concours externe **SESSION DE 1991**
de recrutement de professeurs agrégés

composition de mathématiques appliquées **Durée : 6 heures**

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Le but du problème est de mettre en évidence certains comportements asymptotiques de la suite des images d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ par une succession de déplacements au hasard indépendants.

Avertissement.

A.1., **A.2.**, **A.3.** *utilisent des notations et des définitions spécifiques et peuvent être abordées avant la lecture du préambule.* **B.1.**, **B.3.**, **C** *sont indépendantes de* **A. C** *n'intervient pas dans la résolution des questions ultérieures.*

PRÉAMBULE

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est identifié à sa représentation par des matrices colonnes dans la base canonique $(e_1,\ e_2)$, il est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire et la norme étant notés $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ et $\|\,.\,\|$.

On appelle $SO(2)$ le groupe multiplicatif des matrices de rotations de $\mathbb{R}^2$ et e son élément neutre, matrice identité de $\mathbb{R}^2$. Si $u,\ v \in SO(2)$ et $y \in \mathbb{R}^2$, uv, uy, u^* désignent respectivement les produits matriciels de u par v, de u par y et la transposée de u. La bijection de $[0,1[$ sur $SO(2)$ qui, à $s \in [0,1[$, associe la rotation d'angle $2\pi s$ est notée ρ et l'on pose $\theta = \rho^{-1}$.

G est le groupe obtenu en munissant $SO(2) \times \mathbb{R}^2$ du produit :

$$(u,\ y)\ (v,\ z) = (uv,\ y + uz),$$

il s'identifie au groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$ par la formule :

$$x \in \mathbb{R}^2, \qquad (u,\ y) \in G, \qquad (u,\ y)x = ux + y.$$

Soit $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ un espace de probabilité et E l'opérateur d'espérance associé.

L'expression : variable aléatoire définie sur $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ à valeurs dans H, sera abrégée en : v.a. de H.

Si M_d est l'espace des matrices à coefficients réels à 2 lignes et d colonnes, $d = 1$ ou 2, une v.a. de M_d est une fonction Z de Ω dans M_d dont les applications composantes $Z_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant d$, sont des v.a. réelles. Z est dite intégrable (resp. de carré intégrable) si les v.a. $Z_{i,j}$ sont intégrables (resp. de carrés intégrables). Lorsque Z est intégrable, $E[Z]$ est l'élément de M_d dont les coefficients sont $E[Z_{i,j}]$. On remarquera que, si Y est une v.a. intégrable de $\mathbb{R}^2$ et si $x \in \mathbb{R}^2$,

$$E[\langle x,\ Y\rangle] = \langle x,\ E[Y]\rangle.$$

Une v.a. de G est la donnée d'un couple $(U,\ Y)$ où Y est une v.a. de $\mathbb{R}^2$ et U une v.a. de $SO(2)$, c'est-à-dire une v.a. de M_2 à valeurs dans $SO(2)$.

Si X_1, X_2 sont des v.a. de G, U_1, U_2 des v.a. de $SO(2)$ et Y une v.a. de $\mathbb{R}^2$, les v.a. X_1X_2 de G, U_1^* et U_1U_2 de $SO(2)$, X_1Y et U_1Y de $\mathbb{R}^2$ sont définies par :

$$X_1X_2(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega), \qquad U_1^*(\omega) = U_1(\omega)^*, \qquad U_1U_2(\omega) = U_1(\omega)U_2(\omega),$$
$$X_1Y(\omega) = X_1(\omega)Y(\omega), \qquad U_1Y(\omega) = U_1(\omega)Y(\omega).$$

Dans ce qui suit, $X_n = (U_n,\ Y_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, désignent les termes d'une suite de v.a. de G, *indépendantes et de même loi*; l'objet de l'étude est la suite $(L_nx)_{n\geqslant 0}$ où $x \in \mathbb{R}^2$ et $(L_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite de v.a. de G définie par :

$$L_0 = (e,\ 0) \quad \text{et,} \quad \text{pour } n \geqslant 1, \quad L_n = X_nL_{n-1}.$$

