9

Espaces vectoriels réels ou complexes de dimension finie

On note toujours $\mathbb{K}$ le corps de réels ou des complexes.

9.1 Systèmes libres, systèmes générateurs et bases

Nous avons déjà rencontré et utilisé la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Nous allons donner une définition précise de cette notion dans le cadre des espaces vectoriels réels ou complexes, ce qui nous mènera à la notion de dimension.

On se donne un espace vectoriel E.

Définition 9.1 *Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille (ou un système) de n vecteurs de E, où n est un entier naturel non nul. On dit que $\mathcal{B}$ est :*

- *une famille libre, ou que les vecteurs $e_1, \cdots, e_n$ sont linéairement indépendants, si pour toute famille $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ est réalisée si, et seulement si, tous les λ_i sont nuls ;*
- *une famille liée, si ce n'est pas une famille libre (i. e. il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$) ;*
- *une famille génératrice si pour tout vecteur $x \in E$, il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$;*
- *une base de E si elle est libre et génératrice.*

Remarque 9.1 *Dire que $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille génératrice de E équivaut à dire que $E = \mathrm{vect}\,(\mathcal{B})$ (l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{B}$).*

Avec le théorème qui suit, on résume quelques propriétés des familles libres ou liées.

Théorème 9.1 *Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n vecteurs de E, où n est un entier naturel non nul.*

1. *Si $n = 1$, dire que $\mathcal{B}$ est libre [resp. liée] signifie que $e_1 \neq 0$ [resp. $e_1 = 0$].*
2. *Si $\mathcal{B}$ est libre, alors tous les vecteurs e_i sont non nuls.*
3. *Si l'un des e_i est nul, alors $\mathcal{B}$ est liée.*
4. *Si $\mathcal{B}$ contient une famille liée, elle est elle même liée.*

5. *Si $\mathcal{B}$ est contenue dans une partie libre, elle est elle même libre.*
6. *Si $\mathcal{B}$ est liée, l'un des vecteurs e_j est combinaison linéaire des autres.*
7. *Si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$.*

Démonstration. Résultent des définitions. ■

L'utilisation des déterminants, définis pour l'instant dans le seul cas des matrices d'ordre 2, nous donne un moyen élémentaire de vérifier que deux vecteurs de $\mathbb{K}^2$ sont linéairement indépendants.

Théorème 9.2 *Les vecteurs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants si, et seulement si :*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Démonstration. Il revient au même de montrer que x et y sont liés si, et seulement si, $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$

Supposons le système (x, y) lié. On a alors $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$ pour un scalaire λ et, par exemple dans le premier cas :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & \lambda x_1 \\ x_2 & \lambda x_2 \end{vmatrix} = \lambda (x_1 x_2 - x_1 x_2) = 0.$$

Réciproquement, on suppose que $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, le système (x, y) est alors lié.

Si x et y sont non nuls, en supposant que y_2 est non nul, l'égalité $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$ entraîne (c'est même équivalent) :

$$y_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $(y_2, -x_2) \neq (0, 0)$, ce qui signifie que x et y sont liés. Si $y_2 = 0$, on a alors $y_1 \neq 0$ et on écrit que l'égalité $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ entraîne :

$$x_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - y_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $(x_1, -y_1) \neq (0, 0)$. ■

Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E, alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et les scalaires λ_i qui sont uniquement déterminés sont appelés les composantes ou coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. Réciproquement une telle famille $\mathcal{B}$ vérifiant cette propriété est une base de E.

La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est bien une base au sens de la définition qu'on a donné.

Exemple 9.1 *Dans l'espace $\mathbb{R}_n[x]$ [resp. $\mathbb{C}_n[x]$] des fonctions polynomiales réelles [resp. complexes] de degré au plus égal à n, la famille de polynômes $(1, x, \cdots, x^n)$ est une base puisque tout polynôme dans $\mathbb{R}_n[x]$ [resp. $\mathbb{C}_n[x]$] s'écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, les réels [resp. complexes] a_k étant uniquement déterminés. On dit que cette base est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ [resp. $\mathbb{C}_n[x]$]*

Le résultat de l'exercice qui suit est à retenir.

Exercice 9.1 *Soient n un entier naturel et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \cdots, P_n)$ une famille de polynômes dans $\mathbb{K}_n[x]$ telle que P_k soit de degré k, pour tout k compris entre 0 et n (P_0 est constant non nul). On dit qu'une telle famille de polynômes est échelonnée en degrés. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[x]$.*

Solution 9.1 *Notons, pour k compris entre 0 et n :*

$$P_k(x) = a_{k,0} + a_{k,1}x + \cdots + a_{k,k}x^k = \sum_{j=0}^{k} a_{k,j}x^j$$

où le coefficient $a_{k,k}$ est non nul.
Nous allons montrer le résultat par récurrence sur $n \geq 0$.
Pour $n = 0$, $\mathbb{K}_0[x]$ est l'espace des fonctions (ou polynômes) constantes sur $\mathbb{K}$ et P_0 est non nul dans cet espace, donc libre, et en écrivant tout polynôme constant sous la forme :

$$P(x) = a = \frac{a}{P_0}P_0 = \lambda P_0,$$

on voit que P_0 engendre $\mathbb{K}_0[x]$. Donc (P_0) est une base de $\mathbb{K}_0[x]$.
Supposons le résultat acquis au rang $n \geq 0$ et soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \cdots, P_{n+1})$ une famille de polynômes échelonnée en degrés dans $\mathbb{K}_{n+1}[x]$. La famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est alors échelonnée en degrés dans $\mathbb{K}_n[x]$ et l'hypothèse de récurrence nous dit qu'elle forme une base de $\mathbb{K}_n[x]$.
On se donne un polynôme P dans $\mathbb{K}_{n+1}[x]$. Si P est de degré inférieur ou égal à n, il est dans $\mathbb{K}_n[x]$ et s'écrit comme combinaison linéaire de $P_0, P_1, \cdots, P_n$, sinon il est de la forme $P(x) = Q(x) + a_{n+1}x^{n+1}$ avec Q dans $\mathbb{K}_n[x]$ et $a_{n+1} \neq 0$. En écrivant que :

$$x^{n+1} = \frac{1}{a_{n+1,n+1}}P_{n+1}(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{a_{n+1,j}}{a_{n+1,a_{n+1}}}x^j,$$

on déduit que $P(x) = R(x) + \dfrac{a_{n+1}}{a_{n+1,n+1}}P_{n+1}(x)$ avec R dans $\mathbb{K}_n[x]$, donc combinaison linéaire de $P_0, P_1, \cdots, P_n$ et P est combinaison linéaire de $P_0, P_1, \cdots, P_{n+1}$. Le système $\mathcal{B}$ est donc générateur de $\mathbb{K}_{n+1}[x]$.
Si on a l'égalité $\sum\limits_{j=0}^{n+1} \lambda_j P_j = 0$, alors $\lambda_{n+1}P_{n+1} = -\sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j P_j$ est dans $\mathbb{K}_n[x]$ et λ_{n+1} est nécessairement nul puisque P_{n+1} qui est de degré $n+1$ n'est pas dans $\mathbb{K}_n[x]$. On a alors $\sum\limits_{j=0}^{n} \lambda_j P_j$ et tous les λ_j sont nuls puisque $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ une base de $\mathbb{K}_n[x]$. Le système $\mathcal{B}$ est donc libre et c'est une base de $\mathbb{K}_{n+1}[x]$.

