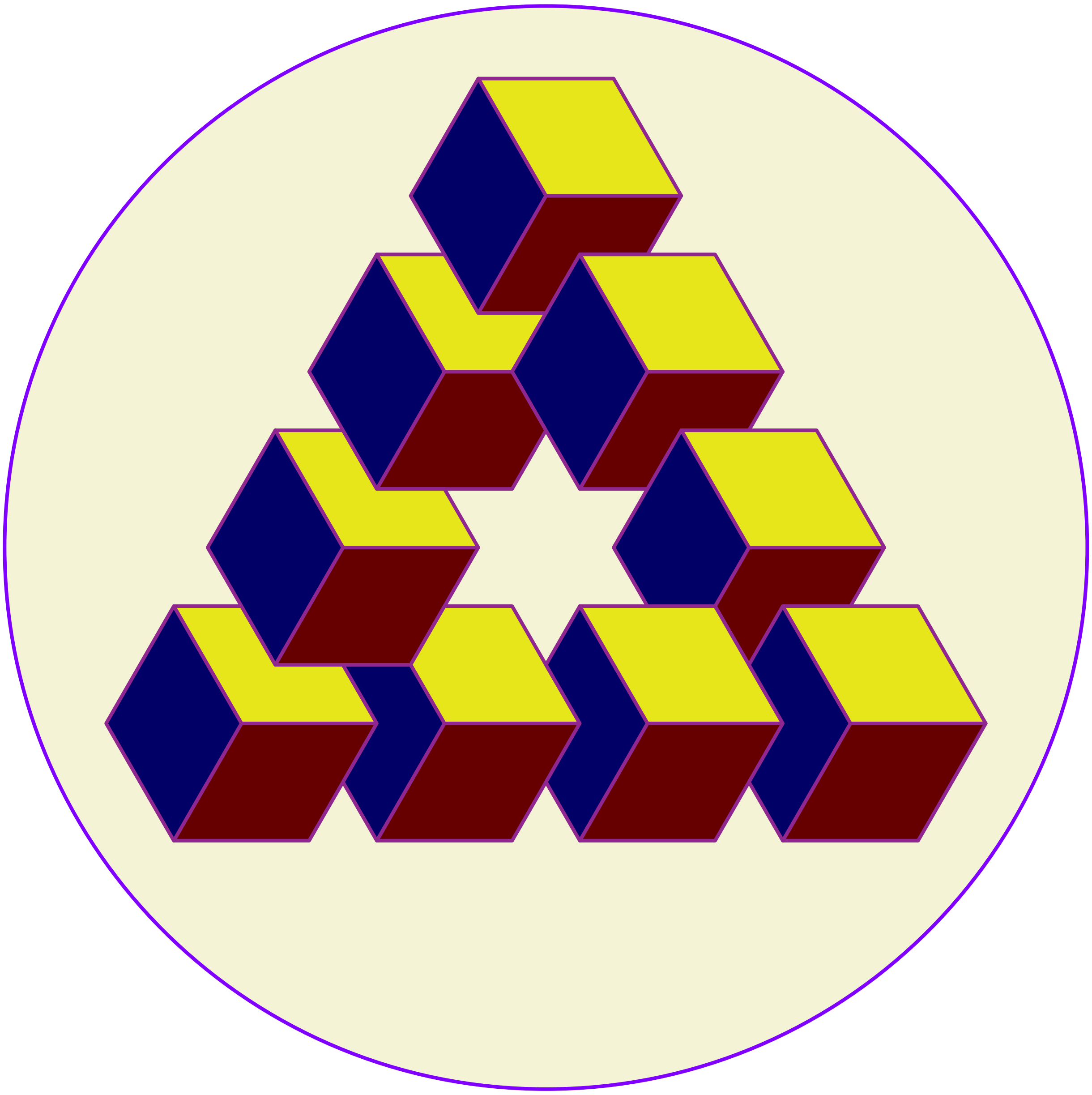
Cours de Mathématiques

$1^{\text{ère}}$



Philippe Moutou

Lycée Henri IV

Mise à jour : 2 septembre 2020

Table des matières

1 Les polynômes

Objectifs :

- Reconnaître un polynôme, son degré et ses coefficients
- Mettre sous forme canonique un trinôme et savoir l'intérêt de cette forme
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du second degré ou de degré supérieur
- Factoriser un polynôme ; étudier son signe ; déterminer ses racines réelles

Aperçu historique :

Les mathématiciens de l'époque babylonienne (25 siècles avant J.-C.) savaient déjà résoudre des équations du second degré. Le grec Diophante (4 siècles avant J.-C.) en développe l'approche ainsi que, après lui, les mathématiciens arabes dont le plus connu est Al-Khwarizmi (780-850, Bagdad). Le nom de ce dernier, latinisé, a donné le mot algorithme ; son ouvrage « Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison », par déformation du mot « restauration » (al-jabr en arabe) a donné algèbre. Al-Khwarizmi distingue encore six cas pour la résolution de ces équations ; l'unification est tardive, en particulier à cause du refus de considérer les nombres négatifs. Le mathématicien français François Viète (1540-1603) introduit les lettres pour désigner les quantités (des consonnes pour les quantités connues, des voyelles pour les inconnues) et la forme algébrique moderne est à peu prés définitive avec René Descartes (1596-1650) qui désigne par a, b, c,... les quantités connues et x, y, z,... les inconnues.

Plan du cours :

Un polynôme à une indéterminée est une expression de la forme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$, où x représente l'indéterminée (l'inconnue). On appelle « degré » la plus grande puissance de x présente dans l'expression. Dans l'écriture ci-dessus, le polynôme est de degré n, mais dans les deux premières parties, nous étudierons les polynômes de degré $n = 2$. Partie 1 : ce qui relève de la fonction (sens de variation, extremum, parité, courbe) et partie 2 : ce qui se rattache à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (racines, factorisation, signe du trinôme). Dans la dernière partie, nous donnerons quelques propriétés des polynômes de degré supérieur à 2.

1. Fonction polynôme du second degré

a. Définition

Définition 1.1 (polynôme du second degré) Soient a, b, c trois nombres réels déterminés tels que $a \neq 0$. On appelle fonction polynôme du second degré, ou simplement trinôme, toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemple 1 – $f : x \longmapsto 5x^2 - 3x + 4$, $g : x \longmapsto -3x^2 + 0,5$ et $h : x \longmapsto (2x+3)(x-1)$ sont des trinômes. Pour les deux premières fonctions, c'est évident (pour f, on a $a = 5 \neq 0$, $b = -3$ et $c = 4$; pour g, on a $a = -3 \neq 0$, $b = 0$ et $c = 0,5$), et pour la dernière, si on développe l'expression, on obtient $2x^2 + x - 3$, qui est bien un polynôme du second degré avec $a = 2 \neq 0$, $b = 1$ et $c = -3$.

Remarques :

- L'expression $ax^2 + bx + c$ est la forme développée de $f(x)$. Nous en verrons plus loin les formes canonique et factorisée.
- Par abus de langage, on appellera « polynôme du second degré » toute expression algébrique pouvant s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
- Les réels a, b, c sont déterminés s'ils ne dépendent pas de l'indéterminée x. Ils sont souvent invariables, mais ils peuvent aussi varier comme dans l'expression $f(x) = 2mx^2 + m^2x + 3$ où m est un paramètre variable indépendant de x.

b. La forme canonique

Propriété 1.1 (forme canonique) Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. L'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = -\frac{b}{2a}$, et $\beta = f(\alpha)$. Cette écriture, appelée forme canonique, est unique.

Démonstration Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
Étape 1 : on met en facteur le coefficient dominant (celui de x^2) :

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

Étape 2 : dans $x^2 + \frac{b}{a}x$, on reconnait le début du développement d'un carré

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

On remplace donc $x^2 + \frac{b}{a}x$ par $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}$. Il vient :

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}]$$

Étape 3 : on arrange, dans les crochets, le terme indépendant de x :

$$-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}$$

Étape 4 : après substitution, développement et transformation, on obtient finalement :

$$ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}] = a(x - \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\alpha})^2 + \underbrace{\frac{-b^2 + 4ac}{4a}}_{\beta}$$

Soit, avec les notations indiquées :

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a}, \text{ et } \beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

α et β sont entièrement déterminés dès lors que a, b et c le sont.
La forme canonique existe donc, et elle est unique (de même que la forme développée est unique).
Vérifions que $\beta = f(\alpha)$:
$f(\alpha) = f(-\frac{b}{2a}) = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{(b^2 - 2b^2}{4a} + c = \frac{-b^2+4ac}{4a} = \beta$

Exemple 2 –

Déterminons la forme canonique de $\begin{cases} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto 2x^2 - 6x + 5 \end{cases}$

Première méthode : appliquons la formule. On a un polynôme du second degré avec $a = 2$, $b = -6$ et $c = 5$. Sa forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\times 2} = \frac{3}{2}$ et $\beta = f(\alpha) = f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$. Ainsi, la forme canonique est $f(x) = 2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}$
Deuxième méthode, dans l'esprit de la démonstration ci-dessus : mettons le coefficient de x^2 en facteur, puis cherchons à reconnaitre le début d'un carré.
$f(x) = 2x^2 - 6x + 5 = 2(x^2 - 3x + \frac{5}{2}) = 2(x^2 - 2\times\frac{3}{2}x + \frac{5}{2})$
Comme $(x - \frac{3}{2})^2 = x^2 - 2\times\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$, on obtient :
$f(x) = 2((x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2}) = 2((x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}) = 2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}$.

c. Sens de variation

Définition 1.2 (sens de variation) Un fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Remarques :
- On définit, de même, un fonction strictement décroissante sur I ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$).
- La fonction est croissante « au sens large » (on dit aussi croissante, sans précision) si et seulement si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
- Il faut retenir qu'une fonction croissante conserve l'ordre : les images sont rangées comme les antécédents.

Propriété 1.2 (signe du taux de variation) Le signe du taux de variation $\tau = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ d'une fonction f entre x_1 et x_2, deux points d'un intervalle I, indique le sens de variation de f sur I. En particulier, $\tau > 0 \Leftrightarrow f$ strictement croissante et $\tau \geqslant 0 \Leftrightarrow f$ croissante.

Démonstration $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2)$ et $x_1 - x_2$ sont de même signe.
Supposons que $x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$. On a alors $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
D'après la définition 1.2, la fonction$f$ est donc strictement croissante.
Si $x_1 - x_2 > 0$, il suffit d'intervertir les noms des deux variables dans la définition :
$x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Théorème 1.1 Les variations de la fonction polynôme du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ dépendent du signe de a et de la valeur de α.

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	β	↗	$+\infty$

f admet un minimum atteint pour $x = \alpha$

Cas où $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	β	↘	$-\infty$

f admet un maximum atteint pour $x = \alpha$

DÉMONSTRATION Le taux de variation entre x_1 et x_2 d'un trinôme f défini par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est :

$$\tau = \frac{a(x_1-\alpha)^2 + \beta - [a(x_2-\alpha)^2+\beta]}{x_1-x_2} = \frac{a(x_1-\alpha)^2 - a(x_2-\alpha)^2}{x_1-x_2} = \frac{a[(x_1-\alpha)^2 - (x_2-\alpha)^2]}{x_1-x_2}$$

Continuons à factoriser le numérateur en reconnaissant une différence de carrés :

$$\tau = \frac{a[(x_1-\alpha-x_2+\alpha)(x_1-\alpha+x_2-\alpha)]}{x_1-x_2} = \frac{a[(x_1-x_2)(x_1-\alpha+x_2-\alpha)]}{x_1-x_2} = a(x_1-\alpha+x_2-\alpha)$$

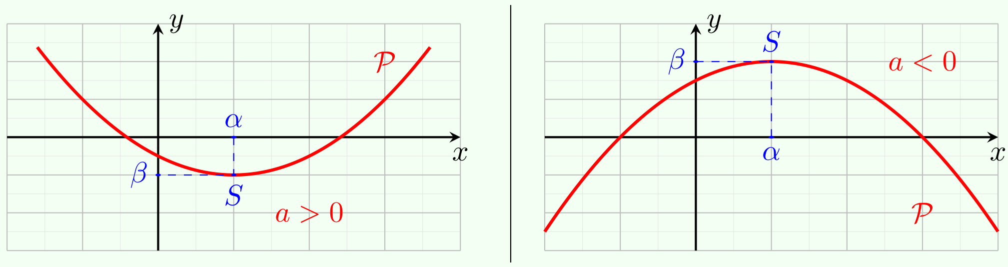
Le signe de ce produit dépend de a et du facteur $(x_1-\alpha+x_2-\alpha)$. Or, si l'on prend soin de choisir x_1 et x_2 dans un même intervalle I de la forme $[\alpha; +\infty[$ ou $]-\infty; \alpha]$, ce facteur ne change pas de signe. Par exemple, $x_1, x_2 \in [\alpha; +\infty[\Rightarrow x_1 - \alpha \geqslant 0$ et $x_2 - \alpha \geqslant 0 \Rightarrow x_1 - \alpha + x_2 - \alpha \geqslant 0$. En réalité, comme x_1 et x_2 sont distincts, supposons que $x_1 < x_2$, seul x_1 peut s'annuler et $x_1 - \alpha + x_2 - \alpha > 0$. Le produit des deux facteurs aura, dans ce cas, le signe de a.
Finalement, dans le cas où $a > 0$, d'après la propriété 1.2, f est croissante sur $[\alpha; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; \alpha]$. Elle passe donc par un minimum quand $x = \alpha$, ce minimum est $f(\alpha)$ identifié dans la propriété 1.1 comme la constante β. Dans le cas où $a < 0$, le signe de τ est inversé et, par conséquent, les sens de variations sont inversés aussi. Le trinôme est d'abord croissant, puis décroissant. Il passe donc par un maximum de coordonnées $(\alpha; \beta)$.

EXEMPLE 3 – Soit $g : x \mapsto -3x^2 + 2x - 1$. g est un polynôme du second degré, avec $a = -3 < 0$, $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-6} = \frac{1}{3}$ et $g(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}$. D'après le théorème 1.1, on obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

d. Représentation graphique

THÉORÈME 1.2 (ALLURE DE LA COURBE) La représentation graphique de la fonction polynôme du second degré f de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une parabole $\mathcal{P}$, de sommet $S(\alpha; \beta)$, et a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

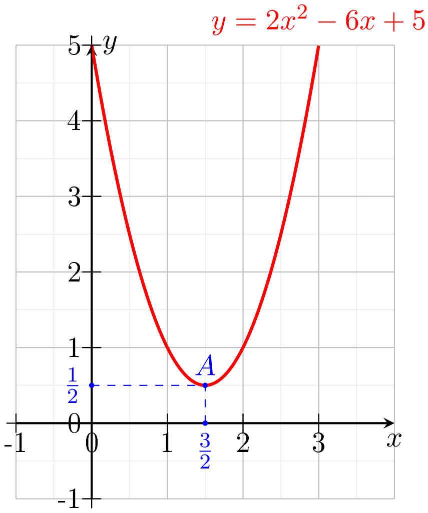


DÉMONSTRATION La droite d'équation $x = \alpha$ est la droite verticale passant par l'extremum. Prenons deux points situés de part et d'autre de cette droite. Leurs abscisses s'écrivant $x_1 = \alpha + \lambda$ et $x_2 = \alpha - \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que ces deux points ont la même image pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
$f(x_1) = a(x_1-\alpha)^2 + \beta = a(\alpha+\lambda-\alpha)^2 + \beta = a\lambda^2 + \beta$

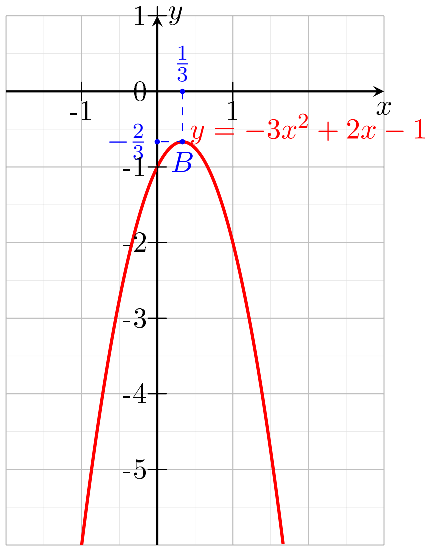
$f(x_2) = a(x_2 - \alpha)^2 + \beta = a(\alpha - \lambda - \alpha)^2 + \beta = a(-\lambda)^2 + \beta = a\lambda^2 + \beta = f(x_1)$
En effet, du fait de la parité de la fonction carré, on a $(-\lambda)^2 = \lambda^2$.

Exemple 4 – Représentons graphiquement les fonctions f et g des deux exemples précédents :

$f : x \mapsto 2x^2 - 6x + 5$. On a une fonction polynôme du second degré avec $a = 2 > 0$. D'après le théorème 1.2, on obtiendra une parabole « tournée vers le haut ». D'après la propriété 1.1, la forme canonique de f est $f(x) = 2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}$, donc le sommet de la parabole est le point $A(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$.

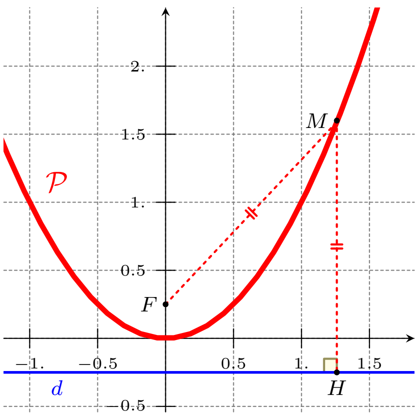


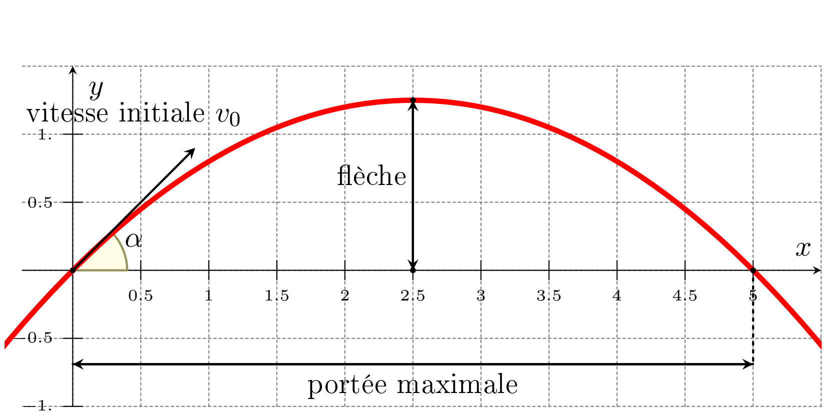
$g : x \mapsto -3x^2 + 2x - 1$. On a une fonction polynôme du second degré avec $a = -3 < 0$. D'après le théorème 1.2, on obtiendra une parabole « tournée vers le bas ». D'après la propriété 1.1, la forme canonique de g est $g(x) = -3(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{2}{3}$, donc le sommet de la parabole est le point $B(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3})$.



Remarques :

- Les paraboles font partie de la famille des coniques, de même que les ellipses et les hyperboles. Ce type de courbe s'obtient par intersection d'un plan avec un cône de révolution lorsque le plan est parallèle à une des génératrices du cône. On définit aussi la parabole $\mathcal{P}$ comme l'ensemble des points M équidistants d'un point (le foyer F) et d'une droite (la directrice d), voir l'illustration pour la fonction carrée.
- Un projectile, soumis à la seule force de gravité, suit dans sa chute une trajectoire parabolique. La parabole est « tournée vers le bas » - on s'en doute - son équation étant $y = y_0 + x \tan\alpha - \frac{g}{2{v_0}^2 \cos\alpha^2}x^2$, où y_0 est l'ordonnée du point de lancement, v_0 la vitesse initiale, α l'angle de tir que fait initialement la trajectoire avec l'horizontale et g l'accélération de la pesanteur (une constante physique qui vaut environ $9,81 ms^{-2}$). Sur notre illustration $\alpha = 45^\circ$ (la portée est alors maximale) et $y_0 = 0$.





2. L'équation du second degré

a. Résolution de l'équation

THÉORÈME 1.3 (SOLUTIONS DE L'ÉQUATION) Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$.
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, que l'on appellera discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
Le nombre de solutions de cette équation dépend du signe de Δ :

- $\Delta > 0$: l'équation admet deux solutions distinctes, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0$: l'équation admet une solution unique, $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$: l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$.
D'après la démonstration de la propriété 1.1 (Étape 4), cette équation est équivalente à :

$$a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = 0$$

Selon le signe de Δ, trois cas peuvent se produire :
<u>1^{er} cas : $\Delta > 0$</u>

L'expression entre crochets est une différence de carrés (Δ est le carré de $\sqrt{\Delta}$) qui se factorise :

$$a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = 0 \iff a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2] = 0 \iff a(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) = 0$$

$$\iff a(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a})(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}) = 0 \iff a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Comme $a \neq 0$, il y a donc bien deux solutions à cette équation. Ce sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2e cas : $\Delta = 0$

L'équation devient $a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$, et admet une solution unique : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
NB : ce 2e cas est un cas particulier du 1er pour lequel $x_1 = x_2$

3e cas : $\Delta < 0$

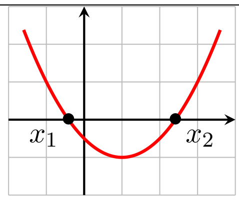
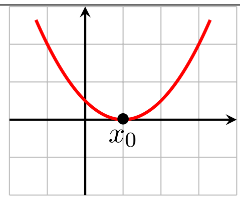
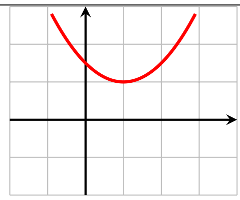
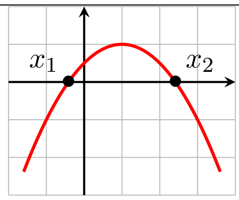
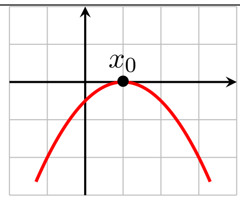
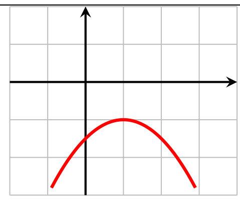
Le discriminant Δ n'est pas le carré d'un réel. Comme $a \neq 0$, l'équation revient à :

$$\underbrace{(x + \frac{b}{2a})^2}_{\text{positif}} = \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{\text{négatif}}$$

Le membre de gauche (un carré) est positif tandis que celui de droite est strictement négatif ($4a^2 > 0$ et $\Delta < 0$). L'égalité étant toujours fausse pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation n'a pas de solution (elle en a dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des complexes).

Remarque :
Les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation $f(x) = 0$, quand elles existent, sont appelées « racines » de la fonction f. Dans le cas $\Delta = 0$, les deux solutions n'en font qu'une (on l'a notée x_0). Cette unique solution annulant deux facteurs du 1er degré (l'équation s'écrit $a(x + \frac{b}{2a})(x + \frac{b}{2a}) = 0$), on dit que c'est une racine « double ». Cela permet d'affirmer que, dans $\mathbb{R}$, une équation du 2e degré admet toujours deux racines, éventuellement doubles, lorsque $\Delta \geqslant 0$. Cela préfigure un théorème, valable dans $\mathbb{C}$, qui est dû à Carl Friedrich Gauss (1777-1855), selon lequel une équation polynomiale de degré n admet toujours n racines, éventuellement multiples. L'équation $x^3 = 0$, par exemple, admet une racine triple $x = 0$. Par contre, l'équation $x^3 = 8$, qui s'écrit $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$, admet une racine réelle $x = 2$ et deux racines complexes (le trinôme $x^2 + 2x + 4$ n'a pas de racine réelle car son discriminant $\Delta = -12$ est négatif).

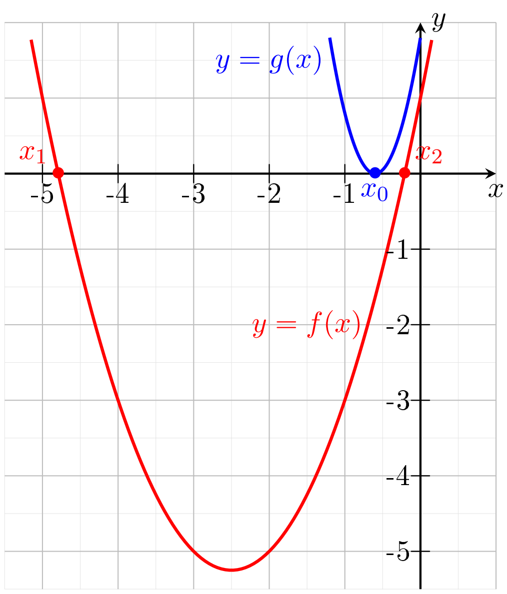
<u>Interprétation graphique</u> :
Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses x_1 et x_2 (ou x_0 s'il n'y en a qu'un) des points d'intersection - quand ils existent - de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ et de l'axe des abscisses.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

<u>EXEMPLE</u> 5 – Solutions de l'équation $x^2 + 5x + 1 = 0$
Il s'agit d'une équation du second degré, avec $a = 1$, $b = 5$ et $c = 1$.
On a $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 1 = 25 - 4 = 21$. On est dans le cas $\Delta > 0$.
L'équation admet donc deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \approx -4,791$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \approx -0,209$.
$S = \{\frac{-5-\sqrt{21}}{2}; \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\}$.

<u>EXEMPLE</u> 6 – Racines de la fonction $g : x \mapsto 5x^2 + 6x + 1,8$
Il s'agit de déterminer les solutions de l'équation du second degré $5x^2 + 6x + 1,8 = 0$, avec $a = 5$, $b = 6$ et $c = 1,8$. On a $\Delta = 6^2 - 4 \times 5 \times 1,8 = 36 - 36 = 0$, on est dans le cas $\Delta = 0$.
L'équation admet une seule solution $x_0 = \frac{-6}{2\times5} = \frac{-3}{5} = -0,6$.
La fonction g a une racine unique qui est $-0,6$.

<u>EXEMPLE</u> 7 – Intersection de deux paraboles : pour quelles valeurs de x les expressions $f(x) = x^2 + 5x + 1$ et $g(x) = 5x^2 + 6x + 1,8$ sont-elles égales ?
Il s'agit de résoudre l'équation $x^2 + 5x + 1 = 5x^2 + 6x + 1,8$, qui se réduit à $4x^2 + x + 0,8 = 0$. Pour cette équation du second degré, on a $a = 4$, $b = 1$, $c = 0,8$ et $\Delta = 1^2 - 4 \times 4 \times 0,8 = -11,8$. Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$. Les deux paraboles ne se croisent pas.



La courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses en deux points (les coordonées de x_1 et x_2 sont calculées dans l'exemple 5) tandis que celle de la fonction g ne la touche qu'en un point (d'abscisse x_0=-0,6 comme on l'a vu dans l'exemple 6). Les deux courbes ne se coupent pas (cela n'est pas évident sur la portion des courbes tracées).

b. Signe du trinôme

PROPRIÉTÉ 1.3 (FACTORISATION DU TRINÔME) Soient a, b, c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ se factorise, ou pas, selon le signe de Δ :
- Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où x_0 est la racine double du trinôme.
- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de forme factorisée du trinôme dans $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION Cette propriété est une conséquence du théorème 1.3.

EXEMPLE 8 – Factorisons le trinôme $3x^2 - 5x + 2$. On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1$, donc $\Delta > 0$ et le polynôme a deux racines réelles distinctes, $x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = 1$.
La factorisation découle alors de la propriété 1.3 : $3x^2 - 5x + 2 = 3(x - \frac{2}{3})(x - 1)$.

THÉORÈME 1.4 (ÉTUDE DU SIGNE) Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. Le signe de ce polynôme dépend du signe de Δ et du signe de a.
- Si $\Delta > 0$, le polynôme est du signe de a « à l'extérieur des racines », et du signe de $-a$ « à l'intérieur des racines ».
- Si $\Delta = 0$, le polynôme est toujours du signe de a. Il s'annule sans changer de signe en son unique racine.
- Si $\Delta < 0$, le polynôme est toujours du signe de a.

DÉMONSTRATION La propriété 1.3 indique que le trinôme $ax^2 + bx + c$ se factorise, ou pas, selon le signe du discriminant. Le signe de ce trinôme dépend donc de l'existence d'une forme factorisée et, par voie de conséquence, du signe de Δ.
- $\Delta > 0$: le trinôme se factorise en $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les deux racines du trinôme. L'étude du signe de ce produit découle de la règle des signes. Supposons, quitte à intervertir x_1 et x_2, que $x_1 < x_2$. On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $(x - x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(x - x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- $\Delta = 0$: le trinôme se factorise en $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où x_0 est la racine double du trinôme. Comme un carré est toujours positif ou nul, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a, mais s'annule pour $x = x_0$ (sans changer de signe).
- $\Delta < 0$: avec les notations précédentes, on a : $ax^2 + bx + c = a[\underbrace{(x + \frac{b}{2a})^2}_{\text{positif}} + \underbrace{\frac{-\Delta}{4a^2}}_{\text{positif}}]$.
  L'expression entre crochets étant une somme positive, le trinôme est toujours du signe de a.

EXEMPLE 9 – Résoudre l'inéquation $3x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$: le premier membre de cette inégalité est un trinôme pour lequel $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$ et donc $\Delta = -8 < 0$. Le trinôme ne s'annule jamais et conserve le signe de a. Comme $a > 0$, l'inéquation est toujours vérifiée. $S = \mathbb{R}$.

Exemple 10 – Étude du signe du polynôme $-x^2+4x-1$
C'est un trinôme pour lequel $a=-1$, $b=4$, $c=-1$ et donc $\Delta=12>0$. Ce trinôme admet donc deux racines $x_1=2-\sqrt{3}$ et $x_2=2+\sqrt{3}$. D'après la propriété 1.3, il est du signe de a à « l'extérieur des racines » et du signe opposé à a à « l'intérieur des racines ». Comme $a<0$, le trinôme est positif pour $x\in[x_1;x_2]$ et négatif pour $x\in]-\infty;x_1]\cup]x_2;+\infty]$.
Le tableau de signes ci-dessous résume cela.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de $-x^2+4x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les différents cas :
Le trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$ est du signe opposé de a à l'intérieur des racines (cela n'arrive que si $\Delta>0$) ; dans tous les autres cas, il est du signe de a ou il est nul. Selon les signes de a et de $\Delta>0$, il y a donc six tableaux de signes différents :

$\Delta>0$, $a>0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Delta>0$, $a<0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Delta=0$, $a>0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

$\Delta=0$, $a<0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

$\Delta<0$, $a>0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

$\Delta<0$, $a<0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

c. Somme et produit des racines

Propriété 1.4 (somme et produit) Lorqu'un trinôme ax^2+bx+c admet deux racines x_1 et x_2, soit lorsque $\Delta>0$, on a :

$$\text{somme : } x_1+x_2=\frac{-b}{a} \qquad \text{produit : } x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Démonstration Les racines s'écrivent, quand elles existent, $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Leur somme S vaut $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$, et leur produit P vaut $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$

Remarques :

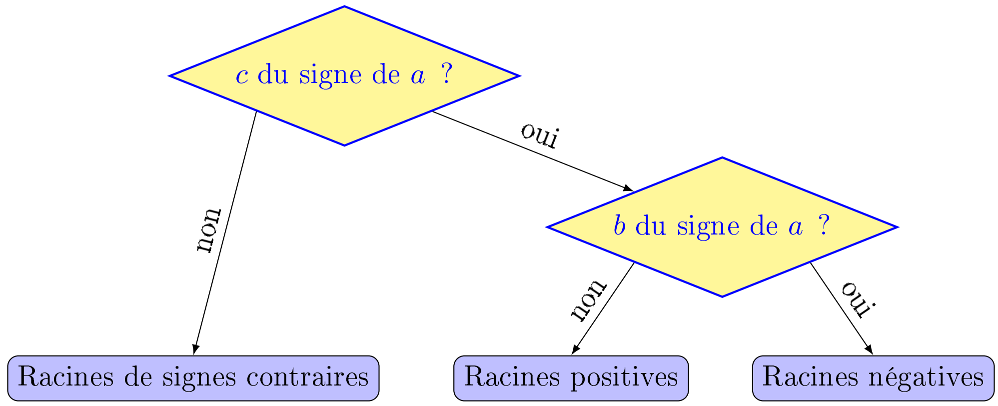
- Cette propriété s'applique également dans le cas d'une racine double (on la compte alors deux fois). Il suffit de remplacer Δ par 0 dans la démonstration précédente. Le trinôme $4x^2+4x+1$, par exemple, a une racine double qui est $\frac{-1}{2}$ (sa forme factorisée est $(2x+1)^2$). La somme des racines est alors le double de $\frac{-1}{2}$, soit -1 et $\frac{-b}{a}=\frac{-4}{4}=-1$. Le produit des racines est alors le carré de $\frac{-1}{2}$, soit $\frac{1}{4}$ et $\frac{c}{a}=\frac{1}{4}$.
- Cette propriété permet, connaissant une des racines, de déterminer facilement l'autre (sans calculer Δ). Le trinôme $9x^2-5x-4$, par exemple, a une racine évidente qui est 1 puisqu'il s'annule pour $x=1$ $(9\times1^1-5\times1-4=9-5-4=0)$. L'autre racine est donnée par le produit (car $x_1x_2=x_2$ dans le cas où $x_1=1$). C'est $\frac{c}{a}=\frac{-4}{9}$.

Propriété 1.5 (équation connaissant S et P) Lorsqu'on connait la somme S et le produit P de deux nombres, alors ces deux nombres sont les solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$

Démonstration Les racines d'un trinôme se notent, quand elles existent, x_1 et x_2. Écrivons l'équation qui traduit le fait que x_1 et x_2 sont solutions d'une équation polynomiale de degré 2 : $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Développons et réduisons le membre de gauche : $x^2 - x_1x - xx_2 + x_1x_2 = 0$, soit $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$. Remplaçons $x_1 + x_2$ par S et x_1x_2 par P. On obtient l'équation de l'énoncé $x^2 - Sx + P = 0$.
On aurait aussi pu appliquer la propriété 1.4 avec $a = 1$: la somme des racines de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ est S (car $\frac{-b}{a} = \frac{-b}{1} = -b = S$) et leur produit est P (car $\frac{c}{a} = \frac{c}{1} = c = P$).

Exemple 11 – Existe-t-il deux nombres a et b tels que $a + b = 100$ et $ab = 25$?
D'après la propriété 1.5, ces nombres, s'ils existent, sont solutions de l'équation $x^2 - 100x + 25 = 0$. Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 100^2 - 4 \times 25 = 10000 - 100 = 9900 > 0$. Il y a donc deux solutions $a = \frac{100-\sqrt{9900}}{2}$ et $b = \frac{100+\sqrt{9900}}{2}$, soit $a = 50 - 15\sqrt{11} \approx 99,75$ et $b = 50 + 15\sqrt{11} \approx 0,25$.

Étude du signe des racines :
Le produit des racines est du signe de $\frac{c}{a}$, mais aussi de ac. Si $ac > 0$ (c est du signe de a), alors les racines ont même signe ; celui-ci est donné par le signe de la somme $\frac{-b}{a}$, qui est aussi celui de $-ab$. Quand $ac > 0$, si $ab > 0$ (b est du signe de a), alors les racines sont négatives, sinon elles sont positives. Ces considérations conduisent à l'algorithme suivant (on se place dans l'hypothèse de l'existence de racines, donc d'un $\Delta > 0$) :



On peut observer qu'il y a huit configurations différentes selon les signes de a, b et c. Dans la moitié de ces configurations, les racines ont des signes différents. Les racines sont positives si $a > 0$, $b < 0$ et $c > 0$ ou $a < 0$, $b > 0$ et $c < 0$ et elles sont négatives si $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$ ou $a < 0$, $b < 0$ et $c < 0$.

d. Utilisation de la calculatrice ou de l'ordinateur

Graphique :

On peut contrôler les résultats précédents (existence de racines, signe du trinôme) graphiquement avec la calculatrice en mode graphique. Il faut, tout d'abord, entrer l'expression de la courbe dans le module de saisie (par exemple $Y1 = 2x^2 + 3x - 5$). Tracer la courbe en utilisant le bouton approprié (GRAPH ou autre). Si le résultat n'est pas satisfaisant, il faut sans doute modifier les paramètres de la fenêtre d'affichage (généralement Xmin, Xmax, Ymin, Ymax, se référer au manuel du constructeur).
Pour estimer les abscisses des points où la courbe représentative de la fonction coupe l'axe (Ox), on aura peut-être aussi besoin de régler la graduation de l'axe (STEP ou autre). Cette méthode est rapide et efficace mais attention, elle ne donne la plupart du temps que des **résultats approchés**.
Sur un ordinateur, on utilisera un logiciel tel que GeoGebra : l'équation est entrée dans la ligne de commande (par exemple $y = 2x^2 + 3x - 5$). Les points d'intersection créés (ils sont nommés A et B), on peut lire leur abscisse dans la « fenêtre algèbre » (dans notre exemple, on lira $x_A = -2.5$ et $x_B = 1$).

Programmation :

Programmons la calculatrice pour qu'elle affiche le discriminant et les éventuelles racines (approchées si le nombre a trop de décimales pour être affiché en entier – s'il est irrationnel en particulier) d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$.

Notez que la plupart des calculatrices de Lycée disposent maintenant d'un mode de résolution des équations qui donne ces racines. Cette programmation n'a donc qu'un intérêt limité.

L'algorithme simple proposé se traduit en programme, selon le langage informatique utilisé (Basic pour Casio ou TI, Python pour Numworks). Le Python d'un ordinateur et celui d'une Numworks étant assez proches, on ne donne que la version calculatrice (copiée du Workshop de Numworks).

Algorithme

Lire a, b et c
$d = b^2 - 4ac$
Afficher d
Si $d < 0$ alors afficher "PAS DE SOLUTION"
Sinon
  Si $d = 0$ alors afficher $-b/(2a)$
  Sinon afficher $(-b - \sqrt{d})/(2a)$ puis afficher $(-b + \sqrt{d})/(2a)$
  Fin du Si
Fin du Si

Programme en Python pour une Numworks

```
from math import *
def racines(a,b,c):
  delta = b*b-4*a*c
  print("delta=",delta)
  if delta == 0:
    print("x0=",-b/(2*a))
  elif delta > 0:
    print("x1=",(-b-sqrt(delta))/(2*a))
    print("x2=",(-b+sqrt(delta))/(2*a))
  else:
    print("pas de solution reelle")
```

```
deg                PYTHON
>>> from second_degre import ›
>>> racines(1,-100,25)
delta= 9900
x1= 0.2506281446690011
x2= 99.7493718553101
>>> racines(2,3,-5)
delta= 49
x1= -2.5
x2= 1.0
>>> racines(1,1,1)
delta= -3
pas de solution reelle
>>> |
```

Pour une Casio

```
"A"?→ A
"B"?→ B
"C"?→ C
B^2-4AC→ D
D ◢
If D<0
Then "PAS DE SOLUTION"
Else
If D=0
Then -B/(2A) ◢
Else (-B-√D)/(2 A) ◢
(-B+√D)/(2A) ◢
EndIf
EndIf
```

Pour une TI

```
Prompt A,B,C
B^2-4AC→D
Disp D
If D<0
Then
Disp "PAS DE SOLUTION"
Else
If D=0
Then
Disp -B/(2A)
Else
Disp (-B-√D)/(2A)
Disp (-B+√D)/(2A)
End
End
```

3. Les polynômes

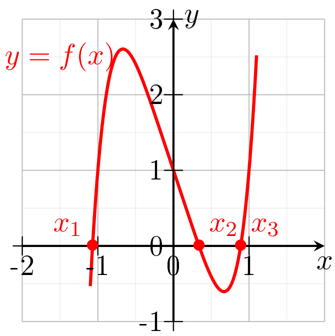
a. Définition

DÉFINITION 1.3 (POLYNÔME) On appelle polynôme de degré n toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, où les nombres $a_k, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ sont des réels tels que $a_n \neq 0$. Les nombres a_k sont les coefficients d'ordre k, le coefficient d'ordre n (le seul qui ne doit pas être nul) est appelé coefficient dominant.

Remarques :

- Le terme a_kx^k d'une expression polynomiale est un monôme de degré k. Ceci explique les termes : polynôme pour une somme de plusieurs monômes et trinôme pour une somme de trois monômes, donc pour un polynôme de degré 2. En toute rigueur, être une somme de trois monômes n'est pas équivalent à être un polynôme de degré 2. Le polynôme $5x^4 - 3x^2 + 1$ est un « trinôme » puisqu'il comporte trois monômes, mais ce n'est pas un polynôme de degré 2. L'expression correcte pour désigner un polynôme de degré 2 est trinôme de degré 2, mais l'usage dans ce cas, s'il n'y a pas d'ambiguïté, est de parler de trinôme, sans précision du degré.
- Les fonctions affines sont des polynômes de degré 1 et les fonctions constantes (non nulle) des polynômes de degré 0. Il ne vient à personne l'idée de désigner un polynôme de degré 1 de binôme (trop ambigu), ni même de binôme de degré 1 (trop compliqué). La fonction nulle $x \mapsto 0$ n'est pas un polynôme selon la définition 1.3 puisque le coefficient de degré 0 est alors nul. Cependant, on l'admet généralement sous l'appellation de « polynôme nul » et on lui attribue le degré arbitraire $-\infty$

EXEMPLE 12 – $f : x \longmapsto 3x^5 - 3x + 1$ est un polynôme de degré 5. Son coefficient dominant est 3; son coefficient d'ordre 0 (on dit aussi « terme constant ») est 1; le coefficient d'ordre 1 est -3; les autres coefficients sont nuls. On peut calculer quelques images par f, comme $f(0) = 1$ (celui-là est facile à calculer), $f(1) = 3-3+1 = 1$ ou $f(-1) = -3+3+1 = 1$. On peut aussi tracer la courbe de f (une portion) avec la calculatrice, constater que le polynôme $3x^5 - 3x + 1$ a trois racines réelles $x_1 \approx -1,07014$, $x_2 \approx 0,33773$ et $x_3 \approx 0,88918$ et même donner le signe du polynôme en fonction de ses racines : $f(x) \geqslant 0 \iff x \in [x_1; x_2] \cup [x_3; +\infty]$.



Limites de cette étude :

Pour l'étude des variations de ces fonctions, voir le chapitre sur la dérivée.
La détermination des racines d'un polynôme de degré supérieur à 2 n'est possible que dans certains cas que nous allons envisager ici. Il existe bien des formules pour les degrés 3 et 4, mais elles sont compliquées et largement en dehors du programme. Si on peut se contenter de valeurs approchées, la méthode de dichotomie étudiée en seconde fait très bien l'affaire. La calculatrice sait généralement résoudre ces équations de façon approchée.

b. Propriétés

THÉORÈME 1.5 (POLYNÔMES ÉGAUX) Voici trois propositions vraies et équivalentes :

(i) Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont même degré n et que les coefficients d'ordre $k \leqslant n$ sont égaux deux à deux.

(ii) La fonction $f : x \mapsto a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ est la fonction nulle si et seulement si les coefficients $a_k, k \leqslant n$ sont tous nuls.

(iii) L'écriture du polynôme $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ est unique.

DÉMONSTRATION Démontrons la partie directe de (ii) par récurrence sur le degré n.
La proposition est évidemment vraie pour $n = 0$. Il est facile de montrer qu'elle est vraie pour $n = 1$: Si, $\forall x \in \mathbb{R}, a_1 x + a_0 = 0$, alors ce doit être vrai pour $x = 0$, ce qui s'écrit $a_1 \times 0 + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$. Donc, on a $\forall x \in \mathbb{R}, a_1 x = 0$. Comme ce doit être vrai pour $x = 1$, on a $a_1 \times 1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$.
Supposons que la propriété (ii) soit vraie pour n. Montrons qu'alors elle est vraie pour $n+1$.
Considérons pour cela la fonction g :

$$g(x) = b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \text{ avec } b_{n+1} \neq 0$$

Cette fonction est nulle ssi $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$. Pour $x = 0$, cela conduit à $a_0 = 0$ (comme au degré 1).
On peut alors mettre x en facteur : $g(x) = x(b_{n+1}x^n + b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1)$. Mais comme $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$, pour $x \neq 0$ il faut bien que l'expression $h(x) = b_{n+1}x^n + b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1$ soit nulle. Or, par hypothèse, une fonction polynomiale de degré n telle que h , si elle est toujours nulle, ce qui est le cas, doit avoir tous ses coefficients nuls. On en déduit que les b_k coefficients de g sont tous nuls, ce qui achève la récurrence (je passe sur le léger problème en $x = 0$ qui se résout par un argument de continuité des polynômes).
Pour la réciproque de (ii), c'est une évidence : si tous les coefficients sont nuls, alors la fonction est nulle.
Montrons que (i) et (ii) sont équivalentes. L'égalité entre deux expressions polynomiales s'écrit :

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

Dans cette égalité, nous ne supposons pas que les polynômes sont de degré n, certains coefficients a_k ou b_k peuvent être nuls. En faisant tout passer dans le même membre et en réduisant, on obtient :

$$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$$

Nous avons là une fonction toujours nulle qui, d'après (ii), doit avoir tous ses coefficients nuls. Par conséquent : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, a_k - b_k = 0 \Leftrightarrow a_k = b_k$. Les coefficients des deux fonctions sont égaux, le dernier coefficient non nul est le coefficient dominant qui indique le degré de ces polynômes.
Montrons que (i) et (iii) sont équivalentes. S'il existait deux expressions polynomiales distinctes mais égales en tout point de $\mathbb{R}$, on serait dans le cas de la propriété (i). Mais, on l'a vu, cela entraîne l'égalité de tous les coefficients. L'hypothèse est donc à rejeter, l'écriture polynomiale est unique.

EXEMPLE 13 – Déterminons les valeurs de a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{-3x^2-2x+3}{x^2+1} = a + \frac{bx+c}{x^2+1}$.
Comme $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ l'équation est équivalente à
$\frac{-3x^2-2x+3}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)+bx+c}{x^2+1} \Longleftrightarrow -3x^2 - 2x + 3 = a(x^2+1) + bx + c \Longleftrightarrow -3x^2 - 2x + 3 = ax^2 + bx + a + c$
D'après le théorème 1.5, les coefficients de même rang de ces deux trinômes doivent être égaux.

$$\begin{cases} -3 = a \\ -2 = b \\ 3 = a + c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \\ c = 3 - a = 6 \end{cases}$$

Notations :
- Le degré d'un polynôme P sera noté $deg(P)$.
- La notation employée pour l'écriture développée d'un polynôme utilise un même motif $a_k x^k$, répété pour k allant de 1 à $n = \deg(P)$. On peut alors faire usage d'une notation synthétique où la lettre Σ (sigma) signifie qu'on fait une somme (k est alors une variable dite « muette ») :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Propriété 1.6 (somme et produit) Soient P et Q deux polynômes et λ un réel non nul :
- Le produit λP, défini par $\lambda \times P(x)$, est un polynôme de degré égal à celui de P.
- Le produit PQ, défini par $P(x) \times Q(x)$, est un polynôme de degré égal à la somme des degrés de P et de Q, soit $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- La somme $P + Q$, définie par $P(x)+Q(x)$, est un polynôme de degré inférieur ou égal au plus grand des degrés de P et de Q, soit $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.

Démonstration Notons $n = \deg(P)$, $m = \deg(Q)$, a_k les coefficients de P et b_k ceux de Q.
Le produit par un réel $\lambda \neq 0$ ne modifie évidemment pas le degré, soit $\deg(\lambda P) = \deg(P)$, car :

$$\lambda \times P(x) = \lambda \times \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) x^k \text{ et } \lambda a_n \neq 0 \text{ car } \lambda \neq 0 \text{ et } a_n \neq 0$$

Le produit de deux polynômes est plus difficile à établir puisque chacun des termes de l'un est multiplié par ceux de l'autre. Dans l'écriture ci-dessous nous n'avons écrit que le début et la fin de ce développement. Le terme de plus haut degré a pour coefficient $a_n \times b_m \neq 0$ et pour degré $m + n$. Le terme constant est $a_0 \times b_0$.

$$P(x) \times Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \times \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = a_n x^n \times b_m x^m + \cdots + a_0 \times b_0 = (a_n \times b_m) x^{m+n} + \cdots + a_0 \times b_0$$

Pour la somme, deux cas se présentent :
(i) Les degrés de P et Q sont égaux ($n = m$). Dans ce cas, le terme de plus haut degré « potentiel » est $(a_n + b_n)x^n$. Si $a_n + b_n \neq 0$, alors le polynôme $P + Q$ a pour degré n, mais si $a_n + b_n = 0$ alors le degré de $P + Q$ est strictement inférieur à n.

$$P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$$

(ii) Les degrés de P et Q ne sont pas égaux. Supposons, quitte à intervertir P et Q, que $n > m$.
Dans ce cas, le degré de $P + Q$ est n, c'est-à-dire bien $\max(\deg(P), \deg(Q))$.

Exemple 14 – $P(x) = x^2 - x + 3$, $Q(x) = -2x^3 + x + 5$. Quels sont les degrés de $P + Q$ et de PQ ?
D'après la propriété 1.6, le degré de $P + Q$ est 3 car $\deg(P) = 2$, $\deg(Q) = 3 > 2$.
On peut donner, pour vérification, le polynôme somme : $(P + Q)(x) = -2x^3 + x^2 + 8$.
Pour le produit, d'après la propriété 1.6, le degré de PQ est $3 + 2 = 5$. On peut, aussi pour vérifier, développer ce produit. Ci-dessous, nous avons écrit directement la réduction. Pour cela, il faut déterminer les coefficients de chacun des monômes, dans l'ordre des degrés. Le monôme de degré 4, par exemple, ne peut venir que du produit de termes de degrés 0 et 4 (il n'y en a pas), 1 et 3 (il y a $-x$ et $-2x^3$) ou 2 et 2 (il n'y en a pas).

$$(PQ)(x) = -2x^5 + 2x^4 + (1 - 6)x^3 + (5 - 1)x^2 + (-5 + 3)x + 15 = -2x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 15$$

Comme on fait facilement des erreurs dans un tel développement, il peut être judicieux de vérifier avec un logiciel de calcul formel comme GeoGebra : Entrer dans le module de calcul formel (Affichage>Calcul formel), taper l'expression à développer et cliquer sur le bouton « Développer » qui se présente comme ça :(()). Le résultat est immédiat (et ne comporte pas d'erreur).

c. Factorisation

Définition 1.4 (racine) Soit P un polynôme et a un réel. Le nombre a est une racine de P (on dit aussi un « zéro » de P) si et seulement si $P(a) = 0$.

Exemple 15 – Montrer que le polynôme $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ admet pour racines 1, 2 et 3.
$f(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ donc 1 est racine de f.
$f(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$ donc 2 est racine de f.
$f(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$ donc 3 est racine de f.

Exemple 16 – Le polynôme $g(x) = 5x^4 + 6x^2 + 3$ n'admet pas de racine, car $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geqslant 3 > 0$.

Propriété 1.7 (factorisation par $(x - a)$) Un polynôme P admet un réel a comme racine si et seulement si on peut écrire $P(x)$ sous la forme $(x - a)Q(x)$, où Q est un polynôme de degré $\deg(P) - 1$.

Démonstration Dans le sens réciproque c'est évident : si $P(x)$ peut s'écrire sous la forme $(x - a)Q(x)$ alors $P(a) = (a - a)Q(a) = 0$, donc a est bien une racine de P.
Pour prouver le sens direct, commençons par établir l'identité $(\star)$, valable pour tout entier n :

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \qquad (\star)$$

Le développement terme à terme du membre de droite montre que les monômes de même degré s'éliminent, sauf le premier et le dernier, ce qui amène le résultat. En effet, on a :

$$(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}) = x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+\cdots+a^{n-1}x-[ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+\cdots+a^{n-1}x+a^n]$$

Montrons maintenant, que $P(x) - P(a)$ se factorise par $x - a$. Dans la suite d'égalités ci-dessous, la dernière vient du fait que $a_0(x^0 - a^0) = 0 \times a_0 = 0$:

$$P(x) - P(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k a^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - a^k) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x^k - a^k)$$

Or, l'identité $(\star)$ établit que chacun des termes $a_k(x^k - a^k)$ peut se factoriser par $(x - a)$, du fait du facteur $x^k - a^k$ qui peut s'écrire $(x - a)Q_k(x)$, où $Q_k(x)$ est un polynôme de degré $k - 1$. La somme de tous ces termes est donc factorisable par $(x - a)$ (l'autre facteur est la somme des polynômes Q_k).

Exemple 17 – Montrer que polynôme $h(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 4$ admet 4 pour racine. En déduire une factorisation de h, puis montrer que 4 est la seule racine de h.
$h(4) = 64 - 48 - 12 - 4 = 0$ donc 4 est bien une racine de h.
D'après la propriété 1.7, la factorisation qui s'en déduit est $h(x) = (x - 4)(ax^2 + bx + c)$, où a, b et c sont des coefficients à déterminer.
Développons ce produit : $h(x) = ax^3 + (-4a + b)x^2 + (-4b + c)x - 4c$. Selon le théorème 1.5, on peut alors identifier les coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ -4a + b = -3 \\ -4b + c = -3 \\ -4c = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 4a - 3 = 4 - 3 = 1 \\ c = 4b - 3 = 4 - 3 = 1 \end{cases}$$

La dernière égalité permet de vérifier les résultats : $c = -4 \div (-4) = 1$. Il y a toujours une égalité de plus que de coefficients à déterminer du fait qu'un polynôme de degré n possède $n + 1$ coefficients.
Finalement, on a $h(x) = (x - 4)(x^2 + x + 1)$.
Le facteur du second degré que l'on vient de trouver n'a pas de racine car son discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Le polynôme h n'a donc qu'une seule racine réelle.

