**ENS Lyon, 2-ème concours, 2010**

# 1 Énoncé

**– I – Polynômes d'interpolation de Fejér-Hermite**

1. On désigne par $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie sur l'intervalle $I = [-1, 1]$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$
   (a) Déterminer $T_0$, $T_1$ et $T_2$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on peut exprimer $T_{n+1}$ en fonction de $T_n$ et $T_{n-1}$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $T_n$ est un polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.
   (d) Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, les racines du polynôme $T_n$. On rangera ces racines dans l'ordre décroissant en les notant $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$.

2. Soient $f$ une fonction continue de $I$ dans $\mathbb{R}$ et $n$ un entier naturel non nul. On note $N = 2n - 1$ et on cherche un polynôme $P_N$ de degré inférieur ou égal à $N$ tel que :
$$P_N(x_i) = f(x_i),\ P'_N(x_i) = 0\ \ (1 \leq i \leq n)$$
   (a) Montrer que si ce polynôme existe, il est alors unique. En déduire l'existence de ce polynôme.
   On note, pour tout $n \geq 1$, tout $x \in I$ :
$$\pi_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$
   et pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$ :
$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$
   (b) Pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$, exprimer $\pi'_n(x_i)$ en fonction de $\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)$.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in I$, si l'on note pour $i$ compris entre 1 et $n$ :
$$F_i(x) = \left(1 - \frac{\pi''_n(x_i)}{\pi'_n(x_i)}(x - x_i)\right) L_i^2(x)$$
   on a :
$$P_N(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) F_i(x)$$
   (d) Montrer que la famille $\mathcal{H}_n = \{L_i^2 \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(x - x_i) L_i^2 \mid 1 \leq i \leq n\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.
   (e) En utilisant la base $\mathcal{H}_n$, retrouver le résultat de **I.2.c.**

3. Montrer que, pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$ et tout $x \in I$, on a :

$$L_i(x) = \frac{(-1)^{i-1} \sqrt{1-x_i^2}}{n} \frac{T_n(x)}{x - x_i}$$

et :

$$F_i(x) = (1 - x_i x) \left( \frac{T_n(x)}{n(x - x_i)} \right)^2$$

4. Montrer que, pour tout $x \in I$, on a :

$$|f(x) - P_N(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x) - f(x_i)| F_i(x)$$

5. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
   (a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, x'$ dans $I$ vérifiant $|x - x'| \leq \eta$, on ait $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$.
   (b) On note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$. Montrer que, pour tout $x \in I$, on a :

   $$|f(x) - P_N(x)| \leq \varepsilon + \frac{4\|f\|_\infty}{n\eta^2}$$

   (c) En déduire que la suite de polynômes $(P_{2n-1})_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $f$ sur $I$.
6. Plus généralement, pour $n$ entier naturel non nul, on note $(x_{i,n})_{1 \leq i \leq n}$ une suite de $n$ réels distincts de $I$. Montrer que la fonction $f$ peut être approchée uniformément sur $I$ par une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant :

$$P_n(x_{i,n}) = f(x_{i,n}) \ (1 \leq i \leq n)$$

# 2 Solution

### – I – Polynômes d'interpolation de Fejér-Hermite

1. Pour tout réel $x \in I = [-1, 1]$, on note $\theta = \arccos(x)$ et on a $\theta \in [0, \pi]$.
   (a) On a, pour tout $x \in I$ :

   $$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_2(x) = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 2x^2 - 1$$

   (b) Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in I$, on a :

   $$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) = 2xT_n(x)$$

   donc :

   $$\forall n \geq 1,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

   (c) On en déduit, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, $T_n$ est un polynôme de degré $n$ et en désignant par $\alpha_n$ le coefficient dominant de $T_n$, on a $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n$ pour tout $n \geq 1$avec $\alpha_1 = 1$, ce qui nous donne $\alpha_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. On a aussi $\alpha_0 = 1$.

