Chapitre 3

Espaces vectoriels normés

E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ des nombres réels ou complexes.

Les notions de base sur les fonctions d'une variable réelle (continuité, dérivabilité, intégrabilité au sens de Riemann, fonctions usuelles) sont supposées acquises.

3.1 Semi-normes et normes

Définition 3.1. Une *semi-norme* sur E est une application $p : E \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x, y) \in E^2$, on ait :

- $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$ (*axiome d'homogénéité*) ;
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (*inégalité triangulaire*).

Le résultat qui suit nous dit qu'une semi-norme est nécessairement à valeurs positives ou nulles (l'axiome de positivité est donc inutile dans la définition) et nous donne une formulation équivalente de l'inégalité triangulaire souvent utile.

Lemme 3.1 *Soit p une semi-norme sur E.*

1. *Pour tout $x \in E$, on a $p(x) \geq 0$;*
2. *l'ensemble $p^{-1}\{0\} = \{x \in E,\ p(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E ;*
3. *pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ (deuxième inégalité triangulaire) ;*
4. *pour toute suite $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'éléments de E, on a $p\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} p(x_k)$ (*inégalité polygonale*).*

Démonstration

1. Pour tout $x \in E$, on a $p(0) = p(0 \cdot x) = 0 \cdot p(x) = 0$ et $0 = p(x - x) \leq 2p(x)$, donc $p(x) \geq 0$.

2. L'ensemble $p^{-1}\{0\}$ est non vide puisqu'il contient 0 et avec les propriétés d'une semi-norme, on déduit facilement que c'est un sous-espace vectoriel de E.

3. Cette inégalité se déduit de $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$ et de $p(y) = p(y - x + x) \leq p(x - y) + p(x)$.

4. On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$. ■

Le sous-espace vectoriel $p^{-1}\{0\}$ est le *noyau* de la semi-norme p.

Définition 3.2. Une *norme* sur E est une semi-norme dont le noyau est réduit à $\{0\}$.

Une norme sur E est notée $x \mapsto \|x\|$ et le couple $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé. Une norme sur E est donc une semi-norme telle que $\|x\| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$ (*axiome de séparation*).

Exemples 3.1

1. *Les normes sur $\mathbb{K}$ sont de la forme $N_\alpha : x \mapsto \alpha |x|$, où $\alpha \in \mathbb{R}^{+,*}$. En effet il est clair que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+,*}$, l'application N_α est une norme. Si N est une norme sur $\mathbb{K}$, on a alors $\alpha = N(1) > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a :*
$$N(x) = N(x \cdot 1) = |x| N(1) = \alpha |x|$$
2. *Pour tout réel $\alpha > 0$ et toute forme linéaire non nulle ℓ sur E, l'application $x \mapsto \alpha |\ell(x)|$ définit une semi-norme sur E et c'est une norme si, et seulement si, E est de dimension égale à 1.*
3. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de E et $p \geq 1$ un réel. Les applications respectivement définies sur E par $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ et $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ pour tout $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$ définissent des normes. Pour $p = +\infty$ et $p = 1$, cela se vérifie facilement, pour $p > 1$, voir l'exercice 3.1. Pour $p \in]0,1[$, l'application $x \mapsto \|x\|_p$ ne définit pas une norme sur E (exercice 3.1). La notation $\|x\|_\infty$ est justifiée par le fait que pour tout $x \in E$, on a $\lim\limits_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ (exercice 3.1).*
4. *Si $\left(E_1, \|\cdot\|^{(1)}\right), \cdots, \left(E_p, \|\cdot\|^{(p)}\right)$ sont des espaces normés, on définit alors une norme sur l'espace produit $E = \prod\limits_{k=1}^{p} E_k$ en posant $\|x\| = \max\limits_{1 \leq k \leq p} \|x_k\|^{(k)}$ pour tout $x = (x_k)_{1 \leq k \leq p} \in E$. C'est cette norme que nous utiliserons* a priori *sur un tel espace produit.*
5. *Pour tout ensemble non vide D et tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, en désignant par $\mathcal{F}_b(D, E)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de D dans E, l'application $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in D} \|f(x)\|$ définit une norme sur $\mathcal{F}_b(D, E)$. Pour $D = \mathbb{N}$, cet ensemble est l'espace $\ell^\infty(E)$ des suites bornées d'éléments de E.*
6. *Pour tous réels $a < b$, les applications respectivement définies sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$ des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$ et $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$ pour tout $f \in E$, définissent des normes. Pour toute fonction $f \in E$, on a $\lim\limits_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ (voir l'exercice 3.2).*

7. *Étant données une fonction* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *non identiquement nulle croissante bornée telle que* $\varphi(0) = 0$ *et* $\varphi(t + t') \leq \varphi(t) + \varphi(t')$ *pour tous* t, t' *dans* $\mathbb{R}^+$ *et une famille de semi-normes* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* E *telle* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p_n^{-1}\{0\} = \{0\}$ *(une telle famille de semi-normes est dite* séparante*), l'application* d *définie sur* E^2 *par* $d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi(p_n(y - x))}{2^n}$ *est une distance sur* E*. On peut prendre* $\varphi(t) = \min(t, 1)$, $\varphi(t) = \frac{t}{1 + t}$ *ou* $\varphi(t) = t^\alpha$ *pour* $\alpha \in]0, 1[$ *(exercice 3.3). Les coefficients* $\frac{1}{2^n}$ *peuvent être remplacés par* $a_n > 0$ *où* $\sum a_n < +\infty$.
8. *L'*espace de Schwartz *(ou l'espace des* fonctions à décroissance rapide*)* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est l'espace vectoriel des fonctions* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *telles que, pour tout* $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $\lim_{|t|\to+\infty} t^k \varphi^{(\ell)}(t) = 0$*. Les applications* p_n *définies sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *par* $p_n(\varphi) = \sum_{0\leq k,\ell\leq n} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|t^k \varphi^{(\ell)}(t)\right|$ *définissent des semi-normes (*p_0 *étant en particulier une norme), ce qui permet de définir une distance sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *en posant* $d(\varphi, \psi) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m} \frac{p_m(\varphi - \psi)}{1 + p_m(\varphi - \psi)}$ *pour toutes fonctions* φ *et* ψ *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

À partir d'une norme $\|\cdot\|$ sur E, on définit une distance sur cet espace en posant $d(x, y) = \|y - x\|$ pour tous x, y dans E, ce qui permet de munir E d'une topologie.

Définition 3.3. On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur E sont *équivalentes*, si les distances qu'elles définissent sont équivalentes (voir la définition 2.2).

La définition précédente revient à dire qu'il existe deux constantes réelles α et β strictement positives telles que :

$$\forall x \in E,\ \alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$$

Exemples 3.2

1. *Sur* E *de dimension* $n \geq 1$*, les normes* $\|\cdot\|_p$ *pour* $p \in [1, +\infty]$ *relatives à une base* $\mathcal{B} = (e_k)_{1\leq k\leq n}$ *de* E *sont équivalentes. En effet, on vérifie facilement que pour tout* $x \in E$*, on a* $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$ *(voir l'exercice 3.1, question 5), donc les normes* $\|\cdot\|_\infty$ *et* $\|\cdot\|_p$ *pour réel* $p > 1$ *sont donc équivalentes et par transitivité il en résulte que pour* $p \neq q$ *dans* $[1, +\infty]$, *les normes* $\|\cdot\|_p$ *et* $\|\cdot\|_q$ *sont équivalentes.*
2. *Sur* $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ *les normes* $\|\cdot\|_\infty$ *et* $\|\cdot\|_p$ *où* $p \geq 1$ *est un réel, ne sont pas équivalentes. Pour tout réel* $\lambda > 1$*, considérons la fonction* f_λ *définie sur* $[0, 1]$ *par :*

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \lambda\left(1 - \lambda^{p+1} t\right) \text{ si } t \in \left[0, \frac{1}{\lambda^{p+1}}\right] \\ 0 \text{ si } t \in \left[\frac{1}{\lambda^{p+1}}, 1\right] \end{cases}$$

(elle affine sur $\left[0, \frac{1}{\lambda^{p+1}}\right]$ *valant* λ *en* 0*, nulle sur* $\left[\frac{1}{\lambda^{p+1}}, 1\right]$ *et continue sur* $[0,1]$*). On a* $\|f_\lambda\|_\infty = \lambda$ *et :*

$$\|f_\lambda\|_p^p = \lambda^p \int_0^{\frac{1}{\lambda^{p+1}}} \left(1 - \lambda^{p+1} t\right)^p dt = \frac{1}{(p+1)\,\lambda}$$

soit $\|f_\lambda\|_p = \dfrac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}\,\lambda^{\frac{1}{p}}}$*. Si* $\|\cdot\|_\infty$ *et* $\|\cdot\|_p$ *sont équivalentes, il existe alors* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *tels que* $\alpha \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_p \leq \beta \|\cdot\|_\infty$*, ce qui nous donne en particulier* $\alpha \|f_\lambda\|_\infty = \alpha\lambda \leq \|f_\lambda\|_p = \dfrac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}\,\lambda^{\frac{1}{p}}}$*, soit* $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}\,\lambda^{1+\frac{1}{p}}}$ *pour tout réel* $\lambda > 1$*, ce qui conduit à une impossibilité en faisant tendre* λ *vers l'infini. Donc ces deux normes ne sont pas équivalentes.*

En désignant par $(E, \|\cdot\|)$ et $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ deux espaces vectoriels normés, les notions et résultats essentiels du chapitre 2 sur les espaces métriques se traduisent comme suit. Pour d'autres propriétés, on se référera au chapitre 2.

- Pour $A \subset E$ non vide et $x \in E$, le *diamètre* de A et la *distance* de x à A sont définis par :

$$\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} \|y - x\| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}\,,\ d(x, A) = \inf_{y\in A} \|y - x\| \in \mathbb{R}^+$$

- Pour tout $a \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}^{+,*}$, $B(a,r) = \{x \in E,\ \|x - a\| < r\}$ et $\overline{B}(a,r) = \{x \in E,\ \|x - a\| \leq r\}$ désignent respectivement la *boule ouverte* et la *boule fermée*] de centre a et de rayon r. En particulier, $\overline{B}(0,1)$ est la *boule unité* et $S(0,1) = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$ est la *sphère unité.*
- L'équivalence de deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur E se traduit par l'inclusion des boules :

$$\overline{B'}(0,\alpha) \subset \overline{B}(0,1) \subset \overline{B'}(0,\beta) \text{ et } B'(0,\alpha) \subset B(0,1) \subset B'(0,\beta)$$

  déduites de $\alpha \|\cdot\| \leq \|\cdot\|' \leq \beta \|\cdot\|$.
- Une partie non vide A de E est *bornée* si son diamètre est fini, ce qui revient à dire qu'il existe une constante $R > 0$ telle que $\|x\| \leq R$ pour tout $x \in A$ ou encore qu'elle est contenue dans une boule fermée centrée en 0.
- Un *voisinage* de $a \in E$ est un sous-ensemble de E qui contient une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$.
- Un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de E est un ouvert s'il est vide ou non vide et pour tout $a \in \mathcal{O}$ il existe un réel $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a,r) \subset \mathcal{O}$, ce qui revient à dire qu'il est voisinage de chacun de ses points. Un sous-ensemble de E est un *fermé* si son complémentaire est un ouvert.
- Pour $A \subset E$ non vide, *l'intérieur* de A est le plus grand ouvert $\overset{\circ}{A}$ de E contenu dans A, *l'adhérence* de A est le plus petit fermé $\overline{A}$ de E contenant A et la *frontière* de A est $\partial A = \overline{A} \cap \left(\overline{E \setminus A}\right) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

- L'adhérence d'une boule ouverte $B(a,r)$ est la boule fermée $\overline{B}(a,r)$ alors que dans un espace métrique, on a seulement l'inclusion $\overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r)$ (exercice 3.4).
- Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E distinct de E est d'intérieur vide (exercice 3.5).

3.2 Suites dans un espace vectoriel normé

Les suites ont été étudiées dans le cadre des espaces métriques (paragraphe 2.2). Nous reprenons cette étude dans le cas particulier d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Rappelons les faits suivants.

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite *convergente*, s'il existe $\ell \in E$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\| = 0$ et un tel ℓ est unique. La convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

  La notion de convergence d'une suite dépend de la norme choisie sur E. Dans le cas de deux normes équivalentes, une suite converge pour l'une si, et seulement si, elle converge pour l'autre avec la même limite. Une suite convergente est bornée. De l'inégalité $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$ valable pour tous x, y dans E, on déduit que si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$ dans E, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\| = \|\ell\|$ dans $\mathbb{R}$. La divergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se traduit par :

$$\forall \ell \in E,\ \exists \varepsilon > 0\ ;\ \forall n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_\varepsilon,\ \|u_n - \ell\| \geq \varepsilon$$

  En utilisant l'inégalité triangulaire, on vérifie facilement que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de E convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' et λ est un scalaire, alors la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell + \ell'$. Il en résulte que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors divergente. S'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\|u_n\| \geq v_n$ à partir d'un certain rang, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors divergente.
- Une partie D de E est *dense* dans E, si $\overline{D} = E$, ce qui revient à dire que tout élément de E est limite d'une suite de points de D.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est *de Cauchy*, si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_ε tel que pour tous entiers n, m on a :

$$(n \geq n_\varepsilon,\ m \geq n_\varepsilon) \Rightarrow (\|u_n - u_m\| < \varepsilon)$$

  Une suite de Cauchy est bornée. Une suite convergente est de Cauchy. Pour deux normes équivalentes, une suite est de Cauchy pour l'une si, et seulement si, elle elle l'est pour l'autre.

Dans le cas des suites réelles, où la relation d'ordre a son importance, les principaux résultats sont résumés en fin du paragraphe 1.6. Au paragraphe 2.5 sont étudiées les notions de limites inférieure et supérieure.

Dans le cas particulier où E est de dimension finie, nous verrons que toutes les normes sont équivalentes, ce qui nous ramène à l'étude des suites numériques (voir le paragraphe 3.4.

Les notions d'ouverts, de fermés, d'intérieur, de frontière, d'adhérence, de densité, de compacité, de limite d'une fonction, de continuité et de continuité uniforme peuvent se définir de façon séquentielle. Voir les théorèmes 2.10 (ouvert, ..., densité), la définition 2.14 et le théorème 2.18 (compacité) et les théorèmes 2.26, 2.27 et 2.30 (limites, continuité et continuité uniforme).

En vue de comparer les comportements de deux suites à l'infini, on définit les notions suivantes.

Définition 3.4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E. On dit que :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *dominée* par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe un entier n_0 et un réel $M > 0$ tels que :
$$\forall n \geq n_0, \ \|u_n\| \leq M \|v_n\|$$
et dans ce cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable* devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que :
$$\forall n \geq n_\varepsilon, \ \|u_n\| \leq \varepsilon \|v_n\|$$
et dans ce cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente* à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, ce qui signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tels que :
$$\forall n \geq n_\varepsilon, \ \|u_n - v_n\| \leq \varepsilon \|v_n\|$$
et dans ce cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} (v_n)$.

Les notations $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ sont abusives (mais usuelles). De manière plus rigoureuse, on devrait noter $u_n \in \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ et $u_n \in \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, on a alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ (prendre $\varepsilon = 1$ par exemple).

Dans le cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$, la nullité de v_n pour n assez grand entraîne celle de u_n et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ revient à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On vérifie facilement que la relation de domination est transitive et que la relation $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites à valeurs dans E.

De manière plus générale si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suites d'élément de $(E, \|\cdot\|)$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un autre espace normé $\left(F, \|\cdot\|'\right)$, on dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [resp. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$] si $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $\left(\|v_n\|'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ [resp. si $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $\left(\|v_n\|'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$].

Théorème 3.1.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, et seulement si, il existe un entier naturel n_0 et une suite bornée $(\varphi_n)_{n\geq n_0}$ d'éléments de E tels que l'on ait $u_n = v_n\varphi_n$ pour tout $n \geq n_0$.*
2. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si, et seulement si, il existe un entier naturel n_1 et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq n_1}$ d'éléments de E convergente vers 0 tels que l'on ait $u_n = v_n\varepsilon_n$ pour tout $n \geq n_1$.*

Démonstration

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on se donne (n_0, M) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $\|u_n\| \leq M\,|v_n|$ pour tout $n \geq n_0$. En définissant la suite $(\varphi_n)_{n\geq n_0}$ par $\varphi_n = \frac{1}{v_n}u_n$ si $v_n \neq 0$ et $\varphi_n = 0$ sinon, on a $u_n = v_n\varphi_n$ (si $v_n = 0$, il résulte de $\|u_n\| \leq M\,|v_n|$ que $u_n = 0$) et $\|\varphi_n\| \leq M$ pour tout $n \geq n_0$. La réciproque est évidente.

2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n\| \leq |v_n|$ pour tout $n \geq n_1$. En définissant la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq n1}$ par $\varepsilon_n = \frac{1}{v_n}u_n$ si $v_n \neq 0$ et $\varepsilon_n = 0$ sinon, on a $u_n = v_n\varepsilon_n$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que $\|\varepsilon_n\| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq \max(n_1, n_\varepsilon)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. La réciproque est évidente. ∎

Exemple 3.1 *Pour tous réels α, β, γ strictement positifs, on a :*

$$(\ln(n))^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^\beta\right) \text{ et } n^\beta = \underset{n\to+\infty}{o}\left(e^{\gamma n}\right)$$

Théorème 3.2.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si, et seulement si, il existe un entier naturel n_1 et une suite $(\varphi_n)_{n\geq n_1}$ convergente vers 1 tels que $u_n = \varphi_n v_n$ pour tout $n \geq n_1$.

Démonstration La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si, et seulement si, on a $u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, ce qui revient à dire qu'il existe un entier naturel n_1

et une suite numérique $(\varepsilon_n)_{n \geq n_1}$ convergente vers 0 tels que $u_n - v_n = v_n \varepsilon_n$ pour tout $n \geq n_1$, ce qui équivaut au résultat annoncé avec $\varphi_n = 1 + \varepsilon_n$. ■

Théorème 3.3.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de E équivalentes, elles sont alors de même nature dans le sens où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En cas de convergence de l'une des deux suites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\backsim} (v_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ dans E. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tels que $\|u_n - v_n\| \leq \varepsilon \|v_n\|$ et $\|v_n - \ell\| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui implique que :

$$\|u_n - \ell\| \leq \|u_n - v_n\| + \|v_n - \ell\| \leq \varepsilon (\|v_n\| + 1)$$

la suite $(\|v_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée et cela suffit à prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Par symétrie, on a aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$. ■

3.3 Continuité dans les espaces normés

La notion de continuité a été étudiée dans le cas des espaces métriques (paragraphe 2.6). Nous reprenons cette étude dans le cas des espaces normés en s'intéressant en particulier au cas des applications linéaires ou multilinéaire.

Rappelons les résultats de base où D est une partie non vide d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ et f une fonction de D dans un espace normé $\left(F, \|\cdot\|'\right)$.

