AGREGATION INTERNE, DS 1.
CORRIGÉ

PARTIE 1

1 a On peut voir les choses de deux façons :

i) On écrit $U=(u_{ij})$, $x=(x_1,\dots,x_n)$ avec $\|x\|^2=\sum_i x_i^2\le 1$,
et $|\langle Ux,x\rangle| = \left|\sum_{i,j} u_{ij}x_i x_j\right| \le \sum_{i,j}|u_{ij}|$

ii) La boule unité est compacte, U est continu (endomorphisme d'un espace de dimension finie), et le produit scalaire, d'après Cauchy-Schwarz, est continu sur $E\times E$.

1 b Deux versions, là encore :

i) $\forall x,y\in E$ $\langle U(x+y),x+y\rangle=0$. On développe, en tenant compte du fait que $\langle Ux,x\rangle=\langle Uy,y\rangle=0$, et grâce à la symétrie de U, il vient $\langle Ux,y\rangle=0$. Ceci étant vrai $\forall y$, la non dégénérescence du produit scalaire entraîne $Ux=0$ $\forall x$.

ii) Soit λ une valeur propre de U, x_0 un vecteur propre associé. Alors

$$0=(Ux_0,x_0)=\lambda\|x_0\|^2 \Rightarrow \lambda=0.$$

U étant diagonalisable et ne possédant que 0 comme valeur propre, il est nul.

N.B : La première preuve est meilleure, parce que n'étant que calculatoire, elle n'utilise pas le fait que l'on soit en dimension finie.

1 c L'axiome de séparation "$N(U)=0 \Rightarrow U=0$" vient d'être traité à la question précédente. L'homogénéité est claire.

Enfin, pour x de norme inférieure à 1 :

$$|\langle (U+V)x,x\rangle| \le |\langle Ux,x\rangle| + |\langle V(x),x\rangle| \le N(U)+N(V)$$

et on passe au sup à gauche, pour récupérer l'inégalité triangulaire.

2 a $UV\in S_n \iff {}^t(UV)=UV \iff {}^tV\,{}^tU=UV \iff VU=UV.$

2 b Pour fixer les idées, je suppose $|\lambda_1|\le\dots\le|\lambda_n|$, et je note $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés.

Alors pour $x=x_1\varepsilon_1+\dots+x_n\varepsilon_n$ de norme ≤ 1, on a :

$$|\langle Ux,x\rangle| = |\langle x_1\lambda_1\varepsilon_1+\dots+x_n\lambda_n\varepsilon_n,\ x_1\varepsilon_1+\dots+x_n\varepsilon_n\rangle|$$
$$\le \left|\sum \lambda_i x_i^2\right|$$
$$\le |\lambda_n|\sum x_i^2$$
$$\le |\lambda_n|.$$

Mais si l'on choisit $x=\varepsilon_n$, l'inégalité précédente est une égalité. On a donc bien

$$N(U)=|\lambda_n|=\rho(U).$$

De plus, avec les notations précédentes mais sans supposer x de norme plus petite que 1, on a :

$$\|Ux\|^2=\langle Ux,Ux\rangle=\sum\lambda_i^2x_i^2\le|\lambda_n|^2\sum x_i^2 \text{ ; d'où :}$$
$$\|U(x)\|\le|\lambda_n|\,\|x\| \quad \text{QED}.$$

2.c Puisque U et V commutent, le produit UV est bien symétrique. Alors, pour $x \in E$ de norme inférieure à 1 :

$$\begin{aligned} |(UVx,x)| &= |(Vx|Ux)| \quad (U \text{ est symétrique}) \\ &\leq \|Ux\|\,\|V(x)\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq N(U)\|x\|\,N(V)\|x\| \\ &\leq N(U)N(V) \end{aligned}$$

et on passe au sup. à gauche pour l'inégalité demandée.

PARTIE B

1 $\Leftarrow$) Si $A = {}^tMM$ avec M inversible, A est clairement inversible, et

$$(Ax,x) = ({}^tMMx,x) = (Mx,Mx) = \|Mx\|^2 > 0$$

dès que x est non nul, puisque M est inversible.

$\Rightarrow$) Si A est définie positive.