(d) Pour $n \geq 1$ et $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned}(T_n(x) = 0) &\Leftrightarrow (\cos(n\theta) = 0 \text{ avec } n\theta \in [0, n\pi]) \\ &\Leftrightarrow \left(n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } 0 \leq k \leq n-1\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x = \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) \text{ avec } 0 \leq k \leq n-1\right)\end{aligned}$$

Donc le polynôme $T_n$, qui est de degré $n$, a $n$ racines réelles distinctes dans $I$ données par :

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) \ (1 \leq i \leq n)$$

La fonction cos étant décroissante sur $[0, \pi]$, la suite $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est bien strictement décroissante. Sur la figure 1, on a représenté le graphe de $T_5$.

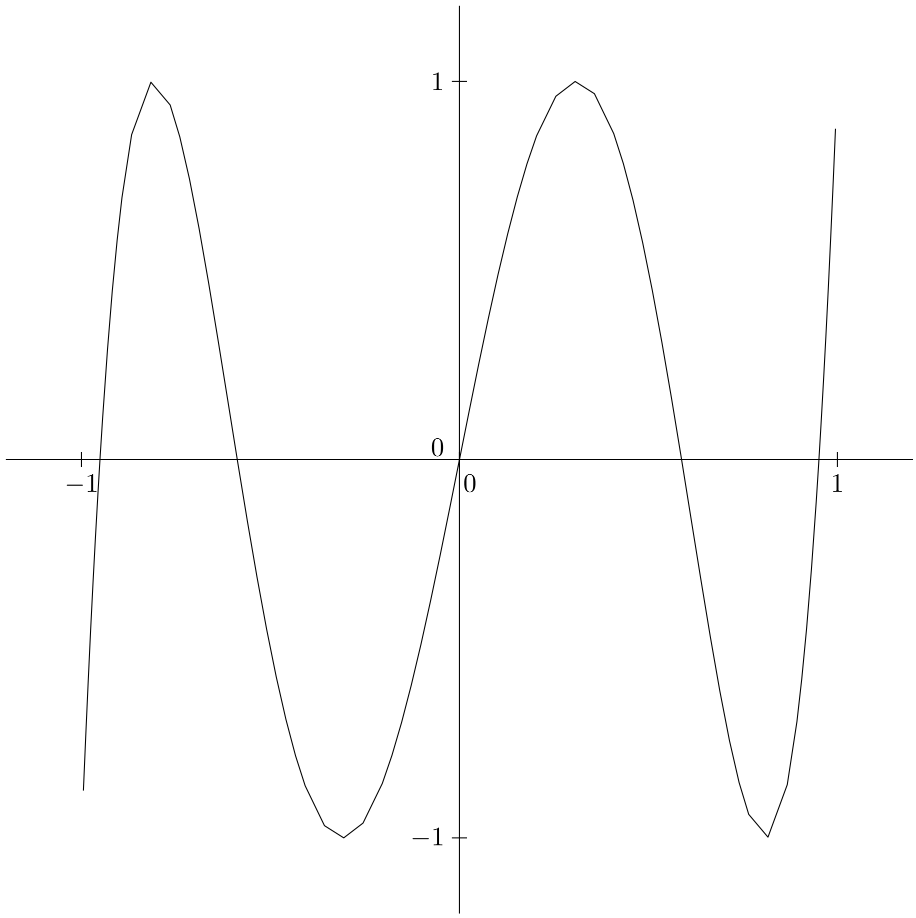


FIGURE 1 – $T_5(x) = \cos(5 \arccos(x))$

2.

(a) Pour montrer l'unicité du polynôme $P_N$, il est équivalent de montrer que si $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ est tel que :

$$P_N(x_i) = 0, \ P_N'(x_i) = 0 \ (1 \leq i \leq n) \tag{1}$$

on a alors $P = 0$.
Dire que $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie (1) revient à dire que les $x_i$, pour $i$ compris entre 1 et $n$, sont

des racines distinctes de $P$ de multiplicité au moins égal à 2 et en conséquence, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2$. Si on suppose de plus que $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a alors nécessairement $Q = 0$ à cause des degrés et $P = 0$.
On a en fait montré que l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_{2n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^{2n} \\ & P & \mapsto & (P(x_1), P'(x_1), \cdots, P(x_n), P'(x_n)) \end{array}$$

est injective (son noyau est réduit à $\{0\}$) et à cause des dimensions c'est un isomorphisme, ce qui signifie que pour tout $y \in \mathbb{R}^{2n}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que $y = \varphi(y)$. Prenant $y = (f(x_1), 0, \cdots, f(x_n), 0)$, on en déduit l'existence et l'unicité de $P_N$ (qui dépend aussi de $f$ et des $x_i$).