- La fonction f est *continue* en $\alpha \in D$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ ;\ (x \in I,\ \|x - \alpha\| \leq \eta) \Rightarrow \left(\|f(x) - f(\alpha)\|' \leq \varepsilon\right)$$

  Elle est continue sur D si elle est continue en tout point de D, ce qui équivaut à dire que l'image réciproque par f de tout ouvert [resp. fermé] de F est un ouvert [resp. un fermé] de D ou encore que toute suite de points convergente dans D est transformée par f en une suite convergente dans F. La notion de continuité dépend du choix des normes sur E et F.

- Si f, g sont deux fonctions de D dans F continues en $\alpha \in D$ et λ est un scalaire, la fonction $\lambda f + g$ est alors continue en α. Dans le cas où F est une algèbre normée, la fonction fg est continue en α. Il résulte que tout fonction polynomiale $P : x \in D \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \in F$ où F est une algèbre normée et les a_k sont des scalaires est continue sur D.
- Si $f : D \to F$ est continue en $\alpha \in D$, D' est une partie de F contenant $f(D)$, F' un espace normé et $g : D' \to F'$ une fonction continue en $f(\alpha)$, la composée $g \circ f : D \to F'$ est alors continue en α.

- Si J est une partie non vide de F, on dit alors que $f : D \to J$ est est un *homéomorphisme*, si elle est continue bijective d'inverse f^{-1} continue.
- Une fonction $f : D \to F$ est *uniformément continue* sur D si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ ;\ \left((x, y) \in D^2,\ \|x - y\| \leq \eta\right) \Rightarrow \left(\|f(x) - f(y)\|' \leq \varepsilon\right)$$

ce qui équivaut à dire que pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f(x_n) - f(y_n)\|' = 0$. Une fonction uniformément continue transforme une suite de Cauchy en suite de Cauchy. La composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.
- Toute fonction continue sur un compact est bornée et uniformément continue. Dans le cas où elle est à valeurs réelles, elle est bornée et atteint ses bornes.
- Un sous-ensemble non vide $\mathcal{C}$ de E est *connexe* s'il ne peut s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts de $\mathcal{C}$. L'image d'un connexe par une fonction continue est connexe. Une partie $\mathcal{C}$ de E est connexe si, et seulement si, toute application continue de $\mathcal{C}$ dans $\{0, 1\}$ est constante. Si $\mathcal{C}$ est connexe, son adhérence est alors connexe. Une réunion de connexes d'intersection non vide est connexe. Un ensemble connexe par arcs dans E est connexe.

On peut utiliser le fait qu'une fonction continue sur un compact est bornée pour démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss.

Théorème 3.4. d'Alembert-Gauss

Toute fonction polynomiale non constante $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a des racines complexes.

Démonstration On se donne un polynôme unitaire non constant de degré $n \geq 1$, $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$ (sur $\mathbb{C}$ on peut identifier polynôme et fonction polynomiale) et en raisonnant par l'absurde, on suppose qu'un tel polynôme ne s'annule jamais.

Pour $z_1 \in \mathbb{C}$ fixé, le polynôme Q défini par $Q(X) = \dfrac{P(z_1 + X)}{P(z_1)}$ est non constant tel que $Q(0) = 1$, donc de la forme $Q(X) = 1 - \alpha X^p (1 + R(X))$ où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et R est un polynôme nul en 0. En désignant par $\omega \in \mathbb{C}^*$ une racine p-ième de α, on a pour tout réel $t \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned}\left|Q\left(\frac{t}{\omega}\right)\right| &= \left|1 - \alpha\left(\frac{t}{\omega}\right)^p \left(1 + R\left(\frac{t}{\omega}\right)\right)\right| = \left|1 - t^p - t^p R\left(\frac{t}{\omega}\right)\right| \\ &\leq 1 - t^p + t^p \left|R\left(\frac{t}{\omega}\right)\right|\end{aligned}$$

avec $\lim_{t \to 0} R\left(\frac{t}{\omega}\right) = 0$ (R est continue avec $R(0) = 0$). Il existe donc $t_0 \in]0,1[$ tel que $\left|R\left(\frac{t_0}{\omega}\right)\right| < \frac{1}{2}$, ce qui nous donne $\left|Q\left(\frac{t_0}{\omega}\right)\right| \leq 1 - t_0^p + \frac{t_0^p}{2} = 1 - \frac{t_0^p}{2} < 1$ et se traduit par $\left|P\left(z_1 + \frac{t_0}{\omega}\right)\right| < |P(z_1)|$.

D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a $|P(z)| = |z|^n \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^{n-k}}\right| = |z|^n \varphi(z)$ avec $\lim_{|z| \to +\infty} \varphi(z) = 1$, donc il existe $R > 0$ tel que $\frac{1}{2} \leq \varphi(z) \leq \frac{3}{2}$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus D(0,R)$, ce qui implique que $\frac{|z|^n}{2} \leq |P(z)| \leq 3\frac{|z|^n}{2}$. On en déduit que $\frac{|z|^{n-k}}{2} \leq \frac{|P(z)|}{|z|^k} \leq 3\frac{|z|^{n-k}}{2}$ pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ et en conséquence $\lim_{|z| \to +\infty} \frac{|P(z)|}{|z|^k} = +\infty$. Avec $\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$, on déduit qu'il existe $R_1 > 0$ tel que $|P(z)| > |P(0)|$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus D(0,R_1)$. D'autre part sur le disque fermé $D(0,R_1)$ la fonction continue $|P|$ est minorée et atteint sa borne inférieure, donc il existe $z_1 \in D(0,R_1)$ tel que $|P(z_1)| = \inf_{z \in D(0,R_1)} |P(z)|$. On a alors pour $z \in \mathbb{C}$, soit $z \in D(0,R_1)$ et $|P(z)| \geq |P(z_1)|$, soit $z \notin D(0,R_1)$ et $|P(z)| > |P(0)| \geq |P(z_1)|$, donc $|P(z_1)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$, ce qui contredit l'inégalité $\left|P\left(z_1 + \frac{t_0}{\omega}\right)\right| < |P(z_1)|$ pour un $t_0 \in]0,1[$. ■

On rappelle qu'une partie $\mathcal{C}$ de E est *convexe*, si pour tout couple (a,b) d'éléments de $\mathcal{C}$, le segment $[a,b] = \{(1-t)a + tb,\ t \in [0,1]\}$ est contenu dans $\mathcal{C}$. Un convexe est en particulier connexe par arcs (continuité de l'application affine $t \in [0,1] \mapsto (1-t)a + tb \in E$), donc connexe.

Exemples 3.3

1. *Une boule ouverte ou fermée est convexe. Pour x, y dans $B(a,r)$ et $t \in [0,1]$, on a :*

$$\begin{aligned}\|(1-t)x + ty - a\| &= \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| \\ &\leq (1-t)\|x-a\| + t\|y-a\| < (1-t)r + tr = r\end{aligned}$$

   donc $(1-t)x + ty \in B(a,r)$. On procède de même pour $\overline{B}(a,r)$.

2. *Une intersection d'ensembles convexes est convexe.*
3. *L'adhérence d'un convexe est convexe. En effet si $\mathcal{C}$ est convexe et $a = \lim_{n \to +\infty} a_n$, $b = \lim_{n \to +\infty} b_n$ sont dans l'adhérence de $\mathcal{C}$, les a_n et b_n étant dans $\mathcal{C}$, on a alors pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)a + tb = \lim_{n \to +\infty} ((1-t)a_n + tb_n) \in \overline{\mathcal{C}}$.*
4. *Si u est une application linéaire de E dans F, alors pour tout convexe $\mathcal{C}$ dans E [resp. dans F] l'image directe [resp. l'image réciproque] de $\mathcal{C}$ par u est un convexe de F [resp. de E].*

Théorème 3.5.

Les connexes (et convexes) de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration Soit I un connexe de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Si I n'est pas un intervalle, il alors existe $a < b$ dans I et $c \in]a, b[$ tel que $c \notin I$ et l'application f définie sur I par $f(x) = 1$ si $x < c$ dans I, $f(x) = 0$ si $x > c$ dans I est continue (l'image réciproque par f d'un ouvert de $\mathbb{R}$ est $]-\infty, c[\cap I$, $]c, +\infty[\cap I$ ou $\emptyset$) non constante, ce qui contredit la connexité de I. L'ensemble I est donc un intervalle et il est convexe. Si I est un intervalle, il est alors convexe, donc connexe. ■

Définition 3.5. On dit qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est *complet*, ou que c'est un *espace de Banach*, si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Exemples 3.4

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *est complet.*
2. *Un espace vectoriel E de dimension finie muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet (se déduit immédiatement de l'exemple précédent). Nous verrons plus loin que ce résultat est valable pour n'importe quelle norme.*
3. *Pour tout ensemble non vide D et tout espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ l'espace vectoriel $\mathcal{F}_b(D, E)$ des fonctions bornées de D dans E muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in D} \|f(x)\|$ est un espace de Banach (exercice 3.6). Pour $D = \mathbb{N}$, il s'agit de l'espace $\ell^\infty(E)$ des suites bornées d'éléments de E.*
4. *Pour $a < b$ réels et tout réel $p \geq 1$, l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ n'est pas complet (exercice 3.7).*

L'étude de la continuité est simplifiée dans le cas particulier des applications linéaires ou multilinéaires entre espaces normés.

On note $S(0,1)$ [resp. $\overline{B}(0,1)$] la sphère unité [resp. la boule unité] de E et u est une application linéaire de E dans F.

Théorème 3.6.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *u est continue en 0 ;*
2. *u est uniformément continue sur E ;*
3. *u est continue sur E ;*
4. *u est bornée sur $S(0,1)$ [resp. sur $\overline{B}(0,1)$] ;*
5. *il existe une constante réelle positive λ telle que $\|u(x)\|' \leq \lambda \|x\|$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) Si u est continue en 0, il existe alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, un réel $\eta > 0$ tel que :

$$(x \in E,\ \|x\| \leq \eta) \Rightarrow \left(\|u(x)\|' \leq \varepsilon\right)$$

Utilisant la linéarité de u on déduit que pour tous x, y dans E tels que $\|x - y\| \leq \eta$, on a $\|u(x) - u(y)\|' \leq \varepsilon$, ce qui prouve l'uniforme continuité de f sur E.

(2) $\Rightarrow$ (3) c'est vrai pour une fonction uniformément continue entre espaces métriques.

(3) $\Rightarrow$ (4) Si u est continue sur E, elle l'est alors en particulier en 0 et il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$(x \in E,\ \|x\| \leq \eta) \Rightarrow \left(\|u(x)\|' \leq 1\right)$$

Pour tout $x \in S(0,1)$ [resp. tout $x \in \overline{B}(0,1)$], on a $\|\eta x\| = \eta$ [resp. $\|\eta x\| \leq \eta$] et avec la linéarité de u on déduit que $\|u(x)\|' \leq \dfrac{1}{\eta}$, ce qui signifie que u est bornée sur $S(0,1)$ [resp. sur $\overline{B}(0,1)$].

(4) $\Rightarrow$ (5) Si u est bornée sur $S(0,1)$ [resp. sur $\overline{B}(0,1)$], il existe alors un réel $\lambda > 0$ tel que $\|u(x)\|' \leq \lambda$ pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ [resp. tel que $\|x\| \leq 1$]. En remarquant que pour tout vecteur x non nul dans E le vecteur $\dfrac{1}{\|x\|}x$ est dans la sphère (et la boule) unité de $(E, \|\cdot\|)$ et en utilisant la linéarité de u on déduit que $\|u(x)\|' \leq \lambda \|x\|$, cette inégalité étant aussi vérifiée pour $x = 0$.

(5) $\Rightarrow$ (1) est évidente. ∎

Pour ce qui est des application p-linéaires sur un produit $E = \prod_{k=1}^{p} E_k$ où $\left(E_1, \|\cdot\|^{(1)}\right), \cdots, \left(E_p, \|\cdot\|^{(p)}\right)$ sont des espaces normés, on a le résultat suivant où E est muni de la norme définie par $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq p} \|x_k\|^{(k)}$ pour tout $x = (x_k)_{1 \leq k \leq p} \in E$.

Théorème 3.7.

Une application p-linéaire $u : E = \prod_{k=1}^{p} E_k \to F$ est continue si, et seulement si, il existe une constante réelle positive λ telle que $\|u(x)\|' \leq \lambda \prod_{k=1}^{p} \|x_k\|^{(k)}$ pour tout $x = (x_k)_{1 \leq k \leq p} \in E$.

Démonstration Si u est continue sur E, elle l'est alors en particulier en 0 et il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\|u(x)\|' \leq 1$ pour tout $x = (x_k)_{1 \leq k \leq p} \in E$ tel que $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq p} \|x_k\|^{(k)} \leq \eta$. Pour tout $x = (x_k)_{1 \leq k \leq p} \in E$ tel que $x_k \neq 0$, on a $\left\| \dfrac{\eta}{\|x_k\|^{(k)}} x_k \right\|^{(k)} = \eta$ pour tout entier k compris entre 1 et p, ce qui nous donne pour $y = \left(\dfrac{\eta}{\|x_k\|^{(k)}} x_k \right)_{1 \leq k \leq p}$:

$$1 \geq \|u(y)\|' = \left(\prod_{k=1}^{p} \frac{\eta}{\|x_k\|^{(k)}} \right) \|u(x)\|'$$

soit $\|u(x)\|' \leq \lambda \prod_{k=1}^{p} \|x_k\|^{(k)}$ où $\lambda = \dfrac{1}{\eta^p}$, cette inégalité étant encore vérifiée si l'un des x_k est nul.

Réciproquement si une telle inégalité est vérifiée, on a alors :

$$\|u(x) - u(a)\|' = \|u(x-a)\|' \leq \lambda \prod_{k=1}^{p} \|x_k - a_k\|^{(k)} \leq \lambda \|x-a\|^p$$

pour tous $x = (x_k)_{1 \leq k \leq p}$ et $a = (a_k)_{1 \leq k \leq p}$ dans E, ce qui implique la continuité (en fait uniforme) de u sur E. ■

On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $(E, \|\cdot\|)$ dans $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ et on vérifie facilement que c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Dans le cas où $F = E$, on note $\mathcal{L}_c(E)$ pour $\mathcal{L}_c(E,E)$ et c'est une $\mathbb{K}$-algèbre pour les opérations d'addition, multiplication externe et composition des endomorphismes.

Toute application $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ étant bornée sur la sphère unité $S(0,1)$, on peut poser $N(u) = \sup\limits_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|'$ et pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a :

$$\|u(x)\|' = \|x\| \left\| u\left(\frac{1}{\|x\|} x \right) \right\|' \leq N(u) \|x\|$$

puisque $\dfrac{1}{\|x\|} x \in S(0,1)$, cette dernière inégalité étant également valable pour $x = 0$. Il en résulte que le réel $N(u)$ est aussi défini par $N(u) = \sup\limits_{x \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\|u(x)\|'}{\|x\|}$.

Théorème 3.8.

L'application N définie sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ par

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E,F), \; N(u) = \sup_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|'$$

est un norme.
Dans le cas où $F = E$, on a $N(Id) = 1$ et $N(u \circ v) \leq N(u) N(v)$ pour tous u, v dans $\mathcal{L}_c(E)$.

Démonstration On vérifie facilement que N est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. Dans le cas où $F = E$, on a $N(Id) = \sup\limits_{x \in S(0,1)} \|x\|' = 1$ et pour tous u, v dans $\mathcal{L}_c(E)$, tout $x \in S(0,1)$, on a $\|u \circ v(x)\| \leq N(u) \|v(x)\| \leq N(u) N(v)$, ce qui implique que $N(u \circ v) \leq N(u) N(v)$. ■

La norme N sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ ainsi définie est dite *induite* par les normes $\|\cdot\|$ sur E et $\|\cdot\|'$ sur F ou *subordonnée* aux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$.

Exemples 3.5

1. *Soit I un intervalle réel non réduit à un point. L'opérateur de dérivation n'est pas continue sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ muni d'une quelconque norme $\|\cdot\|$. Sur l'espace des fonctions polynomiales, cet opérateur peut être continu. Voir l'exercice 3.10.*
2. *Pour E de dimension finie muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ correspondante à une base $\mathcal{B}=(e_k)_{1\leq k\leq n}$, toute application linéaire de E dans F est continue. En effet, pour tout $x=\sum_{k=1}^n x_k e_k \in S(0,1)$, on a :*
$$\|u(x)\|'=\left\|\sum_{k=1}^n x_k u(e_k)\right\|'\leq \sum_{k=1}^n |x_k|\,\|u(e_k)\|\leq \sum_{k=1}^n \|u(e_k)\|$$
(on a $|x_k|\leq \|x\|_\infty=1$ pour tout k), donc u est continue de $(E,\|\cdot\|_\infty)$ dans $(F,\|\cdot\|')$ et on a $N_\infty(u)=\sup_{\|x\|_\infty=1}\|u(x)\|'\leq \sum_{k=1}^n \|u(e_k)\|$. En utilisant la norme $\|\cdot\|_p$ pour $p\geq 1$ réel, on a pour tout $x\in E$:
$$\|u(x)\|'\leq \|x\|_\infty \sum_{k=1}^n \|u(e_k)\|\leq \|x\|_p \sum_{k=1}^n \|u(e_k)\|$$
donc u est continue de $\left(E,\|\cdot\|_p\right)$ dans $(F,\|\cdot\|')$ et on a $N_p(u)\leq \sum_{k=1}^n \|u(e_k)\|$.
Nous verrons un peu plus loin que toute application linéaire de E de dimension finie dans F est continue (corollaire 3.2).
3. *En supposant E et F de dimensions finies respectivement égales à $n\geq 1$ et $m\geq 1$, on note pour $k\in\{\infty,1\}$ par $\|\cdot\|_k$ les normes sur chacun de ces espaces correspondantes à des bases $\mathcal{B}=(e_k)_{1\leq k\leq n}$ de E et $\mathcal{B}'=(f_k)_{1\leq k\leq m}$ de F et N_k sont les normes induites sur $\mathcal{L}_c(E,F)=\mathcal{L}(E,F)$. Toute application linéaire $u:E\to F$ de matrice $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est continue pour chacune de ces normes et on a $N_\infty(u)=\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ et $N_1(u)=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (exercice 3.11).*

Définition 3.6. Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre unitaire d'unité notée 1. Une norme N sur $\mathbb{A}$ est dite *sous-multiplicative* si elle est telle telle que :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{A}^2,\ N(xy)\leq N(x)\,N(y)$$

Une *algèbre normée* est une algèbre munie d'une norme sous-multiplicative N telle que $N(1) = 1$. Dans le cas où de plus l'espace normé $(\mathbb{A}, N)$ est complet, on dit que c'est une *algèbre de Banach.*

La propriété de sous-multiplicativité de la norme dans une algèbre normée $(\mathbb{A}, N)$ entraîne la continuité du produit, c'est-à-dire que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de $\mathbb{A}$ convergentes respectivement vers x et y, la suite $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers xy. Cela se déduit immédiatement des inégalités :

$$\begin{aligned} N(x_n y_n - xy) &= N(x_n(y_n - y) + (x_n - x)y) \\ &\leq N(x_n) N(y_n - y) + N(x_n - x) N(y) \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que la suite $(N(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée puisqu'elle converge vers $N(x)$.