A SUIVRE

La seconde composante de L_n, soit S_n, est donnée par les formules :

$$S_0 = 0 \quad \text{et,} \quad \text{pour } n \geqslant 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} U_{n,k+1} Y_k$$

où $U_{n,n+1} = e$ et, pour l, $1 \leqslant l \leqslant n$, $U_{n,l} = U_{n,l+1} U_l$, soit encore :

$$S_n = Y_n + U_n Y_{n-1} + \dots + U_n \dots U_2 Y_1 .$$

Il est utile, pour l'étude de $(S_n)_{n \geqslant 0}$, d'introduire la suite $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ de v.a. de $\mathbb{R}^2$, seconde composante de la suite $(R_n)_{n \geqslant 0}$ de v.a. de G définie par :

$$R_0 = (e, 0) \quad \text{et,} \quad \text{pour } n \geqslant 1, \quad R_n = R_{n-1} X_n$$

dont les termes se calculent par les formules :

$$Z_0 = 0 \quad \text{et,} \quad \text{pour } n \geqslant 1, \quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} \check{U}_{k-1} Y_k$$

où $\check{U}_0 = e$ et, pour l, $1 \leqslant l$, $\check{U}_l = \check{U}_{l-1} U_l$, soit encore :

$$Z_n = Y_1 + U_1 Y_2 + \dots + U_1 \dots U_{n-1} Y_n .$$

La résolution de certaines questions fera intervenir la propriété d'adaptation, définie dans le préliminaire **A**, de la probabilité γ sur $[0, 1[$, loi de la v.a. $\theta(U_1)$. *Il sera toujours supposé que* $\gamma(\{0\}) < 1$ *et que* $P([Y_1 = 0]) < 1$.

On rappelle la convention $\inf \emptyset = +\infty$ et les notations : 1_A pour la fonction indicatrice de l'ensemble A, $[X \in B]$ pour l'image réciproque de B par X, lim p.s. pour la limite presque sûre.

A

Ce préliminaire nécessite de nouvelles définitions et notations.

On rappelle $\mathbb{T}$ le groupe obtenu en munissant $[0, 1[$ de l'addition modulo 1, notée $\oplus$; pour $r \in \mathbb{N}^*$, H_r est le sous-groupe de $\mathbb{T}$ engendré par $\frac{1}{r}$.

$\mathscr{C}$ désigne l'espace vectoriel des restrictions à $\mathbb{T}$ des fonctions continues de période 1 sur $\mathbb{R}$ et J la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{T}$ des éléments de $\mathscr{C}$.

$\mathscr{T}$ est la tribu trace sur $\mathbb{T}$ de la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et m la restriction à $\mathscr{T}$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des probabilités sur $(\mathbb{T}, \mathscr{T})$ est noté $\mathscr{P}$.

Si μ, $\nu \in \mathscr{P}$, leur produit de convolution est $\mu \star \nu \in \mathscr{P}$, défini par :

$$A \in \mathscr{T}, \ \mu \star \nu(A) = \int 1_A(s \oplus t) \, d\mu(s) \, d\nu(t) ;$$

pour $l \in \mathbb{N}^*$, $\mu^{\star l}$ désigne le produit de convolution de l termes égaux à μ ; l'on conviendra que $\mu^{\star 0}$ est la probabilité portée par $\{0\}$.

Les coefficients de Fourier de $\mu \in \mathscr{P}$ sont les complexes $\hat{\mu}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, définis par :

$$\hat{\mu}(k) = \int e^{2i\pi ks} \, d\mu(s) .$$

On dira que $\mu \in \mathscr{P}$ est **adaptée** si, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\mu(H_r) < 1$.

1. Soit $\mu \in \mathscr{P}$ et $(\mu_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de $\mathscr{P}$, prouver l'équivalence des assertions suivantes :
   a. pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_n \hat{\mu}_n(k) = \hat{\mu}(k)$;
   b. pour tout $f \in \mathscr{C}$, $\lim_n \int f \, d\mu_n = \int f \, d\mu$.

2. Montrer que pour que $\mu \in \mathscr{P}$ soit adaptée il faut et il suffit que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$,

$$\int (1 - \cos(2\pi ks)) \, d\mu(s) > 0 .$$

3. On pose : $\mu_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} \mu^{\star l}$,

montrer que, si μ est adaptée, on a, pour tout $f \in \mathscr{C}$, $\quad \lim_n \int f \, d\mu_n = \int f \, dm .$

Tournez la page S.V.P.

