PROJET CORRIGE

19 mars 2010

Partie I : première approche de la constante d'Euler

1 Pour tout $t \in [p, p+1]$, $\frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{p}$, donc en intégrant sur $[p, p+1]$:

$$\frac{1}{p+1} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{p}$$

et donc : $0 \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$. CQFD.
2 On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant S_n \leqslant \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 \qquad (1)$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est donc croissante (série à termes positifs) et majorée par 1, donc convergente, de limite γ. En passant à la limite dans l'inégalité (1), on conclut que $\gamma \in [0, 1]$.
Remarque : on vient donc de justifier l'existence d'un réel γ pour lequel :

$$H_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n+1) + \gamma + o(1)$$

3 On effectue le changement de variable $t = u + p$:

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{du}{u+p} = \int_0^1 \frac{1}{p} du - \int_0^1 \frac{du}{u+p} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{u+p} \right) du = \int_0^1 \frac{u}{p(u+p)} du = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p} du \end{aligned}$$

CQFD.
Ensuite, pour tout $u \in [0, 1]$ et pour tout entier $p \geqslant 2$:

$$\frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{p+u} \leqslant \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{p} \frac{u}{p+1} \leqslant \frac{1}{p} \frac{u}{p+u} \leqslant \frac{u}{p^2}$$

et par intégration sur $[0, 1]$:

$$\begin{gathered} \frac{1}{p(p+1)} \int_0^1 u du \leqslant \int_0^1 \frac{1}{p} \frac{u}{p+1} du \leqslant \int_0^1 \frac{u}{p^2} du \Rightarrow \\ \frac{1}{p(p+1)} \frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{p} \frac{u}{p+1} du \leqslant \frac{1}{2p^2} \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{p(p+1)} \frac{1}{2} \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2p^2} < \frac{1}{2p(p-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) \end{gathered}$$

CQFD.

4 Soient m et n deux entiers tels que $m > n \geqslant 1$. On a alors : $S_m - S_n = \sum\limits_{p=n+1}^{m} a_p$, donc :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{m}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant S_m - S_n \leqslant \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{m}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)$$

En faisant tendre m vers $+\infty$ dans la double inégalité précédente, on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*,\ \frac{1}{2n+2} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}$$

5 On en déduit également que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leqslant \frac{1}{2n} - \gamma + S_n \leqslant \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n(n+1)}$$

Donc : $\frac{1}{2n} - \gamma + S_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, ou encore $\frac{1}{2n} - \gamma + H_n - \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Conclusion :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n+1) + \gamma - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Enfin : $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

6 Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $T_n = S_n + \frac{1}{2n+2}$. En reprenant la question **4**, on constate que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{1}{2n^2}$$

7 Pour être certain que T_n soit une valeur approchée de γ à 10^{-2} près, il suffit de choisir n tel que $2n^2 \geqslant 10^2$, ce qui équivaut à $n \geqslant 8$. On calcule alors T_8. On rouve $T_8 \simeq 0.576$.

Partie II : deux représentations intégrales de γ

1a) Les fonctions $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$ et $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$. De plus :

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t} \quad \text{et} \quad g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(e^{-t})$$

ce qui démontre l'intégrabilité de ces deux fonctions sur $[1, +\infty[$.

b) Soit $h : t \mapsto \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}$. Par utilisation du développement limité en 0 de exp :

$$h(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{t - 1 + 1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t(1-e^{-t})} \underset{t\to 0}{=} \frac{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t(1-e^{-t})}$$

Or $t(1-e^{-t}) \underset{t\to 0}{\sim} t^2$, donc $h(t) \underset{t\to 0}{\to} \frac{1}{2}$.

Conclusion : h est prolongeable par continuité en 0, par conséquent elle est intégrable sur $]0, 1]$.

c) Il résulte de la question précédente que h est intégrable sur $]0, 1]$, et sur $[1, +\infty[$ d'après a) comme différence de fonctions à intégrales convergentes. Elle est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

2 Soient x et y deux réels strictement positifs.

a)

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt = \int_x^y \frac{e^{-at}}{t}\,dt - \int_x^y \frac{e^{-bt}}{t}\,dt$$

On effectue alors le changement de variable $u = at$ dans la première intégrale et $u = bt$ dans la seconde. On obtient ainsi :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u} du$$

puis, par utilisation de la relation de Chasles :