Théorème 3.9.

Dans le cas où F est un espace de Banach, $(\mathcal{L}_c(E,F), N)$ est un espace de Banach. Pour $F = E$, $(\mathcal{L}_c(E), N)$ est une algèbre de Banach.

Démonstration Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}_c(E,F), N)$. Avec :

$$\forall x \in E,\ \forall m > n,\ \|f_m(x) - f_n(x)\|' \leq N(f_m - f_n)\|x\|$$

on déduit que pour tout x dans E, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach F, donc convergente vers un élément $f(x)$ de F. On vérifie facilement que f est linéaire. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est de Cauchy dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ est bornée, ce qui entraîne l'existence d'un réel $M > 0$ telle que tout $x \in E$, on ait $\|f_n(x)\|' \leq N(f_n)\|x\| \leq M\|x\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique que $\|f(x)\|' = \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n(x)\|' \leq M\|x\|$, soit la continuité de f. Il reste à vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ dans $\mathcal{L}_c(E,F)$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $N(f_m - f_n) < \varepsilon$ pour tous les entiers $m > n \geq n_\varepsilon$, ce qui entraîne que $\|f_m(x) - f_n(x)\|' \leq \varepsilon\|x\|$ pour tout $x \in E$ et faisant tendre m vers l'infini dans ces égalités à x et n fixés, on aboutit à $\|f(x) - f_n(x)\|' \leq \varepsilon\|x\|$ pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$ et tout $x \in E$, ce qui se traduit par $N(f - f_n) \leq \varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$ et signifie que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{L}_c(E,F)$. ■

Théorème 3.10.

Soit u une application linéaire surjective de E dans F. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *u est un homéomorphisme de E sur F ;*
2. *il existe des constantes réelles strictement positives α et β telles que :*

$$\forall x \in E,\ \alpha\|x\| \leq \|u(x)\|' \leq \beta\|x\|$$

3. il existe des constantes réelles strictement positives α et β telles que :

$$\forall x \in S(0,1), \ \alpha \leq \|u(x)\|' \leq \beta$$

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) Si u est un homéomorphisme de E sur F, les applications linéaires u et u^{-1} sont alors continues et il existe deux constantes $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ telles que :

$$\forall x \in E, \ \|u(x)\|' \leq \beta \|x\| \text{ et } \forall y \in F, \ \left\|u^{-1}(y)\right\| \leq \gamma \|y\|'$$

Comme tout vecteur x de E s'écrit de manière unique $x = u^{-1}(y)$ avec y dans F, on déduit des inégalités précédentes que :

$$\forall x \in E, \ \frac{\|x\|}{\gamma} = \frac{\left\|u^{-1}(y)\right\|}{\gamma} \leq \|y\|' = \|u(x)\|' \leq \beta \|x\|$$

(2) $\Rightarrow$ (3) C'est une évidence.

(3) $\Rightarrow$ (1) Les inégalités $\|u(x)\|' \leq \beta$ pour tout $x \in S(0,1)$ signifient que l'application linéaire u est continue. Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\frac{1}{\|x\|} x \in S(0,1)$ et en conséquence $\alpha \leq \left\|u\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\|' = \frac{\|u(x)\|'}{\|x\|} \leq \beta$, soit $\alpha \|x\| \leq \|u(x)\|' \leq \beta \|x\|$, ce qui est encore valables pour $x = 0$. Il en résulte que si $u(x) = 0$, on a alors $x = 0$, (puisque $\alpha > 0$), c'est-à-dire que l'application linéaire u est injective. Cette application étant supposée surjective, on déduit que c'est un isomorphisme de E sur F. Tout $x \in E$ s'écrivant de manière unique $x = u^{-1}(y)$ avec y dans F, les inégalités $\alpha \|x\| \leq \|u(x)\|'$ pour tout $x \in E$ sont équivalentes à $\left\|u^{-1}(y)\right\| \leq \frac{1}{\alpha} \|y\|'$ pour tout y dans F, ce qui équivaut à la continuité de u^{-1}. ■

De ce théorème, on déduit le résultat suivant.

Théorème 3.11.

*Deux normes sur E sont équivalentes si, et seulement si, elles sont topologiquement équivalentes (*i. e. $Id : (E, \|\cdot\|) \to \left(E, \|\cdot\|'\right)$ *est un homéomorphisme).*

Démonstration Dans le cadre des espaces métriques, deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes. La réciproque dans le cas des espaces normés se déduit du théorème précédent. ■

De ce résultat on déduit que deux normes équivalentes sur E définissent la même topologie.

Dans le cadre des espaces métriques, deux distances topologiquement équivalentes ne sont pas nécessairement équivalentes (voir l'un des exemples 2.6).

Dans le cadre des espaces métriques, nous savons qu'une fonction est continue si, et seulement si, l'image réciproque de tout fermé est fermé. Dans le cas particulier des applications linéaires de rang fini entre espaces normés, nous allons voir dans ce qui suit qu'il suffit que $\ker(f) = f^{-1}\{0\}$ soit fermé pour avoir la continuité.

On rappelle que pour toute forme linéaire non nulle ℓ sur E, il existe un vecteur non nul $a \in E$ tel que $E = \ker(\ell) \oplus \mathbb{K}a$ (un hyperplan de E qui est défini comme le noyau d'une forme linéaire non nulle est aussi le supplémentaire d'une droite). En effet, comme ℓ est non nulle, il existe $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $\ell(a) \neq 0$ et tout $x \in E$ s'écrit $x = \left(x - \dfrac{\ell(x)}{\ell(a)}a\right) + \dfrac{\ell(x)}{\ell(a)}a$ avec $x - \dfrac{\ell(x)}{\ell(a)}a \in \ker(\ell)$, ce qui nous dit que $E = \ker(\ell) + \mathbb{K}a$. Si $x \in \ker(\ell) \cap \mathbb{K}a$, on a alors $x = \lambda a$ et $\lambda\ell(a) = \ell(x) = 0$ avec $\ell(a) \neq 0$, ce qui implique que $\lambda = 0$ et $x = 0$. On a donc $\ker(\ell) \cap \mathbb{K}a = \{0\}$ et $E = \ker(\ell) \oplus \mathbb{K}a$. Ce résultat nous permet de caractériser les formes linéaires continues sur E.

Théorème 3.12.

Une forme linéaire sur E est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

Démonstration Soit ℓ une forme linéaire sur E. Si elle est nulle, elle est alors continue de noyau égal à E qui est bien fermé. On suppose donc que ℓ est non nulle. Si ℓ est continue sur E, son noyau $\ker(\ell)$ est alors fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue ℓ. Réciproquement supposons que $\ker(\ell)$ soit fermé dans E. Si ℓ n'est pas continue sur E, elle est alors non bornée sur la sphère unité $S(0,1)$ de E et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $S(0,1)$ telle que $|\ell(x_n)| \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant une décomposition $E = \ker(\ell) \oplus \mathbb{K}a$ où $\ell(a) \neq 0$, on écrit pour tout entier n, $x_n = y_n + \lambda_n a$ avec $y_n \in \ker(\ell)$ et $\lambda_n = \dfrac{\ell(x_n)}{\ell(a)} \in \mathbb{K}$. Pour $n \geq 1$ on a $|\ell(x_n)| \geq n > 0$ et $a = \dfrac{1}{\lambda_n}x_n + z_n$ avec $z_n = -\dfrac{1}{\lambda_n}y_n \in \ker(\ell)$. Mais on a alors pour tout entier $n \geq 1$, $\|a - z_n\| = \dfrac{\|x_n\|}{|\lambda_n|} = \dfrac{1}{|\lambda_n|} = \dfrac{|\ell(a)|}{|\ell(x_n)|} \leq \dfrac{|\ell(a)|}{n}$, ce qui implique que a qui n'appartient pas à $\ker(\ell)$ est limite d'une suite de points de $\ker(\ell)$, soit une contradiction avec le fait que $\ker(\ell)$ fermé. On a donc ainsi montré que si $\ker(\ell)$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$, ℓ est alors continue. ∎

Le résultat précédent est encore valable pour les applications linéaires de E dans F de rang fini. Cela se déduit du théorème qui suit et du fait que les applications linéaires $u : E \to F$ de rang $r \geq 1$ sont de la forme $x \mapsto \sum_{k=1}^{r} \ell_k(x)\, a_k$ où $(a_k)_{1\leq k\leq r}$ est une famille libre dans E et $(\ell_k)_{1\leq k\leq r}$ une famille libre dans le dual algébrique E^* de E (exercice 3.12).

Théorème 3.13.

Si H est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors pour tout sous-espace vectoriel G de dimension finie de E, le sous-espace vectoriel $H + G$ est encore fermé dans E.

Démonstration On procède par récurrence sur la dimension $p \geq 0$ de G. Pour $p = 0$ c'est clair et pour $p = 1$ il s'agit de montrer que pour tout $a \in E$, le sous-espace vectoriel $K = H + \mathbb{K}a$ est fermé dans E. Pour $a \in H$, on a $K = H$ qui est fermé par hypothèse. Pour $a \notin H$, on a $K = H \oplus \mathbb{K}a$ et tout vecteur $x \in K$ s'écrit de manière unique $x = y + \ell(x) a$ où $y \in H$ et $\ell(x) \in \mathbb{K}$. De l'unicité d'une telle écriture on déduit que ℓ est une forme linéaire sur K et comme $\ker(\ell) = H$ est fermé dans E, il l'est aussi dans K et ℓ est continue de K dans $\mathbb{K}$ (théorème 3.12). De cette continuité et de la complétude de $\mathbb{K}$ on va déduire que K est fermé. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de K qui converge vers $x \in E$. Chaque vecteur x_n s'écrit $x_n = y_n + \ell(x_n) a$ où $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de H. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est convergente dans E est de Cauchy et avec l'uniforme continuité de la forme linéaire ℓ, on déduit que $(\ell(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$, donc convergente vers un scalaire λ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y = x - \lambda a \in H$ puisque H est fermé, ce qui implique que $x = y + \lambda a \in K$. Au final $K = H \oplus \mathbb{K}a$ est fermé. Supposons le résultat acquis pour tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension $p \geq 1$ et soit G de dimension $p+1$. En notant $(a_k)_{1\leq k\leq p+1}$ une base de G on a :

$$H + G = \left(H + \bigoplus_{k=1}^{p} \mathbb{K}a_k\right) + \mathbb{K}a_{p+1}$$

où $H + \bigoplus_{k=1}^{p} \mathbb{K}a_k$ est fermé par hypothèse de récurrence, ce qui implique que $H + G$ est fermé (cas $p = 1$). ∎

Corollaire 3.1. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé dans E.*

Démonstration Il suffit de prendre $H = \{0\}$ dans le théorème précédent. ∎

Théorème 3.14.

Une application linéaire de rang fini $u : E \to F$ est continue si, et seulement si, son noyau est fermé dans E.

Démonstration Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue, son noyau $\ker(u)$ est alors fermé dans E comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de F. Réciproquement supposons que $\ker(u)$ soit fermé dans E. L'application linéaire u étant de rang fini, elle de la forme $x \mapsto \sum_{k=1}^{r} \ell_k(x) a_k$ où $r = \mathrm{rg}(u)$, $(a_k)_{1\leq k\leq r}$ est une famille libre dans E et $(\ell_k)_{1\leq k\leq r}$ une famille libre dans E^*. On a alors $\ker(u) = \bigcap_{k=1}^{r} \ker(\ell_k) \subset \ker(\ell_k)$ pour tout entier k compris entre 1 et r et on peut écrire que $\ker(\ell_k) = \ker(u) \oplus H_k$ où $\ker(u)$ est fermé et H_k est de dimension finie puisque la restriction de u à H_k est injective de H_k dans $\mathrm{Im}(u)$ qui est de dimension r (on a $\ker\left(u_{|H_k}\right) = \ker(u) \cap H_k = \{0\}$), ce qui implique que $\ker(\ell_k)$ est fermé (théorème 3.13) et donc que la forme linéaire ℓ_k est continue. La continuité de $u = \sum_{k=1}^{r} \ell_k a_k$ en résulte alors immédiatement. ■

Corollaire 3.2. *Pour E de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.*

Démonstration Pour E de dimension finie, toute application linéaire u de E dans F est de rang fini (théorème du rang) et $\ker(u)$ est de dimension finie comme E, donc fermé, ce qui implique que u est continue. ■

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ étant identifiée à l'application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ qu'elle définit dans les bases canoniques, on peut définir pour toutes normes $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$ et $\|\cdot\|'$ sur $\mathbb{K}^m$, la norme induite sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par $N(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|'$ pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Dans les exemples 3.5, on a $N_k(u) = N_k(A)$ pour $k \in \{\infty, 1\}$ et on peut remarquer que $N_1(A) = N_\infty(A^*)$ où $A^* = {}^t\overline{A}$ est la matrice adjointe de A.

En utilisant le théorème 2.22 de Baire, on déduit du corollaire 3.1 le résultat suivant.

Théorème 3.15.

Un espace de Banach de dimension infinie ne peut avoir de base dénombrable.

Démonstration Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Supposons qu'il admette une base dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans ce cas, en désignant pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathcal{F}_n$ l'espace vectoriel engendré par les vecteur $e_0, \dots, e_n$, on a $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ où chaque $\mathcal{F}_n$ est un sous espace vectoriel strict de E de dimension finie, donc fermé (corollaire 3.1) et d'intérieur vide dans E (exercice 3.5), ce qui est en contradiction avec le théorème 2.22 de Baire qui nous dit que l'un des $\mathcal{F}_n$ devrait être d'intérieur vide. ■

Corollaire 3.3. *L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ muni d'une quelconque norme n'est pas complet.*

3.4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Les deux résultats essentiels de ce paragraphe sont les suivants : sur un espace normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes ; les compacts sont les fermés bornés.

Lemme 3.2 *Si E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ relativement à une base $\mathcal{B} = (e_k)_{1\leq k\leq n}$ de E, la boule unité $\overline{B_\infty}(0,1)$ et la sphère unité $S_\infty(0,1)$ correspondantes sont alors compactes.*

Démonstration On se fixe une base $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leq j\leq n}$ de E et on se donne une suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\overline{B_\infty}(0,1)$ avec $x^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)} e_j$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout entier j compris entre 1 et n, on a $\left|x_j^{(k)}\right| \leq \left\|x^{(k)}\right\|_\infty \leq 1$, donc de la suite bornée $\left(x_1^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}$ on peut extraire une sous-suite $\left(x_1^{(\varphi_1(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un scalaire x_1 vérifiant $|x_1| \leq 1$, puis de la suite bornée $\left(x_2^{(\varphi_1(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $\left(x_2^{(\varphi_2(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un scalaire x_2 vérifiant $|x_2| \leq 1$. En continuant ainsi on extrait une suite $\left(x^{(\varphi(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_j^{(\varphi(k))} = x_j$ pour tout entier j compris entre 1 et n avec $|x_j| \leq 1$. On a alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|x^{(\varphi(k))} - x\right\|_\infty = 0$ où $x = (x_j)_{1\leq j\leq n} \in \overline{B_\infty}(0,1)$, c'est-à-dire que la suite $\left(x^{(\varphi(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans $\overline{B_\infty}(0,1)$. On a donc ainsi montré que $\overline{B_\infty}(0,1)$ est compacte dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. La sphère unité $S_\infty(0,1)$ étant fermée dans le compact $\overline{B_\infty}(0,1)$ est également compacte. ■

Lemme 3.3 *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et H un sous-espace vectoriel fermé de E distinct de E. Pour tout réel $\varepsilon \in \left]0,1\right[$, il existe un vecteur $x \in S(0,1)$ tel que $d(x,H) \geq 1-\varepsilon$.*

Démonstration Si $H \neq E$ est fermé dans E, on a alors $d(y,H) > 0$ pour tout $y \in E \setminus H$ (théorème 2.7). Pour $\varepsilon \in \left]0,1\right[$ on a $\dfrac{1}{1-\varepsilon} > 1$ et pour tout $y \in E \setminus H$ il existe $z \in H$ tel que $0 < d(y,H) \leq \|y-z\| < \dfrac{d(y,H)}{1-\varepsilon}$. Le vecteur $x = \dfrac{1}{\|y-z\|}(y-z)$ est alors dans la sphère unité $S(0,1)$ et pour tout $t \in H$ on a $\|x-t\| = \dfrac{1}{\|y-z\|}\|y-(z+\|y-z\|t)\|$ avec $u = z + \|y-z\|t$ dans H, de sorte que $\|x-t\| = \dfrac{1}{\|y-z\|}\|y-u\| \geq \dfrac{d(y,H)}{\|y-z\|} > 1-\varepsilon$. On a donc au final $d(x,H) = \inf\limits_{t\in H}\|x-t\| \geq 1-\varepsilon$. ■

Le théorème qui suit donne plusieurs caractérisations des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

Théorème 3.16.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *E est de dimension finie ;*
2. *toutes les normes sur E sont équivalentes ;*

3. *quelle que soit la norme choisie sur E toute forme linéaire définie sur $(E, \|\cdot\|)$ est continue ;*
4. *quelle que soit la norme choisie sur E, la sphère [resp. boule] unité de E pour cette norme est compacte ;*
5. *quelle que soit la norme choisie sur E, les compacts de E sont les fermés bornés.*

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E muni d'une norme quelconque dans un espace normé est continue (corollaire 3.2), donc en particulier quelques soient les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur E, les applications linéaires $Id : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|')$ et $Id : (E, \|\cdot\|') \to (E, \|\cdot\|)$ sont continues, ce qui signifie que Id est un homéomorphisme de $(E, \|\cdot\|)$ sur $(E, \|\cdot\|')$, soit que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes.

(2) $\Rightarrow$ (3) On suppose que toutes les normes sur E sont équivalentes. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E et ℓ une forme linéaire sur E, l'application $N : x \mapsto \|x\| + |\ell(x)|$ définit alors une norme sur E, donc équivalente à $\|\cdot\|$ et il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $N(x) \leq \alpha \|x\|$ pour tout $x \in E$. On a donc $|\ell(x)| \leq (\alpha - 1) \|x\|$ pour tout $x \in E$, ce qui signifie que la forme linéaire ℓ est continue.

(3) $\Rightarrow$ (1) On suppose que quelle que soit la norme choisie sur E toute forme linéaire sur E est continue. Si $(E, \|\cdot\|)$ est de dimension infinie on peut alors trouver un système libre infini dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En désignant par G un supplémentaire dans E de $H = \text{Vect}\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ la forme linéaire ℓ définie sur E par $\ell(x) = 0$ pour tout $x \in G$ et $\ell(e_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ n'est pas bornée sur la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$, donc non continue, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ. L'espace vectoriel E est donc de dimension finie.

