $\gamma \in \{0,1\}^\Omega$, en notant $A = \gamma^{-1}\{1\}$, on a $\mathbf{1}_A = \gamma$, donc χ est surjective.
En conclusion, χ est bijective d'inverse :

$$\chi^{-1} : \begin{array}{ccc} \{0,1\}^\Omega & \to & \mathcal{P}(\Omega) \\ \gamma & \mapsto & \gamma^{-1}\{1\} \end{array}$$

2. De la partition $\Omega = A \cup (\Omega \setminus A)$, on déduit que pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_{\Omega \setminus A}(x) = 1$$

donc $\mathbf{1}_{\Omega \setminus A} = 1 - \mathbf{1}_A$.
Pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \text{ et } x \in B \\ 0 \text{ si } x \notin A \text{ ou } x \notin B \end{array} \right. = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = \min(\mathbf{1}_A(x), \mathbf{1}_B(x))$$

donc $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.
De ces deux formules, on déduit toutes les autres.
Avec :

$$\Omega \setminus (AUB) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$$

on déduit que :

$$\mathbf{1}_{\Omega \setminus (AUB)} = \mathbf{1}_{\Omega \setminus A}\mathbf{1}_{\Omega \setminus B}$$

soit :

$$1 - \mathbf{1}_{AUB} = (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B)$$

ou encore :

$$\mathbf{1}_{AUB} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$$

Avec :

$$B \setminus A = (\Omega \setminus A) \cap B$$

on déduit que :

$$\mathbf{1}_{B \setminus A} = \mathbf{1}_B(1 - \mathbf{1}_A) = \max(\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A, 0)$$

Avec :

$$A \Delta B = (AUB) \setminus A \cap B$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \Delta B} &= \mathbf{1}_{AUB}(1 - \mathbf{1}_{A \cap B}) = (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)(1 - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B \\ &= (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2 = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B| \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k}(x) = 1 \right) &\Leftrightarrow \left(x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k \right) \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \cdots, n\},\ x \in A_k) \\ &\Leftrightarrow (\forall k \in \{1, \cdots, n\},\ \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1) \\ &\Leftrightarrow \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1 \right) \Leftrightarrow \left(\min_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1 \right) \end{aligned}$$

donc :

$$\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} = \min_{1\leq k\leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

puisque ces fonctions sont à valeurs dans $\{0,1\}$.
Avec :

$$\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k)$$

on déduit que :

$$1 - \mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \min_{1\leq k\leq n} (1 - \mathbf{1}_{A_k}) = 1 - \max_{1\leq k\leq n} \mathbf{1}_{A_k}(x)$$

soit :

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \max_{1\leq k\leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

On peut aussi généraliser la formule $\mathbf{1}_{AUB} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ en utilisant l'exercice 1.
Avec :

$$\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k)$$

on déduit que :

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{1}_{A_k})$$

avec :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{1}_{A_k}) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1}} \mathbf{1}_{A_{i_2}} \cdots \mathbf{1}_{A_{i_k}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots A_{i_k}}\end{aligned}$$

ce qui nous donne la formule de Poincaré :

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots A_{i_k}}$$

4. Supposons qu'il existe une surjection φ de Ω sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
Le sous-ensemble A de Ω défini par :

$$A = \{x \in \Omega \mid x \notin \varphi(x)\}$$

a alors un antécédent x_0 par φ et on a :

$$(x_0 \in A) \Leftrightarrow (x_0 \in \varphi(x_0)) \Leftrightarrow (x_0 \notin A)$$

ce qui n'est pas possible.
En particulier, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas équipotent à $\mathbb{N}$ et il en est de même de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ qui est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
On peut aussi vérifier, en utilisant les développements dyadiques (en base 2), que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $[0,1[$.

5. Supposons que $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ soit une partition de A, c'est-à-dire que $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, les A_k étant deux à deux disjoints.

Dans ce ce cas, pour tout entier k compris entre 2 et n et tout multi-indice $(i_1, \cdots, i_k)$ tel que $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, l'intersection $A_{i_1 \cap} A_{i_2} \cdots A_{i_k}$ est vide, ce qui nous donne :

$$\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$$

Réciproquement supposons que $\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$.
Les A_k sont alors deux à deux disjoints.
En effet, s'il existe $k \neq j$ tels que $A_k \cap A_j \neq \emptyset$, on a alors pour $x \in A_k \cap A_j$:

$$\mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} \geq \mathbf{1}_{A_k}(x) + \mathbf{1}_{A_j}(x) = 2$$

ce qui est impossible.
Si $x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, il existe alors un indice j compris entre 1 et n tel que $x \in A_j$, donc $\mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x) \geq \mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$, ce qui impose $\mathbf{1}_{A_k}(x) = 0$ pour $k \neq j$ et $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$, ce qui prouve que $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$.
Pour $x \in A$, on a $1 = \mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x)$, donc il existe un unique j compris entre 1 et n tel que $\mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$, ce qui signifie que x est dans A_j et $x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, donc $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et on a l'égalité $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, les A_k étant deux à deux disjoints.

Exercice 3 *On dit qu'une série numérique (réelle ou complexe) $\sum u_n$ est commutativement convergente si, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.*
Montrer qu'une série $\sum u_n$ absolument convergente est commutativement convergente et que pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (cela justifie l'écriture $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ dans le cas d'une série absolument convergente, ce qui est utilisé implicitement dans la définition d'une mesure).

Solution. Soient $\sum u_n$ une série absolument convergente et σ une permutation de $\mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $\varphi(n) = \max_{0 \leq k \leq n} \sigma(k)$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \left| u_{\sigma(k)} \right| \leq \sum_{j=0}^{\varphi(n)} |u_j| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = S$$

donc la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.
Il reste à montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
On montre tout d'abord le résultat pour les séries réelles à termes positifs.
On vient de voir que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

En appliquant le résultat précédent à la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ et à la permutation σ^{-1}, on a aussi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_{\sigma^{-1}(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(\sigma^{-1}(n))} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

ce qui nous donne l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Pour le cas général d'une série réelle ou complexe, on a déjà $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|u_{\sigma(n)}\right| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

En utilisant les notations précédentes, on a $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$\left|\sum_{j=0}^{\varphi(n)} u_j - \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}\right| = \left|\sum_{j \in E_n} u_j\right| \leq R_n = \sum_{j \in E_n} |u_j|$$

où on a noté :

$$E_n = \{0, 1, \cdots, \varphi(n) - 1, \varphi(n)\} \setminus \{\sigma(0), \cdots, \sigma(n)\}$$

avec :

$$R_n = \sum_{j=0}^{\varphi(n)} |u_j| - \sum_{k=0}^{n} \left|u_{\sigma(k)}\right| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

L'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ s'en déduit alors.

Exercice 4

1. *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels positifs ou nuls indexée par (n, m) dans $\mathbb{N}^2$.*
   On suppose que :
   – *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{m} u_{n,m}$ est convergente de somme S_n ;*
   – *la série $\sum\limits_{n} S_n$ étant convergente de somme S.*
   Montrer alors que dans ces conditions :
   – *pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n} u_{n,m}$ est convergente de somme T_m ;*
   – *la série $\sum\limits_{m} T_m$ est convergente de somme S, soit :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

   Dans le cas où l'une des sommes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ ou $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ est finie, on dit que la série double $\sum u_{n,m}$ est convergente et on note $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$ la valeur commune de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ et $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$.
   Étant donnée une suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes, on dit que la série double $\sum u_{n,m}$ est absolument convergente (ou que la suite $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable) si la série double $\sum |u_{n,m}|$ est convergente.

2. *Soit* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ *une suite double telle que la série double* $\sum u_{n,m}$ *soit absolument convergente.*
   Montrer alors que dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *[resp. pour tout* $m \in \mathbb{N}$*], la série* $\sum\limits_m u_{n,m}$ *[resp.* $\sum\limits_n u_{n,m}$*] est absolument convergente et en notant* S_n *[resp.* T_m*] la somme de cette série, la série* $\sum S_n$ *[resp.* $\sum T_m$*] est absolument convergente et on a* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} T_m$*, soit :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

3. *En justifiant la convergence, calculer la somme* $\sum\limits_{m=2}^{+\infty}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^m}$.
4. *Soit* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ *la suite double définie par :*

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ u_{n,m} = \begin{cases} 0 \ si\ n = m \\ \dfrac{1}{n^2 - m^2}\ si\ n \neq m \end{cases}$$

   Montrer, en les calculant, que les sommes $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ *et* $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ *sont définies et différentes.*

Solution.

1. Pour tous les entiers n et m, on a :

$$0 \leq u_{n,m} \leq S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$$

   avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n = S < +\infty$, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum\limits_n u_{n,m}$ avec, pour tout entier m :

$$T_m = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} S_n = S$$

   Pour tout entier m, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} T_k &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{m} u_{n,k} \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} S_n = S\end{aligned}$$

   donc la série $\sum T_m$ est convergente de somme $T = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} T_m \leq S$.
   En permutant les rôles de n et m, on aboutit de manière analogue à $S \leq T$ et en conséquence, $T = S$.
2. La série $\sum |u_{n,m}|$ étant convergente, on a pour tous les entiers n, m :

$$S'_n = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| < +\infty,\ T'_m = \sum_{j=0}^{+\infty} |u_{j,m}| < +\infty$$

   et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S'_n = \sum_{m=0}^{+\infty} T'_m$$

Les séries $\sum_m u_{n,m}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_n u_{n,m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ sont donc absolument convergentes de sommes respectives S_n et T_m.

Pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} T_k - \sum_{j=0}^{n} S_j\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{j,k} - \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{j,k}\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{j,k} - \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k}\right| \\
&= \left|\sum_{j=n+1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_{j,k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k}\right| \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{j,k}| + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |u_{j,k}| \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} S'_j + \sum_{k=n+1}^{+\infty} T'_k = R_n
\end{aligned}$$

avec $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ puisque chacune des séries $\sum S'_n$ et $\sum T'_m$ converge.

On a donc bien l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum_{m=0}^{+\infty} T_m$.

3. Dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^m &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1
\end{aligned}$$

(en écrivant que $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$).

On peut donc calculer $\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m}$ alors qu'on ne connaît pas toutes les valeurs de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^m}$ pour $m \geq 2$.

4. Pour k entier naturel non nul fixé et $n > k$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} u_{j,k} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{j^2-k^2} &= \frac{1}{2k}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \left(\frac{1}{j-k} - \frac{1}{j+k}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\sum_{\substack{j=1-k\\ j\neq 0}}^{n-k} \frac{1}{j} - \sum_{\substack{j=k+1\\ j\neq 2k}}^{n+k} \frac{1}{j}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=k+1}^{n+k} \frac{1}{j} + \frac{1}{2k}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n+k} \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\frac{3}{2}\frac{1}{k} - \sum_{j=n-k+1}^{n+k} \frac{1}{j}\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$0 < \sum_{j=n-k+1}^{n+k} \frac{1}{j} \leq 2k \frac{1}{n-k+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et donc :

$$\forall k \geq 1,\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} u_{j,k} = \frac{3}{4}\frac{1}{k^2}$$

ce qui signifie que :

$$\forall k \geq 1,\ T_k = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} = \frac{3}{4}\frac{1}{k^2}$$

La série $\sum T_m$ est donc convergente avec $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} T_m = \frac{3}{4} \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$, ce qui signifie que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,m} \right) = \frac{3}{4} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}$$

De manière analogue, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} u_{n,m} \right) = -\frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6}$$

et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_{n,m} \right) \neq \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{n,m} \right)$.
La série double $\sum u_{n,m}$ n'est donc pas absolument convergente.

Exercice 5 *Soient E un espace vectoriel normé complet et $a < b$ deux réels.*
Une fonction $f : [a, b] \to E$ est dite réglée si elle admet une limite à droite en tout point de $[a, b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a, b]$.
On notera $f(x^-)$ [resp. $f(x^+)$] la limite à gauche [resp. à droite] en $x \in]a, b]$ [resp. en $x \in [a, b[$].

1. *Montrer qu'une fonction réglée est bornée.*
2. *Montrer qu'une limite uniforme de fonctions réglées de $[a, b]$ dans E est réglée.*
3. *Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction réglée et $\varepsilon > 0$. On note :*

$$E_\varepsilon = \left\{ x \in]a, b] \mid \text{il existe } \varphi \text{ en escaliers sur } [a, x] \text{ telle que } \sup_{t\in[a,x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon \right\}$$

   Montrer que $E_x \neq \emptyset$, puis que $b = \max(E_\varepsilon)$.
4. *Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to E$ est réglée si, et seulement si, elle est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escaliers.*
5. *Rappeler comment le résultat de la question précédente est utilisé pour définir l'intégrale de Riemann d'une fonction réglée $f : [a, b] \to E$.*
6. *Montrer qu'une fonction réglée $f : [a, b] \to E$ est continue sur $[a, b]$ privé d'un ensemble D dénombrable (éventuellement vide).*
7. *La fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est-elle réglée ?*
8. *En désignant par $E(t)$ la partie entière d'un réel t, montrer que la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(nx)}{2^n}$$

   est réglée, puis calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$ (il s'agit d'une intégrale de Riemann).

Solution.

1. Soit $f : [a,b] \to E$ réglée.
Si elle n'est pas bornée, pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver un réel $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f(x_n)\| \geq n$.
Dans le compact $[a,b]$, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha \in [a,b]$.
Supposons que $\alpha \in \left]a,b\right[$. Il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in [a,b] \cap \left]\alpha - \eta, \alpha\right[, \ \left\|f(x) - f\left(\alpha^-\right)\right\| < 1$$
et :
$$\forall x \in [a,b] \cap \left]\alpha, \alpha + \eta\right[, \ \left\|f(x) - f\left(\alpha^+\right)\right\| < 1$$
Il existe aussi un entier $n_0 \geq 1$ tel que :
$$\forall n \geq n_0, \ x_{\varphi(n)} \in \left]\alpha - \eta, \alpha + \eta\right[$$
ce qui nous donne pour tout $n \geq n_0$:
$$\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(\alpha^-\right)\right\| < 1 \text{ ou } \left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(\alpha^+\right)\right\| < 1$$
et en conséquence :
$$\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| < 1 + \left\|f\left(\alpha^-\right)\right\| \text{ ou } \left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| < 1 + \left\|f\left(\alpha^+\right)\right\|$$
en contradiction avec $\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| \geq \varphi(n) \geq n$.
Pour $\alpha = a$ [resp. $\alpha = b$], on procède de manière analogue en utilisant seulement la limite à droite [resp. à gauche].
La fonction f est donc bornée.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réglées de $[a,b]$ dans E qui converge uniformément vers une fonction f.
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_ε tel que :
$$\forall n \geq n_\varepsilon, \ \sup_{x\in[a,b]} \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$
La fonction f_{n_ε} ayant une limite à gauche en $\alpha \in \left]a,b\right]$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in [a,b] \cap \left]\alpha - \eta, \alpha\right[, \ \left\|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}\left(\alpha^-\right)\right\| < \varepsilon$$
ce qui nous donne, pour tout x, y dans $[a,b] \cap \left]\alpha - \eta, \alpha\right[$:
$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\| &\leq \|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)\| + \left\|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}\left(\alpha^-\right)\right\| + \left\|f_{n_\varepsilon}\left(\alpha^-\right) - f_{n_\varepsilon}(y)\right\| + \|f_{n_\varepsilon}(y) - f(y)\| \\ &\leq 4\varepsilon\end{aligned}$$
On déduit alors du critère de Cauchy que f admet une limite à gauche en α.
De plus avec :
$$\left\|f_n\left(\alpha^-\right) - f\left(\alpha^-\right)\right\| = \lim_{x\to\alpha^-} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \sup_{x\in[a,b]} \|f_n(x) - f(x)\|$$
on déduit que :
$$f\left(\alpha^-\right) = \lim_{n\to+\infty} f_n\left(\alpha^-\right)$$
On procède de même pour la limite à droite.
3. Comme f admet une limite à droite en a, il existe un réel $\eta_a \in \left]0, b-a\right[$ tel que :
$$\forall t \in \left]a, a + \eta_a\right], \ \left\|f(t) - f\left(a^+\right)\right\| < \varepsilon$$
donc en désignant par φ la fonction en escaliers définie sur $[a, a+\eta_a]$ par $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(t) = f\left(a^+\right)$ pour tout $t \in \left]a, a+\eta_a\right]$, on a $\sup\limits_{t\in[a,a+\eta_a]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, ce qui signifie que $a + \eta_a \in E_\varepsilon$.

L'ensemble E_ε est donc non vide majorée par b, donc il admet une borne supérieure $\beta \in]a,b]$ (on a $a+\eta_a \leq \beta$).
Supposons que $\beta < b$. Comme f admet une limite à droite et à gauche en β, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $[\beta-\eta, \beta+\eta] \subset]a,b[$ et :

$$\forall t \in [\beta-\eta, \beta[\,,\ \left\|f(t) - f\left(\beta^-\right)\right\| < \varepsilon$$

$$\forall t \in]\beta, \beta+\eta]\,,\ \left\|f(t) - f\left(\beta^+\right)\right\| < \varepsilon$$

Par définition de la borne supérieure β, il existe $x \in]\beta-\eta, \beta] \cap E_\varepsilon$. On désigne alors par φ une fonction en escaliers sur $[a,x]$ telle que $\sup\limits_{t\in[a,x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ et on la prolonge en une fonction en escaliers sur $[a, \beta+\eta]$ en posant $\varphi(t) = f(\beta^-)$ pour $t \in]x, \beta[\,,\ \varphi(\beta) = f(\beta)$ et $\varphi(t) = f(\beta^+)$ pour $t \in]\beta, \beta+\eta]\,.$
On a donc $\sup\limits_{t\in[a,\beta+\eta]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, soit $\beta+\eta \in E_x$, ce qui contredit le fait que β est la borne supérieure de E_ε.
En définitive, on a $\beta = b$.
Comme f admet une limite à gauche en b, il existe un réel $\eta_b > 0$ tel que $[b-\eta_b, b] \subset]a,b]$ et :

$$\forall t \in [b-\eta_b, b[\,,\ \left\|f(t) - f\left(b^-\right)\right\| < \varepsilon$$

Prenant $x \in]b-\eta_b, b] \cap E_\varepsilon$, on désigne par φ une fonction en escaliers sur $[a,x]$ telle que $\sup\limits_{t\in[a,x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ et on la prolonge en une fonction en escaliers sur $[a,b]$ en posant $\varphi(t) = f(b^-)$ pour $t \in]x, b[$ et $\varphi(b) = f(b)$ (si $x = b$, il n'y a rien à faire), ce qui nous donne φ en escaliers sur $[a,b]$ telle que $\|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in [a,b]\,.$
On a donc $b \in E_\varepsilon$ et $\beta = b$.

4. Si f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions en escaliers, elle est réglée comme limite uniforme d'une suite de fonctions réglées (une fonction en escaliers est réglée).
Réciproquement, soit $f : [a,b] \to E$ une fonction réglée.
Pour tout entier $n \geq 1$, on a $b \in E_{\frac{1}{n}}$, donc il existe φ_n en escaliers sur $[a,b]$ telle que $\sup\limits_{t\in[a,b]} \|f(t) - \varphi_n(t)\| < \dfrac{1}{n}$.
La suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge donc uniformément vers f sur $[a,b]\,.$
5. Le résultat de la question précédente peut être utilisé pour définir l'intégrale de Riemann d'une fonction réglée f sur $[a,b]\,.$
On définit d'abord l'intégrale des fonctions en escaliers de la façon usuelle.
On vérifie ensuite que pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, ce qui résulte des inégalités :

$$\left|\int_a^b f_m(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_m(x) - f_n(x)|$$

desquelles on déduit que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.
La limite d'une telle suite ne dépend que f puisque si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f, on a pour tout entier n :

$$\left|\int_a^b g_n(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |g_n(x) - f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

On peut donc définir l'intégrale f sur $[a,b]$ par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est n'importe quelle suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]\,.$

6. Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction réglée et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble D_n des points de discontinuité de f_n est fini et la réunion $D = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$ est une partie dénombrable de de $[a,b]$.
Toutes les fonctions f_n sont continues sur l'ouvert $[a,b] \setminus D$, donc il en est de même de f puisque cette fonction est limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,b] \setminus D$.
Les points de discontinuité de f sont tous de première espèce.
7. La fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas réglée puisqu'elle est discontinue en tout point de $[0,1]$.
En effet, si $a \in [0,1]$ est un nombre rationnel [resp. irrationnel], alors pour tout réel $\eta > 0$, on peut trouver un nombre irrationnel [resp. rationnel] x dans $]a-\eta, a+\eta[\cap [0,1]$ et on a $|f(x) - f(a)| = 1$, ce qui prouve la discontinuité de f en a.
8. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \in [0,1]$, on a :
$$0 \leq \frac{E(nx)}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}$$
avec $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} < +\infty$, donc la série de fonctions $\sum \frac{E(nx)}{2^n}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
Pour montrer que f est réglée, il nous suffit de vérifier que les sommes partielles de cette série de fonctions sont des fonctions en escaliers. Comme l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[0,1]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il suffit de vérifier que chaque fonction :
$$f_n : x \in [0,1] \mapsto E(nx)$$
est en escaliers.
Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ et tout $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$, on a $E(nx) = k$ et pour $x = 1$, $E(nx) = n$, donc :
$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[} + n \cdot \mathbf{1}_{\{1\}}$$
est en escaliers.
La fonction f est don réglée sur $[0,1]$ et en conséquence Riemann-intégrable.
Comme la série de fonctions définissant f est uniformément convergente, on a :
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{E(nx)}{2^n} dx$$
avec :
$$\int_0^1 E(nx)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{n-1}{2}$$
ce qui nous donne :
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^3} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2^3} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exercice 6 $[a,b]$ *est un intervalle fermé borné fixé avec* $a < b$ *réels.*

1. *Montrer que les fonctions en escaliers positives sur $[a,b]$ sont exactement les fonctions du type :*
$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$
où $n \in \mathbb{N}^*$, les a_k sont des réels positifs ou nuls et les I_k sont des intervalles contenus dans $[a,b]$.
2. *Montrer que si $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite finie de fonctions en escaliers sur $[a,b]$, alors la fonction $\varphi = \max\limits_{1\leq k\leq n} \varphi_k$ est aussi en escaliers.*
3. *Soit f une fonction réglée définie sur $[a,b]$ et à valeurs positives.*
   (a) *Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ et telle que :*
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ \varphi_n(x) \leq f(x)$$
   (b) *On désigne par $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[a,b]$ par $\psi_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:*
   $$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$
   Monter que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
   (c) *Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*
4. *Montrer que les fonctions réglées à valeurs positives sur $[a,b]$ sont exactement les fonctions de la forme :*
$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$$
où les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs ou nuls, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'intervalles contenus dans $[a,b]$ et la série considérée converge uniformément sur $[a,b]$.
5. *Avec les notations de la question précédente, justifier l'égalité :*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ell(I_n)$$
où $\ell(I_n)$ est la longueur de l'intervalle I_n.

Solution.

1. Si φ est une fonction en escaliers sur $[a,b]$, il existe alors un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision :
$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p = b$$
telle que φ soit constante sur chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq p-1)$, ce qui peut s'écrire :
$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$
où $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ est une partition de $[a,b]$ en n intervalles (les I_k sont les $]a_j, a_{j+1}[$, pour j compris entre 0 et $p-1$ et les $\{a_j\} = [a_j, a_j]$, pour j compris entre 0 et p, les a_k étant les valeurs constantes prises par φ sur chacun de ces intervalles).
Si φ est à valeurs positives, les a_k sont tous positifs ou nuls.
Réciproquement une telle fonction est en escaliers puisque l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a,b]$ est un espace vectoriel et elle est à valeurs positives si les a_k sont tous positifs ou nuls (en dehors de la réunion des I_k, la fonction φ est nulle).

2. Si $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$ est une fonction en escaliers sur $[a, b]$, alors la fonction $|\varphi| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \mathbf{1}_{I_k}$ est aussi en escaliers.
Il en résulte que, si ψ est une autre fonction en escaliers sur $[a, b]$, la fonction :

$$\max(\varphi, \psi) = \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{|\psi - \varphi|}{2}$$

en escaliers, puis par récurrence on en déduit que si $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$, alors la fonction $\max\limits_{1 \leq k \leq n} \varphi_k$ est aussi en escaliers.

3.

(a) Comme f réglée sur $[a, b]$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une fonction en escaliers f_n telle que :

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n+1}$$

La fonction $\varphi_n = f_n - \frac{1}{n+1}$ est aussi en escaliers et pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$-\frac{1}{n+1} < f(x) - f_n(x) < \frac{1}{n+1}$$

donc :

$$0 < f(x) - \varphi_n(x) < \frac{2}{n+1}$$

donc $\varphi_n < f$ et :

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)| = \sup_{x \in [a,b]} (f(x) - \varphi_n(x)) \leq \frac{2}{n+1}$$

ce qui signifie que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f par valeurs inférieures.

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction :

$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

est en escaliers et pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$\psi_0 = 0 \leq \psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x) < f(x)$$

(puisque $f \geq 0$ et $f \geq \varphi_k$ pour tout entier k) et :

$$0 < f(x) - \psi_n(x) \leq f(x) - \varphi_n(x) < \frac{2}{n+1}$$

donc $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément en croissant vers f sur $[a, b]$.

(c) On pose $f_0 = 0$ et $f_n = \psi_n - \psi_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui définit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives.
Avec :

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} (\psi_k - \psi_{k-1}) = \psi_n - \psi_0 = \psi_n$$

on déduit que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

4. Si $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$, où la série est uniformément convergentes, les a_n sont positifs et les I_n des intervalles contenus dans $[a, b]$, la fonction :

$$f = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

est alors limite uniforme d'une suite de fonctions réglées positives et en conséquence, elle est réglée positive.
Soit f une fonction réglée positive sur $[a,b]$.
Il existe alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
En écrivant chaque fonction en escaliers f_n sous la forme :

$$f_n = \sum_{k=1}^{p_n} a_{n,k}\mathbf{1}_{I_{n,k}}$$

où les $a_{n,k}$ sont des réels positifs ou nuls et les $I_{n,k}$ sont des intervalles contenus dans $[a,b]$, en notant $p_0 = 0$, on utilise la partition :

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{n\geq 1}\{p_1+\cdots+p_{n-1}+1,\cdots,p_1+\cdots+p_{n-1}+p_n\}$$

et le fait qu'il s'agit d'une séries de fonctions positives pour écrire que :

$$f = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j\mathbf{1}_{I_j}$$

où pour $j = p_1+\cdots+p_{n-1}+k$ avec $1\leq k\leq p_n$, on note :

$$a_j\mathbf{1}_{I_j} = a_{n,k}\mathbf{1}_{I_{n,k}}$$

ce qui définit bien une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls et une suite $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'intervalles contenus dans $[a,b]$.
A priori la convergence de cette série est simple.
Pour tout entier $m\geq 1$ il existe un unique entier $n\geq 1$ tel que :

$$m\in\{p_1+\cdots+p_{n-1}+1,\cdots,p_1+\cdots+p_{n-1}+p_n\}$$

et on a :

$$R_m = \sum_{j=m}^{+\infty} a_j\mathbf{1}_{I_j} \leq \sum_{j=p_1+\cdots+p_{n-1}+1}^{+\infty} a_j\mathbf{1}_{I_j} = \sum_{p=n}^{+\infty} f_p = R'_n$$

ce qui assure la convergence uniforme (pour $\varepsilon>0$, il existe $n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ tel que $R'_n<\varepsilon$ pour tout $n\geq n_\varepsilon$, donc pour tout $m\geq m_\varepsilon = p_1+\cdots+p_{n_\varepsilon-1}+1$, on aura $R_m<\varepsilon$).

5. Par convergence uniforme, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b a_n\mathbf{1}_{I_n}(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ell(I_n)$$

Exercice 7 *La longueur d'un intervalle réel I est définie par :*

$$\ell(I) = \sup(I) - \inf(I) \in [0,+\infty] = \mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$$

1. *Soient $I=[a,b]$ un intervalle fermé, borné et $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille finie d'intervalles telle que :*

$$I\subset\bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

Montrer que :

$$\ell(I)\leq\sum_{k=1}^{n}\ell(I_k)$$

2. *Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé, borné et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

3. *Soient I un intervalle et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

4. *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles deux à deux disjoints inclus dans un intervalle I. Montrer que :*

$$\ell(I) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

Solution. Si I est un intervalle borné d'extrémités $a < b$, on a alors :

$$\ell(I) = b - a$$

En particulier, on a pour tout réel a :

$$\ell(\emptyset) = \ell(]a, a[) = 0 \text{ et } \ell([a, a]) = 0$$

Si I est non bornée, on a alors $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ et $\ell(I) = +\infty$.

1. Si l'un des intervalles I_j, pour j compris entre 1 et n, est non borné, on a alors $\ell(I_j) = +\infty$ et :

$$\ell(I) = b - a \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) = +\infty$$

On suppose donc que chaque intervalle I_k, pour k compris entre 1 et n, est borné et on note $\alpha_k \leq \beta_k$ ses extrémités.
On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, on a $I \subset I_1$, donc $\alpha_1 \leq a \leq b \leq \beta_1$ et :

$$\ell(I) = b - a \leq \beta_1 - \alpha_1 = \ell(I_1)$$

Supposons le résultat acquis pour $n - 1 \geq 1$ et soit $I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ un recouvrement fini de l'intervalle $I = [a, b]$ par des intervalles I_k bornés.
L'extrémité b de I est contenue dans l'un des I_k et, en modifiant au besoin la numérotation, on peut supposer que $k = n$.
Si $\alpha_n \leq a$, on a alors $\alpha_n \leq a \leq b \leq \beta_n$, soit $I \subset I_n$ et :

$$\ell(I) \leq \ell(I_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

Sinon, on a $a < \alpha_n \leq b \leq \beta_n$, donc :

$$[a, \alpha_n[\subset \bigcup_{k=1}^{n-1} I_k$$

et par hypothèse de récurrence, on a :

$$\alpha_n - a \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ell(I_k)$$

et tenant compte de :

$$b - \alpha_n \leq \beta_n - \alpha_n = \ell(I_n)$$

on déduit que :

$$\ell(I) = b - a = (b - \alpha_n) + (\alpha_n - a) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

2. Si l'un des I_n est non borné, le résultat est évident.
On suppose que chaque intervalle I_n, pour $n \in \mathbb{N}$, est borné et on note $\alpha_n \leq \beta_n$ ses extrémités.
Pour $\varepsilon > 0$ donné, on désigne par $(I_n(\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'intervalles ouverts définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(\varepsilon) = \left]\alpha_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \beta_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right[$$

et on a un recouvrement ouvert du compact $I = [a, b]$:

$$I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n(\varepsilon)$$

duquel on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} J_k$$

On déduit alors de la question précédente que :

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \ell(J_k) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n(\varepsilon))$$

avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ell(I_n(\varepsilon)) = \beta_n - \alpha_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

ce qui nous donne :

$$\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) + \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) + \varepsilon$$

Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

3. Si $\ell(I) = 0$ ou si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) = +\infty$, le résultat est alors évident.
Si $\ell(I) > 0$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$ est convergente, tous les I_n et I sont bornés. En notant $a < b$ les extrémités de I, pour tout segment $I' = [a', b']$ contenu dans I, on a $I' \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et de la question précédente, on déduit que :

$$\ell(I') = b' - a' \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

Faisant tendre (a', b') vers (a, b), on en déduit le résultat annoncé.

4. Si $\ell(I) = +\infty$, le résultat est alors évident.
On suppose que I est borné d'extrémités $a \leq b$.
Comme $I_n \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous ces intervalles sont bornés et on a $\bigcup_{k=0}^{n} I_k \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
En modifiant au besoin la numérotation et en notant $\alpha_n \leq \beta_n$ les extrémités de chaque intervalle I_n, comme ils sont deux à deux disjoints, on peut supposer que :
$$a \leq \alpha_0 \leq \beta_0 < \alpha_1 \leq \beta_1 < \cdots < \alpha_{n-1} \leq \beta_{n-1} < \alpha_n \leq \beta_n \leq b$$
et on a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \ell(I_k) &= \sum_{k=0}^{n} (\beta_k - \alpha_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) + (\beta_n - \alpha_n) \\ &\leq \alpha_n - \alpha_0 + b - \alpha_n \leq b - a = \ell(I)\end{aligned}$$
Faisant tendre n vers l'infini, on en déduit le résultat annoncé.

Exercice 8 *Pour tous réels $a < b$, on désigne par $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante dans $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.*
Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,b]$ (théorème de Dini). On donnera deux démonstrations de ce résultat, l'une utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass et l'autre utilisant celle de Borel-Lebesgue.
2. *Le résultat précédent est-il encore vrai dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ si on ne suppose plus l'intervalle I compact ?*
3. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}^+)$ telle que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.*
Montrer que :
$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$
4. *On désigne par $\mathcal{A}$ la famille des parties de $\mathbb{R}^2$ de la forme :*
$$A(f,g) = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$$
où f, g sont dans $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ et on note :
$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b (g(t) - f(t))\,dt$$
Montrer que cette application μ est σ-additive sur $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (i. e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$), on a :
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Solution.

1.

(a) *Solution utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass :* « un espace métrique E est compact si et seulement si de toute suite de points de E on peut extraire une sous suite convergente ».
Pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. On a donc $f(x)-f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
De la continuité de chaque fonction f_n sur le compact $[a,b]$, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in [a,b] \mid \|f - f_n\|_\infty = f(x_n) - f_n(x_n)$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|f - f_{n+1}\|_\infty &= f(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \\ &\leq f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) \leq \|f - f_n\|_\infty\end{aligned}$$

donc la suite $(\|f - f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et elle converge vers un réel $\lambda \geq 0$.
Il s'agit alors de montrer que $\lambda = 0$.
Dans le compact $[a,b]$, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in [a,b]$.
Soit p un entier positif. La fonction φ étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on peut trouver un entier n_p tel que $\varphi(n) \geq p$ pour tout $n \geq n_p$. On a alors pour tout $n \geq n_p$:

$$\begin{aligned}0 \leq \lambda &\leq \left\|f - f_{\varphi(n)}\right\|_\infty = f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right) \\ &\leq f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_p\left(x_{\varphi(n)}\right)\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini (à p fixé) et en utilisant la continuité de f, on déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leq \lambda \leq f(x) - f_p(x)$$

Enfin, en faisant tendre p vers l'infini, en utilisant la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f(x)$, on déduit que $\lambda = 0$.

(b) *Solution utilisant la caractérisation de Borel-Lebesgue :* « un espace métrique E est compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous recouvrement fini ».
Pour tout $x \in [a,b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\forall x \in I,\ \exists n_x \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_x,\ 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon$$

De la continuité de f et f_{n_x}, on déduit qu'il existe un voisinage ouvert V_x de x dans $[a,b]$ tel que :

$$\forall t \in V_x, \quad |f(x) - f(t)| \leq \varepsilon,\ \ |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(t)| \leq \varepsilon$$

On déduit alors que pour tout $t \in V_x$:

$$0 \leq f(t) - f_{n_x}(t) \leq |f(t) - f(x)| + |f(x) - f_{n_x}(x)| + |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(t)| \leq 3\varepsilon$$

Du recouvrement de $[a,b]$ par les ouverts V_x, on peut extraire un sous recouvrement fini $\bigcup_{i=1}^{p} V_{x_i}$.
On pose alors $n_0 = \max_{1\leq i\leq p} n_{x_i}$ et on a :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall t \in I, \quad 0 \leq f(t) - f_n(t) \leq f(t) - f_{n_{x_i}}(t) \leq 3\varepsilon$$

l'indice i étant tel que $t \in V_{x_i}$. Ce qui prouve bien la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur I.

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $]0,1[$ par $f_n(x) = \dfrac{-1}{1+nx}$ converge en croissant vers la fonction nulle et la convergence n'est pas uniforme sur $]0,1[$ puisque $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{-1}{2}$.

3. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de fonctions $\sum f_n$ est croissante (puisque les f_n sont à valeurs positives) et converge simplement vers la fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Le théorème de Dini nous dit alors que la convergence est uniforme et :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b S_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt$$

4. Pour f, g dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ on a :

$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b (g(t) - f(t))\,dt = \int_a^b \ell([f(t), g(t)])\,dt$$

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f_n \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et f, g dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ et :

$$A(f,g) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A(f_n, g_n)$$

étant deux à deux disjoints.
Dans ces conditions, on a :

$$\forall t \in [a,b],\ [f(t), g(t)] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [f_n(t), g_n(t)]$$

En effet, pour tout $t \in [a,b]$ et tout $y \in [f(t), g(t)]$, on a $(t,y) \in A(f,g)$, donc il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $(t,y) \in A(f_n, g_n)$, ce qui signifie que $y \in [f_n(t), g_n(t)]$. Réciproquement si $y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [f_n(t), g_n(t)]$, il existe alors un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in [f_n(t), g_n(t)]$, donc $(t,y) \in A(f_n, g_n) \subset A(f,g)$ et $y \in [f(t), g(t)]$.
On en déduit alors que :

$$\forall t \in [a,b],\ \ell([f(t), g(t)]) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell([f_n(t), g_n(t)])$$

les fonctions $t \mapsto \ell([f_n(t), g_n(t)])$ étant continues et positives. Il en résulte que :

$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b \ell([f(t), g(t)])\,dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b \ell([f_n(t), g_n(t)])\,dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A(f_n, g_n))$$

La fonction μ est donc σ-additive sur $\mathcal{A}$.

– II – Mesures et probabilités élémentaires

X est un ensemble non vide et $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X.

Définition : Une σ-algèbre (ou tribu) sur X est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ telle que :
- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;
- Si $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable).

Définition : Si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur X, on dit alors que le couple $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

Dans le cadre probabiliste, l'ensemble X est noté Ω et appelé univers, ses éléments sont appelés éventualités, ceux de $\mathcal{A}$ sont appelés événements, les singletons sont les événements élémentaires et on dit que $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable.

Deux événements disjoints sont dits incompatibles.

Définition : Une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est une application

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

telle que :
- $\mu(\emptyset) = 0$;
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (i. e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$), on a :
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$
(σ-additivité de μ).

Avec ces conditions, on dit que le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Dans le cas où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et $\mu(\Omega) = 1$, on notera $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité μ, on dit que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Pour tout événement $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de A.

Pour tout entier $r \geq 1$, on dit que les événements $A_1, \cdots, A_r$ sont mutuellement indépendants dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si, pour toute partie J non vide de $\{1, 2, \cdots, r\}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Définition : Si $\mathcal{A}$ est une famille de parties de X, on dit alors que l'intersection de toutes les σ-algèbres sur X qui contiennent $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$. C'est aussi la plus petite σ-algèbre sur X (pour l'ordre de l'inclusion sur $\mathcal{P}(X)$) qui contient $\mathcal{A}$.

On la note $\sigma(\mathcal{A})$ et on a :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ tribu sur } X \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{B}}} \mathcal{B}$$

Si $f : X \to X'$ est une application de X dans un ensemble X', alors pour toute tribu $\mathcal{A}'$ sur X', l'image réciproque :

$$f^{-1}(\mathcal{A}') = \left\{ f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}' \right\}$$

est une tribu sur X.

Pour toute famille $\mathcal{A}'$ de parties de X', on a :

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{A}')\right) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$$

Définition : Si X est un espace topologique, la tribu de Borel sur X est la σ-algèbre engendrée par les ouverts de X.

On la note $\mathcal{B}(X)$ et ses éléments sont les boréliens de X.

Une mesure de Borel sur X est une mesure sur $\mathcal{B}(X)$.

Pour $X = \mathbb{R}^p$, on peut vérifier que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ est la tribu engendré par les pavés ouverts du type :

$$P = \prod_{k=1}^{p}]a_k, b_k[$$

les $a_k < b_k$, pour k compris entre 1 et p, étant tous rationnels.

La mesure ℓ des intervalles réels se prolonge de manière unique en une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens, cette mesure étant invariante par translation, ce qui signifie que pour tout borélien B et tout réel a, on a $\ell(a+I) = l(I)$.

Cette mesure ℓ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 9 *Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Montrer que :*

1. *$X \in \mathcal{A}$;*
2. *si A, B sont dans $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \triangle B$ sont dans $\mathcal{A}$;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable).*

Solution. Cela résulte immédiatement des définitions.

1. $X = X \setminus \emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ en posant $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$.
   $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \in \mathcal{A}$, donc $A \cap B = X \setminus (X \setminus (A \cap B)) \in \mathcal{A}$.
   $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{B}$ et $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{B}$.
3. On a :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = X \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n \right) \in \mathcal{A}$$

Exercice 10 *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et E un sous ensemble non vide de X. Montrer que la famille :*

$$\mathcal{A}_E = \{B \in \mathcal{P}(E) \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ ; } B{=}A \cap E\}$$

est une tribu sur E (tribu trace de $\mathcal{A}$ su E).

Solution. On a $\emptyset = \emptyset \cap E \in \mathcal{A}_E$.
Pour tout $B \in \mathcal{A}_E$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $B = A \cap E$ et on a $E \setminus B = E \setminus (A \cap E) = (X \setminus A) \cap E$ avec $X \setminus A \in \mathcal{A}$, donc $E \setminus B \in \mathcal{A}_E$.
Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} = (A_n \cap E)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}_E$ où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, on a alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \cap E$$

avec $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}_E$.

Exercice 11 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$ *telle que* $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) < +\infty$.
Montrer que :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \mu_{k,n}$$

où on a noté pour $1 \leq k \leq n$ *:*

$$\mu_{k,n} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$$

(formule de Poincaré).

Solution. Comme $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ contient toutes les intersections $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$, l'hypothèse $\mu(A) < +\infty$ nous dit que tous ces ensembles $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ sont tous de mesure finie.
On peut prouver la formule de Poincaré par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, c'est clair.
Pour $n = 2$, on utilise les partitions :

$$\begin{cases} A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \setminus A_2) \\ A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \\ A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2)$$

$$\mu(A_2) = \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1)$$

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2) &= \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1) \\ &= \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1) - \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

Supposons le résultat acquis pour $n \geq 2$ et soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n+1} A_k\right) < +\infty$.
En notant $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} A_k$ et $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, le cas $n = 2$, nous donne :

$$\mu(A) = \mu(A_{n+1}) + \mu(B) - \mu(A_{n+1} \cap B)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$$

donc :

$$\mu(A_{n+1}) + \mu(B) = \sum_{i_1=1}^{n+1} \mu(A_{i_1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k < n+1} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$$

(l'inégalité $i_k \leq n$ est équivalente à $i_k < n+1$) et :

$$\begin{aligned}\mu(A_{n+1} \cap B) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1})\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j} \cap A_{n+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j < i_{j+1} = n+1} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}}\right)\end{aligned}$$

Le changement d'indice $k = j+1$ dans cette dernière somme nous donne :

$$\mu(A_{n+1} \cap B) = \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} < i_k = n+1} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mu(A) = &\sum_{i_1=1}^{n+1} \mu(A_{i_1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k < n+1} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ &+ \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} < i_k = n+1} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n+1} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})\end{aligned}$$

en utilisant, pour tout k compris entre 2 et $n+1$ la partition :

$$\begin{aligned}\{(i_1, \cdots, i_k) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n+1\} = &\{(i_1, \cdots, i_k) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k < n+1\} \\ &\cup \{(i_1, \cdots, i_{k-1}, n+1) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} < n+1\}\end{aligned}$$

Exercice 12 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles.*
Montrer que l'ensemble d'indice :

$$D = \{k \in I \mid \mathbb{P}(A_k) \in]0,1]\}$$

est dénombrable (fini ou infini).
En particulier, l'ensemble :

$$\{x \in X \mid \mathbb{P}(\{x\}) \in]0,1]\}$$

est dénombrable.

Solution. En écrivant que $D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left\{k \in I \mid \mathbb{P}(A_k) \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]\right\}$, il nous suffit de montrer que tous les :

$$D_n = \left\{k \in I \mid \mathbb{P}(A_k) \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]\right\}$$

sont finis.
Si pour $n \geq 1$ l'ensemble D_n est infini, on dispose alors d'une suite infinie $\left(A_{k_j}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que :

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_{k_j}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{k_j}\right) \leq 1$$

avec $\mathbb{P}\left(A_{k_j}\right) \geq \frac{1}{n}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible.

Exercice 13

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & \mathcal{P}(X) & \rightarrow & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \mathbf{1}_A(x) \end{array}$$

est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$ (mesure de Dirac en x).

2. *On suppose que $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable.*

   Montrer que pour toute suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P} : & \mathcal{P}(X) & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) \end{array} \tag{1}$$

est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

3. *Réciproquement, montrer que toute mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(X, \mathcal{P}(X))$ peut s'exprimer sous la forme (1).*

Solution.

1. Comme $x \notin \emptyset$, on a $\delta_x(\emptyset) = 0$.
   Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
   Si $x \notin A$, on a alors $x \notin A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\delta_x(A_n) = 0$ et :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_x(A_n) = 0 = \delta_x(A)$$

   Si $x \in A$, il existe alors un unique entier n_0 tel que $x \in A_{n_0}$, donc $\delta_x(A_{n_0}) = 1$ et $\delta_x(A_n) = 0$ pour tout $n \neq n_0$, ce qui nous donne :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_x(A_n) = 1 = \delta_x(A)$$

   En définitive, δ_x est bien une mesure sur $\mathcal{P}(X)$.
   Comme $\delta_x(X) = 1$, cette mesure est une probabilité.

2. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ et $0 \leq p_n \delta_{x_n}(A) \leq p_n$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la série définissant $\mathbb{P}(A)$ est bien définie et en particulier :

$$\mathbb{P}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\delta_{x_n}(\emptyset) = 0$, donc $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
   Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
   En notant $u_{n,m} = p_n \delta_{x_n}(A_m)$ pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A_m) = p_n \sum_{m=0}^{+\infty} \delta_{x_n}(A_m) = p_n \delta_{x_n}(A) < +\infty$$

   et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_n < +\infty$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A_m) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A_m) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_m)\end{aligned}$$

En conclusion $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

3. Il suffit de poser $p_n = \mathbb{P}(\{x_n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On a bien :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{x_n\}) = \mathbb{P}(X) = 1$$
   et pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$:
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ x_n \in A}} \mathbb{P}(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A)$$

Exercice 14 *Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ telle que :*
- $\emptyset \in \mathcal{A}$ *;*
- $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;*
- $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2,\ A \cap B \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par intersection finie) ;*

($\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole) et $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ une application telle que :
- $\mu(\emptyset) = 0$ *;*
- *μ est σ-additive (i. e. $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$).*

1. *Montrer que, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ et $A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$ (dans le cas où $n \geq 2$).*
2. *Montrer que μ est croissante.*
3. *Soient $A \in \mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que :*
$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$
   (inégalité de Boole).