MÉTHODE (RECHERCHE D'UNE RACINE ÉVIDENTE)

➲ La méthode des « coefficients indéterminés » :

Les exemples 13 et 17 appliquent une méthode qui découle du théorème 1.5. Cette méthode s'applique partout où deux polynômes sont égaux. Elle sera donc particulièrement utile pour factoriser un polynôme du moment qu'on peut en identifier certaine(s) racine(s). Dans ce but, il peut être utile de calculer les images des petits nombres entiers 0, 1, -1, 2, -2,. . .. Si une de ces images est nulle, le nombre est une « racine évidente » et une factorisation s'en déduit.
Le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ a t-il des racines évidentes ?
$P(0) = 2 \neq 0$, $P(1) = 1 - 1 - 5 + 2 = -3 \neq 0$, $P(-1) = -1 - 1 + 5 + 2 = 5 \neq 0$,
$P(2) = 8 - 4 - 10 + 2 = -4 \neq 0$, $P(-2) = -8 - 4 + 10 + 2 = 0$!
Oui, -2 est une racine de P. On en déduit que $P(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$.
Sachant que la factorisation est possible, on peut se dispenser d'écrire le système avec ses 4 équations. Par identification des termes de plus haut degré, on trouve directement $a = 1$. De même, par identification des termes constants, on trouve directement $2c = 2$, donc $c = 1$. Il ne reste plus qu'à déterminer b tel que $x^3 - x^2 - 5x + 2 = (x + 2)(x^2 + bx + 1)$. Par identification du terme de degré 1 (on aurait pu choisir le terme de degré 2), on trouve que $2b + 1 = -5$ (il y a 2 termes dans le développement qui sont de degré 1), soit $b = (-5 - 1) \div 2 = -3$.
On a donc $P(x) = (x + 2)(x^2 - 3x + 1)$.
Le discriminant du 2^e facteur est $\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$. On en déduit que les 2 autres racines de P sont $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,618$. Finalement, $P(x) = (x + 2)(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2})$.

Remarques finales :

- Si un polynôme à coefficients entiers a une racine entière, ce ne peut être qu'un diviseur du terme constant. En effet, si $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ s'annule pour $x = \alpha$, c'est que $a_0 = -\alpha(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \cdots + a_2\alpha + a_1)$. Si α et les coefficients a_k sont entiers, alors a_0 est un multiple de α. Cela peut être utile pour déterminer une racine entière, même si elle n'est pas si « évidente ».
  ➥ Pour chercher des racines entières au polynôme $x^3 - 12x^2 + 37x - 6$: il suffit de chercher parmi les diviseurs de 6 (il y en a « seulement » six : 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6).
- On démontre que les seuls polynômes à coefficients réels qui ne sont pas factorisables sont : (1) les polynômes de degré 1 et (2) les polynômes de degré 2 non factorisables ($\Delta < 0$).
  ➥ Le polynôme $x^4 + 4$ ne parait pas factorisable car il n'a pas de racine ($\forall x \in \mathbb{R}, x^4 + 4 > 0$). Pour le factoriser, on peut utiliser l'identité de Sophie Germain :

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

  ➥Sauriez-vous trouver la factorisation ultime de $x^7 - 3x^6 + 3x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1$?

LE COIN DU CHERCHEUR

❊ Soit E_n l'ensemble des polynômes de degré 2 à coefficients entiers, inférieurs ou égaux en valeur absolue à un entier n. Le polynôme $x^2 - 3x + 1$ par exemple appartient à E_3, et aussi à E_4, E_5,. . ., mais pas à E_2 ni à E_1.
⇨ Quelle est la proportion $F(1, n)$ des polynômes de E_n qui n'ont pas de racine ?
Répondre à cette question pour les premières valeurs de n en vous aidant d'un programme.
En utilisant ce même programme, répondre aux questions suivantes :
⇨ Quelle est la proportion $F(2, n)$ des polynômes de E_n qui ont des racines rationnelles (sans tenir compte de la multiplicité) ? Quelle est la proportion $F(3, n)$ des polynômes de E_n qui ont des racines irrationnelles positives ? À partir de quelle valeur de n, parmi les équations de E_n ayant 2 racines positives, y a t-il davantage de racines irrationnelles que rationnelles ?

MÉTHODE (FICHE DE RÉVISION)

Définitions et propriétés à connaître par ♥

➲ Trinôme

Forme développée	$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$
Forme canonique	$\begin{cases} f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \\ \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha) = -\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$
Sens de variation	$\begin{cases} a > 0 : \searrow \text{ puis } \nearrow, \text{ courbe « vallée ».} \\ a < 0 : \nearrow \text{ puis } \searrow, \text{ courbe « montagne ».} \end{cases}$
Maximum/minimum	Coordonnées de l'extremum : $(x = \alpha = -\frac{b}{2a}\ ;\ y = \beta = -\frac{\Delta}{4a})$
Racines **Factorisation**	$\begin{cases} \Delta < 0 : \text{pas de racine ; pas de factorisation dans } \mathbb{R} \\ \Delta = 0 : \text{une « racine double » } x_0 = -\frac{b}{2a} \\ \ \text{d'où la forme factorisée } f(x) = a(x-x_0)^2 \\ \Delta > 0 : \text{deux racines, } x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \ \text{d'où la forme factorisée } f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \end{cases}$
Étude du signe	$\begin{cases} \Delta < 0 : \text{toujours du signe de } a \\ \Delta = 0 : \text{du signe de } a \text{ mais s'annule pour } x = x_0 \\ \Delta > 0 : \text{du signe de } a \text{ « à l'extérieur des racines »} \end{cases}$
Usage des 3 formes	$\begin{cases} \text{Développée (standard) : Sert à calculer } \Delta,\ f(0), \text{ etc.} \\ \text{Canonique : Identifie l'extremum ; sert à étudier les variations} \\ \text{Factorisée : Identifie les racines ; sert à étudier le signe} \end{cases}$

➲ Polynôme

Forme développée	$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
Degré	$\deg(P) = n$ si $a_n \neq 0$ et si $\forall m > n\ a_m = 0$
Notation	$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
Polynômes égaux	Les coefficients de même rangs sont égaux d'où la méthode des coefficients indéterminés
Racine	a est une racine de $P \iff P(a) = 0 \iff P(x) = (x-a)Q(x)$

2 Géométrie plane

Objectifs :

- Revoir la condition de colinéarité de deux vecteurs et les équations de droites
- Développer la notion d'angle orienté (mesure en radians) et la trigonométrie
- Étudier le produit scalaire de deux vecteurs et en voir des applications

Aperçu historique :

La géométrie analytique a commencé avec Fermat[1] *et Descartes qui définirent les systèmes de coordonnées pour étudier des problèmes géométriques, mais c'est Newton qui développera ces notions, son application en astronomie étant à l'origine du terme « vecteur ». Ce n'est qu'au XIX*^e^ *que Bolzano, puis Poncelet, Chasles et Bellavitis formalisèrent la notion de vecteur.*

Le mot « trigonométrie » vient du grec trigonos *(triangle) et de* metron *(mesurer). C'est la science qui traite des relations entre les distances et les angles dans un triangle. Ses origines sont très anciennes.*

- *L'astronome et mathématicien grec Hipparque de Nicée (*2 *siècles avant J.-C.) construisit les premières tables trigonométriques, mais c'est Ptolémée d'Alexandrie,* 3 *siècles plus tard, qui les fit connaître avec son « Almageste » où il établit les premières propriétés du sinus et du cosinus.*
- *Au Ve siècle, l'astronome et mathématicien indien Aryabhata définit le sinus dans son acception moderne. Au XIe, Omar Khayyam utilise la trigonométrie pour résoudre des équations algébriques. Au XIVe, Al-Kashi réalise des tables de fonctions trigonométriques lors de ses études en astronomie.*
- *En Europe, la trigonométrie se développe vers le milieu du XIVe siècle, avec la traduction en latin des œuvres de Ptolémée. En* 1579*, dans son « Canon Mathematicus », Viète donne des tables d'une grande précision (*11 *à* 12 *chiffres) ainsi que des formules reliant entre elles les lignes trigonométriques. Le mathématicien Pitiscus publie un travail remarquable sur la trigonométrie en* 1595*, dont le titre – « Trigonometria » – a donné son nom à la discipline.*

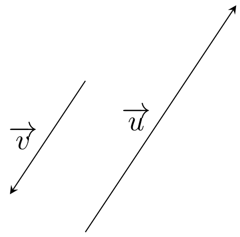
Un scalaire est un entier – ce nom vient du latin scolaris *(escalier, échelle)– et le produit scalaire est une opération entre vecteurs donnant un entier. Elle a été utilisée par Grassmann, Gibbs (notation du point) et Hamilton, au XIXe siècle. Peano apporte sa contribution en reliant l'aire algébrique d'un parallélogramme au produit scalaire.*
En physique, Le produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{AB}$ permet de calculer le travail de la force $\vec{F}$ pendant le déplacement rectiligne de A vers B. On utilise également cette notion en hydrodynamique, en électromagnétisme,...

1. Quelques nom et dates, dans l'ordre des naissances : François Viète (1540-1603), Bartholomäus Pitiscus (1561-1613), René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Newton (1643-1727), Bernard Bolzano (1781-1848), Jean-Victor Poncelet (1788-1867), Michel Chasles (1793-1880), Giusto Bellavitis (1803-1880), Hermann Günther Grassmann (1809-1877), William Rowan Hamilton (1805-1865), Josiah Willard Gibbs (1839-1903), Giuseppe Peano(1858-1932)

1. Vecteurs colinéaires

a. Définition

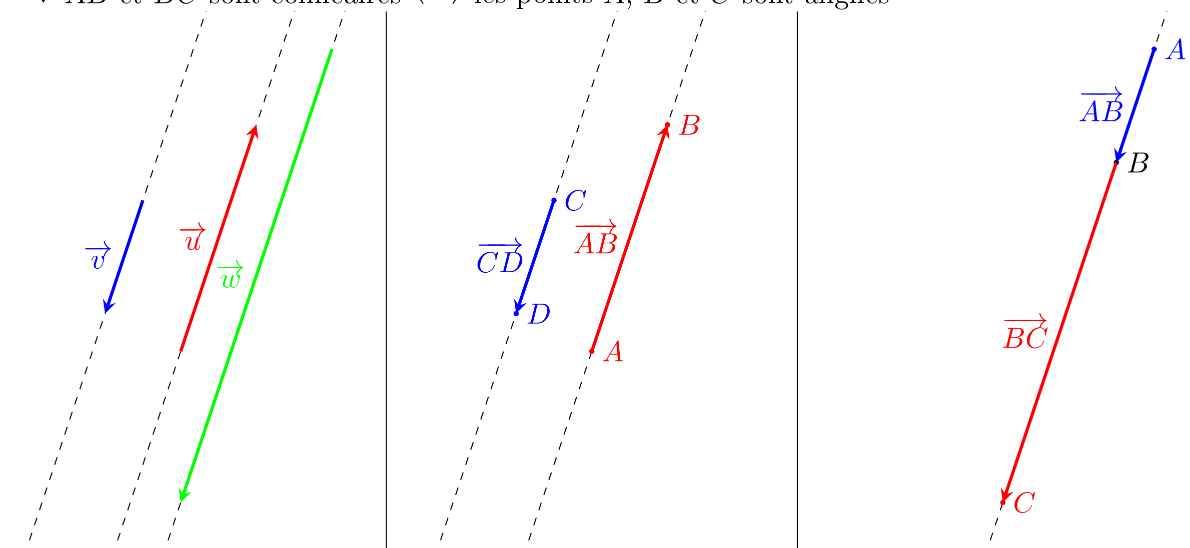
DÉFINITION 2.1 Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.



Convention : Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Colinéaire signifie « sur une même ligne ».
Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.
Traduction dans le langage des figures :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\iff (AB)//(CD)$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires $\iff$ les points A, B et C sont alignés



$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires | $(AB)//(CD)$ | A, B et C sont alignés

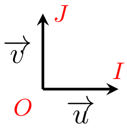
b. Caractérisation analytique

Pour ne pas le dire à chaque fois : ici, les points appartiennent à un même ensemble de points coplanaires (le plan) et les vecteurs à un même ensemble de vecteurs coplanaires (le plan vectoriel).

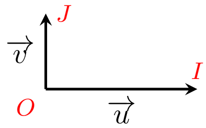
DÉFINITION 2.2 On appelle base tout couple $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de vecteurs non colinéaires. Un repère est un triplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où O est un point, appelé Origine, et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base.

Remarques :

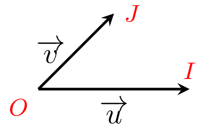
- Un triplet $(O; I; J)$ de points non alignés constitue le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ où la base associée est le couple de vecteurs $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$. Ce repère est noté indifféremment $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ ou $(O; I; J)$.
- Dire que la base $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ est normée signifie que $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont de même longueur. Ils sont de norme unitaire : $\|\overrightarrow{OI}\| = \|\overrightarrow{OJ}\| = 1$ (la notation $\|\overrightarrow{u}\|$ indique la longueur ou « norme » du vecteur $\overrightarrow{u}$).
- La base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est orthonormée si et seulement si elle est normée et orthogonale : $OI = OJ = 1$ et $(OI) \perp (OJ)$. Dans un repère orthonormé (la base associée est dite orthonormée), on peut calculer des distances.



base orthonormée



base orthogonale



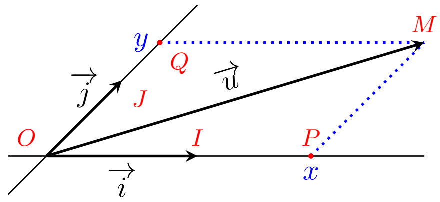
base quelconque

Théorème 2.1 Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base et O un point.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de réels $(x; y)$ tel que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.
- Pour tout point M, il existe un unique couple de réels $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

Remarque : x et y sont les *coordonnées* du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et les *composantes* du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On note ce couple indifféremment (x, y), $(x; y)$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Démonstration

Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base et $\vec{u}$ un vecteur. Montrons d'abord l'existence, puis l'unicité des composantes de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.



Existence : Soient O un point quelconque et I, J et M les points définis par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'étant pas colinéaires, (OI) et (OJ) ne sont pas parallèles. La parallèle à (OJ) passant par M coupe la droite (OI) en un unique point P. De même, la parallèle à (OI) passant par M coupe la droite (OJ) en un unique point Q.

Par construction, $OPMQ$ est un parallélogramme (éventuellement aplati), donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ $(\star)$

Or $\overrightarrow{OP}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires. D'après la définition 2.1, il existe un réel x tel que $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i}$.

De même, il existe un réel y tel que $\overrightarrow{OQ} = y\,\vec{j}$. L'égalité $(\star)$ s'écrit : $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

On a construit les réels x et y, ce qui assure leur existence.

Unicité : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux couples distincts de réels (x, y) et (x', y') tels que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ et $\vec{u} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$.

On a $x\,\vec{i} - x'\,\vec{i} = (\vec{u} - y\,\vec{j}) - (\vec{u} - y'\,\vec{j}) = -y\,\vec{j} + y'\,\vec{j}$, soit $(x - x')\,\vec{i} = (y' - y)\,\vec{j}$.

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'étant pas colinéaires, cette égalité ne peut être vérifiée que si $(x - x')$ et $(y' - y)$ sont nuls :

$$\begin{cases} x - x' = 0 \\ y' - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' \\ y' = y \end{cases}$$ ce qui contredit le fait que (x, y) et (x', y') soient distincts.

La décomposition $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ est donc bien unique.

Exemple 18 – Médiane : Soient ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$.

Montrons que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

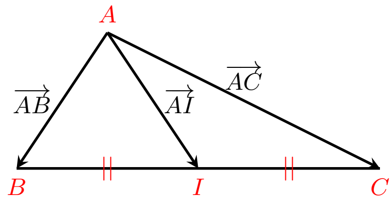
En appliquant la relation de Chasles, on a :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} (\star)$.

I étant le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IC}$ et donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$(\star)$ devient : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{AI}$.

En divisant par 2 les membres de cette égalité, on obtient l'égalité annoncée qui caractérise le milieu de $[BC]$.



ABC étant un triangle, on peut penser que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et forment une base du plan. Dans ce cas, les composantes de $\overrightarrow{AI}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Mais la relation vectorielle obtenue reste vraie, même lorsque A, B et C sont alignés et ne forment donc pas une base.

PROPRIÉTÉ 2.1 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère et deux points, $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(x_B - x_A, y_B - y_A)$
2. Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$

DÉMONSTRATION Ces relations traduisent avec des coordonnées, les relations vectorielles :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, relation « soustractive » de Chasles
2. $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, relation caractéristique obtenue dans l'exemple 18 (en changeant les noms de points)

D'après le théorème 2.1, $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$ et $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$.
On obtient donc, après réduction de la relation 1 : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$.
De même pour la relation 2 : $\overrightarrow{OI} = \frac{x_A+x_B}{2}\vec{i} + \frac{y_A+y_B}{2}\vec{j}$.

PROPRIÉTÉ 2.2 (CONDITION DE COLINÉARITÉ) $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires si et seulement si le déterminant des deux vecteurs est nul, soit si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y = 0$.

DÉMONSTRATION Traduisons la définition 2.1 avec des coordonnées :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} &\iff \exists k \in \mathbb{R},\ \ \vec{u} = k\vec{v} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{R},\ \ x\vec{i} + y\vec{j} = k(x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\
&\iff \exists k \in \mathbb{R},\ \ (x - kx')\vec{i} + (y - ky')\vec{j} = \vec{0}
\end{aligned}$$

Comme précédemment, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'étant pas colinéaires, cette égalité implique :

$$\begin{cases} x - kx' = 0 \\ y - ky' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases} \quad \text{ce qui signifie que } xy' - yx' = kx'y' - ky'x' = 0$$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ sont colinéaires, les composantes de ces deux vecteurs vérifient $xy' - yx' = 0$.
Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors la relation $xy' - yx' = 0$ est aussi vérifiée, quel que soit $\vec{v}$; de même si $\vec{v} = \vec{0}$.

Réciproquement, montrons que la condition $xy' - x'y = 0$ implique la colinéarité.
Supposons donc que $xy' - x'y = 0$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ est colinéaire à tous les vecteurs donc il est colinéaire à $\vec{v}$; de même si $\vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors l'une de ses coordonnées au moins n'est pas nulle. Supposons que $x \neq 0$, alors $xy' - x'y = 0 \Longrightarrow y' = \frac{x'}{x}y$ et donc on a trouvé un réel $k = \frac{x'}{x}$ tel que $y' = ky$. De plus, $x' = \frac{x'}{x}x$, donc on a aussi $x' = ky$. Finalement, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Si on avait $y \neq 0$ au lieu de $x \neq 0$, on procèderait de la même manière et obtiendrait la même conclusion.

Les deux propositions « $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires » et « $xy' - x'y = 0$ » sont donc équivalentes.

Remarques :

- Si deux vecteurs non nuls $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires, leurs composantes (x, y) et (x', y') sont proportionnelles. Mais, si un des deux vecteurs est nul, la colinéarité n'implique pas la proportionnalité des composantes : l'autre vecteur peut ne pas être nul.
- Le déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$ est souvent noté sous forme matricielle :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Exemple 19 – Soit α un réel. Les vecteurs $\vec{u}(\alpha+2;8)$ et $\vec{v}(2;\alpha-2)$ peuvent-ils être colinéaires ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de α ? On a $xy'-x'y=(\alpha+2)\times(\alpha-2)-2\times 8$. Écrivons la condition de colinéarité :

$$\begin{aligned} xy'-x'y=0 &\iff (\alpha+2)\times(\alpha-2)-2\times 8=0 \\ &\iff \alpha^2-4-16=0 \\ &\iff \alpha^2=20 \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\alpha=2\sqrt{5}$ ou $\alpha=-2\sqrt{5}$.

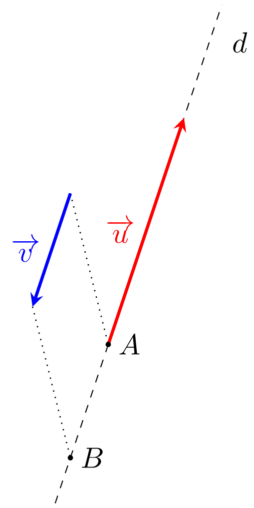
c. Équations cartésiennes d'une droite

Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 2.3 (Vecteur directeur) Soit d une droite.
On appelle vecteur directeur de d tout vecteur non nul ayant la même direction que d.

Remarques :

- Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs qui sont tous colinéaires entre eux, puisque de même direction
- Si A et B sont deux points distincts de la droite d, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d
- On peut définir une droite par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur. La notation $d(A,\vec{v})$ désigne la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{v}$.
  Ici, comme $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{u}$, la droite $d(A,\vec{v})$ est confondue avec $d=(AB)$
- $M\in d \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.



Équations cartésiennes d'une droite

Théorème 2.2 Toute droite d admet une équation de la forme $ax+by+c=0$, avec $(a,b)\neq(0;0)$. Une telle équation est appelée équation cartésienne de d. Réciproquement, si a ou b n'est pas nul, $ax+by+c=0$ est l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b,a)$.

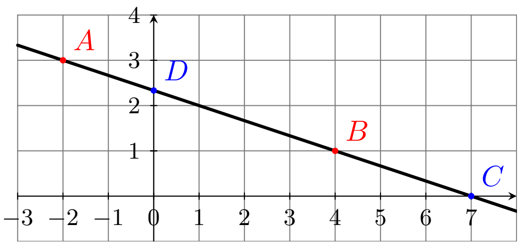
Démonstration Soient d une droite, $A(x_A;y_A)\in d$, et $\vec{v}(\alpha;\beta)\neq(0;0)$ un vecteur directeur de d.
On a : $M(x,y)\in d \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff x_{\overrightarrow{AM}}\times y_{\vec{v}} - y_{\overrightarrow{AM}}\times x_{\vec{v}}=0$
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, on a donc :
$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff (x-x_A)\times\beta-(y-y_A)\times\alpha=0 \iff \beta x-\alpha y+(-\beta x_A+\alpha y_A)=0$
En posant $a=\beta$, $b=-\alpha$, et $c=(-\beta x_A+\alpha y_A)$, la droite d admet bien une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$; le vecteur directeur $\vec{v}(\alpha,\beta)$ étant non nul et égal au vecteur $\vec{u}(-b,a)$, les réels a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Réciproquement, supposons que $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ appartiennent à une droite d'équation $ax+by+c=0$ où a et b ne sont pas nuls tous les deux. En soustrayant membre à membre les égalités $ax_A+by_A+c=0$ et $ax_B+by_B+c=0$, on obtient $a(x_B-x_A)+b(y_B-y_A)=0$. Comme $a(x_B-x_A)+b(y_B-y_A)=det(\overrightarrow{AB},\vec{u})$, ce déterminant étant nul indique que $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. La droite d'équation $ax+by+c=0$ est donc bien dirigée par le vecteur $\vec{u}(-b,a)$.

Remarques :

- La droite d possède une infinité d'équations cartésiennes ; si $ax+by+c=0$ est une équation de d alors $\forall k \in \mathbb{R}^*$, $kax+kby+kc=0$ en est une autre. Si on prend en particulier $k=\frac{-1}{c}$, on obtient l'équation $\frac{-a}{c}x+\frac{-b}{c}y=1$ qui s'écrit aussi, en posant $\alpha=\frac{-c}{a}$ et $\beta=\frac{-c}{b}$, $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$. Les points $A(\alpha,0)$ et $B(0,\beta)$ sont les points d'intersection de d avec les axes de coordonnées.
- Si $a=0$ la droite d'équation $by+c=0$ avec $b\neq 0$, soit $y=\frac{-c}{b}$, est « horizontale »
Si $b=0$ la droite d'équation $ax+c=0$ avec $a\neq 0$, soit $x=\frac{-c}{a}$, est « verticale ».
- L'équation réduite de forme $y=mx+p$, n'est possible que si $b\neq 0$. On a alors $m=\frac{-a}{b}$ et $p=\frac{-c}{b}$. Toutes les droites n'ont pas une équation réduite de cette forme mais celles qui sont concernées n'en ont qu'une : l'équation réduite est unique. Le vecteur directeur associé à cette forme réduite a pour composantes $(1,m)$, d'où le terme de « coefficient directeur » pour m. Les autres droites, celles qui sont verticales, ont une équation réduite unique aussi, de la forme $x=k$ (avec $k=\frac{-c}{a}$, on l'a dit) et un vecteur directeur associé de composantes $(0,1)$.

Exemple 20 –
Soient $A(-2;3)$ et $B(4;1)$.
Déterminons une équation cartésienne de la droite (AB).
$\overrightarrow{AB}(6,-2)$ est un vecteur directeur de (AB).
On va donc poser $-b=6$ et $a=-2$.
La droite (AB) admet l'équation cartésienne :
$-2x-6y+c=0$.
Comme $A(-2,3)\in(AB)$ on a :



$$-2x_A-6y_A+c=0 \iff -2\times(-2)-6\times 3+c=0 \iff 4-18+c=0 \iff c=14$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $-2x-6y+14=0$.
En divisant les deux membres par -2, on en obtient une autre : $x+3y-7=0$ qui est associée au vecteur directeur $\vec{v}(-3,1)$.
En posant $\alpha=\frac{-c}{a}=7$ et $\beta=\frac{-c}{b}=\frac{7}{3}$, les points $C(\alpha,0)$ et $D(0,\beta)$ sont les intersections de (AB) avec les axes de coordonnées, et on peut donner l'équation $\frac{x}{7}+\frac{3y}{7}=1$ sur laquelle les coordonnées de ces points sont visibles.
L'équation réduite (unique) de (AB) est : $y=\frac{-1}{3}x+\frac{7}{3}$. Cette équation est associée au vecteur directeur $\vec{w}(1,\frac{-1}{3})$.

Caractérisation des droites parallèles

Propriété 2.3 Soient (a,b) et (a',b') deux couples de réels différents de $(0,0)$.
Les droites $d: ax+by+c=0$ et $\delta: a'x+b'y+c=0$ sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$.

Démonstration $d//\delta$ si et seulement si les vecteurs directeurs de ces droites, $\vec{u}(-b,a)$ et $\vec{v}(-b',a')$, sont colinéaires. D'après la propriété 2.2, cela est réalisé si et seulement si $ab'-a'b=0$.

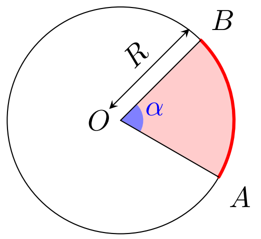
Exemple 21 – On donne les équations de deux droites $d: 3x+2y+1=0$ et $\delta: 6x+4y-3=0$.
Sont-elles parallèles ? $3\times 4-6\times 2=12-12=0$ donc oui, ces droites sont parallèles.
Déterminons une équation de Δ, la parallèle à d passant par $I(1,0)$. L'équation de Δ est de la forme $3x+2y+c=0$, où seul le réel c est à déterminer. Comme $I\in\Delta$, on doit avoir $3x_I+2y_I+c=0$, soit $3+c=0 \iff c=-3$. Une équation de Δ est $3x+2y-3=0$.
La droite D d'équation réduite $y=m\sqrt{2}x+2m^2-1$ est parallèle à d. Quelle est l'équation de D ?
Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux. Celui de D est $m\sqrt{2}$ tandis que celui de d est $\frac{-3}{2}$. On doit avoir $m\sqrt{2}=\frac{-3}{2}$, donc $m=\frac{-3}{2\sqrt{2}}=\frac{-3\sqrt{2}}{4}$. L'équation de D est $y=\frac{-3(\sqrt{2})^2}{4}x+2(\frac{-3}{2\sqrt{2}})^2-1=\frac{-3}{2}x+\frac{5}{4}$.
Ordonnons ce faisceau : $\Delta: y=\frac{-3}{2}x+\frac{3}{2}$, $D: y=\frac{-3}{2}x+\frac{5}{4}$, $\delta: y=\frac{-3}{2}x+\frac{3}{4}$ et $d: y=\frac{-3}{2}x-\frac{1}{2}$.

2. Angles orientés

a. Cercle trigonométrique

Définition 2.4 (Radian) Le radian (abrev :rad) est une unité de mesure des angles qui est proportionnelle au degré : π rad $= 180°$.

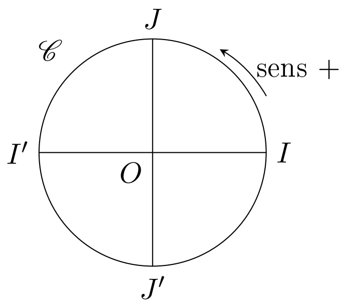
- Un angle de mesure α radians, au centre d'un cercle de rayon R, intercepte un arc $\overset{\frown}{AB}$ de longueur $R\alpha$.
- Un secteur circulaire d'angle α radians et de rayon R a une aire égale à $\frac{R^2\alpha}{2}$.



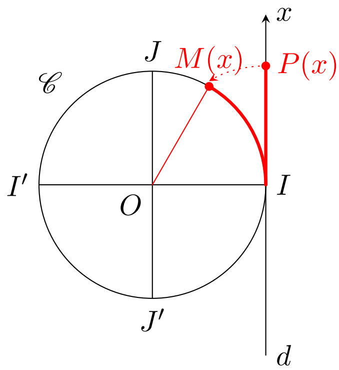
Mesures d'angles en radians et mesures correspondantes en degrés :

mesure en degrés	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$360°$	$\approx 57°$	$x°$	$\frac{180y}{\pi}°$
mesure en radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	2π rad	1 rad	$\frac{x\pi}{180}$ rad	y rad

Définition 2.5 (Cercle trigonométrique) Le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ est un cercle de rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, appelé sens « positif », sur lequel on choisit un point de départ I. Le centre de $\mathscr{C}$ est noté O.

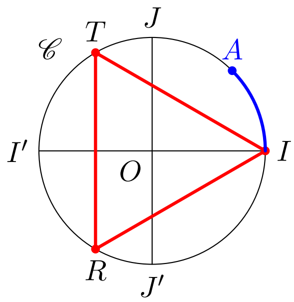


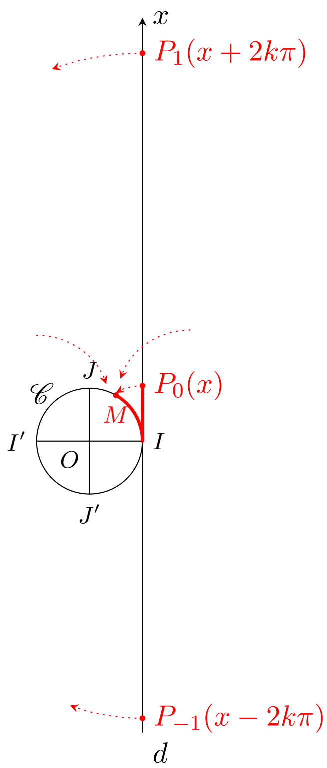
Définition 2.6 (Enroulement de l'axe réel) Soient (O, I, J) un repère orthonormé du plan et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.
La parallèle d à (OJ) passant par I, étant munie d'un repère $(I, \overrightarrow{OJ})$, est un axe gradué contenant tous les réels. L'enroulement de cet axe autour du cercle trigonométrique conduit à associer un réel x de d à un point M de $\mathscr{C}$.
Dans la notation $M(x)$ qui traduit cette association, le réel x est appelé « abscisse curviligne » de M sur $\mathscr{C}$.



Exemple 22 –

- Les points I, J, I' et J' du cercle trigonométrique ont pour abscisses curvilignes les réels 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.
  Le réel associé au milieu A du petit arc $\overset{\frown}{IJ}$ est $\frac{\pi}{4}$.
  Les sommets T et R du triangle équilatéral TRI ont des abscisses curvilignes égales à $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.
- L'enroulement de l'axe des réels autour du cercle trigonométrique ne se limitant pas à faire un seul tour dans le sens direct, les abscisses curvilignes associées à un de ces points sont en nombre infini. Le point I, par exemple, est associé aux réels $\dots$, -4π, -2π, 0, 2π, 4π, $\dots$ soit aux nombres de la forme $2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.





Propriété 2.4 (Abscisses curvilignes d'un point) Soient x un réel, et M le point du cercle trigonométrique associé à x. Alors M est aussi associé à tous les réels de la forme $x + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration Ajouter 2π à une abscisse curviligne quelconque revient à faire un tour supplémentaire autour du cercle trigonométrique. De même, retrancher 2π revient à faire un tour dans le sens négatif. Dans tous les cas ajouter $2k\pi$, k étant un entier relatif quelconque, ne modifie pas la position sur le cercle.

Dans l'exemple 22 , les abscisses curvilignes des points I, J, I', J', A, T et R peuvent être données pour un entier relatif k quelconque :

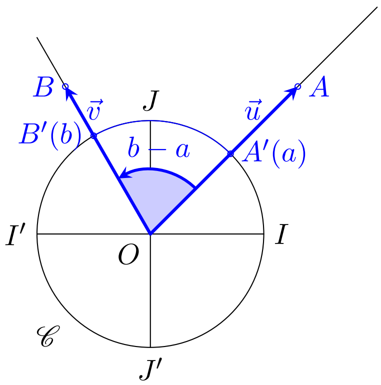
$I(0+2k\pi) \quad J(\frac{\pi}{2}+2k\pi) \quad I'(\pi+2k\pi) \quad J'(\frac{-\pi}{2}+2k\pi)$

$A(\frac{\pi}{4}+2k\pi) \quad T(\frac{2\pi}{3}+2k\pi) \quad R(\frac{-2\pi}{3}+2k\pi)$

Les valeurs privilégiées ici sont les mesures des plus petits arcs orientés (les mesures principales). Par exemple, on a écrit $J'(\frac{-\pi}{2}+2k\pi)$, privilégiant l'abscisse négative $\frac{-\pi}{2}$ car les autres abscisses possibles ($\frac{3\pi}{2}$, $\frac{-5\pi}{2}$, etc.) ont une plus grande valeur absolue. En faisant ainsi, on privilégie toujours la mesure du plus petit arc orienté. La seule exception est pour le point I' qui a deux abscisses curvilignes (π et $-\pi$) de plus petite valeur absolue égales, puisque $\widehat{II'}$ est un demi-cercle.

b. Angle orienté

Définition 2.7 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls,
A et B deux points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$,
A' et B' les intersections respectives des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ avec le cercle trigonométrique.
L'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est égal à l'angle orienté des vecteurs unitaires $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'})$. Sa mesure est celle de l'arc orienté $\widehat{A'B'}$.
Si les abscisses curvilignes de A' et B' sont a et b, alors la mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est égale à $b - a$.



Remarques :

- Comme A' est associé aux réels $a + 2k\pi$, et B' aux réels $b + 2k'\pi$ (k et k' appartenant à $\mathbb{Z}$), un angle orienté admet une infinité de mesures : $b - a + 2k''\pi$, avec $k'' \in \mathbb{Z}$.
- Pour traduire que le réel α est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$,

  les écriture suivantes sont équivalentes : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{cases} \alpha + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \alpha \text{ modulo } 2\pi \\ \alpha \ [2\pi] \end{cases}$

Convention : on notera indifféremment $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ pour l'angle orienté et ses mesures en radians.

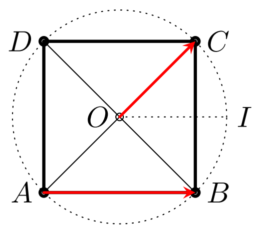
Définition 2.8 (Mesure principale) La mesure principale d'un angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est, parmi toutes les mesures, la seule qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Remarque :
La valeur absolue de la mesure principale de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

Exemple 23 – Avec les points de l'exemple 22, on a $(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OJ'}) = \frac{-\pi}{2} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
Le nombre trouvé ($\frac{\pi}{6}$rad) est la mesure principale car il appartient à $]-\pi, \pi]$.
Par contre, $(\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OT}) = \frac{2\pi}{3} - \left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}[2\pi]$.
La mesure trouvée $\frac{4\pi}{3}$ dépassant π, la mesure principale est égale à $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = \frac{-2\pi}{3}$.

✧✧✧

Dans le carré $ABCD$ de sens direct et de centre O,
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$
Pour cela, on a tracé un cercle trigonométrique de centre O, en prenant pour point de départ le point I tel que $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires. L'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$ est positif car on tourne bien dans le sens positif pour aller de I vers C, et sa mesure principale vaut $\frac{\pi}{4}$rad car on sait que dans le carré, l'angle géométrique entre un côté et une diagonale est $\widehat{BAC} = \widehat{IOC} = \frac{\pi}{4}$rad.



c. Propriétés des angles orientés

Propriété 2.5 (Vecteurs colinéaires) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

(i) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et de même sens $\iff (\vec{u}, \vec{v}) = 0 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

(ii) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et de sens contraires $\iff (\vec{u}, \vec{v}) = \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Remarques :

- En particulier, si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, on a $(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \ \ [2\pi]$ et $(\vec{u}, \vec{-u}) = \pi \ \ [2\pi]$.
- Conséquence immédiate : soient A, B, C trois points distincts.
  A, B, C sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \ \ [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi \ \ [2\pi]$, soit $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[\pi]$.

Propriété 2.6 (Relation de Chasles) Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a
$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v})$$

Démonstration D'après la définition 2.7, si $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont des points du cercle trigonométrique tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$, alors modulo π :
$(\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = (c - a) + (b - c) = b - a = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \vec{v})$

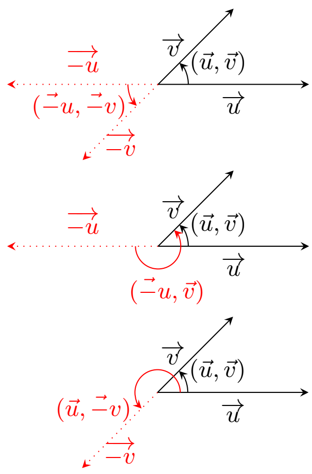
Conséquences immédiates :

1. $(\vec{u}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = 0 \ \ [2\pi]$, on a donc $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}) \ \ [2\pi]$.
2. $(-\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v})$. Or $(-\vec{u}, \vec{u}) = \pi \ \ [2\pi]$. On a donc $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \ \ [2\pi]$.
3. $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v}) + \pi = (\vec{u}, \vec{v}) \ \ [2\pi]$.

Exemple 24 – Montrons que la somme des angles orientés d'un triangle est égale à πrad.

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) && \text{d'après la conséquence 3 de 2.6} \\
&= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}) && \text{d'après la propriété 2.6} \\
&= \pi \ \ [2\pi] && \text{d'après la propriété 2.5}
\end{aligned}$$

Propriété 2.7 (Angles orientés associés) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et k et k' deux réels non nuls.
- $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$ si k et k' sont de même signe, et en particulier $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$
- $(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$ si k et k' sont de signes contraires, et en particulier $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$

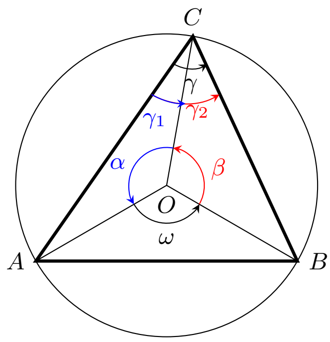


Démonstration Pour les cas particuliers, ils ont déjà été montrés dans les conséquences de la propriété 2.6. Pour la généralisation, il suffit de revenir à la définition 2.7 de l'angle orienté de deux vecteurs non unitaires, et d'appliquer les propriétés particulières, relativement aux vecteurs unitaires.

Exemple 25 – Pour conclure, en guise d'exemple, prouvons le théorème de l'angle inscrit :

Théorème 2.3 (Angle inscrit) Si A, B et C sont trois points distincts d'un cercle de centre O et si γ et ω sont des réels tels que $\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $\omega = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, alors $2\gamma = \omega\ [2\pi]$.

Démonstration En plus de γ et δ, introduisons :
$\alpha = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$, $\beta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, $\gamma_1 = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO})$ et $\gamma_2 = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB})$.
D'après la propriété 2.6 : $\alpha + \beta + \omega = 0\ [2\pi] \iff \alpha + \beta = -\omega\ [2\pi]$ et $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma\ [2\pi]$.
Par ailleurs, O étant le centre du cercle circonscrit à ABC, les triangles AOC et COB sont isocèles en O, ce qui amène : $2\gamma_1 + \alpha = \pi\ [2\pi]$ et $2\gamma_2 + \beta = \pi\ [2\pi]$.
Par addition, on trouve : $2(\gamma_1 + \gamma_2) + \alpha + \beta = 0\ [2\pi]$, d'où $2\gamma = \omega\ [2\pi]$.

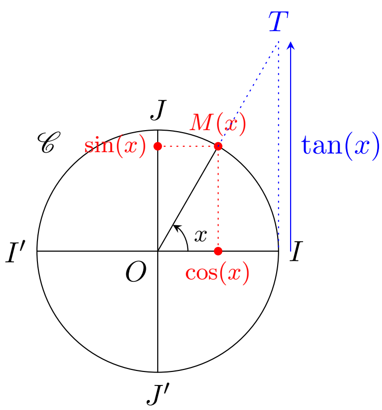


3. Trigonométrie

a. Lignes trigonométriques

Une *ligne trigonométrique* est une expression désignant une des fonctions trigonométriques : cosinus, sinus ou tangente.

Définition 2.9 Soient $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère orthonormé du plan, x un réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x.
- Le cosinus de x est le réel noté $\cos(x)$ égal à l'abscisse de M.
- Le sinus de x est le réel noté $\sin(x)$ égal à l'ordonnée de M.
- Si $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, la tangente de x est le réel noté $\tan(x)$ égal au coefficient directeur de la droite (OM), soit au rapport $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



T étant le point d'intersection de la demi-droite $[OM)$ et de la droite $d(I, \overrightarrow{OJ})$, l'abscisse de T dans le repère $(I, \overrightarrow{OJ})$ est égale à $\tan(x)$.

Propriétés immédiates des fonctions sin et cos :

Propriété 2.8 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :

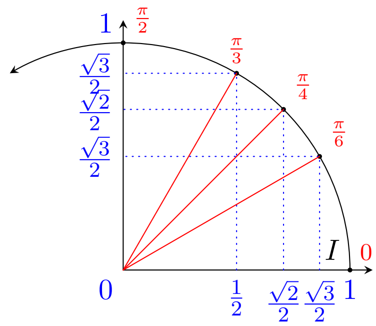
$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \quad ; \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad ; \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$
$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \quad ; \quad ; \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

Démonstration D'après la définition 2.9, $(\cos(x), \sin(x))$ sont les coordonnées, dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, d'un point du cercle de centre O et de rayon 1. On en déduit :

1. $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont donc compris entre -1 et 1. Les fonctions cos et sin sont bornées.
2. $OM = 1$ car c'est un rayon du cercle. Or, on a :
   $OM = ||\overrightarrow{OM}|| = (x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2 = OM^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$.
3. Pour différentes valeurs entières de k, les réels $x + 2k\pi$ sont les abscisses curvilignes d'un même point du cercle trigonométrique. Comme ce point ne peut avoir différentes coordonnées, on a $(\cos(x + 2k\pi), \sin(x + 2k\pi)) = (\cos(x), \sin(x))$. Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π.

Quelques valeurs particulières :

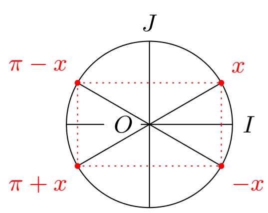
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



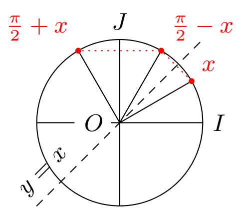
Propriété 2.9 (Angles associés) Soit x un réel. On a :

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

Démonstration Les images des réels x, $\pi - x$, $\pi + x$ et $-x$ sur le cercle trigonométrique sont, dans cet ordre, les sommets d'un rectangle de centre O symétrique par rapport aux axes du repère. La symétrie s'exerce donc aussi sur les coordonnées.



Les images des réels x et $\frac{\pi}{2} - x$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Les images sur le cercle trigonométrique des réels $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$ sont symétriques par rapport à l'axe (OJ).



Propriétés de la fonction tan :

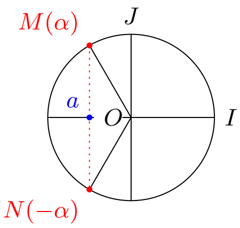
PROPRIÉTÉ 2.10 Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]\}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$\tan(x + k\pi) = \tan(x)$; $\tan(-x) = -\tan(x)$; $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$; $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$

b. Équations trigonométriques

➭ Résolution de l'équation $\boxed{\cos x = a}$:

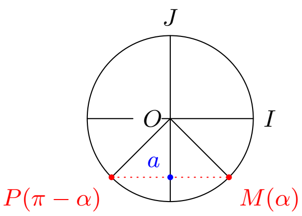
- si $|a| > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\cos x| \leqslant 1$
- si $|a| = 1$, l'équation a une solution dans $]-\pi, \pi]$ et dans $\mathbb{R}$: si $a = 1$, $x = 0\ [2\pi]$ et si $a = -1$, $x = \pi\ [2\pi]$
- si $|a| < 1$, il existe deux points du cercle trigonométrique qui ont pour abscisse a : les points M et N images des réels α et $-\alpha$. L'équation a deux solutions dans $]-\pi, \pi[$, et dans $\mathbb{R}$: $x = \alpha + 2k\pi$ ou $-\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$



EXEMPLE 26 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.
On sait que $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.
On en déduit $\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$.
Les solutions de l'équation sont donc les réels $x = \pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

➭ Résolution de l'équation $\boxed{\sin x = a}$:

- si $|a| > 1$, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin x| \leqslant 1$
- si $|a| = 1$, l'équation a une solution dans $]-\pi, \pi]$, et dans $\mathbb{R}$: si $a = 1$, $x = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et si $a = -1$, $x = \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$
- si $|a| < 1$, il existe deux points du cercle trigonométrique qui ont pour ordonnée a : les points M et P images des réels α et $\pi - \alpha$. L'équation a deux solutions dans $]-\pi, \pi]$, et dans $\mathbb{R}$: $x = \alpha + 2k\pi$ ou $\pi - \alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$



EXEMPLE 27 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On sait que $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
On en déduit que $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Les solutions de l'équation sont donc les réels $x = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$.

Utilisation de la calculatrice :
Commencer par vérifier que la calculatrice est bien en mode « radians ».

- Quand on cherche la mesure x d'un angle dont on connait le cosinus : disons que $\cos x = a$ et $a \in [-1, 1]$; taper $\cos^{-1} a$ donne x_0, une valeur qui appartient toujours à l'intervalle $[0, \pi]$. Les valeurs réelles possibles pour x sont donc $x = x_0\ [2\pi]$ ou $x = -x_0\ [2\pi]$.
- Quand on cherche la mesure x d'un angle dont on connait le sinus : disons que $\sin x = a$ et $a \in [-1, 1]$; taper $\sin^{-1} a$ donne x_0, une valeur qui appartient toujours à l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Les valeurs réelles possibles pour x sont donc $x = x_0\ [2\pi]$ ou $x = \pi - x_0\ [2\pi]$.
- Quand on cherche la mesure x d'un angle dont on connait la tangente : disons que $\tan x = a$ et $a \in \mathbb{R}$; taper $\tan^{-1} a$ donne x_0, une valeur qui appartient toujours à l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Les valeurs réelles possibles pour x sont donc $x = x_0\ [\pi]$.

Imaginons que l'on cherche un angle α dans $[0, 2\pi]$ et qu'on sache $\sin \alpha = -0,3$. La calculatrice donne $\sin^{-1}(-0,3) \approx -0,304692654$. Combien peut valoir α ? La valeur x_0 donnée appartient à $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que les deux solutions qui conviennent sont :
$\pi - x_0 \approx 3,446285308\text{rad}$ et $2\pi + x_0 \approx 5,978492653\text{rad}$, soit environ 197° et 343°.

PROPRIÉTÉ 2.11 On sait résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations de types cos − cos, sin − sin et cos − sin :

- $\cos x = \cos y \iff x = \pm y + 2k\pi$
- $\sin x = \sin y \iff x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$
- $\sin x = \cos y \iff \frac{\pi}{2} - x = \pm y + 2k\pi$

DÉMONSTRATION Pour les deux premières, considérer les figures de référence données plus haut et qui découlent de la propriété 2.9. Pour la dernière, on transforme $\sin x$ en $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$. L'égalité $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos y$ est alors du type cos − cos.

EXEMPLE 28 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ d'abord, puis dans $]-\pi, \pi]$, l'équation $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{3} + 2x)$.
➩ Résolution dans $\mathbb{R}$:
En utilisant la propriété 2.9, on remarque que $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.
L'équation est donc équivalente à $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{3} + 2x)$.
Les solutions vérifient donc $\frac{\pi}{2} - x = \pm(\frac{\pi}{3} + 2x) + 2k\pi$.
On doit distinguer les deux formes : $\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{3} + 2x + 2k\pi$ et $\frac{\pi}{2} - x = -\frac{\pi}{3} - 2x + 2k\pi$.
On obtient alors : $-3x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.
Divisons la 1re par −3. On obtient finalement, k étant un entier relatif quelconque :

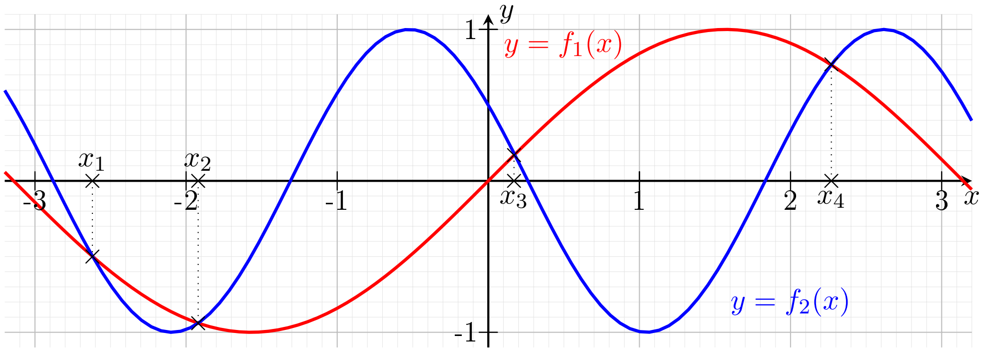
$$x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \text{ et } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

➩ Résolution dans $]-\pi, \pi]$:

Faisons varier k de manière à rester dans l'intervalle considéré.
Les solutions du 1er type étant obtenues modulo $\frac{2\pi}{3}$, il y en aura trois dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ d'amplitude 2π.
On peut chercher la plus petite valeur à donner à k en résolvant une inéquation :
$\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} > -\pi \iff k > (-\pi - \frac{\pi}{18}) \times \frac{3}{2\pi} \iff k > -\frac{19\pi \times 3}{18 \times 2\pi} \iff k > -\frac{19}{12}$
On en déduit que la 1re valeur de k à considérer est −1.
Donnons alors les solutions de cette équation.

k	-1	0	1
de la forme $\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$	$x_2 = -\frac{11\pi}{18} \approx -1,92\text{rad}$	$x_3 = \frac{\pi}{18} \approx 0,17\text{rad}$	$x_4 = \frac{13\pi}{18} \approx 2,27\text{rad}$
de la forme $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$		$x_1 = -\frac{5\pi}{6} \approx -2,62\text{rad}$	

Illustration graphique :
Traçons les courbes des fonctions $f_1 : x \mapsto \sin(x)$ et $f_2 : x \mapsto \cos(\frac{\pi}{3} + 2x)$, avec x variant dans $[-\pi, \pi]$.
Les deux courbes se coupent en quatre points sur cet intervalle, les abscisses de ces points étant les solutions de l'équation.



Remarque :
Il n'y a pas de méthode trigonométrique pour résoudre une équation telle que $\cos x = x$. On pourra alors utiliser une méthode algorithmique (dichotomie) ou toute autre méthode approximative, par exemple un graphique. Ici, la seule solution est environ égale à 0,739rad.

c. Périodicité

DÉFINITION 2.10 Une fonction F définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période $T > 0$ si $\forall x \in \mathbb{R}, F(x+T) = F(x)$ où T est le plus petit réel positif non nul vérifiant cette égalité.