On a donc ainsi montré que les assertions (1), (2) et (3) sont équivalentes. En particulier si (3) est vérifiée, toutes les normes sur E sont alors équivalentes et la compacité de la sphère [resp. boule] unité de $(E, \|\cdot\|)$ résulte de la compacité de la sphère [resp. de la boule] unité de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ (lemme 3.2). On a donc l'implication $(3) \Rightarrow (4)$.

(4) $\Rightarrow$ (5) On suppose que quelle que soit la norme choisie sur E, la sphère [resp. la boule] unité de E pour cette norme est compacte. On sait déjà que toute partie compacte d'un espace vectoriel normé est fermée et bornée (théorème 2.16). Réciproquement soit K une partie non vide fermée et bornée dans $(E, \|\cdot\|)$. Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\|x\| \leq \lambda$ pour tout $x \in K$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de K, la suite $\left(\frac{1}{\lambda} x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans la boule unité de E, cette boule étant compacte, on peut extraire une sous-suite $\left(\frac{1}{\lambda} x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in E$. La suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $x = \lambda y$ et $x \in K$ puisque K est fermé. On a donc ainsi montré que K est compact dans $(E, \|\cdot\|)$.

(5) $\Rightarrow$ (1) On suppose que quelle que soit la norme choisie sur E, les compacts de $(E, \|\cdot\|)$ sont les fermés bornés. Si E est de dimension infinie on peut trouver

un système libre infini dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier n, on désigne par E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_k)_{0\le k\le n}$. On a alors $E_p \subsetneqq E_q$ pour $q > p$. De plus chaque E_n est de dimension finie dans E, donc fermé dans E (corollaire 3.1) et aussi dans E_{n+1}. En utilisant le lemme 3.3, on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans la sphère unité de E telle que $x_n \in E_n$ et $d(x_n, E_{n-1}) \ge \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais alors, on a $\|x_q - x_p\| \ge d(x_q, E_{q-1}) \ge \dfrac{1}{2}$ pour $q > p \ge 1$ et il est impossible d'extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente, ce qui est en contradiction avec la compacité de la sphère unité (c'est un fermé borné) de E. L'espace vectoriel E est donc nécessairement de dimension finie. ■

L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (5) est le théorème de Riesz. De ce résultat et du théorème 2.17, on déduit que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une suite est convergente si, et seulement si, elle est bornée et a une unique valeur d'adhérence (une suite bornée est à valeur dans une boule fermée $\overline{B}(0, R)$ qui est compacte).

On peut donc conclure que sur un espace vectoriel de dimension finie on a une seule topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel.

Comme applications du théorème 3.16, on a les résultats suivants.

Corollaire 3.4. *Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Démonstration Toutes les normes sur E de dimension finie étant équivalentes, il suffit de montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet, ce qui se déduit immédiatement du fait que $\mathbb{K}$ est complet. ■

Corollaire 3.5. *On suppose que E est de dimension finie et on se donne une base $\mathcal{B} = (e_j)_{1\le j\le n}$ de F. Une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{j=1}^{n} u_{k,j} e_j\right)_{k\in\mathbb{N}}$ d'élément de E converge vers $\ell = \sum_{j=1}^{n} \ell_j e_j$ si, et seulement si, chaque suite numérique $(u_{k,j})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_j.*

Démonstration Il est clair que la condition est suffisante (somme de suites convergentes). Réciproquement, on suppose que chaque suite numérique $(u_{k,j})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_j \in \mathbb{K}$ en a. Par équivalence des normes sur E de dimension finie, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\|\cdot\| \le \alpha \|\cdot\|_1$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left\| u_k - \sum_{j=1}^{n} \ell_j e_j \right\| \le \alpha \sum_{j=1}^{n} |u_{k,j} - \ell_j|$$

ce qui implique que $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \sum_{j=1}^{n} \ell_j e_j$. ■

Corollaire 3.6. *On suppose que F est de dimension finie et on se donne une base $\mathcal{B} = (e_k)_{1\leq k\leq m}$ de F. Une fonction $f : x \in E \mapsto \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\, e_k \in F$ admet une limite en $a \in E$ [resp. est continue en $a \in E$] si, et seulement si, chaque application $f_k : E \to \mathbb{K}$ admet une limite en a [resp. est continue en a].*

Démonstration Démonstration analogue à celle du corollaire précédent. ∎

Corollaire 3.7. *Soient $E_1, \cdots, E_p$ des espaces vectoriels normés de dimension finie et F un espace vectoriel normé. Toute application p-linéaire $\varphi : \prod_{k=1}^{p} E_k \to F$ est continue.*

Démonstration On se place d'abord dans le où $p = 2$ et φ est bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F. Sur $E = E_1 \times E_2$ qui est de dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Partant de la norme $\|\cdot\|_\infty$ relativement à des base $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leq j\leq n}$ sur E et $\mathcal{B}' = (f_j)_{1\leq j\leq m}$ sur F, on utilise la norme $(x, y) \mapsto \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$ sur E et on a :

$$\|\varphi(x, y)\|' = \left\|\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \sum_{k=1}^{m} y_k f_k\right)\right\|' = \left\|\sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq k\leq m}} x_j y_k \varphi(e_j, f_k)\right\|'$$
$$\leq \sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq k\leq m}} |x_j|\,|y_k|\,\|\varphi(e_j, f_k)\|' \leq \left(\sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq k\leq m}} \|\varphi(e_j, f_k)\|'\right) \|x\|_\infty, \|y\|_\infty$$

ce qui implique la continuité de φ.

En raisonnant par récurrence, on a le résultat annoncé pour $p \geq 2$. ∎

La compacité des boules fermées en dimension finie peut être utilisée pour prouver l'existence d'une meilleure approximation polynomiale uniforme d'une fonction continue sur un segment. L'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ des applications continues sur un intervalle réel $[a, b]$ $(a < b)$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ étant muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, on a le résultat suivant où polynôme et fonction polynomiale sont confondus.

Théorème 3.17.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty = d(f, \mathbb{K}_n[X])$ où $d(f, \mathbb{K}_n[X]) = \inf_{Q\in\mathbb{K}_n[X]} \|f - Q\|_\infty$.

Démonstration Pour $f = 0$, le résultat est évident. Pour f non nulle, l'ensemble $\mathcal{B}_{n,f} = \mathbb{K}_n[X] \cap \overline{B}(0, 2\|f\|_\infty)$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon $2\|f\|_\infty$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Cet espace vectoriel étant de dimension finie, cette boule est compacte. L'application $Q \mapsto \|f - Q\|_\infty$ étant continue sur le compact $\mathcal{B}_{n,f}$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est minorée et atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme P dans $\mathcal{B}_{n,f}$ tel que $\delta = \inf_{Q \in \mathcal{B}_{n,f}} \|f - Q\|_\infty = \|f - P\|_\infty$. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ on a soit $Q \in \mathcal{B}_{n,f}$ et alors $\|f - Q\|_\infty \geq \delta$, soit $Q \notin \mathcal{B}_{n,f}$ et alors :

$$\|f - Q\|_\infty \geq \|Q\|_\infty - \|f\|_\infty > 2\|f\|_\infty - \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

Remarquant que $0 \in \mathcal{B}_{n,f}$, on déduit que $\|f\|_\infty = \|f - 0\|_\infty \geq \delta$. En définitive on a bien $\|f - Q\|_\infty \geq \delta$ pour tout $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty = \|f - P\|_\infty$. ∎

Le résultat qui suit utilise la formule de Taylor-Lagrange (voir le chapitre **??**) et le fait que sur $\mathbb{R}_n[X]$ toutes les normes sont équivalentes.

Théorème 3.18.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n+1)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$, alors toutes les dérivées $f^{(k)}$, pour k compris entre 1 et n, sont également bornées sur $\mathbb{R}$.

Démonstration Pour tout réel t on désigne par P_t le polynôme réel de degré au plus égal à n défini par $P_t(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} X^k$. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, on peut écrire que pour tout réel x, il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que $P_t(x) = f(t + x) - \frac{f^{(n+1)}(t + \theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$. Si f et $f^{(n+1)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, on en déduit alors que :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \ |P_x(t)| \leq M = \|f\|_\infty + \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty \tag{3.1}$$

Sur $\mathbb{R}_n[X]$ on définit des normes en posant pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|P\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ et $\|P\| = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes, donc il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\|P\| \leq \alpha \|P\|_\infty$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et de l'inégalité (3.1) on déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \|P_t\| = \max_{0 \leq k \leq n} \left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right| \leq \alpha \|P_x\|_\infty \leq \alpha M$$

et :

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \left| f^{(k)}(t) \right| \leq \alpha k! M$$

c'est-à-dire que toutes les dérivées $f^{(k)}$, pour k compris entre 1 et n, sont bornées sur $\mathbb{R}$. ∎

De manière plus précise, on peut montrer avec les hypothèses du théorème précédent que $\left\|f^{(k)}\right\|_{\infty} \leq 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} \|f\|_{\infty}^{1-\frac{k}{n+1}} \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty}^{\frac{k}{n+1}}$ pour tout entier k compris entre 1 et n (inégalités de Kolmogorov).

3.5 Opérateurs compacts

$(E, \|\cdot\|)$, $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ sont deux espaces de Banach, $S(0,1)$ [resp. $\overline{B}(0,1)$] est la sphère unité [resp. la boule unité] de E et $\mathcal{L}_c(E,F)$ est l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $(E, \|\cdot\|)$ dans $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ noté $\mathcal{L}_c(E)$ dans le cas où $F = E$. Pour $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on note $N(u) = \sup\limits_{x \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\|u(x)\|'}{\|x\|}$.

Définition 3.7. On appelle opérateur compact toute application linéaire continue $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ telle que $u\left(\overline{B}(0,1)\right)$ soit relativement compact dans F.

On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F. Pour $F = E$, on note $\mathcal{K}(E)$ cet ensemble.

Lemme 3.4 *Un opérateur linéaire continu $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ est compact si, et seulement si, pour toute partie bornée B de E, $u(B)$ est relativement compact.*

Démonstration Si $u(B)$ est relativement compact pour toute partie bornée B de E, c'est alors le cas pour $B = \overline{B}(0,1)$ et u est compact. Si $B \subset E$ est borné, il est alors contenu dans une boule fermée $\overline{B}(0,R) = R \cdot \overline{B}(0,1)$ et on a par linéarité de u, $u(B) \subset u\left(\overline{B}(0,R)\right) = R \cdot u\left(\overline{B}(0,1)\right)$. Pour u compact, $u\left(\overline{B}(0,1)\right)$ est relativement compact, donc aussi $R \cdot u\left(\overline{B}(0,1)\right)$ et $u(B)$. ■

Dire que $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ est compact revient aussi à dire que toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est telle que la suite $(u(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans F.

Exemples 3.6

1. *Pour E de dimension finie, on a $\mathcal{K}(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$. En effet, toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue, la boule unité $\overline{B}(0,1)$ est compacte dans E ainsi que son image $u\left(\overline{B}(0,1)\right)$, donc u est un opérateur compact.*
2. *Une application linéaire continue $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ de rang fini est un opérateur compact. En effet, pour tout $x \in \overline{B}(0,1)$, on a $\|u(x)\|' \leq N(u)$, donc $u\left(\overline{B}(0,1)\right)$ est borné dans F et en conséquence précompact dans le cas où F est de dimension finie (dans un espace normé de dimension finie les compacts sont les fermés bornés).*
3. *$Id \in \mathcal{K}(E)$ si, et seulement si E est de dimension finie (cela équivaut à la compacité de $\overline{B}(0,1)$).*

Théorème 3.19.

$\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}_c(E,F)$. Dans le cas où $F=E$, $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}_c(E)$.

Démonstration Comme $0 \in \mathcal{K}(E,F)$, cet ensemble n'est pas vide. Soient u,v dans $\mathcal{K}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. De $(\lambda u)\left(\overline{B}(0,1)\right) = u\left(\overline{B}(0,|\lambda|)\right)$, on déduit que $\lambda u \in \mathcal{K}(E,F)$ et de :

$$(u+v)\left(\overline{B}(0,1)\right) \subset u\left(\overline{B}(0,1)\right) + v\left(\overline{B}(0,1)\right) \subset \overline{u\left(\overline{B}(0,1)\right)} + \overline{v\left(\overline{B}(0,1)\right)}$$

on déduit que $u+v \in \mathcal{K}(E,F)$ (la somme de deux compacts est un compact). Donc $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Soient $v \in \overline{\mathcal{K}(E,F)}$ (adhérence de $\mathcal{K}(E,F)$ dans $(\mathcal{L}_c(E,F),N)$), $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $u \in \mathcal{K}(E,F)$ dans la boule ouverte de centre v et de rayon ε. Comme $\overline{u\left(\overline{B}(0,1)\right)}$ est compact dans F, il existe un nombre fini de points $y_1,\cdots,y_r$ dans F tels que $u\left(\overline{B}(0,1)\right) \subset \bigcup_{k=1}^{r} \overline{B}(y_k,\varepsilon)$, donc pour tout $x \in \overline{B}(0,1)$ il existe un entier k compris entre 1 et r tel que $u(x) \in \overline{B}(y_k,\varepsilon)$ et on a :

$$\|v(x)-y_k\|' \leq \|(v-u)(x)\|' + \|u(x)-y_k\|' \leq N(v-u)+\varepsilon \leq 2\varepsilon$$

ce qui nous dit que $v\left(\overline{B}(0,1)\right) \subset \bigcup_{k=1}^{r} \overline{B}(y_k,2\varepsilon)$ et prouve que $v\left(\overline{B}(0,1)\right)$ est précompact donc relativement compact dans F qui est complet (corollaire 2.2). Au final $v \in \mathcal{K}(E,F)$, ce qui nous dit que $\mathcal{K}(E,F)$ est fermé dans $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Soient $u \in \mathcal{K}(E)$ et $v \in \mathcal{L}_c(E)$. Pour tout $x \in \overline{B}(0,1)$, on a $\|v(x)\|' \leq N(v)$, donc $v\left(\overline{B}(0,1)\right) \subset \overline{B}(0,N(v))$ et $(u \circ v)\left(\overline{B}(0,1)\right) \subset u\left(\overline{B}(0,N(v))\right)$ ce qui entraîne la relative compacité de $(u \circ v)\left(\overline{B}(0,1)\right)$. On a donc $u \circ v \in \mathcal{K}(E)$. Enfin avec $(v \circ u)\left(\overline{B}(0,1)\right) \subset v\left(u\left(\overline{B}(0,1)\right)\right) \subset v\left(\overline{u\left(\overline{B}(0,1)\right)}\right)$ où $v\left(\overline{u\left(\overline{B}(0,1)\right)}\right)$ est compact comme image d'un compact par une application continue, on déduit que $(v \circ u)\left(\overline{B}(0,1)\right)$ est relativement compact et $v \circ u \in \mathcal{K}(E)$. En conclusion, $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}_c(E)$. ∎

On déduit du théorème précédent qu'un automorphisme $u \in \mathcal{L}_c(E)$ est compact si, et seulement si E est de dimension finie. En effet si u est compact et bijectif, il en résulte alors que $Id = u \circ u^{-1}$ est compact, ce qui revient à dire que E est de dimension finie. Réciproquement, en dimension finie tout endomorphisme est compact.

Théorème 3.20.

Si $u \in \mathcal{K}(E)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, le sous-espace $\ker(u-\lambda Id)$ est de dimension finie.

Démonstration Dans le cas où $E_\lambda = \ker(u - \lambda Id) = \{0\}$, le résultat est évident. Dans le cas où $E_\lambda \neq \{0\}$, la boule unité fermée de E_λ est :

$$\begin{aligned} B_\lambda &= \{x \in E_\lambda,\ \|x\| \leq 1\} = \{x \in E,\ u(x) = \lambda x \text{ et } \|x\| \leq 1\} \\ &= \left\{x \in E,\ x = u\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \text{ et } \|x\| \leq 1\right\} = \left\{x \in E,\ x = u(y) \text{ et } \|y\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\right\} \\ &\subset u\left(\overline{B}\left(0, \frac{1}{|\lambda|}\right)\right) \end{aligned}$$

donc B_λ est compacte car fermée contenue dans un relativement compact, ce qui implique que E_λ est de dimension finie. ■

3.6 Sous-groupes additifs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie

Pour ce paragraphe E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et on s'intéresse à ses sous-groupes additifs.

Définition 3.8. On dit qu'une partie non vide A de E est *discrète*, si pour tout $a \in A$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de E tel que $A \cap \mathcal{O} = \{a\}$.

La définition d'un ensemble discret se traduit aussi en disant que tous ses éléments sont *isolés*.

De l'équivalence des normes sur E de dimension finie, on déduit que A est discrète dans $(E, \|\cdot\|)$ si, et seulement si, elle est discrète dans $\left(E, \|\cdot\|'\right)$, ce qui se déduit des inclusions $B'(a, \alpha) \subset B(a, 1) \subset B'(a, \beta)$ conséquences de $\alpha \|\cdot\| \leq \|\cdot\|' \leq \beta \|\cdot\|$.

Exemples 3.7

1. *Un sous-ensemble d'un ensemble discret est discret.*
2. *Un ensemble compact discret dans E est nécessairement fini. Si K est compact discret, pour tout $x \in K$ il existe un ouvert $\mathcal{O}_x$ de E tel que $K \cap \mathcal{O}_x = \{x\}$ et du recouvrement ouvert de K par les $\mathcal{O}_x$ on extrait un sous-recouvrement fini $K \subset \bigcup_{k=1}^{r} \mathcal{O}_{x_k}$ qui impose $K = \{x_1, \cdots, x_r\}$.*
3. *$\mathbb{Z}^n$ est discret dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. En effet pour tout $a = (a_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{Z}^n$ et tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on a :*

$$\mathbb{Z}^n \cap B_\infty(a, 1) = \mathbb{Z}^n \cap \prod_{k=1}^{n}]a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon[= \{a\}$$

   donc $\mathbb{Z}^n \cap B(a, \alpha) = \{a\}$ où $\alpha > 0$ est tel que $\alpha \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|$.
4. *De la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ on déduit que $\mathbb{Q}^n$ n'est pas discret dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.*

Théorème 3.21.

Un sous-groupe additif de E discret est fermé.