Solution.

1. On vérifie facilement par récurrence sur $n \geq 1$ que, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, donc :
$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus A_k) \in \mathcal{A}$$

et $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X \setminus \left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \in \mathcal{A}$.

Pour A, B dans $\mathcal{A}$, on a $B \setminus A = (X \setminus A) \cap B \in \mathcal{A}$, donc $\displaystyle A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$.

2. Pour $A \subset B$ dans $\mathcal{A}$, on a $B \setminus A \in \mathcal{A}$ et :

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

ce qui signifie que μ est croissante.

3. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X définie par $B_0 = A_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (pour $0 \leq n < m$, on a $B_n \subset A_n$ et un élément de B_m n'est pas dans A_n).
Comme $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Pour tout $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ il existe un plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_n$.
Si $n = 0$, on a alors $x \in A_0 = B_0$.
Si $n \geq 1$, on a alors $x \in A_n$ et $x \notin A_k$ pour tout k compris entre 0 et $n-1$, soit $x \in B_n$.
On a donc $A \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ et $A = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap B_n$ dans $\mathcal{A}$.
Comme μ est σ-additive et croissante, il en résulte que :

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

(puisque $A \cap B_n \subset B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 15 *On se propose de montrer qu'une tribu dénombrable sur X est nécessairement finie de cardinal égal à une puissance de 2.*
Ce qui revient aussi à dire qu'une tribu infinie est non dénombrable.
Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre dénombrable sur X.
Pour tout $x \in X$, on note :

$$A(x) = \bigcap_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ x\in A}} A$$

(atome de x).

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, $A(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ qui contient x.*
2. *Soient x, y dans X. Montrer que si $y \in A(x)$, on a alors $A(x) = A(y)$.*
3. *Montrer que, pour tous x, y dans X, on a $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ ou $A(x) = A(y)$.*
4. *En désignant par $(x_i)_{i\in I}$ la famille des éléments de X telle que les $A(x_i)$ soient deux à deux disjoints, montrer que cette famille est dénombrable et que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a une partition $A = \displaystyle\bigcup_{j\in J} A(x_j)$, où J est une partie de I.*
5. *En déduire que $\mathcal{A}$ est finie, son cardinal étant une puissance de 2.*

Solution.

1. Comme $x \in X \in \mathcal{A}$, il existe des éléments de $\mathcal{A}$ qui contiennent x et $A(x)$ est bien défini contenant x. Comme $\mathcal{A}$ est dénombrable, l'ensemble $A(x)$ qui est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$.
Si A est un élément de $\mathcal{A}$ qui contient x, il fait partie des éléments de $\mathcal{A}$ qui apparaissent dans l'intersection $A(x)$, donc $A(x) \subset A$.
2. Si $y \in A(x)$, l'ensemble $A(x)$ est un élément de $\mathcal{A}$ qui contient x, donc $A(y) \subset A(x)$.
Pour montrer que $A(x) \subset A(y)$, il nous suffit de montrer que $x \in A(y)$.
Si $x \notin A(y)$, l'ensemble $A(x) \setminus A(y)$ est dans $\mathcal{A}$ contenant x, donc :
$$A(x) \subset A(x) \setminus A(y) \subset A(x)$$
soit $A(x) = A(x) \setminus A(y)$ avec $A(y) \subset A(x)$, ce qui équivaut à $A(y) = \emptyset$ et contredit le fait que $y \in A(y)$.
On a donc l'égalité $A(x) = A(y)$.
3. Si $A(x) \cap A(y) = \emptyset$, c'est alors terminé.
Sinon, pour tout $z \in A(x) \cap A(y)$, on a $A(x) = A(z) = A(y)$.
4. Comme les $A(x)$ sont dans $\mathcal{A}$ qui est dénombrable, la famille $(A(x))_{x \in X}$ est aussi dénombrable et comme deux de ces ensembles sont disjoints ou confondus, il existe une partie I de $\mathbb{N}$ telle que $(A(x))_{x \in X} = (A(x_i))_{i \in I}$ (axiome du choix dénombrable : on choisit un représentant de chaque classe dans la relation d'équivalence « être dans le même $A(x)$ »), les $A(x_i)$ étant deux à deux disjoints.
On a donc une partition $X = \bigcup_{i \in I} A(x_i)$.
Tout $A \in \mathcal{A}$ s'écrit $A = A \cap X = \bigcup_{i \in I} (A \cap A(x_i))$.
Pour $i \in I$ tel que $A \cap A(x_i) \neq \emptyset$, il existe $x \in A \cap A(x_i)$, donc $x \in A$ et $A(x_i) = A(x)$ (puisque $x \in A(x_i)$), ce qui nous donne $A(x_i) \subset A$ (caractère minimal de $A(x) = A(x_i)$) et $A \cap A(x_i) = A(x_i)$.
On a donc en définitive, $A = \bigcup_{j \in J} A(x_j)$ où $J \subset I$.
5. Si I est infini, on peut alors prendre $I = \mathbb{N}$ et l'application :
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathcal{A} \\ & J & \mapsto & \bigcup_{j \in J} A(x_j) \end{array}$$
est bijective.
En effet, elle est surjective car tout $A \in \mathcal{A}$ s'écrit $A = \bigcup_{j \in J} A(x_j)$ où $J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
Pour $J \neq K$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a $\varphi(J) \neq \varphi(K)$ puisque les $A(x_i)$, pour $i \in \mathbb{N}$, sont non vides et deux à deux disjoints.
Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable, on aboutit à une contradiction.
Donc I est fini et il en est de même de $\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j \in J} A(x_j) \mid J \subset I \right\}$.
Précisément, on a :
$$\operatorname{card}(\mathcal{A}) = \operatorname{card}(\mathcal{P}(I)) = 2^{\operatorname{card}(I)}$$

Exercice 16 *Soit X un ensemble dénombrable.*
Montrer que la σ-algèbre engendrée par les singletons de X est $\mathcal{P}(X)$.

Solution. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ la σ-algèbre engendrée par les singletons de X.
Tout $A \in \mathcal{P}(X)$ s'écrivant comme réunion dénombrable de singletons, il est dans $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

Exercice 17 *Soit X un ensemble non dénombrable.*

1. *Montrer que la famille $\mathcal{A}$ formée des parties A de X telles que A ou ou $X \setminus A$ est dénombrable est une σ-algèbre sur X.*
2. *Montrer que $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre engendrée par les singletons de X.*
3. *Montrer que l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \mathcal{A} & \to & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 \text{ si } X \setminus A \text{ est dénombrable} \end{array} \right. \end{array}$$

est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$.

Solution.

1. Comme $\emptyset$ est dénombrable, il est dans $\mathcal{A}$.
Soit $A \in \mathcal{A}$. Si A est dénombrable, alors $X \setminus A$ est de complémentaire dénombrable, donc $X \setminus A \in \mathcal{A}$, sinon $X \setminus A$ est dénombrable et $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Si tous les A_n sont dénombrables, il en est alors de même de A et $A \in \mathcal{A}$.
Sinon, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $X \setminus A_{n_0}$ est dénombrable et avec :
$$X \setminus A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n) \subset X \setminus A_{n_0}$$
on déduit que $X \setminus A$ est dénombrable et $A \in \mathcal{A}$.
2. Un singleton qui est dénombrable est dans $\mathcal{A}$, donc la σ-algèbre $\mathcal{A}'$ engendrée par les singletons de X est contenue dans $\mathcal{A}$.
Soit A dans $\mathcal{A}$.
Si A est dénombrable, il est alors réunion dénombrable de singletons, donc dans $\mathcal{A}'$, sinon c'est $X \setminus A$ qui est dénombrable donc dans $\mathcal{A}'$ et $A = X \setminus (X \setminus A)$ est aussi dans $\mathcal{A}'$.
On a donc $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.
3. On a $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ car $\emptyset$ est dénombrable.
Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Si tous les A_n sont dénombrables, il en est alors de même de $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et :
$$\mathbb{P}(A) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$
Sinon, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $X \setminus A_{n_0}$ est dénombrable. Comme $A_n \cap A_{n_0} = \emptyset$ pour $n \neq n_0$, on a $A_n \subset X \setminus A_{n_0}$ et A_n est dénombrable, donc :
$$\mathbb{P}(A) = 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$
(A qui contient A_{n_0} est non dénombrable comme X, donc $X \setminus A$ est dénombrable puisque $A \in \mathcal{A}$).

Exercice 18 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Montrer que si A, B sont des éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A \subset B$ et $\mu(B) < +\infty$, on a alors :*
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

2. *Soient* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante d'éléments de* $\mathcal{A}$ *et* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$*. Montrer que la suite* $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en croissant vers* $\mu(A)$ *(continuité croissante de* μ*).*
3. *Soient* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante d'éléments de* $\mathcal{A}$ *et* $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$*. En supposant qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mu(A_{n_0}) < +\infty$*, montrer que la suite* $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en décroissant vers* $\mu(A)$ *(continuité décroissante de* μ*).*

Solution.

1. Pour $A \subset B$ dans $\mathcal{A}$, on a la partition $B = A \cup (B \setminus A)$, donc :
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$
Avec $\mu(A) \leq \mu(B) < +\infty$, on en déduit que :
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$
2. On a la partition :
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$$
En effet si $x \in A$, il existe un entier n tel que $x \in A_n$. Si $n = 0$, on a bien $x \in A_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$, sinon en désignant par $n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $x \in A_n$, on a $x \in A_n \setminus A_{n-1}$ et $x \in A_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$.
Pour $0 \leq n < m$, on a $A_n \subset A_{m-1}$ et $(A_m \setminus A_{m-1}) \cap A_n = \emptyset$, donc $(A_m \setminus A_{m-1}) \cap (A_n \setminus A_{n-1}) = \emptyset$ (en posant $A_{-1} = \emptyset$).
Il en résulte que :
$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\mu(A_0) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \setminus A_{k-1})\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \setminus A_{k-1})\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)\end{aligned}$$
la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante.
3. Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a :
$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n \subset A_{n_0}$$
et :
$$\mu(A) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_{n_0} \setminus A)$$
(puisque $\mu(A_{n_0}) < +\infty$) avec :
$$A_{n_0} \setminus A = A_{n_0} \setminus \bigcap_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty} (A_{n_0} \setminus A_n)$$
la suite $(A_{n_0} \setminus A_n)_{n\geq n_0+1}$ étant croissante dans $\mathcal{A}$, ce qui nous donne :
$$\mu(A_{n_0} \setminus A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_{n_0} \setminus A_n) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

et :

$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante.
Si tous les $\mu(A_n)$ sont infinis, ce résultat n'est plus vrai comme le montrer de $A_n = [n, +\infty[$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue. On a $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Exercice 19 *Soient $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x])$$

(fonction de répartition de $\mathbb{P}$).

1. *Montrer que F est croissante avec, pour tout réel x :*

$$\lim_{t\to x^+} F(t) = F(x)\,,\ \lim_{t\to x^-} F(t) = F(x) - \mathbb{P}(\{x\})$$

et :

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0,\ \lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$$

2. *Montrer que l'ensemble :*

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\{x\}) > 0\}$$

est dénombrable.

Solution.

1. Pour $x \leq y$, on a $]-\infty, x] \subset]-\infty, y]$ et en conséquence $F(x) \leq F(y)$.
Comme F est croissante, elle admet une limite à gauche $F(x^-)$ et une limite à droite $F(x^+)$ en tout point x.
Pour $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right)_{n\geq 1}$ est décroissante dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et :

$$]-\infty, x] = \bigcap_{n\geq 1} \left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right]$$

donc :

$$F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n\to+\infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right) = F\left(x^+\right)$$

ce qui signifie que continue à droite en x.
Avec les mêmes arguments, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(]-\infty, x[) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} \left]-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left]-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right) = F\left(x^-\right)\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1}]-\infty, n]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(]-\infty, n]) \\ &= \lim_{n\to+\infty} F(n) = \lim_{t\to+\infty} F(t)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}0 = \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}]-\infty, -n]\right) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(]-\infty, -n]) \\ = \lim_{n\to+\infty} F(-n) = \lim_{t\to-\infty} F(t) = 0\end{aligned}$$

(F est croissante minorée par 0 et majorée par 1, donc les limites en $-\infty$ et $+\infty$ existent).

2. L'ensemble des points de discontinuité de F est dénombrable puisque cette fonction est décroissante (donc réglée).
La fonction F est continue en x si, et seulement si, $\lim\limits_{t\to x^+} F(t) = \lim\limits_{t\to x^-} F(t) = F(x)$, ce qui revient à dire que $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$, donc l'ensemble $\mathcal{D}$ est exactement l'ensemble des points de discontinuité de F et il est dénombrable.
En fait, on a déjà montré ce résultat sans référence aux fonctions réglées (exercice 12).

Exercice 20 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Que dire d'un événement A qui est indépendant de tout autre événement ?*

Solution. Comme A est en particulier indépendant de lui même, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap A) = (\mathbb{P}(A))^2$$

donc $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on a alors pour tout événement B :

$$0 \leq \mathbb{P}(A\cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0$$

donc $\mathbb{P}(A\cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on a alors $\mathbb{P}(\Omega\setminus A) = 0$ et $\Omega\setminus A$ est indépendant de tout autre événement et c'est aussi le cas pour A.
En conclusion, A est indépendant de tout autre événement si, et seulement si, $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 21 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \cdots, A_n$, où $n \geq 2$, des événements mutuellement indépendants dans $\mathcal{A}$.*

1. *Montrer que $\Omega\setminus A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants.*
2. *En déduire que pour tout entier k compris entre 1 et n, les événements $\Omega\setminus A_1, \cdots, \Omega\setminus A_k, A_{k+1}, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants.*

Solution.

1. On note $A'_1 = \Omega\setminus A_1$, $A'_k = A_k$ pour k compris entre 2 et n et on se donne une partie J non vide de $\{1, 2, \cdots, n\}$.
Si $1 \notin J$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A'_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A'_j).$$

Si J a plus de 2 éléments et $1 \in J$ (pour $J = \{j\}$, il n'y a rien à montrer), on a alors :

$$\bigcap_{j\in J} A'_j = (\Omega\setminus A_1) \cap \left(\bigcap_{j\in J\setminus\{1\}} A_j\right) = \bigcap_{j\in J\setminus\{1\}} A_j \setminus \bigcap_{j\in J} A_j$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A'_j\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J\setminus\{1\}} A_j\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \\
&= \prod_{j\in J\setminus\{1\}} \mathbb{P}(A_j) - \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j) \\
&= (1-\mathbb{P}(A_1)) \prod_{j\in J\setminus\{1\}} \mathbb{P}(A_j) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}\left(A'_j\right)
\end{aligned}$$

2. On procède par récurrence finie.

Exercice 22 *Soit $n \geq 2$ un entier naturel.*
On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où $\Omega = \{1, \cdots, n\}$ et :

$$\forall k \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}$$

ce qui revient à considérer l'expérience aléatoire qui consiste à choisir de manière équiprobable un entier compris entre 1 et n.
Pour tout diviseur positif d de n, on désigne par A_d l'événement :≪ le nombre choisi est divisible par d ≫.

1. *Calculer $\mathbb{P}(A_d)$ pour tout diviseur positif d de n.*
2. *Montrer que si $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ sont tous les diviseurs premiers de n, les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont alors mutuellement indépendants.*
3. *On désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler définie sur $\mathbb{N}^*$ par*

$$\varphi(n) = \operatorname{card}\{k \in \{1, \cdots, n\} \mid k \wedge n = 1\}$$

   Montrer que

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

4. *Soit d un diviseur positif d de n. Calculer la probabilité de l'événement B_d : ≪ le nombre a choisi est tel que $a \wedge n = d$ ≫.*
5. *En déduire que :*

$$n = \sum_{d/n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

Solution.

1. Pour d divisant n, on a $n = qd$ et :

$$A_d = \{a \in \Omega \mid \exists j \in \Omega\ ;\ a = dj\} = \{d, 2d, \cdots, qd\}$$

   donc :

$$\mathbb{P}(A_d) = \frac{\operatorname{card}(A_d)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{q}{n} = \frac{1}{d}$$

2. Soit J une partie non vide de $\{1, 2, \cdots, r\}$. Les entiers p_j pour $j \in J$ sont premiers et distincts, donc premiers entre eux et un entier a compris entre 1 et n, est divisible par tous les p_j si, et seulement si, il est divisible par leur produit. On a donc :

$$\bigcap_{j \in J} A_{p_j} = A_{\prod\limits_{j \in J} p_i}$$

et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_{p_j}\right) = \mathbb{P}(A_{\prod\limits_{j \in J} p_i}) = \frac{1}{\prod\limits_{j \in J} p_i} = \prod_{j \in J} \frac{1}{p_j} = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_{pj})$$

Les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont donc mutuellement indépendants.

3. Si A désigne l'événement : « l'entier choisi est premier avec n », on a alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\varphi(n)}{n}$$

et en désignant par $p_1 < \cdots < p_r$ tous les diviseurs premiers de n, on aura $k \in A$ si, et seulement si, k n'est divisible par aucun des p_i, donc :

$$A = \bigcap_{i=1}^{r} (\Omega \setminus A_{p_i})$$

Les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ étant mutuellement indépendants, il en est de même des événements $\Omega \setminus A_{p_1}, \cdots, \Omega \setminus A_{p_r}$, donc :

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}(\Omega \setminus A_{p_i}) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

4. On a $n = qd$ et :

$$B_d = \{a \in \Omega \mid a \wedge n = d\} = \{a \in \Omega \mid a \wedge qd = d\}$$

Dire que $a \wedge qd = d$ équivaut à dire que d divise a et $\frac{a}{d} \wedge q = 1$, ce qui revient à dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $a = kd$ et $k \wedge q = 1$. Comme $1 \leq a = kd \leq n = qd$, on a $1 \leq k \leq q$ et donc :

$$\operatorname{card}(B_d) = \operatorname{card}\{k \in \{1, \cdots, q\} \mid k \wedge q = 1\} = \varphi(q)$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(B_d) = \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

5. On a la partition $\Omega = \bigcup\limits_{d/n} B_d$ (les B_d forment un système complet d'événements), ce qui nous donne :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{d/n} \mathbb{P}(B_d) = \frac{1}{n} \sum_{d/n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

Exercice 23 *On munit l'ensemble* $\mathbb{N}^*$ *de la tribu* $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.
On rappelle que la fonction dzéta de Riemann est définie par :

$$\forall \alpha > 1,\ \zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

On note :

$$2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$$

la suite infinie des nombres premiers rangée dans l'ordre strictement croissant.

1. *Montrer que l'on définit une probabilité sur* $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ *en posant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \frac{1}{n^\alpha}$$

2. *Montrer que :*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(p\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^\alpha}$$

où on a noté $p\mathbb{N}^*$ *l'ensemble de tous les multiples positifs de* p.

3. *Montrer que :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_n\mathbb{N}^*)\right) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$$

4. *En déduire que :*

$$\forall \alpha > 1,\ \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^\alpha}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

5.
   (a) *Montrer que* $\lim\limits_{\alpha \to 1^+} \zeta(\alpha) = +\infty$.

   (b) *Déduire de la question précédente que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$.

Solution.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(\{n\}) > 0$ et :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1$$

donc $\mathbb{P}$ est bien une mesure de probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

2. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(p\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{kp\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{kp\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha p^\alpha} = \frac{1}{p^\alpha}$$

3. L'ensemble $A = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_n\mathbb{N}^*)$ est l'ensemble des entiers qui ne sont multiples d'aucun nombres premier, c'est donc le singleton $\{1\}$, donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$$

4. En notant, pour tout entier $n \geq 1$:

$$A_n = \bigcap_{k=1}^{n} (\mathbb{N}^* \setminus p_k\mathbb{N}^*)$$

on définit une suite décroissante d'évènements (A_n est l'ensemble des entiers qui ne sont multiples d'aucun des nombres premier $p_1, \cdots, p_n$, donc $A_{n+1} \subset A_n$) et on a :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_n\mathbb{N}^*) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

ce qui nous donne :

$$\frac{1}{\zeta(\alpha)} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Il s'agit alors de calculer les probabilités $\mathbb{P}(A_n)$.
Pour ce faire, on vérifie que la famille $(p_k\mathbb{N}^*)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est formée d'évènements mutuellement indépendants.
En effet, pour toute partie I finie de $\mathbb{N}^*$, on a $\bigcap_{k\in I} p_k\mathbb{N}^* = \underset{k\in I}{\mathrm{ppcm}}(p_k)\,\mathbb{N}^*$ par définition du ppcm, avec $\underset{k\in I}{\mathrm{ppcm}}(p_k) = \prod_{k\in I} p_k$ puisque les p_k sont premiers deux à deux distincts, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} p_k\mathbb{N}^*\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\prod_{k\in I} p_k\right)\mathbb{N}^*\right) = \frac{1}{\prod\limits_{k\in I} p_k^\alpha} = \prod_{k\in I}\left(\frac{1}{p_k^\alpha}\right)\\ &= \prod_{k\in I}\mathbb{P}(p_k\mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

Il en est donc de même de la famille $(\mathbb{N}^*\setminus p_k\mathbb{N}^*)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et on a :

$$\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\mathbb{N}^*\setminus p_k\mathbb{N}^*) = \prod_{k=1}^{n}(1-\mathbb{P}(p_k\mathbb{N}^*)) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^\alpha}\right)$$

ce qui nous donne :

$$\frac{1}{\zeta(\alpha)} = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^\alpha}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^\alpha}}$$

5.

(a) Pour tout réel $\alpha > 1$ et tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\zeta(\alpha) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k^\alpha}\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\\ &> \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k^\alpha}\right)\end{aligned}$$

avec $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$

Pour tout réel $M > 0$, il existe donc un entier n_M tel que $\sum_{k=1}^{n_M}\frac{1}{k} > 2M$, ce qui nous donne :

$$\zeta(\alpha) > 2M - \sum_{k=1}^{n_M}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k^\alpha}\right)$$

avec $\lim_{\alpha\to1^+}\sum_{k=1}^{n_M}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k^\alpha}\right) = 0.$

Il existe donc un entier $\eta > 0$ tel que $\sum_{k=1}^{n_M}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k^\alpha}\right) < M$ pour tout réel $\alpha \in \left]1, 1+\eta\right[$, ce qui nous donne :

$$\forall\alpha\in\left]1,1+\eta\right[,\ \zeta(\alpha) > 2M - M = M$$

On a donc ainsi prouvé que $\lim_{\alpha\to1^+}\zeta(\alpha) = +\infty.$

(b) Par continuité de la fonction ln, on a pour tout réel $\alpha > 1$:

$$\ln(\zeta(\alpha)) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)$$

Comme $\lim_{\alpha \to 1^+} \ln(\zeta(\alpha)) = +\infty$, on peut trouver pour tout réel $M > 0$ un réel $\alpha > 1$ tel que $\ln(\zeta(\alpha)) > 2M$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \geq -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right) &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right) \\ &> 2M + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right) \end{aligned}$$

avec $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right) = 0.$

On peut alors trouver un entier $n_M \geq 1$ tel que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right) > -M$ pour tout $n \geq n_M$, ce qui nous donne :

$$\forall n \geq n_M, \ -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) > M$$

On a donc prouvé que $-\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) = +\infty$ et en conséquence $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$ puisque $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \underset{n \to +\infty}{\backsim} \frac{1}{p_n}$.

Exercice 24 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement décroissante et de limite nulle. Déterminer un réel λ pour lequel il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(\mathbb{N} \cap [n, +\infty[) = \lambda u_n$$

Solution. De $1 = \mathbb{P}(\mathbb{N}) = \lambda u_0$, on déduit que nécessairement, $\lambda = \frac{1}{u_0}$ (comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante de limite nulle, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et pour tout tout entier $n \in \mathbb{N}$, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{n\}) &= \mathbb{P}(\mathbb{N} \cap [n, +\infty[) - \mathbb{P}(\mathbb{N} \cap [n+1, +\infty[) \\ &= \frac{u_n - u_{n+1}}{u_0} \end{aligned}$$

On vérifie alors que $\mathbb{P}$ ainsi définie est une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ satisfaisant à la demande.
On a $\mathbb{P}(\{n\}) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{u_0} \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n - u_{n+1}) = 1$$

puisque $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
Donc est $\mathbb{P}$ est bien une mesure de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
Pour tout tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{N} \cap [n, +\infty[) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{u_0} \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) \\ &= \frac{u_n}{u_0} = \lambda u_n \end{aligned}$$

Exercice 25 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*
Pour tous A, B *dans* $\mathcal{A}$, *on note :*

$$d(A, B) = \mathbb{P}(A \triangle B)$$

1. *Montrer que, pour tous* A, B, C *dans* $\mathcal{A}$, *on a :*

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

2. *En déduire que, pour tous* A, B *dans* $\mathcal{A}$, *on a :*

$$|\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$$

Solution.

1. Résulte de :

$$A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$$

2. Pour tous A, B dans $\mathcal{A}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \triangle \emptyset) = d(A, \emptyset) &\leq d(A, B) + d(B, \emptyset) \\ &\leq \mathbb{P}(A \triangle B) + \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

soit :

$$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$$

Comme A et B jouent des rôles symétriques, on a aussi :

$$\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$$

soit en définitive :

$$|\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$$

Exercice 26 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Montrer que, pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'événements deux à deux incompatibles, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

Solution. Résulte de :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq 1$$

Exercice 27 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Montrer que, pour toute suite finie* $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ *d'événements, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) + (n-1)$$

Solution. La première inégalité est déjà vue (inégalité de Boole, exercice 14) et elle entraîne la seconde. Il suffit décrire que :

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\Omega \setminus \bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\Omega \setminus A_k) = \sum_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\ &\leq n - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - (n-1)$$

Exercice 28 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements. On note :*

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

$\limsup_{n\to+\infty} A_n$ *est l'ensemble des* $x \in \Omega$ *qui appartiennent à une infinité de* A_n *et* $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ *est l'ensemble des* $x \in \Omega$ *qui appartiennent à tous les* A_n *sauf au plus un nombre fini.*

1. *Montrer que :*

$$\Omega \setminus \limsup_{n\to+\infty} A_n = \liminf_{n\to+\infty} (\Omega \setminus A_n)$$

$$\Omega \setminus \liminf_{n\to+\infty} A_n = \limsup_{n\to+\infty} (\Omega \setminus A_n)$$

$$\left(x \in \limsup_{n\to+\infty} A_n\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}(x) = +\infty\right)$$

$$\left(x \in \liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\Omega\setminus A_n}(x) < +\infty\right)$$

2. *Montrer que :*

   (a) *si la série* $\sum \mathbb{P}(A_n)$ *converge, on a alors* $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$ *;*

   (b) *si les événements* A_n *sont mutuellement indépendants et la série* $\sum \mathbb{P}(A_n)$ *diverge, on a alors* $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 1$ *(loi du zéro-un de Kolmogorov).*

3. *Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(n \cdot \mathbb{N}^*) = \frac{1}{n}$$

Solution.

1.

   (a) On a :

$$\Omega \setminus \limsup_{n\to+\infty} A_n = \Omega \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} (\Omega \setminus A_k)$$
$$= \liminf_{n\to+\infty} (\Omega \setminus A_n)$$

et :

$$\Omega \setminus \liminf_{n\to+\infty} A_n = \Omega \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} (\Omega \setminus A_k)$$
$$= \limsup_{n\to+\infty} (\Omega \setminus A_n)$$

(b) On a :

$$\left(x \notin \limsup_{n\to+\infty} A_n\right) \Leftrightarrow \left(x \in \liminf_{n\to+\infty} (\Omega \setminus A_n)\right) \Leftrightarrow (\exists n_x \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n_x \mid x \notin A_k)$$
$$\Leftrightarrow (\exists n_x \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n_x \mid \mathbf{1}_{A_k}(x) = 0)$$
$$\Leftrightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}(x) < +\infty\right)$$

puisque les $\mathbf{1}_{A_n}(x)$ valent 0 ou 1.
Donc :

$$\left(x \in \limsup_{n\to+\infty} A_n\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}(x) = +\infty\right)$$

Il en résulte que :

$$\left(x \notin \liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \Leftrightarrow \left(x \in \limsup_{n\to+\infty} (\Omega \setminus A_n)\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\Omega\setminus A_n}(x) = +\infty\right)$$

donc :

$$\left(x \in \liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\Omega\setminus A_n}(x) < +\infty\right)$$

2.

(a) Comme la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a :

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

avec :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k) = R_n$$

Dans le cas où la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, on a $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ et en conséquence, $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$.

(b) On a :

$$\Omega \setminus \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \setminus B_n)$$

la suite $(\Omega \setminus B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, donc :

$$1 - \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\Omega \setminus B_n)$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $m > n$, on a :

$$\Omega \setminus B_n = \bigcap_{k\geq n} (\Omega \setminus A_k) \subset \bigcap_{k=n}^{m} (\Omega \setminus A_k)$$

Dans le cas où les événements A_k sont mutuellement indépendants, il en est de même des $\Omega \setminus A_k$ et on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{m} (\Omega \setminus A_k)\right) = \prod_{k=n}^{m} \mathbb{P}((\Omega \setminus A_k)) = \prod_{k=n}^{m} (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

En utilisant l'inégalité $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout réel x, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(\Omega \setminus B_n) \leq \prod_{k=n}^{m} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \exp\left(-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)\right)$$

Dans le cas où $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, faisant tendre $m > n$ vers l'infini, on en déduit que $\mathbb{P}(\Omega \setminus B_n) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et en conséquence, $\mathbb{P}\left(\limsup_{n \to +\infty} A_n\right) = 1$.

3. Supposons qu'il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(n \cdot \mathbb{N}^*) = \frac{1}{n}$$

En désignant par $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers ordonnée dans l'ordre croissant, on a :

$$A = \limsup_{n \to +\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} p_k \cdot \mathbb{N}^* = \emptyset$$

(sinon, on aurait un entier $a \in \mathbb{N}^*$ divisible par une infinité de nombres premiers), donc $\mathbb{P}(A) = 0$. Mais de $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(p_n \cdot \mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$, on déduit que $\mathbb{P}(A) = 1$, soit une impossibilité.

– III – Fonctions mesurables

Définition : Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est mesurable si, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Dans le cas où X, Y sont deux espaces topologiques et $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont les tribus de Borel, une fonction mesurable de X dans Y est dite borélienne.

Une fonction continue est mesurable (i. e. borélienne).

Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si, et seulement si, on a $f^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}$ pour tout réel a.

La composée, la somme, le produit et une limite simple de fonctions mesurables est mesurable.

Les fonctions réglées de $[a, b]$ dans un espace de Banach E sont boréliennes (c'est le cas par exemples, pour les fonctions monotones et les fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$).

Dans le cas où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire réelle toute fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et variable aléatoire vectorielle (ou vecteur aléatoire) toute fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p))$.

Dans le cas d'une variable aléatoire réelle, on note pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $(X \in B)$ l'événement $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, soit :

$$(X \in B) = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$$

Dans le cas particulier des intervalles, on note respectivement $(X = x)$, $(X < a)$, $(a \leq X < b)$, $\cdots$, les événements $X^{-1}(\{x\})$, $X^{-1}(]-\infty, a[)$, $X^{-1}([a, b[)$, $\cdots$

La loi d'une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$$

(mesure image de $\mathbb{P}$ par X).

On dit qu'une partie N d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est négligeable si elle est contenue dans une partie $A \in \mathcal{A}$ de mesure nulle.

On dit que deux fonctions f, g de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont égales μ-presque partout si l'ensemble :

$$N = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

est négligeable, ce qui équivaut à dire qu'il existe une partie $A \in \mathcal{A}$ de mesure nulle tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X \setminus A$.

Dans le cas où f et g sont mesurables, l'ensemble $N = (f - g)^{-1}\{\mathbb{R}^*\}$ est mesurable et $f = g$ presque partout si, et seulement si, $\mu(N) = 0$.

Dans le cas de deux variables aléatoires réelles X et Y sur un espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on dit que $X = Y$ presque sûrement si $X = Y$ presque partout, ce qui équivaut à dire que $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$ ou encore que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

Si $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}^+$ est mesurable, il existe alors une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties mesurables de X telles que $f = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mu(A_n) \leq +\infty$$

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est intégrable (ou sommable) si elle est mesurable et $\displaystyle\int_X |f| \, d\mu < +\infty$.

Dans ce cas, on a :

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$.

L'ensemble des fonctions intégrables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel et l'application $f \mapsto \int_X f d\mu$ est une forme linéaire positive avec :

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu < +\infty$$

Exercice 29 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f, g deux fonctions mesurables de X dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les fonctions $|f|$, $f + g$ et fg sont mesurables.*

Solution. La fonction $t \mapsto |t|$ qui est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ est mesurable, donc la composée $x \mapsto f \mapsto |f|$ est mesurable de X dans $\mathbb{R}$.
L'application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & X & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

est mesurable du fait que pour tout pavé $[a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble :

$$\varphi^{-1}([a, b] \times [c, d]) = f^{-1}([a, b]) \cap g^{-1}([c, d])$$

est mesurable (on rappelle que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendré par les pavés).
Comme les fonctions $(z, t) \mapsto z + t$ et $(z, t) \mapsto z \cdot t$ sont continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, elles sont mesurables, donc les composées $x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x) + g(x)$ et $x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x) g(x)$ sont mesurables de X dans $\mathbb{R}$.

Exercice 30 *On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ. Soient f, g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
Montrer que f est égale à g presque partout si, et seulement si, $f = g$ partout.

Solution. Si $f = g$, on a alors $f = g$ presque partout.
Réciproquement si $f = g$ presque partout, l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$ est alors un borélien de mesure nulle.
Mais cet ensemble étant ouvert, il est nécessairement vide, ce qui signifie que $f = g$.

Exercice 31 *La mesure ℓ des intervalles réels se prolonge de manière unique en une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens, cette mesure étant invariante par translation. C'est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*
Nous allons vérifier que cette mesure ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
On désigne par $\mathcal{C}$ le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

1. *Vérifier que, pour toute classe d'équivalence $c \in \mathcal{C}$, on peut trouver un représentant x dans $[0, 1[$.*
   Pour tout $c \in \mathcal{C}$, on se fixe un représentant x_c de c dans $[0, 1[$ (axiome du choix) et on désigne par A l'ensemble de tous ces réels x_c.
2. *Montrer que les translatés $r + A$, où r décrit $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints et que :*

$$[0, 1] \subset \bigcup_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1, 2]$$

3. *En déduire que A n'est pas borélien et que ℓ ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

Solution. La relation :

$$(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (y - x \in \mathbb{Q})$$

est une relation d'équivalence puisque $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ et l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est un groupe puisque le groupe $(\mathbb{R}, +)$ est commutatif.

1. Soit $c = \overline{x} \in \mathcal{C}$. En désignant par $n = [x] \in \mathbb{Z}$ la partie entière de x, on a $0 \leq x_c = x - n < 1$ et $c = \overline{x_c}$ puisque $x - x_c = n \in \mathbb{Q}$.
   L'axiome du choix nous permet de choisir, pour toute classe d'équivalence un représentant $x_c \in [0, 1]$. Ces choix étant faits, on a $c = c'$ dans $\mathcal{C}$ si, et seulement si $x_c = x_{c'}$.
2. Si r, r' dans $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ sont tels que $(r + A) \cap (r' + A) \neq \emptyset$, il existe alors y dans $(r + A) \cap (r' + A)$, donc $y = r + x_c = r' + x_{c'}$ et $c = \overline{x_c} = \overline{x_{c'}} = c'$, ce qui nous donne $x_c = x_{c'}$ et $r = r'$.
   Donc les ensembles $r + A$, où r décrit $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints.
   Comme $A \subset [0, 1[$, on a $r + A \subset [-1, 2]$ pour tout $r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ et $\bigcup\limits_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1, 2]$.
   Pour tout $x \in [0, 1]$ il existe $x_c \in A$ tel que $\overline{x} = \overline{x_c}$, donc il existe un rationnel r tel que $x = r + x_c$ et comme $|r| = |x - x_c| \leq 1$ (x et x_c sont dans $[0, 1]$), on a $r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. On a donc $[0, 1] \subset \bigcup\limits_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (r + A)$.
3. Si A est borélien, il en est alors de même de tous les $r + A$ (image réciproque de A par l'application continue, donc mesurable, $x \mapsto x - r$) et la réunion dénombrable $\bigcup\limits_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (r + A)$ est un borélien, mais alors :

$$\ell([0, 1]) = 1 \leq \ell\left(\bigcup_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (r + A)\right) = \sum_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} \ell(r + A) = \sum_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} \ell(A) \leq \ell([-1, 2]) = 3$$

   ce qui impose $\ell(A) > 0$ et $\sum\limits_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} \ell(A) = +\infty$, ce qui est impossible.
   On a donc ainsi prouvé que l'ensemble A est borné, non borélien et que ℓ ne peut se prolonger à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 32 *On propose de retrouver le résultat de l'exercice précédent sans utiliser les groupes quotients.*
Dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, on désigne par H un supplémentaire de la droite vectorielle $\mathbb{Q} \cdot 1$ (axiome du choix), soit :

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cdot 1 \oplus H$$

1. *Montrer qu'il existe un sous-ensemble A de $[0, 1[$ tel que tout réel x puisse s'écrire de façon unique $x = r + a$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et $a \in A$.*
2. *Montrer que les translatés $r + A$, où r décrit $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints et que :*

$$B = \bigcup_{r\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} (r + A) \subset [0, 2[$$

3. *En déduire que A n'est pas borélien et que ℓ ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

Solution.

1. Tout réel x s'écrit de façon unique $x = s + h$ avec $s \in \mathbb{Q}$ et $h \in H$.
En désignant par $E(h) \in \mathbb{Z}$ la partie entière de h, on a $0 \leq a = h - E(h) < 1$ et $x = (E(h) + s) + a$ avec $E(h) + s \in \mathbb{Q}$ et $a \in A \subset [0,1[$, où A est l'image de H par l'application $\varphi : x \mapsto x - E(x)$.
On vérifie qu'une telle écriture est unique.
Si $x = r + a = r' + a'$, avec r, r' dans $\mathbb{Q}$ et $a = h - E(h)$, $a' = h' - E(h')$ dans $A = \varphi(H)$ (avec h, h' dans H), on a alors :
$$r' - r = a - a' = h - h' - E(h) + E(h')$$
soit :
$$r' - r + E(h) - E(h') = h - h' \in \mathbb{Q} \cdot 1 \cap H = \{0\}$$
ce qui nous donne $h = h'$ et $r = r'$.
2. De l'unicité de l'écriture des réels sous la forme $x = r + a$ avec $(r, a) \in \mathbb{Q} \times A$, on déduit que les translatés $r + A$, où r décrit $\mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints.
Comme A est contenu dans $[0,1[$, on a $B = \bigcup\limits_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [0,2[$.
3. Si A est borélien, il en est alors de même de tous les $r + A$ (image réciproque de A par l'application continue, donc mesurable, $x \mapsto x - r$) et la réunion dénombrable B est un borélien contenu dans $[0,2[$, donc $\ell(B) \leq 2$, ce qui impose $\ell(A) = 0$ (sinon $\ell(B) = \sum\limits_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \ell(r + A) = \sum\limits_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \ell(A) = +\infty$), mais cela est incompatible avec :
$$\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (r + A)$$
On a donc ainsi prouvé que l'ensemble A est borné, non borélien et que ℓ ne peut se prolonger à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 33 *Donner un exemple de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non mesurables telles que les fonctions $|f|$, $f + g$ et fg soient mesurables (*$\mathbb{R}$ *étant muni de la tribu de Borel.*

Solution. Avec les notations de l'exercice précédent, la fonction $f = 2\mathbf{1}_A - 1$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ -1 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$
est non borélienne ($f^{-1}(\{1\}) = A$ est non borélien) et $|f| = 1$ est mesurable.
Prenant $g = -f$, les fonctions $f + g = 0$ et $fg = -1$ sont mesurables.

Exercice 34 $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable si, et seulement si, la restriction de f à tout segment $[a, b]$ est mesurable.

Solution. Notons, pour tous réels $a < b$, $f_{a,b} : [a, b] \to \mathbb{R}$ la restriction de f au segment $[a, b]$.
Si f est mesurable, on a alors pour tout borélien B de $\mathbb{R}$:
$$f_{a,b}^{-1}(B) = \{x \in [a, b] \mid f(x) \in B\} = [a, b] \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$
donc $f_{a,b}$ est mesurable.
Réciproquement, supposons que toutes les restrictions $f_{a,b} : [a, b] \to \mathbb{R}$ soient mesurables.
Pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B\} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in [-n, n] \mid f(x) \in B\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_{-n,n}^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$
donc f est mesurable.

Exercice 35 *Soient E un espace vectoriel normé complet et $a < b$ deux réels.*
Montrer qu'une fonction réglée $f : [a, b] \to E$ est borélienne.

Solution. Une limite simple de fonctions boréliennes étant borélienne, on en déduit qu'une fonction réglée, qui est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers est borélienne.
En particulier, les fonctions monotones et continues par morceaux, sont boréliennes.

Exercice 36 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que sa dérivée f' est borélienne.*

Solution. On a $f' = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n$, où $(f_n)_{n \geq 1}$ est la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

Chaque fonction f_n étant continue par morceaux est borélienne, donc f' est borélienne comme limite simple d'une suite de fonctions boréliennes.

Exercice 37

1. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente est-il ouvert ? fermé ?*
2. *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu borélienne).*
   Montrer que l'ensemble des éléments x de X tels que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente [resp. divergente] est mesurable.

Solution.

1. On désigne par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions affines par morceaux et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n \text{ si } x \leq -\frac{1}{n} \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

   (faire un dessin). L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente est l'intervalle $[0, 1[$ qui n'est ni ouvert ni fermé.

2. Notons :

$$A = \left\{x \in X \mid (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}\right\}$$

   Dire que la suite de réels $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente équivaut à dire qu'elle est de Cauchy, ce qui équivaut aussi à dire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \exists n_k \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n_k, \ \forall q \geq n_k, \ |f_q(x) - f_p(x)| < \frac{1}{k}$$

   ou encore :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \exists n_k \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n_k, \ \forall q \geq n_k, \ x \in (f_q - f_p)^{-1}\left(\left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[\right)$$

   donc :

$$A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\substack{p \geq n \\ q \geq n}} (f_q - f_p)^{-1}\left(\left]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right[\right)$$

   et cet ensemble est mesurable dans $(X, \mathcal{A})$.
   L'ensemble $X \setminus A$ des éléments x de X tels que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ soit divergente est aussi mesurable.

Exercice 38 *Soient* $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ *deux espaces mesurables et* f *une application de* X *vers* Y.

1. *Montrer que la famille :*
$$\mathcal{C} = \left\{B \in \mathcal{B} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$$
est une σ*-algèbre.*
2. *On suppose que* $\mathcal{B}$ *est engendrée par une famille* $\mathcal{F}$ *de parties de* Y $(\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F}))$.
Montrer que f *est mesurable si, et seulement si,* $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ *pour tout* $F \in \mathcal{F}$.
On en déduit en particulier qu'une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est mesurable si, et seulement si, on a* $f^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}$ *pour tout réel* a.

Solution.

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$ puisque $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$.
Si $B \in \mathcal{C}$, on a alors $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, donc $Y \setminus B \in \mathcal{C}$.
Si $I \subset \mathbb{N}$ et $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{C}$, on a alors
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$$
En conclusion, $\mathcal{C}$ est une σ-algèbre sur Y.
2. Si $f : X \to Y$ est mesurable, on a alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$, donc en particulier $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ pour tout $F \in \mathcal{F}$.
Réciproquement supposons que $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ pour tout $F \in \mathcal{F}$.
La famille :
$$\mathcal{C} = \left\{B \in \mathcal{B} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$$
est une σ-algèbre contenue dans $\mathcal{B}$ qui contient $\mathcal{F}$, donc :
$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$$
soit $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, ce qui revient à dire que f est mesurable.

Exercice 39 *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable.*

1. *Soit* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de mesures sur* X *telle que pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *la suite* $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*
   (a) *Montrer que, pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *la suite* $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un élément* $\mu(A)$ *de* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
   (b) *Montrer que l'application :*
$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{A} & \to & \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ & A & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) \end{array}$$
   définit une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.
2. *Soit* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de mesures sur* X.
   (a) *Montrer que l'application :*
$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{A} & \to & \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ & A & \mapsto & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A) \end{array}$$
   définit une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

(b) *On suppose que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, μ_n est une probabilité sur $(X, \mathcal{A})$ et on se donne une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls telle que* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$.

Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rrcc} \mathbb{P}: & \mathcal{A} & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n \mu_n (A) \end{array}$$

définit une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$.

Solution.

1.

(a) Pour $A \in \mathcal{A}$, la suite $(\mu_n (A))_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, elle converge vers un élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et on peut définir :

$$\mu (A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n (A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n (A)$$

(b) De $\mu_n (\emptyset) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a déduit que $\mu (\emptyset) = 0$.

Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et $A = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k} \mu (A_j) = \sum_{j=0}^{k} \lim_{n\to\infty} \mu_n (A_j) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \mu_n (A_j) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_n \left(\bigcup_{j=0}^{k} A_j \right) \end{aligned}$$

avec $\bigcup\limits_{j=0}^{k} A_j \subset A$, donc $\mu_n \left(\bigcup\limits_{j=0}^{k} A_j \right) \leq \mu_n (A) \leq \mu (A)$, ce qui nous :

$$\sum_{j=0}^{k} \mu (A_j) \leq \mu (A)$$

et faisant tendre k vers l'infini, on obtient :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu (A_k) \leq \mu (A)$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mu_n (A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_n (A_k)$$

avec $\mu_n (A_k) \leq \mu (A_k)$ pour tout k, donc :

$$\mu_n (A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu (A_k)$$

et faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\mu (A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu (A_k)$$

D'où l'égalité $\mu (A) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu (A_k)$.