Prouvons d'abord que toute valeur propre de A est >0 : soit en effet $\lambda \in Sp(A)$, et x_0 un vecteur propre associé.

$$(Ax_0,x_0) > 0 \text{ donc } \lambda\|x_0\|^2 > 0 \text{ donc } \lambda > 0.$$

On diagonalise alors A au moyen d'une matrice orthogonale P. Si $D = diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ où les λ_i sont les valeurs propres de A, je note $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})$.
Alors $A = {}^tPDP = {}^tP\,{}^t\Delta\Delta P = {}^tMM$ avec $M = \Delta P$.

Enfin, M est inversible puisque Δ et P le sont.

2a On effectue un calcul par blocs :

$$\begin{bmatrix} A & C \\ {}^tC & a \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ {}^tCA^{-1} & a - {}^tCA^{-1}C \end{bmatrix}.$$

On prend alors les déterminants. A étant définie positive, $\det A^{-1} = 1/\det A > 0$, enfin $\det A' > 0$ par hypothèse :

D'où $a - {}^tCA^{-1}C = \det A' \det A^{-1} > 0$.

2b Si $N = \begin{bmatrix} M & D \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, ${}^tNN = \begin{bmatrix} {}^tMM & {}^tMD \\ {}^tDM & {}^tDD + \alpha^2 \end{bmatrix}$.

et je veux que ${}^tNN = A'$

Je choisis M inversible tq ${}^tMM = A$ (je peux, A est définie positive).

Je pose $D = {}^tM^{-1}C$

Alors ${}^tDD = {}^tCM^{-1}\,{}^tM^{-1}C = {}^tCA^{-1}C$

Alors, comme $a - {}^tCA^{-1}C > 0$, je peux toujours trouver un réel α tq $\alpha^2 = a - {}^tDD = a - {}^tCA^{-1}C$

Finalement, j'ai écrit A' sous la forme ${}^tNN$, et N est clairement inversible : A' est définie positive.

3a Si l'on voit A comme la matrice de la forme quadratique $Q_A : x \mapsto (Ax,x)$ dans la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, A_p n'est autre que la matrice de la restriction de Q_A à $vect(e_1,\dots,e_p)$, écrite dans la base $(e_1,\dots,e_p)$. La restriction à un sous-espace d'une forme définie positive l'étant encore, il vient

$\det A_p > 0$, et ce pour tout p.

3b Par récurrence sur n ! Puisque $\det A_1 > 0 \ldots \det A_{n-1} > 0$, l'hypothèse de récurrence assure que A_{n-1} est définie positive. Or le passage de A_{n-1} à $A = A_n$ se fait exactement comme dans le lemme, A est donc bien définie positive.

PARTIE 3

1a Evidemment, λ est valeur propre de T ssi $1-\lambda$ est valeur propre de $I_n - T$. Alors, puisque $N(S)$ est la plus grande valeur absolue d'une valeur propre de S,

$$N(I_n - T) \leq k \Rightarrow |1-\lambda| \leq k \quad \forall \lambda \in Sp(T)$$

$$\Rightarrow 1-k \leq \lambda \leq 1+k \quad \forall \lambda \in Sp(T).$$

En particulier, toutes les valeurs propres de T sont strictement positives : T est définie positive.

1b Pour toute valeur propre de T, $\lambda \geq 1-k \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{k-1}$ les valeurs propres de T^{-1} étant les inverses de celles de T, il vient $N(T^{-1}) \leq \frac{1}{k-1}$

De même, les valeurs propres de $T^{-1} - I_n$ sont les $1/\lambda - 1$ où λ est valeur propre de T. Mais

$$\left|\frac{1}{\lambda} - 1\right| = \left|\frac{1-\lambda}{\lambda}\right| \leq \frac{k}{1-k} \quad \Rightarrow \quad N(T^{-1} - I_n) \leq \frac{k}{1-k}$$

2a et 2b : aucune difficulté.

2c $Z_p = Z_{p-1}^2 \Rightarrow N(Z_p) \leq N(Z_{p-1})^2 \leq \ldots \leq N(Z_0)^{2^p} = N(I_n - T)^{2^p} \leq k^{2^p}$

$$\Rightarrow N(Y_p - T^{-1}) \leq N(T^{-1})\, N(I_n - TY_p) = N(T^{-1})\, N(Z_p) \leq \frac{k^{2^p}}{1-k}$$

(Y_p) converge vers T^{-1}, et sacrément vite !