Remarques :

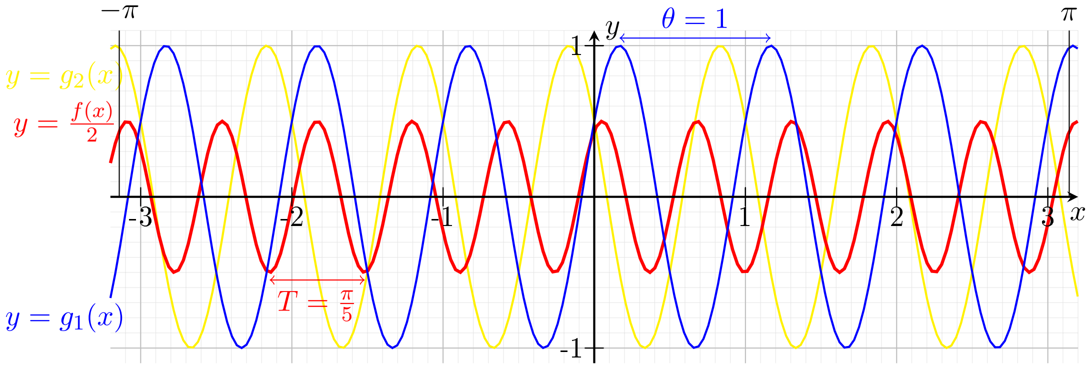
- Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ peut être périodique, comme sin et cos et une multitude d'autres fonctions fabriquées à partir de celles-ci. Mais il y a aussi des fonctions périodiques définies sur la réunion d'intervalles de la forme $]a+kT, a+(k+1)T[$ où k décrit $\mathbb{Z}$. C'est le cas de la fonction tan où $a = \frac{-\pi}{2}$ et $T = \pi$.
- Si $\forall x \in \mathbb{R}, F(x+T) = F(x)$, alors on a évidemment aussi $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, F(x+kT) = F(x)$. Comme sin est périodique de période 2π, on a $\sin(x) = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \cdots = \sin(x-2\pi) = \ldots$.
- Du fait de leur définition sur le cercle trigonométrique, sin et cos sont des fonctions périodiques de période 2π ; comme $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ et $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, on en déduit que $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$, soit tan est une fonction périodique de période π.

PROPRIÉTÉ 2.12 Les réels $a \neq 0$ et b étant fixés, les fonctions $S_{a,b}$ et $C_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $S_{a,b}(x) = \sin(ax+b)$ et $C_{a,b}(x) = \cos(ax+b)$ sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{a}$.

DÉMONSTRATION $a \neq 0$ étant fixé, le nombre $\frac{2\pi}{a}$ est bien défini et différent de 0.
$S_{a,b}(x + \frac{2\pi}{a}) = \sin[a(x+\frac{2\pi}{a}) + b] = \sin(ax + 2\pi + b) = \sin(ax+b) = S_{a,b}(x)$,
donc $S_{a,b}$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{a}$.
De même pour $C_{a,b}$.

EXEMPLE 29 – La fonction $f = S_{10,\frac{\pi}{3}}$ est une fonction de période $T = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$.
Pour tout réel x, on a $f(x) = \sin(10x + \frac{\pi}{3})$.
Tout intervalle d'amplitude 2π contient 10 périodes complètes de cette fonction.
$f(0) = f(\frac{\pi}{5}) = f(\frac{2\pi}{5}) = f(\frac{3\pi}{5}) = f(\frac{4\pi}{5}) = f(\pi) = f(\frac{6\pi}{5}) = \cdots = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

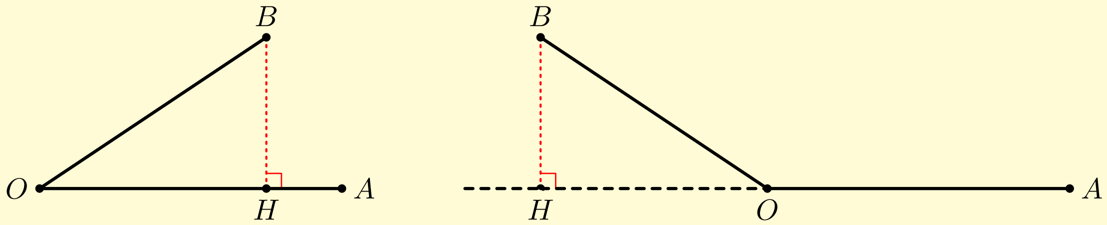
Quels seraient les valeurs des coefficients $a \neq 0$ et b d'une fonction $g = S_{a,b}$ de période θ telle que $g(0) = \frac{1}{2}$ et $\theta = 1$?
On doit avoir $\frac{2\pi}{a} = 1$, il faut donc prendre $a = 2\pi$.
On a donc $g(x) = \sin(2\pi x + b)$ avec $g(0) = \frac{1}{2}$. Le coefficient b vérifie donc $\sin(b) = \frac{1}{2}$.
Or, on sait que $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, donc $b = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $b = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.
Finalement, les fonctions g_1 et g_2 définies par $g_1(x) = \sin(2\pi x + \frac{\pi}{6})$ et $g_2(x) = \sin(2\pi x + \frac{\pi}{6})$ vérifient les contraintes ; leurs courbes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
La figure ci-dessous montre les variations de $\frac{f}{2}$, g_1 et g_2 sur $[-\pi, \pi]$.



4. Produit scalaire

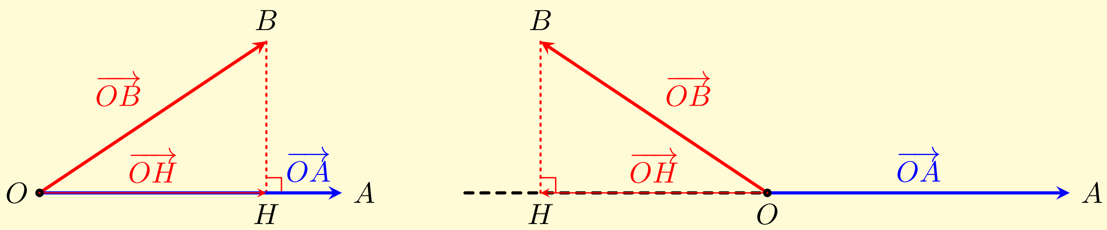
a. Produit scalaire de deux vecteurs

DÉFINITION 2.11 [Projection orthogonale] Soient O, A et B trois points non-alignés du plan. Le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) est le point d'intersection de (OA) et la perpendiculaire à (OA) passant par B.
Sur les figures ci-dessous, H est le projeté orthogonal de B sur (OA) :



DÉFINITION 2.12 (PRODUIT SCALAIRE) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et O un point.
On note A et B les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, tel que :

- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- si $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$ alors, en notant H le projeté orthogonal de B sur (OA),
  — si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$
  — si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$

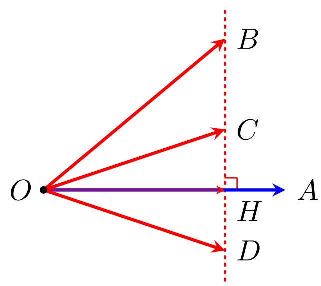


$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$ $\qquad$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$

Remarques :

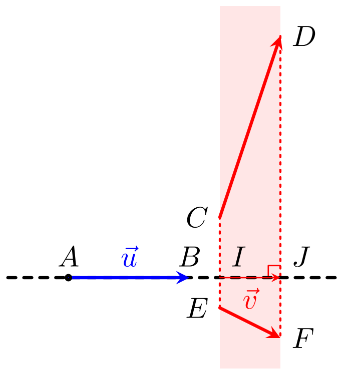
- En notant θ l'angle (géométrique) formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on remarque que si θ est aigu, le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est positif et si θ est obtus, le produit scalaire est négatif.
- Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par lui-même est noté $\vec{u}^2$.
  Il est égal à $||\vec{u}||^2$ (le carré de la norme) et on l'appelle *carré scalaire* de $\vec{u}$.
  Dans un repère orthonormé $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$ (le carré de la longueur).

PROPRIÉTÉ 2.13 Si deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ se projettent orthogonalement de la même façon sur la direction d'un vecteur $\vec{u}$, alors les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v_1}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v_2}$ sont égaux.



Sur l'illustration, on a :
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = OA \times OH$
Attention : si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, on ne peut pas conclure que $\vec{v} = \vec{w}$!

Propriété 2.14 Soient A, B, I et J quatre points alignés et les droites D_1 et D_2, perpendiculaires à (AB) passant par I et J. Tout vecteur $\vec{v}$ pouvant être représenté dans la bande limitée par D_1 et D_2, avec son point d'application sur D_1 et son point d'arrivée sur D_2, détermine avec le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un même produit scalaire.



Sur notre illustration, les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ se projetant en $\overrightarrow{IJ}$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ}$.
Avec la généralité de la propriété 2.14, selon la définition 2.12, on a :

- $\vec{u}.\vec{v} = AB \times IJ$, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont dans le même sens
- $\vec{u}.\vec{v} = -AB \times IJ$, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont de sens contraire

Définition 2.13 (Vecteurs orthogonaux) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux*, et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si une des situations suivantes est réalisée :

- $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
- En notant O, A et B des points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $(OA) \perp (OB)$

Propriété 2.15 Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux, on a deux cas :

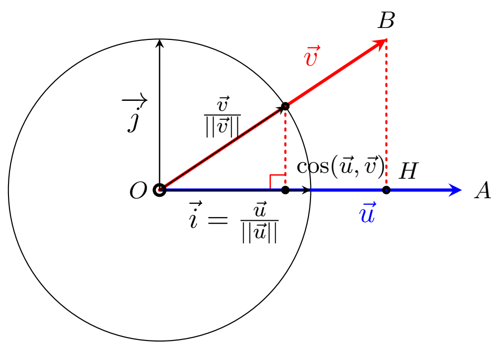
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors le produit scalaire est évidemment nul
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-nuls, avec les notations de la définition 2.12, on a $(OA) \perp (OB)$, le projeté orthogonal de B sur (OA) est O donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OO = 0$

Réciproquement, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm OA \times OH$,

- soit $OA = 0$ c'est-à-dire que $\vec{u} = \vec{0}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
- soit $OH = 0$ c'est-à-dire que $\vec{v} = \vec{0}$ ou B appartient à la perpendiculaire à (OA) passant par O donc dans les deux cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

b. Autres expressions du produit scalaire

Propriété 2.16 (Vectoriellement) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan alors
$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

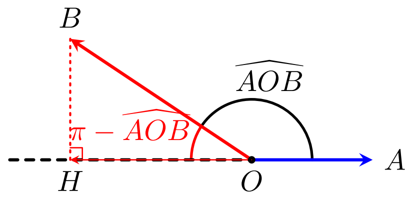


Démonstration Soient O, A et B des points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Le cercle trigonométrique de centre O est associé, comme dans la définition 2.9, aux vecteurs unitaires $\vec{i} = \overrightarrow{OI} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ et $\vec{j}$ tels que $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
Les angles $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}, \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||})$ sont égaux d'après la définition 2.7 et donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}, \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||})$.
La projection orthogonale de B sur (OA) étant notée H, on a $\overrightarrow{OH} = ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \times \vec{i}$ et donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OH}$ vaut $||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Le cosinus de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ conserve l'information sur le sens des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OA}$: s'ils ont même sens, le cosinus est positif et dans le cas contraire, le cosinus est négatif.

Propriété 2.17 (Géométriquement) Si O, A et B sont trois points du plan, alors

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$$



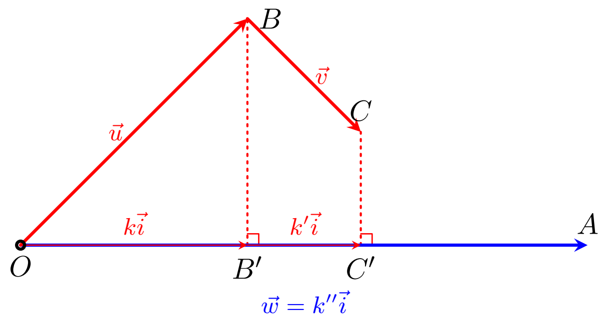
Démonstration En conservant les notations de la démonstration précédente, selon la valeur de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$, on distingue :

1. $\widehat{AOB} \in [0, \frac{\pi}{2}]$
   Dans le triangle OBH rectangle en H on a $OH = OB\cos(\widehat{AOB})$ et donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB\cos(\widehat{AOB})$
2. $\widehat{AOB} \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$
   Dans le triangle OBH rectangle en H on a $OH = OB\cos(\pi - \widehat{AOB}) = -OB\cos(\widehat{AOB})$ et donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -OA \times [-OB\cos(\widehat{AOB})] = OA \times OB\cos(\widehat{AOB})$

Propriété 2.18 (Propriétés algébriques) Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un réel. On a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$; $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$; $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

Démonstration Les trois égalités se déduisent plus ou moins aisément de ce qui précède.

- La première se montre aisément à partir de la définition 2.12 car $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(\vec{v},\vec{u})$.
- La deuxième découle naturellement de la propriété 2.16 car $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$ et $\cos(k\vec{u},\vec{v}) = \cos(\pm\vec{u},\vec{v})$ selon le signe de k.
  - Si $k < 0$, comme d'après la propriété 2.7 $\cos(-\vec{u},\vec{v}) = \cos(\pi + (\vec{u},\vec{v})) = -\cos(\vec{u},\vec{v})$, on a $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = |k| \times ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times [-\cos(\vec{u},\vec{v})] = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ car alors $|k| = -k$.
  - Si $k > 0$, $k = |k|$ et $\cos(k\vec{u},\vec{v}) = \cos(\vec{u},\vec{v})$, il n'y a pas de problème de signe.
- Pour la troisième : soit O un point du plan, on note A, B et C les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{w}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ (voir la figure). En notant $\vec{i}$ le vecteur unitaire égal à $\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||}$, les projections de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sur $\vec{w}$ sont égales à $k\vec{i}$ et $k'\vec{i}$, où $k = ||\vec{u}|| \times \cos(\vec{i},\vec{u})$ et $k' = ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{i},\vec{v})$. De plus, on a $\vec{w} = k''\vec{i}$, où $k'' = ||\vec{w}||$.



  - $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = (k\vec{i} + k'\vec{i})\cdot k''\vec{i} = (k+k')\vec{i}\cdot k''\vec{i} = (k+k') \times k''$
  - $\vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w} = k\vec{i}\cdot k''\vec{i} + k'\vec{i}\cdot k''\vec{i} = k \times k'' + k' \times k''$

  La propriété traduit finalement la distributivité de la multiplication des réels sur l'addition.

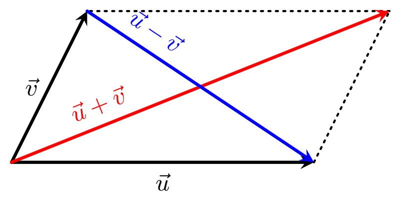
Remarques : Avec ces propriétés, nous allons pouvoir effectuer des calculs vectoriels comme on le fait avec les réels. Par exemple, on a $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} - \vec{v}\cdot\vec{w}$ ou encore $\vec{u}\cdot(2\vec{u}+3\vec{v}) = 2||\vec{u}||^2 + 3\vec{u}\cdot\vec{v}$.

On a aussi l'équivalent des identités remarquables : $\begin{cases} (\vec{u}+\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} \\ (\vec{u}-\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} \\ (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 \end{cases}$

Propriété 2.19 (Avec les normes) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

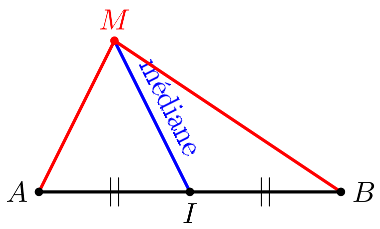
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

Démonstration Cela découle des identités ci-dessus.
On pourra utiliser ces égalités en notant que $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|$ sont les normes des vecteurs construits sur les diagonales du parallélogramme défini par $(\vec{u},\vec{v})$.



Application : Dans un triangle ABC, selon la 1re expression, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

Théorème 2.4 (Médiane) Soient A et B deux points et I leur milieu. Pour tout point M, on a :
- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$
- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$



Démonstration Développons le produit $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ en introduisant le point I :
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM})\cdot(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} + IM^2 - \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IM}$
Mais $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = -IA^2 = -\frac{AB^2}{4}$ car I est le milieu de $[AB]$
Et on a aussi $-\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IM} = (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI})\cdot\overrightarrow{IM} = \vec{0}\cdot\overrightarrow{IM} = 0$ pour la même raison.
On obtient donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = IM^2 - \frac{AB^2}{4}$

Calculons maintenant $\begin{cases} MA^2 = (\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM})^2 = IA^2 + IM^2 - 2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IM} \\ MB^2 = (\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM})^2 = IB^2 + IM^2 - 2\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IM} \end{cases}$

Par soustraction, membre à membre, on obtient :
$MA^2 - MB^2 = IA^2 - IB^2 - 2(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB})\cdot\overrightarrow{IM} = -2(\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$
Et par addition, membre à membre, on obtient :
$MA^2 + MB^2 = IA^2 + IB^2 + 2IM^2 - 2(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})\cdot\overrightarrow{IM} = 2(\frac{AB^2}{2})^2 + 2IM^2 = \frac{AB^2}{2} + 2IM^2$

Exemple 30 (Lignes de niveau) – A et B sont deux points quelconques et k un réel fixé.
➪ Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$?
En appliquant le théorème 2.4, les points M vérifient $MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k$, soit $MI^2 = \frac{AB^2}{4} + k$.
La discussion porte donc sur la valeur de k
- Si $k \geqslant -\frac{AB^2}{4}$, les points M forment un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{AB^2}{4}+k}$.
- Si $k < -\frac{AB^2}{4}$, alors aucun point M ne vérifie la relation.

➪ Quel est l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$?
L'égalité se transforme ici en $2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k$, soit $MI^2 = \frac{2k-AB^2}{4}$. Si $\frac{2k-AB^2}{4} > 0$, soit $k > \frac{AB^2}{2}$.
Les lignes de niveau k sont des cercles, de rayon $\sqrt{\frac{2k-AB^2}{4}}$.
➪ Quel est l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = k$?
L'égalité se transforme en $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{k}{2}$. Introduisons le point J de (AB) vérifiant $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{k}{2}$, soit $IJ \times AB = \pm\frac{k}{2}$, selon le signe de k, J étant plus proche de B quand $k > 0$ et plus proche de A sinon.
On a alors $(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JM})\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{k}{2}$, qui se réduit en $\overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ du fait du choix de J.
Les lignes de niveau k sont donc des droites perpendiculaires à (AB) passant par J.

Propriété 2.20 (Analytiquement) Si, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour composantes $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration Écrivons les décompositions de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ selon les vecteurs de la base $(\vec{i}, \vec{j})$:
$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, puis développons le produit scalaire à l'aide de la propriété 2.18 :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = x\vec{i} \cdot x'\vec{i} + x\vec{i} \cdot y'\vec{j} + y\vec{j} \cdot x'\vec{j} + y\vec{j} \cdot y'\vec{j} = xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + (xy' + x'y)\vec{i} \cdot \vec{j} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j}$
Quand on est dans un repère orthonormé, en appliquant la propriété 2.17, on a :

$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{i} = ||\vec{i}||^2 \cos(0) = 1 \text{ (car le repère est normé)} \\ \vec{j} \cdot \vec{j} = ||\vec{j}||^2 \cos(0) = 1 \text{ (car le repère est normé)} \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}|| \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ (car le repère est orthogonal)} \end{cases}$$

Du coup, l'expression de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se simplifie en $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Remarques :

- Si, dans une base orthonormée, le vecteur $\vec{u}$ a pour composantes $\vec{u}(x, y)$, alors cette propriété nous donne sa norme : $||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$, d'où $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ car $||\vec{u}|| \geqslant 0$.
- Si, dans un repère orthonormé, les points A et B ont pour coordonnées $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ et cette propriété nous donne la distance AB : $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, d'où $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Définition 2.14 (Vecteur normal) La droite $\mathscr{D}$ étant donnée, tout vecteur non nul, orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est appelé vecteur normal à $\mathscr{D}$.

Le théorème 2.2 énonce que l'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est l'équation cartésienne d'une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$.
Vérifions alors que le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$:
la condition analytique d'orthogonalité est vérifiée car $\vec{u} \cdot \vec{n} = (-b) \times a + a \times b = 0$.
Par conséquent $\vec{u} \perp \vec{n}$, $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{D}$.

Propriété 2.21 (Droite de vecteur normal) Le plan étant muni d'un repère orthonormé, un couple de réels $(a, b) \neq (0, 0)$ et un point $A(x_A, y_A)$ étant donnés, la droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, où $c = -(ax_A + by_A)$.
Réciproquement, toute droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet $\vec{n}(a, b)$ comme vecteur normal.

Démonstration Commençons par la réciproque : $(a, b) \neq (0, 0)$, le vecteur $\vec{u}(-b, a)$ n'est pas le vecteur nul. Comme on l'a vu, on a alors $\vec{u} \perp \vec{n}$. La droite $d(A, \vec{u})$ admet donc comme vecteur normal le vecteur $\vec{n}$.
Soit $\mathscr{D}$ la droite normale à $\vec{n}$ passant par M.
$M \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Comme $\overrightarrow{AM}(x - x_A, y - y_A)$, $M \in \mathscr{D} \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \iff ax + by - (ax_A + by_A) = 0$, et, en notant $c = -(ax_A + by_A)$, on obtient l'égalité $ax + by + c = 0$.

Exemple 31 (Médiatrice) – A et B étant deux points distincts, quelle est l'équation de Δ la médiatrice de $[AB]$?
La médiatrice de $[AB]$ est une droite normale à $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ passant par le milieu I de $[AB]$.
Or, $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ et $I(\frac{x_B + x_A}{2}, \frac{y_B + y_A}{2})$.
D'après la propriété 2.21, l'équation de Δ est :
$(x_B - x_A)x + (y_B - y_A)y - [(x_B - x_A)\frac{x_B + x_A}{2} + (y_B - y_A)\frac{y_B + y_A}{2}] = 0$.
Cette équation se simplifie en $\Delta : (x_B - x_A)x + (y_B - y_A)y + \frac{(x_A^2 + y_A^2) - (x_B^2 + y_B^2)}{2} = 0$

PROPRIÉTÉ 2.22 (CERCLE) Le plan étant muni d'un repère orthonormé, le cercle de centre Ω et de rayon R a pour équation cartésienne :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

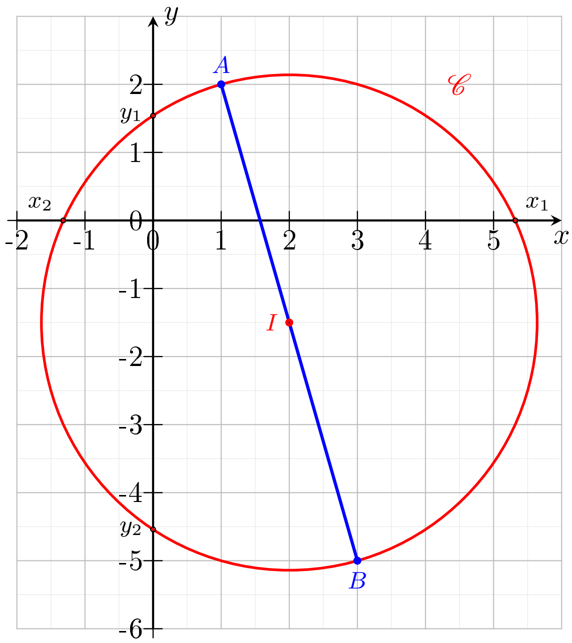
DÉMONSTRATION Un point $M(x, y)$ appartient au cercle de centre Ω et de rayon R, noté $\mathscr{C}(\Omega, R)$, si et seulement si $\Omega M = R$. Cette relation, élevée au carré, s'écrit $AM^2 = R^2$.
D'après la propriété 2.20, $AM^2 = (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2$.

Remarques : Un cercle est donné de différentes manières :

- Si on connait le centre Ω et un point A du cercle, le rayon est ΩA. On obtient alors l'équation du cercle $\mathscr{C}(\Omega, \Omega A)$ en remplaçant R^2 par $(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2$.
- Si on connait un diamètre, c'est-à-dire les extrémités A et B d'un cercle, on peut appliquer l'une ou l'autre des méthodes suivantes :
  - Le centre est le milieu I de $[AB]$ de coordonnées $I(\frac{x_B+x_A}{2}, \frac{y_B+y_A}{2})$, le rayon est ΩI.
    L'équation cherchée est celle du cercle $\mathscr{C}(I, IA)$:
    $(x - \frac{x_B+x_A}{2})^2 + (y - \frac{x_B+x_A}{2})^2 = \frac{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}{4}$.
  - Ainsi qu'on l'a vu dans l'exemple 30, k étant un réel supérieur à $-\frac{AB^2}{4}$, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ est un cercle de centre I (milieu de $[AB]$) et de rayon $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$. Lorsque $k = 0$, le rayon est égal à $\frac{AB}{2}$; le cercle est donc le cercle diamètre $[AB]$. L'équation du cercle de diamètre $[AB]$ est donc obtenue en écrivant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Il suffit donc de développer l'expression : $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.
- On a remarqué qu'une équation développée de cercle s'écrivait $x^2 + \alpha x + y^2 + \beta y + \gamma = 0$. Cependant, toutes les équations de ce type ne sont pas des équations de cercle ! En essayant de factoriser pour obtenir la forme standard $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$, on est conduit à écrire $(x + \frac{\alpha}{2})^2 + (y + \frac{\beta}{2})^2 - (\frac{\alpha}{2})^2 - (\frac{\beta}{2})^2 + \gamma = 0$. L'existence du cercle est conditionnée par le signe de $\delta = (\frac{\alpha}{2})^2 + (\frac{\beta}{2})^2 - \gamma$: si $\delta \geqslant 0$, le cercle existe et a pour rayon $\sqrt{\delta}$; sinon, le cercle n'existe pas.

EXEMPLE 32 – Appliquons sur un exemple numérique les deux méthodes indiquées dans le cas où le diamètre est connu :
Soient $A(1, 2)$ et $B(3, -5)$. Déterminons l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$:

- I a pour coordonnées $I(\frac{1+3}{2}, \frac{2-5}{2})$.
  Le rayon IA mesure
  $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(1-3)^2+(2+5)^2}}{2}$, soit $\frac{\sqrt{53}}{2}$.
  Le cercle $\mathscr{C}(I, IA)$ a pour équation :
  $(x - 2)^2 + (y + 1,5)^2 = \frac{53}{4}$
  $\iff x^2 - 4x + 4 + y^2 + 3y + 2,25 = 13,25$
  $\iff x^2 - 4x + y^2 + 3y - 7 = 0$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ s'écrit ici
  $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$
  $\iff (x - 1)(x - 3) + (y - 2)(y + 5) = 0$
  $\iff x^2 - 4x + 3 + y^2 + 3y - 10 = 0$
  $\iff x^2 - 4x + y^2 + 3y - 7 = 0$



Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées ?
Les points de $\mathscr{C} \cap (Ox)$ vérifient $x^2 - 4x - 7 = 0$, on trouve $x = 2 \pm \sqrt{11}$ soit $x_1 \approx 5,32$ et $x_2 \approx -1,32$.
Les points de $\mathscr{C} \cap (Oy)$ vérifient $y^2 + 3y - 7 = 0$, on trouve $y = \frac{-3\pm\sqrt{37}}{2}$ soit $y_1 \approx 1,54$ et $y_2 \approx -4,54$.

c. Applications du produit scalaire en trigonométrie

Propriété 2.23 (Formules d'addition) Quels que soient les réels a et b, on a :

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$; $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$; $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Démonstration

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique associé et a et b deux réels. On note A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses curvilignes a et b. Leurs coordonnées sont :

$$A(\cos(a), \sin(a)) \text{ et } B(\cos(b), \sin(b)).$$

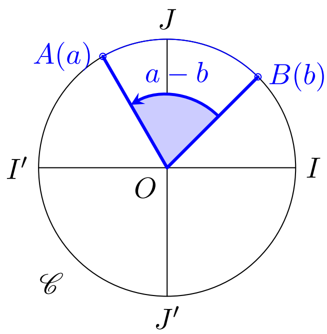
Calculons, de deux façons différentes, le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$:

➪ La propriété 2.17 nous donne :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(a-b) = \cos(a-b).$$

➪ La propriété 2.20 nous donne :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$



Par identification de ces deux expressions, on obtient $(\star)$: $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
Avec $b' = -b$ dans $(\star)$: $\cos(a+b') = \cos(a)\cos(-b') + \sin(a)\sin(-b') = \cos(a)\cos(b') - \sin(a)\sin(b')$.
Ensuite, pour calculer $\sin(a+b)$, on utilise l'égalité $\sin(a+b) = \cos[\frac{\pi}{2} - (a+b)]$. On obtient :

$$\sin(a+b) = \cos[(\tfrac{\pi}{2} - a) - b] = \cos(\tfrac{\pi}{2} - a)\cos(b) + \sin(\tfrac{\pi}{2} - a)\sin(b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

Finalement, en posant $b' = -b$ dans cette troisième égalité, on obtient la dernière.

Exemple d'application : Calculons les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$:
Pour cela, remarquons que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ et appliquons les formules.

$$\cos(\tfrac{\pi}{12}) = \cos(\tfrac{\pi}{3})\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \sin(\tfrac{\pi}{3})\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} \times \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1).$$

$$\sin(\tfrac{\pi}{12}) = \sin(\tfrac{\pi}{3})\cos(\tfrac{\pi}{4}) - \cos(\tfrac{\pi}{3})\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \times \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{1}{2} \times \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

Propriété 2.24 (Formules de duplication) Si a est un réel, alors on a :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \quad ; \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Démonstration il suffit d'appliquer les formules de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ en prenant $b = a$.
Pour $\cos(2a)$, on obtient $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$.
En utilisant alors la relation $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, on obtient les deux autre formules :
$\cos(2a) = \cos^2(a) - [1 - \cos^2(a)] = 2\cos^2(a) - 1$ et $\cos(2a) = [1 - \sin^2(a)] - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a)$.

Ces dernières égalités permettent d'exprimer $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$ en fonction de $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$:

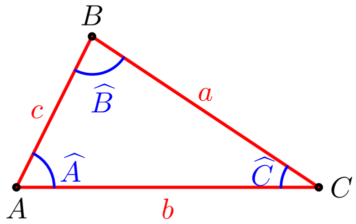
Propriété 2.25 (Formules de linéarisation) Si a est un réel, alors on a

$$\cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2} \quad ; \quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Exemple d'application : Calculons les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$:
Avec $a = \frac{\pi}{8}$, on a $2a = \frac{\pi}{4}$ et

$$\begin{cases} \cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{\cos(\frac{\pi}{4})+1}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \text{ d'où, comme } \cos(\frac{\pi}{8}) > 0, \ \cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1-\sin(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \text{ d'où, comme } \sin(\frac{\pi}{8}) > 0, \ \sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

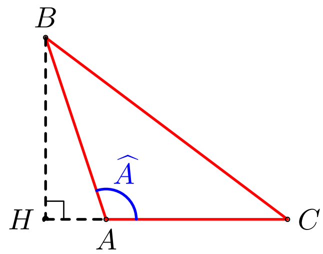
Théorème 2.5 (Loi des cosinus) Soit ABC un triangle quelconque. En notant $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :
$\cos(\widehat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos(\widehat{B}) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $\cos(\widehat{C}) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



Démonstration Pour la première de ces égalités, il suffit d'écrire :
$a^2 = BC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = b^2 + c^2 - 2||\overrightarrow{AC}|| \times ||\overrightarrow{AB}|| \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.
D'où on tire $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$, que l'on transforme en $\cos(\widehat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.
Pour les deux autres, il n'y a qu'à permuter les points.

Remarque : Ce théorème porte plusieurs noms. Le nom choisi « loi des cosinus » souligne la complémentarité avec le théorème suivant (loi des sinus). L'appellation « Théorème d'Al-Kashi [2] est répandue depuis peu, essentiellement en France. Le théorème porte, de façon plus ancienne, le nom de « théorème de Pythagore généralisé » car il étend effectivement la portée du théorème de Pythagore aux triangles non rectangles. Le triangle est rectangle si et seulement si un des cosinus est nul.

La généralisation du théorème de Pythagore est très ancienne puisqu'elle est déjà présente dans l'œuvre d'Euclide (Livre II, propositions 12 et 13).
Pour un triangle obtusangle, l'angle $\widehat{A}$ étant obtus :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AH \times AC$.
Dans cette expression, le terme $2AH \times AC$ s'écrit plutôt aujourd'hui $-2AB \times AC \times \cos(\widehat{CAB})$, mais comme $AH = AB \times \cos(\widehat{HAB})$ et $\cos(\widehat{HAB}) = \cos(\pi - \widehat{CAB}) = -\cos(\widehat{CAB})$, il s'agit bien de la même loi.

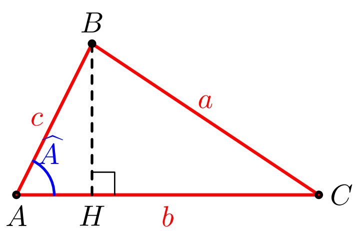


Exemple d'application : Ce théorème permet, en triangulation [3], de résoudre un triangle.

1. Lorsqu'on connait les trois côtés a, b et c d'un triangle, on peut déterminer les angles de ce triangle. Avec les notations ci-dessus, si $a = 11$, $b = 7$ et $c = 5$, le triangle ABC a pour angles :
$\widehat{A} = \cos^{-1}(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}) = \cos^{-1}(\frac{49+25-121}{70}) = \cos^{-1}(\frac{-47}{70}) \approx 2,3069\text{rad}$, soit environ 132°.
$\widehat{B} = \cos^{-1}(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}) = \cos^{-1}(\frac{121+25-49}{110}) = \cos^{-1}(\frac{97}{110}) \approx 0,4911\text{rad}$, soit environ 28°.
$\widehat{C} = \cos^{-1}(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}) = \cos^{-1}(\frac{121+49-25}{77}) = \cos^{-1}(\frac{145}{154}) \approx 0,3436\text{rad}$, soit environ 20°.
2. Lorsqu'on connait un angle et les deux côtés adjacents, par exemple $\widehat{A}$ et b et c, on peut déterminer le 3e côté et en déduire les deux autres angles.
Si on a $\widehat{A} = \frac{\pi}{5}$, $b = 1$ et $c = 2$, on en déduit :
$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})} = \sqrt{5 - 4\cos(\frac{\pi}{5})} \approx \sqrt{1,763932} \approx 1,328$.

Propriété 2.26 (Aire) Soit ABC un triangle et $\mathscr{S}$ son aire.
Avec les notations précédentes, on a :

$$\mathscr{S} = \frac{bc\sin(\widehat{A})}{2} = \frac{ac\sin(\widehat{B})}{2} = \frac{ab\sin(\widehat{C})}{2}$$



2. Ghiyath Al-Kashi(1380-1429) » est un mathématicien perse, 1er astronome de l'observatoire de Samarcande.
3. Technique permettant de déterminer la position d'un point en mesurant les angles entre ce point et d'autres points

DÉMONSTRATION Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC).
Alors $\mathscr{S} = \frac{AC\times BH}{2} = \frac{b\times BH}{2}$, or $BH = c\sin(\widehat{A})$ si $\widehat{A}$ est aigu comme sur la figure.
Si $\widehat{A}$ est obtus, comme sur la figure précédente, la propriété du sinus : $\sin(\pi - \widehat{A}) = \sin(\widehat{A})$ entraîne le même résultat $BH = c\sin(\pi - \widehat{A}) = c\sin(\widehat{A})$. Dans tous les cas, on a donc $\mathscr{S} = \frac{bc\sin(\widehat{A})}{2}$.
Les autres expressions de $\mathscr{S}$ s'obtiennent en permutant les points.

EXEMPLE 33 – En guise d'exemple, établissons la belle formule de Héron [4] :

PROPRIÉTÉ 2.27 (FORMULE DE HÉRON) Soit ABC un triangle.
Avec les notations précédentes, en ajoutant p pour le demi-périmètre du triangle, soit $p = \frac{a+b+c}{2}$, on a :

$$\mathscr{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

DÉMONSTRATION Partant de $\mathscr{S} = \frac{ab\sin(\widehat{C})}{2}$, de la loi des cosinus $\cos(\widehat{C}) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, et de la relation $\cos^2(\widehat{C}) + \sin^2(\widehat{C}) = 1$, on commence par écrire que $\sin(\widehat{C}) = \sqrt{1-\cos^2(\widehat{C})}$ et on obtient :

$$\mathscr{S} = \frac{2ab\sqrt{[1-\cos(\widehat{C})][1+\cos(\widehat{C})]}}{4} = \frac{\sqrt{[2ab-2ab\cos(\widehat{C})][2ab+2ab\cos(\widehat{C})]}}{4}$$

C'est ici que la loi des cosinus intervient, remplaçant $2ab\cos(\widehat{C})$ par $a^2+b^2-c^2$:

$$\mathscr{S} = \frac{\sqrt{[2ab-a^2-b^2+c^2][2ab+a^2+b^2-c^2]}}{4}$$

Intervient alors une factorisation en deux étapes :

$$\mathscr{S} = \frac{\sqrt{[c^2-(a-b)^2][(a+b)^2-c^2]}}{4} = \frac{\sqrt{[c-(a-b)][c+(a-b)][(a+b)-c][(a+b)+c]}}{4} = \sqrt{\frac{c-a+b}{2}\frac{c+a-b}{2}\frac{a+b-c}{2}\frac{a+b+c}{2}}$$

C'est ici que l'on introduit p car $\frac{c-a+b}{2} = \frac{2p-2a}{2} = p-a$, et de même, $\frac{c+a-b}{2} = p-b$ et $\frac{a+b-c}{2} = p-c$:

$$\mathscr{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Application numérique : $a = 11$, $b = 7$ et $c = 5$. Le demi-périmètre est $p = \frac{23}{2} = 11,5$ et l'aire du triangle $\mathscr{S} = \sqrt{11,5\times 0,5\times 4,5\times 6,5} = \sqrt{168,1875} \approx 12,969$.

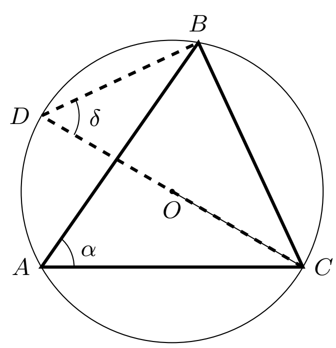
THÉORÈME 2.6 (LOI DES SINUS) Soit ABC un triangle.
Avec les notations précédentes, en ajoutant R pour le rayon du cercle circonscrit au triangle, on a :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = \frac{abc}{2\mathscr{S}} = 2R$$

DÉMONSTRATION On divise chaque membre des égalités de la propriété 2.26 par $\frac{abc}{2}$:

$$\frac{2\mathscr{S}}{abc} = \frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$$

Pour compléter la série d'égalités, on applique le théorème 2.3 à la configuration ci-contre, où le point D est le symétrique de C par rapport à O.
Les angles α et δ étant égaux ou supplémentaires (si D et C ne sont pas sur le même arc $\widehat{BC}$, i.e. s'ils sont de part et d'autre de $[BC]$), leurs sinus sont toujours égaux. Or, comme $\widehat{DBC}$ est droit, $\sin(\delta) = \frac{BC}{DC} = \frac{a}{2R}$.
On en déduit que $\frac{2\mathscr{S}}{abc} = \frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\delta)}{a} = \frac{a}{a\times 2R} = \frac{1}{2R}$.
Par passage à l'inverse, on obtient les résultats annoncés.



4. Héron d'Alexandrie est un ingénieur, mécanicien et mathématicien grec du I^{er} siècle après J.-C.

Le coin du chercheur

❊ Quelques formules de trigonométrie, possiblement utiles pour la suite, à démontrer :

- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\times\tan\beta})$

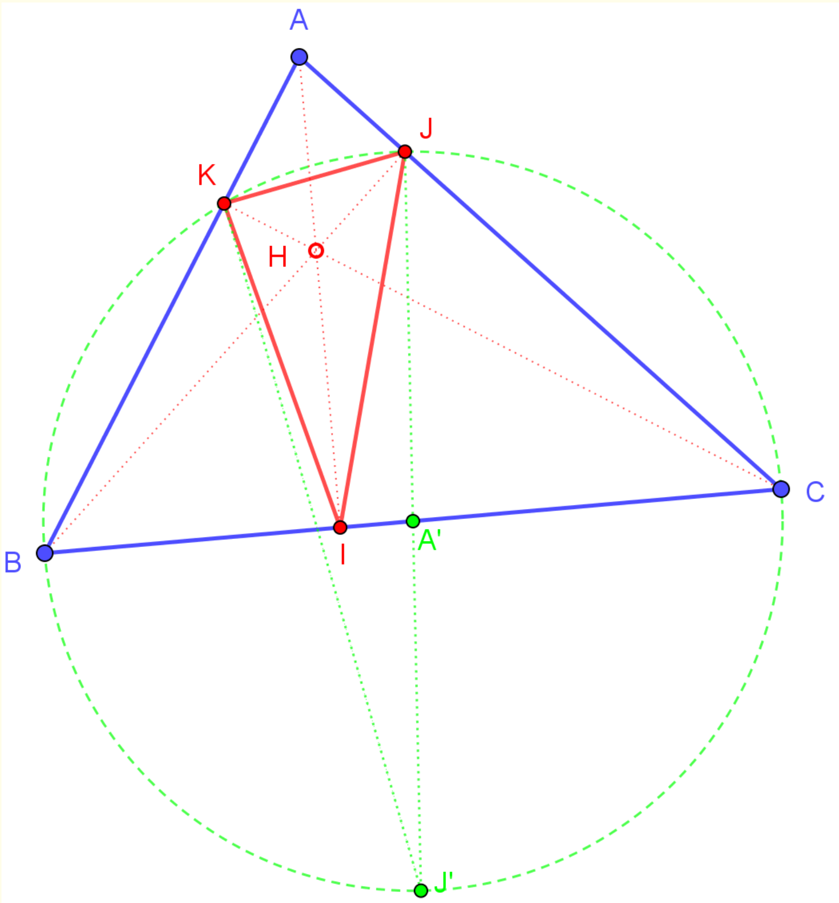
❊ Relations trigonométriques dans un triangle ABC

Établir, pour tout triangle ABC, les relations suivantes qui utilisent les notations habituelles : $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $p = \frac{a+b+c}{2}$

$\mathscr{S}$: aire du triangle ABC, R : rayon du cercle circonscrit au triangle ABC

- $\sin(2\widehat{A}) + \sin(2\widehat{B}) + \sin(2\widehat{C}) = 4\sin(\widehat{A})\sin(\widehat{B})\sin(\widehat{C})$
- $\sin(\widehat{A}) + \sin(\widehat{B}) + \sin(\widehat{C}) = 4\cos(\frac{\widehat{A}}{2})\cos(\frac{\widehat{B}}{2})\cos(\frac{\widehat{C}}{2})$
- $\sin(\widehat{A}) + \sin(\widehat{B}) + \sin(\widehat{C}) = \frac{p}{R}$
- $\sin(\widehat{A}) \times \sin(\widehat{B}) \times \sin(\widehat{C}) = \frac{S}{2R^2}$
- $a\cos(\widehat{A}) + b\cos(\widehat{B}) + c\cos(\widehat{C}) = \frac{abc}{2R^2} = \frac{8\mathscr{S}^2}{abc} = \frac{2\mathscr{S}}{R}$

➩ Dans le cas d'un triangle acutangle (trois angles aigus), la dernière relation donne le périmètre du triangle orthique (ses sommets I, J et K sont les pieds des hauteurs issues de A, B et C). On peut montrer cela aussi en prouvant, par exemple, que $IJ = a\cos(\widehat{A})$ (utiliser le point J', symétrique de J par rapport à A', le milieu de $[BC]$).



❊ Démontrer que si le triangle ABC n'est pas rectangle, on a :
$\tan(\widehat{A}) + \tan(\widehat{B}) + \tan(\widehat{C}) = \tan(\widehat{A}) \times \tan(\widehat{B}) \times \tan(\widehat{C})$

MÉTHODE (FICHE DE RÉVISION)

Un condensé non exhaustif des notions importantes du chapitre

➲ Vecteurs	composantes dans une base : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$
colinéarité	$\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ colinéaires $\iff xy' - x'y = 0$
droite	cartésiennes : $ax + by + c = 0$; réduite : $y = mx + p$ ou $x = k$
	vecteur directeur : $\overrightarrow{u}(-b, a)$; vecteur normal : $\overrightarrow{n}(a, b)$
produit scalaire	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert \times \lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$, en particulier : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$, en particulier : $\lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert^2 = x^2 + y^2$
	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\lvert\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert\rvert^2 - \lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert^2 - \lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert^2\right) = \frac{1}{2}\left(\lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert^2 + \lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert^2 - \lvert\lvert\vec{u}-\vec{v}\rvert\rvert^2\right)$
propriétés	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$; $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
médiane	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$; $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$
	$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$; $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$
angles orientés	Relation de Chasles : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v})$
	$(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \ [2\pi]$; $(\vec{u}, \vec{-}u) = \pi \ [2\pi]$; $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$
	$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi \ [2\pi]$; $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \ [2\pi]$
cercle	$M(x, y) \in \mathscr{C}(\Omega, R) \iff \Omega M = R$
	équation de $\mathscr{C}$: $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$
	équation du cercle de diamètre $[AB]$: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
aire du triangle	formule de Heron $\mathscr{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ avec $p = \frac{a+b+c}{2}$
	$\mathscr{S} = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$

➲ Trigonom.	$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$;$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
périodicité	période 2π : cos et sin ; période π : tan
angles associés	$\cos(-x) = \cos x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$
	$\sin(-x) = -\sin x$; $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$
	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
	$\sin(x + 2\pi) = \sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
équations	$\cos x = \cos y \iff x = \pm y \ [2\pi]$
	$\sin x = \sin y \iff x = y$ ou $x = \pi - y \ [2\pi]$
	$\sin x = \cos y \iff \frac{\pi}{2} - x = \pm y \ [2\pi]$
addition	$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
	$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$; $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
duplication	$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$; $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
linéarisation	$\cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}$; $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$
loi des cosinus	$\cos(\widehat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos(\widehat{B}) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $\cos(\widehat{C}) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
loi des sinus	$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = \frac{abc}{2\mathscr{S}} = 2R$

3

Les suites

Objectifs :

- Découvrir différents types de suites et savoir les représenter graphiquement
- Mettre en œuvre un algorithme pour obtenir les termes d'une suite et la somme de ces termes
- Reconnaitre une suite arithmétique ou géométrique ; connaître les propriétés de ces suites
- Étudier les propriétés d'une suite : monotonie, bornes, limite et période éventuelles

Aperçu historique :

L'usage de suites numériques se retrouve dans des documents très anciens où sont décrits des procédés répétitifs de calcul, de véritables algorithmes :

- *En Grèce, au III^e siècle avant J.-C., Archimède calcule le nombre π avec une belle précision grâce à un tel procédé. Pour se faire il encadre l'aire d'un cercle par ceux de deux hexagones encadrant le cercle, puis il montre comment en déduire un nouvel encadrement par les aires de deux dodécagones. Et il poursuit jusqu'à utiliser des polygones à 96 côtés en doublant, à chaque étape, le nombre de côtés des polygones. Il parvient aussi, à l'aide ce type d'approche, à calculer d'autres aires et volumes.*
- *En Grèce, au I^er siècle après J.-C., Héron d'Alexandrie décrit une méthode très efficace pour extraire une racine carrée : pour calculer le côté d'un carré d'aire 2 – donc pour calculer $\sqrt{(2)}$ – partir d'un rectangle de côtés $a = 2$ et $\frac{2}{a} = 1$, puis recommencer en prenant pour nouvelle valeur de a la moyenne entre ces deux mesures. Cette méthode, qui conduit très rapidement à un résultat d'une grande précision, était vraisemblablement connue depuis longtemps puisqu'une tablette babylonienne (YBC7289), vieille de plus de 3600 ans donne le résultat de cet algorithme poussé jusqu'à la 4^e étape.*

Léonard de Pise (Fibonaci) expose au XIII^e siècle sa célèbre suite ; au XIV^e, Nicolas Oresme a clairement exposé les suites que l'on appelle désormais arithmétique et géométrique ; Au XVII^e, Bernoulli, Newton, De Moivre, Stirling, Wallis, entre autres s'intéressent aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à ce moment notamment qu'est précisée la notion de limite. Au début du XIX^e, Lagrange[1] utilise la notation indicielle u_n et Cauchy fonde la théorie des suites. À partir de la seconde moitié du XX^e siècle, l'utilisation des ordinateurs va réactiver l'intérêt portés aux suites puisqu'ils permettent de pousser très loin et très vite les calculs, par nature répétitifs, liés aux suites.

1. Généralités

a. Définition

Définition 3.1 (suite numérique) Une suite est une fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ à partir d'un certain rang, noté n_0. L'image d'un entier n par la suite u est notée u_n (lire « u indice n »). u_n est le « terme général » de la suite. Celle-ci est notée $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

1. Joseph Louis Lagrange (1736 Turin - 1813 Paris) est connu pour avoir introduit la méthode analytique en géométrie

Remarques et premiers exemples :

- Généralement, une suite numérique commence à partir de $n = 0$: son 1[er] terme est alors u_0, le 2[e] terme est u_1, etc. Le n^e terme est u_{n-1}. Elle peut être notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite de terme générale $u_n = 2n$ est définie à partir de $n = 0$, c'est la suite des nombres pairs.
- Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un rang $n_0 \neq 0$, par exemple à partir de $n = 1$. Le n^e terme de la suite est alors le terme de rang $n_0 + n - 1$. La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est définie à partir de $n = 1$, c'est la suite des inverses d'entiers. La suite de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-2}}$ n'est définie qu'à partir du rang $n = 3$, on la note $(v_n)_{n\geqslant 3}$.
- La notation indicielle est une spécificité des suites qui est commode et fixée par l'usage, mais la notation fonctionnelle lui est strictement équivalente. On peut ainsi définir une suite u comme une fonction $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = n^2 \end{array}$. Généralement, on ne fait pas ça. On préfère définir une fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$, et ensuite la suite u de terme général $u_n = f(n)$.
- Attention, avec la notation indicielle, a bien noter l'indice plus bas et en petits caractères. Ceci, afin de distinguer u_{n+1} et $u_n + 1$ qui sont généralement différents. Avec la suite des carrés définie par $u_n = n^2$, on a $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ tandis que $u_n + 1 = n^2 + 1$.
- Une suite numérique peut être définie sans que son terme général soit connu explicitement, en fonction du rang n. Généralement, il y a alors une « relation de récurrence » : u_n est connu à partir de u_{n-1}, ou bien à partir de plusieurs termes précédents, ce qui permet de calculer les termes de proche en proche, comme dans l'exemple 35.

EXEMPLE 34 – La suite des troncatures du nombre irrationnel π présente un intérêt indéniable si l'on en juge par l'histoire de cette suite, vieille de plusieurs dizaines de siècles, qui se poursuit encore de nos jours : Archimède en détermina, il y a plus de 20 siècles, le 4[e] terme, et en 2010, A. Yee et S. Kondo, en ont calculé le 5 000 000 000 000[e] terme ! Si on note Π_n le terme général de cette suite, le nombre π serait égal à Π_∞. On dira, dans ce cas, que la suite Π « converge » vers le nombre π.

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_0 = 3 & ; & \Pi_1 = 3,1 & ; & \Pi_2 = 3,14 \\ \Pi_3 = 3,141 & ; & \Pi_4 = 3,1416 & ; & \text{etc.} \end{array}$$

EXEMPLE 35 – La suite de Fibonacci [2] est définie par une relation de récurrence qui porte sur les deux derniers termes : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ et par la donnée des deux premiers termes $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. On peut ainsi calculer, de proche en proche, chacun des termes de la suite :

$$\begin{array}{ccccc} F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1 & ; & F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2 & ; & F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3 \\ F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5 & ; & F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8 & ; & \text{etc.} \end{array}$$

Ce genre de définition se prête très bien à la programmation puisqu'il suffit d'écrire une boucle `Pour i allant de 2 à n` (voir plus bas). On peut, à l'aide d'un tel programme, déterminer très rapidement $F_{12} = 144$ (c'est encore facile à la main) ou bien $F_{100} = 354\,224\,848\,179\,261\,915\,075$. Cependant, l'établissement d'une relation explicite qui permettrait de calculer directement u_n à partir de n n'est pas aisé. Une telle relation existe pourtant. C'est la formule de Binet :

$$F_n = \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\sqrt{5}}, \text{ où } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \varphi' = \frac{-1}{\varphi}$$

Il faut avouer que cette formule est surprenante puisqu'elle produit des entiers à partir de nombres irrationnels. Cette suite, de par sa définition très simple, intervient dans de nombreux domaines des

2. Leonardo Fibonacci (1175-1250) a introduit la suite qui porte son nom dans son livre *Liber Abaci* : « Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

mathématiques, tout comme le nombre φ, appelé « nombre d'or », à laquelle elle est liée.

