Table des matières

Avant-propos

Cet ouvrage destiné aux étudiants préparant le Capes externe de Mathématiques et aux enseignants préparant l'agrégation interne n'est pas organisé comme un cours suivant strictement les programmes. L'ouvrage de Guy Auliac et J. Y. Caby indiqué en référence répond tout à fait à cet objectif. Je me suis efforcé de rédiger les chapitres de ce livre de manière indépendante en me concentrant sur les thèmes importants des programmes. Le chapitre 1 peut très bien utiliser un résultat classique exposé dans un chapitre suivant. Je pense que cette façon de procéder peut être utile pour construire des leçons d'oral. J'ai également privilégié la recherche d'exemples d'applications (en particulier à l'analyse numérique) et de contre-exemples illustrants la nécessité de certaines hypothèses dans l'énoncé d'un théorème, c'est ce travail de synthèse qu'il s'agit de faire dans l'élaboration d'un plan de leçon d'oral.

Chaque chapitre se termine par une série d'exercices tous corrigés en détails. On a un total de 101 exercices qui peuvent constituer un bon entraînement pour les épreuves écrites.

Le niveau de connaissance suffisant pour aborder ce livre est celui du premier cycle universitaire. Les notions d'analyse enseignées dans ce cycle sont supposées assimilées et certaines d'entre elles sont reprises avec une vision plus large éclairée par les connaissances de la licence.

Le chapitre 1 est consacré à l'approximation des nombres réels par des nombres décimaux ou par des fractions continues régulières limitées à coefficients entiers. Après une étude de la division euclidienne dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et son application à l'écriture en base $b \geq 2$, on s'intéresse aux nombres décimaux. On étudie en particulier les développements décimaux des réel, et les nombres rationnels sont caractérisés comme les réels admettant un développement décimal illimité propre périodique à partir d'un certain rang. Les fractions continues nous donnent un autre moyen d'approcher les nombres réels par des rationnels et ils permettent également de caractériser les nombres rationnels comme les réels admettant un développement en fraction continue régulière limité à coefficients entiers. Dans ce chapitre, on s'intéresse également aux sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ avec pour applications, un important critère d'irrationalité et l'étude des fonctions continues périodiques au chapitre 2.

Avec le chapitre 2, on s'intéresse aux propriétés des fonctions continues d'une variable réelle à valeurs réelles. Après avoir donné les définitions de base et montré les principaux résultats relatifs aux opérations sur les fonctions continues, on s'intéresse aux notions propres à la droite réelle de continuité à gauche et à droite, ce qui permet de distinguer deux types de discontinuités :

les discontinuités de première et de deuxième espèce. Le cas des fonctions monotones est particulièrement intéressant du fait qu'une fonction monotone sur un intervalle réel admet des limites à droite et à gauche en tout point, ce qui entraîne qu'elle ne peut avoir que des discontinuités de première espèce et que l'ensemble de ces points discontinuités est au plus dénombrable. Toujours dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, le cas des fonctions périodiques est particulièrement intéressant. L'étude des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ entamée au chapitre 1 nous permet de montrer que le groupe des périodes d'une fonction continue périodique non constante est discret, ce qui permet de définir la plus petite période strictement positive d'une telle fonction. Quelques conséquences de ce résultat sont données en exercice.

L'étude des propriétés globales des fonctions continues (images réciproques des ouverts et des fermés, images des compacts et de connexes, uniforme continuité) est faite dans le cadre plus général des espaces vectoriels normés dans la mesure où les raisonnements ne sont pas plus compliqués que sur la droite réelle. Après avoir rappelé quelques notions de base sur la connexité dans un espace vectoriel normé, on montre que les connexes (et les convexes) de $\mathbb{R}$ sont les intervalles et que la continuité conserve la connexité. La version réelle de ce résultat est le théorème des valeurs intermédiaires. Dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, on montre le résultat suivant : si $f : I \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, où I est un intervalle réel, alors elle est continue si, et seulement si, $f^{-1}\{y\}$ est un fermé pour tout réel y. Dans le cas particulier des fonctions monotones, on montre que si $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone et si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur l'intervalle I. Ce résultat est utilisé pour montré le résultat suivant à la base des définitions des fonctions réciproques usuelles : si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue strictement monotone, elle réalise alors un homéomorphisme de I sur $f(I)$, les intervalles I et $f(I)$ étant de même nature.