Exercice 9.2 *Montrer que la famille $\mathcal{B} = (L_0, L_1, L_2)$ de polynômes de $\mathbb{K}_2[x]$ définie par :*

$$\left\{\begin{array}{l} L_0(x) = (x-1)(x-2) \\ L_1(x) = x(x-2) \\ L_2(x) = x(x-1) \end{array}\right.$$

forme une base de $\mathbb{K}_2[x]$. En déduire que pour tout polynôme P dans $\mathbb{K}_2[x]$ on a :

$$\int_0^2 P(t)\,dt = \frac{P(0) + 4P(1) + P(2)}{3}$$

(formule des trois niveaux).

Solution 9.2 *Supposons que $\lambda_0 P_0+\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2 = 0$. Prenant les valeurs successives $x = 0, 1, 2$, on déduit que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Le système $\mathcal{B}$ est donc libre. Étant donné $P = ax^2 + bx + c$, on cherche des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que :*

$$ax^2 + bx + c = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2.$$

Là encore les valeurs $x = 0, 1, 2$ nous donne :

$$\begin{cases} 2\lambda_0 = c \\ -\lambda_1 = a + b + c \\ 2\lambda_2 = 4a + 2b + c \end{cases}$$

ce qui détermine de manière unique les scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Le système $\mathcal{B}$ est donc générateur et c'est une base de $\mathbb{K}_2 [x]$.
Tout polynôme P dans $\mathbb{K}_2 [x]$ s'écrit donc de manière unique $P = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ avec $\lambda_0 = \dfrac{P(0)}{2}$, $\lambda_1 = -P(1)$ et $\lambda_2 = \dfrac{P(2)}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^2 P(t)\,dt &= \frac{P(0)}{2}\int_0^2 L_0(t)\,dt - P(1)\int_0^2 L_1(t)\,dt + \frac{P(2)}{2}\int_0^2 L_2(t)\,dt \\ &= \frac{P(0) + 4P(1) + P(2)}{3}\end{aligned}$$

On se limitera dans ce chapitre aux familles libres ou génératrices qui sont finies. Mais en réalité, on est rapidement amené à considérer des familles qui peuvent être infinies. On donne donc les définitions suivantes (qui ne seront pas utilisées au niveau élémentaire où se situe ce cours).

Définition 9.2 *Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, où I est un ensemble non vide quelconque (fini ou infini) d'indices. On dit que $\mathcal{B}$ est :*

- *une famille libre, ou que les vecteurs e_i, pour $i \in I$ sont linéairement indépendants, si toute sous-famille finie de $\mathcal{B}$ est libre, ce qui signifie que pour tout sous-ensemble non vide et fini J de I, une combinaison linéaire $\sum\limits_{j\in J} \lambda_j e_j$, où les λ_j pour $j \in J$ sont des scalaires, est nulle si, et seulement si, tous ces λ_j sont nuls ;*
- *une famille liée, si ce n'est pas une famille libre (i. e. il existe une partie fini J de I et des scalaires λ_j où j décrit J qui sont non tous nuls tels que $\sum\limits_{j\in J} \lambda_j e_j = 0$) ;*
- *une famille génératrice si l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{B}$ est l'espace E tout entier, ce qui signifie que pour tout vecteur $x \in E$, il existe une partie finie J de I et des scalaires λ_j où j décrit J tels que $x = \sum\limits_{j\in J} \lambda_j e_j$;*
- *une base de E si elle est libre et génératrice.*

Exercice 9.3 *On désigne par E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout entier $k \geq 1$ par f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = \sin(kx).$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre dans E.

Solution 9.3 *Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \sin(2x) + \lambda_3 \sin(3x) = 0.$$

En dérivant deux fois, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \sin(x) + 4\lambda_2 \sin(2x) + 9\lambda_3 \sin(3x) = 0.$$

et retranchant ces deux équations, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 3\lambda_2 \sin(2x) + 8\lambda_3 \sin(3x) = 0.$$

Prenant $x = \dfrac{\pi}{2}$ dans cette troisième équation on obtient $\lambda_3 = 0$ et la première donne $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Il reste donc $\lambda_2 \sin(2x) = 0$ et $\lambda_2 = 0$. La famille (f_1, f_2, f_3) est donc libre dans E.

Un peu plus généralement, on a le résultat suivant.

Exercice 9.4 *On désigne par E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer, pour tous réels $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, la famille :*

$$\mathcal{L} = \{f_{a_k} : x \longmapsto \sin(a_k x) \mid 1 \leq k \leq n\}$$

est libre dans E (ce qui peut se traduire en disant que la famille de fonctions $\{f_a : x \longmapsto \sin(ax) \mid a \in \mathbb{R}^{+,*}\}$ est libre dans E).

Solution 9.4 *On procède par récurrence sur $n \geq 1$.*
Pour $n = 1$, la fonction $f_a : x \longmapsto \sin(ax)$ n'est pas la fonction nulle, donc (f_a) est libre dans E.
Supposons le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 1$ et soient $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ des réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin(a_k x) = 0.$$

En dérivant deux fois, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^2 \sin(a_k x) = 0.$$

Il en résulte que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \left(a_k^2 - a_n^2\right) \sin(a_k x) = 0.$$

et l'hypothèse de récurrence nous dit que $\lambda_k \left(a_k^2 - a_n^2\right) = 0$ pour tout k compris entre 1 et $n-1$, ce qui équivaut à dire que $\lambda_k = 0$ pour tout k compris entre 1 et $n-1$ puisque $a_k^2 \neq a_n^2$ pour $k \neq 0$. Il reste alors $\lambda_n f_{a_n} = 0$ dans E et $\lambda_n = 0$. On a donc ainsi montré que la famille $(f_{a_k})_{1 \leq k \leq n}$ est libre dans E.

9.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Le théorème qui suit est essentiel pour définir la notion de dimension finie.

Théorème 9.3 *Si un espace vectoriel E admet une famille génératrice $\mathcal{B}$ formée de $n \geq 1$ éléments, alors toute famille libre dans E a au plus n éléments (ce qui équivaut à dire qu'un système de plus de $n+1$ vecteurs est lié).*

Démonstration. On procède par récurrence sur n.