Algorithme

```
Lire n
a=0
b=1
Pour i allant de 2 à n
    c=a+b
    a=b
    b=c
Fin du Pour
Afficher b
```

Programme en Python

Noter ici l'absence de la variable supplémentaire c, due à une affectation du nouveau couple (a,b) à partir de l'ancien. Le contrôle de la boucle est modifié : il va de 1 à n-1. On aurait pu aussi écrire `range(2,n+1)`

```
n=int(input("n="))
a=1
for i in range(1,n)
    a,b=b,a+b
print("F{}={}".format(n,b))
```

Pour une Casio

```
"N"?→ N
0 → A
1 → B
For 2 → I To N
A+B → C
B → A
C → B
Next
B ◢
```

Pour une TI

```
Prompt N
0 → A
1 → B
For (I,2,N)
A+B → C
B → A
C → B
End
Disp B
```

b. Les différents types de définitions

On a déjà donné des exemples de suites définies explicitement en fonction de n :

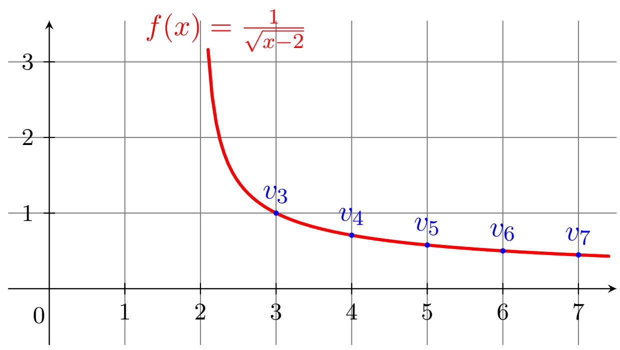
- la suite des nombres pairs : $u_n = 2n$
- la suite des carrés : $u_n = n^2$
- la suite des inverses : $u_n = \frac{1}{n}$
- la suite de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-2}}$.

Dans chacun de ces exemples, il y a une fonction sous-jacente, définie sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle $[a; +\infty[$, où a est un entier. Dans le dernier exemple, la fonction sous-jacente f , définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$, a pour ensemble de définition $I =]2; +\infty[$. Comme $[3; +\infty[\subset I$, la suite v est définie pour $n \geqslant 3$.

Définition 3.2 (suite définie explicitement) Soient $a \in \mathbb{N}$, et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$.
La suite $(u_n)_{n \geqslant a}$ de terme général $u_n = f(n)$ est une suite définie explicitement par la fonction f.

Remarque :

Il est facile de calculer un terme quelconque d'une suite définie explicitement par une fonction f (on remplace n par sa valeur). On verra que le comportement de ce type de suites (croissance, limite) se calque sur celui de f. Il est en particulier facile de représenter graphiquement ce type de suite : il suffit de placer, sur la courbe de la fonction, les points de coordonnées $(n; f(n))$
Voir l'illustration ci-contre pour la suite v (les valeurs de v_n se lisent sur l'axe des ordonnées)



Certaines suites sont définies explicitement par leur rang n alors qu'on ne sait pas exprimer de fonction sous-jacente. Donnons comme exemple la suite s dont le terme général s_n est la somme des chiffres de n en base dix. Il n'y a pas de fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui corresponde à cette notion (pour un irrationnel, cette somme est infinie donc non définie). Pourtant, on peut facilement déterminer n'importe que terme de cette suite : $s_{101} = 2$, $s_{123\,456\,789} = 45$, etc.

Définition 3.3 (suite définie implicitement) Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est définie implicitement si le terme général est donné par une description, valable à partir du rang n_0, qui permet de l'identifier, sans forcément fournir le moyen de le déterminer.

Exemple 36 – La somme « aliquote » a_n des diviseurs de n inférieurs à n est définie pour tout entier $n > 0$. Par exemple, les diviseurs stricts de 12 étant $1, 2, 3, 4$ et 6, la somme aliquote a_{12} vaut $1+2+3+4+6 = 16$. On qualifie ces diviseurs de « stricts » ou de « propres », l'expression « partie aliquote » étant aujourd'hui quelque peu désuète. Il est donc possible de calculer chacun des termes de la suite a sans disposer d'une écriture mathématique qui exprime a_n en fonction de n. Cette écriture existe ici, mais elle est compliquée et passe par la décomposition en facteurs premiers de n).

$$a_1 = 0 \ ; \ a_2 = 1 \ ; \ a_3 = 1 \ ; \ a_4 = 3 \ ; \ a_5 = 1 \ ; \ a_6 = 6 \ ; \ a_7 = 1 \ ; \ a_8 = 7$$
$$a_9 = 4 \ ; \ a_{10} = 8 \ ; \ a_{11} = 1 \ ; \ a_{12} = 16 \ ; \ a_{13} = 1 \ ; \ a_{14} = 10 \ ; \ a_{15} = 9 \ ; \quad \text{etc.}$$

La suite ainsi formée $0, 1, 1, 3, 1, 6, 1, 7, 4, 8, 1, 16, 1, 10, 9,$ etc. peut être poursuivie autant qu'on le souhaite. Le moyen le plus commode, si on cherche à en déterminer un grand nombre de termes, est d'écrire un algorithme simple (voir ci-dessous). Cette suite étant importante, elle est référencée dans l'Encyclopédie en ligne des suites d'entiers de N.J.A. Sloane[3] sous le numéro $A001065$.

Algorithme

```
Lire n
a=1
Pour i allant de 2 à n
    si reste(a;i)=0
        alors a=a+i
    fin du si
Fin du Pour
Afficher a
```

Programme en Python

Le reste de la division euclidienne de n par i, noté reste(a ;i) dans l'algorithme, s'écrit n%i en Python. Noter aussi le test de l'égalité avec deux =, à distinguer de l'affectation qui se note avec un seul =.

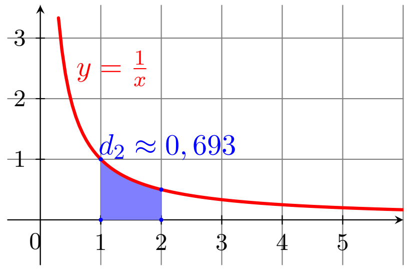
```
n,a=int(input("n=")),1
for i in range(2,n+1):
    if n%i==0 : a+=i
print("a{}={}".format(n,a))
```

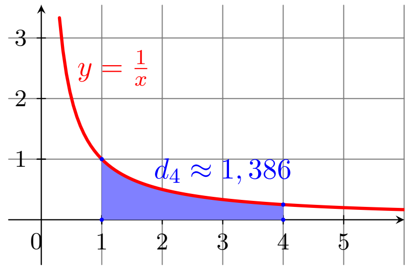
3. Chercher la suite sur le site de Sloane : https ://oeis.org/ en tapant les premiers termes 0, 1, 1, 3, 1, 6, 1, 7

Exemple 37 –

La suite (d_n) est définie pour tout $n \geqslant 1$ par l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction inverse (la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = n$. Les surfaces colorées sur nos illustrations pour $n = 2$ et $n = 4$ ont pour aire des nombres correspondant à d_2 et d_4.
La fonction sous-jacente existe bien mais elle n'est pas encore connue en classe de première : il s'agit du logarithme népérien de n, noté $\ln(n)$. Sans connaître cette fonction, on range la suite d parmi les suites définies implicitement. On peut en déterminer des valeurs approchées avec un algorithme (sauriez-vous l'écrire ?). Voici les premiers termes, obtenus à la calculatrice ; excepté le 1er, ce ne sont que des valeurs approchées, ces nombres étant tous irrationnels :

$$d_1 = 0 \quad ; \; d_2 = 0,693 \; ; \; d_3 = 1,099 \; ; \; d_4 = 1,386$$
$$d_5 = 1,610 \; ; \; d_6 = 1,792 \; ; \; d_7 = 1,946 \; ; \qquad \text{etc.}$$





Dans l'exemple 35, le n^e terme F_n de la suite de Fibonaci est déterminé à l'aide des deux termes précédents. Il suffit alors de connaître les deux premiers termes pour que toute la suite soit définie. Ce type de définition – une relation de récurrence – admet de nombreuses variantes, mais celle que nous étudierons plus particulièrement ici est la plus simple de toutes : le terme u_n est défini à l'aide du terme précédent u_{n-1} uniquement et d'un 1er terme u_{n_0}.

Définition 3.4 (suite définie par récurrence) Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$, et soit $a \in I$. La suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est définie par récurrence.

Remarques :

- La condition $f(I) \subset I$ est importante. Sans elle, on ne peut garantir l'existence de la suite : il est possible qu'un certain u_n soit dans I, mais que $f(u_n) = u_{n+1}$ n'y soit pas. Dans ce cas, on ne peut pas construire le terme u_{n+2}.
- Une suite définie explicitement peut gagner à être traduite en suite définie par récurrence, pour un calcul algorithmique plus efficace. La suite des factorielles $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ peut être avantageusement définie par la relation de récurrence $u_n = u_{n-1} \times n$ et la condition initiale $u_0 = 1$. C'est d'ailleurs ainsi qu'une calculatrice calcule le nombre $n!$
- Une même fonction f peut définir plusieurs suites par récurrence. Il suffit de changer la condition initiale pour changer la suite. La suite des nombres pairs $u_n = 2n$ peut être définie par la relation de récurrence : $u_n = u_{n-1} + 2$, avec la condition initiale $u_0 = 0$, mais la même fonction : $x \mapsto x + 2$ sert à définir la suite des nombres impairs (la même relation de récurrence $u_n = u_{n-1} + 2$ et une valeur initiale différente $u_0 = 1$).
- Une même fonction f peut définir deux suites u et v différentes : $u_n = f(n)$ et $v_n = f(v_{n-1})$. Seule la dernière est une suite définie par récurrence. La fonction : $x \mapsto x + 2$ définit, on l'a dit, les suites des nombres pairs/impairs par récurrence, mais aussi, explicitement cette fois, la suite $u_n = 2 + n$ qui n'est que la suite décalée des nombres entiers $(2, 3, 4, 5, \text{etc.})$.

Exemple 38 – Soit la suite (u_n), définie par u : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{u_{n-1}+1}{2} \end{cases}$.

La fonction f qui définit $u_n = f(u_{n-1})$ est la fonction affine : $x \mapsto \frac{x+1}{2}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, on a bien $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_f$ donc la condition $f(I) \subset I$ est satisfaite.

Calculons les premiers termes de u :

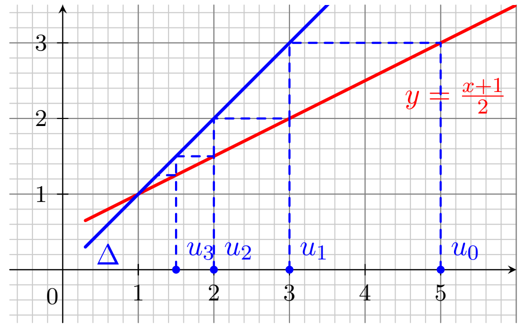
$u_1 = \frac{u_0+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$u_2 = \frac{u_1+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$u_3 = \frac{u_2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

Pour calculer un terme de rang donné, on est obligé de calculer tous les termes précédents. On peut déterminer u_{10} à la main mais s'il faut déterminer u_{100} ou $u_{10\,000}$, il faudra sans doute mettre au point un programme qui effectuera sans peine (et sans erreur) cette tâche (voir le programme de l'exemple 35).
Le tableur (« calc » de la suite OpenOffice ou « Excel » de Microsoft) est un outil assez adapté à ce genre d'opérations répétitives : on entre les valeurs et formules de calcul des deux premières lignes (entrer 0 cellule $A1$, 5 cellule $B1$ et `=(B1+1)/2` cellule $C1$, entrer ensuite 1 cellule $A2$, `=C1` cellule $B2$ et `=(B2+1)/2` cellule $C2$) puis on recopie la dernière ligne vers le bas à l'aide de la poignée noire. Cette solution convient pour u_{100} mais pas pour $u_{10\,000}$.

La représentation graphique de ce type de suite permet d'en visualiser le comportement : on trace la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe représentative de la fonction f. En plaçant u_0 sur l'axe des abscisses, on pourrait lire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées, mais cette valeur est reportée sur l'axe des abscisses grâce à Δ (voir l'illustration). On recommence ensuite le procédé avec u_1, puis u_2, etc.



Exemple 39 – Donnons un 2e exemple de suite définie par une récurrence simple : soit la suite (p_n), définie par $p : \begin{cases} p_0 = 2 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{1+p_{n-1}} \end{cases}$

La fonction g qui définit $p_n = g(p_{n-1})$ est la fonction homographique : $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, définie sur $I =]-1; +\infty[$. Or $g(I) =]0; +\infty[\subset I$ (voir la courbe). La condition de la définition 3.4 est bien satisfaite, la suite p est donc définie.

Calculons les premiers termes de p :

$p_1 = \frac{1}{1+p_0} = \frac{1}{3} \approx 0,33$

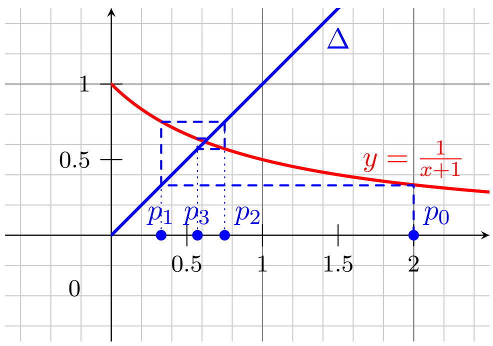
$p_2 = \frac{1}{1+p_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} = 0,75$

$p_3 = \frac{1}{1+p_3} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7} \approx 0,57$

On a parlé de calculer les termes successifs de la suite à l'aide d'un programme. L'inconvénient est qu'un programme informatique travaille avec des valeurs réelles approchées. Il serait intéressant ici de calculer séparément le numérateur N_n et le dénominateur D_n des termes de la suite p. Pour cela, exprimons N_n et D_n en fonction de N_{n-1} et D_{n-1} :

$$p_n = \frac{N_n}{D_n} = \frac{1}{1 + \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}} = \frac{D_{n-1}}{D_{n-1} + N_{n-1}}$$

On obtient les formules de récurrences souhaitées :$N_n = D_{n-1}$ et $D_n = D_{n-1} + N_{n-1}$, ce qui est fort simple et s'intègre très facilement dans un programme tel que celui de l'exemple 35.



Algorithme

Pour éviter une variable supplémentaire dans la boucle, nous avons écrit l'affectation de N d'une façon un peu astucieuse (vérifier qu'elle fait bien ce qu'il faut).

```
Lire n
N=2
D=1
Pour i allant de 1 à n
    D=D+N
    N=D-N
Fin du Pour
Afficher N,D et N/D
```

Programme en Python

En Python, le problème ne se pose pas grâce à la possibilité déjà vue d'affecter directement un couple (un « tuple » selon la terminologie officielle).

```
n=int(input("n="))
N,D=2,1
for i in range(n)
    N,D=D,D+N
print("p{}={}/{}={}".format(n,N,D,N/D))
```

Grâce à ce programme, si je dois déterminer p_{100}, au lieu de me contenter d'une vague approximation à 15 chiffres, plus ou moins fausse, je peux calculer la valeur exacte :

$$p_{100} = \frac{792\,070\,839\,848\,372\,253\,127}{1\,281\,597\,540\,372\,340\,914\,251} \approx 0{,}618\,033\,988\,749\,894\,9$$

.

c. Propriétés

Définition 3.5 (sens de variation) Une suite est croissante (respect. strictement croissante) si, à partir d'un certain rang N, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$ (respect. $u_{n+1} > u_n$).

Remarque :
Même définition pour une suite décroissante ou strictement décroissante, il suffit de mettre $\leqslant$ ou $<$. Une suite est dite « monotone » si elle est croissante ou décroissante (respect. strictement monotone si strictement croissante ou décroissante). Une suite est dite « constante » si à partir d'un certain rang, on a $u_{n+1} = u_n$.
Exemples :
On peut apprécier le sens de variation d'une suite lorsqu'on dispose d'une représentation graphique de cette suite. Bien sûr, il faut se méfier de certains comportements imprévus de la fonction sous-jacente s'il y en a une.

- La suite v de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-2}}$ vue à la définition 3.2 est strictement décroissante à partir de son premier terme $v_3 = 1$.
- La suite d de l'exemple 37 est strictement croissante à partir de son premier terme $d_0 = 0$ car l'aire du domaine ne cesse de croître. On peut définir une relation de récurrence pour cette suite $d_{n+1} = d_n + a_n$ où a_n est la petite partie de l'aire qui est ajoutée au rang n. Comme il s'agit d'une aire non nulle, on a $a_n > 0$ ce qui prouve bien que $d_{n+1} > d_n$.
- La suite u de l'exemple 38 est strictement décroissante à partir de son premier terme $u_0 = 5$. Cela se comprend en regardant la courbe. Pour une preuve plus rigoureuse, voir plus loin.

Propriété 3.1 (critères de monotonie) Une suite (u) est croissante si et seulement si :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \forall n \geqslant N, u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \\ \text{(ii)} & \forall n \geqslant N, u_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \\ \text{(iii)} & \forall n \geqslant N, u_n < 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \end{array}$$

DÉMONSTRATION Les critères énoncés ne font que traduire la définition 3.5 d'une suite croissante. Le critère (i) est applicable à toutes les suites alors que les deux suivants ne sont valables que pour des suites dont le terme général, à partir d'un certain rang, *ne s'annule pas et ne change pas de signe.*

Remarque :
Même critères pour montrer qu'une suite est décroissante, en changeant le sens des inégalités :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0\,;\ u_n > 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1\,;\ u_n < 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

Pour une monotonie stricte, prendre des inégalités strictes.
Exemples d'application des critères :

- Montrons que la suite u de l'exemple 38 est strictement décroissante à partir de $n = 0$. $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$. Calculons $u_{n+1} - u_n$ pour appliquer le critère (i) : $u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n}{2}$.
  Pour montrer que $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} - u_n < 0$, il faut donc montrer que $\forall n \geqslant 0, \frac{1-u_n}{2} < 0 \iff 1 - u_n < 0 \iff u_n > 1$.
  Ceci s'obtient par récurrence : $u_0 = 5 > 1$ et si, pour $n > 0$ on a $u_n > 1$ ($\star$), alors pour $n+1$ on a $u_n + 1 > 2 \iff \frac{u_n+1}{2} > \frac{2}{2}$, soit $u_{n+1} > 1$ ce qui achève la récurrence.
- Montrons que cette suite est strictement décroissante à l'aide du critère (ii) : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n+1}{2u_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2u_n}$.
  Ce critère nécessite qu'on s'assure de deux inégalités : $\forall n, u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
  On a déjà montré ($\star$) que $\forall n, u_n > 1$ donc, à fortiori, on a $\forall n, u_n > 0$.
  Pour l'autre inégalité, $\forall n, u_n > 1 \iff 2u_n > 2 \iff \frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0; \infty[$. On en déduit que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, soit $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
- Montrons que la suite v de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-2}}$ est strictement décroissante à partir de $v_3 = 1$. on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1-2}} \div \frac{1}{\sqrt{n-2}} = \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{n-2}{n-1}}$. Il se trouve que $0 < \frac{n-2}{n-1} < 1$ pour tout $n > 1$ car il s'agit du rapport de deux nombres entiers positifs et consécutifs, le plus grand étant au dénominateur. La fonction racine étant croissante sur $[0; \infty[$, on en déduit que $\sqrt{\frac{n-2}{n-1}} < \sqrt{1}$, soit $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$. Comme, de plus, $\forall n > 2, v_n > 0$ (v_n est une racine carrée), d'après (ii) la suite v est strictement décroissante.

DÉFINITION 3.6 (SUITE BORNÉE) Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est majorée si $\forall n \geqslant n_0, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leqslant M$.
Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est minorée si $\forall n \geqslant n_0, \exists m \in \mathbb{R}, u_n \geqslant m$.
Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est bornée si elle est minorée *et* majorée.

Remarques :

- Les nombres m et M qui interviennent dans cette définition sont appelés « minorant » et « majorant ». Il n'y a pas unicité de ces nombres : si une suite est majorée par M alors elle est majorée aussi par tous les nombres supérieurs à M. Il n'y a pas de plus grand majorant. Par contre, une suite majorée admet toujours un plus petit majorant, appelé borne supérieure. La suite des troncatures décimales de π admet pour borne supérieure le nombre π.
- On peut préciser qu'une suite est majorée (ou minorée ou bornée) « à partir d'un certain rang ».

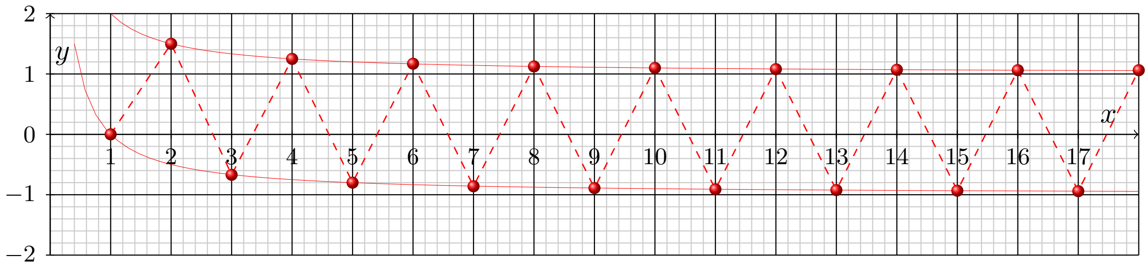
Exemples : Revenons encore une fois sur les suites déjà étudiées.

- La suite v de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{n-2}}$ vue à la définition 3.2 est bornée : elle est majorée, son premier terme $v_3 = 1$ en est la borne supérieure ; elle est minorée par 0 qui est la borne inférieure jamais atteinte, sa limite (voir plus loin).
- La suite d de l'exemple 37 est minorée par le premier terme $d_0 = 0$ qui est la borne inférieure. Cette suite n'est pas majorée : elle dépasse tout majorant arbitrairement choisi. Cela mérite une justification mais on laisse cela pour la classe terminale.
- La suite u de l'exemple 38 est bornée, tous ses termes étant compris entre 1 (borne inférieure, jamais atteinte) et 5 (premier terme $u_0 = 5$ et borne supérieure).

Exemple 40 – La suite (t_n), définie à partir de $n=1$ par $t_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$ admet -1 comme borne inférieure et $\frac{3}{2}$ comme borne supérieure.
Calculons les premiers termes de t :

$t_1=(-1)^1+\frac{1}{1}=-1+1=0$	$t_2=(-1)^2+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1,5$
$t_3=(-1)^3+\frac{1}{3}=-1+\frac{1}{3}=\frac{-2}{3}\approx-0,67$	$t_4=(-1)^4+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}=1,25$
$t_5=(-1)^5+\frac{1}{5}=-1+\frac{1}{5}=\frac{-4}{5}=-0,8$	$t_6=(-1)^6+\frac{1}{6}=1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}\approx1,17$

On voit se dessiner, et plus encore sur la représentation graphique ci-dessous, un comportement séparé de deux sous-suites : une suite p, associée à la fonction $x\mapsto-1+\frac{1}{x}$, qui contient tous les éléments de rang pair de t (t_2, t_4, t_6, etc.) et qui est décroissante, minorée par 1 et majorée par $t_2=\frac{3}{2}=1,5$; une suite i, associée à la fonction $x\mapsto1+\frac{1}{x}$, qui contient tous les éléments de rang impair de t (t_1, t_3, t_5, etc.) et qui est décroissante aussi, mais minorée par -1 et majorée par $t_1=0$. Globalement, la suite t est donc bornée, ses bornes étant -1 et $\frac{3}{2}=1,5$. Elle n'est pas décroissante alors que les deux sous-suites p et i dont elle est formée le sont.



Définition 3.7 (suite périodique) Une suite (u_n) est périodique à partir du rang N s'il existe un entier $p\geqslant1$ tel que $\forall n\geqslant N, u_{n+p}=u_n$. L'entier p est alors la « période » de u.

Remarque : L'entier p appelé période est « le plus petit » entier non nul vérifiant la définition 3.7. Il est évident qu'une suite de période $p>0$ vérifie aussi la propriété pour $2p$, $3p$, etc. La suite de terme général $(-1)^n$ est périodique de période 2 à partir de $n=0$, car $\forall n\geqslant0, u_{n+2}=u_n$. Cette suite vérifie aussi $u_{n+4}=u_n$, mais la période est 2 et non 4.

Exemples :

- Les suites constantes, ou constantes à partir d'un certain rang, sont des suites périodiques de période 1. La suite q des décimales de $\frac{1}{15}=0,0666\dots$ est une suite constante, donc périodique de période 1, à partir du rang 2 : $\forall n\geqslant2,\quad q_{n+1}=q_n$.
- La suite (p_n) donnant la n^{e} décimale d'un nombre rationnel non décimal est périodique à partir d'un certain rang. Celle qui est associée à $\frac{1}{7}=0,\overline{142857}$ (la séquence 142857 se répète) est périodique à partir du rang 1 ; sa période est 6. On a
$\forall k\in\mathbb{N}, p_1=p_7=p_{6k+1}=1,\;\; p_2=p_8=p_{6k+2}=4,\;\;\dots,\;\; p_6=p_{12}=p_{6k}=7.$
- Si k est un entier non nul, les suites c et s définies par $c_n=\cos(\frac{2n\pi}{k})$ et $s_n=\sin(\frac{2n\pi}{k})$ sont périodiques de période k car cos et sin sont des fonctions périodiques de période 2π :
$c_{n+k}=\cos(\frac{2(n+k)\pi}{k})=\cos(\frac{2n\pi}{k}+2\pi)=\cos(\frac{2n\pi}{k})=c_n$ (même chose pour la suite s).
Pour la même raison, la suite q définie par $q_n=\sin(an\pi+b)$ est périodique de période $t=\frac{2\pi}{a\pi}=\frac{2}{a}$ si et seulement si $\frac{2}{a}\in\mathbb{N}$.
Lorsque $a=\frac{1}{2}$ par exemple, comme $t=4\in\mathbb{N}$, la suite q est périodique de période 4 :
$q_1=q_5=q_{4k+1}=\sin(\frac{\pi}{2}+b)=\cos b$; $q_3=q_7=q_{4k+3}=\sin(\frac{3\pi}{2}+b)=-\cos b$.
$q_2=q_6=q_{4k+2}=\sin(\pi+b)=-\sin b$; $q_4=q_8=q_{4k}=\sin(2\pi+b)=\sin b$.
- La suite de Syracuse S d'un entier $S_0=p$ est un exemple intéressant de suite « finalement » périodique. Définie par $S_{n+1}=\frac{S_n}{2}$ si S_n pair, $3S_n+1$ si S_n impair, cette suite a un comportement périodique qui tarde parfois à se manifester. On n'est pas encore sûr que toutes ces suites finissent toutes sur le cycle $[4,2,1]$ (cela reste une conjecture) mais c'est assez probable. Voici la suite qui démarre sur 15 :
$15,46,23,70,35,106,53,160,80,40,20,10,5,16,8,4,2,1,4,\dots$

2. Suites arithmétiques et géométriques

a. Les suites arithmétiques

DÉFINITION 3.8 Une suite u est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante, autrement dit s'il existe un réel r, appelé « raison » de la suite, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

Exemple 41 – Si u est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 4, on a :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = u_0 + 4 = 1 + 4 = 5 \quad ; \quad u_2 = u_1 + 4 = 5 + 4 = 9$$

On remarque que $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$; de même, on aura $u_3 = u_0 + 3r$ et, plus généralement $u_n = u_0 + nr$. Ici, on aura $u_n = 1 + 4n$. La suite u est la suite des entiers dont le reste de la division euclidienne par 4 est 1.

THÉORÈME 3.1 Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
- u est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b
- u est la suite définie par $u_n = a + b \times n$.

DÉMONSTRATION Si u est arithmétique de raison b, supposons que l'on ait $u_n = a + b \times n$ $(\star)$. Dans ce cas, $u_{n+1} = u_{n+1} + b = (a + b \times n) + b = a + b \times (n+1)$. La relation $(\star)$ étant vraie pour n est vraie pour $n+1$. Or $u_0 = a + b \times 0$, cette relation est donc vraie à partir de $n = 0$. Elle est donc vraie, de proche en proche, pour tout $n \geqslant 0$. Réciproquement, si pour tout $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + nb$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = (a + (n+1)b) - (a + nb) = b$. La suite u est donc une suite arithmétique de raison b et de premier terme $u_0 = a + 0 \times b = a$.

Remarque : On peut exprimer le terme de rang n d'une suite arithmétique de raison r à partir de n'importe quel terme. Par exemple à partir du terme de rang 1 :

$$\forall n \geqslant 1, \;\; u_n = u_0 + nr = (u_0 + r) + (n-1)r = u_1 + (n-1)r$$

De façon plus générale, si u est une suite arithmétique de raison r, pour tous les entiers n et p on a :

$$\forall n \geqslant p, \;\; u_n = u_0 + nr = (u_0 + pr) + (n-p)r = u_p + (n-p)r$$

Autrement dit, connaissant deux termes d'une suite arithmétique, on peut en déterminer la raison r :

$$\forall n \geqslant p, \;\; r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$$

Exemple 42 – Si u est une suite arithmétique telle que $u_{12} = 273$ et $u_{47} = 56$ (pourquoi pas !), on peut déterminer la raison de cette suite :

$$r = \frac{u_{47} - u_{12}}{47 - 12} = \frac{56 - 273}{35} = \frac{-217}{35} = -6,2$$

On remarque que $u_{12} = u_0 + 12r = u_0 + 12 \times (-6,2)$, donc on on déduit que

$$u_0 = u_{12} - 12 \times (-6,2) = 273 + 74,4 = 347,4$$

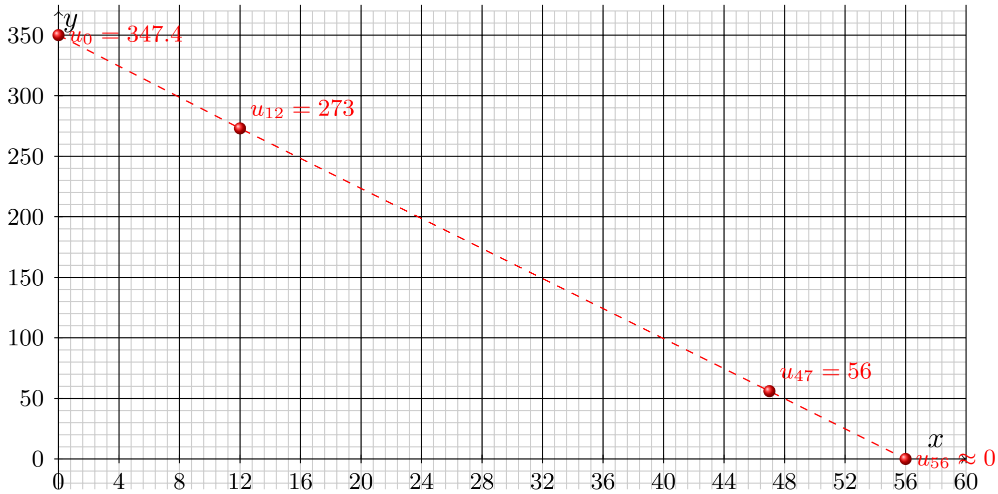
La suite u est ainsi la suite arithmétique de raison $-6,2$ commençant par $u_0 = 347,4$.

PROPRIÉTÉ 3.2 Une suite arithmétique u de raison r est croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$.

Démonstration Le critère (i) de la propriété 3.1 s'applique directement ici :

$$u_{n+1} - u_n = r, \text{ donc } u_{n+1} - u_n > 0 \iff r > 0$$

Remarque : Les points de coordonnées $(n; u_n)$ de la représentation graphique d'une suite arithmétique u de raison r sont alignés sur une droite de pente r. Cette droite représente la fonction sous-jacente : la fonction affine $x \mapsto rx + s$ où $s = u_0$. L'illustration de l'exemple 42 ci-contre montre la droite d'équation $y = -6.2x + 347,4$ sur laquelle sont rangés tous les points de coordonnées $(n; u_n)$.



Propriété 3.3 (somme des termes d'une suite arithmétique) La somme S de n termes d'une suite arithmétique est le produit de n par la demi-somme du premier et du dernier terme, soit, en commençant au terme d'indice p :

$$S = n \times \frac{u_p + u_{p+n-1}}{2}$$

Démonstration On a $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{p+n-2} + u_{p+n-1}$. Écrivons chaque terme u_{p+k} sous la forme équivalente $u_p + kr$ et écrivons la somme S dans un sens et dans l'autre :

$$\begin{cases} S = [u_p] & +[u_p + r] & + \dots & +[u_p + (n-2)r] & +[u_p + (n-1)r] \\ S = [u_p + (n-1)r] & +[u_p + (n-2)r] & + \dots & +[u_p + r] & +[u_p] \end{cases}$$

On remarque que la somme des termes superposés est toujours égale à $2u_p + (n-1)r$, soit $u_p + [u_p + (n-1)r] = u_p + u_{p+n-1}$, la somme des termes extrêmes. Comme il y a n termes dans chaque somme, il vient $2S = n \times (u_p + u_{p+n-1})$ d'où le résultat en divisant les deux membres par 2.

Remarque : Dans le cas où le premier terme est u_0, on a $S = n \times \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$, et si le premier terme est u_1, on a $S = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$. En utilisant la notation synthétique de la somme – la lettre Σ (« sigma majuscule », le « S » de l'alphabet grec) – cette propriété s'écrit :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{p+n-2} + u_{p+n-1} = \sum_{k=p}^{p+n-1} u_k = n \times \frac{u_p + u_{p+n-1}}{2}$$

Exemple 43 – Calculons la somme des 100 premiers entiers non nuls : $S_{100} = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$. La suite des entiers consécutifs est la suite arithmétique v de premier terme $v_1 = 1$ et de raison $r = 1$. La somme S_{100} cherchée est donc la somme des 100 premiers termes de la suite v :

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} v_k = 100 \times \frac{v_1 + v_{100}}{2} = 100 \times \frac{1 + 100}{2} = 5\,050$$

Calculons la somme des entiers compris entre 463 (inclus) et 612 (inclus). Il y a $612 - 463 + 1 = 150$ termes à ajouter, donc la somme cherchée est :

$$463 + 464 + \cdots + 611 + 612 = \sum_{k=463}^{612} v_k = 150 \times \frac{463 + 612}{2} = 75 \times 1075 = 80\,625$$

Exemple 44 –

Donnons une application moins triviale de cette formule. L'observation des 4 lignes ci-contre laisse conjecturer une propriété : il semblerait que la somme de la n^{e} ligne soit égale à n^3. On peut écrire une ligne supplémentaire pour tester cette conjecture :
$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 5 \times \frac{21+29}{2} = 5 \times 25 = 125 = 5^3$.

Somme des nombres impairs

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & = & 1 \\ & & & 3 & + & 5 & & = & 8 \\ & & 7 & + & 9 & + & 11 & = & 27 \\ 13 & + & 15 & + & 17 & + & 19 & = & 64 \end{array}$$

Cela semble se confirmer, mais pour le prouver, il faut montrer que la somme des n nombres impairs de la n^{e} ligne est égale à n^3 pour tout entier n. Combien y a t-il de nombres impairs écrits avant cette n^{e} ligne ? Avec la notation de l'exemple 43 ci-dessus, il y en a $S_{n-1} = (n-1) \times \frac{n-1+1}{2} = n \times \frac{n-1}{2}$.
La n^{e} ligne commence donc par le $(S_{n-1}+1)^{\text{e}}$ nombre impair, c'est-à-dire par $2(S_{n-1}+1) - 1$.
En remplaçant S_{n-1} par sa valeur, on obtient $2(n \times \frac{n-1}{2} + 1) - 1 = n(n-1) + 1$.
Il ne reste plus qu'à déterminer le n^{e} nombre impair de cette ligne qui commence par $n(n-1)+1$: il s'agit de $[n(n-1)+1] + 2(n-1)$, soit $n(n+1) - 1$.
Calculons maintenant la somme de cette n^{e} ligne : $n \times \frac{[n(n-1)+1]+[n(n+1)-1]}{2} = n \times \frac{2n^2}{2} = n^3$.

b. Suites géométriques

Définition 3.9 Une suite (u_n) est géométrique si le quotient entre deux termes consécutifs est constant, autrement dit s'il existe un réel $q \neq 0$, appelé « raison » de la suite, tel que
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$.

Exemple 45 – Si u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$, et de raison $q = 1,5$, on a :

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_1 &= q \times u_0 = 1,5 \times 2 = 3 \\ u_2 &= q \times u_1 = 1,5 \times 3 = 4,5 \\ u_3 &= q \times u_2 = 1,5 \times 4,5 = 6,75 \end{aligned}$$

On remarque que $u_2 = q \times u_1 = (q \times u_0) \times q = u_0 \times q^2$; de même, on aura $u_3 = u_0 \times q^3$ et, plus généralement, $u_n = u_0 \times q^n$. Ici, on aura $u_n = 2 \times 1,5^n$.
La suite u peut représenter une quantité initialement égale à 2, qui augmente de 50% à chaque période. Au bout de n périodes, la quantité est égale à $2 \times 1,5^n$.

Théorème 3.2 Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
- u est une suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b
- u est la suite définie par $u_n = a \times b^n$.

Démonstration Si u est géométrique de raison b, supposons que l'on ait $u_n = a \times b^n$ $(\star)$. Dans ce cas, $u_{n+1} = b \times u_n = b \times (a \times b^n) + b = a \times b^{n+1}$. La relation $(\star)$ étant vraie pour n est vraie pour $n+1$. Or $u_0 = a \times b^0$ $(b^0 = 1)$, cette relation est donc vraie à partir de $n = 0$. Elle est donc vraie, de proche en proche, pour tout $n \geqslant 0$.
Réciproquement, si pour tout $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a \times b^n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a \times b^{n+1}}{a \times b^n} = b$. La suite u est donc une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = a \times b^0 = a$.

Remarque : On peut exprimer le terme de rang n d'une suite géométrique de raison q à partir de n'importe quel terme. Par exemple à partir du terme de rang 1 :

$$\forall n \geqslant 1,\ \ u_n = u_0 \times q^n = (u_0 \times q) \times q^{n-1} = u_1 \times q^{n-1}$$

De façon plus générale, si u est une suite géométrique de raison q, pour tous les entiers n et p on a :

$$\forall n \geqslant p,\ \ u_n = u_0 \times q^n = (u_0 \times q^p) \times q^{n-p} = u_p \times q^{n-p}$$

Autrement dit, connaissant deux termes d'une suite géométrique, on peut utiliser la fonction « racine n^e » pour déterminer la raison q de la suite :

$$\forall n \geqslant p,\ \ q = \sqrt[n-p]{\frac{u_n}{u_p}}$$

EXEMPLE 46 – Si u est une suite géométrique telle que $u_0 = 100\,000$ et $u_6 = 177\,156$, on peut déterminer la raison de cette suite :

$$q = \sqrt[6-0]{\frac{177156}{100000}} = \sqrt[6]{1,77156} = 1,1$$

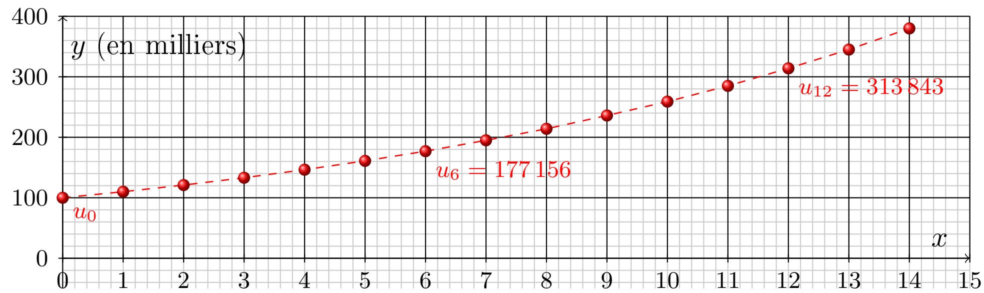
Imaginons que l'on cherchait ainsi le taux d'augmentation mensuel d'une population qui est passée de 100 000 individus à 177 156 individus en 6 mois. On vient de trouver que ce taux est de 10% car ainsi la population est multipliée par $1 + \frac{10}{100} = 1 + 0,1 = 1,1$.
Quelle sera la population à la fin de la 1reannée (après $n = 12$ mois) ?
On doit calculer $u_{12} = u_0 \times q^{12} = u_6 \times q^6 = u_6 \times 1,1^6 = 177\,156 \times 1,77156 \approx 313\,842$.
La population atteint 313 842 individus à la fin de la 1reannée.

PROPRIÉTÉ 3.4 Une suite géométrique u de raison $q > 0$ est
- croissante si $u_0 > 0$ et $q > 1$ ou bien si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$
- décroissante si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$ ou bien si $u_0 < 0$ et $q > 1$

Une suite géométrique u de raison $q < 0$ n'est ni croissante ni décroissante.

DÉMONSTRATION Lorsque $q > 0$, la propriété 3.1 s'applique directement car, comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, les termes ne changent pas de signe. Ils sont positifs si $u_0 > 0$ et c'est le critère (ii) qui s'applique car alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \iff q > 1$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \iff q < 1$, ce qui démontre la 1re partie des deux propositions.
Pour le cas où $u_0 < 0$, tous les termes sont négatifs est le critère (iii) permet de répondre.
Lorsque $q < 0$, les critères de la propriété 3.1 ne s'appliquent pas. Les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs ce qui explique que la suite n'est pas monotone.

Remarque : Les points de coordonnées $(n; u_n)$ de la représentation graphique d'une suite géométrique se disposent sur la courbe d'une fonction exponentielle (étudiée en classe de terminale). Sans entrer dans les détails de l'expression de la fonction sous-jacente, voici la représentation de la suite géométrique u de l'exemple 46 de premier terme $u_0 = 100\,000$ et de raison $q = 1,1$.



Propriété 3.5 (somme des termes d'une suite géométrique) La somme S de n termes d'une suite géométrique de raison q est le produit du premier terme u_p par le rapport $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ soit :

$$S = u_p \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration On doit d'abord établir la relation (déjà rencontrée au chapitre ??) :

$$(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n) = 1-q^{n+1}$$

Si on développe le membre de gauche, on trouve directement le membre de droite. Tous les termes du développements s'annulent deux à deux, sauf le 1er et le dernier :

$$\begin{aligned}&[1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n]-[q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n+q^{n+1}] = \\ &\qquad = 1+[q-q]+[q^2-q^2]+\cdots+[q^{n-1}-q^{n-1}]+[q^n-q^n]-q^{n+1} = 1-q^{n+1}\end{aligned}$$

La somme cherchée s'obtient en tout multipliant par u_p car :

$$S = u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_{p+n-2}+u_{p+n-1} = u_p(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+q^n)$$

Remarque : Avec la notation synthétique, la somme de n termes commençant par le terme de rang$p$ d'une suite géométrique de raison q s'écrit :

$$u_p+u_{p+1}+\cdots+u_{p+n-2}+u_{p+n-1} = \sum_{k=p}^{p+n-1} u_k = u_p \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple 47 – Vous connaissez la légende du jeu d'échec : l'inventeur demanda comme rétribution au roi qu'on lui remit les grains de riz qu'on mettrait sur le cases de l'échiquier en commençant par 1 grain dans la 1re case, 2 sur la 2e case, etc. en doublant à chaque case. Comme il y a 64 cases sur un échiquier, cela fait :

$$S_{64} = 1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}+2^{64} = 1\times\frac{1-2^{65}}{1-2} = 2^{65}-1$$

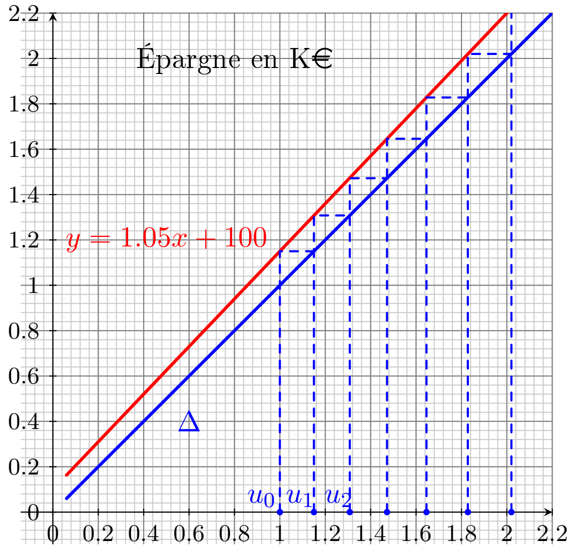
Le résultat est astronomique : 36 893 488 147 419 103 231 grains de riz.
Sachant que le poids de 1000 grains est $28g$, cela fait tout de même environ $1,033\times10^{15}kg$.
En 2014, la production mondiale de riz était de 740 millions de tonnes, soit $7,4\times10^{11}kg$...
N.B. : En base 2, de la même façon qu'après 111 (3 en base 10) il y a 1000 (4 en base 10), il ne faut pas s'étonner qu'après $\underbrace{1111\cdots111}_{\text{64 chiffres 1}}$ (notre somme ici), il y a $\underbrace{1000\cdots000}_{\text{1 suivi de 64 zéros}}$ (1 de plus que le résultat).

Exemple 48 (suite arithmético-géométrique) – Je dépose 1000 € sur un livret d'épargne. Á la fin de chaque année, la banque verse 5 % d'intérêts sur le livret et j'y ajoute aussi 100 €.

En appellant u_n la somme dont je dispose sur mon livret après n années, on a :

- pour $n \in \mathbb{N}$,
  $u_{n+1} = (1 + \frac{5}{100}) \times u_n + 100 = 1,05u_n + 100$
- la somme disponible sur le livret aujourd'hui est 1000 €, donc $u_0 = 1000$.

On a $u_1 = 1{,}05 \times 1\,000 + 100 = 1\,150$,
puis $u_2 = 1{,}05 \times 1\,150 + 100 = 1\,307{,}50 \ldots$
De proche en proche, on peut donc calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n. Si on souhaite une formule explicite qui donne u_n directement en fonction de n, on peut utiliser la méthode suivante, valable pour toute suite dont la relation de récurrence est de type $u_{n+1} = au_n + b$. On a rencontré une telle suite, dite « arithmético-géométrique », dans l'exemple 38.



Méthode
La suite u_n n'est pas géométrique, mais on peut en construire une qui soit liée avec elle.
Le « point fixe » de la suite u est le nombre l qui vérifie : $l = 1,05l + 100$, soit $l = \frac{-100}{0{,}05} = -2000$.
Étudions la suite v définie par $v_n = u_n - l = u_n + 2000$. On a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2000 = (1,05u_n + 100) + 2000 = 1,05u_n + 2100 = 1,05(u_n + 2000) = 1,05v_n$$

Ainsi (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 + 2000 = 3000$ et de raison $q = 1,05$.
On peut en déduire que $v_n = v_0 \times q^n = 3000 \times 1,05^n$ et donc $u_n = v_n - 2000 = 3000 \times 1,05^n - 2000$.

Voilà donc notre formule explicite : $\boxed{u_n = 3000 \times 1,05^n - 2000}$.

Vérifions qu'elle est correcte : $u_1 = 3000 \times 1,05^1 - 2000 = 3150 - 2000 = 1150$

$$u_2 = 3000 \times 1,05^2 - 2000 = 3307,5 - 2000 = 1307,50$$

L'application de cette méthode pour la suite de l'exemple 38, définie par $u_0 = 5$ et $u_n = \frac{u_{n-1}+1}{2}$, passe par le nombre l qui vérifie : $l = \frac{l+1}{2}$, soit $l = 1$. La suite associée est définie par $v_n = u_n - 1$ et on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{u_n+1}{2} - 1 = \frac{u_n-1}{2} = \frac{v_n}{2}$. La suite v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 4$, on a donc $v_n = v_0 \times q^n = \frac{4}{2^n} = \frac{1}{2^{n-2}}$ et donc $u_n = v_n + 1 = 1 + \frac{1}{2^{n-2}}$.

3. Limite d'une suite

a. La notion de limite en $+\infty$

Introduction :
Nous nous intéressons ici au comportement d'une suite u lorsque l'indice n devient de plus en plus grand – infiniment grand. Nous avons déjà observé des suites qui s'approchent progressivement d'une certaine valeur finie. La suite de l'exemple 34 (troncatures) s'approche progressivement de π.
La suite de l'exemple 35 (Fibonaci) nous montre un autre comportement : les termes deviennent progressivement plus grands et finissent par dépasser n'importe quelle valeur, aussi grande fut-elle.
L'exemple 36 (aliquote) montre un 3^{e} type de comportement : les valeurs se suivent de façon irrégulière. Il n'y a pas de tendance autre que cet apparent chaos.

Trois possibilités de comportement en $+\infty$ se dégagent de ces exemples :

- Les valeurs se stabilisent de plus en plus autour d'un nombre réel fini l. Dans ce cas, on dira que la suite « converge » vers la limite l et on notera cela $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
- Les valeurs deviennent de plus en plus grande (respect. petite), et finissent par devenir supérieure à n'importe quelle valeur positive fixée à l'avance (respect. inférieure à n'importe quelle valeur négative). Dans ce cas, on dira que la suite « diverge » vers l'infini, $+\infty$ ou $-\infty$ selon les cas, et on notera cela $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respect. $-\infty$).
- La suite de converge pas vers une limite et ne diverge pas vers l'infini. Elle peut osciller entre deux ou plusieurs valeurs (suites périodiques) ou bien suivre d'autres comportements. Dans ce cas, on dira que la suite « diverge » sans avoir de limite.

Définition 3.10 (suite convergente) Une suite u converge vers une limite l si, à partir d'un certain rang N, tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n. Autrement dit :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \iff \forall\epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N \Longrightarrow l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$

Remarques : La dernière ligne est quelque peu abrupte. À la fin de cette ligne (après le $\Longrightarrow$), on aurait pu écrire – ce qui revient au même – $|u_n - l| < \epsilon$ à la place de $l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$, mais cette simplification ne facilite pas forcément la compréhension.
Ces deux écritures traduisent l'expression *un intervalle ouvert contenant l contient le terme u_n* que l'on aurait pu écrire aussi $u_n \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$. Ici, l'intervalle est centré sur l, le réel positif ϵ est son rayon. Plus ϵ est petit, plus on s'approche de l. En exigeant qu'à partir d'un certain rang N tous les termes u_n soient dans cet intervalle, quelle que soit la petitesse de ϵ, on traduit analytiquement la notion intuitive de limite.
On pourrait encore utiliser une autre notion, celle de la distance entre u_n et l, notée $d(u_n, l)$. La fin de la ligne serait alors notée $d(u_n, l) < \epsilon$.

Exemple 49 – La suite des inverses définie pour tout entier $n \neq 0$ par $u_n = \frac{1}{n}$ a pour limite 0 en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Cette affirmation est fondée sur l'observation que les inverses d'entiers deviennent de plus en plus petits, tout en restant supérieures à zéro. S'il faut prouver cela, choisissons une valeur arbitraire de la précision, par exemple $\epsilon = 10^{-6}$, et montrons qu'il existe un rang N à partir duquel toutes les inverses sont plus petites que cet ϵ là. On généralise ensuite cela à toutes les valeurs possibles de ϵ. Comme n et ϵ sont positifs tous les deux, on a :

$$\frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

Il suffit donc de choisir comme valeur de N le premier entier supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$ (donc $10^6 + 1 = 1000001$ quand $\epsilon = 10^{-6}$). Ainsi, pour tout entier $n \geqslant N$, on aura bien $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$ ce qui est plus contraignant encore que la notation de la définition : $-\epsilon < u_n < \epsilon$ (ici $l = 0$ et donc ici $l-\epsilon < u_n < l+\epsilon$ s'écrit $-\epsilon < u_n < \epsilon$).
On montrerait, de même, que les suites $(\frac{1}{n^2})$, $(\frac{1}{n^3})$, etc., $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ sont des suites qui convergent vers 0.

Définition 3.11 (suite de limite $+\infty$) Une suite u diverge et admet $+\infty$ comme limite si, à partir d'un certain rang N, tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n. Autrement dit :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N \Longrightarrow u_n > A$

Remarques : On a une définition analogue pour les suites de limite $-\infty$:
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant N \Longrightarrow u_n < A$
Noter l'équivalence entre les écritures $u_n \in]A, +\infty[$ et $u_n > A$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut abréger cette notation et écrire simplement $\lim u = +\infty$ ou même $u \to +\infty$.

Exemple 50 – La suite des carrés définie pour tout entier par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. Cette affirmation est fondée sur l'expérience : les carrés des entiers deviennent de plus en plus grands et finissent par dépasser toute valeur fixée à l'avance. S'il faut prouver cela, choisissons un maximum arbitraire $A > 0$, par exemple $A = 10^6$, et montrons qu'il existe un rang N à partir duquel tous les carrés sont plus grands que cette valeur A. On généralise ensuite cela à toutes les valeurs possibles de A. Comme n et A sont positifs tous les deux, on a :

$$n^2 > A \Longleftrightarrow n > \sqrt{A}$$

Il suffit donc de choisir comme valeur de N le premier entier supérieur à $\sqrt{A}$ (donc $10^3 + 1 = 1001$ quand $A = 10^6$). Ainsi, pour tout entier $n \geqslant N$, on aura bien $n^2 > A$.
On montrerait, de même, que les suites (n), (n^3), etc., $(\sqrt{n})$ sont des suites qui ont pour limite $+\infty$.

b. Théorèmes sur les limites

Théorème 3.3 (croissante non majorée) Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$. De même, toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration Ne pas être majorée, pour une suite u, signifie que pour tout réel A, on peut trouver un rang N tel que $\forall n > N,\ u_n > A$. C'est la définition d'une suite de limite $+\infty$.
Ce théorème n'est donc qu'une reformulation de la définition.