En conclusion, μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

2.

(a) Il nous suffit de montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} S_n : & \mathcal{A} & \to & \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ & A & \mapsto & \sum\limits_{j=0}^{n} \mu_j (A) \end{array}$$

définit une mesure sur X.
Il est clair que $S_n(\emptyset) = 0$.
Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et $A = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$.
On a dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$:

$$\begin{aligned} S_n (A) &= \sum_{j=0}^{n} \mu_j (A) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_j (A_k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n} \mu_j (A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} S_n (A_k) \end{aligned}$$

(somme finie de séries positives).
En conclusion, μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

(b) Les $p_n\mu_n$ sont des mesures, donc $\mathbb{P} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n\mu_n$ est une mesure et on a :

$$\mathbb{P}(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n\mu_n (X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$$

Exercice 40 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré avec* $\mu \neq 0$ *et* $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel.*
On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$ *converge en mesure vers une fonction mesurable* $f : X \to \mathbb{R}$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mu (|f - f_n| > \varepsilon) = 0$$

où on a noté :

$$(|f - f_n| > \varepsilon) = \{x \in X \mid |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$$

Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$ *qui converge en mesure vers les fonctions mesurables* $f : X \to \mathbb{R}$ *et* $g : X \to \mathbb{R}$*, on a alors* $f = g$ *presque partout.*

Solution. L'ensemble :

$$\begin{aligned} N &= (g - f)^{-1} (\mathbb{R}^*) = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left(|g - f| > \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

est mesurable et :

$$\mu (N) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mu \left(|g - f| > \frac{1}{k}\right)$$

Il nous suffit alors de vérifier que :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \mu (|g - f| > \varepsilon) = 0$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|g - f| \leq |g - f_n| + |f_n - f|$$

donc :

$$\left(|f_n - f| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \left(|g - f_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset (|g - f| \leq \varepsilon)$$

et :

$$(|g - f| > \varepsilon) \subset \left(|f_n - f| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(|g - f_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

ce qui nous donne, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\mu\left(|g - f| > \varepsilon\right) \leq \mu\left(|f_n - f| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mu\left(|g - f_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $\mu\left(|g - f| > \varepsilon\right) = 0$.
En conclusion $\mu(N) = 0$ et $f = g$ presque partout.

Exercice 41 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est un espace probabilisé et* $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel.*
On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *converge en probabilité vers une variable aléatoire* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X - X_n| > \varepsilon\right) = 0$$

où on a noté :

$$(|X - X_n| > \varepsilon) = \{\omega \in \Omega \mid |X(\omega) - X_n(\omega)| > \varepsilon\}$$

1. *Montrer que si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *qui converge en probabilité vers les variables aléatoires* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, *on a alors* $X = Y$ *presque sûrement.*
2. *Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* X *une variable aléatoire réelle sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Montrer que s'il existe une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires de* Ω *dans* $\mathbb{R}^+$ *qui converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle et telle que* $|X - X_n| \leq Y_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge alors en probabilité vers* Y.
3. *Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *qui convergent en probabilité vers les variables aléatoires* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *respectivement.*
Montrer que la suite $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers* $X + Y$.
4. *Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *qui convergent en probabilité vers la variable aléatoire nulle.*
Montrer que la suite $(X_nY_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle.*
5. *Montrer que, pour toute variable aléatoire* $X : \Omega \to \mathbb{R}$, *on a :*

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X| > k\right) = 0$$

6. *Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *qui convergent en probabilité vers les variables aléatoires* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *respectivement.*
   (a) *Montrer que les suites de variables aléatoires* $(X(Y - Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $((X - X_n)Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent en probabilité vers la variable aléatoire nulle.*
   (b) *Montrer que la suite* $(X_nY_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité vers* XY.

Solution.

1. L'ensemble :

$$\begin{aligned}(Y \neq X) &= \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \neq X(\omega)\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left(|Y - X| > \frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

est mesurable et :

$$\mathbb{P}(Y \neq X) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}\left(|Y - X| > \frac{1}{k}\right)$$

Il nous suffit alors de vérifier que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|Y - X| > \varepsilon) = 0$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|Y - X| \leq |Y - X_n| + |X_n - X|$$

donc :

$$\left(|X_n - X| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \left(|Y - X_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset (|Y - X| \leq \varepsilon)$$

et :

$$(|Y - X| > \varepsilon) \subset \left(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(|Y - X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

ce qui nous donne :

$$\mathbb{P}(|Y - Xf| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|Y - X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $\mathbb{P}(|Y - X| > \varepsilon) = 0$.
En conclusion $\mathbb{P}(Y \neq X) = 0$ et $X = Y$ presque sûrement.

2. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(Y_n \leq \varepsilon) \subset (|X - X_n| \leq \varepsilon)$$

donc :

$$(|X - X_n| > \varepsilon) \subset (Y_n > \varepsilon)$$

et :

$$0 \leq \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

ce qui entraîne que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X.

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|(X + Y) - (X_n + Y_n)| \leq |X - X_n| + |Y - Y_n|$$

donc, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$\left(|X - X_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \left(|Y - Y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset (|(X + Y) - (X_n + Y_n)| \leq \varepsilon)$$

et :

$$(|(X + Y) - (X_n + Y_n)| > \varepsilon) \subset \left(|X - X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(|Y - Y_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

ce qui nous donne :

$$\mathbb{P}(|(X + Y) - (X_n + Y_n)| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|X - X_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|Y - Y_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|(X + Y) - (X_n + Y_n)| > \varepsilon) = 0$.

4. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\left(|X_n| \leq \sqrt{\varepsilon}\right) \cap \left(|Y_n| \leq \sqrt{\varepsilon}\right) \subset \left(|X_n Y_n| \leq \varepsilon\right)$$
donc :
$$\left(|X_n Y_n| > \varepsilon\right) \subset \left(|X_n| > \sqrt{\varepsilon}\right) \cup \left(|Y_n| > \sqrt{\varepsilon}\right)$$
et :
$$0 \leq \mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(|X_n| > \sqrt{\varepsilon}\right) + \mathbb{P}\left(|Y_n| > \sqrt{\varepsilon}\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$
ce qui entraîne que $(X_n Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 0.

5. En notant, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \left(|X| > k\right)$, la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \emptyset$ (X est à valeurs réels) donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(A_k\right) = 0$.

6.
   (a) Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$.
      i. Comme $\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(|X| > k\right) = 0$, il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}\left(|X| > k_0\right) < \delta$.
      Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
      $$\left(|X| \leq k_0\right) \cap \left(|Y - Y_n| \leq \frac{\varepsilon}{k_0}\right) \subset \left(|X(Y - Y_n)| \leq \varepsilon\right)$$
      donc :
      $$\left(|X(Y - Y_n)| > \varepsilon\right) \subset \left(|X| > k_0\right) \cup \left(|Y - Y_n| > \frac{\varepsilon}{k_0}\right)$$
      et :
      $$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|X(Y - Y_n)| > \varepsilon\right) &\leq \mathbb{P}\left(|X| > k_0\right) + \mathbb{P}\left(|Y - Y_n| > \frac{\varepsilon}{k_0}\right) \\ &< \delta + \mathbb{P}\left(|Y - Y_n| > \frac{\varepsilon}{k_0}\right)\end{aligned}$$
      avec $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(|Y - Y_n| > \frac{\varepsilon}{k_0}\right)$.
      Il existe donc un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}\left(|Y - Y_n| > \frac{\varepsilon}{k_0}\right) < \delta$ pour tout $n \geq n_0$ et en conséquence $\mathbb{P}\left(|X(Y - Y_n)| > \varepsilon\right) < 2\delta$ pour tout $n \geq n_0$.
      La suite $(X(Y - Y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc presque sûrement vers la variable aléatoire nulle.
      ii. En écrivant que :
      $$(X - X_n) Y_n = (X - X_n)(Y_n - Y) + (X - X_n) Y$$
      on déduit des questions précédentes que la suite $((X - X_n) Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers la variable aléatoire nulle.
   (b) En écrivant que :
   $$XY - X_n Y_n = X(Y - Y_n) + (X - X_n) g_n$$
   on déduit des questions précédentes que la suite $(X_n Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers XY.

Exercice 42 *$(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, la mesure μ étant finie, $\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ et f est une fonction mesurable f de X dans $\mathbb{R}$.*
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque uniformément vers f sur X si pour tout réel $\alpha > 0$, il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) < \alpha$ et la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $X \setminus A$.

1. *Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque uniformément vers f sur X, elle converge alors presque partout vers f.*
2. *On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout sur X vers f.*
   Pour tout réel $\lambda > 0$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note :
   $$(|f - f_k| \geq \lambda) = \{x \in X \mid |f(x) - f_k(x)| \geq \lambda\}$$
   (a) *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $\lambda > 0$, l'ensemble :*
   $$A_{\lambda,n} = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (|f - f_k| \geq \lambda)$$
   est mesurable et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_{\lambda,n}) = 0$.

   (b) *Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $\lambda > 0$, il existe un entier n_0 tel que $\mu(A_{\lambda,n_0}) < \alpha$ et :*
   $$\forall x \in \setminus A_{\lambda,n_0},\ \forall k \geq n_0,\ |f(x) - f_k(x)| < \lambda$$
   (c) *Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque uniformément vers f sur X (théorème d'Egorov).*
   Indication : on pourra utiliser la question précédente avec les réels $\lambda_p = \dfrac{1}{p}$, où p décrit $\mathbb{N}^*$.

   (d) *Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f sur X.*
3. *Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout sur X vers f et pour laquelle il n'est pas possible de trouver A de mesure nulle telle la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f soit uniforme sur $X \setminus A$ (on ne peut pas prendre $\alpha = 0$ dans le théorème d'Egorov).*
4. *Montrer que le théorème d'Egorov n'est plus valable pour $\mu(X) = +\infty$.*

Solution.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on dispose d'une partie mesurable A_n de X telle que $\mu(A_n) < \dfrac{1}{n}$ et la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $X \setminus A_n$.
   L'ensemble mesurable $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ est de mesure nulle (on a $\mu(A) \leq \mu(A_n) < \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) et pour tout $x \in X \setminus A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (X \setminus A_n)$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in X \setminus A_n$, donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.
   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc presque partout vers f.
   Ce résultat est encore valable pour $\mu(X)$ infini.
2. La fonction f est mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables.

   (a) Comme, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $|f - f_k|$ est mesurable, l'ensemble :
   $$(|f - f_k| \geq \varepsilon) = |f - f_k|^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$$

est mesurable et il en est de même de la réunion dénombrable $A_{\lambda,n}$.
Comme μ est finie, tous les $A_{\lambda,n}$ sont de mesure finie.
La suite $(A_{\lambda,n})_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables de mesure finie étant décroissante, on a :

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\lambda,n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_{\lambda,n}\right)$$

Dire que $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_{\lambda,n}$ revient à dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n\ ;\ |f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon$$

soit que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x)$.
Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers f, l'ensemble des éléments $x \in X$ tels que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x)$ est de mesure nulle, donc $\mu\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_{\lambda,n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu\left(A_{\lambda,n}\right) = 0$.

(b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu\left(A_{\lambda,n}\right) = 0$, il existe un entier n_0 (qui dépend de λ et α) tel que $\mu\left(A_{\lambda,n_0}\right) < \alpha$ et pour tout $x \in X \setminus A_{\lambda,n_0} = \bigcap\limits_{k=n_0}^{+\infty} (|f - f_k| < \lambda)$, on a :

$$\forall k \geq n_0,\ |f(x) - f_k(x)| < \lambda$$

(c) Soit $\alpha > 0$. Pour tout entier $p \geq 1$, en notant $\lambda_p = \dfrac{1}{p}$, il existe un entier n_p tel que $\mu\left(A_{\lambda_p,n_p}\right) < \dfrac{\alpha}{2^p}$ et :

$$\forall x \in X \setminus A_{\lambda_p,n_p},\ \forall k \geq n_p,\ |f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{p}$$

L'ensemble mesurable :

$$A = \bigcup_{p=1}^{+\infty} A_{\lambda_p,n_p}$$

est tel que :

$$\mu(A) \leq \sum_{p=1}^{+\infty} \mu\left(A_{\lambda_p,n_p}\right) \leq \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^p} = \alpha$$

Pour tout $x \in X \setminus A = \bigcap\limits_{p=1}^{+\infty} \left(X \setminus A_{\lambda_p,n_p}\right)$, on a :

$$\forall p \geq 1,\ \forall k \geq n_p,\ |f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{p}$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, en se fixant un entier $p \geq 1$ tel que $\dfrac{1}{p} < \varepsilon$, on dispose d'un entier n_p tel que :

$$\forall x \in X \setminus A,\ \forall k \geq n_p,\ |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$$

On a donc ainsi montré que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $X \setminus A$.
Ce résultat se traduit en disant que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque uniformément vers f sur X.

(d) La question précédente nous dit que, pour tout réel $\alpha > 0$, il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) < \alpha$ et la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $X \setminus A$.
Donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \sup_{x\in X\setminus A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

et en conséquence :

$$\forall n \geq n_0,\ (|f - f_n| > \varepsilon) \subset A$$

ce qui entraîne :

$$\forall n \geq n_0,\ \mu\left(|f - f_n| > \varepsilon\right) \leq \mu\left(A\right) < \alpha$$

Comme $\alpha > 0$ est quelconque, cela prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu\left(|f - f_n| > \varepsilon\right) = 0.$

3. On se place sur $X =]0, 1[$ muni de la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue.
   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\mathbf{1}_{]0,\frac{1}{n}[}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque partout vers 0.
   Soit $A \subset]0, 1[$ de mesure nulle.
   Pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\left]0, \dfrac{1}{n}\right[\cap (]0, 1[\setminus A)$ est non vide (sinon $\left]0, \dfrac{1}{n}\right[\subset A$ et $\lambda\left(A\right) \geq \dfrac{1}{n} > 0$), donc $f_n\left(x\right) = 1$ pour tout $x \in \left]0, \dfrac{1}{n}\right[\cap (]0, 1[\setminus A)$ et $\sup\limits_{]0,1[\setminus A} |f_n\left(x\right) - f\left(x\right)| = \sup\limits_{]0,1[\setminus A} f_n\left(x\right) = 1$, ce qui signifie que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $X \setminus A$.
4. On se place sur $X = \mathbb{R}^{+,*}$ muni de la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue.
   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\mathbf{1}_{]n,n+1[}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (donc presque partout) vers 0.
   Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $A \subset \mathbb{R}^{+,*}$ mesurable tel que $\mu\left(A\right) < \alpha$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $]n, n+1[\cap(\mathbb{R}^{+,*} \setminus A)$ est non vide (sinon $]n, n+1[\subset A$ et $\lambda\left(A\right) \geq 1 > \alpha$), donc $f_n\left(x\right) = 1$ pour tout $x \in]n, n+1[\cap (\mathbb{R}^{+,*} \setminus A)$ et $\sup\limits_{\mathbb{R}^{+,*}\setminus A} |f_n\left(x\right) - f\left(x\right)| = \sup\limits_{\mathbb{R}^{+,*}\setminus A} f_n\left(x\right) = 1$, ce qui signifie que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $X \setminus A$.

Exercice 43 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, la mesure μ étant finie, et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel).*
On définit les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de X par :

$$A_n = f^{-1}\left([n, +\infty[\right),\ B_n = f^{-1}\left([n, n+1[\right)$$

et g est la fonction définie sur X par :

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{1}_{B_n}$$

1. *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\mu\left(A_n\right) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu\left(B_k\right)$$

2. *Montrer que g est la partie entière de f.*
3. *Montrer que f est intégrable si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geq1} n\mu\left(B_n\right)$ est convergente.*
4. *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} k\mu\left(B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k\right) - n\mu\left(A_{n+1}\right)$$

5. *Montrer que f est intégrable si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geq1} \mu\left(A_n\right)$ est convergente.*
6. *Le résultat précédent est-il valable dan le cas où $\mu\left(X\right) = +\infty$?*

Solution. Comme $\mu(X) < +\infty$, toutes les parties mesurables de X sont de mesure finie. C'est en particulier le cas pour tous les ensembles A_n et B_n.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a la partition :

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} B_k$$

donc :

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(B_k)$$

la série considérée étant convergente (puisque $\mu(A_n) < +\infty$).

2. Pour tout $x \in X$, en désignant par $n_x = E(f(x)) \in \mathbb{N}$ la partie entière de $f(x)$, on a :

$$n_x \leq f(x) < n_x + 1$$

donc $x \in B_{n_x}$ et $g(x) = n_x = E(f(x))$, ce qui nous donne l'encadrement :

$$g(x) \leq f(x) < g(x) + 1$$

3. La fonction mesurable positive f est intégrable si, et seulement si, $\int_X f d\mu < +\infty$, ce qui équivaut compte tenu de l'encadrement $g \leq f < g + 1$ avec $\int_X 1 d\mu = \mu(X) < +\infty$, à :

$$\int_X g d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(B_n) < +\infty$$

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier k compris entre 1 et n, on a :

$$\mu(A_k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \mu(B_j) = \mu(B_k) + \mu(A_{k+1})$$

toutes ces mesures étant finies, donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\mu(B_k) &= \sum_{k=1}^{n} k\mu(A_k) - \sum_{k=1}^{n} k\mu(A_{k+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mu(A_k) - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)\mu(A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k) - (n+1)\mu(A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - n\mu(A_{n+1})
\end{aligned}$$

5. Si f est intégrable, la série $\sum_{n\geq 1} n\mu(B_n)$ est alors convergente et avec les inégalités :

$$n\mu(A_{n+1}) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mu(B_k)$$

on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\mu(A_{n+1}) = 0$$

et de la question précédente, on déduit que la série $\sum_{n\geq 1}\mu(A_n)$ est convergente avec l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\mu(B_n)$$

Réciproquement si la série $\sum_{n\geq 1}\mu(A_n)$ est convergente, des inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n}k\mu(B_k)=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)-n\mu(A_{n+1})\leq\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)$$

on déduit alors que la série $\sum_{n\geq 1}n\mu(B_n)$ est convergente, ce qui revient à dire que f est intégrable.

6. En se plaçant sur $X=\mathbb{R}$ muni de la tribu de Borel, la fonction constante égale à $\lambda\in\,]0,1[$ est telle que $\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)=0$ et $\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx=+\infty$.

Exercice 44 *On se place sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \ \mu(A) = \mathrm{card}(A) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on désigne par* δ_n *la mesure de Dirac en* n *(pour* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, *on a* $\delta_n(A) = \mathbf{1}_A(n)$*).*

1. *Montrer que :*
$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$$
2. *Montrer que pour toute suite réelle positive* $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *on a :*
$$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$$
3. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite numérique* $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *soit sommable.*

Solution. De manière générale, on peut définir la mesure de comptage sur $(X, \mathcal{P}(X))$ par $\mu(A) = \mathrm{card}(A)$ pour toute partie A de X.
Pour cette mesure toute fonction de X dans un espace mesuré $(Y, \mathcal{B})$ est mesurable.
En particulier, toute suite numérique $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est mesurable.

1. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a :
$$\mu(A) = \mathrm{card}(A) = \sum_{n \in A} 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_A(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n(A)$$
2. En écrivant que $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbf{1}_{\{n\}}$, les x_n étant positifs ou nuls, on a par définition de l'intégrale des fonctions mesurables positives :
$$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mu(\{n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$$
3. Une suite $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est sommable si, et seulement si, $\int_{\mathbb{N}} |x| \, d\mu < +\infty$, ce qui revient à dire que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty$.

Exercice 45 *On se place sur* $(X, \mathcal{P}(X))$ *muni d'une mesure de Dirac* $\mu = \delta_x$, *où* $x \in X$ *est fixé. Calculer* $\int_X f d\mu$ *pour toute fonction* $f : X \to \mathbb{R}^+$.

Solution. Toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable car pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(X)$. Donc toute fonction $f : X \to \mathbb{R}^+$ est mesurable et il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de X telles que $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ ce qui nous donne par définition de l'intégrale :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \delta_x(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}(x) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n} \right)(x) = f(x)$$

Exercice 46 *Soient X, Y deux espaces métriques munis de leur tribu borélienne respective. Montrer qu'une fonction $f : X \to Y$ qui est continue sur X privé d'un ensemble D dénombrable est borélienne.*

Solution. Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de Y, on a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{O}) &= \left(f^{-1}(\mathcal{O}) \cap D\right) \cup \left(f^{-1}(\mathcal{O}) \cap (X \setminus D)\right) \\ &= \left(f^{-1}(\mathcal{O}) \cap D\right) \cup \left(f_{|X\setminus D}\right)^{-1}(\mathcal{O}) \end{aligned}$$

avec $f^{-1}(\mathcal{O}) \cap D$ dans $\mathcal{B}(Y)$ puisque dénombrable et $\left(f_{|X\setminus D}\right)^{-1}(\mathcal{O})$ ouvert de $X \setminus D$ puisque $f_{|X\setminus D}$ est continue, donc $\left(f_{|X\setminus D}\right)^{-1}(\mathcal{O}) = (X \setminus D) \cap \mathcal{W}$ où $\mathcal{W}$ est ouvert dans Y et cet ensemble est borélien comme intersection de deux boréliens. Il en résulte que $f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{B}(Y)$.

Exercice 47 *On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.*

1. *Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ouvert $\mathcal{O}$ dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(\mathcal{O}) < \varepsilon$ (on peut utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).*
2. *Montrer qu'une partie mesurable bornée de $\mathbb{R}$ est de mesure finie. La réciproque est-elle vraie ?*
3. *Montrer qu'une partie mesurable de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide est de mesure non nulle. La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Montrer qu'une partie mesurable A de $[0, 1]$ de mesure égale à 1 est dense dans $[0, 1]$. Réciproquement un ouvert dense de $[0, 1]$ est-il de mesure égale à 1 ?*

Solution.

1. En notant $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres rationnels, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on désigne par $(I_n(\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'intervalles définie par :
$$I_n(\varepsilon) = \left]r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right[$$
et $\mathcal{O}$ est l'ouvert défini par :
$$\mathcal{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n(\varepsilon)$$
Comme $\mathcal{O}$ contient $\mathbb{Q}$, il est dense dans $\mathbb{R}$ et :
$$\lambda(\mathcal{O}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n(\varepsilon)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$$
2. Si A est bornée, elle est alors contenue dans un segment $[a, b]$ et si de plus, elle est mesurable, on a alors $\lambda(A) \leq \lambda([a, b]) = b - a < +\infty$.
La réciproque est fausse : l'ensemble $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle non borné.
L'exemple précédent nous donne un exemple d'ouvert non borné de mesure finie aussi petite que l'on veut.
3. Si A est mesurable d'intérieur $\mathcal{O}$ non vide, il existe alors $x \in \mathcal{O}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \mathcal{O}$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc :
$$\lambda(A) \geq \lambda(\mathcal{O}) \geq \lambda(]x - \varepsilon, x + \varepsilon[) = 2\varepsilon > 0$$
La réciproque est fausse.
Par exemple $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ est tel que $\lambda(A) = \lambda([0, 1]) - \lambda([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1$ et :
$$\overset{\circ}{A} = [0, 1] \setminus \overline{[0, 1] \cap \mathbb{Q}} = \emptyset$$

On rappelle que si E est un espace métrique (ou topologique) et F une partie de E, on a :

$$\overset{\circ}{\widehat{E \setminus F}} = E \setminus \overline{F}$$

En effet si $\mathcal{O}$ est un ouvert de E contenu dans $E \setminus F$, le fermé $E \setminus \mathcal{O}$ contient F, donc aussi son adhérence, soit $\overline{F} \subset E \setminus \mathcal{O}$ et $\mathcal{O} \subset E \setminus \overline{F}$. Comme $E \setminus \overline{F}$ est un ouvert de E contenu dans $E \setminus F$, on en déduit l'égalité $\overset{\circ}{\widehat{E \setminus F}} = E \setminus \overline{F}$.

4. Si A est mesurable de mesure égale à 1 dans $[0,1]$, son complémentaire $[0,1] \setminus A$ est de mesure nulle donc d'intérieur vide et comme :
$$\overset{\circ}{\widehat{[0,1] \setminus A}} = [0,1] \setminus \overline{A}$$
on en déduit que $\overline{A} = [0,1]$, ce qui signifie que A est dense dans $[0,1]$.
Une partie dense mesurable de $[0,1]$ n'est pas nécessairement de mesure égale à 1 comme le montre l'exemple de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Exercice 48 *$(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré avec $\mu \neq 0$, $\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel et les fonctions considérées sont à valeurs réelles.*

1. *Montrer que si f, g sont deux fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$, les fonctions $f + g$ et fg sont mesurables.*
2. *Montrer que la somme de deux fonctions intégrables est intégrable.*
3. *Le produit de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
4. *La composée de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
5. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable positive. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*
$$(A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < \eta) \Rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon$$
6. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) > 0$ et $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pour tous x, y dans A (on peut utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).*
7. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, on a :*
$$\mu\left(f^{-1}([\alpha, +\infty[)\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu$$
(inégalité de Markov).
8. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que $\int_X f d\mu = 0$ si, et seulement si, f est nulle presque partout.*
9. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ une fonction mesurable positive. Montrer que si $\int_X f d\mu < +\infty$, on a alors $f(x) < +\infty$ presque partout.*
10. *Soient f, g deux fonctions mesurables positives sur X. Montrer que si $f = g$ presque partout, alors $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.*
11. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) > 0$ et f est bornée sur A.*

12. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f \neq 0$ presque partout. Montrer qu'il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ est minorée sur A par une constante strictement positive.*
13. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que si $\displaystyle\int_A f d\mu = 0$ pour toute partie A mesurable dans X, alors la fonction f est nulle presque partout.*

Solution.

1. L'application :
$$\begin{array}{cccc} \varphi & X & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$
est mesurable du fait que pour tout pavé $[a,b] \times [c,d]$ de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble :
$$\varphi^{-1}([a,b] \times [c,d]) = f^{-1}([a,b]) \cap g^{-1}([c,d])$$
est mesurable (on rappelle que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendré par les pavés).
Comme la composée de deux fonctions mesurables est mesurable et les opérations d'addition et de multiplication sont continues (donc mesurables) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $f+g$ et fg sont mesurables.
2. Si f, g sont intégrables, la fonction $f+g$ est alors mesurable et on a :
$$\int_X |f+g| \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu + \int_X |g| \, d\mu < +\infty$$
donc $f+g$ est intégrable.
3. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1[$ et son carré ne l'est pas.
4. Les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $g : x \mapsto x^2$ sont intégrables sur $]0,1[$ et la composée $g \circ f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ne l'est pas.
5. On rappelle que, pour tout mesurable $A \in \mathcal{A}$, et toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable positive, l'intégrale de f sur A est :
$$\int_A f d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_A d\mu$$
Si $f : X \to \mathbb{R}^+$ est intégrable, il existe alors une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de X telles que $f = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et on a par définition de l'intégrale :
$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_X f \cdot \mathbf{1}_A d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu(A_n \cap A) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu(A_n) = \int_A f d\mu < +\infty \end{aligned}$$
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$R_n(A) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n \mu(A_n \cap A) \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n \mu(A_n)$$
avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $R_n(A) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, ce qui nous ramène au cas d'une fonction étagée $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}$, les réels a_k étant tous

strictement positifs (si tous les a_k sont nuls, le résultat est évident).
Pour tout réel $\eta > 0$ et tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \eta$, on a :

$$\int_A S_n d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap A) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \eta$$

donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, en prenant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$, on a $\displaystyle\int_A S_n d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\displaystyle\int_A f d\mu < \varepsilon$.

6. En désignant par $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres rationnels, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on désigne par $(A_n(\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de parties mesurables de X définie par :

$$A_n(\varepsilon) = f^{-1}\left(\left]r_n - \frac{\varepsilon}{2}, r_n + \frac{\varepsilon}{2}\right[\right)$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on a :

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n(\varepsilon)$$

Si tous les $A_n(\varepsilon)$ sont de mesure nulle, on a alors $\mu(X) = 0$, ce qui n'est pas. Il existe donc un rationnel r_n tel que $\mu(A_n(\varepsilon)) > 0$ et pour tous x, y dans $A_n(\varepsilon)$, on a :

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - r_n| + |r_n - f(x)| < \varepsilon$$

7. Pour $\alpha > 0$, on note A_α l'ensemble mesurable :

$$A_\alpha = f^{-1}([\alpha, +\infty[)$$

Comme f est mesurable à valeurs positives, on a :

$$f = f\left(\mathbf{1}_{A_\alpha} + \mathbf{1}_{X\setminus A_\alpha}\right) = f \cdot \mathbf{1}_{A_\alpha} \geq \alpha \mathbf{1}_{A_\alpha}$$

ce qui nous donne :

$$\int_X f d\mu \geq \alpha \int_X \mathbf{1}_{A_\alpha} d\mu = \alpha\mu(A_\alpha)$$

soit l'inégalité de Markov :

$$\mu\left(f^{-1}([\alpha, +\infty[)\right) \leq \frac{1}{\alpha}\int_X f d\mu$$

8. Si $\displaystyle\int_X f d\mu = 0$, on a alors $\mu(A_\alpha) = \mu\left(f^{-1}([\alpha, +\infty[)\right) = 0$ pour tout réel $\alpha > 0$.
La suite $\left(\mu\left(A_{\frac{1}{n}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'ensemble de mesures nuls donc la réunion :

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{\frac{1}{n}} = f^{-1}\left(\mathbb{R}^{+,*}\right)$$

est mesurable de mesure nulle, ce qui signifie que f est nulle presque partout.
Réciproquement si f est nulle presque partout, l'ensemble $A = f^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})$ est alors de mesure nulle.
On a alors $f = f \cdot \mathbf{1}_A$ et en écrivant que $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables de X, on a :

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n \cap A}$$

et :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu(A_n \cap A) = 0$$

9. En notant $A_\infty = f^{-1}(\{\infty\})$, comme f est à valeurs positives, on a $f \geq n\mathbf{1}_{A_\infty}$ pour tout entier $n \geq 1$, donc $\displaystyle\int_X f d\mu \geq n\mu(A_\infty)$ et :

$$0 \leq \mu(A_\infty) \leq \frac{1}{n}\int_X f d\mu \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

si $\displaystyle\int_X f d\mu < +\infty$, ce qui nous donne $\mu(A_\infty) = 0$ et signifie que $f(x) < +\infty$ presque partout.
On en déduit que si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction intégrable, elle est alors finie presque partout.

10. L'ensemble :

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = (f-g)^{-1}\{0\}$$

est mesurable.
En écrivant que :

$$f = f \cdot \mathbf{1}_A + f \cdot \mathbf{1}_{X\setminus A}$$

on a :

$$\int_X f d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_A d\mu + \int_X f \cdot \mathbf{1}_{X\setminus A} d\mu$$

La fonction $f \cdot \mathbf{1}_{X\setminus A}$ est mesurable positive et nulle presque partout car :

$$\left\{x \in X \mid f \cdot \mathbf{1}_{X\setminus A}(x) \neq 0\right\} \subset X \setminus A$$

avec $X \setminus A$ de mesure nulle, donc :

$$\int_X f d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_A d\mu$$

ce résultat étant également valable pour g. Comme $f \cdot \mathbf{1}_A = g \cdot \mathbf{1}_A$, on en déduit que $\displaystyle\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.
La réciproque est bien évidemment fausse.

11. Pour tout entier naturel n, l'ensemble :

$$A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \leq n\} = f^{-1}([-n, n])$$

est mesurable et $X = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, donc :

$$\mu(X) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

et comme $\mu(X) > 0$, il existe un entier n tel que $\mu(A_n) > 0$, la fonction f étant bornée sur A_n (on peut aussi se contenter d'écrire que $0 < \mu(X) \leq \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$).

12. Pour tout entier naturel non nul n, l'ensemble :

$$A_n = \left\{x \in X \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\} = |f|^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[\right)$$

est mesurable et $f^{-1}(\mathbb{R}^{+,*}) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, donc :

$$\mu\left(f^{-1}\left(\mathbb{R}^{+,*}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

En supposant que $f \neq 0$ presque partout, on a $\mu\left(f^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})\right) > 0$, donc il existe un entier n tel que $\mu(A_n) > 0$, la fonction f étant minorée par $\dfrac{1}{n}$ sur A_n (on peut aussi se contenter d'écrire que $0 < \mu\left(f^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})\right) \leq \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$).

13. On suppose d'abord que f est à valeurs positive.
Pour tout entier naturel non nul n, l'ensemble :

$$A_n = \left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[\right)$$

est mesurable et on a :

$$0 = \int_{A_n} f d\mu \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(A_n)$$

donc $\mu(A_n)$ et $\mu\left(f^{-1}\left(\mathbb{R}^{+,*}\right)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$, ce qui signifie que f est nulle presque partout.
Pour le cas général, on introduit les ensembles mesurables :

$$A^+ = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \text{ et } A^- = \{x \in X \mid f(x) < 0\}$$

et les fonctions mesurables $f^+ = f \cdot \mathbf{1}_{A^+} \geq 0$ et $f^- = f \cdot \mathbf{1}_{A^-} \leq 0$.
Pour toute partie A mesurable dans X, on a :

$$\int_A f^{\pm} d\mu = \int_A f \cdot \mathbf{1}_{A^{\pm}} d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_{A^{\pm}} \mathbf{1}_A d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_{A^{\pm}\cap A} d\mu = \int_{A^{\pm}\cap A} f d\mu = 0$$

Il en résulte que $f^{\pm}$ est nulle presque partout, ce qui signifie que $\mu(A^{\pm}) = 0$ ou encore que f est nulle presque partout ($f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est la réunion de A^+ et A^-).
La réciproque est bien évidemment vraie (si f est nulle presque partout, il en est alors de même de $|f|$, donc $\int_A |f| \, d\mu = 0$ pour tout $\mathcal{A}$, et avec $\left|\int_A f d\mu\right| \leq \int_A |f| \, d\mu$, on déduit que $\int_A f d\mu = 0$).

– V – Convergence monotone, dominée

Les théorèmes importants sont les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Théorème 49 (Convergence monotone) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$.*
Dans ces conditions, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction mesurable $f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ et on a :

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$$

On en déduit que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge alors simplement vers une fonction mesurable $f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ et on a :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n d\mu$$

On en déduit également le lemme de Fatou :
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, on a alors :

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} (f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$$

On rappelle que :

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{p\geq n} u_p \right) \text{ et } \limsup_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{p\geq n} u_p \right)$$

Théorème 50 (Convergence dominée) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$ et qui converge simplement presque partout sur X vers une fonction f.*
S'il existe une fonction intégrable $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ telle que $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout tout $x \in I$ alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et on a :

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$$

Dans le cadre des séries de fonctions, on en déduit le résultat suivant.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$, telle la série numérique $\sum \int_X |f_n|\, d\mu$ soit convergente, alors toutes les fonctions f_n sont intégrables, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement presque partout vers une fonction intégrable $f : X \to \mathbb{C}$ et on a :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n d\mu$$

Exercice 51 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$ qui converge presque partout vers une fonction f.*
   Montrer que s'il existe une constante $M > 0$ telle que $\int_X f_n d\mu \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\int_X f d\mu \leq M$.

2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$ qui converge presque partout vers une fonction f.*
Montrer que si f_0 est intégrable, il en est alors de même de toutes les fonctions f_n ainsi que de f et qu'on a :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$
Le résultat subsiste-t-il si $\displaystyle\int_X f_0 d\mu = +\infty$?
3. *Soient $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de parties mesurables de X définie par :*
$$A_n = |f|^{-1}([n,+\infty])$$
   (a) *Montrer que f est finie presque partout et que :*
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{A_n}|f|\,d\mu = 0$$
   (b) *Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*
$$(A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < \eta) \Rightarrow \int_A |f|\,d\mu < \varepsilon$$
   (c) *En prenant $(X,\mathcal{A},\mu) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue, montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :*
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$
   est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ($\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ désigne l'intégrale de f sur l'intervalle d'extrémités 0 et x).

Solution.

1. La fonctions f définie presque partout par $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, la fonction g définie partout par $g(x) = \displaystyle\liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ sont mesurables et on a $f(x) = g(x)$ presque partout.
En utilisant le lemme de Fatou, on a :
$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu = \int_X \liminf_{n\to+\infty}(f_n)\,d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu \leq M$$
2. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout en décroissant vers f, on a $0 \leq f \leq f_n \leq f_0$ presque partout pour tout $n\in\mathbb{N}$ et l'intégrabilité de f_0 entraîne celle des f_n et de f.
Comme $(f_0 - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions intégrables positives qui converge presque partout vers la fonction intégrable $f_0 - f$, le théorème de convergence monotone nous dit que :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_X (f_0 - f_n)\,d\mu = \int_X (f_0 - f)\,d\mu$$
et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.
On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée : les f_n et f sont mesurables avec $|f_n| = f_n \leq f_0$, la fonction f_0 étant positive intégrable, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.
En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\mathbf{1}_{[n,+\infty[}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(f_n) = 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda = +\infty$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3.

(a) Comme f est intégrable, elle est finie presque partout (exercice 48, question 9).
On peut aussi le voir en disant que dans le cas contraire l'ensemble mesurable :

$$A_\infty = |f|^{-1}(\{+\infty\})$$

est de mesure strictement positive et alors :

$$\int_X |f|\, d\mu \geq \int_{A_\infty} |f|\, d\mu = \int_{A_\infty} (+\infty)\, d\mu = +\infty \cdot \mu(A_\infty) = +\infty$$

Comme :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{A_\infty} = 0\ p.p.$$

(on a $\displaystyle\int_X \mathbf{1}_{A_\infty} d\mu = \mu(A_\infty) = 0$, ce qui revient à dire que $\mathbf{1}_{A_\infty} = 0\ p.p.$), on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |f| \cdot \mathbf{1}_{A_n} = 0$ presque partout avec $|f| \cdot \mathbf{1}_{A_n} \leq |f|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $|f|$ étant intégrable. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} |f|\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X |f| \cdot \mathbf{1}_{A_n} d\mu = 0$$

(b) Ce résultat a été montré en approchant $|f|$ par des fonctions étagées positives (exercice 48, question 5).
On va le retrouver en utilisant la question précédente.
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $n \geq 1$ tel que :

$$\int_{A_n} |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \eta$, où η est à préciser, on a :

$$\int_A |f|\, d\mu = \int_{A\cap A_n} |f|\, d\mu + \int_{A\cap(X\setminus A_n)} |f|\, d\mu$$

avec :

$$\int_{A\cap A_n} |f|\, d\mu \leq \int_{A_n} |f|\, d\mu$$

et :

$$\int_{A\cap(X\setminus A_n)} |f|\, d\mu \leq n \int_{A\cap(X\setminus A_n)} d\mu \leq n \int_A d\mu = n\mu(A) < n \cdot \eta$$

ce qui nous donne :

$$\int_A |f|\, d\mu \leq \int_{A_n} |f|\, d\mu + n \cdot \eta$$

Prenant $= \dfrac{\varepsilon}{2n}$, on obtient $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$.

(c) Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\lambda(A) < \eta$.
Pour x, y dans $\mathbb{R}$ tels que $0 < y - x < \eta$, on a :

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_{[x,y]} f(t)\, dt \right| \leq \int_{[x,y]} |f(t)|\, dt < \varepsilon$$

puisque $\lambda([x,y]) = y - x < \eta$. Cette inégalité étant encore valable pour $0 < x - y < \eta$.
On a donc $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$ pour tous réels x, y tels que $|y - x| < \eta$, ce qui signifie que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 52 *On se place sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \ \mu(A) = \operatorname{card}(A) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on désigne par* δ_n *la mesure de Dirac en* n.

1. *Montrer que :*
$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$$

2. *Montrer que pour toute suite réelle positive* $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *on a :*
$$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$$

3. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite* $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *à valeurs complexes soit sommable.*

4. *Soit* $(x_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ *une suite double de nombres complexes telle que :*
$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \lim_{n \to +\infty} x_{n,k} = \ell_k \in \mathbb{C}$$
On suppose qu'il existe une suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *de réels positifs telle que la série* $\sum \alpha_k$ *soit convergente et :*
$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |x_{n,k}| \leq \alpha_k$$
Montrer que :
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \ell_k$$

5. *Calculer :*
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right)$$

6. *Soit* $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *une suite numérique telle que la série* $\sum a_k$ *soit absolument convergente et* $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *une suite numérique bornée.*
Calculer :
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left(1 + \frac{b_k}{n}\right)^n$$

Solution.

1. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a :
$$\mu(A) = \operatorname{card}(A) = \sum_{n \in A} 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_A(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n(A)$$

2. En écrivant que $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbf{1}_{\{n\}}$, les x_n étant positifs, on a par définition de l'intégrale des fonctions mesurables positives :
$$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mu(\{n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$$

3. Une suite $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est sommable si, et seulement si, $\int_{\mathbb{N}} |x| \, d\mu < +\infty$, ce qui revient à dire que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty$.

4. C'est le théorème de convergence dominée pour la mesure de comptage.
5. Soit $(x_{n,k})_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n,k} = \frac{n}{k}\sin\left(\frac{1}{kn}\right)$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k\in\mathbb{N}^*} x_{n,k} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{n}{k}\sin\left(\frac{1}{kn}\right)$$

ces séries à termes positifs étant convergentes puisque :

$$\frac{n}{k}\sin\left(\frac{1}{kn}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$$

et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} x_{n,k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{k}\sin\left(\frac{1}{kn}\right) = \frac{1}{k^2}$$

avec $|x_{n,k}| \leq \frac{1}{k^2}$ (on a $0 \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $x \in [0,1]$).
On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k}\sin\left(\frac{1}{kn}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

6. On note $x_{n,k} = a_k\left(1+\frac{b_k}{n}\right)^n$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} x_{n,k} = \lim_{n\to+\infty} a_k\left(1+\frac{b_k}{n}\right)^n = a_k e^{b_k}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |x_{n,k}| \leq |a_k|\left(1+\frac{|b_k|}{n}\right)^n \leq |a_k|\, e^{|b_k|} \leq M\,|a_k|$$

(résulte de $\ln(1+t) \leq t$ pour $t \geq 0$ qui donne $\ln\left(1+\frac{|b_k|}{n}\right) \leq \frac{|b_k|}{n}$, soit $\left(1+\frac{|b_k|}{n}\right)^n \leq e^{|b_k|}$) où $M = \sup_{k\in\mathbb{N}} e^{|b_k|}$ avec $\sum |\alpha_k| < +\infty$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\left(1+\frac{b_k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{b_k}$$

Par exemple, pour $a_k = \frac{1}{k^2}$ et $b_k = \sin(k)$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\left(1+\frac{\sin(k)}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\sin(k)}}{k^2}$$

Exercice 53 *Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et par $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ est rationnel où p, q sont entiers naturels non nuls premiers entre eux.*

1. *Justifier le fait que f est Lebesgue-intégrable et calculer son intégrale de Lebesgue.*
2. *Justifier le fait que f est Riemann-intégrable et calculer son intégrale de Riemann.*

Solution.

1. On a $f = 0$ presque partout, donc f est Lebesgue-intégrable d'intégrale nulle.
2. On vérifie d'abord que f est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel de $]0,1[$.

   Un rationnel $r = \dfrac{p}{q} \in \,]0,1[\, \cap \mathbb{Q}$ est limite de la suite d'irrationnels $(x_n)_{n \geq n_0} = \left(r + \dfrac{\sqrt{2}}{n} \right)_{n \geq n_0}$, où n_0 est choisi assez grand pour que cette suite soit à valeurs dans $]0,1[$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = 0 \neq f(r) = \dfrac{1}{q}$.

   La fonction f n'est donc pas continue en ce point.

   Soit $\varepsilon > 0$. Pour $a \in \,]0,1[\, \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ et $\eta > 0$ tel que $]a-\eta, a+\eta[\, \subset \,]0,1[$, on note :

$$E_\varepsilon = \{x \in \,]a-\eta, a+\eta[\, \mid f(x) > \varepsilon\}$$

Un élément de E_ε est nécessairement rationnel (sinon $f(x) = 0 < \varepsilon$), donc il s'écrit $r = \dfrac{p}{q}$ avec p, q premiers entre eux et $f(r) = \dfrac{1}{q} > \varepsilon$ entraîne que soit E_ε est vide, soit $1 \leq q < \dfrac{1}{\varepsilon}$ et $1 \leq p < q < \dfrac{1}{\varepsilon}$ (r est strictement compris entre 0 et 1).
L'ensemble E_ε est donc vide ou fini.
En prenant $0 < \eta' < \eta$ assez petit on aura alors $E_\varepsilon \cap \,]a-\eta', a+\eta'[\, = \emptyset$, ce qui signifie que $|f(x) - f(a)| = f(x) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in \,]a-\eta', a+\eta'[$.
On a donc ainsi montré que f est continue en α.
La fonction f étant continue presque partout est Riemann-intégrable et son intégrale de Riemann est celle de Lebesgue, à savoir 0.

Exercice 54 *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.*
Pour tout réel $x \in [a,b]$ et tout réel $\eta > 0$, on note :

$$\mathcal{V}_{x,\eta} = \,]x-\eta, x+\eta[\, \cap [a,b]$$

et le diamètre de $f(\mathcal{V}_{x,\eta})$ est le réel :

$$\delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) = \sup_{(y,z) \in (\mathcal{V}_{x,\eta})^2} |f(y) - f(z)|$$

L'oscillation de f en $x \in [a,b]$ est le réel défini par :

$$\omega(x) = \inf_{\eta > 0} \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta}))$$

On note D l'ensemble des points de discontinuité de f et G l'ensemble des points de $]a,b]$ où f a une limite à gauche. On notera $f(x^-)$ la limite à gauche en un point x de $]a,b]$ quand cette dernière existe.

1. *Montrer que :*
$$D = \{x \in [a,b] \mid \omega(x) > 0\}$$
2. *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble :*
$$G_n = \left\{ x \in G \mid \omega(x) > \frac{1}{n} \right\}$$
   est dénombrable.
3. *En déduire que $D \cap G$ est dénombrable.*

4. *Montrer que la fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si, et seulement si, l'ensemble $[a,b] \setminus G$ est négligeable (on suppose connu le fait que D est mesurable et le critère de Riemann-intégrabilité de Lebesgue : une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si, et seulement si, elle est presque partout continue).*

Solution.

