Université Joseph Fourier **Année 2013-2014**
UFR IM2AG **Agrégation interne de mathématiques**

Planche d'exercices "Rappels sur les intégrales"

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue non nulle telle que $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)^2\,dx$.
Montrer que $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.
Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $| \int_a^b f(t)dt] = \int_a^b |f(t)|dt$.
Montrer que f est de signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 4. Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}+$ continues telles que $fg \geq 1$. Montrer :

$$\int_0^1 f \int_0^1 g \geq 1.$$

Exercice 5. Montrer que la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{n}{n^2+k^2}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 6. Soient $0 < a < b$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. Déterminer :

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Exercice 7. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et convexe. Démontrer :

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))dt.$$

Exercice 8. Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2yf(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt.$$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, décroissante, de limite nulle en $+\infty$.On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin t dt$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.

2. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\sin t dt$ est convergente.

3. On suppose qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x) \geq 1/x$ pour $x \geq x_0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} |f(t)\sin t|dt$ diverge.

Exercice 10.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}dt$ converge.

2. Montrer, pour tout entier $n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2-1}dt.$

3. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2 \ln t}{t^2-1}$ est bornée sur $]0,1[$ et en déduire l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}dt.$$

Exercice 11.

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t\sin t}dt$ diverge.

2. Montrer que les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt$ convergent.

3. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ diverge.

Exercice 12. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une focntion continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $[a, +\infty[$.
1. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors cette limite est nulle.
2. Montrer que si f est uniformément continue, alors elle tend vers 0 en $+\infty$.
3. Qu'en est-il si f est seulement supposée continue ?
4. Montrer que si f est continue, alors il existe une suite croissante $(x_n)_n$, de limite $+\infty$, telle que la suite $(f(x_n))_n$ converge vers 0.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, continue et décroissante, telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

Exercice 14. Soit f une fonction continue de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer : $\forall 0 \leq a \leq b$, $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \sqrt{b-a}\left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2}.$

2. En déduire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x f(t)dt = 0.$

Exercice 15.

1. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer F'.
3. Calculer $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
4. Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt + \ln x$ est bornée sur $]0,1[$. (On pourra écrire $\ln x$ sous forme intégrale) En déduire un équivalent de F en 0.
5. Montrer : $\forall x > 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt \leq \frac{1}{x}F(x).$
6. En déduire : $F(x) \sim \frac{e^{-x}}{x}$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 16. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}dt.$

Montrer que : $\forall x \geq 0, g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1. On suppose $f(0)=0$ et on pose, pour $x\neq 0$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. Montrer que pour $x\neq 0$, $g(x)=\displaystyle\int_0^1 f'(tx)dt$ et en déduire que g se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Généraliser en supposant $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{n-1)}(0)=0$.

Exercice 18. On pose, pour $a>0$, $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-at^2}dt$.
1. Monterr que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$F'(x)=-\frac{x}{2a}F(x).$$

2. En déduire :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-x^2/4a}.$$

Exercice 19.
1 Donner l'ensemble de définition de la fonction Γ définie par $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
2. Montrer : $\forall x>0,\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Donner un équivalent de Γ en 0.

Exercice 20. Soit $f: x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{-x}}{1+t}dt$.
1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}dt=0$.
3. Montrer que $1-x\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x}}{1+t}dt = x\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x-1}}{1+t}dt$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} 1-x\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x}}{1+t}dt$.
4. Conclure.

Exercice 21. Soit $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application continue. pour tout $x>0$ on note

$$G(x)=\int_0^1 \frac{xg(t)}{x^2+t^2}dt.$$

Montrer que G est bien définie et calculer $\lim_{x\to 0} G(x)$.