Remarques : Si la suite u diverge vers $+\infty$, alors tout suite extraite de u diverge vers $+\infty$.
On entend par « suite extraite », une suite dont les termes successifs sont extraits, en des indices croissants (non nécessairement consécutifs) de la suite u. Par exemple, la suite (u_{2n}) est extraite de u (on prend un terme sur deux de la suite u). De même, les suites (u_{n+1}), (u_{3n+1}), (u_{n^2}) ou (u_{2^n}) sont des suites extraites de u, qui convergent vers $+\infty$ si u converge vers $+\infty$.
La suite (u_{2^n}) commence par $u_1,\ u_2,\ u_4,\ u_8$, etc.

Théorème 3.4 (croissante majorée) Toute suite croissante et majorée est convergente vers une limite l qui est le plus petit majorant de la suite.
De même, pour toute suite décroissante et minorée : sa limite est le plus grand des majorants.

Démonstration Nous admettrons ce théorème.

Exemple 51 – Montrons que la suite u définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est majorée par 2.
Pour commencer, montrons que $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ pour tout $n > 1$. En effet, $n^2 > n(n-1) = n^2 - n$ pour tout entier n, leurs inverses sont donc rangées dans le sens inverse.
La somme $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est donc majorée par $1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.
Or $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ (mettre au même dénominateur), u_n est donc majoré par $1 + \sum\limits_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})$. En écrivant tous les termes de cette somme, on s'aperçoit qu'ils s'éliminent deux à deux :
$1 + (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n}$. Donc $u_n < 2$.
De plus, la suite u est croissante, car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2} > 0$. Par application du théorème 3.4, la suite converge vers une limite l.
Remarque : si le théorème annonce qu'il y a une limite, il ne donne pas sa valeur. Ici, on sait seulement que la limite est $l \leqslant 2$. puisque 2 est un majorant de cette suite. On peut s'approcher de la véritable limite de cette suite au moyen d'un programme. On en obtiendra ainsi une valeur approchée qui est bien inférieure à 2 puisqu'elle vaut environ 1,644 934 066 848 226 436 472 415 166 6.
Comme l'a montré Euler[4] en 1735, il s'agit de l'irrationnel $\frac{\pi^2}{6}$.

4. Leonhard Euler(1707 Bâle - 1783 St Pétersbourg), un des plus grands et des plus prolifiques mathématiciens

Théorème 3.5 (somme et produit par un réel) Soient u une suite qui diverge vers $+\infty$ et k un réel non nul.

- La suite (u_n+k) diverge vers $+\infty$ et, si $k>0$, la suite (ku_n) aussi
- Si $k<0$, la suite (ku_n) diverge vers $-\infty$

Démonstration Examinons le cas $k>0$: comme la suite u diverge vers $+\infty$, elle dépasse toute valeur arbitrairement fixée. Un réel $A>0$ étant arbitrairement fixé.
La suite dépasse le réel $\frac{A}{k}$, à partir d'un certain rang N, et donc $\forall n>N,\ u_n>\frac{A}{k}$, soit $ku_n>A$. La suite (ku_n) diverge donc vers $+\infty$.
La suite dépasse le réel $A-k$, à partir d'un certain rang N', et donc $\forall n>N',\ u_n>A-k$, soit $u_n+k>A$. La suite (u_n+k) diverge donc vers $+\infty$.
On raisonne de même dans le cas $k<0$.

Exemples :
La suite u définie par $u_n=3n^2$ a pour limite $+\infty$ car (n^2) a pour limite $+\infty$, on l'a vu dans l'exemple 50. La suite v définie par $v_n=-1+3n^2$ a donc pour limite $+\infty$.
La suite r définie par $r_n=-2\sqrt{n}$ a pour limite $-\infty$ car $(\sqrt{n})$ a pour limite $+\infty$, on l'a également mentionné dans l'exemple 50. La suite s définie par $s_n=5-2\sqrt{n}$ a donc pour limite $-\infty$.

Ce théorème est un cas particulier du théorème suivant qui envisage les différents cas de figure pour la somme et le produit de deux suites.

Théorème 3.6 (somme et produit de suites) Soient u et v deux suites ayant une limite, finie ou infinie. Les suites de terme général u_n+v_n et $u_n\times v_n$, admettent ou non une limite selon les différents cas exposés par les deux tableaux ci-dessous :

Suite « somme » : (u_n+v_n)

$\lim v$ \ $\lim u$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

Suite « produit » : $(u_n\times v_n)$

$\lim v$ \ $\lim u$	$l\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l'\neq 0$	$l\times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration Ce théorème est admis.

Remarques :

- Les cases hachurées indiquent des cas indéfinis. Dans ces cas, on ne peut pas conclure directement à l'aide de ce théorème. Par exemple, si on a $u_n=n^2$ et $v_n=-2n$, on a $\lim u=+\infty$ et $\lim v=-\infty$. La somme $u+v$ a une limite indéterminée à l'égard de ce théorème. Il suffit, dans ce cas, de factoriser : $u_n+v_n=n(n-2)$. La somme indéterminée est devenue déterminée puisque les suites r et s définies par $r_n=n$ et $s_n=n-2$ forment une suite « produit » déterminée : chacune divergeant vers $+\infty$, la limite est trouvée à l'aide du tableau de droite, c'est $+\infty$. On verra dans l'exemple qui suit que les suites « polynomiale » admettent pour limite la limite de son « terme dominant ».
- L'indication $l'\neq 0$ (ou $l\neq 0$) masque un autre cas d'indétermination : $\infty\times 0$. On rencontre ce cas, par exemple, avec $u_n=n^2$ et $v_n=\frac{2}{n}$ puisque $\lim u=+\infty$ et $\lim v=0$, mais l'indétermination est levée si on simplifie l'expression : $u_n\times v_n=2n$ a pour limite $+\infty$.
- La notation $\pm\infty$ indique que la limite est $+\infty$ ou $-\infty$, selon le signe de la limite finie l ou l'. La règle des signes s'applique, étendue au signe des limites infinies. Par exemple, si on a

$u_n = 0,1n^3$ et $v_n = -2 + \frac{1}{n}$, comme $\lim u = +\infty$ et $\lim v = -2$ (par application du théorème sur la limite d'une somme). Le produit $u \times v$ admet $-\infty$ comme limite, du fait des signes des limites de u (positive) et v (négative).

Exemple 52 – Quelle est la limite de la suite u définie par $u_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1$? Le théorème 3.6 ne permet pas de conclure directement, le terme général étant écrit sous cette forme développée. Il faut mettre la plus grande puissance de l'indice en facteur et utiliser le volet « produit » de ce théorème. Ici, on écrira $u_n = n^3(-1 + \frac{3}{n} + \frac{-2}{n^2} + \frac{3}{n^3})$.
Le 1^{er} facteur tend vers $+\infty$ tandis que le 2^{d} tend vers -1, du fait de la limite de chacun des termes de la somme et du théorème sur la somme : $\lim -1 = -1$, $\lim \frac{3}{n} = 0$, $\lim \frac{-2}{n^2} = 0$ et $\lim \frac{3}{n^3} = 0$.

Ce n'est pas nécessaire de refaire ce travail à chaque fois qu'il se présente une suite dont le terme général a une forme polynomiale :

Méthode (Suite polynomiale)
Lorsque le terme général a une forme polynomiale de degré p : $u_n = \sum_{k=0}^{p} a_k n^k$, le terme dominant au voisinage de $+\infty$ est toujours celui de plus haut degré, donc ici $a_p n^p$. Les autres termes sont vite négligeables devant lui lorsque n devient très grand. La limite de u sera celle du terme dominant :

$$\lim \sum_{k=0}^{p} a_k n^k = \lim a_p n^p$$

L'expression « forme polynomiale » s'étend même ici aux puissances négatives de l'indice. La suite v définie par $v_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1 - \frac{2}{n} + \frac{7}{n^2}$ aura le même comportement asymptotique que la suite u, au voisinage de $+\infty$, la différence $v_n - u_n$ ayant pour limite 0.

Théorème 3.7 (quotient de suites) Soient u et v deux suites ayant une limite, finie ou infinie. La suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ admet ou non une limite selon les différents cas exposés par le tableau ci-dessous :

$\lim v$ \ $\lim u$	l	$+\infty$	$-\infty$
$l \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	//////	//////
$-\infty$	0	//////	//////

Démonstration Ce théorème est admis.

Remarque :
Les cases hachurées indiquent, ici aussi, un cas d'indétermination : $\frac{\infty}{\infty}$. Dans le cas d'expressions polynomiales, selon le point méthode du théorème précédent, on ne conservera que les termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur. On simplifiera ensuite l'expression obtenue et on appliquera le théorème sur le quotient à ce moment.
Pour la suite u de terme général $u_n = \frac{-n^3+3n^2-2n+1}{5n^4+12n-7}$, on commence par dire que u a la même limite que la suite $(\frac{-n^3}{5n^4})$. L'expression du terme général se simplifiant en $\frac{-1}{5n}$, on applique le théorème sur le quotient : la limite est 0 (le numérateur est constant et le dénominateur tend vers $+\infty$).

Exemple 53 – Quelle est la limite de la suite u définie par $u_n = \frac{2^n-5}{3^n+1}$?
Le théorème 3.7 ne permet pas de conclure directement. En effet, nous avons au numérateur et au dénominateur des expressions qui tendent toutes les deux vers $+\infty$ (nous montrerons cela avec le théorème qui suit). Mais si on divise le numérateur et le dénominateur par $3^n > 0$, on obtient

$u_n = \frac{(\frac{2}{3})^n - \frac{5}{3^n}}{1+\frac{1}{3^n}}$. Le numérateur tend maintenant vers 0 car les deux termes qui le composent tendent vers 0 (pour $\lim(\frac{2}{3})^n = 0$, voir le théorème suivant) ; le dénominateur, quant-à lui, tend vers 1. Finalement, la suite u tend vers 0.

Théorème 3.8 (majoration) Soient u et v deux suites.
Si, à partir d'un certain rang N, on a $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. De même, si à partir d'un certain rang N, on a $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration Ce théorème est admis.

Exemple 54 – Montrons que la suite u définie par $u_n = 2^n$ diverge vers $+\infty$.
Le terme général 2^n est supérieur à n pour toutes les valeurs de n car, d'après la relation écrite pour démontrer la propriété 3.5, on a : $2^n - 1 = (2-1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 2^0)$, et comme $\forall k \geqslant 0,\ \ 2^k \geqslant 1$, on a $2^n = 1 + (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 1) \geqslant n + 1$.
Comme la suite v définie par $v_n = n+1$ diverge vers $+\infty$ et que $\forall n \geqslant 1,\ \ v_n < u_n$, d'après le théorème 3.8, la suite u diverge vers $+\infty$.

Méthode

➲ Limites des suites géométriques

Ce que nous venons de faire avec la suite (2^n) se généralise à toutes les suites (a^n) où $a \geqslant 1$.

L'inégalité préliminaire que l'on obtient s'appelle « inégalité de Bernoulli » :
$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^1 + a^0)$, et comme $\forall k \geqslant 0,\ \ a \geqslant 1 \iff a^k \geqslant 1$, on a $\forall n \geqslant 0,\ \ a^n = 1 + (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^1 + a) \geqslant n(a-1) + 1$.

- Pour $a > 1$, d'après le théorème 3.8, la suite (a^n) diverge vers $+\infty$ car $a^n \geqslant n(a-1)+1$ et que $\forall a > 1,\ \ \lim n(a-1) + 1 = +\infty$.
- Pour $a = 1$, la suite (1^n) est constante. Elle converge vers 1.
- Pour $0 < a < 1$, la suite (a^n) converge vers 0. En effet, $a^n = \frac{1}{(\frac{1}{a})^n}$ et, comme $\frac{1}{a} > 1$, la suite de terme général $(\frac{1}{a})^n$ tend vers $+\infty$. Par application du théorème 3.7, la suite (a^n) étant obtenu par quotient d'une constante 1 par une expression tendant vers $+\infty$ tend vers 0.
- Pour $-1 < a < 0$, les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs, mais globalement la suite (a^n) tend vers 0.
- Pour $a < -1$, les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs, leur valeur absolue tend vers $+\infty$, mais la suite (a^n) diverge sans admettre de limite.

Comportement asymptotique d'une suite géométrique u de raison a et de premier terme u_0 :

a	$]-\infty;-1]$	$]-1;1[$	1	$]1;+\infty[$
$u_0 > 0$	pas de limite	0	u_0	$+\infty$
$u_0 < 0$	pas de limite	0	u_0	$-\infty$

Pour ce qui est de la somme S des termes d'une suite géométrique :

- Si $a > 1$, S diverge vers $\pm\infty$
- Si $|a| < 1$, la formule $S = u_0 \times \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ montre que, $1 - a^{n+1}$ tendant vers 1, $\lim S = \frac{1}{1-a}$.

Théorème 3.9 (gendarmes) Soient u, v et w trois suites. Si, à partir d'un certain rang N, on a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

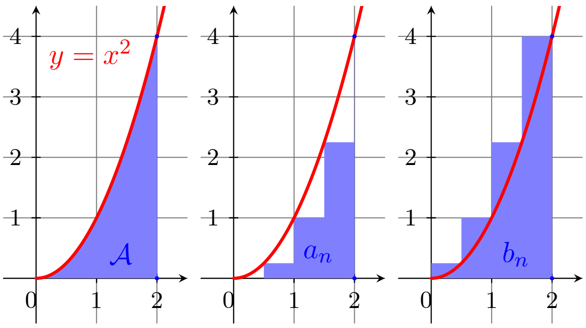
Démonstration Ce théorème est admis.

Exemple 55 – Montrons que la suite u définie par $u_n = \frac{\sin n}{n}$ a pour limite 0.
Nous savons que $\forall n \geqslant 0$ on a $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$.
On en déduit l'encadrement, valable pour tout entier $n \geqslant 0$: $\frac{-1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$.
Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$. D'après le théorème 3.9, la suite u converge donc vers 0.

Exemple 56 – Montrons que la suite u définie par $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}$ a pour limite 0.
Pour cela montrons qu'il existe un rang N à partir duquel $u_n < \frac{2}{n}$.
n étant un entier, l'inégalité $n^2+1 < 4n^2$ est vraie si et seulement si $3n^2 > 1$, soit pour $n > \frac{1}{\sqrt{3}}$, la fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, à partir de $n=1$, on a $n^2+1 < 4n^2$. En utilisant encore une fois la croissance de la fonction racine carrée, on en déduit que
$\forall n \geqslant 1,\ \sqrt{n^2+1} < \sqrt{4n^2}$, soit $\sqrt{n^2+1} < 2n$.
En divisant cette inégalité par n^2, on obtient le résultat cherché : à partir de $n=1$, on a $u_n < \frac{2}{n}$.
Comme, de plus, $\forall n > 0, u_n > 0$, on a bien un encadrement $0 < u_n < \frac{2}{n}$ qui tend à se réduire, la suite v, où $v_n = \frac{2}{n}$, ayant pour limite 0. D'après le théorème 3.9, la suite u a donc pour limite 0.

Exemple 57 (Calcul d'aire) –

Pour finir, donnons un exemple d'application des suites à l'évaluation d'une aire ou d'un volume : calculons l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la parabole d'équation $y = x^2$, la droite d'équation $x = 2$ et l'axe des abscisses.
➩ Pour cela, encadrons cette aire par deux aires a_n et b_n, plus faciles à calculer car constituées de rectangles (sur notre illustration $n = 4$).



- L'aire a_n est obtenue en additionnant les aires de n rectangles de largeur $\frac{2}{n}$; les hauteurs de ces rectangles constituent la suite h : $h_0 = 0$, $h_1 = (1\frac{2}{n})^2$, $h_2 = (2\frac{2}{n})^2$, $\cdots$, $h_{n-1} = ((n-1)\frac{2}{n})^2$.
- L'aire b_n est obtenue en additionnant les aires de n rectangles de largeur $\frac{2}{n}$; les hauteurs de ces rectangles constituent la suite H : $H_0 = (1\frac{2}{n})^2$, $H_1 = (2\frac{2}{n})^2$, $H_2 = (3\frac{2}{n})^2$,$\cdots$,$H_{n-1} = (n\frac{2}{n})^2$.

Ainsi, on a $a_n = h_0 \times \frac{2}{n} + h_1 \times \frac{2}{n} + \cdots + h_{n-1} \times \frac{2}{n}$, soit
$a_n = \frac{2}{n} \times (h_0 + h_1 + \cdots + h_{n-1}) = \frac{2}{n} \times [(0 + (1\frac{2}{n})^2 + \cdots + ((n-1)\frac{2}{n})^2]$.
En mettant $(\frac{2}{n})^2$ en facteur, il reste $a_n = (\frac{2}{n})^3 \times [0 + (1)^2 + (2)^2 + \cdots + (n-1)^2]$.
De même, l'aire b_n se transforme pour s'écrire $b_n = (\frac{2}{n})^3 \times [(1)^2 + (2)^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2]$.
L'encadrement se précise car $\forall n \geqslant 0,\ \ a_n < \mathcal{A} < b_n$.
Il ne reste plus qu'à déterminer $\lim a_n$ et $\lim b_n$.

➩ Pour cela, il serait bien de disposer d'une identité donnant la somme S des n premiers carrés.
Calculons de deux manières différentes la quantité $Q = \sum_{k=1}^{n} [k^3 - (k-1)^3]$:

1. on sépare en deux la somme $Q = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3$. De cette façon, les termes s'annulent deux à deux sauf le plus grand ; il reste donc $Q = n^3$.
2. on simplifie l'expression dans les parenthèses
$Q = \sum_{k=1}^{n} [k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1)] = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1)$.
De cette façon, en séparant en trois la somme, cela s'écrit
$Q = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3S - 3P + n$, où P est la somme des n premiers entiers.

On en déduit que $n^3 = 3S - 3P + n$, soit $S = \frac{n^3+3P-n}{3}$. Remplaçons P par sa valeur $P = \frac{n(n+1)}{2}$, il vient $S = \frac{2n^3+3n(n+1)-2n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$. On remarque que, pour $n = -1$ le polynôme $2n^2 + 3n + 1$ s'annule, ce qui conduit à la factorisation finale : $S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Remarque : on aurait pu, connaissant la formule, la démontrer par récurrence (c'est plus facile).

➩ Utilisons la formule pour simplifier a_n : $(\frac{2}{n})^3 \times (\frac{(n+1)(n)[2(n-1)+1]}{6}) = (\frac{2}{n})^3 \times (\frac{n(n+1)(2n-1)}{6})$.
De même, simplifions b_n : $(\frac{2}{n})^3 \times ((1)^2 + (2)^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2) = (\frac{2}{n})^3 \times (\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$.
Déterminons les limites de a et b :

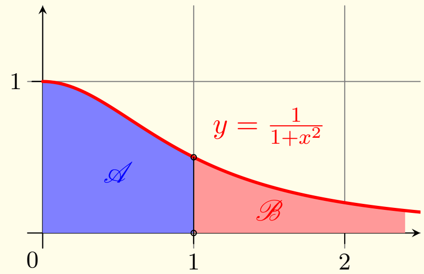
- $\lim a_n = \lim \frac{2^3 \times n(n+1)(2n-1)}{6n^3} = \lim \frac{2^3 \times 2n^3}{6n^3} = \frac{2^4}{6} = \frac{8}{3}$
- $\lim b_n = \lim \frac{2^3 \times n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim \frac{2^3 \times 2n^3}{6n^3} = \frac{2^4}{6} = \frac{8}{3}$

Ces deux suites encadrent $\mathcal{A}$ et convergent vers $\frac{4}{3}$; par application du théorème 3.9, $\mathcal{A} = \frac{8}{3}$.

Le coin du chercheur

❊ On se propose de déterminer une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par la courbe d'équation $y = \frac{1}{1+x^2}$, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ et l'axe des abscisses.

➩ Pour cela, on découpe l'intervalle $[0;1]$ en n tranches et on considère l'aire des rectangles intérieurs au domaine, la somme de ces rectangles constituant une valeur approchée par défaut de $\mathscr{A}$ que l'on note s_n (comme dans l'exemple 57). Une fois que l'on a obtenu une expression qui en permet le calcul algorithmiquement, déterminer s_{10}, s_{100}, s_{1000}, etc. jusqu'à reconnaître les décimales d'un irrationnel célèbre.
Indication : c'est plutôt le quadruple de $\mathscr{A}$ qui est célèbre...
Jusqu'à quelle valeur de n faut-il aller pour que $4s_n$ nous donne les 4 bonnes premières décimales de cet irrationnel ?



➩ Question d'intuition : à votre avis, l'aire sous la courbe à partir de $x = 1$ jusqu'à $+\infty$, notée $\mathscr{B}$, est-elle plus ou moins grande que $\mathscr{A}$? Si la réponse est plus, cette aire est-elle finie ou infinie ?

MÉTHODE (FICHE DE RÉVISION)

Définitions et propriétés à connaître par ♥

➲ Définitions

Suite u	fonction $\forall n \geqslant n_0,\ \ u(n) = u_n \in \mathbb{R}$; notée aussi $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ ou (u_n)
terme général	u_n : un terme de rang indéterminé (n) de la suite
rang	place dans la suite : rang(u_{n_0})=1 $\Longrightarrow$ rang(u_n)=$n+1-n_0$
déf. par récurrence	u_n est défini par une relation avec u_{n-1} et un terme initial u_0
déf. explicite	u_n est connu directement en fonction de n
constante	à partir d'un certain rang $N \geqslant n_0$, on a $\forall n \geqslant N,\ \ u_{n+1} = u_n$
croissante	à partir d'un certain rang $N \geqslant n_0$, on a $\forall n \geqslant N,\ \ u_{n+1} \geqslant u_n$
majorée	à partir d'un certain rang $N \geqslant n_0$, $\exists M \in \mathbb{R},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ u_n \leqslant M$
monotone, bornée	monotone : croissante ou décroissante ; bornée : majorée et minorée
périodique	$\exists p \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ u_{n+p} = u_n$; p : période
convergente	admet une limite l quand n tend vers$+\infty$
divergente	n'admet pas de limite finie quand n tend vers$+\infty$
limite	admet une limite finie ou infinie
arithmétique	différence $u_{n+1} - u_n$ constante (raison r) ; suite définie par u_0 et r
géométrique	quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ constant (raison q) ; suite définie par u_0 et q

➲ Propriétés

croissante	$u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou, u_n restant positif, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$
convergente	suite croissante et majorée ou décroissante et minorée
	gendarmes : $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n,\ \ \lim v_n = \lim w_n = l \Longrightarrow \lim u_n = l.$
	références : $(\frac{1}{\sqrt{n}})$, $(\frac{1}{n})$, $(\frac{1}{n^2})$, etc. convergent vers 0
divergente vers $+\infty$	suite croissante et non majorée ou décroissante et non minorée
	$u_n \geqslant v_n,\ \ \lim v_n = +\infty \Longrightarrow \lim u_n = +\infty$
	références : $(\sqrt{n})$, (n), (n^2), etc. divergent vers $+\infty$
arithmétique	terme général : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$
	somme : $\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{2u_0+nr}{2}$ ou $\sum_{k=p}^{p+n-1} u_k = n \times \frac{u_p+u_{p+n-1}}{2}$
	a, b et c consécutifs d'une suite arithm. $\Longleftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$
géométrique	terme général : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$
	somme : $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ou $\sum_{k=p}^{p+n-1} u_k = n \times \frac{1-q^n}{1-q}$
	a, b et c consécutifs d'une suite géom. $\Longleftrightarrow b^2 = ac$

4 Fonctions

Objectifs :

- Étude des fonctions de référence : affine, carré, inverse, racine carrée et valeur absolue
- Sens de variation des fonctions associées $u+k$, λu, $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$
- Notion de nombre dérivé d'une fonction en un point ; tangente à une courbe en un point
- Lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation ; recherche d'extremum
- Fonctions dérivées ; étude de fonctions

Aperçu historique :

Le terme « fonction » est dû à Leibniz (1692, de functio *: exécution), un mathématicien allemand qui a contribué à jeter les bases de l'analyse moderne. L'idée de fonction a d'abord été associée à une courbe du plan avant d'être considérée comme une combinaison d'opération sur une variable, ce qui peut être rapproché d'un algorithme. Quelques années plus tard, Jean Bernoulli emploie la notation* fx *pour désigner une fonction de la* variable x *: les* fonctions *telles que nous allons les étudier ici étaient nées. La notion de nombre dérivé, puis de fonction dérivée sont nées au* XVII^e*siècle (presque) simultanément chez deux scientifiques Leibniz (1646-1716) et Newton (1642-1727) à partir de deux problèmes très différents.*
Leibniz s'est ainsi intéressé aux courbes représentatives des fonctions et en particulier aux droites joignant deux points d'une telle courbe. Il s'est en particulier posé la question suivante : les points $A(a;f(a))$ *et* $M(a+h;f(a+h))$ *étant sur la courbe représentative d'une fonction* f*, le coefficient directeur de la droite* (AM) *est* $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$*, mais qu'advient-il de ce coefficient directeur lorsque les deux points* A *et* M *sont très proches l'un de l'autre, « infiniment proches » ?*
Newton, quant-à lui, s'est intéressé aux mouvements et en particulier aux vitesses d'objets en déplacement. Il s'est posé la question suivante : à un instant t*, un objet a parcouru une distance* d_1*, à l'instant* $t+h$ $(h>0)$*, il a parcouru la distance* d_2*. Sa vitesse moyenne entre les instants* t *et* $t+h$ *est donc* $V_m = \frac{d_2-d_1}{h}$*. Que devient cette vitesse lorsque les instants* t *et* $t+h$ *sont très proches, « infiniment proches » ?*
Dans les deux cas, on est amené à travailler sur des nombres « infiniment proches » et donc à devoir calculer des quotients de nombres « infiniment proches de 0 ». Pour cela, nous allons définir la notion de limite qui a posé de nombreux soucis aux mathématiciens d'avant Newton et Leibniz (voir par exemple les paradoxes de Zénon d'Alexandrie).

1. Notions générales sur les fonctions numériques

a. Généralités

Définition 4.1 Une fonction numérique f permet d'associer à chaque nombre x d'un ensemble $\mathscr{D}$ un nombre y que l'on note $f(x)$ et qui est appelé « image » de x par la fonction f. On note :

$$f : x \longmapsto y = f(x)$$

Le nombre x associé à $y = f(x)$ est appelé « antécédent » de y par f.

Remarques :

- L'image d'un nombre x de $\mathscr{D}$ par une fonction numérique f est unique. Par contre, un réel peut avoir un ou plusieurs antécédent(s) par f, ou aucun.
- L'ensemble de départ $\mathscr{D}$ dans lequel une fonction numérique f puise les valeurs de sa variable x est généralement une partie de $\mathbb{R}$: un intervalle (ouvert ou fermé) ou une réunion d'intervalles. Ce peut être aussi une partie discrète (avec des trous) comme $\mathbb{N}$. Les suites (c.f. chapitre 3) sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$, à partir d'un certain rang. L'ensemble d'arrivée n'est généralement pas précisé mais il s'agit de $\mathbb{R}$ ou d'une partie de $\mathbb{R}$. La fonction carrée par exemple est définie sur $\mathbb{R}$ et prends ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (tous les carrés sont positifs).
- Dans ce chapitre, le terme fonction désignera toujours une fonction numérique. Mais on peut définir des fonctions sur d'autres objets que les nombres, par exemple les points. La symétrie centrale, par exemple, est une fonction définie sur des points. Il faut aussi noter qu'une fonction peut être définie pour plusieurs variables. Le PGCD par exemple est une fonction de deux variables entières au minimum. Le volume d'un cylindre dépend à la fois de la hauteur h et du rayon r de la base. Dans ce cas, V est une fonction de deux variable et $V(h,r) = \pi r^2 h$.

Exemple 58 – On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2 - 1$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f: \quad \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-1)^2 - 1 \\ 1 & \longmapsto & 0^2 - 1 = -1 \\ 0 & \longmapsto & (-1)^2 - 1 = 0 \\ \frac{1}{2} & \longmapsto & (\frac{-1}{2})^2 - 1 = \frac{-3}{4} \\ \sqrt{2} & \longmapsto & (\sqrt{2}-1)^2 - 1 = 2(1-\sqrt{2}) \approx -0{,}828 \end{array}$$

Dans cet exemple, portant sur une fonction polynôme de degré 2 (c.f. chapitre 1), le nombre 0 a deux antécédents car l'équation $(x-1)^2 - 1 = 0$ a deux solutions : $x = 0$ et $x = 2$. Par contre, -2 n'a pas d'antécédent car $(x-1)^2 - 1 \geqslant -1$. Le seul nombre qui n'a qu'un seul antécédent par f est -1, et cet unique antécédent est 1.

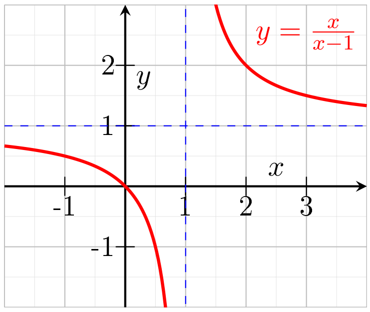
Définition 4.2 Soit f une fonction numérique. On appelle ensemble de définition de f, et on note généralement $\mathscr{D}_f$, l'ensemble des nombres pour lesquels $f(x)$ existe.

Exemple 59 – On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$.
Le nombre $g(x)$ existe pour tout $x \neq 1$. En effet si $x = 1$, pour calculer $g(x)$, il faudrait diviser par 0 ce qui est impossible. Donc $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty \ ; \ 1[\cup]1 \ ; \ +\infty[$.
On doit distinguer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ sur laquelle la fonction est définie et, dans une situation donnée, la restriction de $\mathscr{D}_g$ sur laquelle on va réellement utiliser la fonction. Dans cet exemple, si x représentait une longueur, on devrait nécessairement avoir $x \geqslant 0$. La restriction de $\mathscr{D}_g$ sur laquelle on travaille serait alors $\mathbb{R} \setminus \{1\} \cap \mathbb{R}^+ = [0 \ ; \ 1[\cup]1 \ ; \ +\infty[$.

Définition 4.3 (Représentation graphique) Soit f une fonction numérique.
Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a une valeur $y = f(x)$; chaque couple $(x;y)$ peut être représenté par un point dans un repère.
L'ensemble des points de coordonnées $(x; y = f(x))$, lorsque x décrit $x \in \mathscr{D}_f$ est appelé courbe représentative de la fonction f. On la note généralement $\mathscr{C}_f$.

Remarque :
Bien entendu, on ne peut généralement pas tracer $\mathscr{C}_f$ en entier, car la plupart du temps l'ensemble de départ ou l'ensemble d'arrivée comporte une borne ouverte $\pm\infty$.

Dans ce cas, on trace un « segment » de la courbe complète. Le segment tracé relève d'un choix : on doit définir les paramètres de la fenêtre d'affichage (désignés souvent, sur les calculatrices, xMin, xMax, yMin et yMax).
Pour la courbe de la fonction g de l'exemple 59, nous avons affiché deux segments de la courbe $\mathscr{C}_g$: le premier pour $x \in [-2 ; \frac{2}{3}]$ et le second pour $x \in [\frac{3}{2} ; 4]$. Les paramètres de la fenêtre d'affichage sont alors xMin=-2, xMax=4, yMin=-2 et yMax=3.



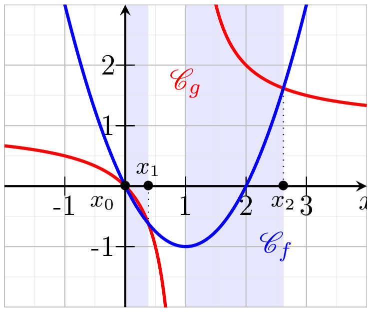
Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle $[a; b]$.

- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ c'est trouver les abscisses des points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$, c'est trouver les abscisses des points $M(x; f(x))$ et $N(x; g(x))$ tels que M est « au-dessus » de N.

Exemple :
Sur la figure ci-contre, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g des exemples 58 et 59.

L'équation $f(x) = g(x)$ admet trois solutions :
$$\mathscr{S} = \{x_0; x_1; x_2\} \text{ avec}$$
$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,618$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ est :
$$\mathscr{S}' = [x_0; x_1] \cup]1; x_2]$$
Nous avons colorié en bleu les zones où la courbe de f est en-dessous de la courbe de g dans lesquelles on trouve les solutions de l'inéquation.



Par exemple, pour $x = 2$, on a $x \in]1; x_2]$ et $M(2; f(2) = 0)$ est bien **au-dessous** de $N(2; g(2) = 2))$.
Par contre, pour $x = -1$, on a $x \notin \mathscr{S}'$ et $M(-1; f(-1) = 3)$ est **au-dessus** de $N(-1; g(-1) = \frac{1}{2}))$.

Variations et extremums

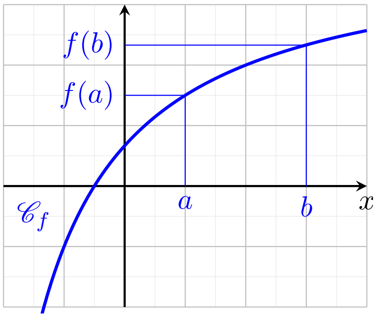
Définition 4.4 On dit qu'une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si pour tout a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$, et on note $\forall a, b \in I, a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$
De même, f est strictement décroissante sur un intervalle $I \Longleftrightarrow \forall a, b \in I, a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$.
Une fonction est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante ou décroissante.

Remarques :

- Graphiquement, une fonction est croissante (respectivement décroissante) si sa courbe « monte » (resp. « descend ») lorsqu'on se déplace de la gauche vers la droite.
- Une fonction est croissante au sens large (respectivement décroissante) sur I, si $\forall a, b \in I, a < b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b)$ (respect. $f(a) \leqslant f(b)$). Une fonction est monotone sur I si elle est croissante ou décroissante.
- Une fonction croissante conserve l'ordre des nombres alors qu'une fonction décroissante en inverse l'ordre.

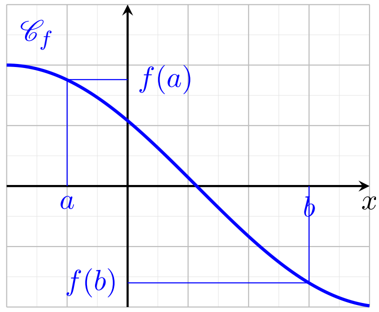
Définition 4.5 Soient f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$.
On dit que $f(x_0)$ est le minimum de f sur I si $\forall x \in I, f(x_0) \leqslant f(x)$.
On dit que $f(x_0)$ est le maximum de f sur I si $\forall x \in I, f(x_0) \geqslant f(x)$.

Fonction strictement croissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ « monte » lorsqu'on se déplace vers la droite.

Fonction strictement décroissante :



Pour tous les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ « descend » lorsqu'on se déplace vers la droite.

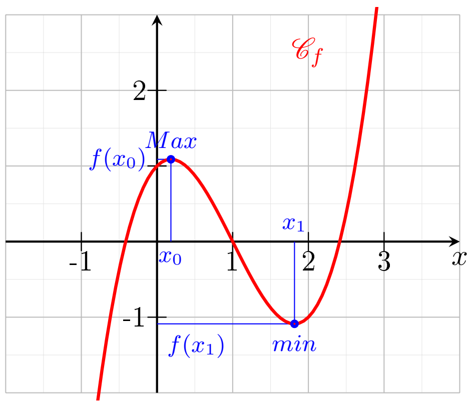
Propriété 4.1 (Condition extremum) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. Si f est croissante pour $x \in I, x \leqslant x_0$ puis décroissante pour $x \in I, x \geqslant x_0$, alors f admet un maximum sur I. Elle atteint son maximum $f(x_0)$ pour $x = x_0$.
De même, Si f est décroissante pour $x \in I, x \leqslant x_0$ puis croissante pour $x \in I, x \geqslant x_0$, alors f admet un minimum sur I. Elle atteint son minimum $f(x_0)$ pour $x = x_0$.

Remarques

- Un extremum (minimum ou maximum) peut être identifié sur une partie seulement du domaine de définition. Dans ce cas, on parle de minimum local (ou maximum local).
- Le tableau de variation résume les informations sur le sens de variation, l'existence et la valeurs des extremums, ainsi que, on précisera ce point plus loin, les limites. Voir l'exemple qui suit concernant une fonction polynomiale du troisième degré. Le tableau de variation ainsi que la courbe permettent d'identifier un minimum local et un maximum local.

Exemple 60 –

On considère la fonction f définie par
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$$
La fonction est définie sur $\mathbb{R}$.
Elle admet un maximum local sur $]-\infty; 1]$
et un minimum local sur $[1; +\infty[$
(la valeur 1 est lue graphiquement).
Les valeurs exactes de x_0 et x_1 pourront être déterminées à l'aide de la fonction dérivée, à la fin de ce chapitre. Donnons le résultat :
$x_0 = \frac{3-\sqrt{6}}{3} \approx 0.1835$ et $x_1 = \frac{3+\sqrt{6}}{3} \approx 1.8165$
Pour évaluer les extremums locaux, il suffit alors de remplacer : $f(x_0) \approx 1.0887$ et $f(x_1) \approx -1.0887$.



Le tableau de variation de f résume les informations sur les variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		x_0		x_1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	

Propriété 4.2 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour deux nombres distincts x_1 et x_2 de I, on note $\tau = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2.
La fonction f est croissante (respect. décroissante, strictement croissante, strictement croissante) sur I si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in I, \tau \geqslant 0$ (respect. $\tau \leqslant 0$, $\tau > 0$, $\tau < 0$).

Démonstration Pour deux valeurs distinctes x_1 et x_2 de I, si la différence $f(x_1) - f(x_2)$ est du même signe que $x_1 - x_2$, alors la fonction est croissante (l'ordre est conservé), d'où l'idée de s'interroger sur le signe du quotient (ou du produit). D'après la règle des signes, le rapport noté τ est positif si les deux facteurs sont de même signe. D'où $\tau > 0 \iff [x_1 - x_2 < 0 \implies f(x_1) - f(x_2) < 0]$, ce qui est la définition d'une fonction strictement croissante.
On raisonne de même pour $\tau < 0$, $\tau \leqslant 0$ et $\tau \geqslant 0$.

Dans la partie suivante, nous allons donner des exemples d'application de cette propriété.
Cette méthode étant parfois difficile à mettre en œuvre, on lui préfèrera la méthode qui sera étudiée plus loin, qui s'intéresse au signe de la dérivée. On substituera alors à l'étude du signe du taux d'accroissement, l'étude du signe de la dérivée.

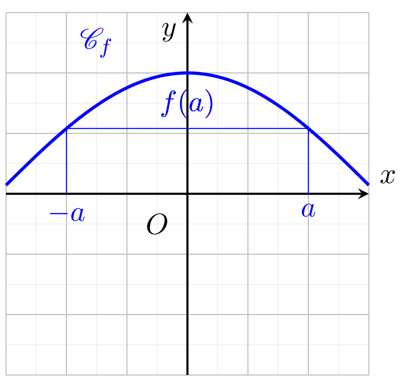
Parité, imparité

Définition 4.6 (Parité) Soit f une fonction définie sur un intervalle I centré sur l'origine.
On dit que f est paire (respectivement impaire)si pour tout x de I, on a $f(-x) = f(x)$ (respect. $f(-x) = -f(x)$).

Remarques

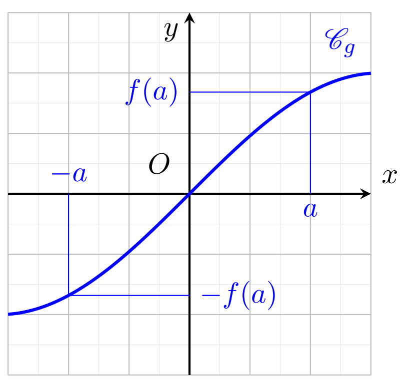
- La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. La courbe d'une fonction impaire admet l'origine comme centre de symétrie. Cette caractérisation géométrique traduit exactement la définition.
- Un des intérêts de savoir qu'une fonction est paire ou impaire réside dans le fait que la connaissance des variations d'une telle fonction pour $x \geqslant 0$ entraîne automatiquement la connaissance de celles pour $x \leqslant 0$. Pour une fonction paire, les sens sont inversés de part et d'autre de l'origine, alors que pour une fonction impaire ils sont conservés.
- Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x^4}$ ou $x \mapsto \cos x$ sont paires alors que $x \mapsto x$, $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ ou $x \mapsto \sin x$ sont impaires.

La fonction f est paire



$\forall x \in I, f(-x) = f(x)$
La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à (Oy).

La fonction g est impaire



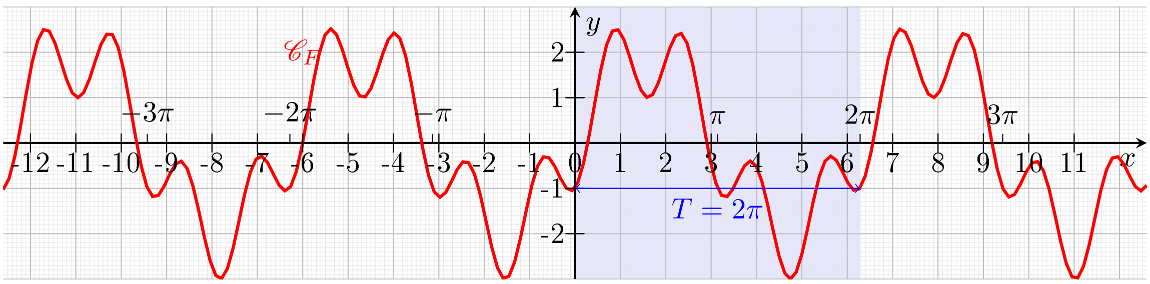
$\forall x \in I, g(-x) = -g(x)$
La courbe $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à O.

DÉFINITION 4.7 Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période $T > 0$ si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$ où T est le plus petit réel positif non nul vérifiant cette égalité.

Remarques :

- Cette définition a déjà été donnée dans le chapitre 3 car les fonctions trigonométriques sont les exemple-types de fonctions périodiques. Rappelons que sin et cos sont des fonctions périodiques de période 2π alors que tan est une fonction périodique de période π. Nous avons aussi remarqué que la fonction $S_{(a,b)}$ définie par $S_{(a,b)}(x) = \sin(ax+b)$, avec $a \neq 0$, est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{a}$.
- Un des intérêts de savoir qu'une fonction est périodique réside dans le fait que la connaissance des variations d'une telle fonction sur un intervalle I d'amplitude T (la période) suffit à connaître les variations de la fonction sur $\mathbb{R}$. En effet, le motif dessiné par la courbe sur cet intervalle I est reproduit *ad libitum* par translations de vecteur $\lambda T\vec{i}$ où λ décrit $\mathbb{Z}$.

EXEMPLE 61 – La fonction F représentée ci-dessous est périodique de période 2π. Il suffit d'en étudier les variations sur $[0; 2\pi]$ (ou sur $[-\pi; \pi]$ ou tout autre intervalle d'amplitude 2π) pour connaître tout des variations de F sur $\mathbb{R}$.



b. Fonctions usuelles

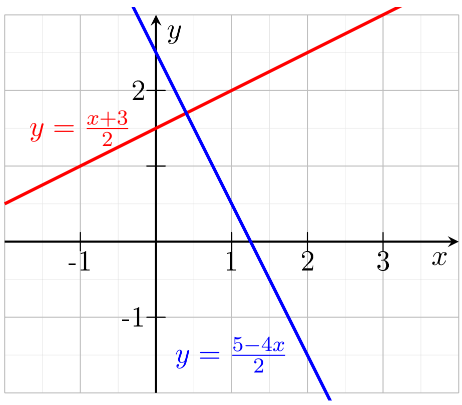
Rappelons tout d'abord quelques résultats de la classe de seconde.

Fonctions affines

DÉFINITION 4.8 Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine s'il existe deux réels m et p tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$
- Si $m < 0$, la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $m = 0$, la fonction est constante sur $\mathbb{R}$

La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est la droite d'équation $y = mx + p$.
C'est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées, passant par le point de coordonnées $(0; p)$ et de coefficient directeur m.



Les fonctions linéaires sont des fonctions affines pour lesquelles le coefficient p vaut 0.

Le taux d'accroissement d'une fonction affine est constant, égal au coefficient directeur m, ce qui explique que le sens de variation soit fixé par le signe de m.

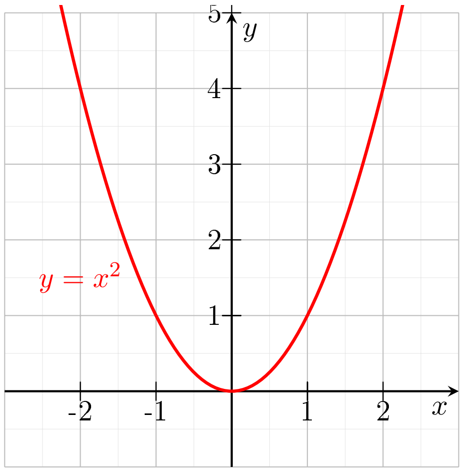
Fonction carré

La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto x^2$.
Taux de variation : $\tau = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$.
τ garde un signe constant tant que x_1 et x_2 sont de même signe. En particulier, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, x_1 + x_2 > 0$. La fonction carré est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$.
De plus, comme $\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^2 = x^2$, la fonction carré est paire. Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

La fonction carré admet 0 comme minimum, atteint pour $x = 0$. Sa représentation graphique est une parabole de sommet O.



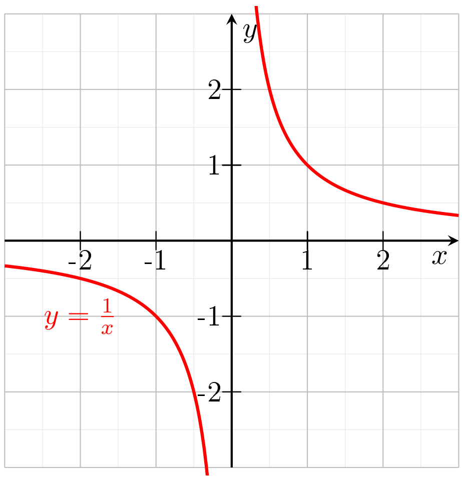
Fonction inverse

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Taux de variation : $\tau = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)} = \frac{-1}{x_1 x_2}$.
τ est négatif sur les deux intervalles où la fonction inverse est définie. En particulier, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, \tau < 0$. La fonction inverse est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.
Attention, elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$!

De plus, comme $\forall x \neq 0, \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$, la fonction inverse est impaire. Sa représentation graphique est symétrique par rapport à O.
Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

Sa représentation graphique est une hyperbole.



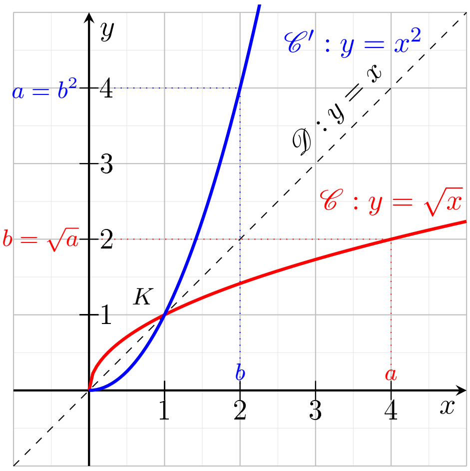
Fonction racine carrée

DÉFINITION 4.9 (FONCTION RACINE CARRÉE) La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ qui à tout réel positif x associe sa racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$, c'est-à-dire le seul nombre positif tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

Taux de variation : $\tau = \frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{x_1-x_2} = \frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}{(x_1-x_2)(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})} = \frac{x_1-x_2}{(x_1-x_2)(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})} = \frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$.
Vous noterez, ici, l'utilisation de la « quantité conjuguée » de $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$ qui est $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$; le produit de ces deux quantités conjuguées supprimant les racines carrées grâce à l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
Comme le dénominateur $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ est la somme de deux nombres positifs, il est positif. τ est donc positif. La fonction racine carrée est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	0 $\nearrow$

Soient $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = x^2$ et a et b deux réels positifs. On a :
$a = b^2$ et $b > 0 \iff \begin{cases} b = \sqrt{a} \iff M(a;b) \in \mathscr{C} \\ \qquad\qquad M'(b;a) \in \mathscr{C}' \end{cases}$
Par conséquent, si on est dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de la fonction racine carrée et de la fonction carré sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Propriété 4.3 (Positions relatives de $x^2, x, \sqrt{x}$) Notons $\mathscr{D}$ la courbe d'équation $y = x$.

- Sur $]0;1[$, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ alors que $\mathscr{C}'$ est en-dessous.
- Sur $]1;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}'$ est en-dessous de $\mathscr{D}$ alors que $\mathscr{C}$ est au-dessus.
- Ces trois courbes passent toutes par les points $O(0;0)$ et $K(1;1)$.

Pour $x > 1$: $\sqrt{x} < x < x^2$; pour $0 > x > 1$: $\sqrt{x} > x > x^2$; pour $x = 0$ ou 1 : $\sqrt{x} = x = x^2$

Démonstration Cette propriété est évidente sur le graphique mais établissons-la algébriquement :
Prenons $0 < x < 1$ et multiplions cette inégalité par $x > 0$, on obtient $0 < x^2 < x$. Sur cet intervalle, $\mathscr{C}'$ est donc en-dessous de $\mathscr{D}$. Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$,
$0 < x^2 < x \Longrightarrow 0 < x < \sqrt{x}$, donc $\mathscr{D}$ est en-dessous de $\mathscr{C}$.

Pour $x > 1$, en multipliant chaque membre par $x > 0$, on obtient $x^2 > x$, donc $\mathscr{C}'$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ et, de même, en utilisant la croissance de la fonction racine carrée, $x > \sqrt{x}$, $\mathscr{D}$ est au-dessus de $\mathscr{C}$.

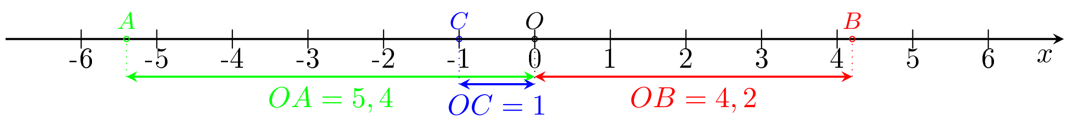
Enfin, on a $\sqrt{0} = 0 = 0^2$, et $\sqrt{1} = 1 = 1^2$, d'où le dernier point de la propriété.

Définition 4.10 (Fonction valeur absolue) La fonction valeur absolue est la fonction qui à un réel x associe sa valeur absolue : $x \mapsto |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Remarque : Soient x un nombre réel, et M le point d'abscisse x de la droite réelle d'origine O.
La valeur absolue de x est la distance OM, on note : $OM = |x|$.

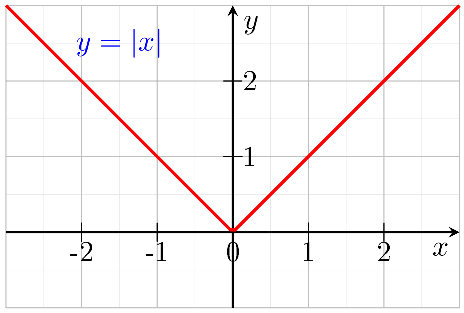
- Si $x \geqslant 0$, alors $OM = x_M - x_O = x - 0 = x$
- Si $x \leqslant 0$, alors $OM = x_O - x_M = 0 - x = -x$

Avec les points $A(-5,4)$, $B(4,2)$ et $C(-1)$, par exemple, on a $OA = |-5,4| = 5,4$, $OB = |4,2| = 4,2$ et $OC = |-1| = 1$.



Le sens de variation est celui de la fonction $x \mapsto x$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire croissant, et celui de la fonction $x \mapsto -x$ pour $x \in \mathbb{R}^-$, c'est-à-dire décroissant.
La fonction est paire car pour tout réel x, on a $|-x| = |x|$.
Elle passe par un minimum 0, atteint pour $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$\searrow$	0	$\nearrow$



La représentation graphique est la réunion de deux demi-droites (la fonction valeur absolue est une fonction « affine par morceaux »). Cette courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

En plus des propriétés mentionnées, il faut remarquer que $|x| = \sqrt{x^2}$.
La fonction valeur absolue est souvent notée `abs` dans les langages de programmation.

Propriété 4.4 Soit $x \in \mathbb{R}$.

(i) $\forall y \in \mathbb{R}, |x| = |y| \iff (x = y \text{ ou } x = -y)$

(ii) $\forall y \in \mathbb{R}, |x \times y| = |x| \times |y|$, et pour $y \neq 0$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

(iii) $\forall y \in \mathbb{R}^+, |x| < y \iff -y < x < y$, et $\forall y \in \mathbb{R}^+, |x| > y \iff x > y$ ou $x < -y$

Démonstration Ces propriétés découlent de la définition, en envisageant les différents cas.
Nous n'avons pas envisagé l'inégalité $|x| < y$ lorsque $y < 0$ car aucun nombre x ne convient alors.
Lorsque $y < 0$, par contre, l'inégalité $|x| > y$ est toujours vérifiée.