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille génératrice de E.

Si $n = 1$, alors pour tout couple (x, y) de vecteurs non nuls de E on peut trouver deux scalaires non nuls λ et μ tels que $x = \lambda e_1$ et $y = \mu e_1$ et on a la combinaison linéaire nulle $\mu x - \lambda y = 0$ avec μ et $-\lambda$ non nuls, ce qui signifie que le système (x, y) est lié. Il ne peut donc exister de famille libre à 2 éléments dans E et a fortiori il ne peut en exister à plus de 2 éléments.

Supposons le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 1$, c'est-à-dire que dans tout espace vectoriel F admettant un système générateur de $n-1$ vecteurs une famille de plus de n vecteurs est liée. Supposons que E soit un espace vectoriel admettant une famille génératrice à n éléments. Supposons qu'il existe une famille libre ayant $m \geq n+1$ éléments. On peut extraire de cette famille une famille libre à $n+1$ éléments puisque toute sous-famille d'une famille libre est libre. Soit $\mathcal{L} = (f_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ une telle famille. Comme $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice, il existe des scalaires a_{ij} tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n \\ \vdots \\ f_{n+1} = a_{n+1,1}e_1 + \cdots + a_{n+1,n}e_n \end{array} \right.$$

Si tous les $a_{i,n}$ sont nuls alors les f_i sont dans l'espace vectoriel F engendré par les $n-1$ vecteurs $e_1, \cdots, e_{n-1}$ et en conséquence liés (hypothèse de récurrence), en contradiction avec $\mathcal{L}$ libre. Il existe donc un indice i compris entre 1 et $n+1$ tel que $a_{i,n} \neq 0$ et en changeant au besoin la numérotation des éléments de $\mathcal{L}$ on peut supposer que $i = n+1$. Les n vecteurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = a_{n+1,n}f_1 - a_{1n}f_{n+1} \\ \vdots \\ g_n = a_{n+1,n}f_1 - a_{nn}f_{n+1} \end{array} \right.$$

sont dans l'espace vectoriel F engendré par les $n-1$ vecteurs $e_1, \cdots, e_{n-1}$ (on a annulé les composantes en e_{n+1}) et en conséquence liés (hypothèse de récurrence), c'est-à-dire qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n = 0$$

ce qui entraîne :

$$a_{n+1,n} (\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n) - (\lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_n a_{nn}) f_{n+1} = 0$$

les scalaires $a_{n+1,n}\lambda_1, \cdots, a_{n+1,n}\lambda_n$ n'étant pas tous nuls. Ce qui nous dit encore que les f_i sont liés et est en contradiction avec $\mathcal{L}$ libre. Il est donc impossible de trouver un tel système $\mathcal{L}$ libre.
■

Définition 9.3 *On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il est réduit à $\{0\}$ ou s'il est différent de $\{0\}$ et admet une base formée d'un nombre fini de vecteurs. Dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.*

On déduit alors du théorème précédent le suivant.

Théorème 9.4 *Si E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et de dimension finie, alors toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Démonstration. Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\mathcal{B}' = (e_i')_{1\leq i\leq n'}$ sont deux bases de l'espace vectoriel E, ce sont alors deux familles génératrices et libres et le théorème précédent nous dit que $n' \leq n$ et $n \leq n'$, soit $n = n'$. ■

On peut alors donner la définition suivante.

Définition 9.4 *Si E est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et de dimension finie, alors sa dimension est le nombre de l'une quelconque de ses bases. On note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ (ou simplement $\dim(E)$) cette dimension.*

Par convention, on dira que l'espace vectoriel $\{0\}$ est de dimension 0.

Un espace vectoriel E est donc de dimension 0 si, et seulement si, il est réduit à $\{0\}$.

Dans le cas général on peut montrer, mais cela dépasse le niveau de ce cours d'introduction, que tout espace vectoriel admet une base (finie ou infinie).

On appelle droite tout espace vectoriel de dimension 1 et plan tout espace vectoriel de dimension 2.

Exemple 9.2 *Bien entendu l'espace $\mathbb{K}^n$ est de dimension n.*

Exemple 9.3 *L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel réel de dimension 2 et un espace vectoriel complexe de dimension 1, soit $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.*

Exemple 9.4 *Pour tout entier naturel n, l'espace $\mathbb{K}_n[x]$ des fonctions polynomiales de degré au plus égal à n est de dimension $n+1$.*

Exemple 9.5 *Pour tous entiers naturels non nuls n et m, l'espace $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ des matrices à m lignes et n colonnes est un espace vectoriel de dimension $m \cdot n$. En particulier l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n est de dimension n^2.*
La base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i,j).

Exemple 9.6 *L'espace des fonctions définies sur un intervalle réel I et à valeurs réelles est de dimension infinie (l'exercice 9.4 nous montre qu'on peut trouver des familles libres ayant une infinité d'éléments). Il admet des bases, mais il n'est pas possible d'en expliciter une.*

Exercice 9.5 *Montrer que la dimension de l'espace des matrices carrées A d'ordre n qui sont symétriques (i. e. telles que ${}^tA = A$) est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et que la dimension de l'espace des matrices carrées A d'ordre n qui sont anti-symétriques (i. e. telles que ${}^tA = -A$) est égale à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.*

Solution 9.5 *Laissée au lecteur.*

Remarque 9.2 *Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base E, on a alors $E = \mathrm{vect}(\mathcal{B})$.*

Le théorème qui suit explique l'importance de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Théorème 9.5 *Un espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration. C'est le choix d'une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E qui nous permet de définir un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^n$. En effet l'unicité de l'écriture de tout vecteur x de E sous la forme $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ se traduit en disant que l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{K}^n \\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k & \mapsto & (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \end{array}$$

est bijective et il est facile de vérifier que cette application est linéaire. ∎

Théorème 9.6 *Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.*

1. *Une famille libre dans E a au plus n élément et c'est une base si, et seulement si, elle a exactement n éléments.*
2. *Une famille génératrice dans E a au moins n élément et c'est une base si, et seulement si, elle a exactement n éléments.*

Démonstration. Le cas $n = 1$ est laissé au lecteur et on suppose que $n \geq 2$.

1. Le théorème 9.3 nous dit qu'une famille libre dans E a au plus n élément et si c'est une base, elle a obligatoirement n éléments. Il reste à montrer qu'une famille libre de n éléments est une base. Pour ce faire il suffit de montrer qu'elle est génératrice. Notons $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une telle famille libre. Pour tout vecteur $x \in E$ la famille $\mathcal{B} \cup \{x\}$ est liée puisque formée de $n + 1$ éléments, il existe donc des scalaires $\lambda, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Si $\lambda = 0$, on a alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ et tous les λ_i sont nuls puisque $\mathcal{B}$ est libre, ce qui n'est pas possible. On a donc $\lambda \neq 0$ et $x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} e_i$. On a donc ainsi montré que $\mathcal{B}$ est génératrice et que c'est une base.
2. Le théorème 9.3 nous dit qu'une famille génératrice dans E a au moins n élément et si c'est une base, elle a obligatoirement n éléments. Il reste à montrer qu'une famille génératrice de n éléments est une base. Pour ce faire il suffit de montrer qu'elle est libre. Notons $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une telle famille génératrice. Si cette famille est liée, l'un des e_i, disons e_n, est combinaison linéaire des autres et la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ est génératrice, ce qui est en contradiction avec le théorème 9.3. La famille $\mathcal{B}$ est donc génératrice et c'est une base de E.