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_{by}^{ay} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u} du$$

b) Pour tout $z > 0$:

$$e^{-bx} \int_{az}^{bz} \frac{du}{u} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{e^{-u}}{u} du \leqslant e^{-az} \int_{az}^{bz} \frac{du}{u}$$

d'où :

$$\forall\ z > 0,\ e^{-bz} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{e^{-u}}{u} du \leqslant e^{-az} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

c) On en déduit (théorème d'encadrement) que $\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \to 0^+}{\to} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
De même, on procéde par encadrement en supposant toujours $a \leqslant b$:

$$\forall\ y > 0,\ 0 \leqslant \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u} du \leqslant \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{ay} du < \frac{1}{ay} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \frac{1}{ay}$$

donc $\int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{y \to +\infty}{\to} 0$.
Conclusion : (en supposant $a \leqslant b$), la fonction $F : t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est définie, continue, positive sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \underset{(x,y) \to (0,+\infty)}{\to} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

donc F estintégrable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

3a) Soit $t > 0$. La série (géométrique) de terme général e^{-nt} converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \frac{1}{1 - e^{-t}}$$

On en déduit (par combinaison linéaire) que la série de terme général $\left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t}\right)$ converge et que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t}\right) &= \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} - e^{-t} \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} \\ &= \frac{1 - e^{-t}}{t} \frac{1}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{t}\end{aligned}$$

b) On déduit de ce qi précède que pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}e^{-t}\left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) &= e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} - e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}\right)\end{aligned}$$

c) Il s'agit par exemple d'une inégalité provenant du fait que exp est une fonction convexe sur $\mathbf{R}$, donc pour tout

$x \in \mathbf{R},\ \exp(x) \geqslant 1 + x$, d'où le résultat cherché avec $x = -t$.

d) On considère, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction

$$u_n :]0, +\infty[\to \mathbf{R},\ t \mapsto e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t} = e^{-(n+1)t}\left(1 - \frac{1 - e^{-t}}{t}\right)$$

Les fonctions ainsi définies sont continues sur $]0, +\infty[$, positives (voir question **3**) et intégrables sur $]0, +\infty[$ car c'est le cas de $t \mapsto e^{-(n+1)t}$ et de $t \mapsto \dfrac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}$ (question **2**). De plus :

$$\int_0^{+\infty} u_n(t)dt = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

On obtient ainsi le terme général d'une série convergente, de somme γ car pour N entier naturel :

$$\sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right) = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1} - \ln(N+2) = S_{N+1}$$

Enfin la série de fonctions converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme S estdonée par :

$$S(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)$$

Il s'agit donc d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$. Le théorème admis en début de la Partie II pemet de conclure que S est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right) = \gamma$$

4 Soit $y > 0$.

a)

$$\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt = \left[\ln(1-e^{-t})\right]_{t=y}^{t=+\infty} = -\ln(1-e^{-y})$$

On en déduit :

$$\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt + \ln y = \ln\left(\frac{y}{1-e^{-y}}\right) \underset{y\to 0^+}{\to} 0$$

car $1 - e^{-y} \underset{y\to 0}{\sim} y$.

b) On reprend la conclusion de la question **II 4d)** :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt = \int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt + \int_y^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt$$

D'où :

$$\gamma + \int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt = \int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt + \int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt$$

c) On en déduit alors :

$$\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt = \int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt + \left(\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt + \ln y\right)$$

Or, en utilisant le 5a) et la convergence en 0 de l'intégrale $\int_0^y e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt$:

$$\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt + \ln y \underset{y\to 0^+}{\to} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt \underset{y\to 0^+}{\to} 0$$

d'où la conclusion demandée.

d) Soit G la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $G(t)=e^{-t}\ln t$. Cette fonction est continue sur $]0,+\infty[$ et :

$$|G(t)| \underset{t\to 0}{\sim} |\ln t| \quad \text{et} \quad |G(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t/2}\right)$$

ce qui démontre l'intégrabilité de G sur $]0,+\infty[$. De plus :

$$\int_{]0,+\infty[} e^{-t}\ln t dt = \lim_{y\to 0^+}\int_y^{+\infty} e^{-t}\ln t dt$$

et en procédant à une intégration par parties car les fonctions sont C_1 sur l'intervalle considéré :

$$\forall x,\ y>0,\ \int_y^x e^{-t}\ln t dt = \left[-e^{-t}\ln t\right]_y^x + \int_y^x \frac{e^{-t}}{t}dt = e^{-y}\ln y - e^{-x}\ln x + \int_y^x \frac{e^{-t}}{t}dt$$