(b) En notant $\lambda_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)$ pour tout $i$ compris entre 1 et $n$, on a :

$$\pi_n(x) = (x - x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j) = \lambda_i (x - x_i) L_i(x)$$

et :

$$\pi_n'(x) = \lambda_i (L_i(x) + (x - x_i) L_i'(x))$$

ce qui nous donne :

$$\pi_n'(x_i) = \lambda_i L_i(x_i) = \lambda_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0$$

puisque :

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$$

Nous aurons aussi besoin de $\pi_n''(x_i)$ pour les questions suivantes, ce qui nous est donné par :

$$\pi_n''(x) = \lambda_i (2L_i'(x) + (x - x_i) L_i''(x))$$

et :

$$\pi_n''(x_i) = 2\lambda_i L_i'(x_i) = 2\pi_n'(x_i) L_i'(x_i)$$

(c) On a, pour tout $j$ compris entre 1 et $n$ :

$$F_j(x) = \left(1 - \frac{\pi_n''(x_j)}{\pi_n'(x_j)}(x - x_j)\right) L_j^2(x) = \left(1 - 2L_j'(x_j)(x - x_j)\right) L_j^2(x)$$

donc :

$$F_j(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n)$$

et :

$$F_j'(x) = \left(2\left(1 - 2L_j'(x_j)(x - x_j)\right) L_j'(x) - 2L_j'(x_j) L_j(x)\right) L_j(x)$$

donc :

$$F_j'(x_i) = \begin{cases} 2L_i'(x_i) - 2L_i'(x_i) \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases} = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

Chaque polynôme $L_j^2(x)$ étant de degré $2(n-1)$, le polynôme $F_j$ est dans $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ ainsi que le polynôme $P(x)=\sum\limits_{j=1}^{n} f(x_j) F_j(x)$ et on a :

$$P(x_i)=\sum_{j=1}^{n} f(x_j) F_j(x_i) = f(x_i) \ \ (1 \leq i \leq n)$$

et :

$$P'(x_i)=\sum_{j=1}^{n} f(x_j) F_j'(x_i) = 0 \ \ (1 \leq i \leq n)$$

L'unicité de $P_N$ nous dit alors que $P=P_N$.

(d) La famille $\mathcal{H}_n$ étant formé de $2n$ éléments de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, qui est de dimension $2n$, il nous suffit de montrer qu'elle est libre. Si :

$$P(x)=\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j+\beta_j(x-x_j)) L_j^2(x)=0$$

en prenant $x=x_i$, pour $i$ compris entre 1 et $n$, on obtient $\alpha_i=0$. Il reste donc :

$$P(x)=\sum_{j=1}^{n} \beta_j(x-x_j) L_j^2(x)=0$$

En dérivant on a :

$$P'(x)=\sum_{j=1}^{n} \left(\beta_j L_j(x)+2\beta_j(x-x_j) L_j'(x)\right) L_j(x)=0$$

et $x=x_i$, pour $i$ compris entre 1 et $n$, donne $\beta_i=0$.

(e) On cherche le polynôme $P_N$ dans la base $\mathcal{H}_n$ sous la forme :

$$P_N(x)=\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j+\beta_j(x-x_j)) L_j^2(x)$$

Les conditions $P(x_i)=f(x_i)$ pour $i$ compris entre 1 et $n$ donnent $\alpha_i=f(x_i)$.
Le polynôme dérivé de $P_N$ est donné par :

$$P_N'(x)=\sum_{j=1}^{n} \left(2\alpha_j L_j'(x)+\beta_j L_j(x)+2\beta_j(x-x_j) L_j'(x)\right) L_j(x)$$

et les conditions $P_N'(x_i)=0$ pour $i$ compris entre 1 et $n$ donnent :

$$0=P_N'(x_i)=2\alpha_i L_i'(x_i)+\beta_i$$

soit $\beta_i=-2f(x_i) L_i'(x_i)$. On a alors une première expression du polynôme $P_N$ :

$$P_N(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(1-2L_i'(x_i)(x-x_i)) L_i^2(x)$$

et avec $\pi_n''(x_i)=2\pi_n'(x_i) L_i'(x_i)$, on déduit que :

$$P_N(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(1-\frac{\pi_n''(x_i)}{\pi_n'(x_i)}(x-x_i)\right) L_i^2(x)$$