∎

On retient de ces résultats que pour montrer qu'une famille finie $\mathcal{B}$ de vecteurs est une base de E, on peut procéder comme suit :
- si on ne connaît pas la dimension de E, on montre que $\mathcal{B}$ est génératrice et libre ;
- si on sait que E est de dimension n, on vérifie que $\mathcal{B}$ a exactement n éléments et on montre que $\mathcal{B}$ est libre ou qu'elle est génératrice (il est inutile de montrer les deux points).

On a défini un espace vectoriel de dimension finie comme un espace vectoriel admettant une base finie. Le théorème qui suit nous dit qu'on peut aussi définir un espace vectoriel de dimension finie comme un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie.

Théorème 9.7 *Soit E un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. De cette famille on peut extraire une base et E est de dimension finie.*

Démonstration. Soit $\mathcal{G} = (u_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille génératrice de E. Si cette famille est libre, elle constitue alors une base de E et E est de dimension p. Sinon, cette famille est liée et l'un de ses éléments, disons u_p est combinaison linéaire des autres (en changeant la numérotation des éléments de G on peut toujours se ramener à ce cas de figure), ce qui implique que la famille $\mathcal{G}' = (u_i)_{1\leq i\leq p-1}$ est encore génératrice. Si cette famille est libre, c'est alors une base et E est de dimension finie, sinon on recommence. En un nombre fini de telles opérations on construit ainsi une base de E formée de $n \leq p$ éléments. ∎

Théorème 9.8 (base incomplète) *Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Toute famille libre à p éléments dans E (nécessairement $1 \leq p \leq n$) peut se compléter en une base.*

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $\mathcal{L} = (u_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille libre dans E. On sait déjà que $p \leq n$. Si $p = n$, $\mathcal{L}$ est alors une base.

Supposons que $p < n$. Il existe alors un vecteur e_k dans $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{e_k\}$ soit libre. En effet si un tel système est lié pour tout entier k compris entre 1 et n, il existe alors, pour chaque entier k, des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \lambda_{p+1} e_k = 0$. Si $\lambda_{p+1} = 0$, on a alors $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0$ et tous les λ_i sont nuls puisque $\mathcal{L}$ est libre. On a donc $\lambda_{p+1} \neq 0$ et $e_k = -\sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_{p+1}} u_i$. En conséquence, tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est alors générateur de E, ce qui est impossible pour $p < n$. Le système $\mathcal{L}'$ est donc libre. Si $p + 1 = n$, c'est une base et sinon on recommence. On arrive ainsi à compléter $\mathcal{L}$ en une base de E au bout d'un nombre fini d'opérations. ∎

Les deux corollaires qui suivent sont des résultats importants à retenir.

Corollaire 9.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie $m \leq n$ et $m = n$ si, et seulement si, $F = E$.*

Démonstration. Si $F = \{0\}$, il est alors de dimension $0 \leq n$ et $n = 0$ équivaut à $F = E$.

On suppose que $F \neq \{0\}$ (donc $n \geq 1$).

Montrons tout d'abord que F est de dimension finie. Comme $n + 1$ vecteurs de F sont nécessairement liés, on peut définir l'entier m comme le plus grand entier pour lequel on peut trouver m vecteurs de F linéairement indépendants. On a $m \geq 1$ puisque $F \neq \{0\}$ et $m \leq n$ d'après le théorème 9.3. Soient donc $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille libre dans F. Pour tout vecteur $x \in F$, la famille $(f_1, \cdots, f_m, x)$ est liée et x est combinaison linéaire des f_i puisque $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ est libre. La famille $(f_i)_{1\leq i\leq m}$ est donc une base de F et cet espace est de dimension finie $m \leq n$.

Si $m = n$, une base de F est aussi une base de E et $F = E$. La réciproque est évidente. ∎

Corollaire 9.2 *Tout sous-espace-vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet des supplémentaires et pour tout supplémentaire G de F dans E, on :*

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G). \tag{9.1}$$

Démonstration. On suppose que F est un sous-espace vectoriel strict de E, c'est-à-dire que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. On a alors $1 \leq p = \dim(F) \leq n - 1$.

Une base $\mathcal{L} = (u_i)_{1\leq i\leq p}$ de F se complète en une base $\mathcal{B} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ et on vérifie facilement que le sous-espace vectoriel G de E engendré par $\mathcal{L}' = (u_i)_{p+1\leq i\leq n}$ est un supplémentaire de F. Pour cet espace G, on a $\dim(G) = n - p = \dim(E) + \dim(F)$.

Réciproquement si $E = F \oplus G$, on vérifie facilement que la réunion d'une base de F et d'une base de G nous fourni une base de E, ce qui implique que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. ∎

De manière plus générale, on peut montrer que si E est un espace vectoriel de dimension finie ou non, alors tout sous-espace vectoriel de E admet une supplémentaire dans E.

L'égalité (9.1) pour $E = F \oplus G$ peut se généraliser.

Théorème 9.9 *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Si E est somme directe de $p \geq 2$ sous espaces stricts $F_1, \cdots, F_p$, soit $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$, alors en désignant, pour tout k compris entre 1 et p, par $\mathcal{B}_k$ une base de F_k, la famille $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{B}_k$ est une base de E et :*

$$\dim(E) = \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k).$$

Démonstration. On vient de voir que le résultat est vrai pour $p = 2$ et une récurrence nous montre qu'il est vrai pour tout $p \geq 2$. ■

Dans le cas de la somme, non nécessairement directe, de deux sous-espaces d'un espace de dimension finie, on a le résultat suivant.

Théorème 9.10 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous espaces vectoriels de E. On a :*

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Démonstration. Comme $F \cap G$ est un sous-espace de G, il admet un supplémentaire H dans G :

$$G = (F \cap G) \oplus H$$

Ce sous-espace H de G est aussi un sous-espace de $F + G$.

En fait H est un supplémentaire de F dans $F + G$.

En effet, on a $F + H \subset F + G$ puisque $H \subset G$ et tout $x \in F + G$ s'écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G = (F \cap G) \oplus H$, donc $z = z_1 + z_2$ avec $z_1 \in F \cap G \subset F$ et $z_2 \in H$, ce qui donne $x = (y + z_1) + z_2 \in F + H$. On a donc $F + G \subset F + H$ et l'égalité $F + G = F + H$.