Démonstration Soient G un sous-groupe discret de E et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G convergente vers $\ell \in E$. Comme G est un sous-groupe discret de E, le vecteur nul est dans G et isolé, donc il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de E tel que $G \cap \mathcal{O} = \{0\}$ et pour $\varepsilon > 0$ tel que $B(0,\varepsilon) \subset \mathcal{O}$, on a $G \cap B(0,\varepsilon) = \{0\}$. La suite convergente $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est en particulier de Cauchy, donc il existe un entier k_ε tel que $\|u_k - u_{k_\varepsilon}\| < \varepsilon$ pour tout $k \geq k_\varepsilon$, ce qui implique que $u_k - u_{k_\varepsilon} \in G \cap B(0,\varepsilon)$ (G est un groupe additif), soit que $u_k = u_{k_\varepsilon}$ pour tout $k \geq k_\varepsilon$. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire et $\ell \in G$, ce qui nous dit que G est fermé. ■

Avec le théorème précédent, on a aussi montré que les seules suites convergentes dans un sous-groupe discret de E sont les suites stationnaires. C'est le cas en particulier pour les suites d'entiers relatifs.

Théorème 3.22.

Soit G un sous-groupe additif de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *G est discret ;*
2. *0 est isolé dans G ;*
3. *pour tout réel $r > 0$, l'intersection $G \cap \overline{B}(0,r)$ est finie.*

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) Si G est discret, tous ses éléments sont alors isolés et si de plus G est un groupe-additif, il contient alors 0 qui est isolé dans G.

(2) $\Rightarrow$ (1) Si 0 est isolé dans G, il existe alors un ouvert $\mathcal{O}$ de E tel que $G \cap \mathcal{O} = \{0\}$ et pour $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset \mathcal{O}$, on a pour tout $g \in G$ et tout $x \in G \cap B(g,r)$, $x - g \in G \cap B(0,r) \subset G \cap \mathcal{O} = \{0\}$ (G est un groupe et $\|x-g\| < r$), donc $x = g$, ce qui nous dit que $G \cap B(g,r) = \{g\}$, soit que g est isolé dans G. Le groupe G est donc discret.

(1) $\Rightarrow$ (3) On suppose que le groupe G est discret. S'il existe un réel $r_0 > 0$ tel que $G \cap \overline{B}(0,r_0)$ soit infini, il existe alors une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G deux à deux distincts dans le compact $\overline{B}(0,r_0)$ (E est de dimension finie) et de cette suite, on peut extraire une suite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément ℓ de $G \cap \overline{B}(0,r_0)$ (G est fermé), mais alors pour tout réel $r > 0$ l'intersection $G \cap \overline{B}(\ell,r)$ contient une infinité d'éléments distincts de ℓ (les $u_{\varphi(k)}$ à partir d'un certain rang), ce qui contredit le fait qu'il est isolé dans G.

(3) $\Rightarrow$ (2) On suppose que pour tout réel $r > 0$, l'intersection $G \cap \overline{B}(0,r)$ est finie. Si G est réduit à $\{0\}$, on a alors $G \cap B(0,r) = \{0\}$ pour tout réel $r > 0$ et 0 est isolé dans G. Sinon pour $g \in G \setminus \{0\}$, l'intersection $G \cap \overline{B}(0,\|g\|)$ contient 0 et g et elle est fini, soit $G \cap \overline{B}(0,\|g\|) = \{0, g_1, \cdots, g_r\}$ où les g_k sont non nuls et pour k compris entre 1 et r tel que $\|g_k\| = \min\limits_{1\leq j\leq r} \|g_j\|$, on a $\|g_k\| > 0$ et $G \cap B(0,\|g_k\|) = \{0\}$, ce qui nous dit que 0 est isolé dans G. ■

Le point 3 du théorème précédent revient aussi à dire que l'intersection de G avec une partie bornée de E est finie.

3.6.1 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Théorème 3.23.

Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ discrets sont les sous-groupes de la forme $\mathbb{Z}\alpha = \{p\alpha,\ p \in \mathbb{Z}\}$ où α est un réel.

Démonstration Il est clair qu'un sous-groupe monogène $G = \mathbb{Z}\alpha$ de $(\mathbb{R}, +)$ est discret : pour tout $\varepsilon \in \left]0, 1\right[$, on a $G \cap \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[= \{0\}$. Réciproquement si G est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$, il existe alors un réel a dans $G \cap \mathbb{R}^{+,*}$ $(0 \neq a \in G \Rightarrow -a \in G)$ et $\left]0, a\right] \cap G$ qui est fini non vide admet un plus petit élément $\alpha > 0$. De $\alpha \in G$ on déduit que $\mathbb{Z}\alpha \subset G$. De plus, pour tout $x \in G$ il existe un entier relatif k tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha$ $\left(k = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)$ et avec $x - k\alpha \in G \cap \left[0, a\right[$ on déduit du caractère minimal de α que $x - k\alpha = 0$, soit $x = k\alpha \in \mathbb{Z}\alpha$. On a donc en définitive $G = \mathbb{Z}\alpha$. ■

Théorème 3.24.

Un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est dense ou discret.

Démonstration Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Si $G = \{0\}$, il est alors discret, sinon l'ensemble $G \cap \mathbb{R}^{+,*}$ est minoré par 0, donc admet une borne inférieure α. Si α est strictement positive, elle est alors dans $G \cap \mathbb{R}^{+,*}$. En effet dans le cas contraire, par définition de la borne inférieure, on peut trouver $x \in G \cap \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $\alpha < x < 2\alpha$ (on a supposé que $\alpha \notin G$). Pour la même raison, on peut trouver $y \in G \cap \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $\alpha < y < x$. On a alors $0 < x - y < \alpha$ avec $x - y \in G \cap \mathbb{R}^{+,*}$, ce qui est contradictoire avec la définition de la borne inférieure α. On a donc $\alpha \in G \cap \mathbb{R}^{+,*}$ et avec la structure de groupe additif de G, on déduit que $G = \mathbb{Z}\alpha$, c'est-à-dire que G et discret. En effet, on a $\mathbb{Z}\alpha \subset G$ du fait que α appartient au groupe G et pour tout $x \in G$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha$, donc $x - k\alpha = 0$ et $x \in \mathbb{Z}\alpha$, c'est-à-dire que $G \subset \mathbb{Z}\alpha$. Si $\alpha = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$. En effet pour $x < y$ dans $\mathbb{R}$, il existe z dans $G \cap \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $0 < z < y - x$ soit $1 < \frac{y}{z} - \frac{x}{z}$, donc l'intervalle $\left]\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right[$ contient au moins un entier et pour $n \in \left]\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right[\cap \mathbb{Z}$, on a $x < nz < y$ avec $nz \in G$.

Un sous-groupe discret G de $\mathbb{R}$ étant dénombrable et fermé, il ne peut être dense dans $\mathbb{R}$ car ce dernier est non dénombrable (la densité donnerait $\mathbb{R} = \overline{G} = G$). ■

Le théorème 3.24 peut être utilisé pour obtenir des critères d'irrationalité.

Théorème 3.25.

Soient a, b deux réels non nuls, $G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \left\{na + mb,\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ le groupe additif engendré par a et b et H le sous-ensemble de G défini par $H = \mathbb{N}a + \mathbb{Z}b = \{na + mb,\ (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$\frac{a}{b}$ est irrationnel ;*
2. *le groupe G est dense dans $\mathbb{R}$;*
3. *l'ensemble H est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration (1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que $\frac{a}{b}$ soit irrationnel. Si le groupe G est discret, il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}^{+,*}$ tel que $G = \mathbb{Z}\alpha$, donc $a = p\alpha$, $b = q\alpha$ avec $(p, q) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ et $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$, ce qui est contraire à notre hypothèse de départ. Le théorème 3.24 nous dit alors que G est dense dans $\mathbb{R}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supposons que G soit dense dans $\mathbb{R}$. Si $\frac{a}{b}$ est rationnel, il s'écrit alors $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux dans $\mathbb{Z}^*$ et on a

$$G = \left(\mathbb{Z}\frac{a}{b} + \mathbb{Z}\right) b = \left(\mathbb{Z}\frac{p}{q} + \mathbb{Z}\right) b = (\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q)\, \frac{b}{q}$$

avec $\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q = \mathbb{Z}$ (théorème de Bézout), donc $G = \mathbb{Z}\frac{a}{p}$ est discret contrairement à contraire à notre hypothèse de départ. Le réel $\frac{a}{b}$ est donc irrationnel

(3) $\Rightarrow$ (2) Si H est dense dans $\mathbb{R}$, il est alors de même de G qui le contient.

(2) $\Rightarrow$ (3) On suppose que le groupe G est dense dans $\mathbb{R}$. Pour montrer que cela implique la densité de H dans $\mathbb{R}$, nous allons vérifier qu'entre deux réels distincts, on peut toujours trouver un élément de H. Comme G est dense dans $\mathbb{R}$, pour tous réels $x < y$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $0 < pa + qb < y - x$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\frac{y - nb}{pa + qb} - \frac{x - nb}{pa + qb} = \frac{y - x}{pa + qb} > 1$ de sorte que l'intervalle $\left]\frac{x - nb}{pa + qb}, \frac{y - nb}{pa + qb}\right[$ contient un entier relatif k. Choisissant $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - nb > 0$, un tel entier k est positif et en utilisant l'équivalence :

$$\left(\frac{x - nb}{pa + qb} < k < \frac{y - nb}{pa + qb}\right) \Leftrightarrow (x < k\,(pa + qb) + nb < y) \tag{3.2}$$

on a ainsi trouvé dans le cas où $p \in \mathbb{N}$ un élément $h = k\,(pa + qb) + nb$ de $\mathbb{N}a + \mathbb{Z}b$ strictement compris entre x et y. Dans le cas où $p \in \mathbb{Z}^{-,*}$, on choisit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y - nb < 0$, de sorte que $k \in \left]\frac{x - nb}{pa + qb}, \frac{y - nb}{pa + qb}\right[$ est strictement négatif et l'équivalence (3.2) nous dit que $h = k\,(pa + qb) + nb$ est dans $\mathbb{N}a + \mathbb{Z}b$ et strictement compris entre x et y. Au final, $\mathbb{N}a + \mathbb{Z}b$ est dense dans $\mathbb{R}$. ∎

Pour $\frac{a}{b}$ irrationnel, $G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ nous donne un exemple de situation où la somme de deux fermés n'est pas un fermé.

Le théorème 3.25 peut être utilisé pour montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{\pi}{\theta}$ soit irrationnel, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\left(e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$, celui des suites $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$ et celui de la suite $(\tan(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{R}$ (exercice 3.13).

Corollaire 3.8. *Un réel θ est irrationnel si et seulement si il existe deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que $q_n\theta - p_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (q_n\theta - p_n) = 0$.*

Démonstration Si $\theta \in \mathbb{R}$ est irrationnel, le groupe $G_\theta = \mathbb{Z}\theta + \mathbb{Z}$ est alors dense dans $\mathbb{R}$ et 0 est limite d'une suite de points de G_θ, ce qui signifie qu'il existe deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} (q_n\theta - p_n) = 0$. Comme $\theta \notin \mathbb{Q}$, on a $q_n\theta - p_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Réciproquement, soit $\theta \in \mathbb{R}$ pour lequel il existe deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que $q_n\theta - p_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (q_n\theta - p_n) = 0$. Si $\theta = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers, on a alors $q_n p - p_n q = q(q_n\theta - p_n) \neq 0$ dans $\mathbb{Z}$, donc $|q_n\theta - p_n| = \frac{1}{|q|} |q_n p - p_n q| \geq \frac{1}{|q|}$, ce qui est en contradiction avec $\lim\limits_{n\to+\infty} (q_n\theta - p_n) = 0$. En conclusion, on a $\theta \notin \mathbb{Q}$. ■

Ce corollaire peut être utilisé pour montrer l'irrationalité de e^r pour tout nombre rationnel non nul r (exercice 5.6).

Théorème 3.26.

Soient a, b deux réels non nuls, $G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \left\{na + mb,\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ et $H = \mathbb{N}a + \mathbb{Z}b = \{na + mb,\ (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$\frac{a}{b}$ est rationnel ;*
2. *le groupe G est discret dans $\mathbb{R}$;*
3. *le groupe G est fermé ;*
4. *l'ensemble H est discret dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration (1) $\Leftrightarrow$ (2) Cette équivalence résulte de l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) du théorème 3.25 sachant qu'un réel est rationnel ou irrationnel et un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est dense ou discret, le « ou » étant exclusif dans les deux cas.

(2) $\Rightarrow$ (3) Résulte du fait qu'un groupe discret est fermé (théorème 3.21).

(3) $\Rightarrow$ (2) Si le groupe G est fermé, il ne peut alors être dense car il est dénombrable (équipotent à $\mathbb{Z}^2$) et $\mathbb{R}$ ne l'est pas, il est donc discret.

On a donc les équivalences entre (1), (2) et (3).

(2) $\Rightarrow$ (4) Si G est discret, il en est alors de même de H contenu dans G.

(4) $\Rightarrow$ (1) Supposons que H soit discret dans $\mathbb{R}$. Si $\frac{a}{b}$ est irrationnel, le théorème 3.25 nous dit alors que H est dense dans $\mathbb{R}$. Mais alors $]0, 1[\cap H$ est non vide (densité de H dans $\mathbb{R}$) et fini (H est discret), donc admet un plus petit élément $\alpha \in]0, 1[$

tel que $]0, \alpha[\cap H$ est vide, ce qui contredit la densité de H dans $\mathbb{R}$. Donc $\dfrac{a}{b}$ est rationnel. ■

Dans le cas particulier où a et b sont des entiers relatifs, on a $\mathbb{Z}a+\mathbb{Z}b = \mathbb{Z}(a \wedge b)$ par définition du pgcd.

Le théorème 3.26 peut se généraliser comme suit.

Théorème 3.27.

Soient $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de $n \geq 2$ réels non nuls et :

$$G = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{Z}a_k = \left\{ \sum_{k=1}^{n} p_k a_k,\ (p_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par les a_k. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *G est discret ;*
2. *G est fermé ;*
3. *pour tous $j \neq k$ compris entre 1 et n, $\dfrac{a_j}{a_k}$ est rationnel.*

Démonstration (1) ⇒ (2) Si G est discret, il est alors fermé (théorème 3.21).

(2) ⇒ (3) S'il existe deux indices $j \neq k$ compris entre 1 et n tels que $\dfrac{a_j}{a_k}$ soit irrationnel, le groupe $G_{j,k} = \mathbb{Z}a_j + \mathbb{Z}a_k$ est alors dense dans $\mathbb{R}$ et il en est de même de G qui le contient, ce qui implique que G ne peut être fermé car il est dénombrable alors que $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

(3) ⇒ (1) Si tous les $\dfrac{a_j}{a_k}$, pour $j \neq k$ compris entre 1 et n sont rationnels, on vérifie alors par récurrence sur $n \geq 2$ que G est discret. En effet c'est vrai pour $n = 2$ et supposant le résultat acquis pour $n-1 \geq 2$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{Z}a_k = \mathbb{Z}\alpha_{n-1} + \mathbb{Z}a_n$ où $\displaystyle\alpha_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k a_k$, les p_k étant entiers et comme $\displaystyle\frac{\alpha_{n-1}}{a_n} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k \frac{a_k}{a_n}$ est rationnel, le groupe G est discret. ■

Avec les notations du théorème précédent, le groupe G est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement, il existe deux indices $j \neq k$ compris entre 1 et n tels que $\dfrac{a_j}{a_k}$ soit irrationnel.

3.6.2 Groupe des périodes d'une fonction périodique

L'étude des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ peut être appliquée à l'étude des fonctions d'une variable réelle périodiques.

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que $T \in \mathbb{R}$ est une période de f s'il est tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{P}(f)$ de toutes les périodes de f est un sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$.

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite périodique si $\mathcal{P}(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Exemples 3.8

1. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante si, et seulement si, on a $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$. En effet, si f est constante égale à λ, on a alors $f(x+T) = \lambda = f(x)$ pour tous réels T et x, soit $T \in \mathcal{P}(f)$ et $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$. Réciproquement si $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$, tout réel x est une période et $f(x) = f(0+x) = f(0)$, donc f est constante.*
2. *Si $f = \mathbf{1}_G$ est la fonction indicatrice d'un sous-groupe additif G de $\mathbb{R}$, on a alors $\mathcal{P}(f) = G$. En effet, pour tout $T \in G$ et tout $x \in G$, on a $x + T \in G$ et $f(x+T) = 1 = f(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus G$, on a $x + T \in \mathbb{R} \setminus G$ (sinon on a $x = (x+T) - T \in G$) et $f(x+T) = 0 = f(x)$. Donc $T \in \mathcal{P}(f)$. Réciproquement si $T \in \mathcal{P}(f)$, on a alors $1 = f(0) = f(T)$ et $T \in G$. D'où l'égalité $\mathcal{P}(f) = G$.*

Théorème 3.28.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue non constante, son groupe des périodes $\mathcal{P}(f)$ est alors fermé dans $\mathbb{R}$ et f est périodique si, et seulement si, $\mathcal{P}(f)$ est discret non réduit à $\{0\}$.

Démonstration Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(f)$ convergente vers un réel T. Par continuité de f on a $f(x+T) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x+T_n) = f(x)$ pour tout réel x, c'est-à-dire que $T \in \mathcal{P}(f)$. L'ensemble $\mathcal{P}(f)$ est donc fermé dans $\mathbb{R}$.

On peut aussi procéder comme suit. En notant $f_a(t) = f(a+t) - f(t)$ pour tout réel a, on a $\mathcal{P}(f) = \bigcap\limits_{a\in\mathbb{R}} f_a^{-1}\{0\}$ et pour f continue, cet ensemble est fermé comme intersection de fermés.

Comme f est continue non constante, $\mathcal{P}(f)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ distinct de $\mathbb{R}$ et en conséquence, il ne peut être dense dans $\mathbb{R}$, donc il est discret de la forme $\mathcal{P}(f) = \mathbb{Z}T$. Dans le cas où f est périodique, on a $\mathcal{P}(f) \neq \{0\}$ et $T > 0$ (T est la plus petite période de f). La réciproque résulte de la définition d'une fonction périodique. ■

Théorème 3.29.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction périodique dérivable, sa dérivée est alors périodique de même groupe de périodes que f. En particulier, pour f non constante, les fonctions f et f' ont même plus petite période strictement positive.

Démonstration Pour tout $T \in \mathcal{P}(f)$, on a $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et par dérivation, $f'(x+T) = f'(x)$, ce qui signifie que T est une période de f', donc $\mathcal{P}(f) \subset \mathcal{P}(f')$. Si $T \in \mathcal{P}(f')$, la fonction $x \mapsto f(x+T) - f(x)$ est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, donc constante. Il existe donc une constante réelle λ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x) + \lambda$$

On vérifie facilement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(nT) = f(0) + n\lambda$$

La fonction f étant continue périodique est bornée sur $\mathbb{R}$ et avec :

$$\forall n \geq 1,\ |\lambda| = \left|\frac{f(nT) - f(0)}{n}\right| \leq 2\frac{\|f\|_\infty}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

on déduit que $\lambda = 0$, c'est-à-dire que T est une période de f et $\mathcal{P}(f') \subset \mathcal{P}(f)$. On a donc $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(f')$. Si f est constante, il en est alors de même de f' et $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(f') = \mathbb{R}$. Si f n'est pas constante, on a alors $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(f') = \mathbb{Z}T$, où $T > 0$ est la plus petite période strictement positive de f et f'. ■

3.6.3 Sous-groupes additifs d'un espace normé de dimension finie

Pour toute famille libre $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ de m vecteurs de E, l'entier m étant compris entre 1 et n, on note :

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}e_i = \left\{ \sum_{i=1}^{m} k_i e_i,\ (k_i)_{1\leq i\leq m} \in \mathbb{Z}^m \right\}$$

Un tel ensemble est un sous-groupe de E et comme pour $\mathbb{Z}^m$ (voir l'un des exemples 3), on vérifie facilement qu'il est discret. En effet, en complétant $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ en une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E et en utilisant la norme $\|\cdot\|_\infty$ associée à cette base, on a $B_\infty(0,1) \cap \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}e_i\right) = \{0\}$.