Exemple 62 – Supposons que l'on doive résoudre l'inéquation $|3x - 5| < x + 1$.
Il faut commencer par se placer dans un intervalle où $x + 1 > 0$, soit $x > -1$.

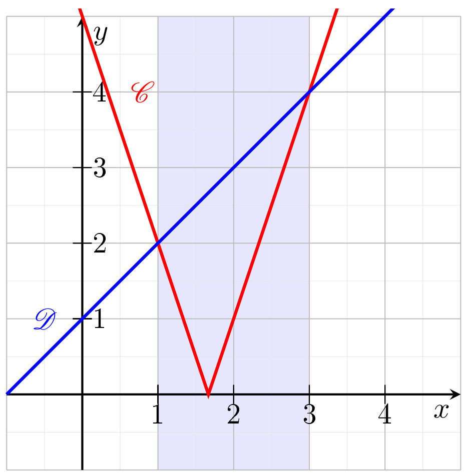
Ensuite, par application de la propriété (*iii*), on écrit :

$$-(x+1) < 3x - 5 < x + 1 \text{ soit,}$$

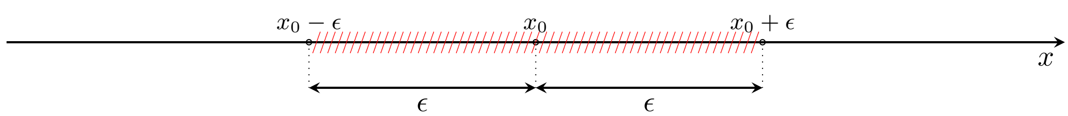
$$\begin{cases} 3x - 5 < x + 1 \iff 2x - 6 < 0 \iff x < 3 \\ -(x+1) < 3x - 5 \iff 4x - 4 > 0 \iff x > 1 \end{cases}$$

Pour avoir des solutions, il faut donc avoir simultanément : $x > -1$, $x < 3$ et $x > 1$ soit, finalement, $1 < x < 3$.

Illustration graphique :
Nous traçons la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = |3x - 5|$ qui est constituée de deux demi-droites d'équations :
$y = 3x - 5$ (lorsque $x > \frac{5}{3}$) et $y = -3x + 5$ (lorsque $x < \frac{5}{3}$)
Puis, nous traçons la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 5x + 1$
Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points où la courbe est en dessous de la droite (zone bleutée).



Remarque :
Un cas particulier de la propriété (*iii*) mérite d'être signalé.
$\forall x, x_0 \in \mathbb{R}, \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, |x - x_0| \leqslant \epsilon \iff -\epsilon \leqslant x - x_0 \leqslant \epsilon \iff x_0 - \epsilon \leqslant x \leqslant x_0 + \epsilon \iff x \in [x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon]$.



En effet, on peut interpréter $|x_A - x_B|$ comme la distance entre les points $A(x_A)$ et $B(x_B)$ d'un axe gradué et l'inégalité $|x_A - x_B| < \lambda$ où $\lambda \geqslant 0$ comme le fait que B ne s'écarte pas de A de plus de λ, soit $AB < \lambda$, ce qu'on peut interpréter des deux façons équivalentes :

$$x_B \in [x_A - \lambda; x_A + \lambda] \text{ ou } x_A \in [x_B - \lambda; x_B + \lambda]$$

c. Opérations sur les fonctions

Définition 4.11 Deux fonctions f et g sont dites égales si et seulement si :
- leurs ensembles de définition $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$ sont confondus
- pour tout x de cet ensemble, on a $f(x) = g(x)$

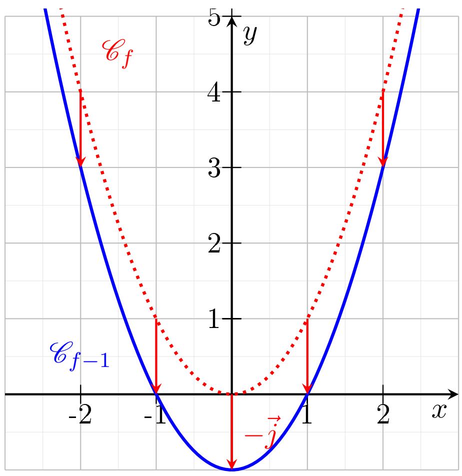
Dans ce cas, leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont confondues.

Les fonctions que l'on va considérer ont souvent des ensembles de définition différents ; dans ce cas, on travaillera sur l'intersection $\mathscr{D} = \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ des deux ensembles de définition, c'est-à-dire sur la partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ où les fonctions sont toutes les deux définies. On dit que l'on « restreint » les fonctions à $\mathscr{D}$.

Opérations simples

Définition 4.12 (Somme d'un réel) Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I et k un réel quelconque. La fonction $f + k$ est la fonction qui à $x \in I$ associe $f(x) + k$.

Exemple 63 – $f(x) = x^2$ et $k = -1$: la fonction $g = f + k$ définie par $g(x) = f(x) + k = x^2 - 1$ a le même sens de variation que la fonction carré, et la courbe représentative de la fonction g est obtenue à partir de celle de f par une translation de vecteur $-\vec{j}$ (décalage de 1 unité vers le bas).



Propriété 4.5 Soient f une fonction numérique définie et monotone sur un intervalle I et k un réel quelconque. Les fonctions $f + k$ et f ont le même sens de variation sur I et, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction $f + k$ se déduit de celle de f par translation de vecteur $k\vec{j}$.

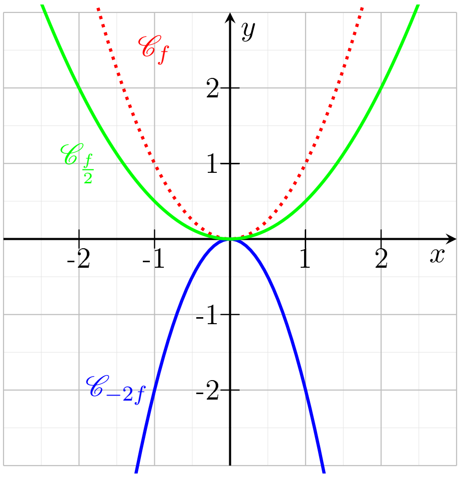
Démonstration Le taux de variation de g entre deux valeurs x_1, x_2 de l'intervalle I est

$$\tau = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1) + k - (f(x_2) + k)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

C'est le même taux de variation que f, les deux fonctions ont donc même sens de variation sur I.
Soient $x \in I$, $M(x; f(x))$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et $M'(x; g(x))$ le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour composantes $(x - x; g(x) - f(x))$, soit $(0; k)$ car $g(x) - f(x) = k$.
Si on est dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, il s'agit donc du vecteur $k\vec{j}$.
La courbe $\mathscr{C}_g$ est bien la translatée de $\mathscr{C}_f$ par le vecteur $k\vec{j}$.

Définition 4.13 Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I et k un réel quelconque. La fonction kf est la fonction qui à $x \in I$ associe $k \times f(x)$.

Exemple 64 – $f(x) = x^2$, $k = -2$ et $k' = \frac{1}{2}$:
La fonction $g = kf$ définie par $g(x) = -2x^2$ a des sens de variation opposés à ceux de la fonction carré
La fonction $g' = k'f$ définie par $g'(x) = \frac{x^2}{2}$ a les mêmes sens de variation que ceux de la fonction carré.



Propriété 4.6 Soient f une fonction numérique définie et monotone sur un intervalle I et k un réel quelconque.
Les fonctions kf et f ont le même sens de variation sur I si $k > 0$ et des sens opposés si $k < 0$.
La courbe représentative de kf se déduit de celle de f en multipliant par k l'ordonnée de chaque point de $\mathscr{C}_f$.

Démonstration Le taux de variation de $g = kf$ entre deux valeurs x_1, x_2 de l'intervalle I est

$$\tau = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{kf(x_1) - k(f(x_2))}{x_1 - x_2} = k\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

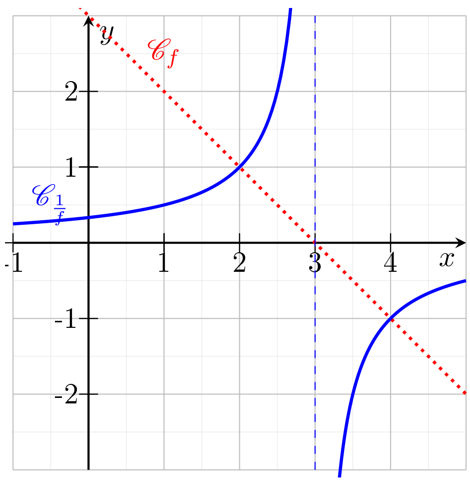
C'est le taux de variation de f multiplié par k, les deux fonctions ont donc même sens de variation sur I lorsque $k > 0$ et des sens opposés lorsque $k < 0$.
On peut noter que si $k = 0$, la propriété ne s'applique pas car kf est constante égale à 0 sur I.

Une remarque en passant : la multiplication par un réel de valeur absolue inférieure à 1 « aplatit » verticalement la courbe, alors que la multiplication par un réel de valeur absolue supérieure à 1 la « dilate », toujours dans le sens vertical.

Compositions

Définition 4.14 (fonction inverse) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie et qui ne s'annule pas sur I. La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est définie sur I. Elle est appelée fonction inverse de f et notée $g = \frac{1}{f}$.

Exemple 65 – Soit $f : x \mapsto 3 - x$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction s'annulant pour $x = 3$, on va définir la fonction inverse de f sur $I = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Cette fonction $g = \frac{1}{f}$ est définie sur I par $x \mapsto \frac{1}{3-x}$.
Sur $]-\infty; 3[$, la fonction f est définie, décroissante, ne s'annule pas et ne change pas de signe (son signe est positif). Par conséquent, la fonction inverse de f est également définie, et son sens de variation est, à l'opposé de celui de f, croissant.
Sur $]3; +\infty[$, la fonction f est définie, décroissante, ne s'annule pas et ne change pas de signe (son signe est négatif). Par conséquent, la fonction inverse de f est également définie, et son sens de variation est, à l'opposé de celui de f, croissant.



Pour définir $\frac{1}{f}$, il suffit de restreindre l'ensemble de définition de f aux parties où $f(x) \neq 0$.

Propriété 4.7 Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I, ne s'annulant pas et ne changeant pas de signe sur I. La fonction $g = \frac{1}{f}$ a un sens de variation opposé à celui de f.

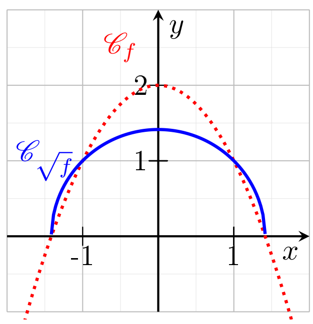
Démonstration Le taux de variation de $g = \frac{1}{f}$ entre deux valeurs x_1, x_2 de l'intervalle I est

$$\tau = \frac{\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)}}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{f(x_1)f(x_2)}}{x_1 - x_2} = \frac{-(f(x_1) - f(x_2))}{f(x_1)f(x_2)(x_1 - x_2)} = \frac{-1}{f(x_1)f(x_2)} \times \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

C'est le taux de variation de f multiplié par $\frac{-1}{f(x_1)f(x_2)}$. Comme la fonction f ne change pas de signe sur I, le produit $f(x_1)f(x_2)$ reste positif. Les taux de variations de f et g sont donc de signes opposés (à cause du -1 qui reste au numérateur), les deux fonctions ont donc des sens de variation opposés.

Définition 4.15 (Racine carrée) Soient I un intervalle et f une fonction définie et positive sur I ($\forall x \in I, f(x) \geqslant 0$). La fonction $g : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est définie sur I. Elle est appelée fonction racine carrée de f et notée $g = \sqrt{f}$.

Exemple 66 – Soit $f : x \mapsto= 2 - x^2$.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et positive entre les racines de l'équation $2 - x^2 = 0$, soit pour $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ (voir chapitre 1). La fonction racine carrée de f est donc définie sur l'intervalle $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ où la fonction f est positive.
La fonction f est croissante sur $[-\sqrt{2}; 0]$ puis décroissante sur $[0; \sqrt{2}]$ et de même pour la fonction $g = \sqrt{f}$.
Dans un repère orthonormé, la courbe de g est un demi-cercle, car $y = \sqrt{2 - x^2} \Longrightarrow y^2 = 2 - x^2$, ce qui correspond bien à l'équation du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$. L'autre demi-cercle a pour équation $y = -\sqrt{2 - x^2}$.



Pour définir $\sqrt{f}$, il suffit de restreindre l'ensemble de définition de f aux parties où $f(x) \geqslant 0$.

Propriété 4.8 Soient I un intervalle et f une fonction définie et positive sur I. La fonction $\sqrt{f}$ a même sens de variation que f sur I.

Démonstration Le taux de variation de $g = \sqrt{f}$ entre deux valeurs x_1, x_2 de l'intervalle I est

$$\tau = \frac{\sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)}}{x_1 - x_2} = \frac{(\sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)})(\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)})}{(x_1 - x_2)(\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)})} = \frac{(\sqrt{f(x_1)})^2 - (\sqrt{f(x_2)})^2}{(x_1 - x_2)(\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)})}$$
$$= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1 - x_2)(\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)})} = \frac{1}{\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)}} \times \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

C'est le taux de variation de f multiplié par $\frac{1}{\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)}}$. Comme $\sqrt{f(x_1)}$ et $\sqrt{f(x_2)}$ sont toujours positifs, leur somme l'est aussi. Les taux de variations de f et g sont donc de même signe, les deux fonctions ont donc les mêmes sens de variation.

Le cas problématique où $\sqrt{f(x_1)}$ et $\sqrt{f(x_2)}$ sont nuls tous les deux en même temps doit être écarté en considérant une restriction de I sur laquelle $\sqrt{f(x)}$ ne s'annule qu'une seule fois. Comme x_1 et x_2 sont différents, la somme $\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)}$ ne peut alors pas être nulle et le quotient $\frac{1}{\sqrt{f(x_1)}+\sqrt{f(x_2)}}$ est bien défini et positif. Cette situation se produit dans notre exemple, puisque $\sqrt{2 - x^2}$ s'annule deux fois (pour $-\sqrt{2}$ et pour $\sqrt{2}$). En considérant séparément les intervalles $[-\sqrt{2}; 0]$ et $[0; \sqrt{2}]$, notre raisonnement permet de conclure. Notez que pour ces points « problématiques », la courbe de g est verticale (elle a une tangente verticale). On verra plus loin que cela correspond aux points où la fonction dérivée n'est pas définie.

DÉFINITION 4.16 (COMPOSÉE MONOTONE) Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I, à valeurs dans J, et soit g une fonction définie J. La fonction $x \mapsto g(f(x))$ est définie sur I. Elle est appelée fonction composée de f suivie de g et notée $g \circ f$.

Remarques : Les deux précédentes propriétés concernent des compositions :

- la fonction $g = \frac{1}{f}$ est la composée de f suivie de $x \mapsto \frac{1}{x}$
- la fonction $g = \sqrt{f}$ est la composée de f suivie de $x \mapsto \sqrt{x}$

On peut imaginer composer théoriquement toutes les fonctions entre elles. Nous n'envisagerons pas toutes les possibilités qui sont infinies, mais on peut donner l'exemple d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ et de la fonction sinus $g : x \mapsto \sin(x)$. Les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ sont différentes car $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin(x)) = a\sin(x) + b$, alors que $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(ax + b) = \sin(ax + b)$.

PROPRIÉTÉ 4.9 Soient I un intervalle et f une fonction définie et monotone sur I, à valeurs dans J, et soit g une fonction définie et monotone sur J. La composée $g \circ f$ est monotone : elle est croissante si f et g sont de même monotonie et décroissante sinon.
N.B. : même monotonie = toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes

DÉMONSTRATION Le taux de variation de $g \circ f$ entre deux valeurs x_1, x_2 de l'intervalle I est

$$\tau = \frac{g \circ f(x_1) - g \circ f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{g(f(x_1)) - g(f(x_2))}{f(x_1) - f(x_2)} \times \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

C'est le taux de variation de g multiplié par le taux de variation de f.
Si ces deux taux gardent le même signe, et c'est le cas lorsque les fonctions f et g sont de même monotonie, alors ce produit est positif et la fonction composée est croissante.
Si ces deux taux sont de signes contraires, et c'est le cas lorsque les fonctions f et g sont de monotonies différentes, alors ce produit est négatif et la fonction composée est décroissante.

2. Notion de limite

Dans la partie 3 du chapitre 3, nous avons étudié la notion de limite en $+\infty$ pour une suite. Ici, cette notion doit être élargie aux fonctions numériques, et pas seulement au voisinage de $+\infty$. Il faudra bien sûr inclure le voisinage de $-\infty$, mais aussi le voisinage d'un point a. Par exemple, étudier ce qui se passe pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ lorsque x est dans un voisinage de 2, la valeur interdite.
L'objectif est double : étudier les comportements asymptotiques des fonctions aux bornes de leurs ensembles de définition, et mettre en place la notion de fonction dérivée, obtenue par « passage à la limite » d'un taux de variation.

a. Limite en $\pm\infty$

DÉFINITION 4.17 (FONCTION DE LIMITE $+\infty$) Une fonction f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ si, quel que soit le nombre A, à partir d'une certaine valeur x_0 de x, on a $f(x) > A$. Autrement dit :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x > x_0, f(x) > A$

Remarques : On a une définition analogue pour les fonctions de limite $-\infty$ en $+\infty$:
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x > x_0, f(x) < A$

De même, on définit ce que signifie, pour une fonction numérique, avoir une limite $\pm\infty$ en $-\infty$:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x < x_0, f(x) > A$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x < x_0, f(x) < A$
On dit « f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ » ou bien « f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ».

Propriété 4.10 Chacune des fonctions suivantes a pour limite $+\infty$ en $+\infty$:
$x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, etc. (soit $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \sqrt{x}$

Démonstration Montrons cela pour la fonction $x \mapsto x^2$.
Pour tout nombre $A > 0$ on peut trouver x_0 à partir duquel tous les carrés sont plus grands que A : il s'agit de $x_0 = \sqrt{A}$ car, pour $x > 0$, $x^2 > A \iff x > \sqrt{A}$.
Pour les autres valeurs de l'exposant $n \geqslant 1$: comme $x^n > x^{n-1}$ pour tout $x \geqslant 1$ (en multipliant par $x^{n-1} > 0$), $x > \sqrt{A} \Longrightarrow x^n > x^2 > A$ et donc, x^n dépasse n'importe quelle valeur A arbitrairement choisie pourvu que x soit assez grand.
Pour la fonction racine, la valeur x_0 à partir de laquelle $\sqrt{x}$ dépasse n'importe quelle valeur A arbitrairement choisie, est $x_0 = A^2$.
Les fonctions puissances et la fonction racine tendent donc toutes vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Définition 4.18 (Fonction de limite finie) Une fonction f à valeurs positives sur $[a; +\infty[$, admet 0 comme limite en $+\infty$ si, quel que soit le nombre $A > 0$, à partir d'une certaine valeur x_0 de x, on a $f(x) < A$. Autrement dit :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \iff \forall A > 0,\ \exists x_0 > a,\ \forall x > x_0, f(x) < A$
l étant un réel, une fonction f admet l comme limite en $+\infty$ si la fonction $f - l$ admet pour limite 0 en $+\infty$. Autrement dit, s'il existe une fonction φ de limite 0 en $+\infty$, telle que $f(x) = l + \varphi(x)$.

Remarques :

- De la première partie, on tire une définition de la limite 0 en $+\infty$ pour une fonction de signe quelconque : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = 0$
- Notons que toutes les fonctions n'ont pas forcément une limite en $+\infty$:
  $x \mapsto \sin(x)$ par exemple n'a pas de limite.
- D'une façon générale tout ce qui a été énoncé concernant la limite en $+\infty$ est transposable au voisinage de $-\infty$. Des limites énoncées dans la propriété 4.10, on déduit notamment :
  — comme la fonction carré est paire, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
  — comme la fonction cube est impaire, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

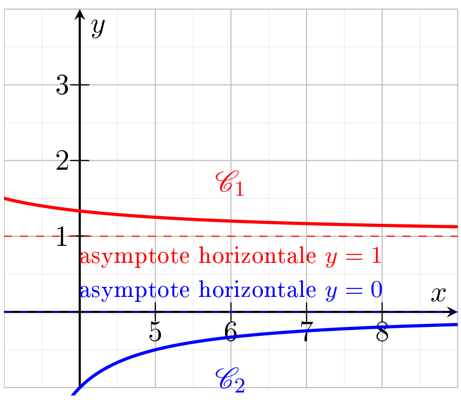
Propriété 4.11 Chacune des fonctions suivantes a pour limite 0 en $+\infty$:
$x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^3}$, etc. (soit $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

Démonstration Montrons cela pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Pour tout nombre $A > 0$ on peut trouver x_0 à partir duquel toutes les inverses sont plus petites que A : il s'agit de $x_0 = \frac{1}{A}$ car, pour $x > 0$, $\frac{1}{x} < A \iff x > \frac{1}{A}$.
Pour les autres valeurs de l'exposant $n > 0$, il suffit de remarquer encore que, comme $x^n > x^{n-1}$ pour tout $x \geqslant 1$, on déduit $\frac{1}{x^n} < \frac{1}{x^{n-1}} < \cdots < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$ et donc $\forall n > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
Pour la fonction racine, la valeur x_0 à partir de laquelle $\frac{1}{\sqrt{x}}$ devient inférieur à n'importe quelle valeur A arbitrairement choisie, est $x_0 = \frac{1}{A^2}$.

Exemples et interprétations graphiques : Si une fonction f a une limite finie l en $+\infty$, la courbe de f se rapproche de plus en plus de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = l$. Cette droite est appelée « asymptote horizontale » pour la courbe $\mathscr{C}_f$. On dit que la courbe tend asymptotiquement vers la droite : elle s'en rapproche sans jamais être confondue avec elle.

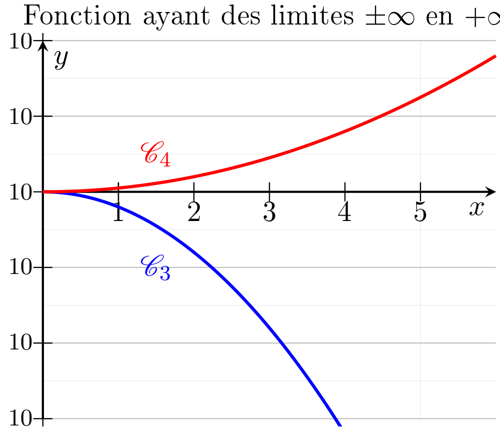
- La fonction g_1 de l'exemple 59 définie par $g_1(x) = \frac{x}{x-1}$ a pour limite $l = 1$ en $+\infty$, car $\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$. Cette fonction s'écrit $g_1(x) = 1 + \varphi(x)$ où $\varphi(x) = \frac{1}{x-1}$ est une fonction de limite nulle en $+\infty$ (on justifiera cela plus loin avec les théorèmes de comparaison). La courbe de g_1 tend asymptotiquement vers la droite d'équation $y = 1$ (notée $\mathscr{C}_1$ sur le graphique de gauche).
- La fonction g_2 de l'exemple 65 $x \mapsto \frac{1}{3-x}$ tend, quant-à elle, vers 0 en $+\infty$ (notée $\mathscr{C}_2$).
- Les fonction g_3 et g_4 de l'exemple 64 définies par $g_3(x) = -2x^2$ et $g_4(x) = \frac{x^2}{2}$, ont une limite infinie. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_4(x) = +\infty$ (la détermination de ces limites est très simple à l'aide des théorèmes qui suivent). Les courbes sont notées $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ sur le graphique de droite.

Fonction ayant des limites finies en $+\infty$:



La courbe s'approche de son asymptote horizontale (limite finie).

Fonction ayant des limites $\pm\infty$ en $+\infty$:



La courbe dépasse toute valeur arbitraire A vers le haut (limite $+\infty$) ou vers le bas (limite $-\infty$).

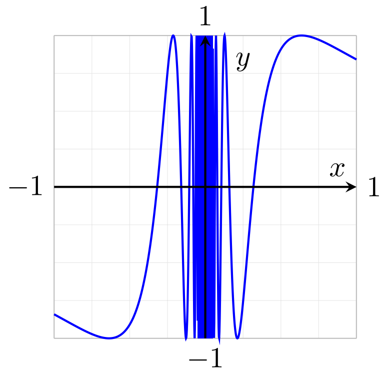
b. Limite en un point

Définition 4.19 (Limite en un point) Une fonction f admet 0 comme limite en a si, quel que soit le nombre A, dès que x est assez proche de a, la valeur absolue de $f(x)$ est plus proche de 0 que A. Autrement dit :
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \ \exists\epsilon > 0, |x - a| < \epsilon \Longrightarrow |f(x)| < A$
l étant un réel, une fonction f admet l comme limite en a si la fonction $f - l$ admet pour limite 0 en a. Autrement dit, s'il existe une fonction φ de limite 0 en a, telle que $f(x) = l + \varphi(x)$.

Remarques :

- La question de la limite en un point a est un problème à résoudre lorsqu'on est au bord de l'ensemble de définition de la fonction. Sinon, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Prenons un exemple : la fonction $f : x \mapsto \frac{(1+x)^3-1}{x}$ n'est pas définie pour $x = 0$. On ne peut pas remplacer x par 0 (le résultat n'est pas défini), et on ne peut simplifier par x que si $x \neq 0$. Dans ce cas, on simplifie par $x \neq 0$ et on fait « tendre » x vers 0.
  Pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \frac{(1+x)^3-1}{x} = \frac{1+3x^2+3x+x^3-1}{x} = \frac{x(3x+3+x^2)}{x} = 3x + 3 + x^2$.
  La simplification finale n'est possible que si $x \neq 0$, vous l'avez noté. Cependant, l'expression obtenue est définie jusqu'à être infiniment proche de 0. Et que se passe t-il pour $3x + 3 + x^2$ quand x s'approche infiniment près de 0 ? Et bien cette quantité s'approche de 3. Et on peut écrire $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$.

- Toutes les fonctions n'ont pas nécessairement une limite en un point.
  Par exemple la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0 : quand x s'approche de 0, $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini, et la fonction sin continue bravement à osciller entre -1 et $+1$ pour chaque intervalle d'amplitude 2π. La courbe obtenue contient une infinité d'oscillations dans la zone bleutée. On peut dilater cette zone autant qu'il nous plait, il y aura toujours cette zone au voisinage de 0.



- La deuxième partie de cette définition étend la définition d'une limite en un point à toute valeur finie l. On peut ramener la recherche d'une limite en un point a, à la recherche de la limite en 0, en considérant que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$. Il suffit pour cela d'effectuer le changement de variable $x = a+h$. Lorsque h tend vers 0, x tend bien vers a.
  Prenons un exemple :
  la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-x-2}{x-2}$ n'est pas définie pour $x=2$.
  On ne peut pas remplacer x par 2 (le résultat n'est pas défini).
  Par contre, en écrivant $x = 2+h$, on a $f(2+h) = \frac{(2+h)^2-(2+h)-2}{(2+h-2)^2} = \frac{h^2+3h}{h} = h+3$.
  Quand on fait tendre x vers 2, soit h vers 0, $h+3$ tend vers 3, et on a $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.
  En fait, $f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$ se simplifie, lorsque $x \neq 2$, en $f(x) = (x+1)$, et nous venons de montrer que pour la valeur interdite $x=2$, l'expression $f(x) = x+1$ reste valable (puisque $2+1=3$). La fonction f peut être « prolongée par continuité » en la fonction affine $x \mapsto x+1$ qui, elle, est définie sur $\mathbb{R}$.

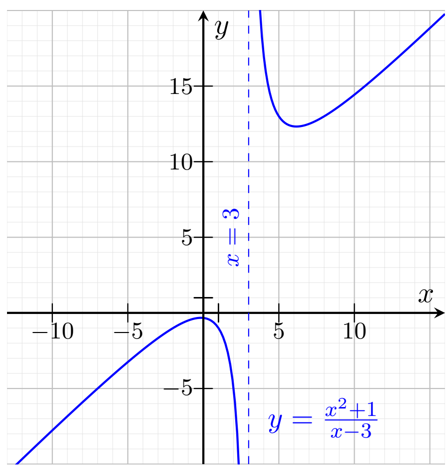
Définition 4.20 (Limite infinie en un point) Une fonction f admet $+\infty$ comme limite en a si, quel que soit le nombre A, dès que x est assez proche de a, on a $f(x) > A$. Autrement dit : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon > 0, |x-a| < \epsilon \Longrightarrow f(x) > A$

Remarques :

- On définit de même ce que signifie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- Lorsque la limite d'une fonction f en a est $\pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une « asymptote verticale » à la courbe représentative de f (la courbe s'approche de son asymptote sans jamais l'atteindre).

Exemple 67 – La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x-3}$ n'est pas définie pour $x = 3$.

En écrivant $x = 3+h$, on a
$f(3+h) = \frac{(3+h)^2+1}{3+h-3} = \frac{h^2+6h+10}{h} = h+6+\frac{10}{h}$.
Quand on fait tendre x vers 3, soit h vers 0, $h+6$ tend vers 6, mais $\frac{10}{h}$ tend vers l'infini. Il parait alors évident que $f(3+h)$ tend vers l'infini : $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \pm\infty$.
La droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f. Comme f est définie des deux côtés de la valeur interdite $x = 3$, il y a deux limites : la limite à gauche (quand x tend vers 3 tout en étant inférieur à 3) notée $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, et la limite à droite (quand x tend vers 3 tout en étant supérieur à 3) notée $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.
Ici, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$.



Propriété 4.12 (Limites de référence en 0) Chacune des fonctions suivantes a pour limite 0 en 0 : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, etc. (soit $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $x \mapsto \sqrt{x}$.
n étant un entier non nul, les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ont pour limite $+\infty$ en 0, excepté lorsque n est impair, la limite à gauche de 0 est alors $-\infty$.

Démonstration Pour ne pas trop nous répéter, nous laissons cette démonstration au lecteur.

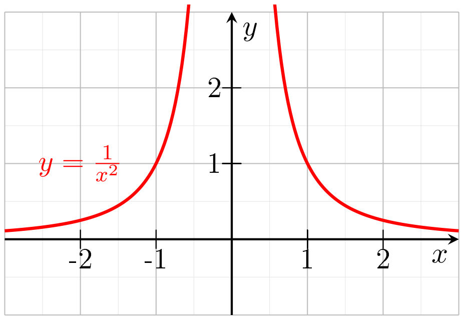
Remarque :

La fonction inverse correspond à $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ pour $n = 1$.
n étant impair, on a $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, ce que l'examen de la courbe (page 79) laissait déjà supposer.
On peut alors compléter le tableau de variation de cette fonction, en y faisant figurer les limites en 0 et aussi en $\pm\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

Pour $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $n = 2$ étant pair, la propriété affirme que les deux limites (à gauche et à droite de 0) sont $+\infty$.

Cela se voit sur la courbe et se note dans le tableau des variations de cette fonction.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x^2}$	0 ↗	$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

c. Théorèmes sur les Limites

Dans cette section, nous allons reprendre sans les démontrer, les différents théorèmes qui ont déjà été exposés dans le chapitre sur les suites. Pour une suite, il ne s'agissait que de la limite éventuelle en $+\infty$. Il faut donc ici transposer ces théorèmes pour les limites éventuelles des fonctions en $-\infty$ et en un point a.

Théorème 4.1 (croissance non majorée) Toute fonction croissante non majorée, définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$, a pour limite $+\infty$. De même, toute fonction décroissante non minorée, définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$, a pour limite $-\infty$.

Remarques : Cette propriété traduit la notion de limite.
Á titre d'exemple de transposition, nous pouvons énoncer la propriété suivante : toute fonction décroissante non majorée, définie sur un intervalle de la forme $]a; b]$, a pour limite $+\infty$ en a.

Théorème 4.2 (croissance majorée) Toute fonction croissante et majorée admet une limite l qui est le plus petit majorant de la fonction.
De même, pour toute fonction décroissante et minorée : sa limite est le plus grand des majorants.

Théorème 4.3 (somme et produit par un réel) Soient f une fonction qui tend vers $+\infty$ et k un réel non nul.
- La fonction $(f + k)$ tend vers $+\infty$ et, si $k > 0$, la fonction (kf) aussi
- Si $k < 0$, la fonction (kf) tend vers $-\infty$

Théorème 4.4 (Somme et Produit de fonctions) Soient f et g deux fonctions ayant une limite, finie ou infinie. Les fonctions $f+g$ et $f\times g$, admettent ou non une limite selon les différents cas exposés par les deux tableaux ci-dessous :

Fonction « somme » : $(f+g)$

$\lim f$ $\lim g$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

Fonction « produit » : $(f\times g)$

$\lim f$ $\lim g$	$l\neq 0$	$l=0$	$\pm\infty$
$l'\neq 0$	$l\times l'$	0	$\pm\infty$
$l'=0$	0	0	
$\pm\infty$	$\pm\infty$		$\pm\infty$

Théorème 4.5 (Quotient de fonctions) Soient f et g deux fonctions ayant une limite, finie ou infinie. La fonction quotient $\frac{f}{g}$ admet ou non une limite selon les différents cas exposés par le tableau ci-dessous :

$\lim f$ $\lim g$	$l\neq 0$	$l=0$	$\pm\infty$
$l'\neq 0$	$\frac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$
$l'=0$	$\pm\infty$		$\pm\infty$
$\pm\infty$	0	0	

Remarques : Pour un produit ou un quotient, c'est la règle des signes qui s'applique pour déterminer le signe des limites (finies ou infinies). Pour les nombreuses formes indéterminées, ces théorèmes seuls ne permettent pas de conclure. Il suffit souvent d'une factorisation suivie d'une simplification pour se ramener à une forme déterminée.

Méthode (Fonction polynôme)
Pour une fonction polynôme de degré p : $f : x\mapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$, la limite au voisinage de $\pm\infty$ est celle du terme dominant (celui de plus haut degré) :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sum_{k=0}^{p} a_k x^k = \lim a_p x^p$$

- Au voisinage de $+\infty$: si $a_p>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ mais si $a_p<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
- Au voisinage de $-\infty$, on doit tenir compte de la parité de p :
  - Si $a_p>0$ et p pair, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, si $a_p>0$ et p impair, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
  - Si $a_p<0$ c'est l'inverse : si p pair, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; si p impair, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$).

La généralité énoncée s'étend aux fonctions polynomiales ayant des termes de degré négatif.
La fonction f définie par $f(x)=-x^3+3x^2-2x+1-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}$, par exemple, a un comportement au voisinage de $\pm\infty$ qui est celui du terme de plus haut degré (de $-x^3$ ici).
Pour ce type de fonctions, la limite au voisinage de 0 est déterminée par le terme de degré négatif le plus petit (par $\frac{7}{x^2}=7x^{-2}$ ici). La règle qui s'applique alors a été vue dans la propriété 4.12.

Théorème 4.6 (Majoration) Soient f et g deux fonctions.
Si, à partir d'un certain réel x_0, on a $f\geqslant g$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
De même, si à partir d'un réel x_0, on a $f\leqslant g$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Théorème 4.7 (Gendarmes) Soient f, g et h trois fonctions. Si, à partir d'un certain réel x_0, on a $g \leqslant f \leqslant h$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Exemple 68 – La fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, soit en 0 et en $\pm\infty$.

Lorsque $x > 0$, on a $0 < 1 < 2x + 1$ et, en ajoutant $x^2 > 0$, on obtient l'encadrement $x^2 < 1 + x^2 < (1 + x)^2$.
Comme la fonction racine carrée est croissante, cela implique que $x < \sqrt{1 + x^2} < 1 + x$.
En divisant par $x > 0$, on obtient l'encadrement de $f(x)$

$$1 < f(x) < 1 + \frac{1}{x}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$, d'après le théorème 4.7, on peut donc conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

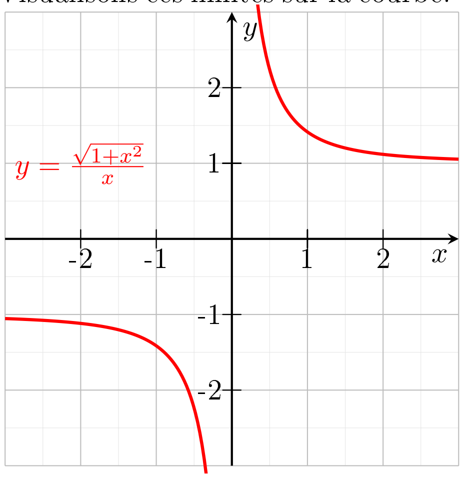
Au voisinage de 0+ (x tend vers 0 et $x > 0$), la majoration $f(x) < 1 + \frac{1}{x}$ ne permet pas de conclure.
Par contre, on peut remarquer que $1 < \sqrt{1 + x^2}$ et donc

$$\frac{1}{x} < f(x)$$

Comme $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, d'après le théorème 4.6, on peut donc conclure que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

Voilà pour les deux bornes ouvertes positives de $\mathscr{D}_f$. Pour les deux autres, il suffit de remarquer que la fonction est impaire. En effet, $f(-x) = \frac{\sqrt{1+(-x)^2}}{-x} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -f(x)$. Les limites seront donc « symétriques » par rapport à O : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Visualisons ces limites sur la courbe.



Complétons le tableau de variation.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	-1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

3. Fonction dérivée

a. Nombre dérivé

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, x_0 et x deux réels distincts de l'intervalle I tels que $x = x_0 + h$, où h est un réel non nul.

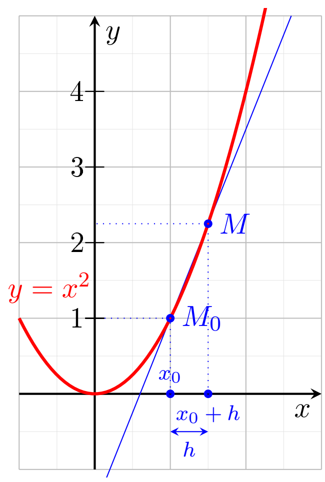
Droite sécante à une courbe

On note M_0 le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0, et M celui d'abscisse x.
Le coefficient directeur de la droite (M_0M) est le taux de variation de f entre x_0 et $x_0 + h$:

$$\tau = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Pour $f : x \mapsto x^2$, le coefficient directeur de la droite (M_0M) est :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h$$

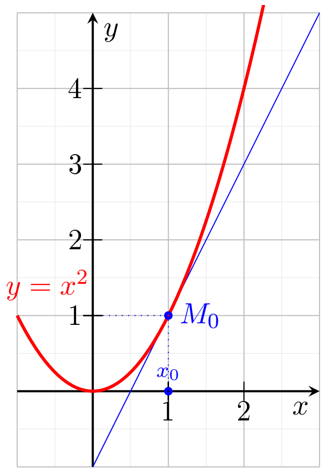


Droite tangente à une courbe

Avec les notations précédentes, si le point M de $\mathscr{C}$ se rapproche « infiniment près » du point M_0, autrement dit si l'on fait tendre x vers x_0, c'est-à-dire h vers 0, la droite (M_0M) s'approche de la « tangente » à la courbe $\mathscr{C}$ au point M_0. La pente de (M_0M) lorsque $h \to 0$ est la pente de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M_0. Elle est égale à

$$\lim_{h\to 0} \tau = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Pour $f : x \mapsto x^2$, cette pente vaut $2x_0$.



Nombre dérivé

DÉFINITION 4.21 [Nombre dérivé] Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si le quotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite l finie. Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Comme on l'a vu plus haut, la fonction $f : x \mapsto x^2$, est dérivable en x_0 et on a $f'(x_0) = 2x_0$.
$2x_0$ est la pente de la tangente en $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f, au point M_0 d'abscisse x_0.

PROPRIÉTÉ 4.13 (INTERPRÉTATION GRAPHIQUE) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $x_0 \in I$. La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation :

$$T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

DÉMONSTRATION Si la fonction f est dérivable en x_0, la tangente T à $\mathscr{C}$ en $M_0(x_0, f(x_0))$ admet un coefficient directeur qui est $f'(x_0)$. Son équation est donc du type $y = f'(x_0)x + p$ $(\star)$.
Comme $M_0(x_0, f(x_0)) \in T$, on doit avoir : $f(x_0) = f'(x_0) \times x_0 + p$.
On en déduit que $p = f(x_0) - f'(x_0) \times x_0$, et en remplaçant dans $(\star)$ on obtient :
$y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 \times f'(x_0)$, et donc $T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

EXEMPLE 69 – Pour $f : x \mapsto x^2$, le coefficient directeur de la tangente en (M_0) est $2x_0$.
L'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en (M_0) est donc $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$, soit $y = 2x_0x - x_0^2$.

Pour $x_0 = 3$, on a $T_3 : y = 6x - 9$ (en jaune)

Pour $x_0 = 2$, on a $T_2 : y = 4x - 4$ (en magenta)

Pour $x_0 = 1$, on a $T_1 : y = 2x - 1$ (en bleu)

Pour $x_0 = \frac{1}{2}$, on a $T_{\frac{1}{2}} : y = x - \frac{1}{4}$ (en vert)

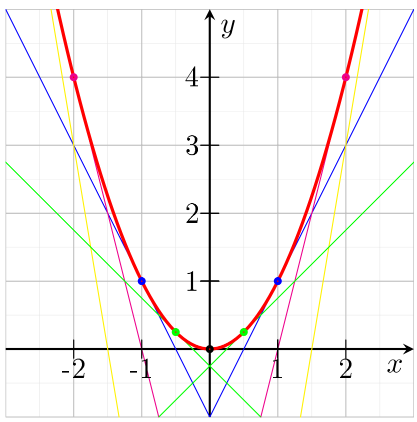
Pour $x_0 = 0$, on a $T_0 : y = 0$ (tangente horizontale)

Pour $x_0 = -\frac{1}{2}$, on a $T_{-\frac{1}{2}} : y = -x - \frac{1}{4}$ (en vert)

Pour $x_0 = -1$, on a $T_{-1} : y = -2x - 1$ (en bleu)

Pour $x_0 = -2$, on a $T_{-2} : y = -4x - 4$ (en magenta)

Pour $x_0 = -3$, on a $T_{-3} : y = -3x - 9$ (en jaune)



Interprétation cinématique

On considère un objet en mouvement et on note t la durée (en secondes) de son parcours et $f(t)$ la distance (en mètres) parcourue après t secondes.
La distance parcourue entre deux instants t_1 et t_2 est égale à $f(t_2) - f(t_1)$.
La vitesse moyenne de l'objet entre les instants t_1 et t_2 est le rapport entre la distance parcourue $f(t_2) - f(t_1)$ et la durée du parcours $t_2 - t_1$. Cette vitesse moyenne est donc égale au taux d'accroissement de la fonction f entre t_1 et t_2 : $\tau = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$.
Lorsque les instants t_1 et t_2 deviennent « infiniment proches », le rapport τ prend une valeur limite, le nombre dérivé de f en $t_1 = t_2$ qui correspond à ce qu'on appelle la « vitesse instantanée » de l'objet à l'instant $t_1 = t_2$ (la vitesse indiquée par le tachymètre d'une voiture, ou de tout objet en mouvement).

Définition 4.22 :
La vitesse instantanée $V(t_0)$ à l'instant t_0 d'un objet parcourant $f(t)$ mètres en t secondes est égale au nombre dérivé de la fonction f en t_0 :

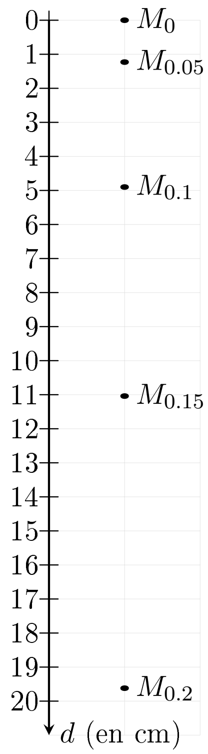
$$V(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

Exemple 70 – Quand on lâche un objet, la distance qu'il parcourt dans sa chute après t secondes est donnée par la relation $f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ m, où $g \approx 9{,}81\text{m.s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.

La vitesse instantanée de l'objet après une chute de t secondes est la limite quand $h \longrightarrow 0$ de la vitesse moyenne entre les instants t et $t + h$. Or cette vitesse moyenne est :

$$v = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h} = \frac{\frac{1}{2}g(t^2 + 2th + h^2) - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$
$$= \frac{1}{2}g\frac{2th + h^2}{h} = \frac{1}{2}g(2t + h) = gt + \frac{gh}{2}$$

Lorsque h tend vers 0, ce quotient tend vers gt.
La vitesse instantanée d'un objet en chute libre est $v(t) = f'(t) = gt$.
Cette vitesse de chute libre est proportionnelle à la durée de la chute.
Remarquons que les expressions de $f(t)$ et $f'(t)$ ne tiennent pas compte de la masse de l'objet : une bille en plomb et une bille en polystyrène chutent de la même façon.
Ci-contre la chute d'une bille photographiée toutes les 0, 05 secondes.
⇛ Après 0, 2 secondes de chute, la distance parcourue est $\frac{g}{2} \times 0{,}2^2 \approx 0{,}2$ m et la vitesse atteinte est $g \times 0{,}2 \approx 1{,}96$ m/s, soit environ 7 km/h.
⇛ Après 5 secondes de chute, la distance parcourue est $\frac{g}{2} \times 5^2 \approx 122{,}6$ m et la vitesse atteinte est $g \times 5 \approx 49$ m/s, soit environ 176 km/h.
⇛ Après 10 secondes de chute, la distance parcourue est $\frac{g}{2} \times 10^2 \approx 490{,}5$ m et la vitesse atteinte est $g \times 10 \approx 98$ m/s, soit environ 353 km/h.



Interprétation numérique

Si f est une fonction définie et dérivable au voisinage de x_0, on a $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.
L'expression $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$ est une fonction φ de limite nulle quand x_0 tend vers 0. Cela signifie que l'on peut écrire $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \varphi(h)$, soit $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$.
Cette écriture est appelée « développement limité à l'ordre 1 » de f au point x_0.

> **Définition 4.23** :
> Si une fonction f est dérivable en x_0, alors $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$ où φ est une fonction telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$. La quantité $f(x_0)+hf'(x_0)$ est une valeur approchée de $f(x_0+h)$ qui s'écarte de la valeur exacte de la quantité $|h\varphi(h)|$

Remarques :

- Notez la similitude entre les expressions $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$ du développement limité à l'ordre 1 de f au point x_0, et $y = f(x_0) + hf'(x_0)$ qui est l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0.
- La reconnaissance du nombre dérivé de f en x_0 peut s'opérer directement, en reconnaissant dans le développement de $f(x_0+h)$, la forme $f(x_0) + h\alpha + h\varphi(h)$ où φ est une fonction telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$. On a alors $f'(x_0) = \alpha$.

Exemple 71 – Considérons la fonction cube $f : x \mapsto x^3$.
f est définie et dérivable pour tout réel et on a $f(x_0+h) = (x_0+h)^3 = x_0^3 + 3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3$.

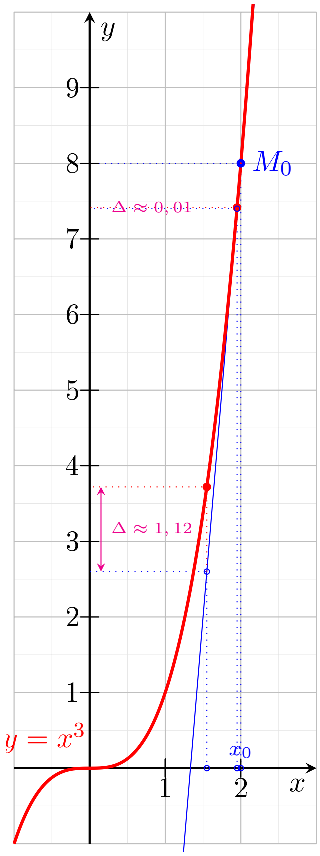
➠ On reconnait dans $x_0^3 + 3hx_0^2$ la forme $f(x_0) + h\alpha$ avec $\alpha = 3x_0^2$ et dans $3h^2x_0 + h^3$ la forme $h\varphi(h)$ où $\varphi(h) = 3hx_0 + h^2$ est telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.
Par conséquent le nombre dérivé de f en x_0 est $\alpha = f'(x_0) = 3x_0^2$.
Chercher la limite du taux de variation quand $h \longrightarrow 0$ revient au même :

$$\tau = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{3hx_0^2 + 3h^2x_0 + h^3}{h} = 3x_0^2 + 3hx_0 + h^2$$

La limite de ce taux quand $h \longrightarrow 0$ est $f'(x_0) = 3x_0^2$.
➠ La valeur approchée de $(x_0+h)^3$ est $x_0^3 + 3x_0^2h$.
L'erreur commise, en prenant $x_0^3 + 3x_0^2h$ à la place de $(x_0+h)^3$ est $h^2(3x_0+h)$.
Combien vaut approximativement $1,95^3$?
Environ $2^3 + 3 \times 2^2 \times (-0,05) = 8 + 12 \times (-0,05) = 8 - 0,6 = 7,4$.
La valeur exacte étant $7,414875$, l'erreur commise n'est que de $0,014875$.
Plus on s'écarte de la valeur de référence, plus l'erreur est grande :
Si on évalue $1,55^3 = 3,723875$ en prenant $x_0^3 + 3x_0^2h$ avec $x_0 = 2$, on trouve $2^3 + 3 \times 2^2 \times (-0,45) = 2,6$. L'erreur commise $\Delta = 1,123875$ est grande.
➠ L'équation de la tangente à la courbe de la fonction cube au point d'abscisse x_0 est $y = x_0^3 + h3x_0^2$, soit, en remplaçant h par $x - x_0$:

$$y = x_0^3 + (x-x_0)3x_0^2 = 3x_0^2x - 2x_0^3$$

Au point M_0 d'abscisse $x_0 = 2$, cette équation est $y = 12x - 16$.
On retrouve $7,4$ en effectuant $y = 12 \times 1,95 - 16$
On retrouve $2,6$ en effectuant $y = 12 \times 1,55 - 16$
La représentation graphique ci-contre illustre ces différents aspects.



b. Dérivation

Soit f une fonction définie et dérivable en tout x_0 d'un intervalle I.
L'hypothèse « dérivable » signifie que pour $x_0 \in I$, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe.
On a appelé cette limite « nombre dérivé de f en x_0 » et on l'a noté $f'(x_0)$.

> **Définition 4.24** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f sur I, et notée f'.

Remarques :

- Nous avons montré précédemment que la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ avait pour nombre dérivé en x_0 le nombre $f'(x_0) = 2x_0$. Ainsi, la fonction dérivée de la fonction carrée est la fonction $f' : x \mapsto 2x$. De même, nous avons montré que la fonction cube $g : x \mapsto x^3$ avait pour nombre dérivé en x_0 le nombre $g'(x_0) = 3x_0^2$. La dérivée de la fonction cube est la fonction $g' : x \mapsto 3x^2$. L'objectif de cette partie est d'obtenir les fonctions dérivées des fonctions de référence, puis de celles qui sont obtenues à partir de celles-ci, par des opérations algébriques ou par composition.
- Pour un solide en mouvement, si on note d la fonction qui donne la distance parcourue par le solide après un temps t, alors la fonction dérivée de d correspond à la vitesse instantanée du solide. On note $v = d'$ cette fonction de vitesse. La fonction dérivée de v, correspond à la limite du taux d'accroissement des vitesses entre deux temps infiniment proches. L'accroissement de la vitesse étant appelée accélération, cette fonction v' mesure l'accélération instantanée, notée a. Ainsi $a(t) = v'(t) = d''(t)$. Cela a donc du sens de dériver plusieurs fois une fonction : ici, a est dite « dérivée seconde » de d.

Dérivées des fonctions usuelles

Propriété 4.14 (Fonction constante) La dérivée d'une fonction constante est la fonction nulle.

Démonstration Soient $k \in \mathbb{R}$ et f la fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f entre $x + h$ et x est : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$.
Lorsque $h \longrightarrow 0$, ce taux restant nul, on a $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$.
La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

Propriété 4.15 (Fonction puissance) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = nx^{n-1}$.

Démonstration Soient $x \in \mathbb{R}$ et h un réel non nul. Le taux d'accroissement de f entre $x + h$ et x est : $\tau = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$.
Le développement de $(x + h)^n = (x + h)(x + h) \dots (x + h)$ est un polynôme en x de degré n :
- un seul terme en x^n : x^n
- n produits $x^{n-1} \times h$, soit un terme en x^{n-1} égal à nhx^{n-1}
- le reste du développement contenant, au minimum, le facteur h^2, on peut l'écrire $h \times \varphi(h)$ où $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$

On peut donc écrire $\tau = \frac{nhx^{n-1} + h\times\varphi(h)}{h} = nx^{n-1} + \varphi(h)$. Comme on a bien $\lim\limits_{h\to 0} \tau = \lim\limits_{h\to 0} nx^{n-1} + \varphi(h) = nx^{n-1}$, la fonction f est dérivable en tout point et $f'(x) = nx^{n-1}$.