En faisant tendre x vers plus l'inifini, on déduit :

$$\int_y^{+\infty} e^{-t}\ln t dt = e^{-y}\ln y + \int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$$

Ce qui démontre le résultat demandé.

e) Or on a démontré que $\gamma+\ln y+\int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt \underset{y\to 0^+}{=} o(1)$, par conséquent :

$$\left(e^{-y}-1\right)\ln y - \gamma + o(1) = e^{-y}\ln y + \int_y^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt = \int_y^{+\infty} e^{-t}\ln t dt$$

Enfin : $(e^{-y}-1)\ln y \underset{y\to 0}{\sim} -y\ln y$ et $\lim\limits_{y\to 0^+} y\ln y = 0$, donc :

$$\int_{]0,+\infty[} e^{-t}\ln t dt = -\gamma$$

Partie III : un calcul approché de γ

1a) Calculs faciles avec des primitives, on trouve :

$$\int_{]0,1]}\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)dt = \int_{[1,+\infty[}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt = -\ln(1-e^{-1})$$

b) On reprend la conclusion de la question **II 4c)** :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt = \int_{]0,1]} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt\\
&= \int_{]0,1]} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt + \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt - \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\\
&= \int_{]0,1]} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt + \int_{]0,1]}\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)dt - \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\\
&= \int_{]0,1]}\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)dt - \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt
\end{aligned}$$

2a) On vérifie aisément (par exemple par utilisation de la règle de d'Alembert) que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{H_k}{k!}x^k$ est égal à $+\infty$, d'où la réponse à la question posée.

b) Par dérivation terme à terme :

$$\forall\, x \in \mathbf{R},\ F^{'}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1}}{k!} x^k$$

d'où (si $x \neq 0$) :

$$\forall\, x \in \mathbf{R},\ F^{'}(x) - F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{H_{k+1}}{k!} - \frac{H_k}{k!} \right) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$
$$= \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{x}(e^x - 1)$$

c) Il suffit de résoudre, sur $\mathbf{R}_+^*$, l'équation différentielle satisfaite par F :

$$\forall\, x \in \mathbf{R},\ F^{'}(x) - F(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1) \Leftrightarrow$$
$$\forall\, x \in \mathbf{R},\ e^{-x}(F^{'}(x) - F(x)) = \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) \Leftrightarrow$$
$$\forall\, x \in \mathbf{R},\ \frac{d\left[e^{-x} F(x)\right]}{dx} = \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) \qquad (1)$$

Or $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}(1 - e^{-x})$ est prolongeable par continuité en 0, donc $x \mapsto \int_{]0,x]} \frac{1-e^{-t}}{t} dt$ est une primitive de φ, donc (1) équivaut à :

$$\exists\, C \in \mathbf{R}, \forall\, x \in \mathbf{R},\ F(x) = e^x \int_{]0,x]} \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + C$$

De plus $F(0) = 0$ (car $H_0 = 0$), donc $C = 0$. CQFD.

3 On considère la fonction

$$G : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R},\ x \mapsto e^{-x} F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln x$$

Cette fonction est dérivable et pour tout $x > 0$:

$$G^{'}(x) = \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) + \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

G est donc constante sur $\mathbf{R}_+^*$ et d'après la question **II 5c) :** $-\ln x - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{x \to 0^+}{\to} \gamma$ et de plus $e^{-x} F(x) \underset{x \to 0^+}{\to} 0$ par continuité de F en 0.

Conclusion $G = \gamma$. CQFD.

4 Soient a et n deux entiers avec $n > 0$ et $a \geqslant 2$. On commence par effectuer un changement d'indice sur la somme de la série proposée :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{H_{an+j+1}}{(an+j+1)!} n^{an+j+1} = n^{an+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{H_{an+j+1}}{(an+j+1)!} n^j = \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{H_{an+j+1}(an)!}{(an+j+1)!} n^j$$

Par ailleurs : $H_{an+j+1} \leqslant an + j + 1$ et donc :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{H_{an+j+1}(an)!}{(an+j+1)!} n^j \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{n^j}{(an+j)(an+j-1)\cdots(an+1)} \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{n^j}{(an)^j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^j$$

(On observera que l'on ne manipule que des séries convergentes).