4. Soit $(\Theta_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. de $\mathbb{T}$ indépendantes de loi μ adaptée et Q une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ de matrice $[q_{i,j}]_{i,j=1,2}$, montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, la suite de terme général :

$$\overline{Q}_n(x, y) = \frac{1}{n}\{Q(x, y) + \sum_{k=1}^{n-1} E[Q(\rho(\Theta_1 + \ldots + \Theta_k)x, \rho(\Theta_1 + \ldots + \Theta_k)y)]\}, \quad n \geqslant 2,$$

converge et identifier sa limite $\overline{Q}(x, y)$.

B

1. Soit, pour $n \geqslant 1$, h_n une application mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, on note $\tilde{Y}_n = h_n(Y_n)$ et $\tilde{X}_n = (U_n, \tilde{Y}_n)$.
   a. Montrer que, si f est une fonction numérique mesurable définie sur G^{n+1} telle que :

$$E[|f(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{n+1})|] < +\infty$$

   et si $\mathcal{F}_n$ est la tribu engendrée par $(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)$, on a :

$$E[f(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n, \tilde{X}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = \varphi(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n) \text{ p.s.},$$

   où φ est définie pour $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tel que $E[|f(g_1, \ldots, g_n, \tilde{X}_{n+1})|] < +\infty$ par :

$$\varphi(g_1, \ldots, g_n) = E[f(g_1, \ldots, g_n, \tilde{X}_{n+1})].$$

   On suppose jusqu'à la fin de cette question que $\tilde{Y}_n$ est de carré intégrable et que $E[\tilde{Y}_n] = 0$.

   b. Montrer que, pour $i = 1, 2$ et $n \geqslant 1$, $E[\langle \check{U}_{n-1}\tilde{Y}_n, e_i\rangle] = 0$.

   c. On pose, pour $p, q \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant q$ et $i, j = 1, 2$,

$$\tilde{C}(p, q, i, j) = E[\langle \check{U}_{p-1}\tilde{Y}_p, e_i\rangle \langle \check{U}_{q-1}\tilde{Y}_q, e_j\rangle],$$

   prouver que, si $p \neq q$, $\tilde{C}(p, q, i, j) = 0$, tandis que :

$$\tilde{C}(p, q, i, j) = E[Q_p(\check{U}^*_{p-1}e_i, \check{U}^*_{p-1}e_j)],$$

   où, pour $x, y \in \mathbb{R}^2$,

$$Q_p(x, y) = E[\langle x, \tilde{Y}_p\rangle \langle y, \tilde{Y}_p\rangle].$$

2. On suppose Y_1 de carré intégrable, $E[Y_1] = 0$ et γ adaptée, montrer que la matrice de covariance de $\overline{C}_n$ de $\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n$ converge vers $\sigma^2 e$, où $\sigma^2 = \frac{1}{2}E[\|Y_1\|^2]$.

3. On suppose Y_1 intégrable mais non plus centrée ; pour $a \in \mathbb{R}^2$, on note τ_a la translation de $\mathbb{R}^2$ définie par $\tau_a(x) = x + a$ et l'on pose :

$$X^\circ_n = \tau_a X_n \tau_{-a}, \quad X^\circ_n = (U^\circ_n, Y^\circ_n).$$

   a. Montrer qu'il existe a_0 tel que $E[Y^\circ_n] = 0$.

   b. $(Z^\circ_n)_{n\geqslant 0}$ étant définie à partir de $(X^\circ_n)_{n\geqslant 1}$ comme $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ à partir de $(X_n)_{n\geqslant 1}$, quelle relation existe-t-il entre Z_n et Z°_n, $n \geqslant 0$?

C

On rappelle que, si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathbb{R}^2$ telle que la série $\sum_{n>1} \frac{1}{n} u_n$ converge, on a :

$$\lim_n \frac{1}{n}(u^1 + \ldots + u_n) = 0.$$

On suppose Y_1 intégrable et, sauf dans la dernière question, $E[Y_1] = 0$.

On pose :

$$Y'_n = Y_n 1_{[\|Y_n\| < n]}, \quad \tilde{Y}_n = Y'_n - E[Y'_n]$$

et, pour $p, q \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < q$,

$$\tilde{Z}_{p,p} = 0, \quad \tilde{Z}_{p,q} = \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n}\check{U}_{n-1}\tilde{Y}_n.$$

1. *a.* Prouver que, si $\sigma^2_{p,q} = E[\|\tilde{Z}_{p,q}\|^2]$, on a, pour $1 \leqslant p < q$, $\sigma^2_{pq} = \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n^2}E[\|\tilde{Y}_n\|^2]$.