Si maintenant x est dans $F \cap H$, il est dans $F \cap G$ puisque $H \subset G$, donc dans $(F \cap G) \cap H = \{0\}$. On a donc $F \cap H = \{0\}$ et $F + G = F \oplus H$.

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\dim(F+G) &= \dim(F) + \dim(H) \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).\end{aligned}$$

■

Ce résultat a pour conséquence le résultat suivant très utile pour montrer qu'un espace est somme directe de deux sous-espaces.

Théorème 9.11 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous espaces vectoriels de E. On a :*

$$\begin{aligned}(E = F \oplus G) &\Leftrightarrow E = F + G \text{ et } \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \\ &\Leftrightarrow F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)\end{aligned}$$

Démonstration. On sait déjà que si $E = F \oplus G$, alors $E = F + G$, $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Supposons que $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Le théorème précédent nous dit alors que $\dim(F \cap G) = 0$, soit que $F \cap G = \{0\}$ et on a $E = F \oplus G$.

De même si $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, on a alors $F + G = F \oplus G$ et cet espace a même dimension que E, donc $E = F \oplus G$. ■

Les propriétés des applications linéaires injectives, surjectives ou bijectives décrites par le théorème qui suit sont importantes.

Théorème 9.12 *Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et u une application linéaire de E dans F.*

1. *Si u est injective, elle transforme alors tout système libre de E en un système libre de F et* $\dim(E) \leq \dim(F)$.
2. *Si u est surjective, elle transforme alors tout système générateur de E en un système générateur de F et* $\dim(F) \leq \dim(E)$.
3. *Si u est bijective, elle transforme alors toute base de E en une base de F et* $\dim(E) = \dim(F)$ *(deux espaces vectoriels de dimension finie isomorphes ont la même dimension).*
4. *Si* $\dim(E) = \dim(F)$, *alors :*

$$u \text{ bijective} \Leftrightarrow u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective.}$$

Démonstration.

1. Soit $\mathcal{L} = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ un système libre dans E. Si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(x_i) = 0$, on a alors du fait de la linéarité de u, $u\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = 0$, ce qui signifie que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ est dans le noyau de u, donc nul puisque u est injective, ce qui équivaut à la nullité de tous les coefficients λ_i puisque $\mathcal{L}$ est libre. La famille $u(\mathcal{L})$ est donc libre.
   Prenant pour $\mathcal{L}$ une base de E, elle est formée de $n = \dim(E)$ éléments et $u(\mathcal{L})$ est libre à n éléments dans F, donc $n \leq m = \dim(F)$.
2. Soit $\mathcal{L} = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ un système générateur de E. Comme u est surjective tout vecteur y de F s'écrit $y = u(x)$ avec x dans E qui s'écrit $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$, ce qui donne $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(x_i)$.
   Le système $u(\mathcal{L})$ est donc générateur de F.
   Prenant pour $\mathcal{L}$ une base de E, elle est formée de n éléments et $u(\mathcal{L})$ est générateur de F à n éléments, donc $n \geq m$.

   3. et 4.Résultent des deux points précédents.

■

Le théorème 9.5 et le point 3. du théorème précédent nous disent que deux espaces vectoriels de dimension finie ont même dimension si, et seulement si, ils sont isomorphes.

En vue de généraliser le théorème 9.11, on utilisera le résultat suivant.

Lemme 9.1 *Si $F_1, \cdots, F_p$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, il en est de même de l'espace produit $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ et on a :*

$$\dim(F) = \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k).$$

Démonstration. Pour $p = 1$, il n'y a rien à montrer.

En procédant par récurrence sur $p \geq 2$, il suffit de montrer le résultat pour $p = 2$.

Pour ce faire, on vérifie que si $\mathcal{B}_1 = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F_1 et $\mathcal{B}_2 = (f_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de F_2, alors la famille :

$$\mathcal{B} = \{(e_i, 0) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(0, f_j) \mid 1 \leq j \leq m\}$$

est une base de $F = F_1 \times F_2$. En effet tout vecteur $z = (x, y)$ dans F s'écrit :

$$z = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j (0, f_j)$$

donc $\mathcal{B}$ engendre F et l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j (0, f_j) = 0$$

est équivalente à :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j \right) = (0, 0)$$

soit à $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ et $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j f_j = 0$ qui impose $\lambda_i = 0$ pour tout i compris entre 1 et n et $\mu_j = 0$ pour tout j compris entre 1 et m. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre et c'est une base de F. L'espace F est donc de dimension finie égale au nombre d'éléments de $\mathcal{B}$, soit à $n + m$. ∎

Théorème 9.13 *Si $F_1, \cdots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, on a alors $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} F_k$ si, et seulement si, $E = \sum\limits_{k=1}^{p} F_k$ et $\dim(E) = \sum\limits_{k=1}^{p} \dim(F_k)$.*

Démonstration. On sait déjà que la condition est nécessaire.

Dire que $E = \sum\limits_{k=1}^{p} F_k$, équivaut à dire que l'application linéaire :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & F = F_1 \times \cdots \times F_p & \to & E \\ & (x_1, \cdots, x_p) & \mapsto & x_1 + \cdots + x_p \end{array}$$

est surjective et si de plus $\dim(F) = \dim(E)$, cette application est en fait une bijection ce qui signifie que $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} F_k$. ∎

Exercice 9.6 *Montrer que l'ensemble des matrices carrées d'ordre n de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et calculer sa dimension.*

9.3 Rang d'un système de vecteurs ou d'une application linéaire

On désigne par E un espace vectoriel de dimension finie.

On rappelle que le sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}\{x_1, \cdots, x_p\}$ de E engendré par des vecteurs $x_1, \cdots, x_p$ de E est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs, soit :

$$F = \left\{ x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \mid (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}.$$

Définition 9.5 *Le rang de la famille* $\{x_1, \cdots, x_p\}$ *de vecteurs de* E *est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs. On le note* $\mathrm{rg}\,(x_1, \cdots, x_p)$.

Théorème 9.14 *Le rang d'une famille* $\{x_1, \cdots, x_p\}$ *de* p *vecteurs de* E *est au maximum égal à* p *et ce rang vaut* p *si, et seulement si, cette famille est libre.*

Démonstration. Si le système $\mathcal{L} = \{x_1, \cdots, x_p\}$ est libre, il constitue une base de $F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{L})$ et $\mathrm{rg}\,(\mathcal{L}) = \dim(F) = p$. Réciproquement si le rang vaut p, la famille $\mathcal{L}$ est génératrice de F avec p éléments, c'est donc une base de F et en conséquence une famille libre. ■

Remarque 9.3 *Si* E *est de dimension* n, *le rang d'une famille de vecteurs de* E *est au plus égal à* n. *Si ce rang vaut* n, *on a alors* $\mathrm{Vect}\,\{x_1, \cdots, x_p\} = E$ *et* $\{x_1, \cdots, x_p\}$ *est un système générateur de* E. *Dans le cas où* $p = n$, *c'est une base.*

Définition 9.6 *Soient* E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie et* u *une application linéaire de* E *dans* F. *Le rang de* u *est la dimension de* $\mathrm{Im}\,(u)$. *On le note* $\mathrm{rg}\,(u)$.