1. La fonction f est continue en $x \in [a,b]$ si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall t \in \mathcal{V}_{x,\eta},\ |f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
Il en résulte que pour tous y, z dans $\mathcal{V}_{x,\eta}$, on a $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$, donc $\delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) \leq \varepsilon$ et $0 \leq \omega(x) \leq \varepsilon$. Faisant tendre ε vers 0^+, on en déduit que $\omega(x) = 0$.
Réciproquement la condition $\omega(x) = 0$ signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$0 \leq \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) < \varepsilon$$
ce qui nous donne pour tout réel $t \in \mathcal{V}_{x,\eta}$:
$$|f(t) - f(x)| \leq \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) < \varepsilon$$
et cela signifie que f est continue en x.
2. Si $x \in G_n$, elle est en particulier dans G et la fonction f admet une limite à gauche $f(x^-)$ en x et il existe un réel $\delta_n > 0$ tel que $]x - \delta_n, x[\subset]a,b]$ et :
$$\forall t \in]x - \delta_n, x[,\ \left|f(t) - f\left(x^-\right)\right| < \frac{1}{2n}$$
Il en résulte que pour tous y, z dans $]x - \delta_n, x[$, on a :
$$|f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}$$
ce qui entraîne que $\omega(t) \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout $t \in]x - \delta_n, x[$. En effet, pour $t \in]x - \delta_n, x[$, il existe $\eta > 0$ assez petit tel que $]t - \eta, t + \eta[\subset]x - \delta_n, x[$, donc $|f(y) - f(z)| < \dfrac{1}{n}$ pour tous y, z dans $]t - \eta, t + \eta[$ et $\omega(t) \leq \delta(f(\mathcal{V}_{t,\eta})) \leq \dfrac{1}{n}$, ce qui signifie que $t \notin G_n$.
On a donc :
$$x \in G_n \text{ et }]x - \delta_n, x[\cap G_n = \emptyset$$
c'est-à-dire que tout point de G_n est la borne supérieure d'un intervalle ouvert qui ne contient aucun de G_n.
Ces intervalles $]x - \delta_n, x[$, pour $x \in G_n$, étant nécessairement disjoints, ils forment une famille dénombrable (il y a un rationnel dans chaque $]x - \delta_n, x[$).
Il en résulte que G_n est dénombrable.
3. Comme :
$$D \cap G = \{x \in G \mid \omega(x) > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{x \in G \mid \omega(x) > \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n \geq 1} G_n$$
cet ensemble est dénombrable.
4. On a la partition :
$$D = (D \cap G) \cup (D \cap ([a,b] \setminus G)) = (D \cap G) \cup ([a,b] \setminus G)$$
l'ensemble D étant mesurable et l'ensemble $D \cap G$ dénombrable, donc négligeable, ce qui nous donne :
$$\lambda(D) = \lambda([a,b] \setminus G)$$
et D négligeable équivaut à $[a,b] \setminus G$ négligeable.

Exercice 55 *Calculer*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^2x\,(1-x)^n\,dx$$

et conclure.

Solution. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x)=n^2x\,(1-x)^n$ sur $I=[0,1]$. Cette suite de fonctions continues converge simplement vers la fonction nulle et :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\underset{n\to+\infty}{\to}1$$

On peut conclure qu'il est impossible de dominer la convergence.

Exercice 56 *Soient a,b deux réels strictement positifs et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :*

$$\forall x\in\mathbb{R}^{+,*},\ f(x)=\frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$$

Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}}f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+nb)^2}$$

Solution. On a, pour tout réel $x>0$, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$, où on a noté $f_n(x)=xe^{-(a+nb)x}$.
Les fonctions f_n étant mesurables positives, le théorème de convergence monotone pour les séries de fonctions positives nous permet d'écrire dans $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$:

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}}f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{+,*}}f_n(x)\,dx$$

et une intégration par parties nous donne, pour tout entier $n\geq 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}}f_n(x)\,dx=\left[-\frac{xe^{-(a+nb)x}}{a+nb}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{a+nb}\int_0^{+\infty}e^{-(a+nb)x}dx=\frac{1}{(a+nb)^2}$$

donc :

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}}f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+nb)^2}<+\infty$$

Pour $a=b=1$, on aboutit à :

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}dx=\int_{\mathbb{R}^{+,*}}\frac{x}{e^x-1}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Le changement de variable $y=1-e^{-x}$ nous donne :

$$\int_0^1\frac{\ln(1-y)}{y}dy=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Exercice 57 *Pour tout réel $\alpha > 0$, on désigne par $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :*

$$I_n(\alpha) = \int_0^{n^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{x^\alpha}{n}\right)^n dx$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Solution. On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^\alpha}{n}\right)^n \text{ si } x \in \left]0, n^{\frac{1}{\alpha}}\right[\\ 0 \text{ si } x \geq n^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ avec :

$$\forall x \in \left]0,+\infty\right[, \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x^\alpha} \\ \forall n \geq 1,\ |f_n(x)| \leq e^{-x^\alpha} \end{cases}$$

et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha} dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha} = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

Exercice 58 *Pour tout réel $\alpha > 0$, on désigne par $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :*

$$I_n(\alpha) = \int_1^{+\infty} n^\alpha \sin\left(\frac{x}{n}\right) e^{-n^2x^2} dx$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Solution. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = n^\alpha \sin\left(\dfrac{x}{n}\right) e^{-n^2x^2}$ sur $I = [1,+\infty[$.
On a :

$$\forall x \geq 1,\ |f_n(x)| \leq n^\alpha e^{-n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

avec :

$$\forall x \geq 1,\ |f_n(x)| \leq n^\alpha e^{-\frac{n}{2}^2} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(la suite $\left(n^\alpha e^{-\frac{n}{2}^2}\right)_{n\geq1}$ est majorée puisque convergente vers 0). On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = 0$$

Exercice 59

1. *Montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt$$

2. *Montrer que :*

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt$.

Solution.

1. On désigne par $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t) \text{ si } t \in]0,n[\\ 0 \text{ si } t \geq n \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ avec :

$$\forall t \in]0,+\infty[\,,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t) = e^{-t}\ln(t)$$

et :

$$\forall t \in]0,n[\,,\ |f_n(t)| = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n |\ln(t)| \leq \varphi(t) = e^{-t}|\ln(t)|$$

$$\forall t \geq n,\ |f_n(t)| = 0 \leq \varphi(t)$$

(pour $0 < x < 1$, on a $\ln(1-x) \leq -x$, donc $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$ pour $t \in]0,n[$ et $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$) la fonction φ étant continue et intégrable sur $]0,+\infty[$. On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt$$

2. On a :

$$I_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt = \int_0^1 (1-x)^n \ln(nx)\,ndx = \frac{n\ln(n)}{n+1} + nJ_n$$

et une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \int_0^1 (1-x)^{n+1}\ln(x)\,dx = (n+1)\int_0^1 (1-x)^n (x\ln(x) - x)\,dx \\ &= -(n+1)J_{n+1} + (n+1)J_n - (n+1)\int_0^1 x(1-x)^n\,dx \end{aligned}$$

On a donc la relation de récurrence $(n+2)J_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{n+2}$, avec $J_0 = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx = -1$, ce qui donne $(n+1)J_n = -\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$ et $I_n = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt &= \lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right) \\ &= -\gamma \backsimeq -0.577215664 \end{aligned}$$

Exercice 60 *En justifiant l'égalité :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 t^{n-1}\sin(nx)\,dt=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty}t^{n-1}\sin(nx)\right)dt$$

et en calculant la dernière intégrale, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$$

pour tout réel $x\in\left]0,2\pi\right[$.

1. *Montrer que, tout couple de réels* (x,t) *dans* $\mathbb{R}\times\left]-1,1\right[$, *la série* $\sum t^{n-1}\sin(nx)$ *est convergente et calculer sa somme.*
   On notera $f(x,t)$ *cette somme.*
2. *Montrer que, pour tout réel* $x\in\left]0,\pi\right[$, *on a :*

$$\int_0^1 f(x,t)\,dt=\frac{\pi-x}{2}$$

3. *Monter que, pour tout réel* $x\in\left]0,2\pi\right[$, *on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$$

4. *Montrer que la convergence de la série de fonctions* $\sum\frac{\sin(nx)}{n}$ *est uniforme sur tout segment* $[a,b]\subset\left]0,\pi\right[$ *et en déduire que, pour tout réel* $x\in[0,2\pi]$, *on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{x(2\pi-x)}{4}$$

Solution.

1. Pour tout (x,t) dans $\mathbb{R}\times\left]-1,1\right[$, on a $\left|t^{n-1}\sin(nx)\right|\leq|t|^{n-1}=\left|t^{n-1}e^{inx}\right|$, la série $\sum|t|^{n-1}$ étant convergente (puisque $|t|<1$), donc les séries $\sum t^{n-1}e^{inx}$ et $\sum t^{n-1}\sin(nx)$ sont absolument convergentes et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}t^{n-1}\sin(nx)&=\Im\left(\sum_{n=1}^{+\infty}t^{n-1}e^{inx}\right)=\Im\left(e^{ix}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(te^{ix}\right)^n\right)\\&=\Im\left(\frac{e^{ix}}{1-te^{ix}}\right)=\Im\left(\frac{1}{e^{-ix}-t}\right)=\frac{\Im\left(e^{ix}-t\right)}{\left|e^{-ix}-t\right|^2}\\&=\frac{\sin(x)}{1-2t\cos(x)+t^2}\end{aligned}$$

2. Pour tout $x\in\left]0,\pi\right[$, la fonction $t\mapsto f(x,t)=\dfrac{\sin(x)}{1-2t\cos(x)+t^2}=\Im\left(\dfrac{1}{e^{-ix}-t}\right)$ est continue sur $[0,1]$ (l'égalité $e^{-ix}=t$ donne $t=1$ et $x\equiv0$ modulo 2π, ce qui n'est pas) et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,t)\,dt&=\sin(x)\int_0^1\frac{dt}{1-2t\cos(x)+t^2}=\sin(x)\int_0^1\frac{dt}{(t-\cos(x))^2+\sin^2(x)}\\&=\frac{1}{\sin(x)}\int_0^1\frac{dt}{1+\left(\dfrac{t-\cos(x)}{\sin(x)}\right)^2}\end{aligned}$$

($\sin(x) > 0$ pour $x \in \left]0, \pi\right[$) et le changement de variable $u = \dfrac{t - \cos(x)}{\sin(x)}$ nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x,t)\,dt &= \int_{-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}^{\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}} \frac{du}{1+u^2} = \int_{-\operatorname{cotan}(x)}^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{du}{1+u^2} \\
&= \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \arctan(\operatorname{cotan}(x)) \\
&= \frac{x}{2} + \arctan(\operatorname{cotan}(x))
\end{aligned}$$

La fonction $\varphi : x \mapsto \arctan(\operatorname{cotan}(x))$ étant définie et dérivable sur $\left]0, \pi\right[$ de dérivée $-\dfrac{1}{\sin^2(x)}\dfrac{1}{1+\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}} = -1$, on a $\varphi(x) = -x + c$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ nous donne $c = \dfrac{\pi}{2}$, soit $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2} - x$.
On a donc :

$$\int_0^1 f(x,t)\,dt = \frac{\pi - x}{2}$$

3. Pour x fixé dans $\left]0, \pi\right[$, la suite $(S_n(x,\cdot))_{n\geq 1}$ des sommes partielles de la série de fonctions $\sum t^{n-1}\sin(nx)$ converge simplement sur $\left]0, 1\right[$ vers la fonction $t \mapsto f(x,t)$, toutes les fonctions considérées étant continues sur $\left]0, 1\right[$ avec :

$$\begin{aligned}
|S_n(x,t)| &= \left|\Im\left(e^{ix}\frac{1-t^n e^{inx}}{1-te^{ix}}\right)\right| \leq \left|e^{ix}\frac{1-t^n e^{inx}}{1-te^{ix}}\right| \\
&\leq \frac{2}{|1-te^{ix}|} = \frac{2}{\sqrt{1-2t\cos(x)+t^2}} = \varphi(t)
\end{aligned}$$

la fonction φ étant continue sur $[0,1]$, donc intégrable.
On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi - x}{2} &= \int_0^1 f(x,t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x,t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(\sum_{k=1}^n t^{k-1}\sin(kx)\right)dt \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}
\end{aligned}$$

Ce résultat étant valable pour $x = \pi$.
Pour $x \in \left]\pi, 2\pi\right[$, on écrit $x = 2\pi - y$ avec $y \in \left]0, \pi\right[$ et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(ny)}{n} = -\frac{\pi - y}{2} = \frac{\pi - x}{2}$$

4. En utilisant le théorème d'Abel, on peut vérifier que la convergence de $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n}$ est uniforme sur tout segment $[a,b] \subset \left]0, \pi\right[$.
En effet, pour tout réel $x \in [a,b]$ et tout tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^n \sin(kx)\right| &= \left|\Im\left(\sum_{k=0}^n e^{ikx}\right)\right| \leq \left|\sum_{k=0}^n e^{ikx}\right| = \left|\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{it}}\right| \\
&\leq \left|\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\frac{e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right| \\
&\leq \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}
\end{aligned}$$

On déduit alors du théorème d'Abel uniforme que la série $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ est uniformément convergente sur $[a,b]$.
On a alors pour $0 < x, y < \pi$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_x^y \frac{\sin(nt)}{n} dt = \int_x^y \frac{\pi - t}{2} dt$$

soit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx) - \cos(ny)}{n^2} = \frac{(\pi - x)^2 - (\pi - y)^2}{4}$$

Prenant $y = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2} = -\frac{\pi^2}{48}$$

ce qui nous donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{4(\pi - x)^2 - \pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{48} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{x(2\pi - x)}{4}$$

pour tout $x \in]0, \pi[$.
Ce résultat étant encore valable pour $x = 0$ et $x = \pi$.
Pour $x \in]\pi, 2\pi[$, on écrit $x = 2\pi - y$ avec $y \in]0, \pi[$ et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(ny)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{y(2\pi - y)}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{(2\pi - x)x}{4}$$

Exercice 61 *Soient $a < b$ deux réels et $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles telles que :*

$$\forall x \in]a, b[, \lim_{n\to+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ (lemme de Cantor).
On peut raisonner par l'absurde en utilisant une suite de fonctions définie par :

$$f_k(x) = \frac{(a_{n_k} \cos(n_k x) + b_{n_k} \sin(n_k x))^2}{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2}$$

où la suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ est judicieusement choisie.

Solution. Les égalités $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ sont équivalentes à $\lim_{n\to+\infty} (a_n, b_n) = (0,0)$ ou encore à $\lim_{n\to+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = 0$.
Si la suite $\left(a_n^2 + b_n^2\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0, on peut alors trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $k \geq 1$, il existe un entier $n > k$ tel que $a_n^2 + b_n^2 > \varepsilon$.
On peut donc construire une suite strictement croissante d'entier $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2 > \varepsilon$ pour tout $k \geq 1$.
On définit alors la suite de fonctions $(f_k)_{k\geq 1}$ par $f_k(x) = \frac{(a_{n_k} \cos(n_k x) + b_{n_k} \sin(n_k x))^2}{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2}$.
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$, on a pour tout $x \in]a, b[$:

$$0 \leq f_k(x) \leq \frac{\left(a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2\right)\left(\cos^2(n_k x) + \sin^2(n_k x)\right)}{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2} = \varphi(x) = 1$$

et par hypothèse, la suite $(f_k)_{k\geq 1}$ converge simplement vers 0 puisque :

$$0 \leq f_k(x) \leq \frac{(a_{n_k}\cos(n_k x) + b_{n_k}\sin(n_k x))^2}{\varepsilon}$$

On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = 0.$$

En développant $g_n(x) = (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))^2$, on a pour $(a_n, b_n) \neq (0,0)$ (ce qui le cas des (a_{n_k}, b_{n_k})) :

$$\begin{aligned}\int_a^b g_n(x)\, dx &= \int_a^b \frac{a_n^2\cos^2(nx) + b_n^2 \sin(nx)^2 + 2a_n b_n \cos(nx)\sin(nx)}{a_n^2+b_n^2} dx \\ &= \frac{b-a}{2} - \frac{b_n^2 - a_n^2}{a_n^2+b_n^2}\frac{\sin(2nb)-\sin(2na)}{4n} + \frac{a_n b_n}{a_n^2+b_n^2}\frac{\cos(2na)-\cos(2nb)}{2n}\end{aligned}$$

avec :

$$\left|\frac{a_n b_n}{a_n^2+b_n^2}\frac{\cos(2na)-\cos(2nb)}{2n}\right| \leq \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

(en utilisant $|a_n b_n| \leq \dfrac{a_n^2+b_n^2}{2}$) et :

$$\left|\frac{b_n^2 - a_n^2}{a_n^2+b_n^2}\frac{\sin(2nb)-\sin(2na)}{4n}\right| \leq \frac{1}{2n} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui entraîne $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = \frac{b-a}{2} > 0$ et une contradiction.

Exercice 62 *Transformation de Laplace*

1. *Soit $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{C}$ une fonction Lebesgue-intégrable.*
   Montrer que la fonction :

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt} dt$$

   est bien définie, continue sur $\mathbb{R}^+$ et de limite nulle à l'infini.
2. *Soit $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{C}$ une fonction Lebesgue-mesurable et bornée.*
   Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et de limite nulle à l'infini.
3. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ soit convergente (ce qui ne signifie pas nécessairement que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$).*
   Nous allons montrer de deux manières différentes la continuité de la transformée de Laplace sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) *On désigne par R la fonction définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\, dt$$

   i. *Montrer que pour tous réels $x \geq 0$ et $v > u > 0$, on a :*

$$\left|\int_u^v e^{-xt} f(t)\, dt\right| \leq 3 \sup_{t\geq u} |R(t)|$$

ii. *En déduire que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.*

iii. *Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction :*

$$F_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^n f(t)\, e^{-xt} dt$$

est continue sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire que $\mathcal{L}(f)$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^+$.

(b) *Montrer que pour tous réels $x \geq 0$ et $v > u > 0$, il existe un réel $c_x \in [u, v]$ tel que :*

$$\int_u^v e^{-xt} f(t)\, dt = e^{-xu} \int_u^{c_x} f(t)\, dt$$

puis en déduire que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Solution. Notons $\varphi(x,t) = f(t)\, e^{-xt}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+,*}$ ou $(x,t) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2$.

1. Pour tout réel $t > 0$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+,*},\ |\varphi(x,t)| \leq |f(t)|$$

la fonction $|f|$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On déduit alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
En particulier, on a :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \mathcal{L}(f)(0) = \lim_{x \to 0^+} \mathcal{L}(f)(x)$$

Ce résultat peut être utilisé si on connaît la fonction $\mathcal{L}(f)$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (par exemple comme solution d'une équation différentielle).
Pour tout réel $t > 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x,t) = 0$ avec $|\varphi(x,t)| \leq |f(t)|$, la fonction $|f|$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On déduit alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

2. Notons $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t)|$ et $\varphi(x,t) = f(t)\, e^{-xt}$ pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2$.

(a) Pour tout entier $k \geq 0$ et tout réel $t > 0$, la fonction :

$$x \mapsto \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x,t) = (-1)^k t^k f(t)\, e^{-xt}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et pour tout réel $x > 0$, la fonction :

$$t \mapsto \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x,t) = (-1)^k t^k f(t)\, e^{-xt}$$

est mesurable sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
De plus pour tout $a > 0$, on a :

$$\forall (x,t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}^{+,*},\ \left| \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq g_a(t) = \|f\|_\infty t^k e^{-at}$$

la fonction continue g_a étant intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
On déduit alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ (\mathcal{L}(f))^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} f(t)\, t^k e^{-xt} dt = (-1)^k \mathcal{L}\left(t^k \cdot f\right)$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, on a

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}(f)(x)| &= \left|\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt\right| \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{\|f\|_\infty}{x} \underset{x \to +\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

3.

(a) Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente, la fonction :

$$R : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt$$

est bien définie, de limite nulle à l'infini et on peut remarquer que c'est une primitive de $-f$.

i. Une intégration par parties nous donne, pour $x \geq 0$ et $v > u > 0$:

$$\int_u^v e^{-xt} f(t)\,dt = \left[-e^{-xt} R(t)\right]_u^v - x \int_u^v e^{-xt} R(t)\,dt$$

et en conséquence :

$$\begin{aligned}\left|\int_u^v e^{-xt} f(t)\,dt\right| &\leq |R(v)| + |R(u)| + x\int_u^v e^{-xt} |R(t)|\,dt \\ &\leq \sup_{t \geq u} |R(t)| \left(2 + \int_u^v x e^{-xt} dt\right)\end{aligned}$$

avec :

$$\int_u^v x e^{-xt} dt \leq \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt = 1$$

pour $x > 0$, cette inégalité étant encore vérifiée pour $x = 0$.
On a donc :

$$\left|\int_u^v e^{-xt} f(t)\,dt\right| \leq 3 \sup_{t \geq u} |R(t)|$$

ii. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} R(x) = 0$$

donc, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $u_0 \geq 0$ tel que :

$$\forall t \geq u_0,\ |R(t)| < \varepsilon$$

Il en résulte que :

$$\forall u \geq u_0,\ \sup_{t \geq u} |R(t)| \leq \varepsilon$$

et donc, pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$\forall v > u \geq u_0,\ \left|\int_u^v e^{-xt} f(t)\,dt\right| \leq 3\varepsilon$$

ce qui équivaut à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt} dt$ est convergente (critère de Cauchy).
La transformée de Laplace est donc bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

iii. Comme pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $\varphi : (x,t) \mapsto f(t)\, e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times [0,n]$, la fonction F_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ (théorème élémentaire de continuité d'une fonction définie par l'intégrale sur un segment d'une fonction continue de deux variables).
Pour $\varepsilon > 0$ et u_0 comme à la question précédente, on a pour tout $m > n > u_0$ et tout réel $x \geq 0$:

$$|F_m(x) - F_n(x)| = \left| \int_n^m e^{-xt} f(t)\, dt \right| \leq 3\varepsilon$$

ce qui prouve que la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément convergente (critère de Cauchy uniforme).
Sachant que cette suite de fonctions converge vers $\mathcal{L}(f)$, on en déduit que cette dernière fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(b)

i. Connaissant la seconde formule de la moyenne, le résultat est évident.
Pour $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est à valeurs positives, de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante sur $[u,v]$ et la fonction $t \mapsto f(t)$ est continue sur $[u,v]$, donc le deuxième théorème de la moyenne nous assure de l'existence de $c_x \in [u,v]$ tel que :

$$\int_u^v e^{-xt} f(t)\, dt = e^{-xu} \int_u^{c_x} f(t)\, dt$$

Ou alors, on peut montrer directement cette formule dans notre cas particulier.
En notant F la primitive de f nulle en u, une intégration par parties nous donne :

$$\int_u^v e^{-xt} f(t)\, dt = e^{-xv} F(v) + x \int_u^v e^{-xt} F(t)\, dt$$

et notant $m = \inf\limits_{t\in[u,v]} F(t)$, $M = \sup\limits_{t\in[u,v]} F(t)$, on a :

$$m \left(e^{-xv} + \int_u^v e^{-xt} x dt \right) \leq \int_u^v e^{-xt} f(t)\, dt \leq M \left(e^{-xv} + \int_u^v e^{-xt} x dt \right)$$

soit :

$$m e^{-xu} \leq \int_u^v e^{-xt} f(t)\, dt \leq M e^{-xu}$$

ce qui entraîne l'existence de $c_x \in [u,v]$ tel que :

$$e^{xu} \int_u^v e^{-xt} f(t)\, dt = F(c_x) = \int_u^{c_x} f(t)\, dt$$

(théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction continue F).

ii. Pour tous réels $x \geq 0$ et $v > u > 0$, on a :

$$\left| \int_u^v e^{-xt} f(t)\, dt \right| = \left| e^{-xu} \int_u^{c_x} f(t)\, dt \right| \leq \left| \int_u^{c_x} f(t)\, dt \right|$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente, pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un réel $u_0 \geq 0$ tel que :

$$\forall v > u > u_0, \ \left| \int_u^v f(t)\, dt \right| < \varepsilon$$

ce qui nous donne :

$$\forall x \geq 0, \ \forall v > u > u_0, \ \left| \int_u^v e^{-xt} f(t)\, dt \right| < \varepsilon$$

Comme à la question précédente, la définition et la continuité de $\mathcal{L}(f)$ s'en déduisent en utilisant le critère de Cauchy uniforme.

Exercice 63 ***L'intégrale de Gauss*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

On propose ici plusieurs méthodes pour calculer la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

1. *On considère les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2,\ G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(t^2+1\right)}}{t^2+1}dt$$

   (a) *Montrer que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' + G' = 0$.*

   (b) *En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+,*},\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$$

   (a) *Montrer que la transformée de Laplace de f :*

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}dt$$

   est bien définie, continue sur $\mathbb{R}^+$ et de limite nulle en $+\infty$.

   (b) *Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et solution d'une équation différentielle de la forme $y' - y = -\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$, où λ est une constante réelle.*

   (c) *Résoudre cette équation différentielle et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

3. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$$

   (a) *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

   (b) *Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

4. *Pour tout réel $R > 0$, on note :*

$$I_R = \int_0^R e^{-t^2}dt$$

   (a) *Montrer que :*

$$I_R^2 = 2\iint_{T_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

   où :

$$T_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq R\right\}$$

   (b) *Montrer que :*

$$I_R^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}}d\theta$$

   et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.

5.

(a) *Montrer que :*

$$\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dx dy = \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2$$

(b) *Calculer* $\displaystyle\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dx dy$ *en utilisant les coordonnées polaires et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

6. On désigne par $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des intégrales de Wallis définies par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$$

(a) *Montrer que :*

$$W_n \underset{\alpha\to+\infty}{\backsim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

(on vérifiera que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$*, que la suite* $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est constante, puis que* $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$*).*

(b) *Montrer que, pour tout entier* $n \geq 1$ *et tout réel* $t \in [0, \sqrt{n}]$, *on a :*

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

(c) *Montrer que pour tout entier* $n \geq 1$, *on a :*

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} W_{2(n-1)}$$

(d) *En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

(e) *Pour tout entier* $n \geq 1$, *on désigne par* p_n *la probabilité d'obtenir* n *fois pile et* n *fois face sur* $2n$ *lancés indépendants d'une pièce équilibrée.*
Montrer que :

i.

$$\forall n \geq 1,\ p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

ii.

$$\forall n \geq 1,\ p_n^2 = \frac{1}{2n+1} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2-1}{4k^2} = \frac{1}{2n+1} \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \frac{2}{\pi}$$

iii.

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

7. En munissant, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ *de sa structure euclidienne canonique, calculer* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx$.

Solution.

1.

(a) Les fonctions F et G sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ avec :

$$F'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt \text{ et } G'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt$$

(la fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et on intègre sur un segment, donc G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$).
Le changement de variable $y = xt$, pour $x > 0$, dans $G'(x)$ donne :

$$G'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-y^2}dy = -F'(x)$$

ce résultat étant encore valable pour $x = 0$.
On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F'(x) + G'(x) = 0$$

(b) Il en résulte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{4}$$

Puis avec :

$$0 \leq G(x) \leq e^{-x^2}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{4}e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{4} - \lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \dfrac{\pi}{4}$, soit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. Notons $\varphi(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$ pour $(x,t) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2$.

(a) La fonction f étant Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (on a $f(t) \underset{t\to0^+}{\backsim} \dfrac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\backsim} \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$), sa transformée de Laplace est bien définie, continue sur $\mathbb{R}^+$ et de limite nulle à l'infini.

(b) La dérivée partielle :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} = -\frac{\sqrt{t}e^{-xt}}{1+t}$$

est définie et continue sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$ avec :

$$\forall a > 0,\ \forall (x,t) \in [a,+\infty[\times \mathbb{R}^{+,*},\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{\sqrt{t}e^{-xt}}{1+t} \leq e^{-at}$$

(on a $\dfrac{u}{1+u^2} < \dfrac{1}{2}$ pour tout $u > 0$), la fonction $t \mapsto e^{-at}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^{+,+}$.
Le théorème de dérivation de Lebesgue nous dit que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec, pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}(f))'(x) &= -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}dt \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}dt \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt + \mathcal{L}(f)(x)\end{aligned}$$

Pour $x > 0$, le changement de variable $u = xt$ nous donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$$

où on noté :

$$\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

(c) Les solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \alpha e^x$ et faisant varier la constante la recherche d'une solution de $y' - y = -\frac{\lambda}{\sqrt{x}}$ nous conduisent à $\alpha'(x) = -\frac{\lambda}{\sqrt{x}} e^{-x}$, soit à :

$$\alpha(x) = -\lambda \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = -2\lambda \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$$

On a donc :

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = \left(\alpha - 2\lambda \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \right) e^x$$

cette égalité étant encore valable pour $x = 0$ puisque $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Pour $x = 0$, on a :

$$\alpha = \mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi$$

donc :

$$\forall x \geq 0,\ \mathcal{L}(f)(x) = \left(\pi - 2\lambda \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \right) e^x$$

avec :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\pi - 2\lambda \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \right) = \pi - 2\lambda \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \pi - \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2$$

et :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

ce qui impose $\pi - \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = 0$, soit $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. Notons $\varphi(x,t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

(a) La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^2$ avec $|\varphi(x,t)| \leq g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, la fonction h étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On déduit alors du théorème de convergence dominée que la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
Avec $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = -t^2 \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, cette dérivée partielle étant continue sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout réel $a > 0$:

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) \right| \leq h(t) = e^{-at^2}$$

pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}^+$, la fonction h étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on déduit que f et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} t^2 \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

(b) On a, pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt + f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt + f(x) \\ &= f(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

où on noté :

$$\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

On a donc :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \left(\alpha - \lambda \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt\right) e^x = \left(\alpha - 2\lambda \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt\right) e^x$$

cette égalité étant encore valable pour $x = 0$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Pour $x = 0$, on a :

$$\alpha = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$$

donc :

$$\forall x \geq 0,\ f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - 2\lambda \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt\right) e^x$$

avec :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - 2\lambda \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt\right) = \frac{\pi}{2} - 2\lambda \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\pi}{2} - 2\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2$$

et :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x,t) = 0$ avec $0 \leq \varphi(x,t) \leq \frac{1}{1+t^2}$), ce qui impose $\frac{\pi}{2} - 2\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2 = 0$, soit $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4.

(a) Pour tout réel $R > 0$, le théorème de Fubini pour une fonction continue sur un carré nous donne :

$$I_R^2 = \int_0^R e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy = \iint_{[0,1]^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dx dy$$

La fonction $\varphi : (x,y) \mapsto e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ étant symétrique (on a $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$), on en déduit que :

$$I_R^2 = 2 \iint_{T_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dx dy$$

(b) Le changement de variable $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ nous donne :

$$\begin{aligned} (0 < y \leq x \leq R) &\Leftrightarrow (0 < r\sin(\theta) \leq r\cos(\theta) \leq R) \\ &\Leftrightarrow \left(0 < \tan(\theta) \leq 1 \text{ et } 0 < r \leq \frac{R}{\cos(\theta)}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(0 < \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ et } 0 < r \leq \frac{R}{\cos(\theta)}\right) \end{aligned}$$

donc :

$$\iint_{T_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{R}{\cos(\theta)}} e^{-r^2} r dr \right) d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\frac{R}{\cos(\theta)}} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}} \right) d\theta$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta \right)$$

soit :

$$I_R^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta$$

Pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(\theta) \leq 1$ et $0 \leq e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}} \leq e^{-R^2}$, ce qui nous donne :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2} d\theta = \frac{\pi}{4} e^{-R^2} \underset{R\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R^2 = \frac{\pi}{4}$ et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{R\to+\infty} I_R = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

5.

(a) La fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ est continue, donc Lebesgue mesurable et le théorème de Fubini-Tonelli nous dit que :

$$\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$
$$= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 < +\infty$$

(b) L'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+,*} \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & (\mathbb{R}^{+,*})^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array}$$

étant bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r > 0$$

elle réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+,*} \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$ (passage en coordonnées polaires) et le théorème de changement de variables nous permet d'écrire que :

$$\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{(\mathbb{R}^{+,*})^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{\mathbb{R}^{+,*}\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[} e^{-r^2} r dr d\theta$$

En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^{+,*}\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

donc :

$$\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4} \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ nous donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$$

Pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $0 < \cos(t) < 1$, ce qui entraîne que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante à valeurs strictement positives, donc convergente.
En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient que :

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$$

(a) Une intégration par parties nous donne pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\cos(t)\,dt \\
&= \left[\cos^{n+1}(t)\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)\,dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\left(1 - \cos^2(t)\right) dt \\
&= (n+1)\left(W_n - W_{n+2}\right)
\end{aligned}$$

soit :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

En notant $u_n = nW_nW_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)\,W_{n+1}W_n}{nW_nW_{n-1}} = \frac{n+1}{n}\frac{W_{n+1}}{W_{n-1}} = \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1} = 1$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à $u_1 = W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
Les inégalités :

$$0 \leq W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$$

nous donnent :

$$nW_{n+1}W_n \leq nW_n^2 \leq nW_nW_{n-1}$$

soit :

$$\frac{n}{n+1}u_{n+1} \leq nW_n^2 \leq u_n$$

ou encore :

$$\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2} \leq nW_n^2 \leq \frac{\pi}{2}$$

et en conséquence $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_n^2 = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui revient à dire que $W_n \underset{\alpha\to+\infty}{\backsim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

(b) Pour tout réel $x \in [0, 1[$, on a :

$$\ln(1-x) \leq -x \leq -\ln(1+x)$$

(ce qui résulte des égalités pour $x = 0$ et de $\dfrac{1}{1-x} \geq 1 \geq \dfrac{1}{1+x}$), ce qui nous donne pour $t \in [0, \sqrt{n}[$:

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n} \leq -\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)$$

qui équivaut à :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

Ces inégalités étant aussi vérifiées pour $t = \sqrt{n}$ (pour $t = \sqrt{n}$, cela donne $0 \leq e^{-n} \leq 2^{-n}$).

(c) Des encadrements précédents, on déduit que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

Les changements de variables $t = \sqrt{n}\sin(\theta)$ dans la première intégrale et $t = \sqrt{n}\tan(\theta)$ dans la troisième nous donne :

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta)\, d\theta \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt &\leq \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(\theta)\right)^{-(n-1)} d\theta \\ &\leq \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2(n-1)}(\theta)\, d\theta \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)}(\theta)\, d\theta\end{aligned}$$

soit :

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} W_{2(n-1)}$$

(d) Tenant compte de :

$$W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

et :

$$W_{2(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{\frac{\pi}{4(n-1)}} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(e)

i. Pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire X_{2n} égale au nombre de fois où on obtient face au bout de $2n$ lancés suit une loi binomiale de paramètre $\left(2n, \frac{1}{2}\right)$, donc :

$$\begin{aligned}p_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} &= \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &= \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (2n))(1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1))}{(n!)^2} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\end{aligned}$$

ii. Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$p_n^2 = \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)\right)^2}{\prod\limits_{k=1}^{n}(4k^2)}$$

avec :

$$\begin{aligned}\left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)^2 &= \left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)\left(\prod_{j=0}^{n-1}(2j+1)\right) \\ &= \frac{1}{2n+1}\left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\right) \\ &= \frac{1}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(4k^2-1\right)\end{aligned}$$

donc :

$$p_n^2 = \frac{1}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2-1}{4k^2}$$

D'autre part, en notant $v_n = \dfrac{W_{2n}}{W_{2n+1}}$ et en utilisant la relation de récurrence :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$$

on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{W_{2n}}{W_{2n-2}}\frac{W_{2n-2}}{W_{2n-1}}\frac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}} = \frac{2n-1}{2n}v_{n-1}\frac{2n+1}{2n} \\ &= \frac{4n^2-1}{4n^2}v_{n-1} \end{aligned}$$

donc :

$$v_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2-1}{4k^2}v_0$$

avec $v_0 = \dfrac{W_0}{W_1} = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui nous donne :

$$p_n^2 = \frac{1}{2n+1}\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}}\frac{2}{\pi}$$

iii. Les inégalités :

$$0 \leq W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$$

nous donnent :

$$1 \leq \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \leq \frac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

et en conséquence :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}} = 1$$

Il en résulte que :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

7. En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)dx_1\cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{k=1}^{n}e^{-x_k^2}dx_1\cdots dx_n = \prod_{k=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}e^{-x_k^2}dx_k = \pi^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Exercice 64 ***L'intégrale de Dirichlet***

On propose plusieurs méthodes de calcul de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

1.

(a) Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$ *les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^\alpha}dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ *sont convergentes.*

(b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ *est semi-convergente.*

2.

(a) *Montrer que la transformée de Laplace* $\mathcal{L}(f)$ *de la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = \begin{cases} 1 \ si\ t = 0 \\ \dfrac{\sin(t)}{t} \ \ si\ t > 0 \end{cases}$$

est bien définie, continue sur $\mathbb{R}^+$, *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^{+,*}$ *et de limite nulle nulle à l'infini.*

(b) *Calculer* $\mathcal{L}(f)(x)$ *pour tout réel* $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ *et en déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

3.

(a) *Montrer que, pour tout réel* $x \geq 0$, *les intégrales généralisées* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(x+2t)^2} dt$ *sont convergentes et que l'on a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = 4 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(x+2t)^2} dt$$

(b) *En déduire que la fonction* $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^{+,*}$.

(c) *Pour* $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$, *montrer que la fonction* $\mathcal{L}(f)$ *est solution de l'équation différentielle* $y'' + y = \dfrac{1}{x}$, *résoudre cette équation différentielle et en déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

4.

(a) *Montrer que pour toute fonction* f *de classe* $\mathbb{C}^1$ *de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$, *on a* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx)\, dx = 0$.

(b) *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt = \frac{\pi}{2}$$

(c) *Après avoir justifié que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}\right) dt$$

montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dx = \frac{\pi}{2}$$

Solution.

1.

(a) Pour tout réel $t \geq 1$, on a :

$$\left|\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha} \text{ et } \left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

donc, pour $\alpha > 1$, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ sont absolument convergentes.
Pour $\alpha > 0$, une intégration par parties donne, pour tout réel $x > 1$:

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} + \alpha \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$$

l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$ étant absolument convergente (on a $\alpha + 1 > 1$) et :

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ s'en déduit alors.

(b) Comme $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.
On déduit alors de la question précédente que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.
Pour tout entier $n \geq 1$, le changement de variable $t = n\pi + u$ nous donne :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{n\pi + u} du \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin(u)\, du = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

et en conséquence $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt = +\infty$, ce qui entraîne la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$.
On peut aussi écrire que, pour tout $t \geq 1$, on a :

$$\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \geq \frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1 - \cos(2t)}{t} \geq 0$$

avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ qui converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ qui diverge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$ diverge.

2.

(a) Comme f est continue, bornée et d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}^+$, sa transformée de Laplace est bien définie, continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et de limite nulle nulle à l'infini (questions 3 et 2 de l'exercice 62).

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)'(x) &= -\int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-xt} dt = -\Im\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt\right) \\ &= -\Im\left(\frac{1}{x-i}\right) = -\frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \mathcal{L}(f)(x) = -\arctan(x) + C$$

Puis avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$, on déduit que $C = \dfrac{\pi}{2}$, soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

et avec la continuité de $\mathcal{L}(f)$ sur $\mathbb{R}^+$, on déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \mathcal{L}(f)(0) = \lim_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2}$$

3.

(a) Pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(t)}{x+t} = \lim_{t \to 0^+} 4\frac{\sin^2(t)}{(x+2t)^2} = \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

et en conséquence, il n'y a pas de problème de convergence d'intégrales en 0.
Une intégration par parties nous donne pour tous réels $x \geq 0$ et $\xi > \alpha > 0$:

$$\int_\alpha^\xi \frac{\sin(t)}{x+t}dt = \left[-\frac{\cos(t)}{x+t}\right]_\alpha^\xi - \int_\alpha^\xi \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}dt = \frac{\cos(\alpha)}{x+\alpha} - \frac{\cos(\xi)}{x+\xi} - \int_\alpha^\xi \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}dt$$

avec :

$$\left|\frac{\cos(\xi)}{x+\xi}\right| \leq \frac{1}{\xi} \underset{\xi \to +\infty}{\to} 0$$

et :

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{(x+t)^2}dt \leq \int_\alpha^{+\infty} \frac{dt}{t^2} < +\infty$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}dt &= \frac{\cos(\alpha)}{x+\alpha} - \int_\alpha^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}dt \\
&= \frac{1-2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{x+\alpha} - \int_\alpha^{+\infty} \frac{1-2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{(x+t)^2}dt \\
&= \frac{1-2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{x+\alpha} - \int_\alpha^{+\infty} \frac{1-2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{(x+t)^2}dt \\
&= -\frac{2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{x+\alpha} + 2\int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{(x+t)^2}dt
\end{aligned}$$

Faisant tendre α vers 0, on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{(x+t)^2}dt = 4\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{(x+2y)^2}dy$$

(b) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{(x+2t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geq 0$, tout $t > 0$, on a :

$$0 \leq \frac{\sin^2(t)}{(x+2t)^2} \leq g(t) = \frac{\sin^2(t)}{4t^2}$$

la fonction g étant intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
Le théorème de continuité de Lebesgue nous dit alors que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(x+2t)^2}dt$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et il en est de même de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}dt$.

(c) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ étant bornée et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, sa transformé de Laplace $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, de limite nulle à l'infini et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}(f))''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}e^{-xt}dt \\
&= \frac{1}{x} - \mathcal{L}(f)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}(f)$ est solution sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$ avec les conditions aux limites :

$$\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

et :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$$

L'équation homogène $y'' + y = 0$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $y(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$ et en utilisant la méthode de Lagrange, on cherche une solution particulière du type $y_0(x) = \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$, où les fonctions α, β de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ sont telles que $\alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0$.
Dans ces conditions, on a pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$\begin{cases} y_0'(x) = -\alpha(x)\sin(x) + \beta(x)\cos(x) \\ y_0''(x) = -y_0(x) - \alpha'(x)\sin(x) + \beta'(x)\cos(x) \end{cases}$$

ce qui nous donne les systèmes linéaires :

$$\begin{cases} \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0 \\ -\alpha'(x)\sin(x) + \beta'(x)\cos(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

de solutions :

$$\alpha'(x) = -\frac{\sin(x)}{x},\ \beta'(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

Donc :

$$\alpha(x) = -\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt + C_1,\ \beta(x) = \int_1^x \frac{\cos(t)}{t} dt + C_2$$

pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*}$.
Prenant pour constantes d'intégration :

$$C_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt,\ C_2 = -\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$$

(ces intégrales sont semi-convergentes), on obtient pour la solution particulière y_0 définie par :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt\right)\cos(x) - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt\right)\sin(x) \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)\cos(x) - \cos(t)\sin(x)}{t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(z)}{x+z} dz \end{aligned}$$

On a donc, pour tout réel $x > 0$:

$$\mathcal{L}(f)(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

cette dernière égalité étant encore valable pour $x = 0$ puisque toutes les fonctions considérées sont continues sur $\mathbb{R}^+$.
Comme :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = 4\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(x+2t)^2} dt$$

avec :

$$\forall t > 0,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin^2(t)}{(x+2t)^2} = 0$$

et :

$$\forall x > 0,\ \forall t > 0,\ \frac{\sin^2(t)}{(x+2t)^2} \leq g(t) = \frac{\sin^2(t)}{t^2}$$

le théorème de convergence dominée nous dit que :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = 0$$

Il en résulte que :

$$\lim_{x \to +\infty} (\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)) = \lim_{x \to +\infty} \left(\mathcal{L}(f)(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt \right) = 0$$

et nécessairement $\alpha = \beta = 0$ (prendre les suites $(2n\pi)_{n \in \mathbb{N}}$ puis $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)_{n \in \mathbb{N}}$).
On a donc, pour tout réel $x \geq 0$:

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

et pour $x = 0$, on obtient :

$$\frac{\pi}{2} = \mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

4.

(a) Une intégration par parties nous donne pour tout $n \geq 1$:

$$I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx)\, dx = \left[-f(x) \frac{\cos(nx)}{n} \right]_a^b + \int_a^b f'(x) \frac{\cos(nx)}{n} dx$$

et en posant $M_0 = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$, $M_1 = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$ (ces fonctions sont continues sur le segment $[a,b]$), on en déduit que :

$$|I_n| \leq \frac{2M_0}{n} + \frac{(b-a) M_1}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

(b) Notons $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (la fonction $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ se prolonge par continuité en 0).
En utilisant les relations :

$$\sin((2n+1)t) = \sin(2nt)\cos(t) + \cos(2nt)\sin(t)$$

et :

$$\sin((2n+1)t) + \sin((2n-1)t) = 2\sin(2nt)\cos(t)$$

on déduit que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} \cos(t)\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt)\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} \cos(t)\, dt \end{aligned}$$

et :

$$J_n + J_{n-1} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} \cos(t)\, dx = 2J_n$$

soit $J_n = J_{n-1}$ et par récurrence $J_n = J_0 = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \geq 0$.

(c) Vérifions d'abord que la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$ se prolonge se prolonge par continuité en 0.

Un développement limité au voisinage de 0 nous donne :

$$f(t) = \frac{\sin(t) - t}{t\sin(t)} = \frac{-\frac{t^3}{3!} + o(t^4)}{t\left(t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)\right)}$$
$$= \frac{-\frac{t}{3!} + o(t^2)}{1 - \frac{t^2}{3!} + o(t^2)} = t\left(-\frac{1}{3!} + o(1)\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

ce qui permet de prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

On a aussi :

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = -\frac{1}{3!} + o(1) \underset{x\to 0}{\to} -\frac{1}{3!}$$

donc f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = -\frac{1}{6}$.