Remarques :
- On retrouve les résultats précédents : La dérivée de $f : x \mapsto x^2$ est $f' : x \mapsto 2x$ et la dérivée de $g : x \mapsto x^3$ est $g' : x \mapsto 3x^2$
- pour la fonction linéaire identité $f : x \mapsto x$, la dérivée est $f' : x \mapsto 1$ une fonction constante. D'une façon générale, les fonctions constantes sont les dérivées des fonctions affines, puisque le taux d'accroissement d'une fonction affine est constant.

Propriété 4.16 (Fonction inverse) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

DÉMONSTRATION Pour $x \neq 0$ et $h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

Ce taux n'est défini, au voisinage de 0, que si la somme $x+h$ est non nulle, et on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(-\frac{1}{x(x+h)}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

PROPRIÉTÉ 4.17 (FONCTION RACINE CARRÉE) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\sqrt{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

DÉMONSTRATION Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $h>0$. Le taux d'accroissement de f entre $x+h$ et x est :

$$\tau = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}^2-\sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

On a donc :

$$\lim_{h\to 0}\tau = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

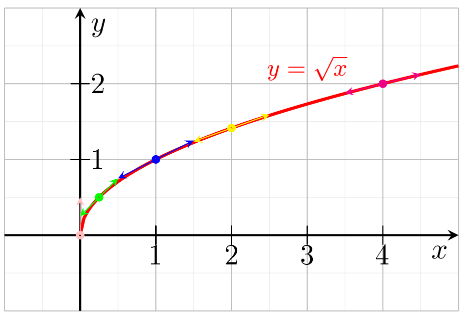
Si $x=0$, pour $h>0$, on a $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. Ainsi, lorsque $h \longrightarrow 0$, on a $\sqrt{h} \longrightarrow 0$ et donc $\frac{1}{\sqrt{h}} \longrightarrow +\infty$. Donc la limite lorsque $h \longrightarrow 0$ de τ n'existe pas : la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 (la tangente à la courbe de la fonction carrée est verticale au point O).

EXEMPLE 72 – Traçons la courbe représentant la fonction racine carrée avec quelques tangentes.

Dressons pour cela un tableau de valeurs de la fonction et de la dérivée (coefficient directeur de la tangente), et déterminons l'équation des tangentes. Pour $x=0$, la fonction n'étant pas dérivable ($f'(x_0)$ n'existe pas), la tangente à la courbe n'a pas une équation de la forme $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$; cette équation est $x=0$.

x	$\frac{1}{4}$	1	2	4
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2
$f'(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{4}$
Tangente $y=$	$x+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$	$\frac{x\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{x}{4}+\frac{3}{2}$

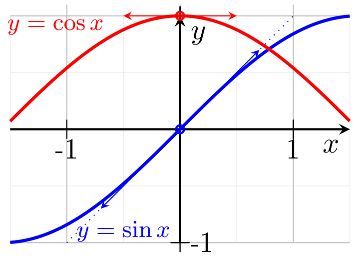
Afin de ne pas trop surcharger la figure, et selon la tradition, nous représentons les tangentes par des segments centrés sur le point de tangence, avec des extrémités en pointe de flèche.



PROPRIÉTÉ 4.18 (FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES) Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.
La fonction tangente est dérivable sur des intervalles I de la forme $]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in I$, on a $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$.

DÉMONSTRATION

Comme on l'observe sur la courbe de la fonction sinus, la tangente en O est la droite d'équation $y = x$, de coefficient directeur 1. En s'appuyant sur cette observation, admettons que la fonction sin est dérivable en 0 et que $\sin'(0) = 1$. Cela peut s'écrire, sous la forme du développement limité : $\sin(0 + h) = \sin(0) + \sin'(0)h + h\varphi(h)$ où φ est telle que $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.
Cette égalité peut s'écrire plus simplement $\sin(h) = h(1 + \varphi(h))$.



On en déduit, d'après la formule de duplication, que
$\cos(h) = 1 - 2\sin^2(\frac{h}{2}) = 1 - 2\frac{h^2}{4}(1 + \varphi(\frac{h}{2}))^2 = 1 + h\psi(h)$, où ψ est telle que $\lim_{h\to 0} \psi(h) = 0$.
En d'autres termes, on en déduit que cos est dérivable en 0 et que $\cos'(0) = 0$, ce que nous aurions pu observer sur la courbe (tangente horizontale au point d'abscisse 0).
Utilisons maintenant les formules d'addition :
$\sin(x + h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x)$ et $\cos(x + h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(h)\sin(x)$.
En remplaçant $\sin(h)$ et $\cos(h)$ par leurs développement limités d'ordre 1 en 0, on obtient :
$\sin(x + h) = \sin(x)(1 + h\psi(h)) + h(1 + \varphi(h))\cos(x) = \sin(x) + h\cos(x) + h\theta(h)$ et
$\cos(x + h) = \cos(x)(1 + h\psi(h)) - \sin(x)h(1 + \varphi(h)) = \cos(x) - h\sin(x) + h\rho(h)$,
où θ et ρ sont telles que $\lim_{h\to 0} \theta(h) = 0$ et $\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$.
Ainsi on obtient bien le résultat annoncé pour les fonctions cos et sin. Pour la fonction tan, on fera plus loin la démonstration comme une application de la propriété sur la dérivée d'un quotient.

Opérations sur les fonctions dérivables

PROPRIÉTÉ 4.19 (DÉRIVÉE D'UNE SOMME) Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et h la fonction définie sur I par $h(x) = f(x) + g(x)$.
La fonction $h = f + g$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

DÉMONSTRATION Puisque f et g sont dérivables dans un voisinage de $x \in I$, notons leurs développements limités d'ordre 1 en x : $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$ et
$g(x + h) = g(x) + hg'(x) + h\psi(h)$, où φ et ψ sont telles que $\lim_{h\to 0} \psi(h) = 0$. On en déduit que
$(f + g)(x + h) = (f + g)(x) + h[f'(x) + g'(x)] + h\theta(h)$ où θ est définie par $\theta(h) = \varphi(h) + \psi(h)$. Cette fonction est telle que $\lim_{h\to 0} \theta(h) = 0$, d'où la conclusion.

PROPRIÉTÉ 4.20 (PRODUIT PAR UN RÉEL) Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, λ un réel quelconque et g la fonction définie sur I par $g(x) = \lambda f(x)$.
La fonction $g = \lambda f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $g'(x) = \lambda f'(x)$.

DÉMONSTRATION Puisque f est dérivable dans un voisinage de $x \in I$, son développement limité d'ordre 1 en x est $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$, où φ est telle que $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.
On en déduit que $\lambda f(x + h) = \lambda f(x) + h[\lambda f'(x)] + h\psi(h)$ où ψ est définie par $\psi(h) = \lambda\varphi(h)$.
Cette fonction est telle que $\lim_{h\to 0} \psi(h) = 0$, d'où la conclusion.

Méthode
Les fonctions polynômes sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et la dérivée d'un polynôme de degré n est un polynôme de degré $n-1$.
Pour être plus précis, la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$$

a pour dérivée :

$$f' : x \mapsto \sum_{k=1}^{p} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} a'_k x^k \text{ où } a'_k = (k+1)a_{k+1}$$

Exemple : si f est la fonction définie par $f(x) = 5x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 8x + 9$, alors la dérivée de f est définie par $f'(x) = 20x^3 - 18x^2 + 14x - 8$.

Propriété 4.21 [Dérivée d'un produit] Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et h la fonction définie sur I par $h(x) = f(x)g(x)$.
La fonction $h = fg$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Démonstration Puisque f et g sont dérivables dans un voisinage de $x \in I$, notons leurs développements limités d'ordre 1 en x : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$ et
$g(x+h) = g(x) + hg'(x) + h\psi(h)$, où φ et ψ sont telles que $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ et $\lim_{h\to 0} \psi(h) = 0$.
On en déduit que
$(fg)(x+h) = (fg)(x) + h[f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)] + h\theta(h)$ où θ est une fonction compliquée constituée de la somme de six termes de limites 0, autrement dit $\lim_{h\to 0} \theta(h) = 0$.
En effet, explicitons θ :
$\theta(h) = f(x)\psi(h) + g(x)\varphi(h) + h[f'(x)g'(x) + f'(x)\psi(h) + g'(x)\varphi(h) + \psi(h)\varphi(h)]$.
Dans cette expression, x étant fixé, c'est h qui varie et qui tend vers 0, d'où la conclusion.

Exemple 73 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables
$f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$, où u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.
Par application de la propriété 4.21, avec les notations employées, on a $f' = u'v + uv'$.
Pour tout $x > 0$, on a donc :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2x} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

Remarque : Dans le cas de cet exemple, la propriété 4.21 permet d'affirmer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car alors f et g le sont), mais elle ne permet pas de conclure sur la dérivabilité de f en 0.
Pour établir cette dérivabilité, revenons à la définition du nombre dérivé : f est dérivable en 0 si le quotient $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ admet une limite réelle lorsque $h \to 0$. Ici on a $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$, et comme $\lim_{h\to 0} \sqrt{h} = 0$, on peut en conclure que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Conséquence : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction $g = f^2$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a $g'(x) = 2 \times f(x) \times f'(x)$.
Il suffit d'appliquer la propriété 4.21 au cas où $f = g$.
Par exemple, la dérivée de $g : x \mapsto (5x^2 - 3x + 1)^2$ est la fonction g' définie par
$g'(x) = 2 \times f(x) \times f'(x)$ où $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$ et $f'(x) = 10x - 3$. $g'(x)$ s'écrit donc
$g'(x) = 2(5x^2 - 3x + 1)(10x - 3)$.
Cette propriété évite de développer le carré pour dériver f, et donc évite de perdre la factorisation.

Propriété 4.22 (Dérivée d'un quotient) Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, avec $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, et h la fonction définie sur I par $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.
La fonction $h = \frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Démonstration Déterminons tout d'abord la dérivée de la fonction i définie par $i(x) = \frac{1}{g(x)}$.
Pour un réel x_0 de I , le taux de variation de i entre $x_0 + h$ et x_0 est :

$$\tau = \frac{i(x_0+h) - i(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \frac{\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)}}{h} = \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \times \frac{-1}{g(x_0+h)g(x_0)}$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = g'(x_0)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{-1}{g(x_0+h)g(x_0)} = \frac{-1}{g^2(x_0)}$, on en déduit que $\lim\limits_{h\to 0} \tau = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
La fonction i a pour dérivée la fonction définie par $i'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$.
Il ne reste plus qu'à appliquer la propriété 4.21 à la fonction $h = \frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g} = fi$: $h' = fi' + f'i$.
Cela s'écrit pour un réel x de I

$$h'(x) = \frac{-f(x)g'(x)}{g^2(x)} + \frac{f'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Remarques :

- Les fonctions rationnelles (quotients de polynômes) sont dérivables sur leur ensemble de définition.
- La propriété suivante est un cas particulier important, ne serait-ce que parce que nous avons bâti notre démonstration du cas général sur lui : soit f une fonction définie, dérivable et qui ne s'annule pas sur un intervalle I. La fonction g définie sur I par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a $g'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$.

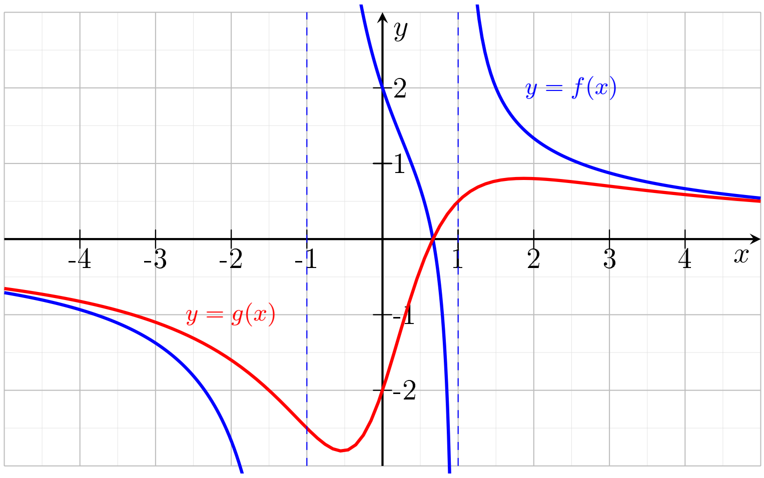
Exemple 74 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, par $f(x) = \frac{3x-2}{x^2-1}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$:
on a $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x - 2 \\ v(x) = x^2 - 1 \end{cases}$ et comme $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$, on en déduit que $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$:

$$f'(x) = \frac{3 \times (x^2 - 1) - (3x - 2) \times (2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-3x^2 + 4x - 3}{(x^2 - 1)^2}$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas :
on a $g = \frac{u}{w}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x - 2 \\ w(x) = x^2 + 1 \end{cases}$ et comme $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ w'(x) = 2x \end{cases}$, on en déduit que $f' = \frac{u'w - uw'}{v^2}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{3 \times (x^2 + 1) - (3x - 2) \times (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 + 4x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

Notez le peu de différence entre les expressions de f et g d'une part, et de f' et g' d'autre part. Les ensembles de définition de ces deux fonctions étant différents, l'allure des courbes est cependant grandement différente (au moins dans un voisinage des valeurs interdites de f.



Exemple 75 – La fonction tan est définie comme le quotient de $\sin(x)$ par $\cos(x)$, pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, soit $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque. La dérivée de tan est donc

$$(\frac{\sin}{\cos})' = \frac{(\sin)'(\cos) - (\sin)(\cos)'}{\cos^2} = \frac{(\cos)(\cos) + (\sin)(\sin)}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$$

puisque $(\cos)(\cos) + (\sin)(\sin) = \cos^2 + \sin^2 = 1$.
On peut remarquer aussi que :

$$\frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{\cos^2}{\cos^2} + \frac{\sin^2}{\cos^2} = 1 + \frac{\sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

Propriété 4.23 (Dérivée d'une composée) Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie en tout point de $f(I)$. Si f est dérivable en x et que g est dérivable en $f(x)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x et $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x)$.

Démonstration Puisque f est dérivable dans un voisinage de $x \in I$, notons son développement limité d'ordre 1 en x : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h)$, où φ est telle que $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.
Puisque g est dérivable dans un voisinage de $f(x) \in f(I)$, notons son développement limité d'ordre 1 en $f(x)$: $g(f(x) + k) = g(f(x)) + kg'(f(x)) + k\psi(k)$, où ψ est telle que $\lim_{k \to 0} \psi(k) = 0$.
Prenons $k = hf'(x) + h\varphi(h)$. Lorsque $h \longrightarrow 0$, on a bien $k \longrightarrow 0$. Substituons cette expression de k au développement limité de $g(f(x) + k)$, qui devient le développement limité de $g(f(x+h))$:

$$g(f(x+h)) = g(f(x)) + (hf'(x) + h\varphi(h))\,(g'(f(x)) + \psi(k)) = g(f(x)) + hf'(x)g'(f(x)) + h\theta(h)$$

L'expression de la fonction θ est assez compliquée, mais il est clair que cette fonction tend vers 0 quand $h \longrightarrow 0$. En effet $\theta(h) = f'(x)\psi(k) + \varphi(h)g'(f(x)) + \varphi(h)\psi(k)$. Du fait que $\lim_{h \to 0} \psi k = \lim_{k \to 0} \psi k = 0$ (nous n'avons pas écrit l'expression $\psi(k)$ en fonction de h pour ne pas surcharger) et que $\lim_{h \to 0} \varphi h = 0$, on a bien $\lim_{h \to 0} \theta h = 0$, d'où le résultat.

Remarques : La définition 4.16 et la propriété 4.23 nous ont déjà familiarisé avec cette notion de composition. De plus, nous avons déjà vu plusieurs composées sans les nommer : la conséquence de la propriété 4.21 nous donne la dérivée de f^2 qui est la composée de f suivie de la fonction carrée. Nous avons aussi vu la dérivée de $\frac{1}{f}$ qui est la composée de f suivie de la fonction inverse. Nous pouvons maintenant compléter avec la dérivée de $\sqrt{f}$ qui est composée de f suivie de la racine carrée. La propriété4.23 nous indique qu'il s'agit de $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$. De même, on peut dériver f^n (composée de f suivie de la fonction puissance n : $(f^n)' = nf'f^{n-1}$ ce qui confirme bien le résultat obtenu pour le carré de f : $(f^2)' = 2f'f$. La dérivée de $\sin(ax+b)$ est $a\cos(ax+b)$ et celle de $\cos(ax+b)$ est $-a\sin(ax+b)$. etc.

c. Application de la dérivée à l'étude des fonctions

PROPRIÉTÉ 4.24 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on a :
- si f est strictement croissante sur I, alors f' est positive sur I
- si f est constante sur I, alors f' est nulle sur I
- si f est strictement décroissante sur I, alors f' est négative sur I

DÉMONSTRATION Démonstration du cas « f strictement croissante » : Soit f une fonction strictement croissante et dérivable sur I et soient x un réel de I et h un réel non nul tel que $x+h \in I$. Étudions le signe de $\tau = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, le taux d'accroissement de f entre $x+h$ et h. Deux cas sont possibles :
- $h > 0$: on a $x < x+h$ or f est strictement croissante sur I donc $f(x) < f(x+h) \Longleftrightarrow f(x+h) - f(x) > 0$ et, comme $h > 0$, $\tau > 0$
- $h < 0$: on a $x+h < x$ or f est strictement croissante sur I donc $f(x+h) < f(x) \Longleftrightarrow f(x+h) - f(x) < 0$ et, comme $h < 0$, $\tau > 0$

Dans les deux cas, $\tau > 0$. Si on donne à h des valeurs de plus en plus proches de 0, ce quotient restera strictement positif, et sa limite qui existe car f est dérivable en I est positive.
Les deux autres cas se démontrent de la même manière.

Remarques : La limite peut être nulle en certains points, comme par exemple pour la fonction $f : x \mapsto x^2$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. La dérivée, définie par $f'(x) = 2x$, est strictement positive en tout point de $\mathbb{R}^*_+$ mais elle s'annule pour $x = 0$. Si la dérivée est nulle en un point de I (ou en un nombre quelconque de points disjoints), cela n'empêche pas la fonction d'être strictement croissante sur I.

THÉORÈME 4.8 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable sur l'intervalle I éventuellement privé de ses bornes :
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) > 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I
- si pour $x \in I$ on a $f'(x) < 0$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I

DÉMONSTRATION Ce théorème, qui est la réciproque de la propriété précédente, est admis.
Il découle d'un autre théorème étudié en Terminale (le théorème des accroissements finis).

Remarques :
- L'ensemble formé par la propriété 4.24 et le théorème 4.8 constituent ce qui est appelé parfois « principe de Lagrange », du nom de ce mathématicien qui généralisa l'étude des variations grâce au signe de la dérivée.
- Donnons deux exemples, $f : x \mapsto x^2$ a pour dérivée $f' : x \mapsto= 2x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) > 0$ sauf en 0 où $f'(0) = 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De même, sur $\mathbb{R}^-$, $f'(x) < 0$ sauf en 0 où elle s'annule, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
  C'est plus immédiat qu'en passant par l'étude de signe du taux d'accroissement !
  La fonction tan a pour dérivée $1 + \tan^2$ sur les intervalles de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$; cette dérivée est strictement positive, sauf en $x = k\pi$ où elle s'annule, donc tan est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.

PROPRIÉTÉ 4.25 (CONDITION EXTREMUM) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si $f(x_0)$ est un extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques :

- Nous avons déjà défini la condition pour avoir un extremum dans la propriété 4.1. Cette nouvelle propriété traduit la condition en termes de dérivée.
- Attention la réciproque est fausse ! En effet, considérons la fonction cube : $f(x) = x^3$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$. Pourtant $f(0)$ n'est pas un extremum local de f : la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la dérivée $3x^2$ étant strictement positive sauf en un point où elle s'annule.

Propriété 4.26 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$ tel que f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.

Remarque :
Changer de signe peut se faire de deux façons : soit $h > 0$, si on a $f'(x) > 0$ quand $x_0 - h < x < x_0$, et $f'(x) < 0$ quand $x_0 < x < x_0 + h$, alors la fonction passe par un maximum ; si le changement de signe est inversé $f'(x) < 0$ pour $x < x_0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > x_0$, alors la fonction passe par un minimum. On peut résumer cela par les extraits de tableaux de variations ci-dessous :

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

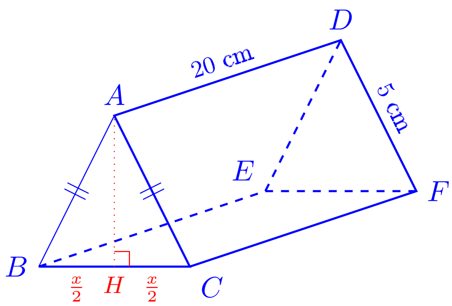
$f(x_0)$ est un minimum local de f

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

$f(x_0)$ est un maximum local de f

Exemple 76 – Une boîte a la forme d'un prisme droit à base triangle isocèle.

On a $AB = 5$ cm et $AD = 20$ cm, mais BC est variable.
On note $BC = x$, l'objet du problème étant de déterminer x pour que le volume de la boîte soit maximal.
Le triangle ABC existe si et seulement si $0 \leqslant x \leqslant 10$.
Notons $\mathscr{V}(x)$ le volume de la boîte.
On a $\mathscr{V}(x) = \mathscr{A}_{ABC} \times AD$.
Soit H le pied de la hauteur issue de A dans ABC. Ce dernier étant isocèle, H est le milieu de $[BC]$ et on a $AH = \sqrt{25 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{100 - x^2}$ et $\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times x \times \frac{1}{2}\sqrt{100 - x^2}$.
On a donc $\mathscr{V}(x) = 5x\sqrt{100 - x^2}$.



➠ 1^{re} méthode : Dérivons la fonction $g : x \mapsto 5x\sqrt{100 - x^2}$ qui est le produit de deux fonctions, la seconde étant une fonction composée de la forme $\sqrt{u}$. En appliquant les règles de dérivation, on obtient :

$$g'(x) = 5\sqrt{100 - x^2} + 5x\frac{-2x}{100 - x^2} = 5\frac{(100 - x^2)\sqrt{100 - x^2} - 10x^2}{100 - x^2}$$

L'étude du signe de cette expression est assez délicate, même si on sait que dans l'intervalle $[0; 10]$, le dénominateur est forcément positif. Comment résoudre l'inéquation $(100 - x^2)\sqrt{100 - x^2} - 10x^2 > 0$? Cette méthode, qui cherche à appliquer brutalement la propriété 4.26, se heurte à des difficultés de mise en œuvre qui relèvent de la difficulté de résoudre certaines équations ou inéquations algébriques.

➠ 2^e méthode : Considérons l'expression $5\sqrt{100x^2 - x^4}$ qui est équivalente à $5x\sqrt{100 - x^2}$, au moins dans le domaine d'étude de la fonction (sur l'intervalle $[0; 10]$) et dérivons $h : x \mapsto 5\sqrt{100x^2 - x^4}$.

$$h'(x) = 5\frac{200x - 4x^3}{(\sqrt{100x^2 - x^4})^2} = \frac{20x(50 - x^2)}{x^2(100 - x^2)}$$

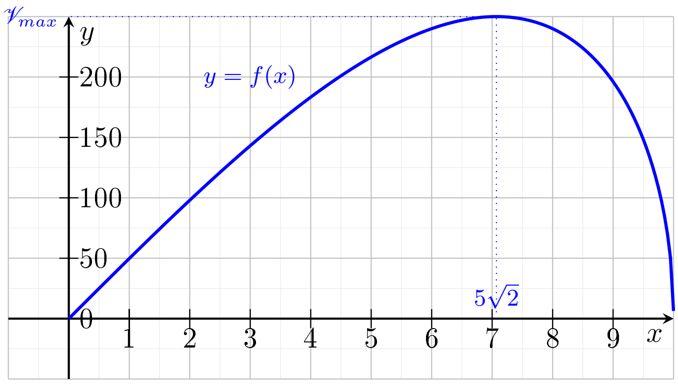
On se retrouve dans une configuration assez favorable car le numérateur et le dénominateur se factorisent facilement. En regardant bien, seul le facteur $50 - x^2$ peut s'annuler en changeant de signe dans $[0;10]$. Le trinôme $50 - x^2$ s'annule pour $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,071$. Le signe de ce trinôme est le même que le coefficient de x^2, soit négatif à l'extérieur des racines. L'autre racine étant négative, $50 - x^2 < 0$ pour $x > 5\sqrt{2}$ sur $[0;10]$. Comme les autres facteurs de $\mathscr{V}' = h'$ sont positifs sur $[0;10]$, on a $\mathscr{V}' \leqslant 0$ pour $x \leqslant 5\sqrt{2}$ et $\mathscr{V}' \geqslant 0$ pour $x \geqslant 5\sqrt{2}$. La dérivée change de signe et s'annule pour $x = 5\sqrt{2}$, la fonction admet donc $\mathscr{V}(5\sqrt{2})$ comme maximum.

➟ 3ᵉ méthode : Considérons la fonction $f : x \mapsto 100x^2 - x^4$ qui est définie et positive sur $[0;10]$. Cette fonction a les mêmes variations que $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. En dérivant f : $f'(x) = 200x - 4x^3 = 4x(50 - x^2)$, on est ramené à la conclusion précédente.

Résumons par le tableau de signes de la dérivée de $\mathscr{V}$ ainsi que le tableau de variations de $\mathscr{V}$:

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$\mathscr{V}'$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{V}$	0	↗	250	↘	0

Ainsi $\mathscr{V}$ admet un maximum pour $x = 5\sqrt{2}$.
On a alors $\mathscr{V}_{max} = 250$ cm³.



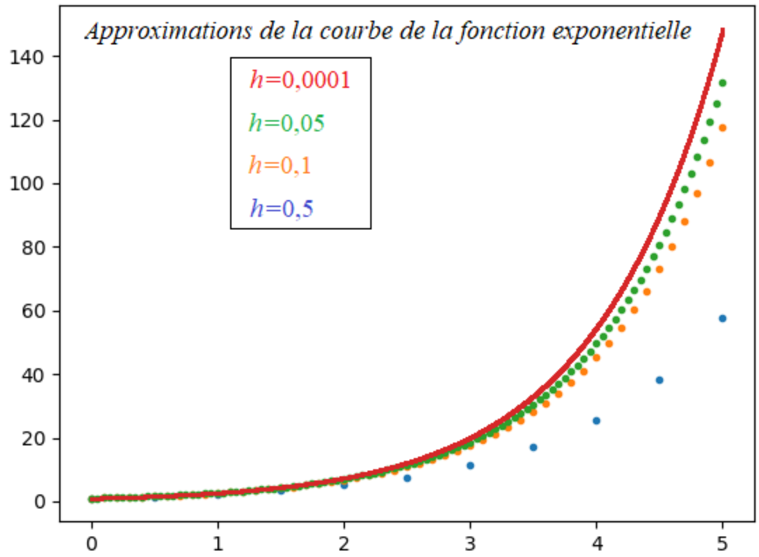
d. Fonction exponentielle

Supposons qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f'(x)$ et $f(0) = 1$

On peut se faire une idée d'une telle fonction en construisant point par point sa courbe $\mathscr{C}$:

- Partant du point $M_0(0;1)$, on détermine le point $M_h(h;1+h)$.
  La tangente à $\mathscr{C}$ en M_0 a, en effet, pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = x + 1$ et donc, en choisissant le réel h suffisamment petit pour que la courbe soit proche de sa tangente, l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse h est proche de $1 + h$.
- En réitérant le procédé à partir de $M_h(h;1+h)$, on détermine le point $M_{2h}(2h;(1+h)^2)$ qui est sur la tangente à $\mathscr{C}$ en M_h (son équation est $y = f'(h)(x-h) + f(h)$ soit $y = (1+h)(x-h+1)$ d'où, pour $x = 2h$, $y = (h+1)^2$).
- De même, on va avoir les points $M_{3h}(3h;(1+h)^3)$, $M_{4h}(4h;(1+h)^4)$, etc.

On peut construire ainsi, de proche en proche, les points d'une courbe qui s'approche, lorsque h devient de plus en plus proche de 0, de la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f.
Ci-dessous, les suites de points obtenues en prenant $h = 0,5$, $h = 0,1$, $h = 0,05$ et $h = 0,0001$.
On constate que, lorsque h s'approche de 0, ces courbes s'approchent de plus en plus d'une courbe limite qui est celle de la fonction f.



Définition 4.25 (Fonction exponentielle) Il existe une *unique* fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f'(x)$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction – appelée fonction exponentielle – est notée exp et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \exp'(x) \text{ et } \exp(0) = 1$$

Remarques :

- L'existence de cette fonction est admise mais on peut s'en approcher point par point, comme on l'a vu plus haut (méthode due à Euler).
- L'unicité de cette fonction va être montrée plus loin, comme une conséquence de la propriété suivante : $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Propriété 4.27 (Propriétés fondamentales) $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ et $\exp(x) > 0$

Démonstration Soit g la fonction définie par $g(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
La fonction g est dérivable car c'est le produit de deux fonctions dérivables et on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp'(x)\exp(-x) + \exp(x)\exp'(-x) \\ &= [\exp(x)]\exp(-x) + \exp(x)\left[(-x)'\exp(-x)\right] \\ &= \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $g(x) = k$ et comme $g(0) = \exp(0)\exp(-0) = 1$, on a $g(x) = 1$.
Par conséquent $\exp(x)\exp(-x) = 1 \iff \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
De plus, on a forcément $\exp(x) \neq 0$ car, sinon le produit $\exp(x)\exp(-x)$ ne vaudrait pas toujours 1.
Comme $\exp(0) = 1 > 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$, on comprend intuitivement que la courbe ne traversera jamais l'axe des abscisses (car elle est est continue) et donc $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$. Ceci sera mieux justifié en terminale avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Conséquence :
Prouvons l'unicité de la fonction exp :
Supposons qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f'(x)$ et $f(0) = 1$.
Soit h la fonction définie par $h(x) = f_1(x)f_2(-x)$.
La fonction h est dérivable car c'est le produit de deux fonctions dérivables et on a :
$h'(x) = f_1'(x)f_2(-x) + f_1(x)f_2'(-x) = f_1(x)f_2(-x) - f_1(x)f_2(-x) = 0$.

On en déduit que $h(x) = k$ et comme $h(0) = f_1(0)f_2(0) = 1$, on a $h(x) = 1$.
Par conséquent $f_1(x)f_2(-x) = 1 \iff f_2(-x) = \frac{1}{f_1(x)}$.
Or, on vient de montrer (en notant $f_1 = \exp$) que si $f_1(x) = f_1'(x)$ et $f_1(0) = 1$ alors $f_1(-x) = \frac{1}{f_1(x)}$.
On en déduit que pour tout réel, on a $f_1(-x) = f_2(-x)$ et donc (en notant $X = -x$) $f_1(X) = f_2(X)$.

Propriété 4.28 (propriété fonctionnelle) La fonction exp transforme les somme en produit :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$

Démonstration Soient λ un réel quelconque et F_λ la fonction définie par $F_\lambda(x) = \frac{\exp(x+\lambda)}{\exp(\lambda)}$.
La fonction F_λ est dérivable car c'est la composée de fonctions dérivables et on a :

$$\begin{aligned} F_\lambda'(x) &= \frac{(x+\lambda)'\exp'(x+\lambda)}{\exp(\lambda)} \\ &= \frac{\exp(x+\lambda)}{\exp(\lambda)} \\ &= F_\lambda(x) \end{aligned}$$

On en déduit que $F_\lambda(x) = F_\lambda'(x)$ et comme, de plus, $F_\lambda(0) = \frac{\exp(\lambda)}{\exp(\lambda)} = 1$, on a $F_\lambda = \exp$.
Par conséquent $\exp(x) = \frac{\exp(x+\lambda)}{\exp(\lambda)} \iff \exp(x)\exp(\lambda) = \exp(x + \lambda)$.
Il suffit de remplacer λ par y dans cette dernière égalité.

Conséquences :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x - y) = \exp(x)\exp(-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \exp(nx) = (\exp(x))^n$ et $\exp(-nx) = \frac{1}{(\exp(x))^n}$

Démonstration Montrons la 1^{re} partie de cette 2^{e} conséquence par récurrence :
La propriété est vraie pour $n = 0$ car $\exp(0) = 1 = (\exp(x))^0$.
Supposons que $\exp(nx) = (\exp(x))^n$, on a alors :
$\exp((n + 1)x) = \exp(nx + x) = \exp(nx)\exp(x) = (\exp(x))^n \exp(x) = (\exp(x))^{n+1}$
La propriété étant vraie au rang n est vraie au rang $n + 1$;
comme elle est vraie pour $n = 0$, elle sera vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.
Pour la 2^{e} partie de cette conséquence, il suffit d'appliquer la propriété fondamentale.

Définition 4.26 (Le nombre e) L'image de 1 par la fonction exp est notée e

$$e = \exp(1) \approx 2,718$$

Remarque :
La méthode de Euler décrite en introduction permet de déterminer des valeurs approchées de e aussi proche que l'on veut de sa valeur exacte. Il suffit de faire tendre h vers zéro. Le programme utilisé pour tracer les courbes peut servir à déterminer ces valeurs. Ci-dessous à gauche, les résultats obtenus pour des valeurs de plus en plus petites de h (une dizaine de minutes de calcul).
Bien sûr, la calculatrice vous donne instantanément une valeur plus précise : $e \approx 2,718281828459$
On doit encore à Euler (*Introductio in Analysin infinitorum*, 1748) cette autre définition algorithmique de e, beaucoup plus efficace que la 1^{re} (mais moins facile à expliquer) :

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{1\times2\times3\times4} + \dots$$

Ci-dessous à droite, les résultats obtenus pour $S(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ (moins d'une milliseconde de calcul).

```
valeur approchée de e
avec h=10^-0 : 2
avec h=10^-1 : 2.853116706110003
avec h=10^-2 : 2.7048138294215294
avec h=10^-3 : 2.7169239322355985
avec h=10^-4 : 2.7184177414175807
avec h=10^-5 : 2.718295419874667
avec h=10^-6 : 2.7182804690959363
avec h=10^-7 : 2.71828196596018
avec h=10^-8 : 2.71828179834636
avec h=10^-9 : 2.7182820737581594
```

```
s(0) : 1
s(1) : 2.0
s(2) : 2.5                  s(11) : 2.718281826198493
s(3) : 2.6666666666666665   s(12) : 2.7182818282861687
s(4) : 2.708333333333333    s(13) : 2.7182818284467594
s(5) : 2.7166666666666663   s(14) : 2.71828182845823
s(6) : 2.7180555555555554   s(15) : 2.718281828458995
s(7) : 2.7182539682539684   s(16) : 2.718281828459043
s(8) : 2.71827876984127     s(17) : 2.7182818284590455
s(9) : 2.7182815255731922   s(18) : 2.7182818284590455
s(10) : 2.7182818011463845  s(19) : 2.7182818284590455
```

Conséquences :
On peut réécrire les propriétés de la fonction exp en remarquant que $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$.
Les propriétés fondamentales s'écrivent alors $e^{-n} = \frac{1}{e^n}$ et $e^n > 0$.
La propriété fonctionnelle, quant à elle, s'écrit $e^{m+n} = e^m e^n$.
Les deux conséquences de cette propriété s'écrivent, respectivement, $e^{m-n} = \frac{e^m}{e^n}$ et $e^{mn} = (e^m)^n$.
Ces propriétés algébriques coïncidant toutes avec celles des puissances, on notera désormais $\exp(x) = e^x$.

Exemple 77 – Pour un réel a donné, la suite (u_n) définie par $u_n = e^{na}$ est une suite géométrique.
On peut remarquer en effet que $e^{na} = (e^a)^n$ et, en posant $u_0 = 1$ et $q = e^a$, on a bien $u_n = u_0 q^n$.
On aurait pu montrer cela aussi en déterminant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} = \frac{e^{na+a}}{e^{na}} = e^{na+a-na} = e^a$.
D'une façon plus générale, les suites géométriques de raison $q = e^a$ et de 1^{er} terme positif $u_0 = e^b$ sont telles que $u_n = e^b (e^a)^n = e^{an+b}$.

La suite des puissances de 2, par exemple, $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de 1er terme $u_0 = 1$ et de raison $e^a = 2$.
Quel nombre réel a est tel que $e^a = 2$? On peut rechercher un tel nombre par tâtonnement sur la calculatrice, ou bien en programmant de plus en plus finement le balayage d'un intervalle contenant la solution : ce nombre est en effet compris entre 0 et 1 puisque $e^0 = 1$ et $e^1 = e > 2,7$.

x	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
e^x	1	1,051	1,105	1,162	1,221	1,284	1,350	1,419	1,492	1,568	1,649

x	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
e^x	1,733	1,822	1,916	2,014	2,117	2,226	2,340	2,460	2,586	2,718

La notation de la valeur exacte implique une fonction qui ne sera définie et étudiée qu'en terminale : la fonction ln qui est telle que $\ln(e) = 1$ et $\ln(e^a) = a$. Ainsi $e^a = 2 \iff a = \ln(e^a) = \ln(2)$.
La calculatrice donne la valeur approchée $a = \ln(2) \approx 0,69314718055995$.

Propriété 4.29 (Résumé) Pour tous réels x et y et tout entier relatif n :

$$e^0 = 1 \qquad e^1 = e \qquad e^x > 0 \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{nx} = (e^x)^n \qquad (e^x)' = e^x$$

Propriété 4.30 (Sens de variation) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tous réels x et y : $e^x = e^y \iff x = y$ et aussi $e^x < e^y \iff x < y$.

Démonstration On sait que $(e^x)' = e^x$ et aussi que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' > 0$.

Propriété 4.31 (Limites) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration
Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - x$.
La fonction f est dérivable car c'est la somme de deux fonctions dérivables et on a $f'(x) = e^x - 1$. On en déduit que :
- $f'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$
- $f'(x) < 0 \iff e^x < 1 \iff x < 0$

D'où le tableau de variation ci-contre.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f passe par un minimum atteint pour $x = 0$ qui vaut $f(0) = e^0 - 0 = 1$.
Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x \geqslant 1 \iff e^x \geqslant x + 1$.

D'après le théorème de minoration, comme $\lim_{x\to+\infty} x+1=+\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

Pour l'autre limite, on peut remarquer, quitte à faire le changement de variable $X=-x$ que :

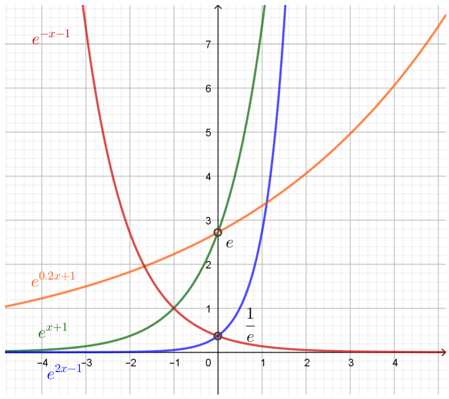
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{X\to+\infty} e^{-X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

EXEMPLE 78 (FONCTIONS COMPOSÉES) – a et b étant deux réels quelconques, soit $f_{(a,b)}$ la fonction $x \longmapsto e^{ax+b}$.

Le signe de la dérivée $f'_{(a,b)}(x) = ae^{ax+b}$ dépend de celui de a :

- Si $a>0$ la fonction est strictement croissante et modélise toutes les situations de croissances exponentielles (suites géométriques avec $q>0$ et $u_0>0$)
- Si $a<0$ la fonction est strictement décroissante et modélise toutes les situations de décroissances exponentielles (suites géométriques avec $q<0$ et $u_0>0$)

Dans tous les cas, ces fonction sont positives et $f_{(a,b)}(0)=e^b$.



MÉTHODE (FICHE DE RÉVISION 1)

Formulaire de dérivation à connaître par ♥

Fonction f	Dérivée f'	f dérivable sur
$x \mapsto ax+b$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, k\in\mathbb{Z}$
ku, où k est réel	ku'	I si u est dérivable sur I
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	I si u est dérivable, positive, non nulle sur I
u^n	$nu'u^{n-1}$	I si u est dérivable sur I
$u+v$	$u'+v'$	I si u et v sont dérivables sur I
uv	$u'v+uv'$	I si u et v sont dérivables sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	I si u et v dérivables et v non nulle sur I
$v\circ u$	$u'\times v'\circ u$	I si u est dérivable sur I et v sur $f(I)$
e^u	$u'e^u$	I si u est dérivable sur I

Le coin du chercheur

✻ Calculs d'aires et de volumes

On note $\mathscr{S}(x)$ l'aire du domaine contenu « sous » la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ entre la valeur $x = 0$ et $x = x_0$ (voir le schéma ci-contre), x_0 étant un réel positif quelconque.

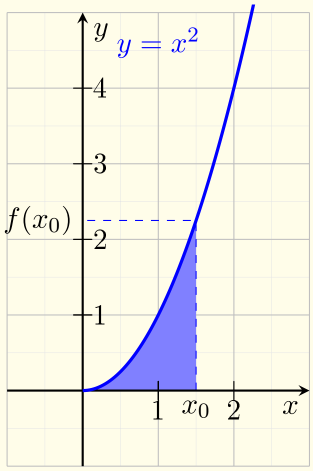
➩ Montrer que pour tout $h > 0$, on a

$$x_0^2 \leqslant \frac{\mathscr{S}(x_0+h) - \mathscr{S}(x_0)}{h} \leqslant (x_0+h)^2$$

Montrer que cette inégalité reste valable pour tout $h < 0$, du moment que $x_0 + h$ reste positif.

En déduire, en faisant tendre h vers 0, que $\mathscr{S}$ est dérivable en x_0 et que $\mathscr{S}'(x_0) = x_0^2$.

La conséquence de ceci est que la fonction $\mathscr{S}$ cherchée est connue par sa dérivée f. On sait aussi que $\mathscr{S}(0) = 0$. Avec ces deux informations, déterminer $\mathscr{S}(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.



✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

On note $\mathscr{V}(z_0)$ le volume de la tranche de demi-sphère comprise entre la valeur $z = 0$ et $z = z_0$ (voir le schéma de la demi-sphère ci-contre), z_0 étant un réel positif inférieur à R le rayon de la demi-sphère.

➩ Déterminer le rayon $r(z_0)$ du petit cercle de centre $\Omega(0, 0, z_0)$ (le rayon dépend de z_0 et de la constante R).

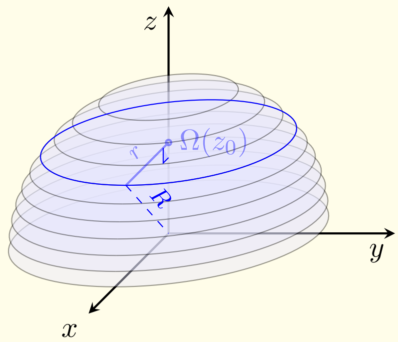
Montrer ensuite que pour tout $h > 0$, on a

$$\pi r^2(z_0) \leqslant \frac{\mathscr{V}(z_0) - \mathscr{V}(z_0+h)}{h} \leqslant \pi r^2(z_0+h)$$

Montrer que cette inégalité reste valable pour tout $h < 0$, du moment que $z_0 + h$ reste positif.

En déduire, en faisant tendre h vers 0, que $\mathscr{V}$ est dérivable en z_0 et que $\mathscr{V}'(z_0) = \pi r^2(z_0)$.

La conséquence de ceci est que la fonction $\mathscr{V}$ cherchée est connue par sa dérivée et par la valeur initiale $\mathscr{V}(0) = 0$. Avec ces deux informations, déterminer $\mathscr{V}(z)$ pour tout $z \leqslant R$. Retrouver alors la formule qui donne le volume d'une sphère de rayon R.



➲ Définitions	
f **paire**	$\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
f **impaire**	$\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
f **T-périodique**	$\exists T > 0, \forall x \in D_f, x + T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$
période	la plus petite valeur de T qui convient ci-dessus
Nombre dérivé en x_0	$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
f **dérivable en** x_0	$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$, où $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$
croissance stricte sur I	$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
décroissance stricte sur I	$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
$f(x_0)$ **minimum de** f **sur** I	$\exists x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \geqslant f(x_0)$
$f(x_0)$ **maximum de** f **sur** I	$\exists x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \leqslant f(x_0)$
➲ Propriétés	
f **paire**	$x \mapsto x^{2n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, cos, $x \mapsto \lvert x \rvert$
f **impaire**	$x \mapsto x^{2n+1}$, où $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, sin, tan
f **T-périodique**	sin et cos de période 2π, tan de période π
limite 0 **quand** $x \longrightarrow 0$	$x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \sqrt{x}$
limite $+\infty$ **quand** $x \longrightarrow 0$	$x \mapsto \frac{1}{x}$ et plus généralement $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
limite 0 **quand** $x \longrightarrow +\infty$	$x \mapsto \frac{1}{x}$ et plus généralement $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
limite $+\infty$ **quand** $x \longrightarrow +\infty$	$x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \sqrt{x}$
Tangente à C_f **en** x_0	$T_{x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
vitesse instantanée	si $f(t)$: position d'un solide à l'instant t, $v(t) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$
valeur approchée affine	$f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$
croissance stricte sur I	$\forall x \in I, f'(x) > 0$ ou $f'(x) = 0$ en un nombre fini de points
décroissance stricte sur I	$\forall x \in I, f'(x) < 0$ ou $f'(x) = 0$ en un nombre fini de points
minimum local en x_0	$\exists x_0, \forall x \in I, \leqslant x_0 \Longrightarrow f'(x) \leqslant 0$ et $x \geqslant x_0 \Longrightarrow f'(x) \geqslant 0$
maximum local en x_0	$\exists x_0, \forall x \in I, x \leqslant x_0 \Longrightarrow f'(x) \geqslant 0$ et $x \geqslant x_0 \Longrightarrow f'(x) \leqslant 0$
Positions relatives	sur $]0;1[$, $x^2 < x < \sqrt{x}$ sur $]1;+\infty[$, $\sqrt{x} < x < x^2$

Méthode (Fiche de révision 2)

5 Probabilités

Objectifs :

- Variable aléatoire discrète : loi de probabilité, espérance, variance et écart-type
- Propriétés de l'espérance et de la variance, lien avec les statistiques au moyen de simulations
- Probabilité conditionnelle d'un évènement et indépendance de deux évènements.
- Modéliser la répétition d'expériences à l'aide d'un arbre pondéré, en déduire des probabilités

Aperçu historique : Le mot probabilité apparaît tout d'abord dans les traductions d'Aristote, où il signifie qu'une idée est communément admise par tous. Pendant le Moyen-âge et la Renaissance, des erreurs de traduction amèneront à utiliser ce terme pour désigner la vraisemblance d'une idée.
L'étude des probabilités telles que nous les connaissons est apparue avec la notion de risque au XIIe siècle, pour l'établissement de contrats commerciaux, puis au XVIe siècle avec la généralisation des contrats d'assurance maritime.
Mais le véritable début de la théorie des probabilités date des travaux de Pierre de Fermat (1601-1665), Blaise Pascal (1623-1662) et Christian Huygens (1629-1695) dans la deuxième moitié du XVIIe siècle : ils commençaient à s'intéresser à la théorie de jeux. Le terme probabilités a alors pris son sens actuel, et Jakob Bernoulli a traité ce sujet en tant que théorie mathématique.
La famille Bernoulli vivait à Bâle (Suisse). Entre le XVIIe et le XIXe siècle, cette famille, qui était à l'origine une famille de marchands, a fourni à son temps une véritable dynastie de grands mathématiciens. Parmi eux, les frères Johann et Jakob ne s'entendaient pas très bien mais étaient tous les deux de grands admirateurs de Leibniz (ils se sont rangés à ses côtés lors de la querelle qui l'a opposé à Newton pour la paternité du calcul différentiel et intégral). Jakob (en français Jacques, 1654-1705) est professeur à l'université de Bâle à partir de 1682, il fut nommé associé de l'Académie des sciences de Paris en 1699 et de celle de Berlin en 1701. Dans *Ars Conjectandi*, « l'art de conjecturer » (ouvrage publié à titre posthume par son neveu Nicolas Bernoulli en 1713), il consolide et développe la théorie des probabilités, énonçant notamment, pour la 1re fois, la loi des grands nombres. Il y expose également sa théorie des permutations et des combinaisons, qui constitue aujourd'hui les fondements de la combinatoire.
Abraham de Moivre (1667-1754), français exilé à Londres, publie en 1718 *The doctrine of chances* (la Théorie du hasard) où il donne, entre autre, une première définition de l'indépendance statistique.
Thomas Bayes (1702-1761) publie à titre posthume son *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances* en 1763 qui contient sa fameuse loi. Au XVIIIe siècle, Gabriel Cramer (1704-1752) donne un cours sur la logique probabiliste. Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), encyclopédiste notoire, s'est intéressé aux théories probabilistes de son époque mais c'est plus tard qu'elles acquièrent leur cohérence avec la synthèse magistrale de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), le grand savant de l'époque napoléonienne, qui publie en 1812 sa Théorie analytique des probabilités. Ce n'est donc qu'au XIXe siècle, que la théorie moderne des probabilités apparaît ; prolongée au début du XXe siècle par l'axiomatique de Andreï Kolmogorov (1903-1987) qui propose un cadre formel rigoureux pour la théorie des probabilités, permettant enfin que celle-ci devienne une branche des mathématiques à part entière. Kolmogorov publie notamment en 1933 les *Fondements de la théorie des probabilités* où il définit les axiomes de la théorie actuelle des probabilités. La description actuelle, en termes d'univers, s'est donc imposée il y a un peu moins d'un siècle.

1. Variables aléatoires

a. Définitions et rappels

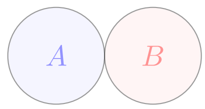
On considère une expérience aléatoire conduisant à n issues, et on note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ l'ensemble des issues. Ω est « l'univers » des possibles. On définit la probabilité P en donnant la probabilité de chaque issue, c'est-à-dire les nombres $P(\omega_1), P(\omega_2), \ldots, P(\omega_n)$ vérifiant :

- $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}, 0 \leqslant P(\omega_i) \leqslant 1$
- $\sum_{i=1}^{i=n} P(\omega_i) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = 1$

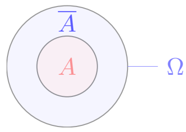
DÉFINITION 5.1 Un événement A est une partie de Ω.
La probabilité de A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des issues appartenant à A.

Remarques :

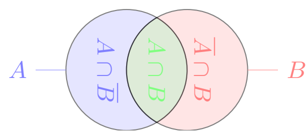
- A est un événement impossible si et seulement si $A = \emptyset$.
  Dans ce cas $P(A) = 0$
- A est un événement certain si et seulement si $A = \Omega$.
  Dans ce cas $P(A) = 1$
- A et B sont incompatibles si $A \cap B$ est impossible, c'est-à-dire si $P(A \cap B) = 0$. Dans ce cas $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
  L'événement $A \cup B$ est réalisé quand A **ou** B est réalisé. Ce « ou » est, en principe, inclusif mais pour des événements incompatibles, il prend le sens d'un ou exclusif.
- A et B sont des événements contraires si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$.
  Dans ce cas on note $B = \overline{A}$ et on a $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- pour des événements quelconques A et B, on a
  $$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$
  Analysons la situation en termes d'ensembles incompatibles :
  $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$,
  d'où $A \cup B = [(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)] \cup (\overline{A} \cap B)$
  et donc $P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$,
  mais, comme $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$,
  on a finalement $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.



A et B incompatibles



A et $\overline{A}$ contraires



A et B compatibles

EXEMPLE 79 – Une urne contient 100 boules numérotées de 0 à 99. On tire dans cette urne une boule et on note son numéro.
Appelons A l'événement « être divisible par 5 », B : « se terminer par 5 », C : « être divisible par 2 » et D : « être divisible par 3 ».
Il est clair que Ω est l'ensemble des 100 numéros, et que chaque numéro est équiprobable.
A peut être réalisé de 20 façons différentes car $A = \{0, 5 = 1 \times 5, \ldots, 95 = 19 \times 5\}$ et donc $P(A) = \frac{20}{100}$.
De même, on a $P(B) = \frac{10}{100}$, $P(C) = \frac{50}{100}$ et $P(D) = \frac{34}{100}$ (car $D = \{0, 3 = 1 \times 3, \ldots, 99 = 33 \times 3\}$).
$P(A \cap B) = P(B) = \frac{10}{100}$ et $P(A \cup B) = P(A) = \frac{20}{100}$ car $B \subset A$.
$P(A \cap C) = \frac{10}{100}$ car $A \cap C$: « être divisible par 10 », et
$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{20+50-10}{100} = \frac{60}{100}$.
$P(A \cap D) = \frac{4}{100}$ car $A \cap C = \{0, 30, 60, 90\}$, et
$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) = \frac{20+34-4}{100} = \frac{50}{100}$.
$P(B \cap C) = 0$ car $A \cap C = \emptyset$, et donc $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{10+50}{100} = \frac{60}{100}$.
$P(B \cap D) = \frac{3}{100}$ car $B \cap D = \{15, 45, 75\}$, et donc
$P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D) = \frac{10+34-3}{100} = \frac{41}{100}$.
$P(C \cap D) = \frac{17}{100}$ car $C \cap D =$: « être divisible par 6 » ($C \cap D = \{0, 6 = 1 \times 6, \ldots, 96 = 16 \times 6\}$) et donc $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{50+34-17}{100} = \frac{67}{100}$.