Conclusion :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leqslant \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^j = \frac{n^{an+1}}{(an)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{n^{an+1}}{(an)!} \frac{a}{a-1}$$

Enfin, on utilise une inégalité admise en début de sujet : $(an)! \geqslant \sqrt{2\pi an}\left(\frac{an}{e}\right)^{an}$, donc :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leqslant \frac{a}{a-1} \frac{n^{an+1}}{\sqrt{2\pi an}\left(\frac{an}{e}\right)^{an}} = \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \cdot \left(\frac{e}{a}\right)^{an}$$

5 On reprend la conclusion de la question **III 3** :

$$\forall\ n \geqslant 1,\ \gamma + \ln n - e^{-n} \sum_{k=0}^{+an} \frac{H_k}{k!} n^k = e^{-n} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k - \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

d'où :

$$\forall\ n \geqslant 1,\ \left|\gamma + \ln n - e^{-n} \sum_{k=0}^{+an} \frac{H_k}{k!} n^k\right| \leqslant \frac{ae^{-n}}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \cdot \left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

et $\int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leqslant \frac{1}{n} \int_n^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-n}}{n}$, d'où le résultat demandé.

6 On pose $R(a,n) = \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \cdot \left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Il suffit de choisir au mieux $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$ tels que $R(a,n) \leqslant 10^{-20}$. Après quelques essais on trouve que l'on peut choisir $a = 4$ et $n = 43$ (on a alors $R(a,n) \approx 0.491.10^{-20}$). On trouve alors : $\gamma \approx 0.5772156649015328606 11318$ (En fait il n'est ni utile, ni conseillé de prendre pour a des valeurs très grandes.).

Partie IV : la constante d'Euler comme somme de la série de Vacca

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose :

$$v_p = p \left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} \right)$$

1 a) Il suffit de séparer les termes d'indice pair des termes d'indice impair :

$$\begin{aligned} v_p &= p \left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} \right) = p \left(\sum_{q=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{2q} - \sum_{q=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{2q+1} \right) = p \left(\sigma_{p-1} - \frac{1}{2}\sigma_{p-1} - \sum_{q=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{2q+1} \right) \\ &= p \left(\sigma_{p-1} - \sum_{q=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{2q} - \sum_{q=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{2q+1} \right) \\ &= p\left(\sigma_{p-1} - \sigma_p\right) \end{aligned}$$

b) On en déduit, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{N} v_p = \sum_{p=1}^{N} p\left(\sigma_{p-1} - \sigma_p\right) &= \sum_{p=1}^{N} p\sigma_{p-1} - \sum_{p=1}^{N} p\sigma_p \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} (p+1)\sigma_p - \sum_{p=1}^{N} p\sigma_p \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \sigma_p - N\sigma_N \end{aligned}$$

CQFD.

c)

$$\sum_{p=0}^{N-1} \sigma_p = \sum_{p=0}^{N-1} \left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{2^N-1} \frac{1}{k} = H_{2^N-1} = H_{2^N} - \frac{1}{2^N}$$

d) Par ailleurs, on va évaluer $N\sigma_N$:

$$N\sigma_N = N\left[\sum_{k=2^N}^{2^{N+1}-1}\frac{1}{k}\right] = N\left[H_{2^{N+1}-1} - H_{2^N-1}\right] = N\left[H_{2^{N+1}} - \frac{1}{2^{N+1}} - H_{2^N} + \frac{1}{2^N}\right] = N\left[H_{2^{N+1}} - H_{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}}\right]$$
$$\underset{N\to+\infty}{=} N\left[\ln(2^{N+1}) + \gamma + \frac{1}{2^{N+2}} - \ln(2^N) - \gamma + o\left(\frac{1}{2^N}\right)\right]$$
$$\underset{N\to+\infty}{=} N\left[\ln 2 + \frac{1}{2^{N+2}} + o\left(\frac{1}{2^N}\right)\right]$$

D'où :

$$\sum_{p=1}^{N} v_p \underset{N\to+\infty}{=} H_{2^N} - \frac{1}{2^N} - N\left[\ln 2 + \frac{1}{2^{N+2}} + o\left(\frac{1}{2^N}\right)\right]$$
$$\underset{N\to+\infty}{=} N\ln(2) + \gamma + \frac{1}{2^{N+1}} - N\left[\ln 2 + u\frac{1}{2^{N+2}} + o\left(\frac{1}{2^N}\right)\right]$$
$$\underset{N\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$$

Conclusion : la série de terme général v_p converge et sa somme est γ.