Comme f est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ de dérivée :

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\cos(x) - \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$$
$$= \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2}{x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2}$$
$$= \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^3)\right)^2}{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2}$$
$$= \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right)}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right)}$$
$$= \frac{-\frac{x^2}{6} + o(x^3)}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right)} = \frac{-\frac{1}{6} + o(x)}{1 + o(x)} \underset{x\to 0}{\to} -\frac{1}{6}$$

elle de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

En remarquant que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t)\left(f(t) + \frac{1}{\sin(t)}\right)dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) f(t)\,dt + J_n$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) f(t)\,dt + \frac{\pi}{2}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) f(t)\,dt$ (lemme de Riemann-Lebesgue), on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

Enfin, le changement de variable $x = (2n+1)\,t$ nous donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)\,t)}{t} dt = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 65 ***La méthode de Laplace***

1. *Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue intégrable qui admet une limite finie ℓ en 1^-. On se propose de montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\, dx = \ell \tag{2}$$

soit que $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\, dx \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\ell}{n}$ *si* $\ell \neq 0$ *ou* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0$ *si* $\ell = 0$.

   (a) *Montrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0.$

   (b) *Montrer* (2) *dans le cas où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment* $[0,1]$.

   (c) *Montrer* (2) *dans le cas général.*

Solution.

1. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in]0,1[$:

$$f_n(x) = x^n f(x)$$

   (a) Toutes les fonctions f_n sont Lebesgue-mesurables sur $]0,1[$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,1[$:

$$|f_n(x)| \leq |f(x)|$$

   la fonction $|f|$ étant Lebesgue intégrable sur $]0,1[$.
   Les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\, dx$ sont donc bien définies et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n f(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1[$, le théorème de convergence dominée nous dit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

   (b) Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} nI_n &= \left[\frac{n}{n+1} x^{n+1} f(x)\right]_0^1 - \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\, dx \\ &= \frac{n}{n+1} \left(f(1) - \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\, dx\right) \end{aligned}$$

   avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\, dx = 0$$

   (en utilisant la question précédente avec la fonction f' qui est continue sur $[0,1]$), ce qui nous donne bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = 0$.

(c) En écrivant que :

$$nI_n = \int_0^1 nx^n \left(f(x) - \ell\right) dx + \ell \frac{n}{n+1}$$

il s'agit de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx^n \left(f(x) - \ell\right) dx = 0$$

(on s'est en fait ramené au cas où $\ell = 0$).
Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ell$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in [\alpha, 1[\,,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 nx^n \left(f(x) - \ell\right) dx\right| &\leq \left|\int_0^\alpha nx^n \left(f(x) - \ell\right) dx\right| + \left|\int_\alpha^1 nx^n \left(f(x) - \ell\right) dx\right| \\ &\leq \left|\int_0^\alpha nx^n \left(f(x) - \ell\right) dx\right| + \varepsilon \int_\alpha^1 nx^n dx \\ &\leq \left|\int_0^\alpha nx^n \left(f(x) - \ell\right) dx\right| + \varepsilon \frac{n}{n+1} \left(1 - \alpha^{n+1}\right) \\ &\leq \left|\int_0^\alpha nx^n \left(f(x) - \ell\right) dx\right| + \varepsilon\end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0, \alpha[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nx^n \left(f(x) - \ell\right) = 0$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ nx^n |f(x) - \ell| \leq n\alpha^n |f(x) - \ell|$$

la suite $(n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 étant majorée, ce qui nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ nx^n |f(x) - \ell| \leq M_\alpha |f(x) - \ell|$$

où $M_\alpha > 0$ est une constante réelle.
Comme la fonction $|f - \ell|$ est Lebesgue-intégrable, le théorème de convergence dominée nous dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^\alpha nx^n \left(f(x) - \ell\right) dx = 0$, donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\int_0^\alpha nx^n \left(f(x) - \ell\right) dx\right| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.
On a donc :

$$\forall n \geq n_0,\ \left|\int_0^1 nx^n \left(f(x) - \ell\right) dx\right| < 2\varepsilon$$

soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 nx^n \left(f(x) - \ell\right) dx = 0$.

Exercice 66 *Soient I, un intervalle réel d'intérieur non vide, a un point de I et f, g deux fonctions intégrables de I dans $\mathbb{R}$.*
Montrer $f = g$ presque partout si, et seulement si, $\int_a^x f(t)\, dt = \int_a^x g(t)\, dt$ pour tout $x \in I$.

Solution. Avec la linéarité de l'intégrale, il revient au même de montrer que, pour toute fonction intégrable $f : I \to \mathbb{R}$, on a :

$$(f = 0\ p.p.) \Leftrightarrow \left(\forall x \in I,\ \int_a^x f(t)\, dt = 0\right)$$

Si f est nulle presque partout, il en est alors de même de $|f|$, ce qui signifie que l'ensemble $A = |f|^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})$ est de mesure nulle.

Comme $|f|$ est mesurable, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de I telles que $|f| = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et en écrivant que $|f| = |f| \cdot \mathbf{1}_A$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_I |f| \, d\lambda &= \int_I |f| \cdot \mathbf{1}_A d\lambda = \int_I \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n \cap A} \right) d\lambda \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \lambda \left(A_n \cap A \right) = 0\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités $\int_a^x |f(t)| \, dt \leq \int_I |f| \, d\lambda$ pour $x \leq a$ et $\int_x^a |f(t)| \, dt \leq \int_I |f| \, d\lambda$ pour $x \geq a$, on en déduit que $\int_x^a |f(t)| \, dt = 0$ pour tout $x \in I$.

Enfin avec $\left| \int_a^x f(t) \, dt \right| \leq \int_x^a |f(t)| \, dt$, on en déduit que $\int_x^a f(t) \, dt = 0$ pour tout $x \in I$.

Réciproquement, si $\int_a^x f(t) \, dt = 0$ pour tout $x \in I$, comme la fonction $x \mapsto \int_x^a f(t) \, dt$ est dérivable de dérivée égale à f presque partout (théorème de différentiation de Lebesgue), on en déduit que $f = 0$ presque partout.

Exercice 67

1. *Soient I un intervalle réel non réduit à un point et $a \in I$.*
   On se donne une fonction mesurable bornée, $f : I \to \mathbb{R}$ et on désigne par F la fonction définie sur I par :
   $$\forall x \in I, \ F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$
   Montrer que F est lipschitzienne (donc uniformément continue) sur I et qu'elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$ où la fonction f est continue avec $F'(x_0) = f(x_0)$.
2. *Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable de dérivée bornée, alors f' est intégrable sur $[a,b]$ et :*
   $$\int_a^b f'(t) \, dt = f(b) - f(a)$$
3. *En considérant la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ par $f(0) = 0$ et :*
   $$f(x) = \frac{x}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
   pour $x \neq 0$, vérifier que le résultat précédent n'est plus valable pour f dérivable de dérivée non bornée.

Solution.

1. Comme f est mesurable et bornée, elle est intégrable sur tout segment contenu dans I et la fonction F est bien définie.
   Pour tous $x < y$ dans $[a,b]$, on a :
   $$F(y) = \int_a^y f(t) \, dt = \int_a^x f(t) \, dt + \int_x^y f(t) \, dt = F(x) + \int_x^y f(t) \, dt$$
   donc :
   $$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t) \, dt$$

et :

$$\left|F(y)-F(x)\right|=\left|\int_x^y f(t)\,dt\right|\leq\int_x^y \left|f(t)\right|dt\leq M(y-x)$$

où M est un majorant de $|f|$.
On a donc $|F(y)-F(x)|\leq M|y-x|$ pour tous x,y dans I, ce qui signifie que la fonction F est lipschitzienne sur I et en conséquence, elle est uniformément continue.
Supposons que f soit continue en un point $x_0\in I$.
Pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $\eta>0$ tel que :

$$(t\in I \text{ et } |t-x_0|<\eta)\Rightarrow |f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

donc pour $x\in I$ tel que $0<|x-x_0|<\eta$, on a pour tout t compris entre x_0 et x :

$$|t-x_0|\leq|x-x_0|<\eta$$

et :

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|&=\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,dt\right|\\&\leq\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,dt\right|\\&\leq\frac{1}{|x-x_0|}\varepsilon|x-x_0|=\varepsilon\end{aligned}$$

On a donc ainsi prouvé que :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x\neq x_0}}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

ce qui signifie que F est dérivable en x_0 de nombre dérivé $F'(x_0)=f(x_0)$.
Si F est dérivable, sa dérivée F' doit vérifier la propriété des valeurs intermédiaires (théorème de Darboux), donc l'égalité $F'=f$ ne sera pas réalisée pour f ne vérifiant pas la propriété des valeurs intermédiaires.
Par exemple la fonction en escaliers $f=0\cdot\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]}+1\cdot\mathbf{1}_{]\frac{1}{2},1]}$ est mesurable bornée sur $[0,1]$ et $F(x)=0\cdot\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\mathbf{1}_{]\frac{1}{2},1]}$ est non dérivable en $\frac{1}{2}$.

2. On a $f'=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n$, où $(f_n)_{n\geq2}$ est la suite de fonctions définies sur $[a,b]$ par :

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{b-a}\left(f\left(x+\dfrac{b-a}{n}\right)-f(x)\right)\text{ si } a\leq x\leq b-\dfrac{b-a}{n}\\ 0 \text{ si } b-\dfrac{b-a}{n}\leq x\leq b\end{cases}$$

Chaque fonction f_n étant continue par morceaux est borélienne, donc f' est borélienne comme limite simple de fonctions boréliennes.
Si de plus f' est bornée, elle est alors intégrable sur $[a,b]$.
Le théorème des accroissements finis nous dit que $|f_n|\leq\|f'\|_\infty$ pour tout $n\geq2$ et le théorème de convergence dominée nous dit que :

$$\int_a^b f'(t)\,dt=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt$$

En désignant par :

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

la primitive de f nulle en a (f est continue), on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_n(t)\,dt &= \frac{n}{b-a}\int_a^{b-\frac{b-a}{n}}\left(f\left(t+\frac{b-a}{n}\right)-f(t)\right)dt \\
&= \frac{n}{b-a}\left(\int_a^{b-\frac{b-a}{n}} f\left(t+\frac{b-a}{n}\right)dt - \int_a^{b-\frac{b-a}{n}} f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{n}{b-a}\left(\int_{a+\frac{b-a}{n}}^{b} f(x)\,dx - F\left(b-\frac{b-a}{n}\right)\right) \\
&= \frac{n}{b-a}\left(F(b)-F\left(a+\frac{b-a}{n}\right)-F\left(b-\frac{b-a}{n}\right)\right) \\
&= \frac{n}{b-a}\left(F(b)-F\left(b-\frac{b-a}{n}\right)\right)-\frac{n}{b-a}\left(F\left(a+\frac{b-a}{n}\right)-F(a)\right)
\end{aligned}$$

et comme F est dérivable de dérivée $F'=f$, on déduit que :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(t)\,dt &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = F'(b)-F'(a) \\
&= f(b)-f(a)
\end{aligned}$$

3. La fonction f est dérivable sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ avec :

$$f'(x)=\frac{1}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\ln^2(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x\ln(|x|)}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

pour $x\neq 0$ et :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

(on a $\left|\frac{1}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq\frac{1}{\ln(|x|)}\underset{x\to 0}{\to}0$).

La fonction g définie sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ par $g(0)=0$ et :

$$g: x\mapsto\frac{1}{\ln(|x|)}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{\ln(|x|)}\right)$$

pour $x\neq 0$ est continue sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ (on a $|g(x)|\leq\frac{1}{\ln(|x|)}\left(1-\frac{1}{\ln(|x|)}\right)\underset{x\to 0}{\to}0$) donc intégrable, mais la fonction

$$h: x\mapsto\frac{1}{x\ln(|x|)}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

ne l'est pas.

En effet, le changement de variable $t=\frac{1}{x}$ nous donne :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|h(x)\,dx|=\int_2^{+\infty}\frac{|\sin(t)|}{t\cdot\ln(t)}dt\geq\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t\cdot\ln(t)}dt$$

et pour tout $n\geq 1$, le changement de variable $t=n\pi+u$ nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t\cdot\ln(t)}dt &= \int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{(n\pi+u)\ln(n\pi+u)}du \\
&\geq \frac{1}{(n+1)\pi\ln((n+1)\pi)}\int_0^{\pi}\sin(u)\,du=\frac{2}{(n+1)\pi\ln((n+1)\pi)}
\end{aligned}$$

la série $\sum \frac{1}{n\ln(n\pi)}$ étant divergente, donc $\int_0^{\frac{1}{2}} |h(x)\,dx| = +\infty$.

La dérivée f' n'est pas bornée sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right) = -\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}+2n\pi}{\ln\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)} = -\infty$$

Exercice 68 *On désigne par $\mathcal{H}$ le demi-plan complexe défini par :*

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

1. *Montrer que, pour tout nombre complexe z, la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$.*
2. *Soit z un nombre complexe. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement si, $z \in \mathcal{H}$.*

   La fonction gamma d'Euler est la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

3. *Montrer que :*

$$\Gamma(1) = 1 \ \ et\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

4. *Montrer que la fonction gamma vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{3}$$

5. *Montrer que pour tout entier naturel n, on a :*

$$\Gamma(n+1) = n! \ \ et\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

6.
   (a) *Soient z et α deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $(z, \alpha) \in \mathcal{H}^2$.*

   (b) *Montrer que :*

$$\forall (z, \alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}dt = \Gamma(z+1)\,\zeta(z+1, \alpha)$$

   où ζ est la fonction dzéta de Hurwitz définie par :

$$\forall (z, \alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*},\ \zeta(z+1, \alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{z+1}}$$

   En particulier, pour $\alpha = 1$, on a :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{e^t - 1}dt = \Gamma(z+1)\,\zeta(z+1)$$

   où ζ est la fonction dzéta de Riemann.

7. *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on note :*

$$I_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

   (a) *Montrer que :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = I_n(z)$$

   (b) *En déduire que :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

   (formule d'Euler).

8. *Montrer que :*

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}$$

   soit :

$$\binom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

   (formule de Wallis).

9.
   (a) *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$I_{2n}(z) = 2^{z-1}\left(1 + \frac{z}{2n+1}\right) \frac{I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}$$

   (b) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

   (formule de Legendre).

10. *On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}$ par :*

$$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R},\ f(x,u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \leq -\sqrt{x} \\ \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} \text{ si } u > -\sqrt{x} \end{cases}$$

   (a) *Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :*

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\, du$$

   (b) *Montrer que, pour tout réel u, on a :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

   (c) *Montrer que pour tout $(x,u) \in [1, +\infty[\times \mathbb{R}$, on a :*

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u) = \begin{cases} e^{-\frac{u^2}{2}} \text{ si } u \leq 0 \\ (1+u)\, e^{-u} \text{ si } u > 0 \end{cases}$$

(d) *En déduire la formule de Stirling :*

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Pour $x = n$ entier naturel non nul, on retrouve la formule usuelle :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

11. *Montrer que la fonction gamma est continue sur $\mathcal{H}$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec pour tout entier naturel non nul n et tout réel strictement positif x :*

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t} dt$$

12. *En utilisant l'équation fonctionnelle* (3), *montrer que la fonction Γ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et que ce prolongement vérifie la même équation fonctionnelle. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, on notera encore $\Gamma(z)$ ce prolongement.*
13. *Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :*

$$\Gamma(z) \underset{z\to-n}{\backsim} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$$

14. ***La formule des compléments.***
On désigne par φ la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \varphi(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1+t} dt$$

et par $\mathcal{D}$ la bande ouverte du plan complexe définie par :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(z) < 1\}$$

(a) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

(b) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

(c) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$$

(d) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} - 2z\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2}$$

(e) *Montrer que, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et tout réel $t \in [0, \pi]$, on a :*

$$\cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}\left(\frac{1}{z} - 2z\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2}\cos(nt)\right)$$

(f) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

(g) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}$$

(h) *En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Solution.

1. Pour tout nombre complexe z, la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t} = e^{(z-1)\ln(t)}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Avec $\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\Re(z)-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$, on déduit que la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]1,+\infty[$ pour tout nombre complexe z.
2. Avec $\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = \dfrac{e^{-t}}{t^{1-\Re(z)}} \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\Re(z)}}$, on déduit que la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement si, $\Re(z) > 0$.
3. On a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$$

En effectuant le changement de variable $t = x^2$, le calcul de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ se ramène au calcul de l'intégrale de Gauss :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

(voir l'exercice 12).

4. Une intégration par parties donne pour $z \in \mathcal{H}$ et $0 < \varepsilon < R$:

$$\int_\varepsilon^R t^z e^{-t}dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_\varepsilon^R + z\int_\varepsilon^R t^{z-1}e^{-t}dt$$

et le passage à la limite quand (ε, R) tend vers $(0,+\infty)$ donne le résultat.

5. De l'équation fonctionnelle (3), on déduit facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$$

et :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

6.

(a) Pour tous nombres complexes z et α, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
Avec $\left|\dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}\right| = \dfrac{t^{\Re(z)}e^{-\Re(\alpha)t}}{1-e^{-t}} \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\Re(z)}}$, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}dt$ converge absolument si, et seulement si, $\Re(z) > 0$.
Pour $\Re(z) > 0$, on a $\left|\dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}\right| = \dfrac{t^{\Re(z)}e^{-\Re(\alpha)t}}{1-e^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{\Re(z)}e^{-\Re(\alpha)t}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}dt$ converge absolument si, et seulement si, $\Re(\alpha) > 0$ (pour $\Re(\alpha) > 0$, on a $t^{\Re(z)}e^{-\Re(\alpha)t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et pour $\Re(\alpha) \leq 0$, on a $t^{\Re(z)}e^{-\Re(\alpha)t} > 1$ pour t grand).

(b) Pour tout $(z, \alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*}$, et tout réel $t > 0$, on a $0 < e^{-t} < 1$ et :

$$\frac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^z e^{-(n+\alpha)t}$$

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}}$ et $t \mapsto t^z e^{-(n+\alpha)t}$, pour $n \geq 0$, sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left| t^z e^{-(n+\alpha)t} \right| dt &= \int_0^{+\infty} t^{\Re(z)} e^{-(n+\alpha)t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\Re(z)}}{(n+\alpha)^{\Re(z)}} e^{-x} \frac{dx}{n+\alpha} \\ &= \frac{1}{(n+\alpha)^{\Re(z)+1}} \Gamma(\Re(z) + 1) \end{aligned}$$

et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left| t^z e^{-nt} \right| dt = \Gamma(\Re(z) + 1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{\Re(z)+1}} < +\infty$$

On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^z e^{-(n+\alpha)t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \Gamma(z+1) \frac{1}{(n+\alpha)^{z+1}} \\ &= \Gamma(z+1) \zeta(z+1, \alpha) \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$ et $z = 1$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \Gamma(2) \zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

7.

(a) Pour $n \geq 1$ et $z \in \mathcal{H}$, le changement de variable $t = nx$ nous donne :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^1 (1-x)^n x^{z-1} n^z dx = n^z J_n(z)$$

Une intégration par parties nous donne :

$$J_{n+1}(z) = \int_0^1 (1-x)^{n+1} x^{z-1} dx = \frac{n+1}{z} \int_0^1 (1-x)^n x^z dx = \frac{n+1}{z} J_n(z+1)$$

et par récurrence, on déduit que :

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} J_0(z+n) \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 t^{z+n-1} dt \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)} \end{aligned}$$

On peut aussi écrire que :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{t^{k+z-1}}{n^k} dt = n^z \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k} (-1)^k}{k+z}$$

et constater que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$P_n(z) = \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

s'écrit $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha_k}{k+z}$, les coefficients α_k étant donnés par :

$$\alpha_k = ((z+k) P_n(z))_{|z=-k} = \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!} = \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{n!}$$

(b) On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \text{ si } t \in]0, n[\\ 0 \text{ si } t \geq n \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\forall t \in]0, +\infty[\,, \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t} t^{z-1} \\ \forall n \geq 1,\ |f_n(t)| \leq e^{-t} t^{\Re(z)-1} = f(t) \end{cases}$$

la fonction f étant continue et intégrable sur $]0, +\infty[$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z)$$

soit :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} I_n(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

8. Pour $z = \dfrac{1}{2}$, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n!\sqrt{n}}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2}\right)} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1}\sqrt{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

et de la formule d'Euler, on déduit la formule de Wallis :

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} I_n\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}\sqrt{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Comme :

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{2^{2n+1}}{2n} = \frac{2^{2n}}{n}$$

on a aussi :

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}$$

soit :

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

9.

(a) On a :

$$\begin{aligned} I_{2n}(z) &= \frac{(2n)! 2^z n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)(z+n+1)\cdots(z+2n)} \\ &= \frac{(2n)! 2^z n^z}{z(z+2)\cdots(z+2n)(z+1)\cdots(z+1+2(n-1))} \\ &= \frac{(2n)! 2^z n^z \left(\frac{z+1}{2} + n\right)}{2^{2n+1}\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right)\left(\frac{z+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+(n-1)\right)\left(\frac{z+1}{2}+n\right)} \end{aligned}$$

avec :

$$\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right)=\frac{n!n^{\frac{z}{2}}}{I_n\left(\frac{z}{2}\right)}$$

et :

$$\left(\frac{z+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+n\right)=\frac{n!n^{\frac{z+1}{2}}}{I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}I_{2n}\left(z\right)&=\frac{(2n)!2^zn^z\left(\frac{z+1}{2}+n\right)}{2^{2n+1}\left(n!\right)^2n^{\frac{2z+1}{2}}}I_n\left(\frac{z}{2}\right)I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)\\&=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{2^z}{2^{2n+1}}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{z+1}{2}+n\right)I_n\left(\frac{z}{2}\right)I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)\end{aligned}$$

et tenant compte de :

$$I_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2^{2n+1}\left(n!\right)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}I_{2n}\left(z\right)&=\frac{1}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{2^z}{2n+1}\left(\frac{z+1}{2}+n\right)I_n\left(\frac{z}{2}\right)I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)\\&=2^{z-1}\left(1+\frac{z}{2n+1}\right)\frac{I_n\left(\frac{z}{2}\right)I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}\end{aligned}$$

(b) En faisant tendre n vers l'infini dans ce qui précède, on obtient :

$$\Gamma\left(z\right)=2^{z-1}\frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

10.

(a) Pour $x>0$ fixé, le changement de variable $t=x+u\sqrt{x}$ nous donne :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(x+1\right)&=\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}dt=\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}\left(x+u\sqrt{x}\right)^xe^{-\left(x+u\sqrt{x}\right)}\sqrt{x}du\\&=\sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^xe^{-u\sqrt{x}}du\\&=\sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,u\right)du\end{aligned}$$

(b) Pour $u=0$ et $x>0$, on a $u>-\sqrt{x}$ et :

$$f\left(x,u\right)=\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^xe^{-u\sqrt{x}}=1\underset{x\to+\infty}{\to}1=e^{-\frac{u^2}{2}}$$

On se fixe un réel $u\neq0$ et on désigne par x_u un réel strictement positif tel que $\sqrt{x_u}>-u$. Pour tout réel $x>x_u$, on a $u>-\sqrt{x_u}>-\sqrt{x}$ et :

$$f\left(x,u\right)=\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^xe^{-u\sqrt{x}}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\ln\left(f\left(x,u\right)\right)&=x\left(\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)-\frac{u}{\sqrt{x}}\right)\\&=x\left(-\frac{u^2}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\&=-\frac{u^2}{2}+o\left(1\right)\underset{x\to+\infty}{\to}-\frac{u^2}{2}\end{aligned}$$

et :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(c) On se fixe $x \geq 1$.
Pour $u \leq -\sqrt{x}$, on a $f(x,u) = 0 \leq e^{-\frac{u^2}{2}}$.
Pour $u > -\sqrt{x}$, on a :

$$f(x,u) = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} = \left(\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) e^{-\frac{u}{\sqrt{x}}}\right)^x$$

Pour $-\sqrt{x} < u \leq 0$, on a $\dfrac{u}{\sqrt{x}} \in]-1,0]$ et de **I.12** on déduit que :

$$0 \leq f(x,u) \leq e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(la fonction $f : t \mapsto (1+t) e^{\frac{t^2}{2}-t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(t) = e^{\frac{t^2}{2}-t}(1 + (1+t)(t-1)) = t^2 e^{\frac{t^2}{2}-t} \geq 0$, donc f est croissante et $f(t) \leq f(0) = 1$ pour tout $t \leq 0$, soit $(1+t)e^{-t} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $0 \leq (1+t)e^{-t} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$ pour tout $t \in [-1,0]$).
Pour $u > 0$, avec la décroissance sur $\mathbb{R}^+$ de l'application $t \mapsto (1+t)e^{-t}$, on déduit que :

$$\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) e^{-\frac{u}{\sqrt{x}}} \leq (1+u)e^{-u} \leq 1$$

et :

$$0 \leq f(x,u) \leq \left((1+u)e^{-u}\right)^x \leq (1+u)e^{-u}$$

On a donc pour tout réel $x \geq 1$ et tout réel u :

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u) = \begin{cases} e^{-\frac{u^2}{2}} \text{ si } u \leq 0 \\ (1+u)e^{-u} \text{ si } u > 0 \end{cases}$$

(d) Pour tout réel u, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

les fonctions $u \mapsto f(x,u)$ étant continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ pour tout réel $x \geq 1$, avec :

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u)$$

pour tout réel $x \geq 1$ et tout réel u, la fonction φ étant continue intégrable sur $\mathbb{R}$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,du &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

et :

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,du \underset{x \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

11. La fonction $(z,t) \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*}$ et pour tous réels $0 < a < b$, tout nombre complexe $z \in \mathcal{H}$ tel que $a \leq \Re(z) \leq b$, tout réel $t > 0$, on a :

$$\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\Re(z)-1}e^{-t} \leq \varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} \text{ si } 0 < t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t} \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

la fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (pour $a > 0$, la fonction t^{a-1} est intégrable sur $]0,1[$ et avec $\lim_{t \to +\infty} t^{b-1}e^{-\frac{t}{2}} = 0$, on déduit que $\varphi(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$ pour t assez grand, la

fonction $e^{-\frac{t}{2}}$ étant intégrable sur $]1,+\infty[$). Il en résulte que la fonction Γ est continue sur toute bande fermée $\mathcal{H}_{a,b}=\{z\in\mathcal{H}\mid a\leq\Re(z)\leq b\}$, donc sur $\mathcal{H}$.
On peut aussi procéder comme suit.
Pour tout entier $n\geq 1$, la fonction $(z,t)\mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathcal{H}_{a,b}\times\left[\frac{1}{n},n\right]$, donc la fonction $\Gamma_n : z\mapsto\int_{\frac{1}{n}}^{n}t^{z-1}e^{-t}dt$ est continue sur $\mathcal{H}_{a,b}$ et avec :

$$\begin{aligned}\left|\Gamma(z)-\Gamma_n(z)\right| &\leq\int_0^{\frac{1}{n}}t^{\Re(z)-1}e^{-t}dt+\int_n^{+\infty}t^{\Re(z)-1}e^{-t}dt\\ &\leq\int_0^{\frac{1}{n}}t^{a-1}e^{-t}dt+\int_n^{+\infty}t^{b-1}e^{-t}dt\\ &\leq\int_0^{\frac{1}{n}}t^{a-1}dt+e^{-n}\int_n^{+\infty}t^{b-1}dt=\frac{1}{a\cdot n^a}+\frac{n^b}{b\cdot e^n}\end{aligned}$$

on déduit que la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers Γ sur $\mathcal{H}_{a,b}$. Il en résulte que Γ est continue sur $\mathcal{H}_{a,b}$.
La fonction $f:(x,t)\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est indéfiniment dérivable sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$ avec pour $n\in\mathbb{N}^*$, $[a,b]\subset\mathbb{R}^{+,*}$ (avec $a<b$) et $x\in[a,b]$:

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^k}(x,t)\right|=\left|\ln(t)\right|^n t^{x-1}e^{-t}\leq g_n(t)=\left\{\begin{array}{l}\left|\ln(t)\right|^n t^{a-1}\text{ si }0<t\leq 1\\ \left|\ln(t)\right|^n t^{b-1}e^{-t}\text{ si }t>1\end{array}\right.$$

la fonction g_n étant continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (on a $\lim\limits_{t\to 0^+}\left|\ln(t)\right|^n t^{\frac{a}{2}}=0$, donc pour $t>0$ assez petit on a $|g_n(t)|\leq t^{\frac{a}{2}-1}$, la fonction $t^{\frac{a}{2}-1}$ étant intégrable sur $]0,1[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|\ln(t)\right|^n t^{b-1}e^{-\frac{t}{2}}=0$, donc $|g_n(t)|\leq e^{-\frac{t}{2}}$ pour t assez grand, la fonction $e^{-\frac{t}{2}}$ étant intégrable sur $]1,+\infty[$). On en déduit alors que la fonction Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et qu'on peut dériver sous le signe d'intégration.

12. On utilise le découpage :

$$\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-=\bigcup_{n=0}^{+\infty}\mathcal{H}_n$$

où on a noté :

$$\mathcal{H}_0=\mathcal{H}$$

et pour tout entier $n\geq 1$:

$$\mathcal{H}_n=\{z\in\mathbb{C}\mid -n<\Re(z)\leq-(n-1)\}\setminus\{-(n-1)\}$$

On peut définir, pour tout entier $n\geq 1$, la fonction Γ_n sur $\mathcal{H}_n$ par :

$$\forall z\in\mathcal{H}_n,\ \Gamma_n(z)=\frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}=\frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^{+\infty}t^{z+(n-1)}e^{-t}dt$$

($\Gamma(z+n)$ est bien défini puisque $\Re(z+n)=\Re(z)+n>0$ et $z\notin\{-(n-1),\cdots,-1,0\}$ valide la division par $z(z+1)\cdots(z+n-1)$).
Comme Γ est continue sur $\mathcal{H}$, chaque fonction Γ_n est continue sur $\mathcal{H}_n$, comme quotient de deux fonctions continues.
On peut donc prolonger la fonction Γ en une fonction continue sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ en posant :

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-,\ \widetilde{\Gamma}(z)=\left\{\begin{array}{l}\Gamma(z)\ \text{ si }\Re(z)>0\\ \Gamma_n(z)\ \text{ si }\ -n<\Re(z)\leq-(n-1)\ \text{ et }z\neq-(n-1)\end{array}\right.$$

Pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ tel que $\Re(z)>0$, on a $\Re(z+1)>0$ et :

$$\widetilde{\Gamma}(z+1)=\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)=z\widetilde{\Gamma}(z)$$

et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tel que $-n < \Re(z) \leq -(n-1)$, on a $-(n-1) < \Re(z+1) \leq -(n-2)$ et :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}(z+1) = \Gamma_{n-1}(z+1) &= \frac{\Gamma(z+1+n-1)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+1+n-1)} = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \\ &= z\Gamma_n(z) = z\widetilde{\Gamma}(z)\end{aligned}$$

13. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tel que $-(n+1) < \Re(z) \leq -(n-1)$, on a :

$$\Gamma(z) = \Gamma_{n+1}(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)}$$

donc :

$$\begin{aligned}\lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) &= \lim_{z \to -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}\end{aligned}$$

soit :

$$\Gamma(z) \underset{z \to -n}{\backsim} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

En particulier :

$$\Gamma(z) \underset{z \to 0}{\backsim} \frac{1}{z}$$

14.

(a) La condition $0 < \Re(z) < 1$ nous assure que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{z-1}}{1+t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$.

Le changement de variable $t = \dfrac{1}{\theta}$, nous donne :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{\theta^{-z}}{1+\theta} d\theta = \varphi(1-z)$$

et le résultat annoncé.

(b) En utilisant le théorème de Fubini-Lebesgue, on a pour tout $z \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^{+\infty} u^{z-1}e^{-u} du \int_0^{+\infty} v^{-z}e^{-v} dv \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u^{z-1}e^{-u}v^{-z}e^{-v} du \right) dv \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-v} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{v}\right)^{z-1} e^{-u} \frac{du}{v} \right) dv\end{aligned}$$

et en faisant, pour tout $v > 0$ fixé, le changement de variable $w = \dfrac{u}{v}$, $dw = \dfrac{du}{v}$, on obtient, en utilisant encore le théorème de Fubini-Lebesgue :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^{+\infty} e^{-v} \left(\int_0^{+\infty} w^{z-1}e^{-vw} dw \right) dv \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-v}e^{-vw} dv \right) w^{z-1} dw \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(w+1)v} dv \right) w^{z-1} dw \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{w^{z-1}}{1+w} dw = \varphi(z) + \varphi(1-z)\end{aligned}$$

(c) Pour tout entier $n \geq 1$, tout $z \in \mathcal{H}$ et tout réel $t \in \left]0,1\right[$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{z+k-1} = t^{z-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = t^{z-1} \frac{1-(-t)^n}{1+t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{t^{z-1}}{1+t} &= t^{z-1} \frac{(1-(-t)^n)}{1+t} + \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{1+t} = t^{z-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k + \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{1+t} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{z+k-1} + \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{1+t}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^{z+k-1} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{z+n-1}}{1+t} dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+z} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{z+n-1}}{1+t} dt
\end{aligned}$$

avec :

$$0 \leqslant \left| \int_0^1 \frac{t^{z+n-1}}{1+t} dt \right| \leqslant \int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)+n-1} dt = \frac{1}{\mathrm{Re}(z)+n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

Ce qui nous donne :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$$

(d) Pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a $1-z \in \mathcal{D}$ et en utilisant la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \varphi(z) + \varphi(1-z) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-z} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-z} \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n-z} \right) \\
&= \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-z^2}
\end{aligned}$$

(e) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ fixé, on désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui est 2π-périodique et telle que :

$$\forall t \in [-\pi, \pi],\ f(t) = \cos(zt)$$

Cette fonction est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle est donc développable en série de Fourier, soit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$$

Comme f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(zt) \cos(nt)\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos((z+n)t) + \cos((n-z)t)\right) dt \\
&= \frac{(-1)^n \sin(z\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n-z}\right) \\
&= -2 \frac{(-1)^n z \sin(z\pi)}{\pi} \frac{1}{n^2 - z^2}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall t \in [0, \pi],\ \cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \left(\frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} \cos(nt)\right)$$

(f) Prenant $t = 0$ dans le développement en série de Fourier précédent, on a pour tout $z \in \mathcal{D}$:

$$1 = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \left(\frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2}\right)$$

et :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

(g) En désignant par θ la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},\ \theta(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z)$$

le résultat précédent nous dit que cette fonction est constante égale à π sur $\mathcal{D}$.
Comme, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a $z + 1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et :

$$\begin{aligned}
\theta(z+1) &= \Gamma(z+1)\Gamma(-z)\sin(-\pi z) \\
&= z\Gamma(z) \frac{\Gamma(1-z)}{-z} (-\sin(\pi z)) = \theta(z)
\end{aligned}$$

on déduit que θ est constante égale à π sur $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_n$, en notant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{D}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid n < \Re(z) < n+1\}$$

puis, par continuité, que θ est constante égale à π sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
On en déduit en particulier que $\Gamma(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ (pour $z \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n) = n! \neq 0$).
Prenant $z = \frac{1}{2}$, on retrouve les égalités $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(h) En écrivant que $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$, la formule des compléments s'écrit aussi :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},\ \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$$

(i) Avec :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{1}{z} \lim_{n \to +\infty} \frac{n^z}{(1+z)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$

et :

$$\Gamma(-z) = -\frac{1}{z} \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{-z}}{(1-z)\cdots\left(1-\frac{z}{n}\right)}$$

on déduit que :

$$-\frac{\pi}{z\sin(\pi z)} = \Gamma(z)\,\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1-z^2)\cdots\left(1-\dfrac{z^2}{n^2}\right)}$$

et :

$$\begin{aligned}\sin(\pi z) &= \pi z \lim_{n\to+\infty}\left(1-z^2\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\\ &= \pi z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

cette formule étant valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ (pour $z \in \mathbb{Z}$, tout est nul).

– VII – Théorèmes de changement de variables et de Fubini sur $\mathbb{R}^n$

Rappelons les théorèmes de Fubini et de changement de variables.

Pour les fonctions mesurables positives, on dispose du théorème de Fubini-Tonelli utile pour justifier l'intégrabilité d'une fonction de plusieurs variables.

On place sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ muni de la mesure de Lebesgue.

Théorème (Fubini-Tonelli) : Pour $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^+$ mesurable, toutes les intégrales considérées ci-dessous ont un sens et on a l'égalité dans $\overline{\mathbb{R}^+}$:

$$\iint_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Théorème (Fubini-Lebesgue) : Une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{C}$ est intégrable si, et seulement si :

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \right) dy < +\infty$$

les rôles de x et y pouvant être permutés.
Dans ce cas, on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Théorème (changement de variables) : Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : V \to U$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
En notant $J_\varphi : x \in V \mapsto \det(d\varphi(x))$ le déterminant jacobien de φ, une fonction mesurable $f : U \to \mathbb{C}$ est intégrable sur U si, et seulement si, la fonction $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ est intégrable sur V et dans ce cas, on a :

$$\int_U f(y)\,dy = \int_V f(\varphi(x))\,|J_\varphi(x)|\,dx$$

Exercice 69 *Quelle est l'image de $\mathcal{U} = \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ par l'application qui à (x,y) associe $(x+y, y)$? Montrer que cette application est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur son image. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathcal{U}} e^{-(x+y)^2} dx\,dy$.*

Solution. L'application linéaire $\varphi : (x,y) \mapsto (x+y, y)$ est un automorphisme $\mathbb{R}^2$, c'est donc en particulier un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U} = \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ sur $\mathcal{V} = \varphi(\mathcal{U})$ où :

$$\mathcal{V} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \mid u > v\right\}$$

En utilisant le théorème de changement de variables, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{U}} e^{-(x+y)^2} dx\,dy &= \int_{\mathcal{V}} e^{-u^2} \left|J_{\varphi^{-1}}(u,v)\right| du\,dv = \int_{\mathcal{V}} e^{-u^2} du\,dv \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^u e^{-u^2} dv \right) du = \int_0^{+\infty} u e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exercice 70

1. *Montrer que la fonction $f : (x,y) = e^{-y} \sin(2xy)$ est intégrable sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+^\star$.*
2. *En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)\,e^{-y}}{y}\,dy$.*

Solution.

1. La fonction f est continue, donc mesurable sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\iint_{[0,1]\times\mathbb{R}_+^\star} |f(x,y)|\, dxdy \leq \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} e^{-y} dy\right) dx = 1$$

donc f est intégrable sur $[0,1]\times\mathbb{R}_+^\star$.

2. Pour tout $x\in\,]0,1[\,$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x,y)\; dy &= \Im\left(\int_0^{+\infty} e^{-(1-2ix)y}\; dy\right) = \Im\left(\left[-\frac{e^{-(1-2ix)y}}{1-2ix}\right]_0^{+\infty}\right)\\ &= \Im\left(\frac{1}{1-2ix}\right) = \frac{2x}{1+4x^2}\end{aligned}$$

et :

$$\iint_{[0,1]\times\mathbb{R}_+^\star} f(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2}dx = \frac{\ln(5)}{4}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times\mathbb{R}_+^\star} f(x,y)\, dxdy &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 e^{-y}\sin(2xy)\, dx\right)\, dy\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-y}\left[-\frac{\cos(2xy)}{2y}\right]_0^1 dy\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-y}\frac{1-\cos(2y)}{2y}dy = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(y)\, e^{-y}}{y}\, dy\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(y)\, e^{-y}}{y}\, dy = \frac{\ln(5)}{4}$$

Exercice 71 *Soient a et b deux réels tels que $-1 < a < b$.*

1. *Montrer que la fonction $f:(x,y)\mapsto y^x$ est intégrable sur le rectangle $[a,b]\times[0,1]$.*
2. *En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^b-y^a}{\ln(y)}\, dy$.*

Solution.

1. La fonction $f:(x,y)\mapsto y^x = e^{x\ln(y)}$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+,*}$, donc mesurable, à valeurs strictement positives.
Dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]\times[0,1]} f(x,y)\, dxdy &= \int_a^b\left(\int_0^1 y^x dy\right) dx = \int_a^b\left[\frac{y^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 dx\\ &= \int_a^b \frac{dx}{x+1} = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)\in\mathbb{R}^+\end{aligned}$$

donc f est intégrable sur $[a,b]\times[0,1]$ avec :

$$\int_{[a,b]\times[0,1]} f(x,y)\, dxdy = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

2. On a aussi :

$$\int_{[a,b]\times[0,1]} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_a^b e^{x\ln(y)}dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{e^{x\ln(y)}}{\ln(y)}\right]_a^b dy$$
$$= \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln(y)}\,dy$$

donc :

$$\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln(y)}\,dy = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

Exercice 72 *La fonction* $f : (x,y) \mapsto e^{-xy}\sin(x)\sin(y)$ *est-elle intégrable sur* $\left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ *?*

Solution. La fonction f est continue, donc mesurable sur $\mathbb{R}^2$.
On partitionne l'ouvert $\left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ sous la forme $\left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2 = \bigcup_{k=1}^{4} R_k$, où :

$$R_1 =]0,1]^2$$

$$R_2 =]1,+\infty[\times]0,1]$$
$$R_3 =]0,1]\times]1,+\infty[$$
$$R_4 =]1,+\infty[^2$$

Comme f est continue sur le compact $[0,1]^2$, elle y est intégrable, donc f est intégrable sur $R_1 \subset [0,1]^2$.
Pour tout $(x,y) \in R_2$, on a $|f(x,y)| \leq ye^{-xy}$ avec :

$$\int_{R_2} ye^{-xy}dxdy = \int_0^1 \left(\int_1^{+\infty} ye^{-xy}dx\right) dy = \int_1^{+\infty} \left[-e^{-xy}\right]_{x=1}^{x=+\infty} dy$$
$$= \int_1^{+\infty} e^{-y}dy = \frac{1}{e}$$

donc f est intégrable sur R_2.
Comme x et y jouent des rôles symétrique, f est intégrable sur R_3.
Pour tout $(x,y) \in R_4$, on a $|f(x,y)| \leq e^{-xy}$ avec :

$$\int_{R_4} e^{-xy}dxdy = \int_1^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} e^{-xy}dx\right) dy = \int_1^{+\infty} \left[-\frac{e^{-xy}}{y}\right]_{x=1}^{x=+\infty} dy$$
$$= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}dy < +\infty$$

donc f est intégrable sur R_4.
En conclusion, f est intégrable sur $\left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$.

Exercice 73 *Soit f la fonction définie sur $R =]0,1[^2$ par :*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

1. *La fonction f est-elle intégrable sur R ?*
2. *Calculer une primitive de $\dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ sur $\mathbb{R}$.*

3. *Calculer, pour tout* $y \in \left]0,1\right[$ *:*

$$\varphi(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$$

4. *Montrer que :*

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx$$

Solution.

1. La fonction f est continue sur R, donc mesurable sur R.
En désignant par C le quart de disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1 contenu dans R, on a :

$$\int_R |f(x,y)|\,dxdy \geq \int_C |f(x,y)|\,dxdy$$

et le passage en coordonnées polaires, nous donne :

$$\begin{aligned}\int_C |f(x,y)|\,dxdy &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos(\theta) - \sin(\theta)|}{r^2} drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(\theta) - \sin(\theta)|\,d\theta \int_0^1 \frac{dr}{r^2} = +\infty\end{aligned}$$

donc f n'est pas intégrable sur R.

2. Le changement de variable $t = \operatorname{sh}(x)$ nous donne :

$$\begin{aligned}F(t) &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\operatorname{ch}(x)\,dx}{\left(1+\operatorname{sh}^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2(x)} = \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \\ &= \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

On peut aussi écrire :

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\left(1+t^2-t^2\right)dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - \int \frac{t \cdot tdt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

avec :

$$\int \frac{t \cdot tdt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

ce qui donne :

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

3. Pour $y \in \left]0,1\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= \int_0^1 \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \left[-\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{x=0}^{x=1} - y\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{y^2}\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{y}\int_0^{\frac{1}{y}} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{y\sqrt{y^2+1}} \\
&= \frac{1}{y}\left(1-\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \\
&= \frac{1}{y}\frac{\sqrt{y^2+1}-1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \\
&= \frac{y}{\sqrt{y^2+1}\left(\sqrt{y^2+1}+1\right)} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}
\end{aligned}$$

cette fonction étant continue sur $[0,1]$.

4. Sans calculs, on peut remarquer que φ est de signe constant.
En effet, cette fonction est continue sur $[0,1]$ et on a :

$$(\varphi(y)=0) \Leftrightarrow \left(\sqrt{y^2+1} = 1+y\right) \Leftrightarrow (y=0)$$

alors que $\varphi(0) = -1$.
On a donc $\varphi(y) < 0$ pour tout $y \in [0,1]$ et :

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy = \int_0^1 \varphi(y)\,dy < 0$$

Comme $f(x,y) = -f(y,x)$, on a :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx = -\int_0^1 \left(\int_0^1 f(y,x)\,dy\right)dx > 0$$

et :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx$$

Pour le calcul, on peut procéder comme suit.
On a :

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{y}\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)-1\right)\frac{dy}{\sqrt{y^2+1}}$$

Le changement de variable $y = \text{sh}(t)$, $dy = \text{ch}(t)\,dt = \sqrt{y^2+1}dt$ donne :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\text{argsh}(1)} \left(\frac{\text{ch}(t)-1}{\text{sh}(t)} - 1\right)dt \\
&= \int_0^{\text{argsh}(1)} \left(\frac{\text{ch}^2(t)-1}{\text{sh}(t)(\text{ch}(t)+1)} - 1\right)dt \\
&= \int_0^{\text{argsh}(1)} \left(\frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)+1} - 1\right)dt \\
&= [\ln(\text{ch}(t)+1) - t]_0^{\text{argsh}(1)} = \ln(\text{ch}(\text{argsh}(1))+1) - \text{argsh}(1) - \ln(2)
\end{aligned}$$

avec :

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

et :

$$2\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) = e^{\operatorname{argsh}(x)} + \frac{1}{e^{\operatorname{argsh}(x)}} = x + \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

donc :

$$\begin{aligned}\ln(\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(1)) + 1) &= \ln\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)+1\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{2}+1\right) = \operatorname{argsh}(1)\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = -\ln(2)$$

Comme $f(x,y) = -f(y,x)$, on a :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx = -\int_0^1 \left(\int_0^1 f(y,x)\,dy\right) dx = \ln(2)$$

En conclusion, le théorème de Fubini n'est pas utilisable, ce qui signifie que f n'est pas intégrable sur R.