En désignant par $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E, l'image de u est le sous-espace vectoriel de F engendré par $\{u(e_1), \cdots, u(e_n)\}$ et :

$$\mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u(e_1), \cdots, u(e_n)).$$

Remarque 9.4 *Comme* $\mathrm{Im}\,(u)$ *est un sous-espace vectoriel de* F, *on a* $\mathrm{rg}\,(u) \leq \dim(F)$ *et comme* $\mathrm{rg}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u(e_1), \cdots, u(e_n))$, *on a aussi* $\mathrm{rg}\,(u) \leq \dim(E)$. *Donc :*

$$\mathrm{rg}\,(u) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$$

Plus précisément, on a les résultats suivants.

Théorème 9.15 *Soient* E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie et* u *une application linéaire de* E *dans* F. *On a* $\mathrm{rg}\,(u) = \dim(F)$ *si, et seulement si,* u *est surjective.*

Démonstration. Dire que u est surjective équivaut à dire que $\mathrm{Im}\,(u) = F$, ce qui est encore équivalent à $\mathrm{rg}\,(u) = \dim(\mathrm{Im}\,(u)) = \dim(F)$ puisque $\mathrm{Im}\,(u)$ est un sous-espace vectoriel de F. ■

Théorème 9.16 (du rang) *Soient* E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie et* u *une application linéaire de* E *dans* F. *On a :*

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}\,(u).$$

Démonstration. Soit H un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E et v la restriction de u à H, c'est-à-dire l'application v définie sur H par :

$$\forall x \in H,\ v(x) = u(x).$$

Le noyau de cette application est :

$$\ker(v) = H \cap \ker(u) = \{0\}$$

ce qui signifie que v est injective de H dans F et réalise une bijection de H dans $\mathrm{Im}\,(v)$.

En écrivant tout vecteur y de $\mathrm{Im}\,(u)$ sous la forme $y = u(x)$ avec $x \in E$ qui s'écrit $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \ker(u)$ et $x_2 \in H$, on a $y = u(x_1) + u(x_2) = v(x_2)$, c'est-à-dire que y est dans $\mathrm{Im}\,(v)$. On a donc $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Im}\,(v)$ et comme $\mathrm{Im}\,(v) \subset \mathrm{Im}\,(u)$, on a en fait $\mathrm{Im}\,(v) = \mathrm{Im}\,(u)$ et v réalise un isomorphisme de H sur $\mathrm{Im}\,(u)$. Il en résulte que :

$$\mathrm{rg}\,(u) = \dim(\mathrm{Im}\,(u)) = \dim(H) = \dim(E) - \dim(\ker(u)).$$

■

Remarque 9.5 *En montrant le théorème du rang, on a en fait montré que* $\mathrm{Im}(u)$ *est isomorphe à un supplémentaire de* $\ker(u)$ *dans* E.

Corollaire 9.3 *Soient* E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie et* u *une application linéaire de* E *dans* F. *On a :*

1. $\mathrm{rg}(u) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$;
2. $\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$ *si, et seulement si,* u *est injective.*

Démonstration.

1. De la formule du rang, on déduit que $\mathrm{rg}(u) \leq \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(u) \leq \dim(F)$ par définition.
2. Si $\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$, la formule du rang nous dit que $\dim(\ker(u)) = 0$, soit que $\ker(u) = \{0\}$ et u est injective. Réciproquement si u est injective, on a $\ker(u) = \{0\}$ et $\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$.

■

Exercice 9.7 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. *Montrer que :*
$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\left(u^2\right) \Leftrightarrow \ker(u) = \ker\left(u^2\right)$$
où $u^2 = u \circ u$.
2. *Montrer que :*
$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\left(u^2\right) \Leftrightarrow E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) \Leftrightarrow \ker(u) = \ker\left(u^2\right)$$

Solution 9.6

1. *On a toujours :*
$$\mathrm{Im}\left(u^2\right) \subset \mathrm{Im}(u),\ \ker(u) \subset \ker\left(u^2\right)$$
donc :
$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\left(u^2\right) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}\left(u^2\right)$$
et :
$$\ker(u) = \ker\left(u^2\right) \Leftrightarrow \dim(\ker(u)) = \dim\left(\ker\left(u^2\right)\right)$$
D'autre part, le théorème du rang nous dit que :
$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim\left(\ker\left(u^2\right)\right) + \mathrm{rg}\left(u^2\right)$$
ce qui permet de déduire que :
$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\left(u^2\right) \Leftrightarrow \ker(u) = \ker\left(u^2\right)$$
2. *Il suffit de montrer que :*
$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}\left(u^2\right) \Leftrightarrow E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$$
Si $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$, *alors pour tout* x *dans* E, *il existe* y *dans* E *tel que* $u(x) = u^2(y)$, *donc* $x - u(y) \in \ker(u)$ *et* $x = (x - u(y)) + u(y) \in \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$. *On a donc* $E = \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$ *et avec le théorème du rang, on déduit que* $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
Si $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ *alors tout* $x \in \ker(u^2)$ *s'écrit* $x = x_1 + u(x_2)$ *avec* $u(x_1) = 0$ *et* $0 = u^2(x) = u^3(x_2)$ *entraîne que* $u^2(x_2) \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$, *donc* $u(x_2) \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$ *et* $x = x_1 \in \ker(u)$. *On a donc* $\ker(u^2) \subset \ker(u)$ *et* $\ker(u) = \ker(u^2)$, *ce qui équivaut à* $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$.

9.4 Expression matricielle des applications linéaires

Nous avons déjà introduit les matrices en utilisant les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$. En fait tout peut être repris dans le cadre des espaces vectoriels de dimension fini en utilisant des bases de ces espaces, les démonstrations étant identiques à celles du paragraphe 8.5.

On se donne un espace vectoriel E de dimension n, une base $\mathcal{B} = (e_k)_{1\leq k\leq n}$ de E, un espace vectoriel F de dimension m, une base $\mathcal{B}' = (f_k)_{1\leq k\leq m}$ de F et une application linéaire u de E dans F.