2)

a) On sait que $\log_2(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$, de sorte que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Il suffirait donc, pour pouvoir appliquer le critère spécial des séries alternées, que la suite $(|u_n|)$ soit décroisssante, ou au minimum décroissante à partir d'un certain rang. Malheureusement, quelques essais numériques suffisent à se convaincre que cela est faux. On peut même de façon générale constater le phénomène suivant :

$$\forall\ k \in \mathbf{N}^*,\ |u_{2^{k+1}}| = \frac{k+1}{2^{k+1}} \quad \text{et} \quad |u_{2^{k+1}-1}| = \frac{k}{2^{k+1}-1}$$

et on vérifie que pour tout $k \geqslant 1$, $\ |u_{2^{k+1}}| > |u_{2^{k+1}-1}|$.

On ne peut donc pas appliquer ce critère spécial!!!

b) Tout d'abord, la première inégalité résulte de la majoration des restes partiels dans le critère spécial pour la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k}$.

Ensuite, Soit N un entier naturel et M un entier tel que : $2^{N+1} \leqslant M < 2^{N+2}$. Pour tout entier $k \in \left[2^{N+1}, M\right]$, on a $\log_2(k) \in [N+1, N+2[$, donc $[\log_2(k)] = N+1$ et donc :

$$\left|\sum_{k=2^{N+1}}^{M} u_k\right| = (N+1)\left|\sum_{k=2^{N+1}}^{M}\frac{(-1)^k}{k}\right| \leqslant \frac{N+1}{2^N}$$

CQFD.

c) On considère toujours un entier $M \geqslant 2$ ainsi que l'unique entier naturel N vérifiant : $2^{N+1} \leqslant M < 2^{N+2}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{M}(-1)^n\frac{[\log_2(n)]}{n} &= \sum_{n=1}^{2^{N+1}-1}(-1)^n\frac{[\log_2(n)]}{n}+\sum_{n=2^{N+1}}^{M}(-1)^n\frac{[\log_2(n)]}{n}\\
&=\sum_{p=0}^{N}\left(\sum_{n=2^p}^{2^{p+1}-1}(-1)^n\frac{[\log_2(n)]}{n}\right)+\sum_{n=2^{N+1}}^{M}(-1)^n\frac{[\log_2(n)]}{n}\\
&=\sum_{p=0}^{N}\left[p\left(\sum_{n=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{(-1)^n}{n}\right)\right]+\sum_{n=2^{N+1}}^{M}(-1)^n\frac{[\log_2(n)]}{n}=\sum_{p=0}^{N}v_p+\sum_{n=2^{N+1}}^{M}(-1)^n\frac{[\log_2(n)]}{n}\\
&=\sum_{p=0}^{N}v_p+\mathcal{O}\left(\frac{N}{2^N}\right)
\end{aligned}$$

Or on sait que $\sum\limits_{p=0}^{N}v_p \underset{N\to+\infty}{\to}\gamma$, donc : $\sum\limits_{n=1}^{M}(-1)^n\dfrac{[\log_2(n)]}{n}\underset{M\to+\infty}{\to}\gamma$. CQFD.

3 a) Par le critère spécial pour les séries alternées on a : $|r_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$. Comme la série (géométrique) de terme général $\frac{1}{2^n}$ converge, il en est de même de la série de terme général $|r_n|$. CQFD.

b) On constate que :

$$v_n=n\,(r_n-r_{n+1})$$

D'où, pour tout $N\in\mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}v_n&=\sum_{n=0}^{N}n\,(r_n-r_{n+1})=\sum_{n=1}^{N}n\,(r_n-r_{n+1})=\sum_{n=1}^{N}nr_n-\sum_{n=1}^{N}nr_{n+1}\\
&=\sum_{n=1}^{N}nr_n-\sum_{n=2}^{N+1}(n-1)r_n=r_1-(N+1)r_{N+1}+\sum_{n=2}^{N+1}r_n=\sum_{n=1}^{N}r_n-Nr_{N+1}
\end{aligned}$$

Or on sait que $\sum\limits_{n=0}^{N}v_n\underset{N\to+\infty}{\to}\gamma$ et que $Nr_{N+1}\underset{N\to+\infty}{\to}0$ (reprendre la majoration de la question **3b)**), donc : h

$$\sum_{n=1}^{N}r_n\underset{N\to+\infty}{\to}\gamma$$

Ainsi :

$$\gamma=\sum_{n=1}^{+\infty}r_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=2^n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{2^n+j}\right)$$

(Utiliser le changement d'indice $k=2^n+j$, pour obtenir la dernière égalité).