L'étude de la dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes arrive naturellement au chapitre 3 après l'étude de la continuité. Dans un premier temps, on rappelle les définitions des dérivées d'ordre 1 et d'ordre supérieur. Si une fonction dérivable est continue, on peut construire un exemple de fonction continue nulle part dérivable. J'ai choisi de présenter l'exemple classique de Van der Waerden. Les résultats usuels concernant les opérations sur les fonctions dérivables sont complétés par l'énoncé de la formule de Faà di Bruno donnant la dérivée d'ordre n d'une composée de deux fonctions dérivables en renvoyant à [19] pour une démonstration. La définition de la dérivée logarithmique est suivie d'une application au théorème de relèvement utilisé pour montrer que l'indice d'un lacet dans le plan complexe est un entier.

Après avoir étudié le lien entre dérivation et extrémums, on s'intéresse au théorème de Darboux qui nous dit qu'une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Ce théorème est suivi de quelques applications qu'il est bon de connaître pour des leçons d'oral.

La dérivation est également utilisée pour étudier les positions relatives d'une courbe par rapport aux sécantes et aux tangentes. L'étude de la position d'une courbe par rapport aux sécantes nous conduit naturellement à la notion de convexité qui sera étudiée de manière plus approfondie au chapitre 9.

On s'intéresse également dans ce chapitre 3 au lien entre dérivation et intégration et aux suites de fonctions dérivables.

La condition nécessaire d'extrémum, $f'(a) = 0$ n'est qu'un cas particulier d'un résultat plus général portant sur les fonctions différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles. À titre d'application de ce résultat, on étudie les tangentes aux coniques.

Le chapitre 4 est consacré aux équations fonctionnelles. On étudie les équations classiques $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour f définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et à valeurs réelles ou complexes ; $f(xy) = f(x) + f(y)$ sur $\mathbb{R}^+$ et $f(x+y) = f(x) f(y)$ sur $\mathbb{R}$ qui nous conduisent aux fonctions logarithmes et exponentielles réelles ou complexes ; $f(xy) = f(x) f(y)$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ qui nous conduit aux fonctions puissances ; $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) f(y)$ qui nous conduit aux fonctions cos et ch. Pour ces études on ne se limite pas seulement au cas des fonctions continues. On s'intéresse également à une caractérisation de la fonction Γ d'Euler par sa log-convexité et l'équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$.

Dans ce chapitre on ne se limite pas aux fonctions d'une variable réelle ou complexe. On donne une caractérisation des rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$ par l'équation fonction fonctionnelle $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, où $\wedge$ désigne le produit vectoriel. Les suites définies par une récurrence linéaire d'ordre n sont également étudiées comme solutions d'équations fonctionnelles.

Les chapitres 5 et 6 sont consacrés au théorème de Rolle et au théorème des accroissements finis ainsi qu'aux nombreuses applications de ces théorèmes. Pour l'étude du théorème de Rolle on se place directement dans le cadre des espaces vectoriels normés dans la mesure où le raisonnement est identique à celui mené dans le cadre des fonctions d'une variable réelle. Le théorème de Rolle est conséquence du fait qu'une fonction f continue sur un compact K est bornée et atteint ses bornes et qu'une condition nécessaire d'extrémum en un point c intérieur à K, pour f différentiable, est $df(c) = 0$. Dans le cadre des fonctions d'une variable réelle ce théorème est encore valable sur une demi-droite fermée ou sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Rolle sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ peut aussi se montrer en utilisant le principe de dichotomie. Parmi les nombreuses applications du théorème de Rolle, on s'intéresse au théorème de Darboux, à l'étude des racines des polynômes réels avec comme cas particulièrement intéressant celui des polynômes orthogonaux, à l'obtention d'une majoration de l'erreur dans la méthode d'interpolation de Lagrange et à un critère de convexité.

Le théorème des accroissements finis et sa généralisation peuvent se déduire du théorème de Rolle. Ce théorème n'est pas valable pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ pour $p \geq 2$, mais on dispose toutefois d'une inégalité des accroissements finis. Parmi les nombreuses applications du théorème des accroissements finis, on s'intéresse à l'étude du sens de variation des fonctions (cette étude peut aussi être menée directement à partir du principe de dichotomie), au lien entre limite et dérivation, à l'étude de la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale, à la longueur des arcs géométriques, à l'étude des points fixes attractifs et répulsifs, à l'obtention d'une majoration de l'erreur dans la méthode de Simpson, aux suites de fonctions dérivables, au lien entre l'existence de dérivées partielles et la différentiabilité, au théorème de Schwarz sur les dérivées partielles d'ordre 2, au théorème de Darboux et aux nombre de Liouville qui nous donnent un exemple d'ensemble infini de nombres transcendants.