Exercice 74 *Soient f, g les fonctions définies sur $R =]0,1[^2$ par :*

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ et } g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

1. *Montrer que f est intégrable sur R et calculer $\int_R f(x,y)\,dxdy$.*
2.
   (a) *Calculer, pour tout $y \in]0,1[$:*

   $$\varphi(y) = \int_0^1 g(x,y)\,dx$$

   (b) *Calculer :*

   $$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dx\right) dy \text{ et } \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dy\right) dx$$

   et conclure.

Solution.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donc mesurable sur $R \setminus \{(0,0)\}$ et avec $|f(x,y)| \leq 1$, on déduit qu'elle est intégrable sur R.
   Le changement de variable $(x,y) \mapsto (y,x)$ donne :

   $$\int_R f(x,y)\,dxdy = \int_R f(y,x)\,dxdy = -\int_R f(x,y)\,dxdy$$

   donc $\int_R f(x,y)\,dxdy = 0.$
2.

(a) Pour $y \in \left]0,1\right[$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx = \frac{1}{y^2}\int_0^1 \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right)^2}dx \\ &= \frac{1}{y}\int_0^{\frac{1}{y}} \frac{t^2-1}{\left(t^2+1\right)^2}dt = -\frac{1}{y}\int_0^{\frac{1}{y}} \frac{\left(t^2+1\right)-2t^2}{\left(t^2+1\right)^2}dt \\ &= -\frac{1}{y}\left[\frac{t}{t^2+1}\right]_{t=0}^{t=\frac{1}{y}} = -\frac{1}{1+y^2}\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\int_0^1\left(\int_0^1 g(x,y)\,dx\right)dy = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}$$

Comme $g(x,y) = -g(y,x)$, on a :

$$\int_0^1\left(\int_0^1 g(x,y)\,dy\right)dx = -\int_0^1\left(\int_0^1 g(y,x)\,dy\right)dx = \frac{\pi}{4}$$

En conclusion, le théorème de Fubini n'est pas utilisable, ce qui signifie que g n'est pas intégrable sur R.

Exercice 75 ***Fonction Béta.***

On désigne par $\mathcal{H}$ le demi plan complexe défini par :

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

1. *Soient u, v deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{u-1}(1-t)^{v-1}$ est intégrable sur $\left]0,1\right[$ si, et seulement si, $(u,v) \in \mathcal{H}^2$.*

   Définition : *la fonction béta (ou fonction de Bessel de seconde espèce) est la fonction définie sur $\mathcal{H}^2$ par :*

$$\forall (u,v) \in \mathcal{H}^2,\ B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$$

2. *Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :*

$$B(u,v) = B(v,u) \text{ et } B(u+1,v) = \frac{u}{u+v}B(u,v)$$

3. *Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} n^u B(u, v+n+1) = \Gamma(u)$$

4. *Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a $B(u,v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$.*

5. *Calculer $B(n+1, m+1)$, pour n, m entiers naturels.*

Solution.

1. On a $\left|t^{u-1}(1-t)^{v-1}\right| \underset{t\to0^+}{\backsim} t^{\Re(u)-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 t^{\Re(u)-1}dt < +\infty$ si, et seulement si, $\Re(u) > 0$.

   De manière analogue, on a $\left|t^{u-1}(1-t)^{v-1}\right| \underset{t\to1^-}{\backsim} (1-t)^{\Re(v)-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{\Re(v)-1}dt < +\infty$ si, et seulement si, $\Re(v) > 0$.

2. Le changement de variable $t = 1 - x$ nous donne :

$$B(u,v) = \int_0^1 (1-x)^{u-1} x^{v-1} dx = B(v,u)$$

La deuxième identité est équivalente à :

$$vB(u+1,v) = u(B(u,v) - B(u+1,v))$$

soit à :

$$v\int_0^1 t^u (1-t)^{v-1} dt = u\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^v dt$$

ce qui résulte d'une intégration par parties :

$$v\int_0^1 t^u (1-t)^{v-1} dt = \left[-t^u (1-t)^v\right]_0^1 + u\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^v dt$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$, le changement de variable $t = \dfrac{x}{n}$ nous donne :

$$\begin{aligned} B(u, v+n+1) &= \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v+n} dt = \frac{1}{n^u}\int_0^n x^{u-1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{v+n} dx \\ &= \frac{1}{n^u}\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx \end{aligned}$$

où f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$f_n(x) = x^{u-1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{v+n} \mathbf{1}_{]0,n[}(x)$$

Chaque fonction f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\forall x \in\,]0,+\infty[\,, \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}x^{u-1} \\ \forall n \geq 1,\ |f_n(x)| \leq e^{-x}x^{\Re(u)-1} = f(x) \end{cases}$$

(on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^v = 1$ et, pour $x \in\,]0,n[\,$, $\left|\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^v\right| = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{\Re(v)} \leq 1$) la fonction f étant intégrable sur $]0, +\infty[$.
On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} n^u B(u, v+n+1) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n x^{u-1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{v+n} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{u-1}dx = \Gamma(u)$$

4. Pour u, v dans $\mathcal{H}$, en effectuant les changements de variables $t = x^2$ dans $\Gamma(u)$ et $t = y^2$ dans $\Gamma(v)$, puis en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(u)\Gamma(v) &= 4\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2u-1}dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2}y^{2v-1}dy \\ &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}x^{2u-1}y^{2v-1}dxdy \end{aligned}$$

Le passage en coordonnées polaires nous donne :

$$\begin{aligned} \Gamma(u)\Gamma(v) &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}r^{2(u+v)-1}\cos^{2u-1}(\theta)\sin^{2v-1}(\theta)\, drd\theta \\ &= 2\Gamma(u+v)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2u-1}(\theta)\sin^{2v-1}(\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

puis en effectuant le changement de variable $t = \cos^2(\theta)$, on obtient :

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \Gamma(u+v)\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt = \Gamma(u+v)B(u,v)$$

La formule des compléments (exercice 25, question 2) nous assure que $\Gamma(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, ce qui nous donne :

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

On retrouve :

$$B(u+1,v) = \frac{\Gamma(u+1)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v+1)} = \frac{u\Gamma(u)\Gamma(v)}{(u+v)\Gamma(u+v)} = \frac{u}{u+v}B(u,v)$$

et :

$$\begin{aligned} B(u,v+n+1) &= \frac{\Gamma(u)\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(u+v+n+1)} \\ &= \Gamma(u)\frac{(v+n)(v+n-1)\cdots v\Gamma(v)}{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)\Gamma(u+v)} \end{aligned}$$

avec :

$$(v+n)(v+n-1)\cdots v\Gamma(v) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^v n!$$

et :

$$(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)\Gamma(u+v) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{u+v} n!$$

ce qui nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} n^u \frac{(v+n)(v+n-1)\cdots v\Gamma(v)}{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)\Gamma(u+v)} = 1$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^u B(u,v+n+1) = \Gamma(u)$.

On peut aussi montrer l'égalité $B(u,v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ à partir de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^u B(u,v+n+1) = \Gamma(u)$. Pour ce faire, on écrit que :

$$B(u,v) = \frac{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)}{(v+n)(v+n-1)\cdots v}B(u,v+n+1)$$

avec :

$$\frac{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)}{(v+n)(v+n-1)\cdots v} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{u+v}n!}{\Gamma(u+v)}\frac{\Gamma(v)}{n^v n!} = \frac{n^u\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

et faisant tendre n vers l'infini, on a le résultat attendu.

5. Pour n, m entiers naturels, on a :

$$\begin{aligned} B(n+1,m+1) &= \int_0^1 t^n(1-t)^m\,dt = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+2)} = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} \\ &= \frac{1}{n+m+1}\frac{1}{\binom{n+m}{n}} \end{aligned}$$

Ce résultat pouvant aussi se démontrer directement par récurrence.

– VII – Variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Une variable aléatoire réelle est une fonction mesurable X de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

La loi de X est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$$

(mesure image de $\mathbb{P}$ par X).

Si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on dit qu'une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suit la loi μ, si $\mathbb{P}_X = \mu$ et on note alors $X \hookrightarrow \mu$.

Une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite intégrable si $\displaystyle\int_\Omega |X| \, d\mathbb{P} < +\infty$ et dans ce cas son espérance est le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X d\mathbb{P}$$

Pour X à valeurs positives, on peut définir $\mathbb{E}(X)$ qui est éventuellement infini.

Cette espérance dépend de $\mathbb{P}$ et devrait être notée $\mathbb{E}_\mathbb{P}(X)$.

Le théorème de transfert nous dit que :

$$\mathbb{E}(X) = \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X$$

où $\mathbb{P}_X$ est la loi de X, c'est-à-dire la mesure de probabilité définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$$

(mesure image de $\mathbb{P}$ par X).

On note $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'ensemble de toutes les variables aléatoires réelles intégrables sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

C'est un espace vectoriel et l'espérance $\mathbb{E}$ est linéaire.

Une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite de carré intégrable si $\displaystyle\int_\Omega X^2 d\mathbb{P} < +\infty$ (ce qui revient à dire que $X^2 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$).

On note $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'ensemble de toutes les variables aléatoires réelles de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si X, Y sont dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors XY est dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (ce qui résulte de $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$) et on a :

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz).

Il en résulte que $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ($Y = 1 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, donc $X = X \cdot 1 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$).

La covariance de X et Y dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est le réel :

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

et la variance de $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est le réel :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Pour $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on peut définir $\mathbb{V}(X)$ qui est éventuellement infini.

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les espérances, on déduit que :

$$|\operatorname{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)}$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, il existe un réel $a > 0$ et un réel b tels que $Y = aX + b$ presque sûrement (i. e. $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$).

La fonction de répartition d'une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est la fonction de répartition de sa loi $\mathbb{P}_X$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Deux variables aléatoires ont la même loi si, et seulement si, elles ont la même fonction de répartition puisque $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendré par les intervalles de la forme $]-\infty, x]$.

La fonction de répartition F_X est croissante avec, pour tout réel x :

$$\lim_{t \to x^+} F_X(t) = F_X(x),\ \lim_{t \to x^-} F_X(t) = F_X(x) - \mathbb{P}(\{x\})$$

$$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0,\ \lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$$

et l'ensemble $\mathcal{D}_X = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\{x\}) > 0\}$ de ses points de discontinuité est dénombrable.(exercice 19).

Une famille $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est indépendante si, et seulement si, pour tout famille $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ de boréliens, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \in B_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in B_k)$$

Une variable aléatoire réelle X est dite à densité si sa loi $\mathbb{P}_X$ est à densité, c'est-à-dire qu'il existe une fonction mesurable $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x) f_X(x)\, dx = \int_B f_X(x)\, dx$$

(intégrale de Lebesgue).

Cette densité est uniquement déterminée modulo l'égalité presque partout.

En particulier, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$$

donc f_X est Lebesgue-intégrable.

Pour tous réels $a < b$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b) \\ &= \int_a^b f_X(x)\, dx \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(a \leq X) = \mathbb{P}(a < X) = \int_a^{+\infty} f_X(x)\, dx$$

et :

$$F_X(a) = \mathbb{P}(a \geq X) = \mathbb{P}(a > X) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\, dx$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g, la variable aléatoire $X + Y$ est alors de densité h définie par :

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, f(x-t)\, dt$$

La fonction h est le produit de convolution de f et g et est notée $f * g$.

Exercice 76 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*
Montrer que :

1. *pour tout* $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *on a :*
$$\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\alpha}$$
(inégalité de Markov) ;
2. *pour tout* $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *on a :*
$$(\mathbb{P}(X \geq \alpha) = 1) \Rightarrow (\mathbb{E}(X) \geq \alpha)$$
$$(\mathbb{P}(X \leq \alpha) = 1) \Rightarrow (\mathbb{E}(X) \leq \alpha)$$
$$(\mathbb{P}(X = \alpha) = 1) \Rightarrow (\mathbb{E}(X) = \alpha)$$
3. *pour toute fonction strictement croissante* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *et tout* $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *on a :*
$$\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(\varphi \circ |X|)}{\varphi(\alpha)}$$
4. *pour tout* $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *on a :*
$$\forall \alpha > 0,\ \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$$
(inégalité de Tchebychev) ;
5. *pour toutes variables aléatoires* X, Y *dans* $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $X > 0$, $Y > 0$ *et* $XY \geq 1$ *presque sûrement, on a :*
$$\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) \geq 1$$
6. *pour tout* $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telle que* $X > 0$ *presque sûrement, on a :*
$$\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq 1$$

Solution.

1. C'est une conséquence de la question 7 de l'exercice 48.
2. En notant $A_\alpha = (X \geq \alpha)$, on a :
$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_{A_\alpha} X d\mathbb{P} + \int_{\Omega \setminus A_\alpha} X d\mathbb{P} = \int_{A_\alpha} X d\mathbb{P} \geq \alpha \int_{A_\alpha} d\mathbb{P} = \alpha \mathbb{P}(A_\alpha) = \alpha$$
(on a $\int_{\Omega \setminus A_\alpha} X d\mathbb{P} = 0$ puisque $\mathbb{P}(\Omega \setminus A_\alpha) = 0$).
On procède de même pour l'autre inégalité.
3. Comme $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est strictement croissante, $\varphi \circ |X|$ est une variable aléatoire positive et on pour tout réel $\alpha > 0$:
$$(|X| \geq \alpha) = (\varphi \circ |X| \geq \varphi(\alpha))$$
et il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $\varphi \circ |X|$.
4. On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$ (qui est bien dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), ce qui nous donne :
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) = \mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \alpha^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}{\alpha^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$$

5. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \int_\Omega d\mathbb{P} \leq \int_\Omega \sqrt{XY} d\mathbb{P} \leq \sqrt{\int_\Omega X d\mathbb{P}} \sqrt{\int_\Omega X d\mathbb{P}}$$
soit $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \geq 1$.
6. Il suffit de prendre dans la question précédente la variable aléatoire définie presque sûrement par $Y = \frac{1}{X}$.

Exercice 77 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

1. *Montrer que, pour tous* A, B *dans* $\mathcal{A}$, *on a :*
   (a)
   $$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A), \ \mathrm{cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \ \mathbb{V}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A))$$
   (b)
   $$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$$
   (c)
   $$|\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$$
2. *Soit* $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$.
   En utilisant la formule de Poincaré pour les fonctions indicatrices, montrer que :
   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$
   (formule de Poincaré).

Solution.

1.
   (a) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ est bien une variable aléatoire dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on a :
   $$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \int_\Omega \mathbf{1}_A d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$$
   Pour A, B dans $\mathcal{A}$, on a :
   $$\begin{aligned} \mathrm{cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)\mathbb{E}(\mathbf{1}_B) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A \cap B}) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_A)\mathbb{E}(\mathbf{1}_B) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \end{aligned}$$
   ce qui donne pour $B = A$:
   $$\mathbb{V}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A))$$
   (b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :
   $$\begin{aligned} |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| &= |\mathrm{cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)| \\ &\leq \sqrt{\mathbb{V}(\mathbf{1}_A)}\sqrt{\mathbb{V}(\mathbf{1}_B)} = \sqrt{\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A))}\sqrt{\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(B))} \end{aligned}$$

et tenant compte de $\sup\limits_{t\in[0,1]} t(1-t) = \dfrac{1}{4}$, on en déduit que :

$$|\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$$

On peut aussi montrer directement cette inégalité comme suit.
Notons :

$$x_1 = \mathbb{P}(A\cap B),\ x_2 = \mathbb{P}\left(A\cap \overline{B}\right),\ x_3 = \mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right),,\ x_3 = \mathbb{P}\left(\overline{A}\cap \overline{B}\right)$$

Comme $\left(A\cap B, A\cap \overline{B}, \overline{A}\cap B, \overline{A}\cap \overline{B}\right)$ est un système complet d'événements, on a :

$$\sum_{k=1}^{4} x_k = 1$$

En écrivant que :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}\left(A\cap \overline{B}\right) = x_1 + x_2$$

et :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right) = x_1 + x_3$$

on a, pour tout $(A,B)\in \mathcal{A}^2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B) &= (x_1+x_2)(x_1+x_3) - x_1 \\
&= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1(1-x_1) \\
&= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1(x_2 +_3 + x_4) \\
&= x_2x_3 - x_1x_4
\end{aligned}$$

les x_k étant compris entre 0 et 1, pour tout k compris entre 1 et 4.
Ce qui nous donne :

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B) \leq x_2x_3 = x_2(1-x_1-x_2-x_4) \leq x_2(1-x_2) \leq \frac{1}{4}$$

et :

$$\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq x_1x_4 = x_1(1-x_1-x_2-x_3) \leq x_1(1-x_1) \leq \frac{1}{4}$$

puisque $\sup\limits_{t\in[0,1]} t(1-t) = \dfrac{1}{4}$.
En conclusion :

$$\forall (A,B)\in \mathcal{A}^2,\ |\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$$

l'égalité étant réalisée s'il existe A et B incompatibles tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}$.

(c) On a déjà montré cette inégalité (exercice 25).
On peut la retrouver avec les variables aléatoires indicatrices.
On a :

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)| &= |\mathbb{E}(\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A)| \\
&\leq \mathbb{E}(|\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A|) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A\triangle B}) = \mathbb{P}(A\triangle B)
\end{aligned}$$

(exercice 2, question 2).

2. En notant $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, on a $\Omega\setminus A = \bigcap\limits_{k=1}^{n}(\Omega\setminus A_k)$, donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\Omega\setminus A} = \prod_{k=1}^{n}(1-\mathbf{1}_{A_k}) &= 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1}}\mathbf{1}_{A_{i_2}}\cdots\mathbf{1}_{A_{i_k}} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots A_{i_k}}
\end{aligned}$$

soit :

$$\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots A_{i_k}}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \int_\Omega \mathbf{1}_A d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \int_\Omega \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots A_{i_k}} d\mathbb{P} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})\end{aligned}$$

Exercice 78 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements. On rappelle que :*

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right)$$

Solution. Les inégalités :

$$0 \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq 1$$

sont toujours vérifiés.

Comme la suite d'événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a :

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$$

Comme :

$$\forall k \geq n,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \mathbb{P}(A_k)$$

on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \inf_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k)$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k) = \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Comme la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a :

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

avec :

$$\forall k \geq n,\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \geq \mathbb{P}(A_k)$$

ce qui nous donne :

$$\sup_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)$$

et :

$$\limsup_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k) \leq \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right)$$

On peut aussi utiliser les fonctions indicatrices et le lemme de Fatou.
On vérifie tout d'abord que :

$$\mathbf{1}_{\liminf\limits_{n \to +\infty} A_n} = \liminf_{n \to +\infty} \mathbf{1}_{A_n}$$

ce qui résulte de :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{1}_{\liminf\limits_{n \to +\infty} A_n}(x) = 1\right) &\Leftrightarrow \left(x \in \liminf_{n \to +\infty} A_n\right) \Leftrightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq n_n,\ x \in A_k) \\
&\Leftrightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq n_n,\ \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \inf_{k \geq n_0} \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\liminf_{n \to +\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n_0} \mathbf{1}_{A_k}(x) = 1\right)
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\liminf_{n \to +\infty} A_n\right) &= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\liminf\limits_{n \to +\infty} A_n}\right) = \int_\Omega \mathbf{1}_{\liminf\limits_{n \to +\infty} A_n} d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \liminf_{n \to +\infty} \mathbf{1}_{A_n} d\mathbb{P} \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega \mathbf{1}_{A_n} d\mathbb{P} \\
&\leq \liminf_{n \to +\infty} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_n}) = \liminf_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n)
\end{aligned}$$

(lemme de Fatou).
En écrivant que :

$$\Omega \setminus \limsup_{n \to +\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} (\Omega \setminus A_k) = \liminf_{n \to +\infty} (\Omega \setminus A_n)$$

on a :

$$1 - \mathbb{P}\left(\limsup_{n \to +\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \to +\infty} (1 - \mathbb{P}(A_n)) = 1 - \limsup_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

soit :

$$\limsup_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n \to +\infty} A_n\right)$$

Exercice 79 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'événements mutuellement indépendants.*

1. *En notant* $\mathbb{P}(A)$ *la probabilité qu'aucun des événements* A_n *ne soit réalisé, montrer que :*

$$\mathbb{P}(A) \leq \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\right)$$

2. *En déduire que :*

$$\left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) = -\infty\right)$$

Solution.

1. On a :

$$A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}\right)$$

la suite $\left(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, ce qui nous donne :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}\right)$$

avec :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}\right) = \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right) = \prod_{k=0}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

puisque les événements $\overline{A_k}$ sont mutuellement indépendants comme les A_k.
On a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - \mathbb{P}(A_n))$$

En utilisant l'inégalité $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout réel x, on en déduit que :

$$\prod_{k=0}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=0}^{n} \exp(-\mathbb{P}(A_k)) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_n)\right)$$

et :

$$\mathbb{P}(A) \leq \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)\right)$$

2. On a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = 1 - \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - \mathbb{P}(A_n))$$

donc :

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1\right) &\Leftrightarrow \left(\prod_{n=0}^{+\infty} (1 - \mathbb{P}(A_n)) = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) = -\infty\right)\end{aligned}$$

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, on a alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$, donc $\ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) \underset{n\to+\infty}{\backsim} -\mathbb{P}(A_n)$ et $-\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) < +\infty$.

De même, si $-\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) < +\infty$, on a alors $\lim_{n\to+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$ et $\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\backsim} -\ln(1 - \mathbb{P}(A_n))$, ce qui assure la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

On a donc :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) = -\infty\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty\right)$$

Exercice 80 *Soit X une variable aléatoire réelle de densité f sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que, pour tout $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R} \to]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, la variable aléatoire $\varphi(X)$ a pour densité la fonction $g = f \circ \varphi^{-1} \left|(\varphi^{-1})'\right| \mathbf{1}_{]a,b[}$.*
Préciser le cas où φ est une fonction affine.

Solution. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est borélienne et $Y = \varphi \circ X = \varphi(X)$ est bien une variable aléatoire.
Supposons que la fonction φ soit strictement croissante (on a $\varphi'(x) \neq 0$ pour tout réel x, la fonction φ' étant continue, on déduit donc du théorème des valeurs intermédiaires que la fonction φ' a un signe constant).
Pour tout réel y, on a :

$$\mathbb{P}(\varphi(X) \leq y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \leq a \\ \mathbb{P}\left(\varphi(X) \leq \varphi\left(\varphi^{-1}(y)\right)\right) = \mathbb{P}\left(X \leq \varphi^{-1}(y)\right) \text{ si } a < y < b \\ 1 \text{ si } y \geq b \end{cases}$$

avec, pour $a < y < b$:

$$\mathbb{P}\left(X \leq \varphi^{-1}(y)\right) = \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(y)} f(t)\, dt = \int_a^y f\left(\varphi^{-1}(\theta)\right) \left(\varphi^{-1}\right)'(\theta)\, d\theta$$

(changement de variable $\theta = \varphi(t)$), ce qui peut aussi s'écrire :

$$\mathbb{P}(\varphi(X) \leq y) = \int_{-\infty}^y f\left(\varphi^{-1}(\theta)\right) \left(\varphi^{-1}\right)'(\theta)\, \mathbf{1}_{]a,b[}(\theta)\, d\theta$$

pour tout réel y, avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\varphi^{-1}(\theta)\right) \left(\varphi^{-1}\right)'(\theta)\, \mathbf{1}_{]a,b[}(\theta)\, d\theta = \int_a^b f\left(\varphi^{-1}(\theta)\right) \left(\varphi^{-1}\right)'(\theta)\, d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$$

On procède de même pour φ décroissante avec $\varphi' < 0$ et en faisant attention aux signes.
La variable aléatoire $\varphi(X)$ a donc pour densité la fonction $g = f \circ \varphi^{-1} \left|\left(\varphi^{-1}\right)'\right| \mathbf{1}_{]a,b[}$.
Si φ est une fonction affine, soit $\varphi(t) = \alpha t + \beta$ pour tout réel t avec $\alpha > 0$, on a alors $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\varphi^{-1}(\theta) = \dfrac{1}{\alpha}(\theta - \beta)$ et la variable aléatoire $\alpha X + \beta$ a pour densité la fonction g définie par :

$$g(\theta) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{1}{\alpha}(\theta - \beta)\right)$$

sa fonction de répartition étant définie par :

$$\begin{aligned} F_{\alpha X+\beta}(y) &= \int_{-\infty}^y g(\theta)\, d\theta = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^y f\left(\frac{1}{\alpha}(\theta - \beta)\right) d\theta = \int_{-\infty}^{\frac{1}{\alpha}(y-\beta)} f(t)\, dt \\ &= F_X\left(\frac{1}{\alpha}(y - \beta)\right) \end{aligned}$$

Exercice 81 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ la suite des fonctions de répartition correspondantes.*

1. *Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire $X = \min\limits_{1 \leq k \leq n} X_k$ est :*

$$F_X = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - F_k)$$

et que celle de la variable aléatoire $Y = \max\limits_{1 \leq k \leq n} X_k$ est :

$$F_Y = \prod_{k=1}^n F_k$$

2. *Montrer que, pour tous réels $x < y$, on a :*

$$\mathbb{P}(x < X \leq Y \leq y) = \prod_{k=1}^{n} (F_k(y) - F_k(x))$$

Solution.

1. Pour tout réel x, on a :

$$(X > x) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k > x)$$

donc :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k > x)$$
$$= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - F_k(x))$$

(les X_k sont indépendantes).
De manière analogue, on a :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leq x)\right) = \prod_{k=1}^{n} F_k(x)$$

2. Pour $x < y$, on a :

$$(x < X \leq Y \leq y) = (X > x) \cap (Y \leq y) = \bigcap_{k=1}^{n} (x < X_k \leq y)$$

donc :

$$\mathbb{P}(x < X \leq Y \leq y) = \prod_{k=1}^{n} (F_k(y) - F_k(x))$$

par indépendance des X_k.

Exercice 82 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Montrer que pour toute variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a :*

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \begin{cases} \mathbf{1}_B(X) = \mathbf{1}_{X^{-1}(B)} \\ \mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X)) = \mathbb{P}(X \in B) \end{cases}$$

En particulier, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{]-\infty,x]}(X)\right)$$

2. *Montrer que pour toute variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une densité f, on a :*

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X)) = \int_B f(x)\,dx$$

3. *Soient X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\varphi = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \mathbf{1}_{B_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction borélienne positive (les b_n sont des réels positifs et les B_n des boréliens).*
Montrer que :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \mathbb{P}(X \in B_n)$$

dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

4. *Soient X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant une densité f et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que $\varphi(X)$ soit intégrable.*
   Montrer que :
$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, dx$$
   (théorème de transfert).
   Pour $\varphi(x) = x^\alpha$, où $\alpha > 0$, la quantité :
$$\mathbb{E}(X^\alpha) = \int_{\mathbb{R}} x^\alpha f(x)\, dx$$
   est le moment d'ordre α de X.
   Pour $\alpha > 1$ et $\varphi(x) = (x - \mathbb{E}(X))^\alpha$, la quantité :
$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^\alpha) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(X))^\alpha f(x)\, dx$$
   est le moment centré d'ordre α de X.
5. *Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie de variables aléatoire réelle indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*
   (a) *Montrer que, pour toute famille finie $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ de boréliens, on a l'égalité dans $\mathbb{R}^+$:*
$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{B_k}(X_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_k}(X_k))$$
   (b) *Montrer que, pour toute famille finie $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ de fonctions étagées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, on a l'égalité dans $\mathbb{R}^+$:*
$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \varphi_k(X_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\varphi_k(X_k))$$
   (c) *Montrer que, pour toute famille finie $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ de fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, on a l'égalité dans $\overline{\mathbb{R}^+}$:*
$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \varphi_k(X_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\varphi_k(X_k))$$
   (d) *Montrer que, pour toute famille finie $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ de fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que chaque variable aléatoire $\varphi_k(X_k)$ soit intégrable, on a l'égalité dans $\mathbb{R}$:*
$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \varphi_k(X_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\varphi_k(X_k))$$
6. *Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que pour toute fonction borélienne bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\varphi(X)$ est intégrable.*
7. *Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie de variables aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*
   Montrer que cette famille est indépendante si, et seulement si, pour toute famille finie $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ de fonctions boréliennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :
$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} \varphi_k(X_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\varphi_k(X_k))$$

Solution.

1. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_B(X)(\omega) = \mathbf{1}_B(X(\omega)) &= \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } X(\omega) \in B \\ 0 \text{ si } X(\omega) \notin B \end{array}\right. \\ &= \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } \omega \in X^{-1}(B) \\ 0 \text{ si } \omega \notin X^{-1}(B) \end{array}\right. = \mathbf{1}_{X^{-1}(B)}(\omega)\end{aligned}$$

donc :

$$\mathbf{1}_B(X) = \mathbf{1}_{X^{-1}(B)}$$

et :

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X)) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{X^{-1}(B)}\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(B)\right) = \mathbb{P}(X \in B)$$

2. Comme X est de densité f, on a :

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B(X)) = \mathbb{P}(X \in B) = \int_B f(x)\,dx$$

3. Comme φ est borélienne positive, $\varphi(X)$ est une variable aléatoire réelle positive sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et en utilisant le théorème de Beppo-Levi, on a dans $\overline{\mathbb{R}^+}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(X)) &= \int_\Omega \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathbf{1}_{B_n}(X)\right) d\mathbb{P} = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \int_\Omega \mathbf{1}_{B_n}(X)\,d\mathbb{P} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_n}(X)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathbb{P}(X \in B_n)\end{aligned}$$

4. La fonction $|\varphi| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ étant borélienne positive, elle s'écrit $|\varphi| = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathbf{1}_{B_n}$ et on a dans $\overline{\mathbb{R}^+}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\varphi(X)|) = \mathbb{E}(|\varphi|(X)) = \mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathbf{1}_{B_n}(X)\right) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_n}(X)) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \int_{B_n} f(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \int_\mathbb{R} \mathbf{1}_{B_n}(x) f(x)\,dx \\ &= \int_\mathbb{R} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathbf{1}_{B_n}(x)\right) f(x)\,dx = \int_\mathbb{R} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \mathbf{1}_{B_n}(x)\right) f(x)\,dx \\ &= \int_\mathbb{R} |\varphi(x) f(x)|\,dx\end{aligned}$$

et dans le cas où la variable aléatoire $\varphi(X)$ est intégrable, on en déduit que $\int_\mathbb{R} |\varphi(x) f(x)|\,dx < +\infty$, c'est-à-dire que la fonction $\varphi \cdot f$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$.
Il en est alors de même des fonctions $\varphi^\pm \cdot f$, où $\varphi^+ = \max(\varphi, 0)$ et $\varphi^- = \max(-\varphi, 0)$ (on a $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^- \geq \varphi^\pm$), donc $\varphi \cdot f = \varphi^+ \cdot f - \varphi^- \cdot f$ est aussi intégrable et on a :

$$\begin{aligned}\int_\mathbb{R} \varphi(x) f(x)\,dx &= \int_\mathbb{R} \varphi^+(x) f(x)\,dx - \int_\mathbb{R} \varphi^-(x) f(x)\,dx \\ &= \mathbb{E}\left(\varphi^+(X)\right) - \mathbb{E}\left(\varphi^-(X)\right) = \mathbb{E}(\varphi(X))\end{aligned}$$

5.

(a) On a :

$$Y = \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{B_k}(X_k) = \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{X_k^{-1}(B_k)} = \mathbf{1}_A$$

où :

$$A = \bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(B_k) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \in B_k)$$

Comme les X_k sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in B_k) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_k}(X_k)) \in [0,1]
\end{aligned}$$

(b) En notant :

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{m} b_{k,j} \mathbf{1}_{B_{k,j}} \quad (1 \leq k \leq n)$$

(les $b_{k,j}$ sont des réels positifs ou nuls et les $B_{k,j}$ des boréliens), on a :

$$\begin{aligned}
Y = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(X_k) &= \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{k,j} \mathbf{1}_{B_{k,j}}(X_k) \right) \\
&= \sum_{1 \leq j_1, \cdots, j_n \leq m}^{m} b_{1,j_1} \cdots b_{n,j_n} \mathbf{1}_{B_{1,j_1}}(X_1) \cdots \mathbf{1}_{B_{n,j_n}}(X_n)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{1 \leq j_1, \cdots, j_n \leq m}^{m} b_{1,j_1} \cdots b_{n,j_n} \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{B_{1,j_1}}(X_1) \cdots \mathbf{1}_{B_{n,j_n}}(X_n) \Big) \\
&= \sum_{1 \leq j_1, \cdots, j_n \leq m}^{m} b_{1,j_1} \cdots b_{n,j_n} \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{B_{1,j_1}}(X_1) \Big) \cdots \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{B_{n,j_n}}(X_n) \big) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{k,j} \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{B_{k,j}}(X_k) \big) \right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\varphi_k(X_k))
\end{aligned}$$

dans $\mathbb{R}^+$.

(c) Toute fonction borélienne positive est limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives, donc chaque fonction φ_k s'écrit :

$$\varphi_k = \lim_{m \to +\infty} \varphi_{k,m}$$

où $(\varphi_{k,m})_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives.
On a alors :

$$Y = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(X_k) = \lim_{m \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{k,m}(X_k) = \lim_{m \to +\infty} Y_m$$

la suite de variables aléatoires $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ étant croissante.
Le théorème de Beppo-Levi nous permet d'écrire dans $\overline{\mathbb{R}^+}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) = \lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}(Y_m) &= \lim_{m \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\varphi_{k,m}(X_k)) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \lim_{m \to +\infty} \mathbb{E}(\varphi_{k,m}(X_k)) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\varphi_k(X_k))
\end{aligned}$$

(d) En notant $Y = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(X_k)$, on a :

$$\mathbb{E}(|Y|) = \int_\Omega |Y| \, d\mathbb{P} = \int_\Omega \left(\prod_{k=1}^{n} |\varphi_k|(X_k) \right) d\mathbb{P}$$
$$= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} |\varphi_k|(X_k) \right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|\varphi_k|(X_k)) < +\infty$$

puisque les $\varphi_k(X_k)$ sont intégrables.
Donc Y est intégrable et :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_\Omega \left(\prod_{k=1}^{n} \varphi_k(X_k) \right) d\mathbb{P} = \int_\Omega \left(\prod_{k=1}^{n} \left(\varphi_k^+(X_k) - \varphi_k^-(X_k) \right) \right) d\mathbb{P}$$

En écrivant que :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k) &= \prod_{k=1}^{n} b_k \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_k}{b_k} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} b_k \left(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \frac{a_{i_1}}{b_{i_1}} \cdots \frac{a_{i_k}}{b_{i_k}} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \\ j_1, \cdots, j_{n-k} \in \{1, \cdots n\} \setminus \{i_1, \cdots, i_k\}}} a_{i_1} \cdots a_{i_k} b_{j_1} \cdots b_{j_{n-k}}\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\varphi_k^+(X_k) \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum \mathbb{E}\left(\varphi_{i_1}^+(X_{i_1}) \right) \cdots \mathbb{E}\left(\varphi_{i_k}^+(X_{i_k}) \right) \mathbb{E}\left(\varphi_{j_1}^-(X_{j_1}) \right) \cdots \mathbb{E}\left(\varphi_{j_{n-k}}^-(X_{j_{n-k}}) \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(\mathbb{E}\left(\varphi_k^+(X_k) \right) - \mathbb{E}\left(\varphi_k^-(X_k) \right) \right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\varphi_k(X_k))\end{aligned}$$

6. Comme φ est bornée, on a :

$$\mathbb{E}(|\varphi(X)|) = \int_\Omega |\varphi|(X) \, d\mathbb{P} \leq \|\varphi\|_\infty \int_\Omega d\mathbb{P} = \|\varphi\|_\infty < +\infty$$

donc $\varphi(X)$ est intégrable.

7. Si les X_k sont indépendantes, les $\varphi_k(X_k)$ sont intégrables pour φ_k boréliennes bornées et on a la condition nécessaire.
Prenant pour φ_k des fonctions indicatrices de boréliens, on a la condition suffisante.

Exercice 83 *Soit X une variable aléatoire réelle positive sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

1. *Montrer que, pour tout réel $\alpha \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha \mathbb{P}(X > x)$ est Lebesgue-mesurable sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*
2. *Montrer que, pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout $\omega \in \Omega$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}} x^\alpha \mathbf{1}_{(X>x)}(\omega) \, dx = \frac{(X(\omega))^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$$

3. *Montrer que X admet un moment d'ordre $\alpha \geq 1$ si, et seulement si, la fonction $x \mapsto x^{\alpha-1}\mathbb{P}(X > x)$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et dans ce cas, on a :*

$$\mathbb{E}(X^\alpha) = \alpha \int_{\mathbb{R}^{+,*}} x^{\alpha-1}\mathbb{P}(X > x)\, dx$$

Solution.

1. L'application $x \mapsto \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$ est décroissante à valeurs positives, donc mesurable et il en est de même de $x \mapsto x^\alpha \mathbb{P}(X > x)$ pour $\alpha \geq 0$.
2. On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{+,*}} x^\alpha \mathbf{1}_{(X>x)}(\omega)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^{+,*}} x^\alpha \mathbf{1}_{]x,+\infty[}(X)(\omega)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{+,*}} x^\alpha \mathbf{1}_{]x,+\infty[}(X(\omega))\, dx \\ &= \int_0^{X(\omega)} x^\alpha dx = \frac{(X(\omega))^{\alpha+1}}{\alpha+1}\end{aligned}$$

(pour tout borélien B, on a $\mathbf{1}_B(X) = \mathbf{1}_{X^{-1}(B)} = \mathbf{1}_{X\in B}$ et pour $\beta = X(\omega)$ donné dans $\mathbb{R}^+$, on a $\mathbf{1}_{]x,+\infty[}(\beta) = 0$ si $\beta < x$, $\mathbf{1}_{]x,+\infty[}(\beta) = 1$ si $\beta \geq x$)

3. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{]x,+\infty[}(X)\right) = \int_\Omega \mathbf{1}_{]x,+\infty[}(X)\, d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbf{1}_{(X>x)} d\mathbb{P}$$

donc, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on peut écrire que dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ on a l'égalité :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{+,*}} x^{\alpha-1}\mathbb{P}(X > x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^{+,*}} x^{\alpha-1}\left(\int_\Omega \mathbf{1}_{(X>x)} d\mathbb{P}\right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^{+,*}} x^{\alpha-1}\mathbf{1}_{(X>x)} dx\right) d\mathbb{P}\end{aligned}$$

avec :

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}} x^{\alpha-1}\mathbf{1}_{(X>x)} dx = \frac{X^\alpha}{\alpha}$$

ce qui nous donne :

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}} x^{\alpha-1}\mathbb{P}(X > x)\, dx = \int_\Omega \frac{X^\alpha}{\alpha} d\mathbb{P} = \frac{\mathbb{E}(X^\alpha)}{\alpha}$$

Exercice 84 *Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*
On dit que X est sans mémoire si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ \mathbb{P}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > x)\, \mathbb{P}(X > x)$$

1. *Montrer qu'une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est sans mémoire.*
2. *On se donne une variable aléatoire sans mémoire X de fonction de répartition F_X.*
   (a) *Montrer que $\mathbb{P}(X > 0) = 0$ si, et seulement si, $\mathbb{P}(X > x) = 0$ pour tout réel $x > 0$.*
   (b) *En supposant que $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, montrer que X suit une loi exponentielle.*

Solution.

1. X est une variable aléatoire réelle de densité :

$$f : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

et sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{array} \right.$$

On a donc $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x} > 0$ pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout réel $y \geq 0$:

$$\mathbb{P}(X > x + y) = e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} = \mathbb{P}(X > x)\, \mathbb{P}(X > x)$$

2.

(a) Si $\mathbb{P}(X > 0) = 0$, on a alors, pour tout réel $x > 0$:

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X > x)\, \mathbb{P}(X > 0) = 0$$

Si $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, en écrivant, pour $x > 0$ donné, que l'événement $(X > 0)$ est la réunion croissante des événements $\left(X > \dfrac{x}{n}\right)$, on a :

$$0 < \mathbb{P}(X > 0) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(X > \frac{x}{n}\right)$$

donc, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\mathbb{P}\left(X > \dfrac{x}{n}\right) > 0$ et :

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}\left(X > n\frac{x}{n}\right) = \left(\mathbb{P}\left(X > \frac{x}{n}\right)\right)^n > 0$$

(b) La fonction

$$G_X = 1 - F_X : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{P}(X > x)$$

est à valeurs strictement positives, décroissante et solution de l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,\ G_X(x + y) = G_X(x)\, G_X(y)$$

(la fonction $G_X : x \mapsto \mathbb{P}(X > x)$ est la fonction de survie).
De $G_X(0) = G_X(0)^2$ avec $G_X(0) > 0$, on déduit que $G_X(0) = 1$.
Par récurrence sur $n \geq 1$ on vérifie facilement que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^+$, on a $G_X(nx) = (G_X(x))^n$, puis avec $G_X(x) > 0$ et $G_X(x) = G_X\left(n\dfrac{x}{n}\right) = \left(G_X\left(\dfrac{x}{n}\right)\right)^n$, on déduit que $G_X\left(\dfrac{x}{n}\right) = (G_X(x))^{\frac{1}{n}}$.
Soient $r = \dfrac{p}{q}$ un nombre rationnel positif avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$. De $G_X(q(rx)) = G_X(px) = (G_X(x))^p$ et $G_X(q(rx)) = (G_X(rx))^q$, on déduit que $G_X(rx) = (G_X(x))^r$ (G_X est à valeurs positives).
En notant $\mu = \ln(G_X(1))$ (on a $G_X(1) > 0$), on a :

$$\forall r \in \mathbb{Q}^{+,*},\ G_X(r) = G_X(r \cdot 1) = (G_X(1))^r = e^{\mu r}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. En désignant par $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'approximations décimales par défaut de x et par $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'approximations décimales par excès de x, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ G_X(s_n) = e^{\mu s_n} \leq G_X(x) \leq G_X(r_n) = e^{\mu r_n}$$

(la fonction $G_X = 1 - F_X$ est décroissante) et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $G_X(x) = e^{\mu x}$.
Avec $0 < G_X(x) \leq 1$, on déduit que nécessairement $\mu = -\lambda$ avec $\lambda \geq 0$.

Du fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} G_X(x) = 0$ et $\lambda > 0$.
On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F_X(x) = 1 - G_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

La fonction F_X étant positive et croissante sur $\mathbb{R}$, on a nécessairement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} = \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 85

1. *Soit $P(X) = aX^2 - 2bX + c$ un polynôme réel de degré 2 avec $a > 0$.*
   Calculer :
   $$\int_{\mathbb{R}} e^{-P(t)} dt$$
2. *Montrer que si X_1, X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois normales de paramètres respectifs (μ_1, σ_1) et (μ_2, σ_2), alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit une loi normale de paramètres $\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$.*
3. *Soit $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout k compris entre 1 et n, X_k suit une loi normale de paramètres $(\mu_k, \sigma_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+,*}$.*
   Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=1}^n X_k$ suit une loi normale de paramètres $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \mu_k, \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}\right)$.
   En particulier, dans le cas où les X_k suivent toutes une même loi normale de paramètres $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+,*}$, la variable aléatoire :
   $$Y = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left(\sum_{k=1}^n X_k - n\mu\right)$$
   suit une loi normale centrée réduite.

Solution.

1. En utilisant la forme canonique :
   $$P(t) = a\left(\left(t - \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - ac}{a^2}\right)$$
   on a :
   $$\int_{\mathbb{R}} e^{-P(t)} dt = e^{\frac{b^2-ac}{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(t-\frac{b}{a}\right)^2} dt$$
   et le changement de variable $x = \sqrt{a}\left(t - \dfrac{b}{a}\right)$ nous donne :
   $$\int_{\mathbb{R}} e^{-P(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}}$$

2. Les variables aléatoires à densité X_1 et X_2 étant indépendantes, la variable aléatoire $X_1 + X_2$ est de densité h définie par :

$$h(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} dt = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbb{R}} e^{-P(t)} dt$$

en notant, pour x réel fixé :

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{(t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x-t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2(t-\mu_1)^2 + \sigma_1^2(x-t-\mu_2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \\ &= at^2 - 2bt + c \end{aligned}$$

avec :

$$a = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},\ b = \frac{\sigma_2^2\mu_1 + \sigma_1^2(x-\mu_2)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},\ c = \frac{\sigma_2^2\mu_1^2 + \sigma_1^2(x-\mu_2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}$$

Ce qui nous donne :

$$h(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}$$

avec :

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$$

et :

$$\frac{b^2-ac}{a} = \frac{\left(\sigma_2^2\mu_1 + \sigma_1^2(x-\mu_2)\right)^2 - \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\left(\sigma_2^2\mu_1^2 + \sigma_1^2(x-\mu_2)^2\right)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)} = \frac{Q(x)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} Q(\mu_1+\mu_2) &= \left(\sigma_2^2\mu_1 + \sigma_1^2\mu_1\right)^2 - \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\left(\sigma_2^2\mu_1^2 + \sigma_1^2\mu_1^2\right) \\ &= \left(\sigma_2^2+\sigma_1^2\right)^2\mu_1^2 - \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)^2\mu_1^2 = 0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} Q'(\mu_1+\mu_2) &= 2\left(\sigma_1^2\left(\sigma_2^2\mu_1 + \sigma_1^2\mu_1\right) - \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\sigma_1^2\mu_1\right) \\ &= 2\left(\sigma_1^2\left(\sigma_2^2+\sigma_1^2\right)\mu_1 - \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\sigma_1^2\mu_1\right) = 0 \end{aligned}$$

on obtient :

$$Q(x) = -\sigma_1^2\sigma_2^2\left(x-(\mu_1+\mu_2)\right)^2$$

et :

$$\frac{b^2-ac}{a} = -\frac{\left(x-(\mu_1+\mu_2)\right)^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}$$

Ce qui nous donne en définitive :

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{(x-(\mu_1+\mu_2))^2}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}}$$

La variable aléatoire suit donc une loi normale de paramètres $\left(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$.

3. En supposant le résultat acquis jusqu'au rang $n-1 \geq 2$, la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n-1} X_k$ suit une loi normale de paramètres $(\mu, \sigma) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mu_k, \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sigma_k^2}\right)$ et comme elle est indépendante de X_n, la variable

aléatoire $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi normale de paramètres $\left(\mu + \mu_n, \sqrt{\sigma^2 + \sigma_n^2}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}\right)$.