3. On a $T_n(x) = 2^{n-1}\pi_n(x)$ et :

$$L_i(x) = \frac{\pi_n(x)}{(x-x_i)\,\pi_n'(x_i)} = \frac{T_n(x)}{(x-x_i)\,T_n'(x_i)}$$

avec $x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$ et :

$$T_n'(x_i) = \frac{n}{\sqrt{1-x_i^2}}\sin(n\arccos(x_i)) = \frac{n}{\sqrt{1-x_i^2}}\sin\left((2i-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{i-1}\frac{n}{\sqrt{1-x_i^2}}$$

ce qui donne :

$$L_i(x) = \frac{(-1)^{i-1}\sqrt{1-x_i^2}}{n}\frac{T_n(x)}{x-x_i}$$

et :

$$F_i(x) = \left(1 - \frac{\pi_n''(x_i)}{\pi_n'(x_i)}(x-x_i)\right)\left(1-x_i^2\right)\left(\frac{T_n(x)}{n(x-x_i)}\right)^2$$

Enfin avec :

$$\begin{aligned} T_n''(x) &= \frac{n}{1-x^2}\left(-n\cos(n\arccos(x)) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos(x))\right) \\ &= \frac{n}{1-x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos(x)) - nT_n(x)\right) \end{aligned}$$

il vient :

$$T_n''(x_i) = \frac{n}{1-x_i^2}\frac{x}{\sqrt{1-x_i^2}}\sin(n\arccos(x_i)) = (-1)^{i-1}\frac{n}{1-x_i^2}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i^2}}$$

donc :

$$\frac{\pi_n''(x_i)}{\pi_n'(x_i)} = \frac{x_i}{1-x_i^2}$$

et :

$$1 - \frac{\pi_n''(x_i)}{\pi_n'(x_i)}(x-x_i) = 1 - \frac{x_i}{1-x_i^2}(x-x_i) = \frac{1-xx_i}{1-x_i^2}$$

ce qui donne :

$$F_i(x) = (1-x_ix)\left(\frac{T_n(x)}{n(x-x_i)}\right)^2 \tag{2}$$

De cette relation, on déduit que les fonctions polynomiales $F_i$ sont à valeurs positives ou nulles ($x$ et les $x_i$ sont dans $[-1,1]$, donc $|x_ix| \leq 1$ et $1 - x_ix \geq 0$) et avec $P_N(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)F_i(x)$, on déduit que :

$$\forall x \in I,\ |P_N(x)| \leq \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|\,F_i(x) \leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n} F_i(x)$$

De plus, si $f = P$ est dans $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a $P_N = P$ du fait de l'unicité de $P_N$. Pour $P = 1$, cela nous donne :

$$\forall x \in I,\ \sum_{i=1}^{n} F_i(x) = 1$$

et :

$$\forall x \in I,\ |P_N(x)| \leq \|f\|_\infty$$

ou encore $\|P_N\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Cette dernière inégalité traduit la continuité de l'application linéaire $T_N : f \mapsto P_N$ de $\left(\mathcal{C}^0(I), \|\cdot\|_\infty\right)$ dans lui même. Comme $T_N(1) = 1$, on a $\|T_N\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1}\|T_N(f)\|_\infty = 1$.

4. Des remarques qui précèdent, on déduit que :

$$\forall x \in I,\ f(x) - P_N(x) = \sum_{i=1}^{n} (f(x) - f(x_i)) F_i(x)$$

et :

$$\forall x \in I,\ |f(x) - P_N(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x) - f(x_i)| F_i(x)$$

5.