Le résultat sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (en conséquence du théorème de division euclidienne, ils sont de la forme $n\mathbb{Z}$) peut se généraliser comme suit.

Lemme 3.5 *Soient $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille libre dans E et $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}e_i$ le sous-groupe de E associé. Les sous-groupes non réduit à $\{0\}$ de G sont de la forme $H = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}f_i$, où $r \in \{1, \cdots, m\}$ et $(f_i)_{1\leq i\leq r}$ une famille libre d'éléments de G.*

Démonstration On procède par récurrence sur $m \in \{1, \cdots, n\}$. Pour $m = 1$, si H est un sous-groupe non réduit à $\{0\}$ de $G = \mathbb{Z}e_1$ où $e_1 \in E \setminus \{0\}$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^*,\ ke_1 \in H\}$ est non vide, donc admet un plus petit élément $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $f_1 = pe_1 \in H$. Pour $g = ke_1 \in H$, par division euclidienne, on a $k = jp + r$ avec $0 \leq r \leq p - 1$ et $re_1 = g - jf_1 \in H$, donc $r = 0$ (caractère minimal de p) et $g = jf_1 \in \mathbb{Z}f_1$. On a donc $H \subset \mathbb{Z}f_1$ et l'égalité puisque $f_1 \in H$ (c'est en fait la caractérisation des sous-groupes de $\mathbb{Z}$).

Supposons le résultat acquis pour $m - 1 \in \{1, \cdots, n-1\}$. Soient $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille libre dans E et H un sous-groupe non réduit à $\{0\}$ de $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}e_i$. Si

$H \subset \bigoplus_{i=1}^{m-1} \mathbb{Z}e_i$ c'est alors terminé, vu l'hypothèse de récurrence. Supposons que H contienne des éléments de la forme $\sum_{i=1}^{m} k_i e_i$, où les k_i sont des entiers avec $k_m \neq 0$. Dans ces conditions, le morphisme de groupes :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_m : & H & \to & \mathbb{Z} \\ & h = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i e_i & \mapsto & k_m \end{array}$$

est non nul et $\mathrm{Im}(\varphi_m)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$, donc il existe un entier $p_m \geq 1$ tel que $\mathrm{Im}(\varphi_m) = p_m\mathbb{Z}$. Soit $f_m \in H$ tel que $\varphi_m(f_m) = p_m$. Comme $\ker(\varphi_m)$ est un sous-groupe de $\bigoplus_{i=1}^{m-1} \mathbb{Z}e_i$, il existe un entier $r \in \{1, \cdots, m-1\}$ et une famille libre $(f_i)_{1\leq i\leq r}$ dans $\ker(\varphi_m) \subset G$ telle que $\ker(\varphi_m) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}f_i$. Pour tout $g \in H$, il existe un entier k tel que $\varphi_m(g) = kp_m = \varphi_m(kf_m)$, donc $g - kf_m \in \ker(\varphi_m)$ et $g \in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}f_i + \mathbb{Z}f_m$. On a donc $H \subset \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}f_i + \mathbb{Z}f_m$ et l'égalité puisque tous les f_i, pour i compris entre 1 et r et f_m sont dans H. Si la famille $(f_1, \cdots, f_r, f_m)$ est liée, on a alors $f_m = \sum_{i=1}^{r} x_i f_i$ où les x_i sont des réels (puisque $(f_i)_{1\leq i\leq r}$ est libre), donc $f_m = \sum_{i=1}^{m} k_i e_i = \sum_{i=1}^{r} x_i \sum_{i=1}^{m-1} k_{i,j} e_i$ où les k_i et $k_{i,j}$ sont des entiers, ce qui nous donne $k_m = \varphi_m(f_m) = 0$ et contredit la définition de f_m. La famille $(f_1, \cdots, f_r, f_m)$ est donc libre et notant f_{r+1} pour f_m, on a $H = \bigoplus_{i=1}^{r+1} \mathbb{Z}f_i$. ∎

Lemme 3.6 *Soient G un sous-groupe discret de E non réduit à $\{0\}$, F le sous-espace vectoriel de E engendré par G, $(g_i)_{1\leq i\leq m}$ une base de F formée d'éléments de G et $K = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i g_i,\ (x_i)_{1\leq i\leq m} \in [0,1]^m \right\}$.*

1. *L'intersection $K \cap G$ est finie et en notant $f_1, \cdots, f_p$ ses éléments non nuls, on a $G = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{Z}f_i$.*
2. *Tout $g \in G$ s'écrit de manière unique $g = \sum_{i=1}^{m} x_i g_i$ où les x_i sont des nombres rationnels.*
3. *Il existe un entier $q \geq 1$ tel que $G \subset \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}\left(\frac{1}{q} g_i\right)$.*

Démonstration En désignant par $m \in \{1, \cdots, n\}$ la dimension de F, on peut extraire du système générateur G de F une base $(g_i)_{1\leq i\leq m}$.

1. L'ensemble $K = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i g_i,\ (x_i)_{1 \leq i \leq m} \in [0,1]^m \right\} \subset F$ étant borné (par équivalence des normes sur F on a $\|x\| \leq \alpha \|x\|_\infty = \alpha \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \leq \alpha$ pour tout $x \in K$) et le groupe G étant discret, l'intersection $K \cap G$ est finie, soit $K \cap G = \{0, f_1, \cdots, f_p\}$. Les $f_i \neq 0$ étant tous dans le groupe G, on a l'inclusion $\sum_{i=1}^{p} \mathbb{Z} f_i \subset G$. En écrivant tout $g \in G \subset F$ sous la forme $g = \sum_{i=1}^{m} x_i g_i$ où les x_i sont des réels, on a en notant $[x]$ la partie entière d'un réel x, $h_1 = \sum_{i=1}^{m} [x_i]\, g_i \in \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z} f_i$ puisque tous les g_i sont dans $K \cap G$ et $h_2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - [x_i])\, g_i = g - h_1 \in K \cap G$ puisque les $x_i - k_i$ sont compris entre 0 et 1 et G est un groupe. Au final, on a $g = h_1 + h_2 \in \sum_{i=1}^{p} \mathbb{Z} f_i$, ce qui prouve que $G = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{Z} f_i$.

2. Dans l'écriture $g = \sum_{i=1}^{m} x_i g_i$ d'un élément de G, on vérifie que tous les x_i, qui sont uniquement déterminés, sont en fait rationnels. Comme G est un groupe, on a $kg \in G$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $h_k = \sum_{i=1}^{m} (kx_i - [kx_i])\, g_i \in K \cap G = \{0, f_1, \cdots, f_p\}$. En notant $f_0 = 0$, l'application $k \in \mathbb{N}^* \mapsto h_k \in \{f_0, f_1, \cdots, f_p\}$ ne pouvant être injective, il existe deux indices $j \neq k$ tels que $h_j = h_k$, ce qui nous donne :
$$jx_i - [jx_i] = kx_i - [kx_i] \ \ (1 \leq i \leq m)$$
et $x_i = \dfrac{[jx_i] - [kx_i]}{j - k} \in \mathbb{Q}$ pour $1 \leq i \leq m$.

3. En particulier pour $1 \leq j \leq p$, chaque f_j s'écrit $f_j = \sum_{i=1}^{m} r_{i,j} g_i$ où les $r_{ij} \in \mathbb{Q}$. En désignant par $q \in \mathbb{N}^*$ le ppcm des dénominateurs des r_{ij} non nuls, on a $p_{i,j} = q r_{i,j} \in \mathbb{Z}$ pour tous i,j et $q f_j = \sum_{i=1}^{m} p_{i,j} g_i$. Comme $G = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{Z} f_i$, tout $g \in G$ s'écrit :
$$g = \sum_{j=1}^{p} k_j f_j = \sum_{j=1}^{p} k_j \sum_{i=1}^{m} p_{i,j} \left(\frac{1}{q} g_i\right) \in \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z} \left(\frac{1}{q} g_i\right)$$
(la famille $\left(\frac{1}{q} g_i\right)_{1 \leq i \leq m}$ est une base de F). On a donc $G \subset \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z} \left(\frac{1}{q} g_i\right)$.

■

Le théorème 3.23 relatif aux sous-groupes discrets de $\mathbb{R}$ peut se généraliser comme suit.

Théorème 3.30.

Les sous-groupes discrets non réduit à $\{0\}$ de l'espace normé E sont de la forme $G = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}e_i$ où $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ est une famille libre d'éléments de G.

Démonstration On sait déjà que les sous-groupes de E de la forme $G = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}e_i$ sont discrets. Réciproquement si G est un sous-groupe discret de E non réduit à $\{0\}$, il existe alors une famille libre $(g_i)_{1\leq i\leq m}$ d'éléments de G et un entier naturel non nul q tels que G soit un sous-groupe de $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}\left(\frac{1}{q}g_i\right)$, donc de la forme $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}e_i$ d'après le lemme 3.5. ∎

Un sous-groupe discret de E est donc isomorphe à un groupe $\mathbb{Z}^r$.

Lemme 3.7 *Soit G un sous-groupe fermé de E non discret.*

1. *G contient au moins une droite vectorielle.*
2. *L'ensemble E_1 formé de la réunion de toutes les droites vectorielles contenues dans G est un sous-espace vectoriel de E contenu dans G.*
3. *En désignant par E_2 un supplémentaire de E_1 dans E et en notant $H = G\cap E_2$, on a $G = E_1 + H$ et $E_1 \cap H = \{0\}$, ce que l'on note $G = E_1 \oplus H$.*

Démonstration

1. Le groupe G n'étant pas discret, 0 n'est pas isolé dans G, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $x_k \in \overline{B}\left(0, \frac{1}{k+1}\right) \cap (G \setminus \{0\})$, ce qui nous donne une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments $G\setminus\{0\}$ qui converge vers 0. De la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\|x_k\|}x_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans la sphère unité de E, on peut extraire une sous-suite $\left(y_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers un vecteur unitaire y. On a a alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left\|\lambda y - \left[\frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|}\right] x_{\varphi(k)}\right\| &\leq \left\|\lambda y - \frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|} x_{\varphi(k)}\right\| \\ &\quad + \left\|\frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|} x_{\varphi(k)} - \left[\frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|}\right] x_{\varphi(k)}\right\| \\ &\leq |\lambda| \left\|y - y_{\varphi(k)}\right\| + \left(\frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|} - \left[\frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|}\right]\right) \left\|x_{\varphi(k)}\right\| \\ &\leq |\lambda| \left\|y - y_{\varphi(k)}\right\| + \left\|x_{\varphi(k)}\right\|\end{aligned}$$

avec $\lim_{k\to+\infty} \left\|y - y_{\varphi(k)}\right\| = \lim_{k\to+\infty} \left\|x_{\varphi(k)}\right\| = 0$, ce qui nous donne :

$$\lambda y = \lim_{k\to+\infty} \left[\frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|}\right] x_{\varphi(k)} \in \overline{G} = G$$

(les $\left[\frac{\lambda}{\|x_{\varphi(k)}\|}\right] x_{\varphi(k)}$ sont dans G qui est fermé). La droite $D = \mathbb{R}y$ est donc contenue dans G.

2. En notant $D_x = \mathbb{R}x$ pour tout $x \in D$ ($D_0 = \{0\}$ et D_x est une droite pour $x \neq 0$), l'ensemble $E_1 = \bigcup_{D_x \subset G} D_x$ contient au moins une droite vectorielle. Un vecteur $x \in E$ est dans E_1 si, et seulement si, on a $D_x \subset G$. Pour tous x, y dans E_1 et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $D_{\lambda x+y} \subset D_x + D_y \subset G$, donc $\lambda x + y \in E_1$. L'ensemble E_1 est donc un sous-espace vectoriel de E et il est contenu dans G comme réunion de droites contenues dans G.
3. On a $E = E_1 \oplus E_2$, donc $E_1 \cap H \subset E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $E_1 \cap H = \{0\}$. Tout $g \in G \subset E$ s'écrit $g = g_1 + g_2$ avec $g_1 \in E_1 \subset G$ et $g_2 \in E_2$, ce qui implique que $g_2 = g - g_1 \in H = G \cap E_2$ et $g \in E_1 + H$. On a donc $G \subset E_1 + H$ et l'égalité puisque E_1 et H sont contenus dans G.

■

Théorème 3.31.

Si G est un sous-groupe fermé de E non discret, il existe alors un sous-espace vectoriel E_1 de E non réduit à $\{0\}$ et un sous-groupe discret H de E tels que $G = E_1 \oplus H$ dans le sens où $G = E_1 + H$ et $E_1 \cap H = \{0\}$. Plus précisément, il existe deux entiers $r < s$ compris entre 1 et n et une famille libre $(e_i)_{1 \leq i \leq s}$ dans G telle que $G = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}e_i \oplus \bigoplus_{i=r+1}^{s} \mathbb{R}e_i$.

Démonstration En reprenant les notations du lemme précédent, il nous reste à vérifier que le sous-groupe $H = G \cap E_2$ de E est discret. Ce sous-groupe est fermé comme intersection de deux fermés. Comme il ne contient aucune droite vectorielle (si $\mathbb{R}x \subset H$, on a alors $\mathbb{R}x \subset G$ et $x \in E_1$, donc $x = 0$), il est nécessairement discret d'après le premier point du lemme précédent.

Comme H est discret, il s'écrit $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}e_i$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ est une famille libre d'éléments de $H \subset G$ et désignant par $(e_i)_{r+1 \leq i \leq s}$ une base de $E_1 \subset G$, on a le résultat annoncé. ■

Exemple 3.2 *Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$. S'il est discret, il est alors fermé et on a les possibilités suivantes : $G = \{0\}$; $G = \mathbb{Z}e_1$ avec $e_1 \neq 0$; $G = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ avec (e_1, e_2) libre. S'il est non discret, son adhérence $\overline{G}$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^2$ et on a les possibilités suivantes : $\overline{G} = \mathbb{R}^2$ et G est dense dans $\mathbb{R}^2$; $\overline{G} = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ est une réunion dénombrable de droites affines de direction $\mathbb{R}e_2$ et G est dense dans cette réunion ; $\overline{G} = \mathbb{R}e_1$ est une droite et G est dense dans cette droite.*

À titre d'application du théorème précédent, on a le résultat suivant.

Corollaire 3.9. *Soient $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\theta = (\theta_i)_{1\leq i\leq n}$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$.*

1. *Le sous-groupe G de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\{e_1, \cdots, e_n, \theta\}$ n'est pas discret.*
2. *Il existe des suites $(q_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs, où i est compris entre 1 et n, telles que $(q_{k,1} - p_k\theta_1, \cdots, q_{k,n} - p_k\theta_n) \neq 0$ et :*
$$\lim_{k\to+\infty} q_{k,i} - p_k\theta_i = 0 \ \ (1 \leq i \leq n)$$
3. *Pour tout $\varepsilon \in \left]0,1\right[$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et des entiers relatifs $q_1, \cdots, q_n$ tels que $\left|\theta_i - \dfrac{q_i}{p}\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{p}$ (approximations simultanées de Kronecker).*

Démonstration On a $\mathrm{Vect}(G) = \mathbb{R}^n$ car G contient la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Si le groupe G est discret, en notant $K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ (x_i)_{1\leq i\leq n} \in [0,1]^n \right\}$, on a vu que tout $g \in G$ s'écrit alors $g = \sum_{i=1}^{m} r_i g_i$ où les r_i sont rationnels (lemme 3.6), ce qui donne en particulier $\theta \in \mathbb{Q}^n$ contrairement à notre hypothèse. Le groupe G est donc non discret.

2. Il en résulte que 0 n'est pas isolé dans G et en conséquence, on peut trouver une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments non nuls de G qui converge vers 0. En notant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \sum_{i=1}^{n} q_{k,i} e_i - p_k\theta$, où les $p_{i,k}$ et q_k sont des entiers, on a $(q_{k,i} - p_k\theta_i)_{1\leq i\leq n} \neq 0$ et $\lim_{k\to+\infty} q_{k,i} - p_k\theta_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$.

3. Donc, pour tout $\varepsilon \in \left]0,1\right[$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|q_{k,i} - p_k\theta_i| < \varepsilon$ $(1 \leq i \leq n)$. Si $p_k = 0$, on a alors $|q_{k,i}| < 1$ dans $\mathbb{N}$ pour tout i et tous les $q_{k,i}$ sont nuls, ce qui n'est pas. On a donc $p_k \neq 0$ et quitte à changer x_k en $-x_k$, on peut supposer que $p_k \in \mathbb{N}^*$. ■

3.7 Exercices

Exercice 3.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_k)_{1\leq k\leq n}$ une base de E. Pour tout $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E$, on note $\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|$ et pour tout réel $p > 1$, $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.*

1. *Montrer que pour tout réel $\alpha \in \left]0,1\right[$ et tous réels $x \neq y$ strictement positifs, on a $x^\alpha y^{1-\alpha} < \alpha x + (1-\alpha)\, y$.*

2. *Soient p, q deux réels dans $]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (de tels réels sont dits conjugués). Montrer que pour tous réels x, y positifs ou nuls, on a $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $x^p = y^q$ (inégalité de Young).*
3. *Soient p, q deux réels dans $]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que pour tous $x = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ et $y = (y_k)_{1\leq k\leq n}$ dans $\mathbb{K}^n$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

L'égalité étant réalisée si, et seulement si, $x = 0$ ou $y = 0$ ou x, y sont non nuls et il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $|y_k| = \lambda^p\,|x_k|^{p-1}$ pour tout entier k compris entre 1 et n (inégalité de Hölder).
4. *Montrer que pour tout réel $p > 1$, l'application $x \mapsto \|x\|_p$ définit une norme sur E.*
5. *Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.*
6. *Soient $(\alpha_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de n réels strictement positifs. Montrer que pour tout $(x_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^n$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k|$.*
7. *Pour $p \in \,]0, 1[$, l'application $x \mapsto \|x\|_p$ définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?*

Solution.