Partie V : la transformation d'Euler

1) Montrons que, pour tout entier naturel n, et pour tout $a\in\mathcal{F}$:

$$\forall\, k\in\mathbf{N},\ (\Delta^n a)[k]=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\,C_n^p a_{p+k}$$

En effet, en raisonnant avec l'endomorphisme $\Delta=\mathrm{Id}_{\mathcal{F}}-S$ et en observant que $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ et S commutent, la formule du binôme permet d'écrire :

$$\Delta^n=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\,C_n^pS^p$$

donc, pour toute suite $a \in \mathcal{F}$:

$$\Delta^n(a) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p S^p(a)$$

Or, pour tout entier naturel k, $S^p(a)[k] = a_{p+k}$. On en déduit :

$$\forall\ k \in \mathbf{N},\ (\Delta^n(a))[k] = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p .C_n^p.a_{p+k}$$

2 a) Pour tout $p \in \mathbf{N}$, la suite $(w_n)_{n\geqslant p} = \left(\frac{C_n^p}{2^n}\right)_{n\geqslant p}$ converge vers 0. Il suffit pour montrer cela de remarquer que $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \leqslant n^p$. $\frac{n+1}{n+1-p} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$

b) On suppose à présent que $(u_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite complexe convergente, de limite 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier p tel que pour tout $p \geqslant k$, $|u_p| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On écrit alors, pour $n \geqslant k$:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k} C_n^p u_p + \frac{1}{2^n}\sum_{p=k+1}^{n} C_n^p u_p$$

d'où :

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p\right| \leqslant \left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k} C_n^p u_p\right| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\sum_{p=k+1}^{n} C_n^p \leqslant \left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k} C_n^p u_p\right| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n} C_n^p = \left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k} C_n^p u_p\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Enfin, pour chaque entier $p \in [0,k]$, la question précédente montre que $\frac{C_n^p}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Il existe donc un entier N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k_0} C_n^p u_p\right| \leqslant \frac{\varepsilon.}{2}$

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant N_0$, $\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p\right| \leqslant KK\varepsilon$. On a donc démontré que la suite $\left(\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

c) On revient au cas général en suppsoant que $(u_p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers l. On se ramène au cas précédent car :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p - l &= \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p - \frac{l}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p \\ &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p (u_p - l)\end{aligned}$$

et car $(u_p - l)_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Conclusion : d'après la question précédente, $\left(\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n} C_n^p u_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l.

3)

$$
\begin{aligned}
V_N &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(\Delta^n a)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p . C_n^p . a_p \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n} C_n^p (S_p - S_{p-1}) \qquad (\text{avec } S_{-1} = 0) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n} C_n^p S_p - \sum_{p=0}^{n} C_n^p S_{p-1} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n} C_n^p S_p - \sum_{p=0}^{n-1} C_n^{p+1} S_p \right) \qquad (\text{avec } \sum_{p=0}^{-1} C_n^{p+1} S_p = 0) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n} C_{n+1}^{p+1} S_p - 2 \sum_{p=0}^{n-1} C_n^{p+1} S_p \right) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n} C_{n+1}^{p+1} S_p - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n-1} C_n^{p+1} S_p \\
&= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n-1} C_n^{p+1} S_p - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n-1} C_n^{p+1} S_p \\
&= \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{p=0}^{N} C_{N+1}^{p+1} S_p
\end{aligned}
$$

CQFD.

b) Il s'agit de prouver la convergence de la suite (V_N). On utilise pour cela le précédent calcul sous la forme :

$$
\forall\, N \in \mathbf{N},\ V_N = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{q=0}^{N} C_{N+1}^{q+1} S_q = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{q=1}^{N+1} C_{N+1}^{q} S_{q-1} = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{q=tk0}^{N+1} C_{N+1}^{q} S_{q-1}
$$

D'aprèe la question **V 2b)**, comme la suite (S_{q-1}) converge, il en est de même de la suite $\left(\frac{1}{2^{N+1}} \sum_{q=0}^{N+1} C_{N+1}^q S_{q-1} \right)_{N \in \mathbf{N}}$; la limite étant la même.