Dans le cas où les X_k suivent toutes une même loi normale de paramètres (μ, σ), la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi normale de paramètres $(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$, donc $Y = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right)$ suit une loi normale de paramètres $(0, 1)$.

Exercice 86 *On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ si elle possède une densité définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{a,\lambda}(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

On note $X \hookrightarrow \Gamma(a, \lambda)$.

1. *Montrer qu'une variable aléatoire réelle X qui suit une loi $\Gamma(a, \lambda)$ admet une espérance et une variance données par :*
$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{a}{\lambda^2}$$
2. *Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout k compris entre 1 et n, X_k suit une loi gamma de paramètres $a_k > 0$ et $\lambda > 0$.*
Montrer que la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi gamma de paramètres $a = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et λ.
3. *Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout k compris entre 1 et n, X_k suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.*
Montrer que la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi gamma de paramètres n et λ.
4. *Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout k compris entre 1 et n, X_k suit une loi normale centrée réduite.*
Montrer que la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ suit une loi gamma de paramètres $\frac{n}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Solution. Le changement de variable $x = \lambda t$ nous donne :

$$\int_{\mathbb{R}} f_{a,\lambda}(t)\, dt = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = 1$$

donc $f_{a,\lambda}$ est bien une densité de probabilité.

1. On a :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} t f_{a,\lambda}(t)\, dt = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^a e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda \cdot \Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx \\ &= \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda \cdot \Gamma(a)} = \frac{a}{\lambda}\end{aligned}$$
$(\Gamma(a+1) = a\Gamma(a))$ et :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{\mathbb{R}} t^2 f_{a,\lambda}(t)\, dt = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{a+1} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2 \cdot \Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a+1} e^{-x} dx \\ &= \frac{\Gamma(a+2)}{\lambda^2 \cdot \Gamma(a)} = \frac{a(a+1)}{\lambda^2} = \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 + \frac{a}{\lambda^2}\end{aligned}$$
donc :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{a}{\lambda^2}$$

2. En raisonnant par récurrence, il suffit de prouver le résultat pour $n = 2$.
Les variables aléatoires à densité X_1 et X_2 étant indépendantes, la variable aléatoire $X_1 + X_2$ est de densité $h = f_{a_1,\lambda} * f_{a_2,\lambda}$ définie par :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\lambda^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_{\mathbb{R}} t^{a_1-1} e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t) (x-t)^{a_2-1} e^{-\lambda(x-t)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x-t)\, dt \\ &= \frac{\lambda^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-\lambda x} \int_{\mathbb{R}} t^{a_1-1} (x-t)^{a_2-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x-t)\, dt \end{aligned}$$

avec :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x-t) = \mathbf{1}_{[0,x]}(t)$$

en convenant que $\mathbf{1}_{[0,x]} = 0$ pour $x < 0$, ce qui nous donne $h(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et :

$$h(x) = \frac{\lambda^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-\lambda x} \int_0^x t^{a_1-1} (x-t)^{a_2-1}\, dt$$

pour $x > 0$.
Pour $x > 0$, le changement de variable $t = \theta x$ nous donne :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{a_1-1} (x-t)^{a_2-1}\, dt &= x^{a_1+a_2-1} \int_0^1 \theta^{a_1-1} (1-\theta)^{a_2-1}\, d\theta \\ &= x^{a_1+a_2-1} B(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Donc :

$$h(x) = \frac{B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \lambda^{a_1+a_2} x^{a_1+a_2-1} e^{-\lambda x}$$

pour $x > 0$.
Sachant que h est une densité de probabilité, on a :

$$\begin{aligned} 1 = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, dx &= \frac{B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \lambda^{a_1+a_2} \int_0^{+\infty} x^{a_1+a_2-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^{+\infty} t^{a_1+a_2-1} e^{-t} dx = \frac{B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \Gamma(a_1 + a_2) \end{aligned}$$

ce qui nous permet de retrouver l'égalité :

$$B(a_1, a_2) = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1 + a_2)}$$

On a donc en définitive, pour tout réel x :

$$h(x) = \frac{\lambda^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1 + a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

ce qui signifie que $X_1 + X_2$ suit une loi gamma de paramètres $a_1 + a_2$ et λ.
3. En remarquant qu'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est aussi une loi gamma de paramètres 1 et λ, on déduit que $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi gamma de paramètres n et λ.
4. On procède par récurrence sur $n \geq 1$.
Si X_1 suit une loi normale centrée réduite, on a $\mathbb{P}\left(X_1^2 \leq x\right) = 0$ pour $x < 0$ et pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_1^2 \leq x\right) = \mathbb{P}\left(X_1 \in \left[-\sqrt{x}, \sqrt{x}\right]\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{\theta}{2}} \frac{d\theta}{2\sqrt{\theta}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^x \theta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\theta}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

Donc X_1^2 suit une loi gamma de paramètres $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.
Pour $n \geq 1$, si chaque X_k suit une loi normale centrée réduite, ces variables étant indépendantes, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ suit une loi gamma de paramètres $\dfrac{n}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$ (loi du chi-deux).

Exercice 87

1. *Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = f(a)$ pour tout $x < a$ et $f(x) = f(b)$ pour tout $x > b$.*
   On suppose que, pour tout réel $x \in [a,b]$, on dispose d'une suite $(Y_{n,x})_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, toutes de carrées intégrables et telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_{n,x}) = x$$
   $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(Y_{n,x}) = 0$$
   la convergence étant uniforme sur $[a,b]$.
   Montrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f(Y_{n,x})) = f(x)$$
   la convergence étant uniforme sur $[a,b]$.
2. *On se donne une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et on lui associe la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des polynômes de Bernstein définie par :*
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$
   Montrer, en utilisant le résultat de la question précédente, que la suite de fonctions polynomiales $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. *On se donne un réel $a > 0$ et une fonction continue $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ que l'on prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(x) = f(a)$ pour tout $x > a$.*
   On lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,a],\ u_n(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^k}{k!} x^k$$
   (a) *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est bien définie et continue sur $[0,a]$.*
   (b) *Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$.*

Solution.

1. Pour tout réel $x \in [a,b]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\mathbb{E}(f(Y_{n,x})) - f(x) = \mathbb{E}(f(Y_{n,x})) - f(x)\,\mathbb{P}(\Omega) = \int_\Omega (f(Y_{n,x}) - f(x))\, d\mathbb{P}$$
   (comme f est borélienne bornée, la variable aléatoire $f(Y_{n,x})$ est intégrable).
   On se donne un réel $\varepsilon > 0$.
   La fonction f étant uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tous réels x, y tels que$|x - y| < \eta$.
   En notant :
   $$A = (|Y_{n,x} - x| < \eta) = \{\omega \in \Omega \mid |Y_{n,x}(\omega) - x| < \eta\}$$

on a :

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left(f\left(Y_{n,x}\right)\right)-f\left(x\right)\right| &\leq \int_A \left|f\left(Y_{n,x}\right)-f\left(x\right)\right| d\mathbb{P}+\int_{\Omega\setminus A}\left|f\left(Y_{n,x}\right)-f\left(x\right)\right| d\mathbb{P} \\
&\leq \varepsilon\int_A d\mathbb{P}+2\left\|f\right\|_\infty \int_{\Omega\setminus A} d\mathbb{P}=\varepsilon\mathbb{P}\left(A\right)+2\left\|f\right\|_\infty \mathbb{P}\left(\Omega\setminus A\right) \\
&\leq \varepsilon+2\left\|f\right\|_\infty \mathbb{P}\left(\Omega\setminus A\right)
\end{aligned}
$$

avec :

$$\Omega\setminus A=\left\{\omega\in\Omega\mid \left|Y_{n,x}\left(\omega\right)-x\right|\geq\eta\right\}=\left(\left|Y_{n,x}-x\right|\geq\eta\right)$$

donc :

$$\mathbb{P}\left(\Omega\setminus A\right)\leq\mathbb{P}\left(\left|Y_{n,x}-x\right|\geq\eta\right)\leq\frac{\mathbb{V}\left(Y_{n,x}\right)}{\eta^2}$$

(inégalité de Bienaymé-Tchebychev), ce qui nous donne :

$$\left|\mathbb{E}\left(f\left(Y_{n,x}\right)\right)-f\left(x\right)\right|\leq\varepsilon+\frac{2\left\|f\right\|_\infty}{\eta^2}\mathbb{V}\left(Y_{n,x}\right)$$

La suite de fonctions $\left(\mathbb{V}\left(Y_{n,x}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant uniformément convergente vers 0, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n\geq n_0,\ \forall x\in\left[a,b\right],\ \frac{2\left\|f\right\|_\infty}{\eta^2}\mathbb{V}\left(Y_{n,x}\right)<\varepsilon$$

et en conséquence :

$$\forall n\geq n_0,\ \forall x\in\left[a,b\right],\ \left|\mathbb{E}\left(f\left(Y_{n,x}\right)\right)-f\left(x\right)\right|\leq 2\varepsilon$$

La suite de fonctions $\left(\mathbb{E}\left(f\left(Y_{n,x}\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f sur $\left[a,b\right]$.

2. À tout réel $x\in\left[0,1\right]$ on associe la suite $\left(X_{n,x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires telle que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $X_{n,x}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,x\right)$, ce qui signifie que $X_{n,x}$ est à valeurs dans $\left\{0,1,\cdots,n\right\}$ et sa loi de probabilité est définie par :

$$\forall k\in\left\{0,1,\cdots,n\right\},\ \mathbb{P}\left(X_{n,x}=k\right)=\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}$$

On définit également la suite $\left(Y_{n,x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires telle que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $Y_{n,x}=\dfrac{X_{n,x}}{n}$.
Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{E}\left(Y_{n,x}\right)=\frac{\mathbb{E}\left(X_{n,x}\right)}{n}=\frac{nx}{n}=x$$

et :

$$\mathbb{V}\left(Y_{n,x}\right)=\frac{\mathbb{V}\left(X_{n,x}\right)}{n^2}=\frac{nx\left(1-x\right)}{n^2}=\frac{x\left(1-x\right)}{n}$$

donc $0\leq\mathbb{V}\left(Y_{n,x}\right)\leq\dfrac{1}{4n}$ et la suite de fonctions $\left(\mathbb{V}\left(Y_{n,x}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[0,1\right]$.
On déduit alors de la question précédente que la suite de fonctions $\left(\mathbb{E}\left(f\left(Y_{n,x}\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\left[0,1\right]$.
Comme le théorème de transfert nous dit que :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f\left(Y_{n,x}\right)\right)&=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}\left(Y_{n,x}=\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}\left(X_{n,x}=k\right) \\
&=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

on en déduit que la suite de fonctions $\left(B_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\left[0,1\right]$.

3.

(a) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k \right| \leq \|f\|_\infty \frac{(na)^k}{k!}$$

avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(na)^k}{k!} = e^{na}$, donc la série de terme général $f\left(\dfrac{k}{n}\right) \dfrac{n^k}{k!} x^k$ est uniformément convergente et la fonction $u_n(f)$ est bien définie et continue sur $[0, a]$.

(b) À tout réel $x \in [0, a]$ on associe la suite $(X_{n,x})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n,x}$ suit une loi de Poisson de paramètre nx, ce qui signifie que $X_{n,x}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sa loi de probabilité est définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_{n,x} = k) = e^{-nx} \frac{n^k}{k!} x^k$$

On définit également la suite $(Y_{n,x})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_{n,x} = \dfrac{X_{n,x}}{n}$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{E}(Y_{n,x}) = \frac{\mathbb{E}(X_{n,x})}{n} = \frac{nx}{n} = x$$

et :

$$\mathbb{V}(Y_{n,x}) = \frac{\mathbb{V}(X_{n,x})}{n^2} = \frac{nx}{n^2} = \frac{x}{n}$$

donc $0 \leq \mathbb{V}(Y_{n,x}) \leq \dfrac{a}{n}$ et la suite de fonctions $(\mathbb{V}(Y_{n,x}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$.
On déduit alors de la question précédente que la suite de fonctions $(\mathbb{E}(f(Y_{n,x})))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
Comme le théorème de transfert nous dit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(Y_{n,x})) &= \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}\left(Y_{n,x} = \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(X_{n,x} = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-nx} \frac{n^k}{k!} x^k\end{aligned}$$

on en déduit que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, a]$.

– IX – Espaces L^p

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Pour $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\int_X |f|^p \, d\mu < +\infty$$

Grâce à l'inégalité de Minkowski (qui se déduit de l'inégalité de Hölder), on vérifie que $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace vectoriel des fonctions qui s'écrivent comme la somme d'une fonction mesurable bornée et d'une fonction nulle presque partout.

Une fonction $f \in \mathcal{L}^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$ est de la forme $f = g + h$ où g est mesurable bornée et $h = 0$ presque partout.

On a donc $|f| \leq \|g\|_{\infty} = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$ presque partout.

Réciproquement s'il existe un réel $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X \setminus A$ où A est une mesurable de X de mesure nulle, on peut écrire que $f = g + h$ avec $g = f \cdot \mathbf{1}_{X \setminus A}$ mesurable bornée et $h = \mathbf{1}_A$ est nulle presque partout.

Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace vectoriel quotient $\dfrac{\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)}{\mathcal{N}(X, \mathcal{A}, \mu)}$ où $\mathcal{N}(X, \mathcal{A}, \mu)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ formé des fonctions nulles presque partout.

Une fonction $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est identifiée à sa classe d'équivalence $\overline{f} \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Pour $f = g + h \in \mathcal{L}^{\infty}$ où g est mesurable bornée et h est nulle presque partout, on a $\overline{f} = \overline{g}$ dans L^{∞} et $\|f\|_{\infty} = \|g\|_{\infty} = \sup\limits_{x \in X} |g(x)|$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'application :

$$f \in L^p \mapsto \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme et l'espace $\left(L^p, \|\cdot\|_p\right)$ est complet.

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1$ est la fonction $\widehat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on désigne par $\operatorname{Supp}(f)$ l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des réels x tels que $f(x) \neq 0$, soit :

$$\operatorname{Supp}(f) = \overline{f^{-1}(\mathbb{C}^*)}$$

On dit que f est à support compact si $\operatorname{Supp}(f)$ est compact.

Exercice 88

1. *Soient p, q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*
   Montrer que :
   $$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \ xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$$
2. *Soient r un entier naturel non nul, $p_1, \cdots, p_r$ une suite d'éléments de $[1, +\infty]$ telle que $\sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{p_k} = 1$ et, pour tout k compris entre 1 et r, f_k une fonction dans $\mathcal{L}^{p_k}(\mathbb{R})$.*
   Montrer que la fonction $f = \prod\limits_{k=1}^{r} f_k$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et que $\|f\|_1 \leq \prod\limits_{k=1}^{r} \|f_k\|_{p_k}$.

Solution.

1. Si p, q dans $\mathbb{R}^{+,*}$ sont tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, on a alors $p > 1$ et $q > 1$.
   Pour $x = 0$ ou $y = 0$ l'inégalité est clairement vérifiée.
   On suppose donc que x et y sont dans $\mathbb{R}^{+,*}$.
   La fonction ln étant concave sur $\mathbb{R}^{+,*}$, on a :
   $$\ln\left(\frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q\right) \geq \frac{1}{p} \ln(x^p) + \frac{1}{q} \ln(y^q) = \ln(xy)$$
   ce qui équivaut à $\dfrac{1}{p} x^p + \dfrac{1}{q} y^q \geq xy$ puisque la fonction ln est strictement croissante.

2. La fonction $f = \prod_{k=1}^{r} f_k$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables.
   Si l'une des fonctions f_k est nulle presque partout, il en est alors de même de f et le résultat est évident.
   On suppose donc que $\|f_k\|_{p_k} > 0$ pour tout k compris entre 1 et p.
   Pour $r = 1$, on a $p_1 = 1$, $f = f_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et il n'y a rien à montrer.
   Pour $r = 2$, c'est l'inégalité de Hölder classique qui peut se montrer comme suit :
   Pour $p_1 = 1$ [resp. $p_2 = 1$], on a $p_2 = +\infty$ [resp. $p_1 = +\infty$], donc $|f| \leq \|f_2\|_\infty |f_1|$ [resp. $|f| \leq \|f_1\|_\infty |f_2|$] et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ avec $\|f\|_1 \leq \|f_2\|_\infty \|f_1\|_1$ [resp. $\|f\|_1 \leq \|f_1\|_\infty \|f_2\|_1$].
   Pour $1 < p_1, p_2 < +\infty$, en écrivant que pour tout réel t, on a :
$$\frac{|f_1(t)|}{\|f_1\|_{p_1}} \frac{|f_2(t)|}{\|f_2\|_{p_2}} \leq \frac{1}{p_1} \frac{|f_1(t)|^{p_1}}{\|f_1\|_{p_1}^{p_1}} + \frac{1}{p_2} \frac{|f_2(t)|^{p_2}}{\|f_2\|_{p_2}^{p_2}}$$
   on déduit que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et :
$$\frac{1}{\|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$$
   soit $\|f\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$.
   Supposons le résultat acquis pour $r \geq 2$ et soient $p_k \in [1, +\infty]$, $f_k \in \mathcal{L}^{p_k}(\mathbb{R})$ pour k compris entre 1 et $r+1$ avec $\sum_{k=1}^{r+1} \frac{1}{p_k} = 1$.
   Si l'un des p_k est infini, on a alors $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r+1} \frac{1}{p_j} = 1$, donc $h_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r+1} f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ avec $\|h_k\|_1 \leq \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r+1} \|f_k\|_{p_k}$ (hypothèse de récurrence) et $f = h_k \cdot f_k$ est aussi dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ avec $\|f\|_1 \leq \|h_k\|_1 \|f_k\|_\infty \leq \prod_{j=1}^{r+1} \|f_j\|_{p_j}$.
   En supposant que tous les p_k sont finis, on a :
$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{p_k} = 1 - \frac{1}{p_{r+1}} = \frac{1}{p}$$
   avec $p \in \left]1, +\infty\right[$.
   On a alors $\sum_{k=1}^{r} \frac{p}{p_k} = 1$, donc $\frac{p_k}{p} > 1$ pour tout k compris entre 1 et r, chaque fonction $|f_k|^p$ étant dans $\mathcal{L}^{\frac{p_k}{p}}(\mathbb{R})$, ce qui nous dit que la fonction $g = \prod_{k=1}^{r} |f_k|^p$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (hypothèse de récurrence), ce qui signifie que la fonction $h = \prod_{k=1}^{r} f_k$ est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $f = \prod_{k=1}^{r+1} f_k = h \cdot f_{r+1}$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ puisque $f_{r+1} \in \mathcal{L}^{p_{r+1}}(\mathbb{R})$ avec $p_{r+1} \in \left]1, +\infty\right[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p_{r+1}} = 1$.
   Enfin, on a :
$$\|f\|_1 \leq \|h\|_p \|f_{r+1}\|_{p_{r+1}}$$
   avec :
$$\begin{aligned} \|h\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |h(t)|^p\, dt = \int_{\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{r} |f_k|^p\, dt = \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\, dt \\ &= \|g\|_1 \leq \prod_{k=1}^{r} \||f_k|^p\|_{\frac{p_k}{p}} = \prod_{k=1}^{r} \|f_k\|_{p_k}^p \end{aligned}$$
   ce qui nous donne $\|f\|_1 \leq \prod_{k=1}^{r+1} \|f_k\|_{p_k}$.

Exercice 89 *On se donne* $p \in [1, \infty]$.

1. *Montrer que, si* f, g *sont à valeurs réelles et dans* $\mathcal{L}^p$, *alors* $\max(f, g)$ *et* $\min(f, g)$ *sont aussi dans* $\mathcal{L}^p$.
2. *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et.* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites d'éléments de* L^p *à valeurs réelles qui convergent dans* L^p *vers* f *et* g *respectivement.*
   Montrer que les suites $(\max(f_n, g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\min(f_n, g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent dans* L^p *vers* $\max(f, g)$ *et* $\min(f, g)$ *respectivement.*
3. *Soient* $q \in [1, \infty]$ *tel que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \leq 1$ *et* $r \in [1, \infty]$ *défini par* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$.
   (a) *Montrer que si* $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$, *on a alors* $fg \in L^r$ *et* $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
   (b) *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* L^p *qui convergent dans* L^p *vers* f *et* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* L^q *qui convergent dans* L^q *vers* g *montrer alors que* $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* fg *dans* L^r.
4. *On suppose que p est fini. Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *dans* L^p *et si* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite bornée dans* L^∞ *qui converge vers* g *presque partout, montrer alors que* $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* fg *dans* L^p.

Solution.

1. Pour $1 \leq p < \infty$ et f, g dans $\mathcal{L}^p$, on a :
$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$$
et :
$$\min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2} \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$$
puisque $\mathcal{L}^p$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel stable pour le module.
Pour $p = +\infty$, une fonction $f \in \mathcal{L}^\infty$ s'écrit $f = g + h$ avec g mesurable bornée et $h = 0$ presque partout.
On vérifie alors que $|f|$ est de la même forme.
Comme $|f| \leq \|g\|_\infty$ presque partout, l'ensemble $A = (|f| > \|g\|_\infty)$ est de mesure nulle et $|f| = |f|\mathbf{1}_A + |f|\mathbf{1}_{X\setminus A}$ avec $|f|\mathbf{1}_A$ nulle presque partout et $|f|\mathbf{1}_{X\setminus A}$ bornée, donc $|f| \in \mathcal{L}^\infty$.
Il en résulte que si f, g sont dans $\mathcal{L}^\infty$, il en est alors de même de $\max(f, g)$ et de $\min(f, g)$.
2. En notant $h = \max(f, g)$ et $h_n = \max(f_n, g_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned}\|h_n - h\|_p &= \left\|\frac{f_n - f + g_n - g}{2} + \frac{|f_n - g_n| - |f-g|}{2}\right\|_p \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|f_n - f\|_p + \|g_n - g\|_p + \||f_n - g_n| - |f-g|\|_p\right)\end{aligned}$$
avec :
$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = \lim_{n\to+\infty} \|g_n - g\|_p = 0$$
En notant $u_n = f_n - g_n$, $u = f - g$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ dans L^p et :
$$||u_n| - |u|| \leq |u_n - u|$$
donc :
$$\begin{aligned}\||f_n - g_n| - |f-g|\|_p &= \||u_n| - |u|\|_p \\ &= \|||u_n| - |u|||_p \leq \|u_n - u\|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = h$ dans L^p.

3.

(a) Supposons d'abord que p et q sont finis. Il en est alors de même de r.
La fonction $|f|^r$ est dans $L^{\frac{p}{r}}$, la fonction $|g|^r$ est dans $L^{\frac{q}{r}}$ avec $\frac{p}{r} = 1 + \frac{p}{q} > 1$, $\frac{q}{r} = 1 + \frac{q}{p} > 1$ et $\frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = r\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 1$, donc l'inégalité de Hölder nous donne :

$$\begin{aligned}\int_X |fg|^r \, d\mu = \int_X |f|^r \, |g|^r \, d\mu &\leq \left(\int_X (|f|^r)^{\frac{p}{r}} \, d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_X (|g|^r)^{\frac{q}{r}} \, d\mu\right)^{\frac{r}{q}} \\ &\leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_X |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{r}{q}} < +\infty\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $fg \in L^r$ et et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$.
Pour $p = +\infty$ et q fini, on a $r = q$ et :

$$\int_X |fg|^r \, d\mu = \int_X |f|^q \, |g|^q \, d\mu \leq \|f\|_\infty^q \int_X |g|^q \, d\mu < +\infty$$

Pour $q = +\infty$ et p fini, on a $r = p$ et :

$$\int_X |fg|^r \, d\mu = \int_X |f|^p \, |g|^p \, d\mu \leq \|g\|_\infty^p \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty$$

Pour p et q infinis, on a $r = +\infty$ et :

$$|fg| \leq \|f\|_\infty \, \|g\|_\infty < +\infty$$

Donc, dans tous les cas, on a $fg \in L^r$ et :

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

(b) Les fonctions $f_n g_n$ et fg sont dans L^r et on a :

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_r &= \|f_n (g_n - g) - (f - f_n) \, g\|_r \\ &\leq \|f_n (g_n - g)\|_r + \|(f - f_n) \, g\|_r \\ &\leq \|f_n\|_p \, \|g_n - g\|_q + \|f - f_n\|_p \, \|g\|_q \\ &\leq M \, \|g_n - g\|_q + \|f - f_n\|_p \, \|g\|_q\end{aligned}$$

où M est un majorant de la suite réelle convergente $\left(\|f_n\|_p\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
Il en résulte que $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers fg dans L^r.

4. Comme $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans L^∞ et converge vers g presque partout, il existe une ensemble $A \subset X$ de mesure nulle tel que :

$$|g(x)| = \lim_{n \to +\infty} |g_n(x)|$$

pour tout $x \in X \setminus A$ avec $|g_n(x)| \leq \|g_n\|_\infty \leq M$ où M est un majorant de la suite réelle bornée $(\|g_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$.
Il en résulte que $|g(x)| \leq M$ presque partout.
La fonction g est dans $\mathcal{L}^\infty$ et les fonctions $f_n g_n$ et fg sont dans L^p avec :

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_p &= \|f(g_n - g) - (f - f_n) \, g_n\|_p \\ &\leq \|f(g_n - g)\|_p + \|(f - f_n) \, g_n\|_p \\ &\leq \|f(g_n - g)\|_p + \|f - f_n\|_p \, \|g_n\|_\infty \\ &\leq \|f(g_n - g)\|_p + M \, \|f - f_n\|_p\end{aligned}$$

La suite de fonctions mesurables $\left(|f|^p |g_n - g|^p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers 0 et pour tout entier n, on a presque partout :

$$|f|^p |g_n - g|^p \leq (2M)^p |f|^p$$

la fonction $|f|^p$ étant intégrable.
Le théorème de convergence dominée nous dit alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f(g_n - g)\|_p^p = \lim_{n\to+\infty} \int_X |f|^p |g_n - g|^p \, d\mu = 0$$

Il en résulte que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fg dans L^p.

Exercice 90 *$(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré avec $0 < \mu(X) < +\infty$.*

1. *Montrer que pour $1 \leq p < q \leq +\infty$, on a $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$ et que :*

$$\forall f \in \mathcal{L}^q,\ \|f\|_p \leq \|f\|_q (\mu(X))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

2. *Soit $f \in \mathcal{L}^\infty$ non identiquement nulle.*
   (a) *Montrer que :*

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

   (b) *Montrer que :*

$$\forall \alpha \in \left]0, \|f\|_\infty\right[,\ \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \alpha$$

   (on pourra utiliser l'ensemble $A_\alpha = |f|^{-1}([\alpha, +\infty[)$) et en déduire que :

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

3. *Montrer que :*

$$\mathcal{L}^\infty = \left\{ f \in \bigcap_{p\geq 1} \mathcal{L}^p \mid \sup_{p\geq 1} \|f\|_p < \infty \right\}$$

4. *Donner un exemple de fonction $f \in \bigcap_{p\geq 1} \mathcal{L}^p$ telle que $f \notin \mathcal{L}^\infty$.*

Solution.

1. Pour $1 \leq p < q = +\infty$ et $f \in \mathcal{L}^\infty$, on a :

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu(X) < +\infty$$

donc $f \in \mathcal{L}^p$ et $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \mu(X)^{\frac{1}{p}}$.
Pour $1 \leq p < q < +\infty$ et $f \in \mathcal{L}^q$, on a $|f|^p \in \mathcal{L}^{\frac{q}{p}}$ et pour $r > 1$ tel que $\frac{1}{r} + \frac{p}{q} = 1$, on a :

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \||f|^p\|_{\frac{q}{p}} \|1\|_r = \left(\int_X |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{p}{q}} (\mu(X))^{\frac{1}{r}} = \left(\int_X |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{p}{q}} (\mu(X))^{1-\frac{p}{q}} < +\infty$$

donc $f \in \mathcal{L}^p$ et :

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q (\mu(X))^{\frac{1}{pr}} = \|f\|_q (\mu(X))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

(ce qui est encore valable pour $q = +\infty$).

2.

(a) Pour tout réel $p \geq 1$, on a $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \mu(X)^{\frac{1}{p}}$, donc :

$$\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \limsup_{p\to+\infty} \left(\mu(X)^{\frac{1}{p}}\right) = \|f\|_\infty \lim_{p\to+\infty} \left(\mu(X)^{\frac{1}{p}}\right) = \|f\|_\infty$$

puisque $\mu(X) > 0$.

(b) Pour tout réel $\alpha \in]0, \|f\|_\infty[$ (on a supposé que $\|f\|_\infty > 0$), l'ensemble $A_\alpha = |f|^{-1}([\alpha, +\infty[)$ est mesurable et on a pour tout réel $p \geq 1$:

$$\int_X |f|^p \, d\mu \geq \int_{A_\alpha} |f|^p \, d\mu \geq \alpha^p \mu(A_\alpha)$$

(inégalité de Markov, exercice 7), soit :

$$\|f\|_p \geq \alpha \mu(A_\alpha)^{\frac{1}{p}}$$

avec $\mu(A_\alpha) > 0$ (si $\mu(A_\alpha) = 0$, on a alors $|f(x)| \leq \alpha$ pour presque tout x et $\|f\|_\infty \leq \alpha$, ce qui n'est pas).

Il en résulte que :

$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \alpha \liminf_{p\to+\infty} \mu(A_\alpha)^{\frac{1}{p}} = \alpha \lim_{p\to+\infty} \mu(A_\alpha)^{\frac{1}{p}} = \alpha$$

Comme α est quelconque dans $]0, \|f\|_\infty[$, on en déduit que :

$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$

En conclusion, on a :

$$\|f\|_\infty \leq \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

ce qui revient à dire que :

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

3. On sait déjà que $\mathcal{L}^\infty \subset \bigcap_{p\geq 1} \mathcal{L}^p$.

Pour $f \in \mathcal{L}^\infty$, on a $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$, donc il existe un réel $p_0 > 1$ tel que $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty + 1$ pour tout $p \geq p_0$.

Pour $1 \leq p < p_0$, on a $\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0} (\mu(X))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}}$.

En conclusion on a $\sup_{1\leq p<\infty} \|f\|_p < \infty$.

Réciproquement soit $f \in \bigcap_{p\geq 1} \mathcal{L}^p$ telle que $\lambda = \sup_{1\leq p<\infty} \|f\|_p < \infty$.

En notant, pour $\alpha > \lambda$, $A_\alpha = |f|^{-1}([\alpha, +\infty[)$, on a pour tout $p \geq 1$:

$$\|f\|_p \geq \alpha \mu(A_\alpha)^{\frac{1}{p}}$$

donc :

$$0 \leq \mu(A_\alpha) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p \leq \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^p \underset{p\to+\infty}{\to} 0$$

Il en résulte que $|f(x)| \leq \alpha$ presque partout et $f \in \mathcal{L}^\infty$.

4. La fonction $f : x \mapsto |\ln(x)|$ est dans $\mathcal{L}^p(]0,1[)$ (avec la mesure de Lebesgue) pour tout $p \geq 1$ et n'est pas dans $\mathcal{L}^\infty(]0,1[)$.

En effet, pour tous réels $p \geq 1$ et $\alpha \in]0,1[$, on a :

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln(x)|^p = 0$$

donc $|\ln(x)|^p = \underset{x\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ et $f \in \mathcal{L}^p(]0,1[)$.

Exercice 91 $\mathbb{R}^{+,*}$ *est muni de la tribu de Borel et de la mesure de Lebesgue.*
On se donne un réel $p \in]1,\infty[$ *et* $q = \dfrac{p}{p-1}$ *est l'exposant conjugué de* p *(on a* $q \in]1,\infty[$ *et* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$*).*

1. *Montrer que, pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^p\left(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R}\right)$*, on peut définir la fonction* F *sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$\begin{cases} F(0)=0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \end{cases}$$

et que cette fonction est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
À toute fonction $f \in \mathcal{L}^p\left(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R}\right)$*, on associe la fonction* $\Phi(f)$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \Phi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

2. *On se propose de montrer ici que* Φ *est une application linéaire continue de* $\mathcal{L}^p\left(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R}\right)$ *dans* $\mathcal{L}^p\left(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R}\right)$ *avec, pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^p\left(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R}\right)$, $\left\|\Phi(f)\right\|_p \leq q\left\|f\right\|_p$*, ce qui revient à dire que :*

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}} \frac{1}{x^p}\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|^p dx \leq q^p \int_{\mathbb{R}^{+,*}} |f(x)|^p\,dx \tag{4}$$

(inégalité de Hardy).

   (a) *Montrer que, si* $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}$ *est continue, à valeurs positive et à support compact dans* $\mathbb{R}^{+,*}$*, la fonction* $\Phi(f)$ *est alors dans* $\mathcal{L}^p\left(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R}\right)$ *avec :*

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}} \left(\Phi(f)(x)\right)^p dx = q\int_{\mathbb{R}^{+,*}} \left(\Phi(f)(x)\right)^{p-1} f(x)\,dx$$

   En déduire que, dans ce cas, l'inégalité (4) *est vérifiée.*

   (b) *Montrer que l'inégalité* (4) *est vérifiée pour* $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}$ *continue et à support compact dans* $\mathbb{R}_+^\star$.

   (c) *Montrer que l'inégalité* (4) *est vérifiée pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^p\left(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R}\right)$.

   (d) *Soit* $(f_n)_{n\geq 2}$ *la suite de fonctions définie par :*

$$\forall n \geq 2,\ \forall t \in \mathbb{R}^{+,*},\ f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}}\mathbf{1}_{]1,n[}(t)$$

      i. *Calculer* $\left\|f_n\right\|_p$ *pour tout entier* $n \geq 2$.

      ii. *Vérifier que, pour tout entier* $n \geq 2$*, on peut écrire* $\left\|\Phi(f_n)\right\|_p^p$ *sous la forme :*

$$\left\|\Phi(f_n)\right\|_p^p = q^p\left(u_n + \ln(n) + v_n\right)$$

      où :

$$u_n = \int_1^n \left(\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x}\right)^p - \frac{1}{x}\right)dx$$

      et :

$$v_n = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)^p$$

iii. *Montrer que l'application* Φ *est linéaire continue de* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R})$ *dans* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R})$ *avec :*

$$\|\Phi\| = q = \frac{p}{p-1}$$

Solution.

1. Comme $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R})$ et $\mathbf{1}_{[0,x]} \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R})$ pour tout $x > 0$, la fonction $f \cdot \mathbf{1}_{[0,x]}$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R})$ (inégalité de Hölder) et on a :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^{+,*}} f(t)\,\mathbf{1}_{[0,x]}(t)\,dt$$

ce qui justifie la définition de F sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
En posant $F(0) = 0$, on la prolonge à $\mathbb{R}^+$.
En utilisant à nouveau l'inégalité de Hölder, on a pour tous réels $y > x \geq 0$:

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| \leq \int_y^x |f(t)|\,dt = \int_{\mathbb{R}^{+,*}} |f(t)|\,\mathbf{1}_{[x,y]}(t)\,dt \\ &\leq \|f\|_p \left\|\mathbf{1}_{[x,y]}\right\|_q = \|f\|_p\,|y-x|^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

et il en résulte que la fonction F est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ (elle est en fait $\dfrac{1}{q}$-höldérienne).
Le théorème de différentiation de Lebesgue nous dit de plus que F est dérivable presque partout de dérivée égale à f.

2.

(a) Si f est continue à support compact dans $\mathbb{R}^{+,*}$, il existe alors deux réels $0 < a < b$ tels que $f(t) = 0$ pour tout réel $t \in \mathbb{R}^{+,*} \setminus [a,b]$ et on a :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x \leq a \\ \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \text{ si } a < x \leq b \\ F(b) \text{ si } x > b \end{cases}$$

Comme f est à valeurs positives, on a dans $\overline{\mathbb{R}^+}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{+,*}} (\Phi(f)(x))^p\,dx &= \int_a^{+\infty} \frac{F(x)^p}{x^p}dx = \int_a^b \frac{F(x)^p}{x^p}dx + \int_b^{+\infty} \frac{F(b)^p}{x^p}dx \\ &= \int_a^b \frac{F(x)^p}{x^p}dx + \frac{1}{p-1}\frac{F(b)^p}{b^{p-1}} < +\infty \end{aligned}$$

Tenant compte de la continuité de f, une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{F(x)^p}{x^p}dx &= \left[-\frac{1}{p-1}\frac{F(x)^p}{x^{p-1}}\right]_a^b + \frac{p}{p-1}\int_a^b \frac{F(x)^{p-1}}{x^{p-1}}f(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{p-1}\frac{F(b)^p}{b^{p-1}} + \frac{p}{p-1}\int_a^b \frac{F(x)^{p-1}}{x^{p-1}}f(x)\,dx \end{aligned}$$

et en conséquence :

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}} (\Phi(f)(x))^p\,dx = \frac{p}{p-1}\int_a^b \frac{F(x)^{p-1}}{x^{p-1}}f(x)\,dx$$

avec $\dfrac{p}{p-1} = q$ et f nulle en dehors de $[a,b]$, donc :

$$\int_{\mathbb{R}^{+,*}} (\Phi(f)(x))^p\,dx = q\int_{\mathbb{R}^{+,*}} (\Phi(f)(x))^{p-1} f(x)\,dx$$

La fonction $\Phi(f)$ est donc dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R})$ et en utilisant l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(f)\|_p^p &= q\int_a^b (\Phi(f)(x))^{p-1} f(x)\,dx \\
&\leq q\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b (\Phi(f)(x))^{q(p-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq q\left(\int_{\mathbb{R}^{+,*}} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^{+,*}} (\Phi(f)(x))^{p}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq q\,\|f\|_p\left(\|\Phi(f)\|_p\right)^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

(on a $f\geq 0$ et $F\geq 0$ et $q(p-1)=p$) et en conséquence :

$$\|\Phi(f)\|_p^{p\left(1-\frac{1}{q}\right)} = \|\Phi(f)\|_p \leq q\,\|f\|_p$$

(pour $\|\Phi(f)\|_p = 0$, l'inégalité est trivialement vérifiée).

(b) Si $f:\mathbb{R}^{+,*}\to\mathbb{R}$ est continue et à support compact dans $\mathbb{R}_+^\star$, il en est alors de même de la fonction positive $|f|$ et avec $|\Phi(f)|\leq\Phi(|f|)$, on a :

$$\|\Phi(f)\|_p \leq \|\Phi(|f|)\|_p \leq q\,\||f|\|_p = q\,\|f\|_p$$

(c) Pour $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R})$ il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact dans $\mathbb{R}^{+,*}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_p = 0$.
En utilisant l'inégalité de Hölder, on a pour tout réel $x>0$:

$$\begin{aligned}
|\Phi(f_n)(x)-\Phi(f)(x)| &\leq \frac{1}{x}\int_0^x |f_n(t)-f(t)|\,dt = \frac{1}{x}\int_{\mathbb{R}^{+,*}} |f_n(t)-f(t)|\,\mathbf{1}_{[0,x]}(t)\,dt \\
&\leq \frac{1}{x}\|f_n-f\|_p\left\|\mathbf{1}_{[0,x]}\right\|_q = \|f_n-f\|_p\,x^{\frac{1}{q}-1} = \|f_n-f\|_p\,x^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\Phi(f_n)(x)=\Phi(f)(x)$.
La suite de fonctions $(\Phi(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers la fonction $\Phi(f)$.
En utilisant le lemme de Fatou, on a :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(f)\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^{+,*}} |\Phi(f)(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^{+,*}} \lim_{n\to+\infty}(|\Phi(f_n)(x)|^p)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{+,*}} \liminf_{n\to+\infty}(|\Phi(f_n)(x)|^p)\,dx \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^{+,*}} |\Phi(f_n)(x)|^p\,dx = \liminf_{n\to+\infty}\|\Phi(f_n)\|_p^p \\
&\leq q^p\liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_p^p = q^p\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_p^p = q^p\,\|f\|_p^p
\end{aligned}$$

et $\|\Phi(f)\|_p\leq q\,\|f\|_p$.
L'application linéaire Φ est donc continue sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R})$ et on a $\|\Phi\|\leq q$.
Pour montrer que $\|\Phi\|=q$, il nous suffit de trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^{+,*},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\|\Phi(f_n)\|_p}{\|f_n\|_p}=q$ (de $\dfrac{\|\Phi(f_n)\|_p}{\|f_n\|_p}\leq\|\Phi\|$, on déduit que $q\leq\|\Phi\|$ et l'égalité $\|\Phi\|=q$).

(d)

i. Pour tout entier $n\geq 2$, la fonction f_n qui est continue sur $]1,n[$ et nulle ailleurs est dans $\mathcal{L}^p$ et on a :

$$\|f_n\|_p^p = \int_1^n \left(t^{-\frac{1}{p}}\right)^p dt = \ln(n)$$

ii. Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\Phi(f_n)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]0,1] \\ \frac{q}{x}\left(x^{\frac{1}{q}} - 1\right) \text{ si } x \in]1,n] \\ \frac{q}{x}\left(n^{\frac{1}{q}} - 1\right) \text{ si } x > n \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} \|\Phi(f_n)\|_p^p &= q^p \int_1^n \frac{\left(x^{\frac{1}{q}} - 1\right)^p}{x^p} dx + q^p \left(n^{\frac{1}{q}} - 1\right)^p \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \\ &= q^p \int_1^n \left(x^{\frac{1}{q}-1} - \frac{1}{x}\right)^p dx + q^p \left(n^{\frac{1}{q}} - 1\right)^p \frac{1}{(p-1)\,n^{p-1}} \\ &= q^p \left(\int_1^n \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x}\right)^p dx + \frac{1}{p-1}\left(\frac{n^{\frac{1}{q}} - 1}{n^{\frac{p-1}{p}}}\right)^p\right) \\ &= q^p \left(\int_1^n \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x}\right)^p dx + \frac{1}{p-1}\left(\frac{n^{\frac{1}{q}} - 1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)^p\right) \\ &= q^p \left(\int_1^n \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x}\right)^p dx + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)^p\right) \end{aligned}$$

En écrivant que :

$$\int_1^n \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x}\right)^p dx = \int_1^n \left(\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x}\right)^p - \frac{1}{x}\right) dx + \ln(n)$$

on aboutit à :

$$\|\Phi(f_n)\|_p^p = q^p\left(u_n + \ln(n) + v_n\right)$$

où :

$$u_n = \int_1^n \left(\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x}\right)^p - \frac{1}{x}\right) dx$$

et :

$$v_n = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}\right)^p$$

iii. Des calculs précédents, on déduit que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\frac{\|\Phi(f_n)\|_p^p}{\|f_n\|_p^p} = \frac{\|\Phi(f_n)\|_p^p}{\ln(n)} = q^p\left(1 + \frac{u_n}{\ln(n)} + \frac{v_n}{\ln(n)}\right)$$

avec :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{p-1}$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_1^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x}\right)^p - \frac{1}{x}\right) dx = \ell \in \mathbb{R}$$

cette dernière affirmation étant justifiée par :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x}\right)^p - \frac{1}{x} &= \frac{1}{x}\left(\left(1 - \frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}}\right)^p - 1\right) = \frac{1}{x}\left(\left(1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{q}}}\right)^p - 1\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{p}{x^{\frac{1}{q}}} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{q}}}\right) - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{p}{x^{1+\frac{1}{q}}} \end{aligned}$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\|\Phi(f_n)\|_p^p}{\|f_n\|_p^p} = q^p$, ce qui nous permet de conclure à l'égalité $\|\Phi\| = q$.

Exercice 92

1. *Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$ où $1 \leq p \leq +\infty$. Montrer que :*
   - *pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t)\,g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;*
   - *la fonction $f * g : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt$ est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$;*
   - $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

   La fonction $f * g$ est le produit de convolution de f et g.
2. *Montrer que $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}),+,*)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative non unitaire.*

Solution.

1. On désigne par φ la fonction définie par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x,t) = f(x-t)\,g(t)$$

Cette fonction est mesurable sur $\mathbb{R}^2$ comme composée et produit de fonctions mesurables.

(a) Pour $p = +\infty$, de $|f(x-t)\,g(t)| \leq \|g\|_\infty |f(x-t)|$, la fonction $t \mapsto |f(x-t)|$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, on déduit que la fonction $t \mapsto f(x-t)\,g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$|f*g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)\,g(t)|\,dt \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\,dt = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

(changement de variable $y = x-t$), donc $f*g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

(b) Pour $p = 1$, le théorème de Fubini-Tonelli nous permet d'écrire que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x-t)\,g(t)|\,dxdt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\,dx\right) |g(t)|\,dt$$

dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le changement de variable $y = x-t$ nous donne :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,dy = \|f\|_1$$

donc :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x-t)\,g(t)|\,dxdt = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\,dt = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$$

ce qui signifie que φ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.
Le théorème de Fubini-Lebesgue nous dit alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t)\,g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $f*g : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_{\mathbb{R}} f*g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-t)\,g(t)\,dxdt$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |f*g(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt\right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)\,g(t)|\,dtdx = \|f\|_1 \|g\|_1\end{aligned}$$

(c) Pour $p \in \left]1,+\infty\right[$, on va se ramener au cas où $p=1$ en remplaçant la fonction g par $|g|^p$. Comme $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$, la fonction $|g|^p$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto |f(x-t)|\,|g(t)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui revient à dire que la fonction $t \mapsto |f(x-t)|^{\frac{1}{p}}\,|g(t)|$ est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$.