Le théorème de Rolle permet également d'aboutir à la formule de Taylor-Lagrange. Les différentes formules de Taylor sont étudiées au chapitre 7. Dans ce chapitre on s'intéresse également au cas des fonctions de plusieurs variables avec pour application l'étude de problèmes d'extrémums. Là encore l'accent est mis sur les applications avec l'introduction des développements limités à une et plusieurs variables, l'étude de problèmes d'extrémums, l'obtention d'inégalités, les développements en série entière avec en particulier des théorèmes de Bernstein donnant des conditions suffisantes pour qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ soit développable en série entière, un théorème de Kolmogorov sur des majorations de dérivées, l'obtention de majorations d'erreurs dans les méthodes de Lagrange et de Newton ainsi que dans la méthode des rectangles.

La formule de Taylor-Young nous conduit naturellement à l'étude des développements limités. Cette étude est menée au chapitre 8. Dans ce chapitre on s'intéresse tout d'abord aux notions de prépondérance, de domination et d'équivalence en regroupant dans un premier paragraphe la plupart des résultats importants sur le sujet. Après avoir présenté les différentes techniques d'obtention des développements limités, on s'intéresse aux applications avec l'obtention d'équivalents pour les suites ou les séries, l'obtention de développements asymptotiques, l'étude de la position d'une courbe par rapport aux tangentes ou aux asymptotes.

Le chapitre 9 est consacré à l'étude des fonctions convexes d'une variable réelle. Après avoir donné les principales propriétés des fonctions convexes, on s'intéresse à la régularité de ces fonctions, à savoir la continuité sur l'intérieur de l'intervalle de définition, la dérivabilité à droite et à gauche de ces fonctions et la monotonie de ces dérivées. Dans le cas des fonctions dérivables, la convexité de la fonction f est équivalente à la croissance de sa dérivée f'. Ce résultat peut se généraliser au cas des fonctions définies sur un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé et à valeurs réelles. L'étude des fonctions convexes est en particulier intéressant pour l'obtention d'inégalités de convexité. Ainsi à partir de la convexité de la fonction exp et de la concavité de la fonction ln, on déduit quelques inégalités classiques dont celle de Hölder. La concavité de la fonction ln peut être utilisée pour comparer les moyennes harmoniques, arithmétiques et géométriques. Les inégalités de Jensen sont montrées dans le cas des espaces vectoriels normés. La log-convexité de la fonction Γ d'Euler a été étudiée au chapitre 4.

Le chapitre 10 qui peut être vu comme une application à l'analyse numérique des chapitres précédents est consacré à l'étude des suites d'approximations successives définies par une relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Ces suites permettent d'obtenir des approximations des points fixes de la fonction continue f. Les suites homographiques représentent un cas particulièrement intéressant de telles suites, elles sont étudiées en détail en s'intéressant à la façon de choisir le terme initial x_0 pour que la suite soit bien définie (cette étude est souvent éludée dans les ouvrages de premier cycle). Pour f continue sur un intervalle compact, une première condition nécessaire et suffisante de convergence d'une telle suite est donnée par la condition $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. Le théorème du point fixe, qui nous donne une importante condition suffisante de convergence, est étudié dans le cadre des espaces de Banach. Ce théorème peut être utilisé pour la recherche de solutions approchées d'une équation numérique $f(x) = 0$ et nous conduit naturellement aux méthodes de Lagrange et de Newton. Dans l'étude de ces méthodes on s'intéresse particulièrement aux majorations des erreurs d'approximation. Ce chapitre se termine par une étude détaillée des méthodes d'accélération de la convergence de Aïtken et de Richardson.

Enfin le dernier chapitre est consacré à l'étude des équations différentielles linéaires. Dans un premier temps on étudie en détail les équations différentielles linéaires d'ordre1, ce qui permet de motiver l'introduction de l'équation caractéristique lors de l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants et sans second membre. Cette étude est généralisée au cas des équations d'ordre n et c'est le lemme des noyaux qui permet de donner la forme générale des solutions (étude analogue à celle menée au chapitre 4 lors de l'étude des équations récurrentes linéaires d'ordre n). Le cas des équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients non constants est étudié en se ramenant à un système linéaire d'ordre 1 et en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. Ce chapitre se termine par une étude qualitative des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 2 en s'intéressant particulièrement aux racines de ces solutions.

Je tiens à remercier mes amis Jocelyne Marbeau, Dominique Barbolosi et Jean-François Dantzer pour leurs remarques constructives ainsi que Bénédicte Leclercq et Agnès Henri de chez EDP Sciences pour leur compétence et leur amabilité.