Conclusion :

$$
V_N \underset{N - +\infty}{\rightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k
$$

4)

a) Soit m un entier naturel. Nous savons que $\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$. Alors :

$$
\begin{aligned}
(\Delta^m a)[0] &= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p . C_m^p . a_p = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p . C_m^p . \frac{1}{2^n + p} = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p . C_m^p . \int_0^1 x^{2^n - 1 + p} dx \\
(\Delta^m a)[0] &= \int_0^1 x^{2^n - 1} \left(\sum_{p=0}^{m} (-1)^p . C_m^p x^p \right) dx = \int_0^1 x^{2^n - 1} (1-x)^m dx = \frac{(2^n - 1)!.m!}{(2^n + m)!} \\
(\Delta^m a)[0] &= \frac{1}{2^n} \frac{(2^n)!.m!}{(2^n + m)!} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{C_{2^n + m}^m}
\end{aligned}
$$

CQFD.

b) en utilisant ce dernier résultat, on applique les conclusions de la Partie IV à la suite (a_j) :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j a_j = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\Delta^m a)[0]}{2^{m+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \frac{1}{2^n} \frac{1}{C_{2^n+m}^m}$$

CQFD.

c) • On démontre d'abord que la série de terme général w_n converge. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, il suffit de prouver que la suite des sommes partielles est majorée. Or, en tenant compte du fait que les nombres $u_{k,l}$ sont positifs :

$$\forall\ N \in \mathbf{N},\ \sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k+l=n} u_{k,l}\right) = \sum_{k+l\leqslant N} u_{k,l} \leqslant \sum_{(k,l)\in[0,N]} u_{k,l} = \sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{l=0}^{N} u_{k,l}\right)$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{N} \sigma_K \leqslant S$$

Conclusion : la série de terme général w_n est convergente et sa somme vérifie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \leqslant S$$

• Il reste à prouver que $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \geqslant S$. Pour cela on considère deux entiers naturels quelconques N et M. On peut alors écrire :

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{M} u_{k,l} \leqslant \sum_{k+l\leqslant N+M} u_{k,l} = \sum_{n=0}^{N+M} w_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

On fixe alors N et on fait tendre M vers $+\infty$. On obtient :

$$\forall\ N \in \mathbf{N},\ \sum_{k=0}^{N} \sigma_K \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

puis, en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \sigma_k \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} w_n jj$$

Conclusion :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} u_{k,l} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

• On applique ce qui vient d'être démontré à la représentation de γ obtenue lors de la question **IV 1b) :**

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+m+1}} \frac{1}{C_{2^n+m}^m} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+m+2}} \frac{1}{C_{2^{n+1}+m}^m} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n+m=p} \frac{1}{2^{n+m+2}} \frac{1}{C_{2^{n+1}+m}^m}\right)$$
$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+2}}\left(\sum_{n+m=p} \frac{1}{C_{2^{n+1}+m}^m}\right) = \frac{1}{4} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+2}}\left(\sum_{n+m=p} \frac{1}{C_{2^{n+1}+m}^m}\right) = \frac{1}{4} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+2}}\left(\sum_{m=0}^{p} \frac{1}{C_{m+2^{p-m+1}}^m}\right)$$
$$= \frac{1}{4} + \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{q+1}}\left(\sum_{m=0}^{q-1} \frac{1}{C_{m+2^{q-m}}^m}\right) = \frac{1}{4} + \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{q+1}}\left(\sum_{m=0}^{q-1} \frac{1}{C_{m+2^{q-m}}^m}\right) = \frac{1}{4} + \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{q+1}}\left(1 + \sum_{m=1}^{q-1} \frac{1}{C_{m+2^{q-m}}^m}\right)$$
$$= \frac{1}{4} + \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{q+1}} + \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{q+1}}\left(\sum_{m=1}^{q-1} \frac{1}{C_{m+2^{q-m}}^m}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{q+1}}\left(\sum_{m=1}^{q-1} \frac{1}{C_{m+2^{q-m}}^m}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{q+1}}\left(\sum_{m=1}^{q-1} \frac{1}{C_{m+2^{q-m}}^m}\right)$$