1. Pour $\alpha \in \,]0, 1[$, la fonction $\varphi_\alpha : t \mapsto t^\alpha - \alpha t$ est continue sur $[0, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$ avec $\varphi_\alpha'(t) = \alpha\left(\frac{1}{t^{1-\alpha}} - 1\right) > 0$ pour tout $t \in \,]0, 1[$, donc φ_α est strictement croissante sur $[0, 1]$ et $\varphi_\alpha(t) = t^\alpha - \alpha t < \varphi_\alpha(1) = 1 - \alpha$ pour tout $t \in [0, 1[$, soit $t^\alpha < \alpha t + 1 - \alpha$. Il en résulte que pour tous réels $y > x > 0$ on a $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha < \alpha\frac{x}{y} + 1 - \alpha$, ce qui équivaut à $x^\alpha y^{1-\alpha} < \alpha x + (1-\alpha)\,y$. Pour $x > y > 0$, en utilisant la croissance stricte de $\varphi_{1-\alpha}$ sur $[0, 1]$, on a $\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\alpha} < (1-\alpha)\frac{y}{x} + \alpha$, soit encore $x^\alpha y^{1-\alpha} < \alpha x + (1-\alpha)\,y$. Pour $x = 0$ ou $y = 0$, on a l'inégalité large avec égalité uniquement pour $x = y = 0$. On peut aussi raisonner en utilisant la stricte concavité de la fonction $\ln$.
2. Si $x^p = y^q$, on a alors $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)x^p = x^p$ et :

$$(xy)^{pq} = (x^p)^q\,(y^q)^p = (x^p)^{p+q} = (x^p)^{pq}$$

puisque l'égalité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ s'écrit aussi $p + q = pq$, ce qui donne $xy = x^p$ dans $\mathbb{R}^+$. Pour x, y non nuls tels que $x^p \neq y^q$, l'inégalité de la question précédente pour $\alpha = \dfrac{1}{p} \in \left]0,1\right[$, $1-\alpha = 1-\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q}$ appliquée au couple (x^p, y^q) s'écrit $(x^p)^{\frac{1}{p}}(y^q)^{\frac{1}{q}} = xy < \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$, cette inégalité stricte étant encore valable pour $x=0$ et $y>0$ ou $x>0$ et $y=0$.

3.

(a) Pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$, en utilisant l'inégalité de Young, on a pour tout réel $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|y_k| &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda\,|x_k|)\,\frac{|y_k|}{\lambda} \\ &\leq \varphi(\lambda) = \frac{\lambda^p}{p}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p + \frac{1}{q\lambda^q}\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q = \frac{\lambda^p}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q\lambda^q}\|y\|_q^q\end{aligned}$$

donc $\sum_{k=1}^{n}|x_k|\,|y_k| \leq \inf_{\lambda\in\mathbb{R}^{+,*}} \varphi(\lambda)$. La fonction φ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\left(\varphi'(\lambda) = \lambda^{p-1}\|x\|_p^p - \frac{1}{\lambda^{q+1}}\|y\|_q^q = 0\right) \Leftrightarrow \left(\lambda^{p+q} = \lambda^{pq} = \frac{\|y\|_q^q}{\|x\|_p^p}\right)$$

L'étude de ses variations nous montre qu'elle atteint son minimum en l'unique point $\lambda_0 = \dfrac{\|y\|_q^{\frac{1}{p}}}{\|x\|_p^{\frac{1}{q}}} > 0$, ce minimum valant :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_0) &= \frac{\lambda_0^p}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q\lambda_0^q}\|y\|_q^q = \frac{1}{p}\frac{\|y\|_q}{\|x\|_p^{\frac{p}{q}}}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\frac{\|x\|_p}{\|y\|_q^{\frac{q}{p}}}\|y\|_q^q \\ &= \frac{1}{p}\|y\|_q\|x\|_p^{p\left(1-\frac{1}{q}\right)} + \frac{1}{q}\|x\|_p\|y\|_q^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)} \\ &= \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\|x\|_p\|y\|_q = \|x\|_p\|y\|_q\end{aligned}$$

ce qui nous donne l'inégalité $\sum_{k=1}^{n}|x_k|\,|y_k| \leq \varphi(\lambda_0) = \|x\|_p\|y\|_q$. Si l'égalité est réalisée, on a alors :

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k|\,|y_k| = \varphi(\lambda_0) = \frac{\lambda_0^p}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q\lambda_0^q}\|y\|_q^q = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda_0^p}{p}|x_k|^p + \frac{1}{q\lambda_0^q}|y_k|^q\right)$$

soit $\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\lambda_0^p}{p}|x_k|^p + \dfrac{1}{q\lambda_0^q}|y_k|^q - |x_k|\,|y_k|\right) = 0$, chaque terme de cette somme étant positif (inégalité de Young pour $|x_k|\,|y_k| = (\lambda_0\,|x_k|)\dfrac{|y_k|}{\lambda_0}$), ce qui impose les égalité $(\lambda_0 |x_k|) \dfrac{|y_k|}{\lambda_0} = \dfrac{\lambda_0^p}{p} |x_k|^p + \dfrac{1}{q\lambda_0^q} |y_k|^q$ qui sont équivalentes à $\lambda_0^p |x_k|^p = \dfrac{|y_k|^q}{\lambda_0^q}$ ou encore à $\lambda_0^{p+q} |x_k|^p = \lambda_0^{pq} |x_k|^p = |y_k|^q$, soit à $|y_k| = \lambda_0^p |x_k|^{\frac{p}{q}} = \lambda_0^p |x_k|^{p-1}$ pour tout k compris entre 1 et n.

(b) Pour $x = 0$ ou $y = 0$, on a de manière triviale l'égalité de Hölder. Pour x, y non nuls tels que $|y_k| = \lambda^p |x_k|^{p-1}$ pour tout entier k compris entre 1 et n où $\lambda > 0$, on a $\sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| = \lambda^p \sum_{k=1}^n |x_k|^p = \lambda^p \|x\|_p^p$ et :

$$\|y\|_q^q = \lambda^{pq} \sum_{k=1}^n |x_k|^{pq-q} = \lambda^{pq} \sum_{k=1}^n |x_k|^p = \lambda^{pq} \|x\|_p^p$$

ce qui nous donne $\|x\|_p \|y\|_q = \lambda^p \|x\|_p^{1+\frac{p}{q}} = \lambda^p \|x\|_p^p$ (en exploitant les égalités $p + q = pq$ et $\dfrac{p}{q} = p - 1$).

4. Pour $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$ dans E, on a en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

avec $(p-1) q = p$, ce qui s'écrit :

$$\sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}}$$

et implique que :

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^p &= \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}} = \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \|x + y\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

(on a $\dfrac{p}{q} = p\left(1 - \dfrac{1}{p}\right) = p - 1$), soit $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. On a donc l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$. Les autres propriétés d'une norme se vérifient facilement.

5. Pour tous $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$ et k compris entre 1 et n on a $|x_k|^p \leq \|x\|_\infty^p$, ce qui implique que $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$. D'autre part il existe k compris entre 1 et n tel que $\|x\|_\infty = |x_k|$ et avec $|x_k|^p \leq \sum_{j=1}^n |x_j|^p$, on en déduit que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.

On a donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$ et avec $\lim\limits_{p\to+\infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$. Dans $\mathbb{K}^n$ cela se traduit par :

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|$$

6. En désignant par i, j deux entiers compris entre 1 et n tels que $\alpha_i = \min\limits_{1\leq k\leq n} \alpha_k$ et $\alpha_j = \max\limits_{1\leq k\leq n} \alpha_k$, on a pour tout $x = (x_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^n$:

$$\alpha_i^{\frac{1}{p}} \|x\|_p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha_j^{\frac{1}{p}} \|x\|_p$$

avec $\lim\limits_{p\to+\infty} \alpha_i^{\frac{1}{p}} = \lim\limits_{p\to+\infty} \alpha_j^{\frac{1}{p}} = 1$ puisque α_i et α_j sont strictement positifs, ce qui implique que $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k|$.

7. Pour $n \geq 2$ et $0 < p < 1$, l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée. Notant $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a $\|e_1 + e_2\|_p = 2^{\frac{1}{p}} > \|e_1\|_p + \|e_2\|_p = 2$.

Exercice 3.2. *$E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ ($a < b$ réels) dans $\mathbb{K}$. Pour tout réel $p \geq 1$ et toute fonction tout $f \in E$, on note $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$.*

1. *Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur E.*
2. *Montrer que pour toute fonction $f \in E$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.*
3. *Soit $g \in E$ une fonction à valeurs strictement positives. Montrer que pour tout $f \in E$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\int_a^b |f(t)|^p g(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.*

Solution.

1. Pour $p = 1$, on vérifie facilement avec les propriétés de linéarité et positivité de l'intégrale des fonctions continues sur un segment que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur E. Pour $p > 1$, étant données deux fonctions f, g non identiquement nulles dans E, l'inégalité $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v$ pour $u > 0$ et $v > 0$ où $q > 1$ est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ appliquée à $u = \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p}$ et $u = \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q}$ avec $t \in [a,b]$ nous donne :

$$\frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \frac{|g(t)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q}$$

et par intégration sur $[a,b]$ on obtient :

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_a^b |f(t)| |g(t)| \, dt \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

soit l'inégalité de Hölder $\left| \int_a^b f(t) g(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| |g(t)| \, dt \leq \|f\|_p \|g\|_q$, cette inégalité étant encore réalisée pour $f = 0$ ou $g = 0$. Cette inégalité appliquée au couple de fonctions $\left(|f|, |f+g|^{p-1}\right)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |f(t)| |f(t)+g(t)|^{p-1} \, dt \\
&\leq \|f\|_p \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^{(p-1)q} \, dt \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\|f+g\|_p^p = \int_a^b |f(t)+g(t)|^p \, dt \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$, soit compte tenu de $\frac{p}{q} = p-1$, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. On a donc l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$. Les autres propriétés d'une norme se vérifient facilement.

2. Le résultat étant évident pour $f = 0$, on se donne une fonction f non identiquement nulle. Pour tout réel $p > 1$ et tout $t \in [a,b]$, on a $0 \leq |f(t)|^p \leq \|f\|_\infty^p$ et par intégration sur $[a,b]$ cela nous donne $0 \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}$. La fonction f étant continue sur le compact $[a,b]$, il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $|f(t_0)| = \|f\|_\infty$ et par continuité en t_0, pour tout réel $\varepsilon \in]0, |f(t_0)|[$ (on a $|f(t_0)| > 0$ puisque $f \neq 0$), il existe un réel $\eta > 0$ tel que $0 \leq |f(t_0)| - |f(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in I_0 = [a,b] \cap [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, ce qui nous donne en notant α la longueur de l'intervalle I_0 :

$$\int_a^b |f(t)|^p \, dt \geq \int_{I_0} |f(t)|^p \, dt \geq \int_{I_0} (|f(t_0)| - \varepsilon)^p \, dt \geq \alpha \left(\|f\|_\infty - \varepsilon \right)^p$$

ce qui donne en définitive, pour tout $\varepsilon \in]0, |f(t_0)|[$:

$$\left(\|f\|_\infty - \varepsilon \right) \alpha^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}$$

Comme $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\|f\|_\infty - \varepsilon \right) \alpha^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty - \varepsilon$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty$, il existe un réel p_0 tel que $\|f\|_\infty - 2\varepsilon \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty + 2\varepsilon$ pour tout $p \geq p_0$, *ce* qui nous dit au final que $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\|f\|_p \right) = \|f\|_\infty$.

3. La fonction g étant continue à valeurs strictement positives sur le compact $[a,b]$, on a $M = \sup\limits_{t \in [a,b]} g(t) \geq m = \inf\limits_{t \in [a,b]} g(t) > 0$ et avec $m |f|^p \leq g |f|^p \leq M |f|^p$, on en déduit que $m^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p g(t) \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq M^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$, puis que $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\int_a^b |f(t)|^p g(t) \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty$.

Exercice 3.3. *Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de semi-normes sur E telle $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p_n^{-1}\{0\} = \{0\}$ (une telle famille de semi-normes est dite séparante) et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle croissante, bornée et telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t+t') \leq \varphi(t) + \varphi(t')$ pour tous t, t' dans $\mathbb{R}^+$.*

1. *Montrer que $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$.*
2. *Montrer que l'application d définie sur E^2 par :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi(p_n(y-x))}{2^n}$$

   est une distance sur E.
3. *Que dire pour les fonctions φ définies sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(t) = \min(t,1)$, $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ et $\varphi(t) = t^\alpha$ où $\alpha \in]0,1[$?*

Solution.

1. Voir l'exercice 2.4.
2. La fonction φ étant à valeurs positives (elle est croissante, donc pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on a $\varphi(t) \geq \varphi(0) = 0$) et bornée, on a pour tous $(x,y) \in E^2$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \dfrac{1}{2^m}\varphi(p_n(y-x)) \leq \dfrac{\|\varphi\|_\infty}{2^m}$, ce qui nous assure de la convergence de la série $\sum \dfrac{\varphi(p_n(y-x))}{2^n}$. La fonction d est donc bien définie et à valeurs positives. Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $p_n(y-x) = p_n(x-y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $d(x,y) = d(y,x)$. L'égalité $d(x,y) = 0$ équivaut à $\varphi(p_n(y-x)) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit à $p_n(y-x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la question précédente ou encore à $y = x$ puisque $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est séparante. Enfin pour x, y, z dans E, on a :

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\varphi(p_n((z-y)+(y-x)))}{2^n} \\ &\leq \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\varphi(p_n(z-y))}{2^n} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\varphi(p_n(y-x))}{2^n} = d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

   (p_n est une semi-norme, φ est croissante et $\varphi(t+t') \leq \varphi(t) + \varphi(t')$). L'application d est donc une distance sur E.
3. Les fonctions φ considérées vérifiant les bonnes hypothèses (exercice 2.4), les applications d correspondantes sont bien des distances.

Exercice 3.4. *Montrer que dans un espace normé E, l'adhérence $\overline{B(a,r)}$ d'une boule ouverte $B(a,r)$ est la boule fermée $\overline{B}(a,r)$.*

Solution. Dans tout espace métrique on a l'inclusion $\overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r)$ du fait que l'adhérence $\overline{B(a,r)}$ de la boule ouverte $B(a,r)$ est le plus petit fermé qui la contient et que la boule fermée $\overline{B}(a,r)$ est un fermé. Soit $x \in \overline{B}(a,r)$. Si x est dans $B(a,r)$, il est alors dans $\overline{B(a,r)}$, sinon on a $\|x-a\| = r$ et pour tout entier $n > \frac{1}{2r}$ on a $x_n = x - \frac{1}{2nr}(x-a) \in B(a,r)$ (puisque $\|x_n - a\| = \left(1 - \frac{1}{2nr}\right) r < r$), la suite $(x_n)_{n > \frac{1}{2r}}$ étant convergente vers x, ce qui nous dit que $x \in \overline{B(a,r)}$. D'où l'égalité $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$.

Exercice 3.5. *Montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E distinct de E est d'intérieur vide.*

Solution. Soient $H \neq E$ un sous-espace vectoriel de E de dimension $n \geq 1$ (le cas où $H = \{0\}$ est trivial) et $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de H formée de vecteurs unitaires. Si $\overset{\circ}{H} \neq \emptyset$, il existe alors $a \in H$ et un réel $r > 0$ tels que $\overline{B}(a,r) \subset H$ et la boule $\overline{B}(0,r)$ est aussi contenue dans l'espace vectoriel H comme translatée de $\overline{B}(a,r)$. Le sous-espace vectoriel H de dimension n étant strictement contenu dans E, il existe un vecteur unitaire $e_{n+1} \in E \setminus H$ et $(re_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ est alors un système libre contenu dans $\overline{B}(0,r) \subset H$, ce qui n'est pas possible pour H de dimension n. En conclusion, H est d'intérieur vide.

Exercice 3.6. *Montrer que pour tout ensemble non vide D et tout espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ l'espace vectoriel $\mathcal{F}_b(D,E)$ des fonctions bornées de D dans E muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in D} \|f(x)\|$ est un espace de Banach.*

Solution. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{F}_b(D,E), \|\cdot\|_\infty)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \geq n_\varepsilon, \forall x \in D,\ \|f_m(x) - f_n(x)\| < \varepsilon \tag{3.3}$$

donc pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E et en conséquence convergente vers un élément $f(x)$ de E puisque E est complet. Faisant tendre m vers l'infini dans (3.3), on déduit que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in D,\ \|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon \tag{3.4}$$

et en particulier, on a pour tout $x \in D$:

$$\|f(x)\| \leq \|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)\| + \|f_{n_\varepsilon}(x)\| \leq \varepsilon + \|f_{n_\varepsilon}\|_\infty$$

ce qui nous dit que $f \in \mathcal{F}_b(D,E)$. Enfin, les inégalités (3.4) qui se se traduisent par $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ nous disent que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{F}_b(D,E)$. En conclusion, $(\mathcal{F}_b(D,E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Exercice 3.7. *Montrer pour tout réel $p \geq 1$, l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ n'est pas complet.*

Solution. On note $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K})$. Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de fonctions affines par morceaux et continues définies sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < \dfrac{1}{2}, \\ n\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \text{ si } \dfrac{1}{2} \leq x < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}, \\ 1 \text{ si } \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(f_n est nulle sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, affine sur $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]$, vaut 1 sur $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right]$ et est continue en $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$). Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq f_n(x) \leq 1$, ce qui nous donne pour $m > n \geq 2$ entiers :

$$\|f_m - f_n\|_p^p = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_m(x) - f_n(x)|^p \, dx \leq \frac{2^p}{n}$$

et cela implique que $(f_n)_{n\geq 2}$ est de Cauchy dans $\left(E, \|\cdot\|_p\right)$. Si cette suite converge dans $\left(E, \|\cdot\|_p\right)$ vers une fonction $f \in E$, on a alors en particulier :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^p \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - f_n(x)|^p \, dx \leq \|f - f_n\|_p^p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui implique par continuité et positivité que f est nulle sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. De même, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |f(x) - 1|^p \, dx = \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |f(x) - f_n(x)|^p \, dx \leq \|f - f_n\|_p^p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui implique par continuité et positivité que f est égale à 1 sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$. Avec la continuité de f en $\frac{1}{2}$, on déduit que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = 1$, ce qui est en contradiction avec $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. On a donc ainsi montré que $\left(E, \|\cdot\|_p\right)$ n'est pas complet.

Exercice 3.8. *Soient $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{K}$ telles que $f(0) = 0$ et $\varphi : [0,1] \to \mathbb{K}$ une fonction* *continue. Pour toute fonction $f \in E$, on note $N_1(f) = \|f'\|_\infty + \|\varphi f\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f' + \varphi f\|_\infty$.*

1. *Montrer que les applications N_1 et N_2 définissent des normes sur E.*
2. *Montrer que pour toute fonction $f \in E$, on a $\|f\|_\infty \leq N_1(f)$.*
3. *Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N_1 sont-elles équivalentes ?*
4. *Soient $f \in E$ et g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(t) = f(t)\, e^{\Phi(t)}$, où Φ est la primitive nulle en 0 de φ. Majorer $|g'|$ en fonction de $N_2(f)$, puis en déduire une majoration de $\|f\|_\infty$ en fonction de $N_2(f)$.*
5. *Montrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.*
6. *Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N_2 sont-elles équivalentes ?*

Solution.