A SUIVRE

b. Utiliser la partition de Ω par les événements : $[Y_1 = 0]$, $[k-1 < \|Y_1\| \leqslant k]$, $k \geqslant 1$,

et l'inégalité $\sum_{n > k} \frac{1}{n^2} < \frac{2}{k}$, $k \geqslant 1$, pour établir que : $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} E[\|Y_1\|^2 1_{[\|Y_1\| \leqslant n]}] < +\infty$.

c. On pose, pour $p \geqslant 1$, $\sigma_p^2 = \sup\{\sigma_{p,q}^2 : q \geqslant p\}$, montrer que $\sigma_p^2 < +\infty$ et que $(\sigma_p^2)_{p \geqslant 1}$ tend vers 0 en décroissant.

2. *a.* Soient ε, p et q tels que $\varepsilon > 0$, $\sigma_p^2 < \varepsilon^2$ et $q > p$, si :

$$T = \inf\{k : p < k \leqslant q, \|\tilde{Z}_{p,k}\| > 2\varepsilon\},$$

montrer que :

$$P([\|\tilde{Z}_{p,q}\| \geqslant \varepsilon]) \geqslant \sum_{k=p+1}^{q} P([T = k])\, P([\|\tilde{Z}_{k,q}\| < \varepsilon])$$

et en déduire que :

$$P([\max\{\|\tilde{Z}_{p,k}\| : p \leqslant k \leqslant q\} > 2\varepsilon]) \leqslant \frac{\sigma_p^2}{\varepsilon^2 - \sigma_p^2}.$$

b. Montrer que la série :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \check{U}_{n-1} \tilde{Y}_n \qquad \text{converge p.s.}$$

3. *a.* Montrer que :

$$\lim_n \text{p.s.} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \check{U}_{k-1} Y'_k = 0.$$

b. Montrer que $P(\liminf_n [Y'_n = Y_n]) = 1$ et en déduire que $\lim_n \text{p.s.} \frac{1}{n} Z_n = 0$.

4. On ne suppose plus $E[Y_1] = 0$, déterminer la limite p.s. de la suite $\left(\frac{1}{n} Z_n\right)_{n \geqslant 1}$ puis, en considérant $(U_{n,1})^* L_n x$, celle de $\left(\frac{1}{n} L_n x\right)_{n \geqslant 1}$, $x \in \mathbb{R}^2$.

D

On suppose γ adaptée, Y_1 de carré intégrable et, sauf dans la dernière question, $E[Y_1] = 0$.

La fonction caractéristique Φ_n de $\frac{1}{\sqrt{n}} Z_n$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\Phi_n(x) = E\left[\exp\left(i\left\langle x, \frac{1}{\sqrt{n}} Z_n\right\rangle\right)\right];$$

$\overline{C}_k$ et σ^2 étant définis comme en **B.2.**, on désigne par $\overline{Q}_k$ la forme quadratique de matrice $\overline{C}_k$ et l'on pose :

$$\rho_k = \sup\{\|(\overline{C}_k - \sigma^2 e)x\| : x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1\}.$$

Jusqu'en 5.*a.*, k est un entier strictement positif fixé.

1. *a.* Montrer que :

$$\Phi_k(x) = 1 - \frac{1}{2}\overline{Q}_k(x) + \|x\|^2 \varepsilon_k^1(x) \qquad \text{où } \lim_{x \to 0} \varepsilon_k^1(x) = 0.$$

Tournez la page S.V.P.

b. Soient $(l_m)_{m \geqslant 1}$ une suite de $\mathbb{N}$ telle que $\lim_m l_m = +\infty$ et $(\lambda_m)_{m \geqslant 1}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_m \lambda_m^2 l_m = 1$, déterminer la limite de la suite $([\Phi_k(\lambda_m x)]^{l_m})_{m \geqslant 1}$.