Pour tout entier j compris entre 1 et n, il existe des scalaires a_{ij} tels que :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

et pour tout vecteur $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ dans E, on a :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) f_i$$

c'est-à-dire que les composantes dans la base $\mathcal{B}'$ de $u(x)$ sont les :

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \ (1 \leq i \leq m)$$

Définition 9.7 *Avec les notations qui précèdent, on dit que la matrice :*

$$A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$$

est la matrice de u dans les base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Dans le cas ou $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on dira simplement que A est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Pour tout j compris entre 1 et n, la colonne numéro j de la matrice A est le vecteur :

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

formé des composantes de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

L'égalité $y = u(x)$ se traduit alors par le produit matriciel :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = AX$$

où les x_j, pour j compris entre 1 et n sont les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$ et les y_i, pour i compris entre 1 et m celles de $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 9.8 *Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels et de degré au plus égal à n. Pour $n \geq 1$, on considère l'application :*

$$\begin{array}{rccc} u & \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ & P & \mapsto & xP' \end{array}$$

où on a noté, pour toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_n[x]$, P' le polynôme dérivé de P.

1. *Montrer que u est une application linéaire de E dans E.*
2. *Donner la matrice de u dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \cdots, x^n)$ de E.*
3. *L'application u est-elle injective ?*
4. *L'application u est-elle surjective ?*
5. *Calculer le noyau, l'image et le rang de u.*
6. *Soit F le sous-espace-vectoriel de E engendré par $(x, x^2, \cdots, x^n)$. Montrer que l'application u est bijective de F sur F.*

Solution 9.7

1. *Pour $P \in E$, on a $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $xP' \in \mathbb{R}_n[x] = E$, donc u va bien de E dans E.*
   Pour P, Q dans E et λ, μ dans $\mathbb{R}$, on a :
   $$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) = x(\lambda P + \mu Q)' &= \lambda(xP') + \mu(xQ') \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$
   donc u est linéaire.
2. *On a $u(1) = 0$ et pour k entier compris entre 1 et n :*
   $$u\left(x^k\right) = kx^k.$$
   La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est donc :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$
3. *On a $u(1) = 0$ avec $1 \neq 0$, donc u non injective.*
4. *Pour tout polynôme $P \in E$, on a $u(P)(0) = 0$ car $u(P) = xP'$, donc 1 n'est pas dans l'image de u et u est non surjective.*
5. *On a $P \in \ker(u)$ si, et seulement si, $xP' = 0$, ce qui équivaut encore à $P' = 0$, soit P constant. Donc $\ker(u)$ est la droite dirigée par le polynôme constant 1.*
   En utilisant le théorème du rang, on déduit que
   $$\operatorname{rg}(u) = \dim(E) - 1 = n.$$
   L'image de u est contenu dans l'espace $x\mathbb{R}_{n-1}[x]$ des polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ multiples de x. Réciproquement tout polynôme dans $x\mathbb{R}_{n-1}[x]$ s'écrit xQ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et désignant par $P \in \mathbb{R}_n[x]$ une primitive de Q, on a $xQ = xP' = u(P)$. Donc $\operatorname{Im}(u) = x\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
   On retrouve le rang de u :
   $$\operatorname{rg}(u) = \dim(x\mathbb{R}_{n-1}[x]) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[x]) = n.$$

6. *On remarque que* $F = x\mathbb{R}_{n-1}[x] = \mathrm{Im}(u)$. *Donc la restriction* v *de* u *à* F *est un endomorphisme de* F. *Son noyau est :*

$$\ker(v) = F \cap \ker(u) = \{0\}$$

il en résulte que u *est un isomorphisme.*

Comme dans le cas de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$, on a le résultat suivant.

Théorème 9.17 *Si* u *et* v *sont deux applications linéaires de* E *dans* F *de matrices respectives* $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ *et* $B = ((b_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *alors, pour tous scalaires* λ, μ, *l'application linéaire* $\lambda u + \mu v$ *a pour matrice dans ces bases la matrice* $\lambda A + \mu B = ((\lambda a_{i,j} + \mu b_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$.

Ce résultat peut se traduire en disant que l'application qui associe à toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ sa matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est linéaire. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 9.18 *Étant données une base* $\mathcal{B} = (e_k)_{1\leq k\leq n}$ *de* E *et une base* $\mathcal{B}' = (f_k)_{1\leq k\leq m}$ *de* F, *l'application* φ *qui associe à toute application linéaire* $u \in \mathcal{L}(E, F)$ *sa matrice* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{L}(E, F)$ *sur* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Démonstration. On vient de voir que φ est linéaire et cette application est bijective du fait qu'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est uniquement déterminée par sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. ■

En particulier, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ ayant pour matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$. On dira que u est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A.

Pour ce qui est de la matrice d'une composée d'applications linéaires nous avons le résultat suivant où G est un espace vectoriel de dimension r et $\mathcal{B}'' = (g_k)_{1\leq k\leq r}$ une base de G.

Théorème 9.19 *Si* v *est une application linéaire de* E *dans* F *de matrice* $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *et* u *une application linéaire de* F *dans* G *de matrice* $A \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{K})$ *dans les bases* $\mathcal{B}'$ *et* $\mathcal{B}''$, *alors la matrice dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}''$ *de l'application linéaire* $u \circ v$ *de* E *dans* G *est la matrice produit* $C = AB \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$.

On en déduit le résultat suivant, où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E.

Théorème 9.20 *Un endomorphisme* u *de* E *est bijectif si, et seulement si, sa matrice* A *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *est inversible et dans ce cas* A^{-1} *est la matrice de* u^{-1} *dans les bases* $\mathcal{B}'$ *et* $\mathcal{B}$.

En regardant une matrice comme un ensemble de vecteurs colonnes, on peut donner la définition suivante.

Définition 9.8 *Soit* $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ *une matrice dans* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. *En désignant, pour tout* j *compris entre* 1 *et* n, *par* $C_j = (a_{ij})_{1\leq i\leq n}$ *le vecteur de* $\mathbb{K}^n$ *représentant la colonne numéro* j *de* A, *le rang de* A *est le rang de la famille* $(C_1, C_2, \cdots, C_n)$ *de vecteurs de* $\mathbb{K}^n$.

Théorème 9.21 *Le rang d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{K})$ *est égal au rang de l'application linéaire* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ *canoniquement associé à la matrice* A.

Démonstration. En désignant par $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de $\mathbb{K}^n$ et par $\mathcal{B}' = (f_k)_{1 \leq k \leq m}$ une base de $\mathbb{K}^m$, pour tout j compris entre 1 et n, la colonne numéro j de A est $C_j = u(e_j)$ et :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, C_2, \cdots, C_n) = \text{rg}(u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_n)) = \text{rg}(u).$$

■

Théorème 9.22 *Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ a pour matrice $A \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{K})$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (toujours avec les notations du début de ce paragraphe), alors le rang de u est égal au rang de A.*

Démonstration. On utilise la formule du rang.