En désignant par $q \in \left]1,+\infty\right[$ l'exposant conjugué de p (i. e. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$), la fonction $t \mapsto |f(x-t)|^{\frac{1}{q}}$ est dans $\mathcal{L}^q(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ et le théorème de Hölder nous dit que la fonction $t \mapsto f(x-t)\,g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de définir la fonction :

$$f*g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt$$

Cette fonction est mesurable sur $\mathbb{R}$ (puisque φ est mesurable sur $\mathbb{R}^2$) avec :

$$|f*g(x)|^p = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt\right|^p \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)\,g(t)|\,dt\right)^p$$

et :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)\,g(t)|\,dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(|f(x-t)|^{\frac{1}{p}}\,|g(t)|\right)|f(x-t)|^{\frac{1}{q}}\,dt \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(|f(x-t)|^{\frac{1}{p}}\,|g(t)|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(|f(x-t)|^{\frac{1}{q}}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\,|g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|f\|_1^{\frac{1}{q}}\left(|f|*|g|^p(x)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

(inégalité de Hölder), ce qui nous donne :

$$|f*g(x)|^p \leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}}\left(|f|*|g|^p(x)\right)$$

la fonction $|f|*|g|^p$ étant intégrable.
Il en résulte que $f*g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$ avec :

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f*g(x)|^p\,dx &\leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}}\,\||f|*|g|^p\|_1 \\
&\leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}}\,\|f\|_1\,\||g|^p\|_1 = \|f\|_1^{\frac{p}{q}}\,\|f\|_1\,\|g\|_p^p
\end{aligned}$$

soit :

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_1^{\frac{1}{q}}\,\|f\|_1^{\frac{1}{p}}\,\|g\|_p = \|f\|_1\,\|g\|_p$$

Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ fixée, l'application $T_f : g \mapsto f*g$ est linéaire continue de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et on a :

$$N(T_f) = \sup_{g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})\setminus\{0\}} \frac{\|T_f(g)\|_p}{\|g\|_p} \leq \|f\|_1$$

2. On sait déjà que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(a) Pour $p=1$, la question précédente nous dit que $*$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

(b) Le changement de variable $y = x-t$ nous donne pour toutes fonctions f,g dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et tout réel x :

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,dy = g*f(x)$$

d'où la commutativité du produit de convolution.

(c) De la linéarité de l'intégrale, on déduit que $*$ est distributative par rapport à $+$.

(d) Pour toutes fonctions f, g, h dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, les fonctions $f * g$ et $g * h$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et pour tout réel x on a :

$$(f * g) * h(x) = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(t) h(x - t) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) g(t - y) h(x - t) dy \right) dt$$

Pour tout réel x, la fonction :

$$\varphi : (y, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(y) g(t - y) h(x - t)$$

est mesurable et le théorème de Fubini-Tonelli nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(y, t)| dydt &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t - y)| |h(x - t)| dt \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(z)| |h(x - y - z)| dz \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| (|g| * |h|)(x - y) dy \\
&= |f| * (|g| * |h|)(x) < +\infty
\end{aligned}$$

(les fonctions $|f|$ et $|g| * |h|$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$).
Donc la fonction φ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ et le théorème de Fubini-Lebesgue nous donne pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
(f * g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(t - y) h(x - t) dt \right) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(z) h(x - y - z) dz \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) (g * h)(x - y) dy = f * (g * h)(x)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que le produit de convolution est associatif.

(e) Si $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un élément neutre pour la loi $*$, on a alors $f * g = f$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et en particulier :

$$f(0) = f * g(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(-t) dt$$

Prenant $f = \mathbf{1}_{[0,\alpha]}$ avec $\alpha > 0$, on aboutit à :

$$1 = \int_0^{\alpha} g(-t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(-t) \mathbf{1}_{[0,\alpha]}(t) dt$$

avec $\lim\limits_{\alpha \to 0} g(-t) \mathbf{1}_{[0,\alpha]}(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et $\left| g(-t) \mathbf{1}_{[0,\alpha]}(t) \right| \leq h(t) = |g(-t)|$, la fonction h étant intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui nous donne en faisant tendre α vers 0, $1 = 0$ (théorème de convergence dominée de Lebesgue), soit une absurdité.

Exercice 93 *Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ où $1 \leq p, q \leq +\infty$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geq 1$.*

1. *Justifier l'existence de $r \in [1, +\infty]$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$.*
2. *Pour $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, montrer que le produit de convolution $f * g$ est bien défini et que $f * g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ avec $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*
3. *On suppose que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > 1$.*

(a) *Vérifier que* $1 \leq p, q \leq r < +\infty$ *et* $p' = \dfrac{pr}{r-p}$, $q' = \dfrac{qr}{r-q}$ *sont dans* $[1, +\infty]$ *avec* $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{q'} + \dfrac{1}{r} = 1.$

(b) *Montrer que, pour tout réel* x, *la fonction* $t \mapsto |f(x-t)|^{\frac{p}{r}} |g(t)|^{\frac{q}{r}}$ *est dans* $\mathcal{L}^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, *la fonction* $t \mapsto |f(x-t)|^{1-\frac{p}{r}}$ *est dans* $\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ *et la fonction* $t \mapsto |g(t)|^{1-\frac{q}{r}}$ *est dans* $\mathcal{L}^{q'}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.

(c) *En déduire que le produit de convolution* $f * g$ *est bien défini et que* $f * g \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *avec* $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ *(inégalité de Young).*

Solution.

1. Pour $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, on prend $r = +\infty$.
   Pour $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > 1$, on a $0 < \alpha = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 \leq 1 + 1 - 1 = 1$ et $r = \dfrac{1}{\alpha} \in [1, +\infty[$.
2. Pour tout réel x, la fonction $\tau_x f : t \mapsto f(x-t)$ est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et la fonction g dans $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donc le théorème de Hölder nous dit que la fonction $t \mapsto f(x-t) g(t)$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ avec :
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) g(t)| \, dt = \|\tau_x f \cdot g\|_1 \leq \|\tau_x f\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q$$
   Donc la fonction $f * g$ est bien définie et on a, pour tout réel x :
$$|f * g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) \, dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) g(t)| \, dt \leq \|f\|_p \|g\|_q$$
   ce qui signifie que $f * g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ avec $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
3.
   (a) Pour $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > 1$, on a $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 > 0$, donc $1 \leq r < +\infty$ et de $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} - 1 \leq 0$, $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - 1 \leq 0$, on déduit que $p \leq r$ et $q \leq r$.
   En écrivant l'égalité $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$ sous la forme :
$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = 1$$
   on obtient :
$$\frac{r-p}{pr} + \frac{r-q}{qr} + \frac{1}{r} = 1$$
   les réels considérés dans cette somme étant positifs, ils sont donc dans $[0, 1]$ et leurs inverses p', q', r dans $[1, +\infty]$ avec $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{q'} + \dfrac{1}{r} = 1.$

   (b) On a :
$$\int_{\mathbb{R}} \left(|f(x-t)|^{\frac{p}{r}} |g(t)|^{\frac{q}{r}}\right)^r dt = \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p |g(t)|^q \, dt = |f|^p * |g|^q(x) < +\infty$$
   puisque $|f|^p$ et $|g|^q$ sont dans $\mathcal{L}^{1'}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.
   De même, pour $1 \leq p < r$:
$$\int_{\mathbb{R}} \left(|f(x-t)|^{1-\frac{p}{r}}\right)^{\frac{pr}{r-p}} dt = \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p \, dt = \|f\|_p^p < +\infty$$
   et pour $1 \leq q < r$:
$$\int_{\mathbb{R}} \left(|g(t)|^{1-\frac{q}{r}}\right)^{\frac{qr}{r-q}} dt = \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^q \, dt = \|g\|_q^q < +\infty$$
   Pour $p = r$, on a $p' = +\infty$ et $|f(x-t)|^{1-\frac{p}{r}} = 1$ est bornée.
   Pour $q = r$, on a $q' = +\infty$ et $|g(t)|^{1-\frac{q}{r}} = 1$ est bornée.

(c) Pour tout réel x, la fonction $f_1 : t \mapsto |f(x-t)|^{\frac{p}{r}} |g(t)|^{\frac{q}{r}}$ est dans $\mathcal{L}^r(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, la fonction $f_2 : t \mapsto |f(x-t)|^{1-\frac{p}{r}}$ est dans $\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ et la fonction $f_3 : t \mapsto |g(t)|^{1-\frac{q}{r}}$ est dans $\mathcal{L}^{q'}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, donc la fonction :

$$t \mapsto |f(x-t)| |g(t)| = f_1(t) f_2(t) f_3(t)$$

est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ avec :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)| |g(t)| \, dt &\leq \|f_1\|_r \|f_2\|_{p'} \|f_3\|_{q'} \\ &\leq (|f|^p * |g|^q(x))^{\frac{1}{r}} \left(\|f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\|g\|_q^q\right)^{\frac{1}{q'}}\end{aligned}$$

donc $f * g(x)$ est bien défini et on a :

$$\begin{aligned}|f * g(x)|^r = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) \, dt\right|^r &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) g(t)| \, dt\right)^r \\ &\leq (|f|^p * |g|^q)(x) \left(\|f\|_p\right)^{\frac{rp}{p'}} \left(\|g\|_q\right)^{\frac{rq}{q'}} \\ &\leq (|f|^p * |g|^q)(x) \left(\|f\|_p\right)^{r-p} \left(\|g\|_q\right)^{r-q}\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f * g(x)|^r \, dx &\leq \left(\|f\|_p\right)^{r-p} \left(\|g\|_q\right)^{r-q} \int_{\mathbb{R}} (|f|^p * |g|^q)(x) \, dx \\ &\leq \left(\|f\|_p\right)^{r-p} \left(\|g\|_q\right)^{r-q} \||f|^p * |g|^q\|_1 \\ &\leq \left(\|f\|_p\right)^{r-p} \left(\|g\|_q\right)^{r-q} \||f|^p\|_1 \||g|^q\|_1 \\ &\leq \left(\|f\|_p\right)^{r-p} \left(\|g\|_q\right)^{r-q} \|f\|_p^p \|g\|_q^q = \|f\|_p^r \|g\|_q^r\end{aligned}$$

ce qui signifie que $f * g \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ avec $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Exercice 94 *Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et tout réel a, on désigne par $\tau_a f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\tau_a f(x) = f(a + x)$.*

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et à support compact.*
   (a) *Justifier l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel $h \in [-1, 1]$, on a $|\tau_h f - f| \leq 2\|f\|_\infty \mathbf{1}_{[-\alpha,\alpha]}$.*
   (b) *Montrer que, pour tout réel $p \geq 1$, on a $\lim\limits_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$.*
2. *Montrer que, pour tout réel $p \geq 1$ et toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a $\lim\limits_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$ (théorème de continuité en moyenne dans $\mathcal{L}^p$).*

Solution. Il s'agit de montrer que, pour tout réel $p \geq 1$ et toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'application :

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}, |\cdot|) & \to & \left(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_p\right) \\ x & \mapsto & \tau_x f\end{array}$$

est continue, soit que pour tout réel a, on a :

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_{a+h} f - \tau_a f\|_p = 0$$

Des égalités $\tau_{a+h} f = \tau_h(\tau_a f)$ et $\tau_0 f = f$, on déduit qu'il nous suffit de considérer le cas où $a = 0$.

1.

(a) Comme f est continue à support compact, il existe un réel $a > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$.
Sur le compact $[-a, a]$ la fonction continue f est bornée et en écrivant que $f = f \cdot \mathbf{1}_{[-a,a]}$, on en déduit que pour tout réel x, on a :

$$|f(x)| \leq \left(\sup_{t \in [-a,a]} |f(t)| \right) \mathbf{1}_{[-a,a]}(x) = \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \right) \mathbf{1}_{[-a,a]}(x) = \|f\|_\infty \mathbf{1}_{[-a,a]}(x)$$

Pour tout réel $h \in [-1, 1]$, la fonction $\tau_h f$ est continue à support compact dans $[-(a+1), a+1]$, donc :

$$|\tau_h f| \leq \|\tau_h f\|_\infty \mathbf{1}_{[-(a+1),\alpha+1]} = \|f\|_\infty \mathbf{1}_{[-(\alpha+1),\alpha+1]}$$

Il en résulte que :

$$|\tau_h f - f| \leq |\tau_h f| + |f| \leq 2 \|f\|_\infty \mathbf{1}_{[-(a+1),a+1]}$$

(b) Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, on a $\lim_{h \to 0} |\tau_h f - f| = 0$ et en utilisation la domination, pour $h \in [-1, 1]$, $|\tau_h f - f|^p \leq (2 \|f\|_\infty)^p \mathbf{1}_{[-\alpha,\alpha]}$, cette dernière fonction étant intégrable, on déduit du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p^p &= \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} |\tau_h f(t) - f(t)|^p \, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \to 0} |\tau_h f(t) - f(t)|^p \, dt = 0 \end{aligned}$$

2. L'ensemble des fonctions continues et à support compact étant dense dans l'espace normé $\left(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_p \right)$, on peut trouver pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tout réel $\varepsilon > 0$, une fonction g continue et à support compact telle que $\|f - g\|_p < \varepsilon$.
On a alors, pour tout réel h :

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|\tau_h g - g\|_p + \|f - g\|_p$$

avec :

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - \tau_h g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |f(t+h) - g(t+h)|^p \, dt = \int_{\mathbb{R}} |f(y) - g(y)|^p \, dy \\ &= \|f - g\|_p^p \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq 2 \|f - g\|_p + \|\tau_h g - g\|_p < 2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p$$

avec :

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h g - g\|_p = 0$$

Il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que $\|\tau_h g - g\|_p < \varepsilon$ pour $|h| < \eta$, ce qui nous donne $\|\tau_h f - f\|_p < 3\varepsilon$ pour $|h| < \eta$.
On a donc :

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$$

Exercice 95 *On appelle suite régularisante toute suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que :*

- $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \alpha_n(t) \, dt = 1$ *;*
- *la suite $(\|\alpha_n\|_1)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée ;*

– *pour tout réel* $\alpha > 0$, *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{|t|\geq\alpha} |\alpha_n(t)|\, dt = 0$$

1. *On se donne une fonction* $\alpha \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ *telle* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \alpha(t)\, dt = 1$ *et on lui associe la suite de fonctions* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha_n(t) = n\alpha(nt)$$

   Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite régularisante.*

2. *Soit* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite régularisante dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   (a) *Montrer que pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et tout entier* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $f * \alpha_n$ *est dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   (b) *Montrer que si de plus toutes les fonctions* α_n *sont continues à support compact, alors pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, *toutes les fonctions* $f * \alpha_n$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$.
   (c) *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction continue et à support compact.*
      i. *Montrer que la suite* $(f * \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* $\mathbb{R}$.
      ii. *Montrer que la suite* $(f * \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *dans* $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$.
   (d) *Soit* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. *Montrer que la suite* $(f * \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *dans* $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$.

Solution.

1. Comme la fonction α est à valeurs positives, le changement de variable $x = nt$ nous donne, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|\alpha_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}} n\alpha(nt)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \alpha(x)\, dx = 1$$

   Pour tout réel $\alpha > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{|t|\geq\alpha} |\alpha_n(t)|\, dt &= \int_{|t|\geq\alpha} n\alpha(nt)\, dt = \int_{|x|\geq n\alpha} \alpha(x)\, dx \\ &= 1 - \int_{-n\alpha}^{n\alpha} \alpha(x)\, dx = 1 - \int_{\mathbb{R}} \alpha(x)\, \mathbf{1}_{[-n\alpha, n\alpha]}(x)\, dx\end{aligned}$$

   avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha(x)\, \mathbf{1}_{[-n\alpha, n\alpha]}(x) = \alpha(x)$$

   et $\left|\alpha(x)\, \mathbf{1}_{[-n\alpha, n\alpha]}(x)\right| \leq \alpha(x)$, la fonction α étant intégrable.
   On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \alpha(x)\, \mathbf{1}_{[-n\alpha, n\alpha]}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \alpha(x)\, dx = 1$$

   et en conséquence :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{|t|\geq\alpha} |\alpha_n(t)|\, dt = 0$$

2.
   (a) C'est déjà vu (exercice 92).

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel t, la fonction $x \mapsto f(t)\,\alpha_n(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $a_n > 0$ un réel tel que $\operatorname{supp}(\alpha_n) \subset [-a_n, a_n]$.
Pour tout réel $r > 0$ et tout réel $x \in [-r, r]$, on a pour tout réel t tel que $|t| \geq r + a_n$:

$$|x-t| \geq |t| - |x| \geq r + a_n - r = a_n$$

et en conséquence $\alpha_n(x-t) = 0$, ce qui nous donne :

$$(f * \alpha_n)(x) = \int_{-(r+a_n)}^{r+a_n} f(t)\,\alpha_n(x-t)\,dt$$

avec :

$$|f(t)\,\alpha_n(x-t)| \leq \left(\sup_{[-(2r+a_n),(2r+a_n)]} |\alpha_n(y)|\right) |f(t)|$$

On déduit alors du théorème de continuité de Lebesgue que la fonction $f * \alpha_n$ est continue sur $[-r, r]$ et ce pour tout réel $r > 0$.
Il en résulte que la fonction $f * \alpha_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) La fonction f qui est continue et à support compact est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

i. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x, on a :

$$(f * \alpha_n)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x))\,\alpha_n(t)\,dt$$

Comme f est continue et à support compact, elle est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Il en résulte que, pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}
|(f * \alpha_n)(x) - f(x)| &\leq \int_{|t|<\alpha} |f(x-t) - f(x)|\,|\alpha_n(t)|\,dt + \int_{|t|\geq\alpha} |f(x-t) - f(x)|\,|\alpha_n(t)|\,dt \\
&\leq \varepsilon \int_{|t|<\alpha} |\alpha_n(t)|\,dt + 2\,\|f\|_\infty \int_{|t|\geq\alpha} |\alpha_n(t)|\,dt \\
&\leq \varepsilon\,\|\alpha_n\|_1 + 2\,\|f\|_\infty \int_{|t|\geq\alpha} |\alpha_n(t)|\,dt
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{|t|\geq\alpha} |\alpha_n(t)|\,dt = 0$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \int_{|t|\geq\alpha} |\alpha_n(t)|\,dt < \varepsilon$$

et en notant $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\|_1$ on aboutit à :

$$\forall n \geq n_0,\ |(f * \alpha_n)(x) - f(x)| \leq (M + 2\,\|f\|_\infty)\,\varepsilon$$

pour tout réel x, ce qui prouve la convergence uniforme de $(f * \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $\mathbb{R}$.

ii. En se donnant un réel $a > 0$ tel que $\operatorname{supp}(f) \subset [-a, a]$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f * \alpha_n - f\|_1 &= \int_{|x|\leq 2a} |(f * \alpha_n)(x) - f(x)|\,dx + \int_{|x|>2a} |(f * \alpha_n)(x) - f(x)|\,dx \\
&\leq 4a\,\|f * \alpha_n - f\|_\infty + \int_{|x|>2a} |(f * \alpha_n)(x)|\,dx
\end{aligned}$$

(pour $|x| > 2a$, on a $f(x) = 0$).
Pour $|x| > 2a$ et $|t| \leq a$, on a $|x-t| > a$, donc $f(x-t) = 0$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>2a} |(f * \alpha_n)(x)|\, dx &= \int_{|x|>2a} \left| \int_{|t|\geq\alpha} f(x-t)\, \alpha_n(t)\, dt \right| dx \\
&\leq \int_{|x|>2a} \left(\int_{|t|\geq\alpha} |f(x-t)|\, |\alpha_n(t)|\, dt \right) dx \\
&\leq \int_{|t|\geq\alpha} |\alpha_n(t)| \left(\int_{|x|>2a} |f(x-t)|\, dx \right) dt \\
&\leq \int_{|t|\geq\alpha} |\alpha_n(t)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\, dx \right) dt \\
&\leq \int_{|t|\geq\alpha} |\alpha_n(t)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, dy \right) dt = \|f\|_1 \int_{|t|\geq\alpha} |\alpha_n(t)|
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\|f * \alpha_n - f\|_1 \leq \varepsilon_n = 4a\, \|f * \alpha_n - f\|_\infty + \|f\|_1 \int_{|t|\geq\alpha} |\alpha_n(t)|$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et en conséquence, $\lim\limits_{n\to+\infty} f * \alpha_n = f$ dans $\left(\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_1\right)$.

(d) L'ensemble des fonctions continues et à support compact étant dense dans l'espace normé $\left(\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_1\right)$, on peut trouver pour tout réel $\varepsilon > 0$, une fonction g continue et à support compact telle que $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ et pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned}
\|f * \alpha_n - f\|_1 &\leq \|(f-g) * \alpha_n\|_1 + \|g * \alpha_n - g\|_1 + \|f-g\|_1 \\
&\leq \|f-g\|_1 \|\alpha_n\|_1 + \|g * \alpha_n - g\|_1 + \|f-g\|_1 \\
&\leq (M+1)\,\varepsilon + \|g * \alpha_n - g\|_1
\end{aligned}$$

où on a noté $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\alpha_n\|_1$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g * \alpha_n - g\|_1$, il existe un entier n_0 tel que $\|g * \alpha_n - g\|_1 < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ et en conséquence, $\|f * \alpha_n - f\|_1 \leq (M+2)\,\varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f * \alpha_n = f$ dans $\left(\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_1\right)$.

Exercice 96

1. *Soit* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

   (a) *Montrer qu'on peut définir la fonction* $\widehat{f}$ *par :*

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-ixt} dt$$

   Cette fonction $\widehat{f}$ *est la transformée de Fourier de* f.

   (b) *Montrer que cette fonction* $\widehat{f}$ *est continue et bornée sur* $\mathbb{R}$ *avec* $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$ *(ce qui se traduit en disant que l'application* $f \mapsto \widehat{f}$ *est linéaire continue de* $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ *dans* $(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$, *où* $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *est l'espace des fonctions continues et bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$*).*

2. *Montrer que, pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, *on a :*

$$\lim_{|x| \to +\infty} \widehat{f}(x) = 0$$

(théorème de Riemann-Lebesgue).

3. *Soient* f, g *dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. *Montrer que* $f \cdot \widehat{g}$ *et* $\widehat{f} \cdot g$ *sont dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *avec :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{g}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g(x) \, dx$$

4. *Soient* f, g *dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. *Montrer que* $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.
5. *Calculer, pour tout réel* $a > 0$, *la transformée de Fourier de la fonction* $\varphi_a : t \mapsto e^{-at^2}$.
6. *Soit* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   (a) *Montrer que, pour tout réel* t, *on a :*

$$\lim_{a \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\left(ax^2 - ixt\right)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ixt} dx$$

   (b) *En supposant de plus que la fonction* f *est bornée et que sa transformére de Fourier* $\widehat{f}$ *est dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, *montrer que pour tout réel* x, *on a :*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{f}}(-x)$$

   (formule d'inversion de Fourier).

7. *Soit* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *la suite de fonctions définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ a_n(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|t|}{n}}$$

   (a) *Calculer, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, *la transformée de Fourier* $\alpha_n = \widehat{a_n}$ *de* a_n.
   (b) *Montrer que* $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est une suite régularisante.*
   (c) *Montrer que, pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$(f * \alpha_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} \alpha_n(t) \widehat{f}(t) e^{ixt} dt$$

   (d) *En déduire la formule d'inversion de Fourier.*

Solution.

1.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t) e^{-ixt}$ est mesurable, la fonction $t \mapsto \left|f(t) e^{-ixt}\right| = |f(t)|$ étant intégrable, ce qui justifie la définition de $\widehat{f}(x)$.
   (b) Les fonctions $x \mapsto f(t) e^{-ixt}$ étant continues pour tout réel t, avec $\left|f(t) e^{-ixt}\right| = |f(t)|$, la fonction $|f|$ étant intégrable, on déduit du théorème de continuité de Lebesgue que la fonction $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, on a :

$$\left|\widehat{f}(x)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \, dt = \|f\|_1$$

   donc $\widehat{f}$ est bornée et $\|f\|_\infty \leq \|f\|_1$.

2. Pour tout réel $x \neq 0$, on peut écrire que :

$$\widehat{f}(x) = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-ix\left(t-\frac{\pi}{x}\right)} dt = -\int_{\mathbb{R}} f\left(y+\frac{\pi}{x}\right) e^{-ixy} dy$$

ce qui nous donne, en notant pour tout réel a, $\tau_a f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\tau_a f(x) = f(a+x)$:

$$\begin{aligned} 2\widehat{f}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left(f(y) - f\left(y+\frac{\pi}{x}\right)\right) e^{-ixy} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(f(y) - \tau_{\frac{\pi}{x}} f(y)\right) e^{-ixy} dy \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$2\left|\widehat{f}(x)\right| \leq \left\|f - \tau_{\frac{\pi}{x}} f\right\|_1$$

et sachant que $\lim\limits_{h\to 0} \|f - \tau_h f\|_1 = 0$ (théorème de continuité en moyenne dans $\mathcal{L}^1$), on en déduit que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \widehat{f}(x) = 0$.

3. Les fonctions $f \cdot \widehat{g}$ et $\widehat{f} \cdot g$ sont mesurables comme produits de fonctions mesurables et des inégalités $|f \cdot \widehat{g}| \leq \|\widehat{g}\|_\infty |f|$, $\left|\widehat{f}\right| \cdot g \leq \left\|\widehat{f}\right\|_\infty |g|$, on déduit qu'elles sont intégrables.
En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on peut écrire que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left|f(x)\, g(t)\, e^{-ixt}\right| dt dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t)|\, dt\right) dx = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$$

donc la fonction $(x,t) \mapsto f(x)\, g(t)\, e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et le théorème de Fubini-Lebesgue nous permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} g(t)\, e^{-ixt} dt\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixt} dx\right) g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, g(t)\, dt \end{aligned}$$

4. La fonction $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$\widehat{f * g}(x) = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(t)\, e^{-ixt} dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-y)\, g(y)\, dy\right) e^{-ixt} dt$$

la fonction $(y,t) \mapsto f(t-yt)\, g(y)\, e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ (toujours conséquence du théorème de Fubini-Tonelli), donc le théorème de Fubini-Lebesgue nous donne :

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-y)\, e^{-ix(t-y)} dt\right) g(y)\, e^{-ixy} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z)\, e^{-ixz} dz\right) g(y)\, e^{-ixy} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\, g(y)\, e^{-ixy} dy = \widehat{f}(x) \cdot \widehat{g}(x) \end{aligned}$$

5. La fonction φ_a est intégrable sur $\mathbb{R}$ et sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\widehat{\varphi_a}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(at^2+ixt\right)} dt$$

La fonction $\psi_a : (x,t) \mapsto e^{-\left(at^2+ixt\right)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ avec $|\psi_a(x,t)| = \varphi_a(t)$ et :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\psi_a(x,t)\right| = \left|-ite^{-\left(at^2+ixt\right)}\right| = |t|\, \varphi_a(t)$$

les fonctions φ_a et $|t|\,\varphi_a$ étant intégrables sur $\mathbb{R}$.
On déduit alors du théorème de convergence dominée que la fonction $\widehat{\varphi_a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\widehat{\varphi_a}'(x) = -i\int_{\mathbb{R}} te^{-at^2}e^{-ixt}dt$$

Une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi_a}'(x) &= -i\left\{\left[-\frac{e^{-at^2}}{2a}e^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{ix}{2a}\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}e^{-ixt}dt\right\}\\ &= -\frac{x}{2a}\widehat{\varphi_a}(x)\end{aligned}$$

et en conséquence :

$$\widehat{\varphi_a}(x) = \widehat{\varphi_a}(0)\,e^{-\frac{x^2}{4a}}$$

avec :

$$\widehat{\varphi_a}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

donc, pour tout réel x, on a :

$$\widehat{\varphi_a}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$$

– X – Séries de Fourier

À toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 et Lebesgue-intégrable sur $]0,1[$, on associe la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier exponentiels définis par :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_0^1 f(t)\,e^{-2i\pi nt}dt$$

Comme f est 1-périodique, elle est intégrable sur tout intervalle $]a,a+1[$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_a^{a+1} f(t)\,e^{-2i\pi nt}dt$$

En particulier, pour $a = -\dfrac{1}{2}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,e^{-2i\pi nt}dt$$

ce qui est intéressant pour f paire ou impaire.
On note $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de Fourier de f définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,e^{2i\pi kx}$$

et $(T_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des moyennes de Cesàro des $S_k(f)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)$$

Le produit de convolution de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 qui est dans $\mathcal{L}^1(]0,1[,\mathbb{C})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 qui est dans $\mathcal{L}^p(]0,1[,\mathbb{C})$ où $1 \leq p \leq +\infty$ est la fonction :

$$f * g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^1 f(x-t)\, g(t)\, dt$$

Tenant compte de la 1-périodicité de f et g, le changement de variable $y = x - t$ donne :

$$f * g(x) = \int_{x-1}^{x} f(y)\, g(x-y)\, dy = g * f(x)$$

Cette fonction est périodique de période 1 et dans $\mathcal{L}^p(]0,1[,\mathbb{C})$ (voir l'exercice 92).

On note $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des noyaux de Dirichlet définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2i\pi kx}$$

et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des noyaux de Fejèr définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k$$

Exercice 97

1. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période 1 et Lebesgue-intégrable sur $]0,1[$.*
   Montrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^{n\alpha} \varphi(t)\, dt = \alpha \int_0^1 \varphi(t)\, dt$$

2. *Soient $1 < p \leq +\infty$, $1 \leq q < +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 qui est dans $\mathcal{L}^p(]0,1[,\mathbb{C})$.*
   En utilisant la densité de l'ensemble des fonctions en escaliers dans $\left(\mathcal{L}^q(]0,1[,\mathbb{C}), \|\cdot\|_q\right)$, montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^q(]0,1[,\mathbb{C})$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi(nt)\, f(t)\, dt = \int_0^1 \varphi(t)\, dt \int_0^1 f(t)\, dt$$

3. *Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 et Lebesgue-intégrable sur $]0,1[$, on a :*

$$\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$$

   (théorème de Riemann-Lebesgue).

4. *Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 et Lebesgue-intégrable sur $]0,1[$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin^2(\pi nt)\, f(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\, dt$$

   et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\sin(\pi nt)|\, f(t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(t)\, dt$$

Solution.

1. En notant $[x]$ la partie entière d'un réel x, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_0^{n\alpha} \varphi(t)\,dt &= \frac{1}{n}\left(\int_0^{[n\alpha]} \varphi(t)\,dt + \int_{[n\alpha]}^{n\alpha} \varphi(t)\,dt\right)\\ &= \frac{[n\alpha]}{n}\int_0^1 \varphi(t)\,dt + \frac{1}{n}\int_{[n\alpha]}^{n\alpha} \varphi(t)\,dt\end{aligned}$$

(φ est 1-périodique) avec :

$$\left|\frac{1}{n}\int_{[n\alpha]}^{n\alpha} \varphi(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{n}\int_{[n\alpha]}^{[n\alpha]+1} |\varphi(t)|\,dt = \frac{1}{n}\int_0^1 |\varphi(t)|\,dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et :

$$\alpha - \frac{1}{n} = \frac{n\alpha - 1}{n} < \frac{[n\alpha]}{n} \leq \frac{n\alpha}{n} = \alpha$$

ce qui nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{[n\alpha]}{n} = \alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{n\alpha} \varphi(t)\,dt = \alpha\int_0^1 \varphi(t)\,dt.$

2.

(a) Pour $0 < \alpha \leq 1$ et $f = \mathbf{1}_{[0,\alpha]}$, on a :

$$\int_0^1 \varphi(nt) f(t)\,dt = \int_0^\alpha \varphi(nt)\,dt = \frac{1}{n}\int_0^{n\alpha} \varphi(x)\,dx$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \varphi(nt) f(t)\,dt = \alpha\int_0^1 \varphi(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt\int_0^1 \varphi(t)\,dt$$

Par linéarité, on en déduit que pour $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ et $f = \mathbf{1}_{[\alpha,\beta]} = \mathbf{1}_{[0,\beta]} - \mathbf{1}_{[0,\alpha]}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \varphi(nt) f(t)\,dt = \int_0^1 \varphi(t)\,dt\int_0^1 f(t)\,dt$$

Toujours par linéarité, ce résultat est encore valable pour tout fonction f en escaliers sur $[0,1]$.

(b) Soit $f \in \mathcal{L}^q(]0,1[,\mathbb{C})$.
Comme l'ensemble des fonctions en escaliers est dense dans $\left(\mathcal{L}^q(]0,1[,\mathbb{C}), \|\cdot\|_q\right)$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escaliers g sur $[0,1]$ telle que $\|f-g\|_q < \varepsilon$.
Pour $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 et dans $\mathcal{L}^p(]0,1[,\mathbb{C}) \subset \mathcal{L}^1(]0,1[,\mathbb{C})$, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \varphi(nt) f(t)\,dt - \int_0^1 \varphi(t)\int_0^1 f(t)\,dtdt\right| &\leq \left|\int_0^1 \varphi(nt)(f(t)-g(t))\,dt\right|\\ &+ \left|\int_0^1 \varphi(nt) g(t)\,dt - \int_0^1 \varphi(t)\int_0^1 g(t)\,dtdt\right|\\ &+ \int_0^1 |\varphi(t)|\,dt\int_0^1 |g(t)-f(t)|\,dt\\ &\leq \left(\int_0^1 |\varphi(nt)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \|f-g\|_q\\ &+ \left|\int_0^1 \varphi(nt) g(t)\,dt - \int_0^1 g(t)\,dt\int_0^1 \varphi(t)\,dt\right|\\ &+ \|\varphi\|_1 \|f-g\|_1\end{aligned}$$

Comme g est en escaliers sur $[0,1]$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \left|\int_0^1 \varphi(nt) g(t)\,dt - \int_0^1 \varphi(t)\,dt\int_0^1 g(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

ce qui nous donne pour $n \geq n_0$:

$$\left|\int_0^1 \varphi(nt) f(t)\,dt - \int_0^1 \varphi(t)\,dt \int_0^1 f(t)\,dt\right| \leq \left(\int_0^1 |\varphi(nt)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon + \varepsilon + \|\varphi\|_1 \|f-g\|_1$$

avec :

$$\int_0^1 |\varphi(nt)|^p\,dt = \frac{1}{n}\int_0^n |\varphi(x)|^p\,dx = \int_0^1 |\varphi(x)|^p\,dx$$

($|\varphi|^p$ est 1-périodique) et :

$$\|f-g\|_1 = \|(f-g)\cdot 1\|_1 \leq \|f-g\|_q \|1\|_p = \|f-g\|_q$$

En conclusion, on a pour $n \geq n_0$:

$$\left|\int_0^1 \varphi(nt) f(t)\,dt - \int_0^1 \varphi(t)\,dt \int_0^1 f(t)\,dt\right| \leq \left(\|\varphi\|_p + 1 + \|\varphi\|_1\right)\varepsilon$$

ce qui prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi(nt) f(t)\,dt = \int_0^1 \varphi(t)\,dt \int_0^1 f(t)\,dt$$

3. Les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définies par $\varphi(x) = e^{\pm 2i\pi x}$ sont périodiques de période 1, dans $\mathcal{L}^\infty(]0,1[\,,\mathbb{C})$, donc pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 et Lebesgue-intégrable sur $]0,1[$, on a :

$$\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 e^{\pm 2i\pi nt} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt \int_0^1 e^{\pm 2i\pi nt}dt = 0$$

4. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 et Lebesgue-intégrable sur $]0,1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin^2(\pi nt) f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi nt)}{2} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\sin(\pi nt)| f(t)\,dt = \int_0^1 |\sin(\pi t)|\,dt \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(t)\,dt$$

($\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(x) = e^{\pm 2i\pi x}$ est périodiques de période 1 et dans $\mathcal{L}^\infty(]0,1[\,,\mathbb{C})$).

Exercice 98 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 1 et Lebesgue-intégrable sur $]0,1[$.*

1. *Montrer que, pour tout entier naturel k, la fonction θ_k définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par :*

$$x \mapsto \frac{\sin(k\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. *Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel x, on a :*

$$D_n(x) = \theta_{2n+1}(x)$$

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) = (f * D_n)(x) &= \int_0^1 f(t)\,\frac{\sin((2n+1)\pi(x-t))}{\sin(\pi(x-t))}dt \\ &= \int_0^1 f(x-t)\,\frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}dt \end{aligned}$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\theta_n^2(x)$$

$$\begin{aligned}T_n(f)(x) = (f * F_n)(x) &= \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(t)\frac{\sin^2((n+1)\pi(x-t))}{\sin^2(\pi(x-t))}dt \\ &= \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x-t)\frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)}dt\end{aligned}$$

3. *Montrer que, pour tout entier naturel* n *et tout réel* x, *on a :*

$$S_n(f)(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x-t) + f(x+t))\frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}dt$$

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x-t) + f(x+t))\frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)}dt$$

4. *Montrer que, pour tout entier naturel* n *et tout réel* x, *on a :*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin((2n+1)\pi(x-t))}{\sin(\pi(x-t))}dt = \frac{1}{2}$$

et :

$$\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2((n+1)\pi(x-t))}{\sin^2(\pi(x-t))}dt = \frac{1}{2}$$

5. *Montrer que si* f *admet une limite à gauche et à droite en tout point, on a alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(f)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

6. *On dit qu'un réel* x *est un point de Lebesgue si* $f(x)$ *est fini et :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt = 0$$

Montrer que, pour un tel point, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(f)(x) = f(x)$.

7. *Montrer que si* f *est continue sur* $\mathbb{R}$, *alors la suite* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* $\mathbb{R}$.

Solution.

1. La fonction θ_k est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
   Pour m entier relatif et $x = m\pi + t$ avec t voisin de 0 on a :

$$\theta_k(x) = \frac{\sin(k\pi t + km\pi)}{\sin(\pi t + m\pi)} = (-1)^{(k-1)m}\frac{\sin(k\pi t)}{\sin(\pi t)} \underset{t\to 0}{\backsim} k(-1)^{(k-1)m}$$

   On peut donc prolonger la fonction θ_k par continuité en tout point $m\in\mathbb{Z}$ en posant $\theta_k(m) = k(-1)^{(k-1)m}$.

2.

(a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{2i\pi kx} = e^{-2i\pi nx} \sum_{k=0}^{2n} \left(e^{2i\pi x}\right)^k \\ &= e^{-2i\pi nx} \frac{1 - e^{2i\pi(2n+1)x}}{1 - e^{2i\pi x}} = \frac{e^{-i\pi(2n+1)x} - e^{i\pi(2n+1)x}}{e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}} \\ &= \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} = \theta_{2n+1}(x) \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{Z}$, on a :

$$D_n(x) = 2n + 1 = \theta_{2n+1}(x)$$

(b) En notant, pour tout entier relatif k, $e_k : x \mapsto e^{2ik\pi x}$, on a pour tout réel x :

$$c_k(f) e^{2ik\pi x} = \int_0^1 f(t) e^{2ik\pi(x-t)} dt = (f * e_k)(x)$$

donc :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{2i\pi kx} = \sum_{k=-n}^{n} (f * e_k)(x) = f * \left(\sum_{k=-n}^{n} e_k\right)(x) \\ &= f * D_n(x) = \int_0^1 f(t) D_n(x-t) dt = \int_0^1 f(t) \frac{\sin((2n+1)\pi(x-t))}{\sin(\pi(x-t))} dt \end{aligned}$$

La deuxième formule est conséquence de la commutativité du produit de convoluion.

(c) Pour tout tout entier naturel k et tout réel x on a :

$$\sin(\pi x) \sin((2k+1)\pi x) = \frac{1}{2}(\cos(2k\pi x) - \cos(2(k+1)\pi x))$$

donc :

$$\begin{aligned} \sin(\pi x)\left(\sum_{k=0}^{n} \sin((2k+1)\pi x)\right) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} (\cos(2k\pi x) - \cos(2(k+1)\pi x))\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2(n+1)\pi x)) = \sin^2((n+1)\pi x) \end{aligned}$$

ce nous donne :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((2k+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2((n+1)\pi x)}{\sin^2(\pi x)} = \frac{1}{n+1} \theta_n^2(x) \end{aligned}$$

(d) On déduit donc que :

$$\begin{aligned} T_n(f)(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f * D_k(x) = f * \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x)\right) \\ &= (f * F_n)(x) = \frac{1}{n+1} \int_0^1 f(t) \theta_n^2(x-t) dt = \frac{1}{n+1} \int_0^1 f(t) \frac{\sin^2((n+1)\pi(x-t))}{\sin^2(\pi(x-t))} dt \end{aligned}$$

La deuxième formule est conséquence de la commutativité du produit de convoluion.

3. Le changement de variable $y = -t$ nous donne, compte tenu de la parité de $D_n = \theta_{2n+1}$:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x-t) D_n(t) \, dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x+y) D_n(y) \, dt$$

donc :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t) D_n(t) \, dt = \int_{0}^{\frac{1}{2}} (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t) \, dt \\ &= \int_{0}^{\frac{1}{2}} (f(x-t) + f(x+t)) \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} dt \end{aligned}$$

De manière analogue, on voit que :

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \int_{0}^{\frac{1}{2}} (f(x-t) + f(x+t)) \frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)} dt$$

4. Pour $f = 1$, on a $S_n(f) = T_n(f) = 1$.

5. En notant, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\ell = \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$, on a compte tenu de ce qui précède :

$$T_n(f)(x) - \ell = \frac{1}{n+1} \int_{0}^{\frac{1}{2}} g(t) \frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)} dt$$

où on a noté :

$$g(t) = f(x-t) - f\left(x^-\right) + f(x+t) - f\left(x^+\right)$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un réel $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $|g(t)| < \varepsilon$ pour $0 < t < \alpha$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} |T_n(f)(x) - \ell| &\leq \frac{1}{n+1} \int_{0}^{\alpha} |g(t)| \frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)} dt + \frac{1}{n+1} \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{|g(t)|}{\sin^2(\pi t)} \sin^2((n+1)\pi t) \, dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{n+1} \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)} dt + \frac{1}{n+1} \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{|g(t)|}{\sin^2(\pi t)} \mathbf{1}_{[\alpha, \frac{1}{2}]}(t) \sin^2((n+1)\pi t) \, dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} \int_{0}^{1} h(t) \sin^2((n+1)\pi t) \, dt \end{aligned}$$

la fonction $h : t \mapsto \dfrac{|g(t)|}{\sin^2(\pi t)} \mathbf{1}_{[\alpha, \frac{1}{2}]}(t)$ étant intégrable sur $]0, 1[$.

On a alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{0}^{1} h(t) \sin^2((n+1)\pi t) \, dt = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} h(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{|g(t)|}{\sin^2(\pi t)} dt$$

et :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \int_{0}^{1} h(t) \sin^2((n+1)\pi t) \, dt = 0$$

Il existe donc un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \ |T_n(f)(x) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

6. On a :

$$T_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{n+1} \int_{0}^{\frac{1}{2}} g(t) \frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)} dt$$

où on a noté :

$$g(t) = f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)$$

ce qui nous donne, pour tout réel $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$:

$$\begin{aligned}
|T_n(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{n+1}\int_0^{\alpha} |g(t)| \frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)} dt + \frac{1}{n+1}\int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{|g(t)|}{\sin^2(\pi t)} \sin^2((n+1)\pi t)\, dt \\
&\leq \frac{1}{n+1}\int_0^{\alpha} |g(t)| \frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)} dt + \frac{1}{n+1}\int_0^{1} \frac{|g(t)|}{\sin^2(\pi t)} \mathbf{1}_{[\alpha,\frac{1}{2}]}(t) \sin^2((n+1)\pi t)\, dt
\end{aligned}$$

la fonction $h : t \mapsto \dfrac{|g(t)|}{\sin^2(\pi t)} \mathbf{1}_{[\alpha,\frac{1}{2}]}(t)$ étant intégrable sur $]0,1[$.
On a alors, comme dans la question précédente :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1}\int_0^1 h(t) \sin^2((n+1)\pi t)\, dt = 0$$

et, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |T_n(f)(x) - f(x)| \leq I_n + \varepsilon$$

où on a noté :

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^{\alpha} |g(t)| \frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)} dt$$

Pour $n \geq n_0$ et $\dfrac{1}{n+1} < \alpha$, on a :

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{1}{n+1}} |g(t)| \frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)} dt \leq \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{1}{n+1}} |g(t)| \frac{(n+1)^2 \pi^2 t^2}{\left(\frac{2}{\pi}(\pi t)\right)^2} dt \\
&\leq \frac{\pi^2}{4}(n+1)\int_0^{\frac{1}{n+1}} |g(t)|\, dt
\end{aligned}$$

(on a $0 \leq \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$ pour $0 \leq x = \pi t \leq \dfrac{\pi}{2}$).
Comme x est un point de Lebesgue, on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+y) - f(x)|\, dy = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt = 0$$

et avec :

$$|g(t)| \leq |f(x-t) - f(x)| + |f(x+t) - f(x)|$$

on en déduit que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_0^h |g(t)|\, dt = 0$$

et :

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1)\int_0^{\frac{1}{n+1}} |g(t)|\, dt = 0$$

ce qui nous assure de l'existence d'un entier $n_1 \geq \max\left(n_0, \dfrac{1}{\alpha} - 1\right)$ tel que $J_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_1$.
En notant, pour $n \geq n_1$:

$$K_n = \frac{1}{n+1}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\alpha} |g(t)| \frac{\sin^2((n+1)\pi t)}{\sin^2(\pi t)} dt$$

on a :

$$K_n \leq \frac{1}{4(n+1)}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\alpha} |g(t)| \frac{1}{t^2} dt$$

En notant :

$$\varphi(t) = \int_0^t |g(t)|\, dt$$

une intégation par parties nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n+1}}^{\alpha} \frac{|g(t)|}{t^2} dt &= \left[\frac{\varphi(t)}{t^2}\right]_{\frac{1}{n+1}}^{\alpha} + 2\int_{\frac{1}{n+1}}^{\alpha} \frac{\varphi(t)}{t^3} dt \\
&= \left[\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^2}\right]_{\frac{1}{n+1}}^{\alpha} + 2\int_{\frac{1}{n+1}}^{\alpha} \frac{\varphi(t)}{t^3} dt
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
4K_n &\leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^2} - (n+1)^2 \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) + 2\int_{\frac{1}{n+1}}^{\alpha} \frac{\varphi(t)}{t^3} dt\right) \\
&\leq \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} - (n+1)\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) + \frac{2}{n+1}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\alpha} \frac{\varphi(t)}{t^3} dt
\end{aligned}$$

avec :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$$

En choisant α assez petit, on aura $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} < \varepsilon$ et $\frac{\varphi(t)}{t^3} \leq \frac{\varepsilon}{t^2}$ pour tout $t \in \left]0, \alpha\right]$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
4K_n &\leq \varepsilon - (n+1)\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) + \frac{2\varepsilon}{n+1}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\alpha} \frac{dt}{t^2} \\
&\leq \varepsilon - (n+1)\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$.
Il en résulte que $K_n < \varepsilon$ à partir d'un certain rang et $|T_n(f)(x) - f(x)| < 4\varepsilon$ à partir de ce même certain rang.