1. Pour $k \in \{1,2\}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et f, g dans E_1, on a clairement $N_k(\lambda f) = |\lambda|\, N_k(f)$ et $N_k(f+g) \leq N_k(f) + N_k(g)$ (linéarité de $f \mapsto f'$ et $f \mapsto \varphi f$ ajoutée au fait que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme). L'égalité $N_1(f) = 0$ entraîne $f' = 0$, donc $f = f(0) = 0$. L'égalité $N_2(f) = 0$ équivaut à $f' + \varphi f = 0$, soit à $f(t) = \lambda e^{-\Phi(t)}$, où Φ est la primitive nulle en 0 de φ et $\lambda = f(0) = 0$, donc $f = 0$.
2. Pour tout $f \in E$, il existe $\alpha \in [0,1]$ tel :
$$\|f\|_\infty = |f(\alpha)| = \left| \int_0^\alpha f'(t)\, dt \right| \leq \|f'\|_\infty \leq N_1(f)$$
3. En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N_1(f_n) \geq \|f_n'\|_\infty = n$, donc il ne peut exister de réel $\alpha > 0$ tel que $N_1(f) \leq \alpha \|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$ et les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N_1 ne sont donc pas équivalentes.
4. Pour tout $f \in E$, on a $g \in E$ avec $g'(t) = e^{A(t)}(f'(t) + \varphi(t) f(t))$ pour tout $t \in [0,1]$, donc $|g'(t)| \leq \left\|e^{\Phi}\right\|_\infty \|f' + \varphi f\|_\infty = \left\|e^{\Phi}\right\|_\infty N_2(f)$, ce qui nous donne pour tout $x \in [0,1]$:
$$|f(x)| = \left| g(x)\, e^{-\Phi(t)} \right| \leq \left\|e^{-\Phi}\right\|_\infty \left| \int_0^x g'(t)\, dt \right| \leq \left\|e^{-\Phi}\right\|_\infty \left\|e^{\Phi}\right\|_\infty N_2(f)$$
soit $\|f\|_\infty \leq \left\|e^{-\Phi}\right\|_\infty \left\|e^{\Phi}\right\|_\infty N_2(f)$.
5. Pour tout $f \in E$, on a $N_2(f) = \|f' + \varphi f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + \|\varphi f\|_\infty = N_1(f)$ et :
$$\begin{aligned} N_1(f) &= \|f'\|_\infty + \|\varphi f\|_\infty = \|f' + \varphi f - \varphi f\|_\infty + \|\varphi f\|_\infty \\ &\leq \|f' + \varphi f\|_\infty + 2\|\varphi\|_\infty \|f\|_\infty \leq \left(1 + 2\|\varphi\|_\infty \left\|e^{-\Phi}\right\|_\infty \left\|e^{\Phi}\right\|_\infty\right) N_2(f) \end{aligned}$$
Les normes N_1 et N_2 sont donc équivalentes.
6. La norme $\|\cdot\|_\infty$ non équivalente à N_1 ne peut l'être à N_2.

Exercice 3.9. *Soit* $E = \mathrm{Lip}([0,1], \mathbb{K})$ *l'espace des fonctions lipschitzienne de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{K}$.

1. *Montrer que* E *n'est pas complet pour la norme* $\|\cdot\|_\infty$.
2. *À toute fonction* $f \in E$, *on associe les réels :*

$$\lambda(f) = \inf\left\{k \in \mathbb{R}^{+,*}\ ;\ \forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(y) - f(x)| \leq k|y-x|\right\}$$

et $\|f\| = \lambda(f) + |f(0)|$. *Montrer que* $\|\cdot\|$ *est une norme sur* E, *puis que* E *est complet pour cette norme. Cette norme est-elle équivalente à* $\|\cdot\|_\infty$ *?*

Solution. Une fonction lipschitzienne étant continue, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K})$.

1. Le théorème de Weierstrass (voir **??**) nous dit que toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales, donc lipschtziennes (chaque fonction mononome $x \mapsto x^k$ est lipschitzienne) et il existe des fonctions continues non lipschitzienne sur $[0,1]$ (par exemple $x \mapsto \sqrt{x}$), donc E n'est pas fermé dans l'espace de Banach $\left(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty\right)$ et en conséquence non complet pour $\|\cdot\|_\infty$.
2. Pour tout $f \in E$, le réel $\lambda(f)$ est bien défini comme borne inférieure d'une partie non vide (f est lipschitzienne) minorée par 0 de $\mathbb{R}$.
   (a) Soient f, g dans E et $\alpha \in \mathbb{K}$.
      i. Pour $\alpha = 0$, on a $L(\alpha f) = L(0) = \mathbb{R}^{+,*}$ et $\lambda(\alpha f) = 0 = \alpha\lambda(f)$. Pour $\alpha \neq 0$ et tous x, y dans $[0,1]$, on a $|\alpha f(y) - \alpha f(x)| \leq \lambda(\alpha f)|y-x|$, soit $|f(y) - f(x)| \leq \dfrac{\lambda(\alpha f)}{|\alpha|}|y-x|$, donc $\lambda(f) \leq \dfrac{\lambda(\alpha f)}{|\alpha|}$. Remplaçant (α, f) par $\left(\dfrac{1}{\alpha}, \alpha f\right)$, on obtient $\lambda(\alpha f) \leq |\alpha|\lambda(f)$ qui implique que $\lambda(\alpha f) = |\alpha|\lambda(f)$ et $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$.
      ii. Si $\|f\| = 0$, on a alors $f(0) = 0$ et $\lambda(f) = 0$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel k dans $]0, \varepsilon[\, \cap L(f)$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon|x|$. Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $f = f(0) = 0$.
      iii. Pour tous x, y dans $[0,1]$, on a :

$$|(f+g)(y) - (f+g)(x)| \leq (\lambda(f) + \lambda(g))|y-x|$$

      donc $\lambda(f+g) \leq \lambda(f) + \lambda(g)$ et $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
   (b) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$, elle est alors de Cauchy dans $\left(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty\right)$ puisque $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|$, ce qui implique qu'elle converge pour $\|\cdot\|_\infty$ (i. e. uniformément) vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{K})$. Des inégalités $|\lambda(f_m) - \lambda(f_n)| \leq \lambda(f_m - f_n) \leq \|f_m - f_n\|$, on déduit que la suite réelle $(\lambda(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente vers un réel $\lambda \geq 0$. En faisant tendre l'entier n vers l'infini dans les inégalités

$|f_n(y) - f_n(x)| \leq \lambda(f_n)|y-x|$, on déduit que $|f(y) - f(x)| \leq \lambda |y-x|$ pour tous tous x, y dans $[0,1]$, ce qui nous dit que f est lipschitzienne et que $\lambda(f) \leq \lambda$. Il nous reste à vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| = 0$. Comme on a déjà que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = f(0)$, il s'agit de vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda(f_n - f)) = 0$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que :

$$\forall m > n \geq n_\varepsilon,\ \lambda(f_m - f_n) \leq \|f_m - f_n\| < \varepsilon$$

ce qui implique que pour tous x, y dans $[0,1]$, on a pour $m > n \geq n_\varepsilon$:

$$|f_m(y) - f_n(y) - f_m(x) + f_n(x)| \leq \lambda(f_m - f_n)|y-x| \leq \varepsilon |y-x|$$

et faisant tendre m vers l'infini, on obtient :

$$|(f - f_n)(y) - (f - f_n)(x)| \leq \varepsilon |y - x|$$

ce qui nous dit que $\lambda(f_n - f) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda(f_n - f)) = 0$. En conclusion, $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

3. La norme $\|\cdot\|$ n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ puisque $(E, \|\cdot\|)$ est complet et $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet ne l'est pas.

Exercice 3.10. *On se donne un intervalle réel I non réduit à un point et note D l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.*

1. *Montrer que l'opérateur de dérivation n'est pas continue sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ muni d'une quelconque norme $\|\cdot\|$.*
2. *Qu'en-est-il de l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$?*

Solution.

1. Désignant par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = e^{nx}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on a $D(f_n) = nf_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en conséquence, la suite $\left(\frac{1}{\|f_n\|} D(f_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (puisque $\left\|\frac{1}{\|f_n\|} D(f_n)\right\| = n$), il en résulte que D ne peut être continue.
2.
   (a) Munissant $\mathbb{R}[X]$ de la norme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \|P\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$, on a $\|X^n\|_1 = 1$ et $\|D(X^n)\|_1 = \left\|nX^{n-1}\right\|_1 = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la suite $(D(X^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée et D n'est pas continue pour cette norme.

   (b) Munissant $\mathbb{R}[X]$ de la norme $P \mapsto \|P\| = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left\|P^{(k)}\right\|_1$ (cette somme est en fait finie), on a $\|D(P)\| = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left\|P^{(k+1)}\right\|_1 \leq \|P\|$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, donc D est continue pour cette norme avec $N(D) \leq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left\|(X^n)^{(k)}\right\|_1 = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ pour $0 \leq k \leq n$ et :

$$\frac{\|D(X^n)\|}{\|X^n\|} = \frac{n\left\|X^{n-1}\right\|}{\|X^n\|} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1-k)!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n-j)!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

ce qui implique que $N(D) \geq 1$ et $N(D) = 1$.

En fait pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}[X]$, l'application $P \mapsto \|P\|' = \sum_{k=0}^{+\infty} \left\|P^{(k)}\right\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ et on a $\|D(P)\|' \leq \|P\|'$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et D est continue pour cette norme $\|\cdot\|'$.

Exercice 3.11. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{\infty, 1\}$, on note $S_{n,k}$ la sphère unité de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_k)$ et pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on note $N_k(A) = \sup_{x \in S_{n,k}} \|Ax\|_k$.*

Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on a $N_\infty(A) = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ et $N_1(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$.

Solution. On se donne A non nulle dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

1. Pour tout $x \in S_\infty$, on a $\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$, donc $N_\infty(A) \leq \alpha = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Soient k un entier compris entre 1 et m tel que $\alpha = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$ et $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in S_\infty$, où :

$$x_j = \begin{cases} \dfrac{\overline{a_{kj}}}{|a_{kj}|} \text{ si } a_{kj} \neq 0 \\ 0 \text{ si } a_{kj} = 0 \end{cases}$$

(A étant non nulle, il existe au moins un indice j tel que $a_{kj} \neq 0$). En notant $y = Ax$, on a :

$$\forall i \in \{1, \cdots, m\}, \ |y_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \alpha$$

avec $|y_k| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \alpha$, donc $\|Ax\|_\infty = \alpha$ et $N_\infty(A) = \alpha$.

2. Pour tout $x \in S_1$, on a :

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,|x_j| = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right)|x_j| \\ &\leq \left(\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right)\sum_{j=1}^{n}|x_j| = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\end{aligned}$$

donc $N_1(A) \leq \beta = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$. En notant k un entier compris entre 1 et n tel que $\beta = \sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|$, on a $\beta = \|Ae_k\|_1 \leq N_1(A)$ (colonne k de A) et en conséquence, $N_1(A) = \beta$.

Exercice 3.12. *Soit $u : E \to F$ une application linéaire.*

1. *Montrer que si u est de rang $r \geq 1$, il existe alors une famille libre $(a_k)_{1\leq k\leq r}$ de vecteurs E et une famille libre $(\ell_k)_{1\leq k\leq r}$ dans le dual algébrique E^* de E tels que $u(x) = \sum_{k=1}^{r}\ell_k(x)\,a_k$ pour tout $x \in E$.*
2. *Montrer que si $\ell_1, \cdots, \ell_p, \ell$ sont des formes linéaires sur E telles que $\bigcap_{j=1}^{p}\ker(\ell_j) \subset \ker(\ell)$, la forme linéaire ℓ est alors combinaison linéaire des ℓ_j.*
3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de la forme $x \mapsto \sum_{k=1}^{r}\ell_k(x)\,a_k$ où $(a_k)_{1\leq k\leq r}$ est libre dans E et $(\ell_k)_{1\leq k\leq r}$ libre dans E^*.*
   (a) *Montrer que $\mathrm{rg}(u) \leq r$.*
   (b) *Montrer que, pour tout entier k compris entre 1 et r, l'intersection $\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{r}\ker(\ell_j)$ n'est pas contenue dans $\ker(\ell_k)$. En déduire que $\mathrm{rg}(u) = r$.*

Solution.

1. Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang $r \geq 1$, son image $\mathrm{Im}(u)$ est alors un sous-espace vectoriel de F de dimension r et en désignant par $(a_k)_{1\leq k\leq r}$ une base de $\mathrm{Im}(u)$, on peut trouver pour tout $x \in E$, des scalaires uniquement déterminés

$\ell_1(x), \cdots, \ell_r(x)$ tels que $u(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \ell_k(x) a_k$. De la linéarité de u et de l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base on déduit que les applications ℓ_k sont linéaires. Supposons pour $r \geq 2$ que la famille $(\ell_k)_{1\leq k\leq r}$ soit liée dans le dual algébrique E^* de E avec par exemple $\ell_r = \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k \ell_k$ (pour $r = 1$, on a $\ell_1 \neq 0$). Dans ce cas, on a pour tout x dans E :

$$u(x) = \sum_{k=1}^{r-1} \ell_k(x) a_k + \left(\sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k \ell_k(x)\right) a_r = \sum_{k=1}^{r-1} \ell_k(x)(a_k + \lambda_k a_r)$$

ce qui signifie que la famille de $r - 1$ vecteurs $(a_k + \lambda_k a_r)_{1\leq r\leq r-1}$ engendre $\mathrm{Im}(u)$ et contredit le fait que $\dim(\mathrm{Im}(u)) = r$. La famille $(\ell_k)_{1\leq k\leq r}$ est donc libre.

2. L'application linéaire $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^p)$ définie par $v(x) = (\ell_j(x))_{1\leq j\leq p}$ pour tout $x \in E$ est telle que $\ker(v) = \displaystyle\bigcap_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{r} \ker(\ell_j) \subset \ker(\ell)$. En se donnant un supplémentaire H de $\mathrm{Im}(v)$ dans $\mathbb{K}^p$, soit un sous-espace H de $\mathbb{K}^p$ tel que $\mathbb{K}^p = \mathrm{Im}(v) \oplus H$, on définit la forme linéaire φ sur $\mathbb{K}^p$ par $\varphi(y) = 0$ pour tout $y \in H$ et $\varphi(y) = \ell(x)$ pour tout $y = v(x) \in \mathrm{Im}(v)$. Cette application est bien définie du fait que pour $y = v(x_1) = v(x_2)$, on a $x_1 - x_2 \in \ker(v) \subset \ker(\ell)$, ce qui implique que $\ell(x_1) = \ell(x_2)$. On a donc pour tout $x \in E$ en notant $(e_j)_{1\leq j\leq p}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$:

$$\ell(x) = \ell(v(x)) = \ell\left(\sum_{j=1}^{p} \ell_j(x) e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \ell_j(x) \ell(e_j)$$

soit $\ell = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j$ où $\lambda_j = \ell(e_j) \in \mathbb{K}$.

3.

(a) Pour tout $x \in E$, on a $u(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \ell_k(x) a_k$, donc $\mathrm{Im}(u) \subset F = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{r} \mathbb{K} a_k$ (les a_k sont linéairement indépendants) et $\mathrm{rg}(u) \leq \dim(F) = r$.

(b) La famille $(\ell_k)_{1\leq k\leq r}$ étant libre dans le dual E^*, aucune des inclusions $\displaystyle\bigcap_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{r} \ker(\ell_j) \subset \ker(\ell_k)$ ne peut être réalisée d'après la question 2. Il existe donc pour tout entier k compris entre 1 et r un vecteur $e_k \in \displaystyle\bigcap_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{r} \ker(\ell_j)$ qui n'est pas dans $\ker(\ell_k)$ et pour un tel vecteur, on a $u(e_k) = \ell_k(e_k) a_k$

avec $\ell_k(e_k) \neq 0$, ce qui implique que $a_k = \dfrac{1}{\ell_k(e_k)} u(e_k) \in \operatorname{Im}(u)$. Il en résulte que $\operatorname{Im}(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathbb{K} a_k$ et u est de rang r.

Exercice 3.13. *Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $\dfrac{\pi}{\theta}$ soit irrationnel.*

1. *Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de nombres complexes $\left(e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est le cercle unité $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1,1]$.*
2. *Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1,1]$.*
3. *Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\tan(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.*

Solution. Si $\dfrac{\pi}{\theta}$ soit irrationnel, il en est alors de même de $\dfrac{\theta}{2\pi}$ et le groupe $G = \mathbb{Z}2\pi + \mathbb{Z}\theta$ ainsi que l'ensemble $\mathbb{N}\theta + \mathbb{Z}2\pi$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

1. Avec la 2π-périodicité, la continuité et la surjectivité de l'application $f : x \mapsto e^{ix}$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$, on déduit que l'ensemble :
$$f(G) = \left\{e^{(2\pi m + n\theta)i},\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2\right\} = \left\{e^{in\theta},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$
est dense dans $\mathbb{U}$, ce qui signifie l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{U}$. En utilisant la continuité et la surjectivité de la projection $p : z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ de $\mathbb{U}$ sur $[-1,1]$, on déduit que l'ensemble $\{\cos(n\theta),\ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1,1]$, puis par parité que l'ensemble $\{\cos(n\theta),\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$, ce qui signifie l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1,1]$.
2. La fonction sin étant à valeurs dans $[-1,1]$, ses valeurs d'adhérence sont dans cet intervalle. Soient $x \in [-1,1]$ et $t = \arcsin(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Par densité de $\mathbb{N}\theta + \mathbb{Z}2\pi$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels et une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(p_n\theta + 2\pi q_n) = t$ et utilisant la 2π-périodicité et la continuité de la fonction sin, on en déduit que $x = \sin(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(p_n\theta)$, c'est-à-dire que x est une valeur d'adhérence de la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Comme $\dfrac{\pi}{\theta}$ est irrationnel, la suite $(\tan(n\theta))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie (car l'égalité $n\theta = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donne $\theta = \dfrac{2k+1}{2n} \in \mathbb{Q}$). Soient $x \in \mathbb{R}$ et $t = \arctan(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Par densité de $\mathbb{N}\theta + \mathbb{Z}2\pi$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels et une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(p_n\theta + 2\pi q_n) = t$. On aura alors $p_n\theta + 2\pi q_n \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ à partir d'un

certain rang et avec la 2π-périodicité et la continuité de la fonction tan, on en déduit que :

$$x = \tan(t) = \lim_{n \to +\infty} \tan(p_n \theta + 2\pi q_n) = \lim_{n \to +\infty} \tan(p_n \theta)$$

c'est-à-dire que x est une valeur d'adhérence de la suite $(\tan(n\theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$. L'ensemble de ces valeurs d'adhérences est donc $\mathbb{R}$.