Dire que $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ est dans le noyau de u équivaut à dire que $u(x) = 0$, ce qui se traduit par $AX = 0$, où $X = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$ est le vecteur de $\mathbb{K}^n$ formé des composantes de x dans la base $\mathcal{B}$. En désignant par v l'application linéaire canoniquement associée à A, on a $v(X) = AX = 0$, c'est-à-dire que X est dans le noyau de v. Réciproquement si $X \in \ker(v)$, on a $AX = 0$, ce qui équivaut à $u(x) = 0$, soit $x \in \ker(u)$. L'application $x \mapsto X$ réalise donc un isomorphisme de $\ker(u)$ sur $\ker(v)$ et $\dim(\ker(u)) = \dim(\ker(v))$, ce qui équivaut à $\text{rg}(u) = \text{rg}(v)$ en utilisant le théorème du rang. Et donc $\text{rg}(u) = \text{rg}(v) = rg(A)$. ■

9.5 Formules de changement de base

On se donne un espace vectoriel E de dimension n et deux base de E, $\mathcal{B}_1 = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $\mathcal{B}_2 = (e'_k)_{1 \leq k \leq n}$. Une question naturelle est de savoir comment passer des composantes d'un vecteur de E d'une base à l'autre.

Pour tout vecteur $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} x'_j e'_j$ dans E, on note $X = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $X' = \left(x'_j\right)_{1 \leq j \leq n}$ les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ respectivement formés des composantes de x dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Comme, pour j compris entre 1 et n le vecteur e'_j est dans E, il s'écrit :

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

où les p_{ij} sont des scalaires uniquement déterminés. On a alors :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i \end{aligned}$$

et avec l'unicité de l'écriture de x dans la base $\mathcal{B}_1$, on déduit que :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \ \ (1 \leq i \leq n)$$

ce qui peut se traduire par l'égalité matricielle :

$$X = PX'$$

où P est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

ayant pour colonne j le vecteur de $\mathbb{K}^n$ formé des composantes de e'_j dans la bases $\mathcal{B}_1$.

On peut retenir cette formule sous la forme :

$$X_{\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} X_{\mathcal{B}_2}$$

avec des notations évidentes.

Définition 9.9 *Avec les notations qui précèdent, on dit que P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.*

Théorème 9.23 *Avec les notations qui précèdent, la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que la matrice P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est la matrice dans les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$ de l'identité de E. En effet, pour tout j compris entre 1 et n on a :

$$Id_E\left(e'_j\right) = e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i.$$

Cette matrice est donc inversible et son inverse est la matrice dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de $(Id_E)^{-1} = Id_E$ c'est-à-dire la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$. ■

On a donc :

$$(P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2})^{-1} = P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}.$$

Le calcul de l'inverse de la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ peut se calculer en résolvant le système linéaire aux inconnues e_i :

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \ \ (1 \leq i \leq n)$$

Exercice 9.9 *On désigne par $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$.*

1. *Montrer que $\mathcal{B}_2 = (e'_1 = e_1 - e_2, e'_2 = 2e_2 + e_3, e'_3 = e_1 + e_3)$ est une base de $\mathbb{K}^3$.*
2. *Calculer l'inverse de la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.*

Solution 9.8

1. *L'égalité $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0$ équivaut à :*

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En additionnant les deux premières équations, on a $\lambda_3 + 2\lambda_2 = 0$ qui reporté dans la troisième donne $\lambda_2 = 0$. Les équations 2 et 3 donnent alors $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. La famille $\mathcal{B}_2$ est donc libre dans $\mathbb{K}^3$ et c'est une base puisqu'elle a trois éléments.

2. La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 \\ e_2' = 2e_2 + e_3 \\ e_3' = e_1 + e_3 \end{cases}$$

on déduit que :

$$\begin{cases} e_1 = 2e_1' + e_2' - e_3' \\ e_2 = e_1' + e_2' - e_3' \\ e_3 = -2e_1' - e_2' + 2e_3' \end{cases}$$

ce qui signifie que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On est maintenant en mesure d'exprimer la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base $\mathcal{B}_2$ en fonction de sa matrice dans la base $\mathcal{B}_1$.

Théorème 9.24 *Si u est un endomorphisme de E de matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ dans la base $\mathcal{B}_1$ et de matrice $A' = \left((a'_{ij})\right)_{1\leq i,j\leq n}$ dans la base $\mathcal{B}_2$, on a alors $A' = P^{-1}AP$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.*

Démonstration. PA' est la matrice de $Id_E \circ u = u$ dans les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$ et AP est aussi la matrice de $u \circ Id_E = u$ dans les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$. On a donc $PA' = AP$, ce qui équivaut à $A' = P^{-1}AP$. ■

Cette formule de changement de base peut se retenir sous la forme :

$$A_{\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} A_{\mathcal{B}_1} P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}.$$

Dans le cas où la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}_2$ a une forme plus simple que celle de A, on peut l'utiliser pour calculer les puissances de u ou de A. L'idée étant que l'égalité $A' = P^{-1}AP$ entraîne pour tout entier naturel p, on a $(A')^p = P^{-1}A^pP$ ou encore $A^p = P\,(A')^p\,P^{-1}$. La vérification étant immédiate par récurrence sur $p \geq 0$ (toujours avec la convention $A^0 = I_n$).

Si par exemple, la matrice A' est diagonale, c'est-à-dire de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on a alors, pour tout $p \geq 0$:

$$(A')^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

Pour $p \geq 1$, l'endomorphisme u^p est défini par la formule de récurrence $u^p = u^{p-1} \circ u$ avec $u^0 = Id_E$. Si A est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_1$, alors celle de A^p dans cette même base est A^p.

Exercice 9.10 *On désigne par $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les bases de $\mathbb{K}^3$ de l'exercice 9.9 et par u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -6 & -4 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_1$.*

1. *Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_2$.*
2. *Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la matrice de u^p dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$.*

Solution 9.9

1. *La matrice de u dans la base $\mathcal{B}_2$ est :*

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -6 & -4 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *La matrice de u^p dans la base $\mathcal{B}_2$ est :*

$$(A')^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et dans la base $\mathcal{B}_1$ c'est :

$$A^p = P\,(A')^p\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{p+1} & 2^p & -2^{p+1} \\ 2\,(-1)^p - 2^{p+1} & 2\,(-1)^p - 2^p & 2^{p+1} - 2\,(-1)^p \\ (-1)^p & (-1)^p & (-1)^{p+1} \end{pmatrix}$$

Exercice 9.11 *Soit $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{K}^3\right)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -8 & 6 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$.*

1. *Déterminer les images par u des vecteurs $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = e_2 - e_3$, $e'_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$.*
2. *Montrer que $\mathcal{B}_2 = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{K}^3$ et donner la matrice de u dans cette base.*
3. *Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la matrice de u^p dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$.*

Solution 9.10 *Laissée au lecteur.*