DÉFINITION 5.2 Lorsque toutes les issues ont la même probabilité – on dit qu'il y a équiprobabilité des issues – s'il y a n issues possibles, la probabilité de chacune est $\frac{1}{n}$.

Remarque :
On reconnait une situation d'équiprobabilité au fait que les issues sont interchangeables. Par exemple, un dé cubique bien équilibré a six faces interchangeables. Que l'un ou l'autre d'entre elles apparaisse lors d'un tirage du dé, cela arrive avec la même probabilité de $\frac{1}{6}$. Quand on lance une pièce équilibrée, on obtient une face ou l'autre avec la même probabilité de $\frac{1}{2}$ car les deux faces sont interchangeables.

PROPRIÉTÉ 5.1 Dans le cas d'une situation d'équiprobabilité à n issues possibles, un événement A qui se réalise pour k issues a une probabilité de $P(A) = \frac{k}{n}$. On résume cela en écrivant

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

EXEMPLE 80 – Dans un jeu de 52 cartes, il y a 13 cartes de niveaux différents $(\text{as}, 2, 3, \ldots, \text{valet}, \text{dame}, \text{roi})$, dans 4 couleurs différentes (cœur, carreau, trèfle, pique).
➲ Supposons que l'on tire une carte dans le jeu.
Quelles sont les probabilités de A : « tirer un cœur » et de B : « tirer une tête (valet, dame ou roi) » ?
Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité à 52 issues possibles.
A est réalisé pour 13 d'entre elles, donc $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. On aurait pu raisonner en termes de couleurs : puisqu'il y en a 4 et qu'elles sont équiprobables, la probabilité de tirer l'une d'elle est $\frac{1}{4}$.
B est réalisable de $3 \times 4 = 12$ façons, donc $P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$. On aurait pu raisonner en termes de niveaux : puisqu'il y a 13 niveaux équiprobables par couleur dont 3 sont des têtes, la probabilité de tirer l'une de ces têtes est $\frac{3}{13}$.
➲ Supposons que l'on tire deux cartes du jeu.
Quelle est la probabilité de A : « tirer deux cœurs », de B : « tirer deux têtes » et de $A \cup B$?
Le nombre de mains de deux cartes est $52 \times 51 \div 2 = 1326$ (on choisit la première carte, puis la seconde et on divise par deux car chaque main possible a été comptée deux fois). Toutes ces mains sont équiprobables.
A est réalisé pour $13 \times 12 \div 2 = 78$ d'entre elles, donc $P(A) = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17} \approx 0,059$.
B est réalisé pour $12 \times 11 \div 2 = 66$ d'entre elles, donc $P(B) = \frac{66}{1326} = \frac{11}{221} \approx 0,050$.
Pour déterminer $P(A \cup B)$, commençons par déterminer $P(A \cap B)$: il n'y a que 3 mains favorables à $A \cap B = \{(\text{V}\heartsuit,\text{R}\heartsuit),(\text{V}\heartsuit,\text{D}\heartsuit),(\text{D}\heartsuit,\text{R}\heartsuit)\}$, donc $P(A \cap B) = \frac{3}{1326} = \frac{1}{442}$.
On en déduit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{78}{1326} + \frac{12}{1326} - \frac{3}{1326} = \frac{87}{1326}$.

La propriété 5.1 suppose que l'on puisse dénombrer les cas favorables et les cas possibles. Le dénombrement n'est pas toujours aisé et manipule parfois de très grands nombres. L'objet de ce chapitre n'étant pas de faire une étude systématique des méthodes de dénombrement, nous nous limiterons à deux exemples.

EXEMPLE 81 – ➲ J'écoute le dernier CD de ma chanteuse préférée en mode « shuffle » : les 12 chansons passent toutes les 12, une fois et une seule, dans un ordre aléatoire. J'aimerai calculer la probabilité que les chansons 3 et 7 passent l'une après l'autre.
Le nombre d'ordres différents des 12 chansons (les cas possibles) est $12 \times 11 \times 10 \times \cdots \times 2 \times 1$, un nombre très grand que l'on note 12! (factorielle 12) et qui vaut 479 001 600. Pour déterminer le nombre de cas favorables, il faut procéder méthodiquement :

- On choisit la place des deux chansons parmi les douze places. Il y en a 11, la liste est $\{(1, 2), (2, 3), \ldots, (11, 12)\}$.
- Pour chacune de ces places, il faut choisir un des deux ordres possibles pour les deux chansons : $(3, 7)$ ou $(7, 3)$.
- On doit aussi choisir l'ordre des 10 autres chansons : il y a $10! = 3\,628\,800$ ordres possibles.

Il y a donc, en tout $11 \times 2 \times 10!$ cas favorables. La probabilité cherchée est finalement $\frac{11\times 2\times 10!}{12!} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Deux chansons données passent l'une après l'autre une fois sur six, en moyenne.
➲ J'ai invité des amis à une soirée. Nous sommes douze et j'aimerai déterminer la probabilité que deux d'entre nous au moins aient la même date d'anniversaire.
Quand on voit au moins, on doit penser à l'événement contraire. Ici, le contraire de E :« deux d'entre nous au moins aient la même date d'anniversaire » est $\overline{E}$:« chacun a une date d'anniversaire différente ». Cherchons la probabilité de cet événement. On va estimer qu'il n'y a que 365 dates d'anniversaire possibles (pas d'année bissextile) et que chacune est équiprobable pour les 12 personnes.
Le nombre de cas possibles est 365^{12} un nombre colossal approximativement égal à $5,6 \times 10^{30}$. Ce résultat distingue des listes de dates d'anniversaire égales, mais on doit procéder ainsi pour conserver l'équiprobabilité des listes. On dénombre des listes ordonnées, où les personnes sont identifiées (par exemple par l'ordre alphabétique de leur nom).
Le nombre de cas favorables est le nombre de listes de dates sans répétition d'une certaine date. On peut choisir la 1^{re} date parmi 365, mais la 2^{e} est choisie parmi 364, la 3^{e} parmi 363, etc. Il y a donc $365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times 354$ cas favorables. Un nombre très grand que l'on peut noter $\frac{365!}{353!}$ (après simplification, les deux nombres sont en effet égaux).
Finalement, $P(\overline{E}) = \frac{365!}{353!\times 365^{12}}$. Ce nombre est plus facile à calculer en l'écrivant $\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{354}{365}$ et en utilisant un tableur, ou bien en écrivant un petit programme.

Ce programme est très simple, nous en donnons une version en Python ci-contre. Il nous fournit alors le résultat $P(\overline{E}) \approx 0,832975$, d'où $P(E) \approx 0,167025$.
Pour information, c'est à partir de $n = 23$ personnes assemblées que la probabilité de E devient supérieure à $0,5$.

```
N=12
P=1
for I in range(N) :
    P*=(365-I)/365
print("P(non E)={}".format(P))
print("P(E)={}".format(1-P))
```

Définition 5.3 (variable aléatoire) Si, à chaque issue ω_i de Ω, on peut associer un réel $X(\omega_i)$, on dit que l'on a défini une variable aléatoire X sur Ω. Les probabilités associées aux différentes valeurs de X est appelée « loi » de la variable X.

Remarques :

- Une variable aléatoire est une fonction définie sur Ω ; ce n'est donc pas une variable (ce sont les issues qui sont variables ici) et ce n'est pas non plus aléatoire puisque chaque issue ω_i est associée à la valeur $X(\omega_i)$ de façon bien déterminée (le hasard n'a pas sa place dans cette association).
- Une variable aléatoire permet de définir des événements. Si l'expérience aléatoire est un jeu dans lequel un joueur gagne ou perd de l'argent, on écrira $X = 5$ l'événement réalisé lorsque le gain du joueur est 5 (l'unité monétaire est généralement précisée par l'énoncé). L'évènement $X \leqslant 0$ correspond à une perte, tandis que $10 \leqslant X < 20$ correspond à un gain appartenant à l'intervalle $[10; 20[$. etc.
- La notation ensembliste est modifiée puisqu'en notant $X = x$, en réalité, on désigne l'ensemble des issues ω_i telles que $X(\omega_i) = x$, c'est-à-dire $\{\omega_i \in \Omega, X(\omega_i) = x\}$.
- La loi de probabilité de X est une fonction $f : k \mapsto P(X = k)$. Cette fonction agit sur l'ensemble, noté $X(\Omega)$, des valeurs possibles de X. On désigne parfois cette fonction par le terme de « loi de distribution » de X ou encore de « densité » de X.
- La somme de toutes les probabilités $P(X = k)$ quand k décrit l'ensemble $X(\Omega)$ est égal à 1, puisque les événements $X = k$ sont deux à deux disjoints, leur réunion formant Ω.

Exemple 82 – On lance une pièce jusqu'à obtenir pile et on note le rang k de ce premier pile. Pour chaque réalisation de cette expérience, on note $X = k$ l'événement donnant la longueur (le temps d'attente) du tirage. X est une variable aléatoire qui peut prendre n'importe quelle valeur entière non nulle.

- $X = 1$ correspond à l'obtention de pile au 1$^{\text{er}}$ lancé ; $P(X = 1) = \frac{1}{2}$.
- $X = 2$ correspond à l'obtention de face au 1$^{\text{er}}$ lancé et de pile au 2$^{\text{e}}$; $P(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
- $X = 3$ correspond à l'obtention de face aux 2 premiers lancés et de pile au 3$^{\text{e}}$; $P(X = 3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.
- Il en va de même pour toutes les valeurs de k, $X = k$ correspond à l'obtention de face aux $k-1$ premiers lancés et de pile au k^{e} et on a $P(X = k) = \frac{1}{2^k}$.

La loi de la variable aléatoire X est ainsi connue avec précision pour n'importe quelle valeur de k et on peut vérifier que la somme infinie de toutes ces probabilités est bien égale à 1. Ici il s'agit de la somme des n termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$ (voir le chapitre sur les suites). On peut déjà déterminer $P(X \leqslant k)$ qui correspond à cette somme jusqu'à $n = k$:

$$P(X \leqslant k) = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

Pour la limite, on voit bien que $\frac{1}{2^k}$ tend vers 0, d'où le résultat.

b. Paramètres d'une variable aléatoire

Nous allons définir les différents paramètres (espérance, variance, écart-type) pour le cas d'un ensemble $X(\Omega)$ fini. Bien entendu, ces définitions s'étendront également aux ensembles infinis (à condition qu'ils soient dénombrables), comme on en rencontre fréquemment (voir l'exercice 82).

Définition 5.4 Soient X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
En notant $p_i = P(X = x_i)$ les différentes valeurs de la loi de probabilité de X :

- L'espérance de X est le réel, noté $E(X)$, défini par $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i$
- La variance de X est le réel positif, noté $V(X)$, défini par $V(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \Big(x_i - E(X)\Big)^2$
- L'écart-type de X est le réel positif, noté $\sigma(X)$, défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques :

- L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est un paramètre central, équivalent probabiliste de la notion statistique de moyenne. De même, la variance et l'écart-type sont des mesures de la dispersion que l'on calcule aussi en statistiques. La variance est la moyenne des carrés des écarts à l'espérance pondérée par les probabilités. On pourrait mesurer la dispersion en utilisant une autre formule, par exemple la moyenne des valeurs absolues des écarts à l'espérance. Si on réalise l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois, les paramètres statistiques (fréquences, moyenne, écart-type) se rapprochent des résultats théoriques calculés en probabilités.
- Dans un jeu où X est associé aux gains possibles, $E(X)$ représente le gain moyen que l'on peut espérer. Le jeu est dit équitable si $E(X) = 0$, favorable au joueur si $E(X) > 0$ et défavorable au joueur si $E(X) < 0$.

Exemple 83 – Lorsqu'on lance deux dés cubiques, chacune des faces étant numérotée entre 1 et 6, il y a 36 résultats équiprobables. La variable X donnant la somme des dés prend les valeurs entières comprises entre 2 et 12, selon la loi de probabilité suivante :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(X) = \sum\limits_{i=1}^{12} p_i x_i = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} + 8 \times \frac{5}{36} + \dots + 12 \times \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$

$V(X) = \sum_{i=1}^{12} p_i\left(x_i - 7\right)^2 = (2-7)^2 \times \frac{1}{36} + (3-7)^2 \times \frac{2}{36} + (4-7)^2 \times \frac{3}{36} + \cdots + (12-7)^2 \times \frac{1}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6} \approx 5,83$
$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,42$

Exemple 84 – Pour donner un exemple de calcul de ces paramètres, dans le cas d'un ensemble $X(\Omega)$ infini dénombrable, on peut reprendre l'exemple 82 où la loi de probabilité se résume à l'égalité $p_i = P(X = x_i) = \frac{1}{2^i}$, valable pour tout $i \geqslant 1$.
$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i x_i = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} + \ldots$
Pour déterminer la valeur exacte de cette somme infinie, on se trouve encore un peu démuni. Mais une approche algorithmique nous en donnera une très bonne valeur approchée.
Programmons le calcul approché de $E(X)$ et donnons différentes valeurs de sortie.

n	5	10	20	40	80
$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$	$1,7825$	$1,98828$	$1,99997901$	$1,99999999996$	1,999999999999

Il semblerait que $E(X) = 2$; les valeurs ne changent pas entre 40 et 80, signe que la capacité du calcul informatique est dépassée pour $n = 80$. En prenant $E(X) = 2$, on peut compléter la caractérisation de cette variable aléatoire et calculer une valeur approchée de $V(X)$ et de $\sigma(X)$. On trouve alors, au vu des valeurs suivantes, que $V(X) = 2$ et donc $\sigma(X) = \sqrt{2} \approx 1,414213562$:

n	5	10	20	40	80
$e_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-2)^2}{2^i}$	$1,15625$	$1,900390$	$1,99961$	$1,999999998$	1,999999999
$\sigma_n = \sqrt{e_n}$	$1,07529$	$1,378546$	$1,41407$	$1,414213561$	1,414213562

Soit X une variable aléatoire. Cette variable X prenant des valeurs réelles, on peut être amené à effectuer des opérations sur elle. Par exemple, on peut doubler ses valeurs et s'intéresser à la variable aléatoire $Y = 2X$. On peut ajouter une quantité fixe et s'intéresser à la variable aléatoire $Z = X + k$.

Propriété 5.2 Soient X une variable aléatoire et a et b deux réels. Les paramètres de la variable aléatoire $X' = aX + b$ sont $E(X') = E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(X') = V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Démonstration Ces propriétés découlent des propriétés de la multiplication et de l'addition, ainsi que des définitions, notamment $\sum p_i = 1$, $\sum p_i x_i = E(X)$ et $\sum p_i (x_i - E(X))^2 = V(X)$:

$$\begin{aligned}
E(aX+b) &= (ax_1 + b) \times p_1 + (ax_2 + b) \times p_2 + \ldots + (ax_n + b) \times p_n \\
&= (ax_1p_1 + ax_2p_2 + \ldots + ax_np_n) + (bp_1 + bp_2 + \ldots + bp_n) \\
&= a(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n) + b(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) \\
&= aE(X) + b \times 1 = aE(X) + b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} p_i (ax_i + b - E(aX+b))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (ax_i + b - aE(X) - b)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i (ax_i - aE(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \times a^2 \times (x_i - E(X))^2 \\
&= a^2 \times \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i - E(X))^2 = a^2 V(X)
\end{aligned}$$

Conséquence : On a donc aussi $\sigma(aX + b) = \sqrt{V(aX+b)} = \sqrt{a^2 V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X)$

Exemple 85 – Le Duc de Toscane a remarqué que, lorsqu'on tire 3 dés, la somme 10 tombe un peu plus souvent que la somme 9, alors qu'on peut obtenir chacune de ces deux sommes de six façons :

- $9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3$
- $10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3$

Il s'ouvre alors de ce paradoxe à Galilée (1554-1642) qui rédige un cours traité sur la question, jetant ainsi les bases de la théorie des probabilités. Celui-ci dénombre les $6^3 = 216$ issues équiprobables pour le tirage de 3 dés ainsi que les cas favorables :

- pour 9, il y a $6+6+6+3+3+1 = 25$ possibilités équiprobables (on distingue 6 cas quand les chiffres sont différents, par exemple $621, 612, 126, 162, 216, 261$; 3 cas quand il y a répétition d'un chiffre, par exemple $522, 252, 225$ et un seul cas pour 333).
- pour 10, il y a $6+6+6+3+3+3 = 27$ possibilités équiprobables.

En appelant X la variable aléatoire « somme des dés », on a $P(X=9) = \frac{25}{216}$ et $P(X=10) = \frac{27}{216}$. L'observation du duc était bien fondée.
Imaginons qu'un joueur mise 5 € sur la somme $X = 10$ avec la promesse de recevoir 8 fois sa mise s'il gagne. En appelant Y la variable aléatoire donnant son gain algébrique (-5 € s'il perd et 40 € s'il gagne), quelle est l'espérance de gain du joueur ?
$E(Y) = 40 \times \frac{27}{216} - 5 \times \frac{216-27}{216} = \frac{1080-945}{216} = \frac{135}{216} = 0,625$ €.
Ce jeu avantage donc le joueur. Si on souhaite le rendre équitable, il suffit d'abaisser de $0,625$ € chacun des montants : le joueur « gagne » $-5 - 0,625 = -5,625$ € quand il perd (sa mise passe donc à $5,625$ €), et quand il gagne, on lui verse $40 - 0,625 = 39,375$ €, soit $39,375 \div 5,625 = 7$ fois sa mise. La nouvelle espérance est ainsi abaissée de $0,625$ € et le jeu devient équitable.
On a utilisé la propriété 5.2 : $E(Y+b) = E(Y) + b$, soit ici $E(Y - 0,625) = E(Y) - 0,625$.
Maintenant, on peut conserver la même espérance nulle en multipliant par un coefficient quelconque a, car la même propriété 5.2 affirme que $E(aY) = aE(Y)$. Pour éviter d'avoir à miser $5,625$ €, on multiplie cette mise par $\frac{5}{5,625} = \frac{8}{9}$. Ainsi, la nouvelle mise revient à 5 € et le gain en cas de sortie du 10 devient $39,375 \times \frac{8}{9} = 35$ €.
Globalement, on a effectué le changement $Y' = \frac{5}{5,625}(Y - 0,625) = \frac{8}{9}Y - \frac{5}{9}$ et la propriété 5.2 qui affirme que $E(Y') = E(\frac{8}{9}Y - \frac{5}{9}) = \frac{8}{9}E(Y) - \frac{5}{9}$. Comme $E(Y) = 0,625$ ici, on obtient $E(Y') = 0$.

Propriété 5.3 (Autre formule pour la variance) Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.
Alors on a $V(X) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$

Démonstration

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\Big(x_i - E(X)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} p_i x_i E(X) + \sum_{i=1}^{n} p_i\Big(E(X)\Big)^2 \\
&= E(X^2) - 2\sum_{i=1}^{n} p_i x_i E(X) + \sum_{i=1}^{n} p_i E(X) \times E(X) = E(X^2) - \sum_{i=1}^{n}\Big(p_i E(X)\,(2x_i - E(X))\Big) \\
&= E(X^2) - E(X)\left(\sum_{i=1}^{n} 2p_i x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i E(X)\right) = E(X^2) - E(X)\left(2E(X) - E(X)\sum_{i=1}^{n} p_i\right) \\
&= E(X^2) - E(X)\,(2E(X) - E(X) \times 1) = E(X^2) - E(X) \times E(X) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2
\end{aligned}$$

Remarque : Cette propriété est un cas particulier d'un théorème connu sous le nom de « König-Huygens » qui dit que $E((X-a)^2) = V(X) + (E(X) - a)^2$.
En effet, en prenant $a = 0$, on obtient $E(X^2) = V(X) + \Big(E(X)\Big)^2$.
Pour démontrer ce théorème, on peut partir de l'égalité $x_i - a = x_i - E(X) + E(X) - a$ qui, élevée au carré s'écrit $(x_i - a)^2 = (x_i - E(X))^2 + (E(X) - a)^2 + 2 \times (x_i - E(X))(E(X) - a)$.
Multiplions ensuite cette nouvelle égalité par p_i et sommons les quantités obtenues pour toutes les

valeurs de i entre 1 et n. On obtient :

$$E((X-a)^2) = V(X) + (E(X)-a)^2 + 2\times(E(X)-a)\times\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))$$

Le dernier terme de cette somme est nul car
$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X)) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - E(X)\sum_{i=1}^{n} p_i = E(X) - E(X) = 0$, d'où le résultat.

Cette propriété facilite le calcul algorithmique de $V(X)$ puisque l'on n'a pas besoin de connaître « à l'avance » la valeur de $E(X)$: on calcule en parallèle $\sum p_i x_i$ (pour l'obtention de $E(X)$) et $\sum p_i x_i^2$ (pour l'obtention de $E(X^2)$). Supposons que l'on cherche la variance de l'exemple 83 où on s'intéresse à X la somme de deux dés. Au lieu de faire comme dans l'exemple, on peut calculer simultanément :
$E(X) = \sum_{i=1}^{12} p_i x_i = 2\times\frac{1}{36} + 3\times\frac{2}{36} + 4\times\frac{3}{36} + \cdots + 12\times\frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$
$E(X^2) = \sum_{i=1}^{12} p_i x_i^2 = 2^2\times\frac{1}{36} + 3^2\times\frac{2}{36} + 4^2\times\frac{3}{36} + \cdots + 12^2\times\frac{1}{36} = \frac{1974}{36}$
Ensuite, on effectue $E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2 = \frac{1974}{36} - \left(\frac{252}{36}\right)^2 = \frac{7560}{36^2} = \frac{35}{6}$.
Dans l'application suivante où on calcule la variance de l'exemple 82, on ne connait $E(X)$ avec certitude qu'en passant à la limite. La propriété énoncée apparait donc encore plus utile puisqu'elle permet d'estimer $E(X)$ et $V(X)$ à chaque étape du calcul :

	n	5	10	20	40	80
Estimation de E(X)	$\sum p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$	$1,625$	$1,9785$	$1,99995$	$1,999999999$	1,9999999999
	$\sum p_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{2^i}$	$4,406$	$5,8574$	$5,99953$	$5,999999998$	5,9999999999
Estimation de V(X)	$\sum p_i x_i^2 - (\sum p_i x_i)^2$	$1,233$	$1,9041$	$1,99962$	$1,999999998$	2,0

2. Arbres de probabilités

a. Expériences aléatoires successives

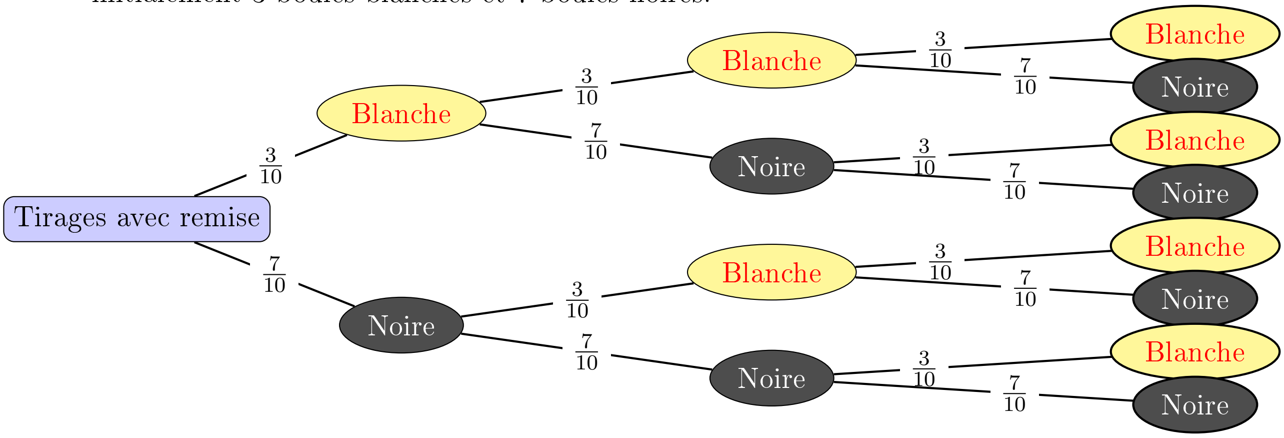
Rappelons le principe d'indépendance entre les expériences aléatoires qui détermine deux types d'arbres de probabilités.

Définition 5.5 Deux expériences sont indépendantes si le résultat de la première n'influence pas le résultat de la seconde, c'est-à-dire qu'il ne modifie pas la loi de probabilités de celle-ci.

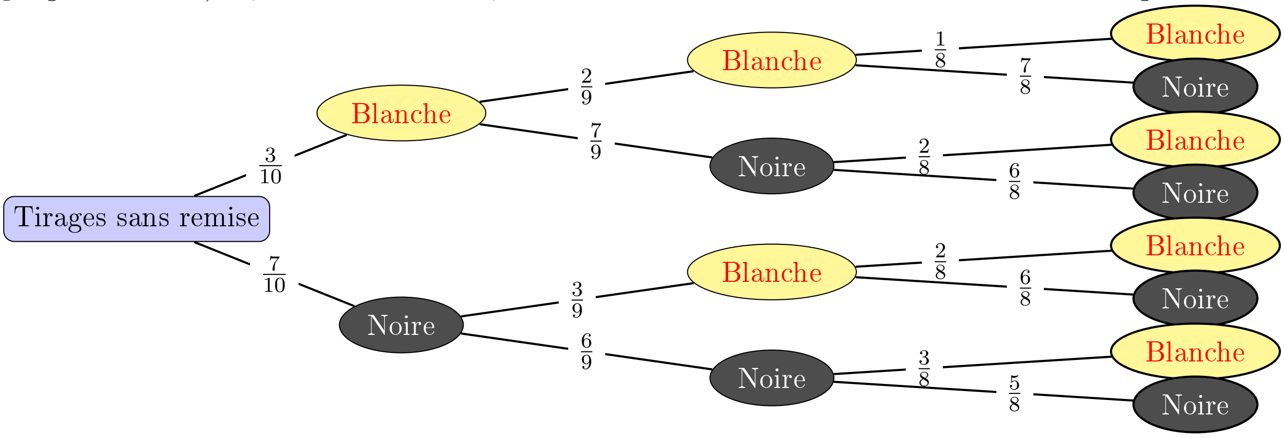
Exemples :

- Je lance un dé à six faces (dé cubique) en même temps qu'un dé à quatre faces (dé tétraédrique). Ces deux expériences simultanées sont indépendantes car le résultat du dé cubique n'influence pas le résultat dé tétraédrique. Même chose si je lance deux dés cubiques : chacun des dés indique un résultat indépendant de l'autre. Le processus expérimental importe peu : je peux lancer les dés ensemble ou séparément, sans changer la loi de probabilité des résultats.
- Si je lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir un « pile », les tirages successifs sont indépendants, la pièce n'ayant pas de mémoire : ce n'est pas parce que j'ai déjà obtenu 5 fois « face » que j'ai plus de chance de faire « pile » au sixième lancé. Les lancés sont indépendants. L'existence du sixième lancé, par contre, dépend du résultat du cinquième puisqu'on ne l'effectue qu'à condition d'avoir obtenu un « face. »
- Dans un vidage d'urne (situation souvent choisie car elle permet de modéliser des problèmes de probabilités très divers), si on remet la boule tirée après avoir noté ce qui nous intéresse (sa couleur, sa taille, son numéro éventuels), les tirages successifs sont indépendants. En réalité, dans ce cas, l'urne ne se vide pas et ne change pas de composition. C'est alors la même

expérience aléatoire que l'on peut répéter jusqu'à l'infini.
Si on ne remet pas la boule qui a été tirée, alors chacun des tirages influe sur la loi de probabilités de la boule suivante. Les tirages ne sont pas indépendants et l'urne se vide progressivement jusqu'à épuisement des boules.
L'illustration suivante montre ces deux types de tirages dans le cas d'une urne contenant initialement 3 boules blanches et 7 boules noires.



Ci-dessus : les tirages se font « avec remise ». Il y a indépendance entre les différents tirages. Les probabilités sont inchangées d'une étape à l'autre.
Ci-dessous : les tirages se font « sans remise ». Il n'y a pas indépendance entre les différents tirages. Les probabilités changent d'une étape à l'autre : le nombre de boules diminue (on vide l'urne progressivement) et, selon les résultats, le nombre de boules d'une couleur diminue ou stagne.



Propriété 5.4 Un arbre de probabilités représente la répétition d'expériences aléatoires : les nœuds (sommets) sont les issues de ces expériences et les nombres inscrits sur les branches (arêtes, arcs) sont les probabilités de ces événements. Que les expériences soient dépendantes ou indépendantes les unes des autres, ces arbres vérifient toujours les propriétés suivantes :

- les probabilités des branches partant d'un même nœud ont une somme égale à 1
- la probabilité d'un « chemin » est le produit des probabilités de ses branches
- la probabilité d'un événement réalisé par plusieurs chemins est la somme des probabilités de ces chemins

Démonstration En partant d'un même nœud, on représente les différentes issues d'une expérience aléatoire. Ces issues sont incompatibles et forment l'univers Ω des possibles de cette expérience. La somme des probabilités vaut donc 1.
Le produit des probabilités sur un chemin se théorise en termes de probabilités conditionnelles (voir plus loin) : en notant $P(A/B)$ la probabilité de réaliser A sachant que B a été réalisé, la probabilité du chemin $B-A$ (nœud B puis nœud A) est celle de l'événement $A \cap B$. Elle vaut $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$, soit le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.
D'une façon intuitive, si B se produit 3 fois sur 10 (comme dans l'urne ci-dessus) et que A se produit

7 fois sur 9 après que A se soit produit, alors la succession B puis A se produit les $\frac{7}{9}$ de $\frac{3}{10}$ du temps, soit les $\frac{7}{9} \times \frac{3}{10}$ du temps.
La définition 5.1 de la probabilité d'un événement implique que si plusieurs chemins réalisent un événement particulier, alors la probabilité de cet événement est la somme des probabilités de ces chemins, ceux-ci étant naturellement incompatibles. La formule des « probabilités totales » (voir plus loin) formalise cette propriété lorsque la réalisation de l'événement dépend d'une partition de Ω.

EXEMPLE 86 – En reprenant l'exemple de notre urne contenant 3 boules blanches et 7 noires. On tire successivement 3 boules et on envisage les deux scénarios (avec ou sans remise). Notons X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches obtenues et déterminons la loi de X.
➟ $X = 0$ est l'événement « obtenir 3 boules noires » qui n'est réalisé que sur un chemin.
Sans remise, $P(X = 0) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{210}{720} = \frac{7}{24} \approx 0,292$.
Avec remise, $P(X = 0) = \left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{343}{1000} = 0,343$.
➟ $X = 1$ est l'événement « obtenir 2 boules noires et 1 blanche ».
Cet événement est réalisé par 3 chemins, selon le rang d'apparition de la boule blanche.
Sans remise, $P(X = 1) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = 3 \times \frac{126}{720} = \frac{21}{40} = 0,525$.
Avec remise, $P(X = 1) = 3 \times \frac{3}{10} \times \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{441}{1000} = 0,441$.
➟ De même, on montre que, sans remise $P(X = 2) = \frac{3\times 42}{720} = \frac{7}{40} = 0,175$ et, avec remise $P(X = 2) = \frac{189}{1000} = 0,189$.
➟ Sans remise $P(X = 3) = \frac{6}{720} = \frac{1}{120} \approx 0,008$ et, avec remise $P(X = 3) = \frac{27}{1000} = 0,027$.
Vérifions ces résultats et calculons les paramètres de X pour ces deux scénarios :

Sans remise
Vérification : $\sum_{k=0}^{3} P(X = k) = \frac{7}{24} + \frac{21}{40} + \frac{7}{40} + \frac{1}{120} = \frac{35+63+21+1}{120} = 1$.
$E(X) = 0 \times \frac{7}{24} + 1 \times \frac{21}{40} + 2 \times \frac{7}{40} + 3 \times \frac{1}{120} = \frac{63+42+3}{120} = \frac{108}{120} = \frac{9}{10} = 0,9$.
$E(X^2) = 0 \times \frac{7}{24} + 1 \times \frac{21}{40} + 4 \times \frac{7}{40} + 9 \times \frac{1}{120} = \frac{63+84+9}{120} = \frac{156}{120} = \frac{13}{10} = 1,3$.
D'où $V(X) = E(X^2) - E(X^2) = 1,3 - 0,9^2 = 0,49$ et $\sigma(X) = \sqrt{0,49} = 0,7$.

Avec remise
Vérification : $\sum_{k=0}^{3} P(X = k) = \frac{343+441+189+27}{1000} = 1$.
$E(X) = \frac{0\times 373+1\times 441+2\times 189+3\times 27}{1000} = \frac{900}{1000} = 0,9$.
$E(X^2) = \frac{0\times 373+1\times 441+4\times 189+9\times 27}{1000} = \frac{1440}{1000} = 1,44$.
D'où $V(X) = E(X^2) - E(X^2) = 1,44 - 0,9^2 = 0,63$ et $\sigma(X) = \sqrt{0,63} \approx 0,79$.

b. Probabilités conditionnelles

Un tableau statistique donne la répartition en pourcentages d'une population. Lorsqu'on choisit au hasard un individu de cette population, le pourcentage d'une catégorie se traduit en probabilité que l'individu ait la caractéristique de cette catégorie.
Prenons la répartition des français selon le groupe sanguin (O, A, B et AB) et le rhésus (Rh^+ et Rh^-) ainsi qu'elle apparait dans ce tableau de l'Institut National de Transmission Sanguine :

Groupe	A	B	AB	O	Total
Rh^+	$38,2\%$	$7,7\%$	$2,5\%$	$36,5\%$	$84,9\%$
Rh^-	$6,8\%$	$1,4\%$	$0,4\%$	$6,5\%$	$15,1\%$
Total	45%	$9,1\%$	$2,9\%$	43%	100%

Lorsqu'on choisit au hasard un individu dans cette population, la probabilité qu'il soit du groupe A se lit dans le tableau : c'est la fréquence des individus du groupe A dans la population. Ainsi $P(A) = \frac{38,2+6,8}{100} = \frac{45}{100}$.
De même, la probabilité qu'il soit du rhésus + est $P(Rh^+) = \frac{38,2+7,7+2,5+36,5}{100} = \frac{84,9}{100}$.
La probabilité qu'il soit du rhésus + sachant qu'il est du groupe A est $P(Rh^+/A) = \frac{38,2}{45} \approx \frac{84,9}{100}$.
Pour déterminer la probabilité de cet événement, on cherche la part de fréquence du rhésus + dans la

population du groupe A. En terme de probabilité, on détermine $P(Rh^+/A)$ en effectuant $\frac{P(Rh^+\cap A)}{P(A)}$.
De la même façon, on détermine la probabilité qu'il soit du groupe A sachant qu'il a un rhésus $+$:
$P(A/Rh^+) = \frac{P(Rh^+\cap A)}{P(Rh^+)} = \frac{38{,}2}{84{,}9} \approx \frac{45}{100}$.

Définition 5.6 Soient A et B deux événements, B n'étant pas impossible ($P(B) \neq 0$).
La probabilité de réaliser A sachant que B a été réalisé, notée $P(A/B)$ ou $P_B(A)$, vaut

$$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

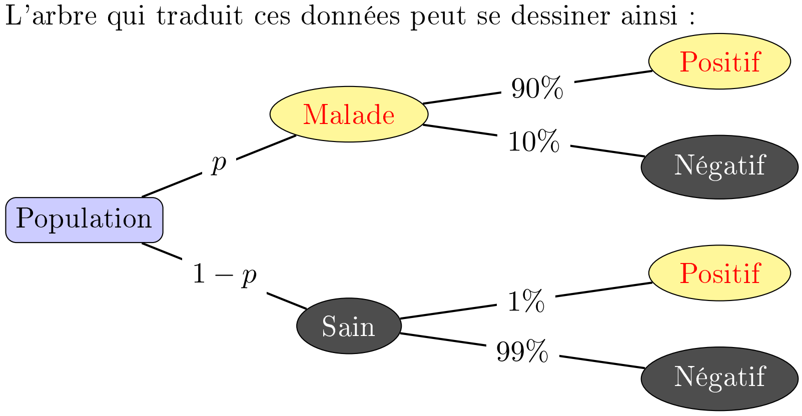
Remarques :

- Cette définition, écrite sous la forme $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$, explique le principe multiplicatif qui est appliqué aux chemins d'un arbre de probabilités. Ce principe s'applique à des arbres de plus grande ampleur :
$P(A \cap B \cap C) = P(A/B \cap C) \times P(B \cap C) = P(A/B \cap C) \times P(B/C) \times P(C)$.
- Si $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$ (B est réalisé en 1$^{\text{er}}$ puis A), on peut écrire également $P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A)$ (A est réalisé en 1$^{\text{er}}$ puis B). En fonction des situations, on utilisera l'une ou l'autre de ces deux formes.
- Les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, autrement dit si $P(A/B) = P(A)$ (que B soit ou ne soit pas réalisé n'influe pas sur la réalisation de A). Bien sûr, dans ce cas, on a aussi $P(B/A) = P(B)$ (que A soit ou ne soit pas réalisé n'influe pas sur la réalisation de B). Dans l'exemple des groupes sanguins ci-dessus, on a
$P(Rh^+/A) = P(Rh^+)$ et également $P(A/Rh^+) = P(A)$ signe de la parfaite indépendance du groupe A et du rhésus $+$.

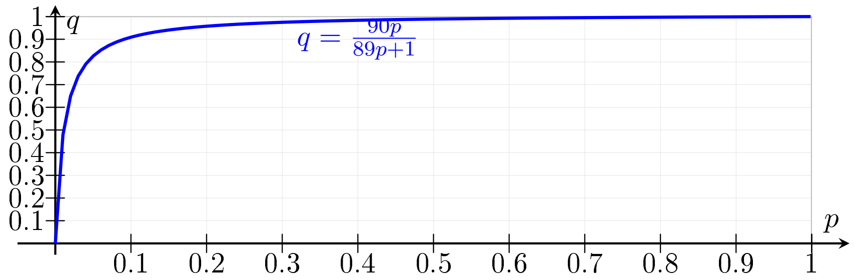
Exemple 87 – Les tests de dépistage d'une maladie ne sont jamais infaillibles. On veut déterminer la probabilité qu'un individu soit malade sachant que le résultat du test est positif. Supposons que :

- La probabilité qu'un individu de la population soit malade (MAL) soit de $P(MAL) = p$
- La probabilité qu'un individu malade ait un test positif (POS) soit de $P_{MAL}(POS) = 0,9$
- La probabilité qu'un individu sain ($\overline{MAL}$) ait un test négatif ($\overline{POS}$) soit de
$P_{\overline{MAL}}(\overline{POS}) = 0,99$

L'arbre qui traduit ces données peut se dessiner ainsi :



La probabilité que le test soit positif est
$P(POS) = P_{MAL}(POS) \times P(MAL) + P_{\overline{MAL}}(POS) \times P(\overline{MAL}) = 0,9p + 0,01(1-p) = 0,89p + 0,01$
La probabilité qu'un individu soit malade sachant que le résultat du test est positif est
$P(MAL/POS) = \frac{P(MAL\cap POS)}{P(POS)} = \frac{0{,}9p}{0{,}89p+0{,}01} = \frac{90p}{89p+1}$
En faisant varier la probabilité p entre 0 et 1, on obtient la courbe suivante pour $q = P(MAL/POS)$:



On constate sur cet exemple, qu'avec ces caractéristiques, un test n'a de signification que si la prévalence p de la maladie est assez importante : si $p < 17,4\%$, considérer qu'un individus ayant un test positif est malade conduit à une erreur de diagnostic (faux positif) dans plus de 5% des cas et ce risque d'erreur augmente quand p diminue. Nous verrons plus loin l'autre type d'erreur de diagnostic.

Propriété 5.5 (Probabilités totales) Soit $B_1, B_2, \dots, B_n$ une partition de Ω
A étant un événement quelconque, $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$
Dans cette égalité, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $P(A \cap B_i) = P_{B_i}(A) \times P(B_i)$.

Démonstration Cette propriété découle de ce que les événements $\{A \cap B_i\}$ forment une partition de l'événement A (ce sont des événements disjoints dont la réunion forme A) :

$$i \neq j \Longrightarrow \{A \cap B_i\} \cap \{A \cap B_i\} = \emptyset \text{ et } \bigcup_{i=1}^{n} \{A \cap B_i\} = A$$

La définition 5.1 est appliquée à un événement A dont la réalisation passe par une des modalités de la partition $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

Exemple 88 (Problème du tricheur) – Un individu est choisi au hasard dans une population possédant la proportion $p \in]0;1[$ de tricheurs. On lui propose de tirer une carte d'un jeu de 52 cartes sachant que, si cet individu est un tricheur, il est certain de tirer un as.
Quelle est la probabilité que l'individu retourne un as ?
On note T l'événement « l'individu est un tricheur » et A l'événement « l'individu tire un as ».
D'après la formule des probabilités totales, T et $\overline{T}$ formant une partition de Ω, on a :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap T) + P(A \cap \overline{T}) = P_T(A) \times P(T) + P_{\overline{T}}(A) \times P(\overline{T}) \\ &= 1 \times p + \frac{4}{52} \times (1-p) = p + \frac{1-p}{13} = \frac{1+12p}{13} \end{aligned}$$

Quelle est la probabilité que l'individu soit un tricheur sachant qu'il a tiré un as ?
Comme dans l'exemple 87 précédent, on s'interroge sur une probabilité conditionnelle qui n'est pas directement donnée par l'énoncé. En remarquant que $P(T \cap A) = P_T(A) \times P(T) = P_A(T) \times P(A)$, on en déduit que $P_A(T) = \frac{P_T(A) \times P(T)}{P(A)}$ et donc $P_A(T) = \frac{1 \times p}{\frac{1+12p}{13}} = \frac{13p}{1+12p}$.
Cette remarque se généralise dans la formule de Bayes.

Propriété 5.6 (Formule de Bayes) Soit $B_1, B_2, \dots, B_n$ une partition de Ω
A étant un événement quelconque, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \times P(B_i)}{P_{B_1}(A) \times P(B_1) + \cdots + P_{B_n}(A) \times P(B_n)}$

Exemple

Dans le problème du tricheur, calculons la probabilité que l'individu soit un tricheur sachant qu'il a tiré deux as de suite. En notant AA l'événement « l'individu a tiré deux as de suite », on a $P_{AA}(T) = \frac{P_T(AA)\times P(T)}{P_T(AA)\times P(T)+P_{\overline{T}}(AA)\times P(\overline{T})}$ et donc, ici, $P_{AA}(T) = \frac{1\times p}{1\times p+\frac{1}{13^2}\times(1-p)} = \frac{p}{p+\frac{1-p}{169}} = \frac{169p}{168p+1}$.

Dans le problème du dépistage, calculons la probabilité d'un faux diagnostic – événement pouvant être réalisé de deux façons :

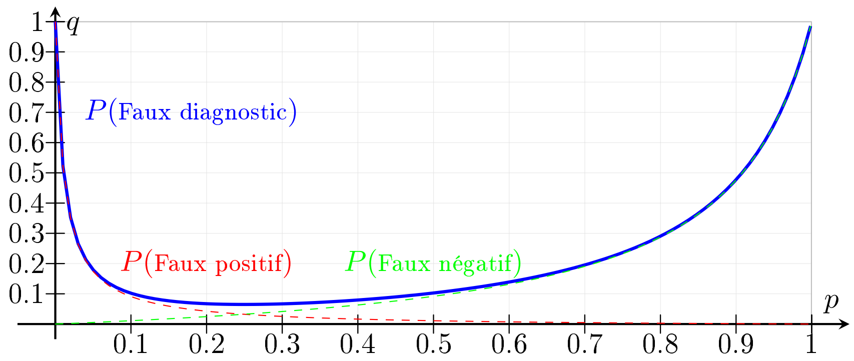
- Faux négatif : un individu est malade mais le résultat du test est négatif
- Faux positif : un individu soit sain mais le résultat du test est positif

Faux négatif :$P_{\overline{POS}}(MAL) = \frac{P_{MAL}(\overline{POS})\times P(MAL)}{P_{MAL}(\overline{POS})\times P(MAL)+P_{\overline{MAL}}(\overline{POS})\times P(\overline{MAL})} = \frac{10p}{99-89p}$

Faux positif :$P_{POS}(\overline{MAL}) = \frac{P_{\overline{MAL}}(POS)\times P(\overline{MAL})}{P_{\overline{MAL}}(POS)\times P(\overline{MAL})+P_{MAL}(POS)\times P(MAL)} = \frac{1-p}{1+89p}$

Ainsi la probabilité d'un faux diagnostic est
$P_{POS}(\overline{MAL}) + P_{\overline{POS}}(MAL) = \frac{10p}{99-89p} + \frac{1-p}{1-89p} = \frac{979p^2-178p+99}{-7921p^2+8722p+99}$

Cette dernière expression cache une réalité que montre la courbe ci-dessous.



3. Simulations

a. Fluctuation d'échantillonnage

PROPRIÉTÉ 5.7 (INTERVALLE DE FLUCTUATION) On considère une population sur laquelle on étudie la proportion p d'individus ayant un caractère C avec $p \in [0,2;0,8]$ et dans laquelle on prélève un échantillon de taille $n \geqslant 25$.
Dans ces conditions, la fréquence f des individus de l'échantillon ayant le caractère C fluctue, dans 95% des cas, à l'intérieur de l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, dit intervalle de fluctuation.

Remarques :

Cela signifie qu'en choisissant un échantillon de taille n au hasard, la probabilité de l'événement « $f \in \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ » est supérieure ou égale à $0,95$ sous réserve de satisfaire les conditions sur n et p.

Cette propriété ayant été étudiée en classe de seconde, nous en resterons là pour le rappel et renvoyons le lecteur désirant en savoir plus au cours de seconde.

b. Simulation

Une expérience aléatoire amène un « succès » avec une probabilité égale à p, nous voulons simuler avec un programme la constitution de N échantillons de taille n pour chacun desquels on déterminera la valeur k prise par la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès. Le programme doit pouvoir estimer les probabilités $P(X=K)$ et $P(X \leqslant K)$ ainsi que les paramètres de la loi de X.

Pour ne pas rester dans le vague, supposons que l'on constitue des sachets de 100 bonbons `M&M's` à partir d'un mélange contenant des bonbons des 6 couleurs en proportion égale ($f = \frac{1}{6}$ pour chaque couleur). On s'intéresse alors à la fréquence d'une couleur – disons la couleur orange – dans un sachet. Commençons par la fonction `echantillon` à laquelle s'ajoutera ensuite les fonctions `loi` et `parametre`.

Programme P0 : échantillon

Le programme génère un échantillon de n individus dont certains sont des succès (notés S) et les autres des échecs (notés E). On affiche ici l'échantillon ainsi que la valeur prise par la variable aléatoire X comptant le nombre de succès.

```
from random import random

def echantillon(n,p):
    k=0
    for i in range(n):
        if random()<p:
            k+=1
            print("S", end=" ")
        else : print("E", end=" ")
    return k

n,p=16,1/6
print("Génération d'un échantillon de {} individus :".format(n))
print(" -> Nombre de succès={}".format(echantillon(n,p)))
```

```
Génération d'un échantillon de 16 individus :
E E E E E E E E E E S E S E S S  -> Nombre de succès=4
```

Programme P1 : loi de probabilités

Une valeur particulière de K ($0 \leqslant K \leqslant N$) étant donnée, le programme comptabilise :

- le nombre C_1 d'échantillons dans lequel $X = K$
- le nombre C_2 d'échantillons dans lequel $X \leqslant K$

Le programme affiche alors les valeurs empiriques de $P(X = K) = \frac{C_1}{N}$ et $P(X \leqslant K) = \frac{C_1}{N}$.

Programme P2 : paramètres de la loi

Le programme détermine les paramètres (espérance, variance, écart-type) de la variable aléatoire X :

- l'espérance est calculée comme la moyenne des valeurs de k
- la variance est calculée avec la formule de König-Huygens comme la différence entre la moyenne des k^2 et le carré de la moyenne des k

P1

```
from random import random

def echantillon(n,p):
    k=0
    for i in range(n):
        if random()<p:k+=1
    return k

def loi(N,n,p,K):
    C1,C2=0,0
    for i in range(N):
        X=echantillon(n,p)
        if X==K:C1+=1
        if X<=K:C2+=1
    return C1/N,C2/N

N,n,p,K=100000,100,1/6,15
f1,f2=loi(N,n,p,K)
print("P(X={})={}".format(K,f1))
print("P(X<={})={}".format(K,f2))
```

```
P(X=5)=0.00021    P(X=10)=0.02224
P(X<=5)=0.00032   P(X<=10)=0.04388
```

P2

```
from random import random
from math import sqrt
def echantillon(n,p):
    k=0
    for i in range(n):
        if random()<p:k+=1
    return k

def parametre(N,n,p):
    X1,X2=0,0
    for i in range(N):
        X=echantillon(n,p)
        X1+=X
        X2+=X**2
    return X1/N,X2/N-(X1/N)**2

N,n,p=100000,100,1/6
E,V=parametre(N,n,p)
E,V,S=round(E,3),round(V,3),round(sqrt(V),3)
print("E(X)={},V(X)={},sigma(X)={}".format(E,V,S))
```

```
E(X)=16.68,V(X)=13.817,sigma(X)=3.717
```

L'intérêt de ce programme est de donner une estimation empirique des caractéristiques de cette loi de probabilité. On a obtenu ici, en simulant 100 000 échantillons, que l'espérance et l'écart-type valent approximativement $E(X) = 16,68$ et $\sigma(X) = 3,717$.

On étudie en terminale cette loi de probabilité (nommée loi Binomiale de paramètres 100 et $\frac{1}{6}$ et notée $\mathscr{B}(100; \frac{1}{6})$) dont les paramètres sont $E(X) = \frac{100}{6} \approx 16,67$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{500}{36}} \approx 3,727$.
L'intervalle de fluctuation prévu par la propriété 5.7 :
$IF = \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = \left[\frac{1}{15}; \frac{4}{15}\right] \approx [0,0667; 0,2667]$.
Cela signifie que dans 95% des cas, il doit y avoir entre 6,67% et 26,67% de bonbons d'une certaine couleur dans un sachet de 100 bonbons lorsque la constitutions des sachets est faite aléatoirement, chaque couleur ayant la probabilité $\frac{1}{6}$ d'être choisie.

Le coin du chercheur
Les deux problèmes qui suivent sont assez flous, disons qu'ils nécessitent de faire des hypothèses.
❊ Pile ou face
Ève joue avec Adam à pile ou face avec cette condition que si Adam amène Pile au 1er coup, il donnera 1 euro à Ève ; s'il n'amène Pile qu'au 2e coup, il lui donnera 2 euros ; s'il n'amène Pile qu'au 3e coup, 4 euros ; au 4e, 8 euros ; au 5e, 16 euros ; et ainsi de suite jusqu'à ce que Pile vienne.
On demande l'espérance de Ève, ou, ce qui est la même chose, ce que Adam doit demander à Ève avant que le jeu commence, pour jouer avec elle à jeu égal.
❊ Tricheur
Le jeu consiste à tirer successivement des cartes d'un jeu de 32 cartes, le premier qui tire un as à gagné.
Je joue avec un inconnu qui retourne un roi au premier tirage. Quelle est la probabilité qu'il soit un tricheur ?

MÉTHODE (FICHE DE RÉVISION)

Définitions et propriétés à connaître par ♥

➲ Définitions

Équiprobabilité	Les éventualités ont toutes la même probabilité
	S'il y a n éventualités, alors $\forall i, j \in \Omega, P(\omega_i) = P(\omega_j) = p = \frac{1}{n}$
Variable aléatoire	Á chaque issue ω_i de Ω est associé un réel $X(\omega_i) = k$
Loi de proba. de X	Ensemble des probabilités $P(X = k)$
Espérance de X	$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
Variance de X	$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2$
Écart-type de X	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
P. conditionnelle	$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (prononcer A/B : A sachant B)
Indépendance	A indép. de B : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Longleftrightarrow P(A/B) = P(A)$
Partition de Ω	$B_1, \ldots, B_n$ sont des événements disjoints dont la réunion forme Ω

➲ Propriétés

Réunion :« ou »	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Intersection :« et »	Si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$
	Si $B = \overline{A}$ est le contraire de A, $P(A \cup B) = 1$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Équiprobabilité	En cas d'équiprobabilité, $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$
Variable $aX + b$	$E(aX + b) = aE(X) + b$;
	$V(aX + b) = a^2 V(X)$; $\sigma(aX + b) = \|a\|\sigma(X)$
Calcul de $V(X)$	$V(X) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2$
König-Huygens	$E((X - a)^2) = V(X) + (E(X) - a)^2$
Arbre de proba.	Proba. des branches partant d'un même nœud : leur somme = 1
	Proba. d'un « chemin » : produit des proba. de ses branches
	Proba. de A : somme des probabilités des chemins réalisant A
P. conditionnelle	$P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$
Probabilités totales	$B_1, \ldots, B_n$ partition de $\Omega \Longrightarrow P(A) = P(A \cap B_1) + \cdots + P(A \cap B_n)$
Formule de Bayes	$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \times P(B_i)}{P_{B_1}(A) \times P(B_1) + \cdots + P_{B_n}(A) \times P(B_n)}$