2. Prouver que, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Phi_{p+q}(\sqrt{p+q}\, x) = \mathrm{E}[\exp(i\langle x, Z_p\rangle)\, \Phi_q(\sqrt{q}\, \check{U}_p^* x)].$$

3. *a.* Montrer qu'il existe une fonction ε_k définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon_k(x) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\sup\{|\Phi_k(x) - \Phi_k(vx)| : v \in SO(2)\} \leqslant (\rho_k + \varepsilon_k(x))\|x\|^2.$$

b. Établir (par récurrence sur n) l'inégalité, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $n \geqslant 1$,

$$|\Phi_{kn}(\sqrt{n}\, x) - (\Phi_k(x))^n| \leqslant (n-1)(\rho_k + \varepsilon_k(x))\|x\|^2.$$

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_n \sup\left\{\left|\Phi_{kn+r}(x) - \Phi_{kn}\left(\sqrt{\frac{kn}{kn+r}}\, x\right)\right| : r = 0, \dots, k-1\right\} = 0.$$

5. *a.* Prouver que :

$$\limsup_m \left|\Phi_m(x) - \exp\left(-\frac{1}{2}\overline{Q}_k(x)\right)\right| \leqslant \rho_k \|x\|^2.$$

b. Conclure que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_n\right)_{n \geqslant 1}$ converge en loi et identifier sa limite.

6. On ne suppose plus $\mathrm{E}[Y_1] = 0$.

Étudier la convergence en loi de $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_n\right)_{n \geqslant 1}$, puis celle de $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} L_n x\right)_{n \geqslant 1}$, $x \in \mathbb{R}^2$.

E

On suppose γ adaptée et Y_1 de carré intégrable. N désigne une variable gaussienne centrée de $\mathbb{R}^2$ de matrice de covariance $\sigma^2 e$.

Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on pose :

$$B(x, r) = \{y : y \in \mathbb{R}^2, \|x - y\| < r\}, \quad B_r = B(0, r),$$
$$B'(x, r) = SO(2) \times B(x, r), \quad B'_r = SO(2) \times B_r.$$

1. Montrer que, pour tout ε, $\varepsilon > 0$,
$$\lim_n \frac{1}{n\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} P\left(\left[\sqrt{\frac{k}{n}}\, N \in B_\varepsilon\right]\right)$$

existe et que, cette limite étant notée $\alpha(\varepsilon)$, on a $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(\varepsilon) = +\infty$.

A SUIVRE

2. Soit $CK(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions numériques continues à supports compacts sur $\mathbb{R}^2$ muni de la norme de la convergence uniforme notée $\|\cdot\|_\infty$. Pour $g \in CK(\mathbb{R}^2)$ et $t > 0$, on pose $g_t(x) = g(\sqrt{t}\,x)$.

a. Montrer que, pour c, $0 < c < 1$, $K = \{g_t : t \in [c, 1]\}$ est un compact de $CK(\mathbb{R}^2)$.

b. Prouver que, pour c, $0 < c < 1$,

$$\lim_n \sup\left\{\left|E\left[g_t\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_n\right)\right] - E[g_t(N)]\right| : t \in [c, 1]\right\} = 0,$$

puis que, si l'on pose :

$$d_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|E\left[g_{\frac{k}{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} Z_k\right)\right] - E[g_{\frac{k}{n}}(N)]\right|,$$

$\lim_n d_n = 0$.

3. Montrer que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_n \frac{1}{n\varepsilon^2} E\left[\sum_{k=1}^{n} 1_{B_\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z_k\right)\right] = +\infty.$$

4. On pose, pour $g \in G$, A borélien de G et B borélien de $\mathbb{R}^2$,

$$V(g, A) = E\left[\sum_{n \geq 0} 1_A(gR_n)\right] \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \quad H(B) = V((e, 0), SO(2) \times B).$$

a. Si $T = \inf\{n : n \geq 0, gR_n \in A\}$, montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$E\left[1_{[T=k]} \sum_{n \geq 0} 1_A(gR_n)\right] = E[1_{[T=k]} V(gR_k, A)],$$

en déduire que, pour tout $g \in G$,

$$V(g, A) \leq \sup\{V(h, A) : h \in A\}.$$

b. Prouver que, pour tout r, $r > 0$, et $x \in \mathbb{R}^2$,

$$H(B(x, r)) \leq H(B_{2r})$$

puisqu'il existe une constante C telle que, pour tout r et $a, r > 0$, $a > 1$,

$$H(B_{ar}) \leq Ca^2 H(B_{2r}).$$

c. Utiliser 3. pour conclure que, pour tout r, $r > 0$,

$$E\left[\sum_{n \geq 0} 1_{B_r}(L_n 0)\right] = +\infty.$$

FIN