(a) La fonction $f$ étant continue sur le compact $I = [-1,1]$, elle y est uniformément continue, ce qui signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\big((x,x') \in I^2 \text{ et } |x - x'| \leq \eta\big) \Rightarrow (|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon)$$

(b) Pour $x$ fixé dans $I$, on partionne l'ensemble $E = \{1, 2, \cdots, n\}$ en $E = J_x \cup K_x$ avec :

$$J_x = \{i \in E \mid |x - x_i| \leq \eta\} \text{ et } K_x = \{i \in E \mid |x - x_i| > \eta\}$$

et on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |f(x) - f(x_i)| F_i(x) &= \sum_{i \in J_x} |f(x) - f(x_i)| F_i(x) + \sum_{i \in K_x} |f(x) - f(x_i)| F_i(x) \\
&\leq \varepsilon \sum_{i \in J_x} F_i(x) + \sum_{i \in K_x} |f(x) - f(x_i)| F_i(x) \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} F_i(x) + \sum_{i \in K_x} |f(x) - f(x_i)| F_i(x) \\
&\leq \varepsilon + \sum_{i \in K_x} |f(x) - f(x_i)| F_i(x)
\end{aligned}$$

Pour $i \in K_x$, on a $|x - x_i| > \eta$, donc $x \neq x_i$ et, tenant compte de $|T_n(x)| = |\cos(n \arccos(x))| \leq 1$, on a :

$$0 \leq F_i(x) = (1 - x_i x) \left(\frac{T_n(x)}{n(x - x_i)}\right)^2 \leq \frac{2}{n^2 (x - x_i)^2} \leq \frac{2}{n^2 \eta^2}$$

ce qui nous donne :

$$\sum_{i \in K_x} |f(x) - f(x_i)| F_i(x) \leq 2 \|f\|_\infty \sum_{i \in K_x} \frac{2}{n^2 \eta^2} \leq n \frac{4 \|f\|_\infty}{n^2 \eta^2} = \frac{4 \|f\|_\infty}{n \eta^2}$$

En définitive, on a :

$$\forall x \in I,\ |f(x) - P_N(x)| \leq \varepsilon + \frac{4 \|f\|_\infty}{n \eta^2}$$

(c) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4 \|f\|_\infty}{n \eta^2} = 0$, il existe un entier $n_\varepsilon \geq 1$ tel que $\dfrac{4 \|f\|_\infty}{n \eta^2} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et donc :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in I,\ |f(x) - P_N(x)| \leq 2\varepsilon$$

ce qui nous dit que la suite $(P_{2n-1})_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $f$ sur $I$.
Nous avons donc ainsi montré le théorème de Weierstrass qui nous dit que toute fonction continue sur $I = [-1,1]$ peut être approchée uniformément par une suite de polynômes.

6. On suppose que pour tout entier $n \geq 1$, on dispose d'une suite $(x_{i,n})_{1 \leq i \leq n}$ de $n$ réels deux à deux distincts dans $I$.
On associe à cette suite la base de Lagrange $(\Lambda_{i,n})_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par :
$$\Lambda_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_{j,n}}{x_{i,n} - x_{j,n}} \ (1 \leq i \leq n)$$
et on note :
$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \|\Lambda_{i,n}\|_\infty$$
Le théorème de Weierstrass nous dit que, pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver une fonction polynomiale $\varphi_n$ telle que
$$\|f - \varphi_n\|_\infty \leq \min\left(\frac{1}{n \cdot M_n}, \frac{1}{n}\right)$$
On associe à ce polynôme $\varphi_n$, le polynôme d'interpolation de Lagrange $Q_n$ défini par $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $Q_n(x_{i,n}) = f(x_{i,n}) - \varphi_n(x_{i,n})$. Ce polynôme est donné par :
$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i,n}) - \varphi_n(x_{i,n})\right) \Lambda_{i,n}(x)$$
et on a :
$$\forall x \in I,\ |Q_n(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i,n}) - \varphi_n(x_{i,n})| \, \|\Lambda_{i,n}\|_\infty \leq \frac{1}{n \cdot M_n} M_n = \frac{1}{n}$$
soit $\|Q_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$.
En posant $R_n = \varphi_n + Q_n$, on a :
$$\forall n \geq 1,\ \|f - R_n\|_\infty \leq \|Q_n\|_\infty + \|f - \varphi_n\|_\infty \leq \frac{2}{n}$$
donc la suite de fonctions polynomiales $(R_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $f$ sur $I$.
De plus, on a, pour tout $n \geq 1$ et tout $i$ compris entre 1 et $n$ :
$$R_n(x_{i,n}) = \varphi_n(x_{i,n}) + Q_n(x_{i,n}) = f(x_{i,n})$$
(théorème de Walsh).