INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Toutes les fonctions considérées dans ce cours seront supposées définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, *non nécessairement compact*, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (voire, plus généralement, dans un espace vectoriel normé complet E), et continues par morceaux sur I (c'est-à-dire que leur restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux sur ce segment).

On notera $\mathcal{CM}(I,E)$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de I dans E.

Étant donné un intervalle I de $\mathbf{R}$, on appellera *suite induisant I* toute suite (J_n) de segments inclus dans I, croissante au sens de l'inclusion, et telle que la réunion des J_n soit égale à I (cette appellation n'a rien de standard, elle est spécifique à ce cours).

Ce polycopié présente la théorie des fonctions sommables, franchement lourdingue, parfaitement inutile, et peu passionnante à faire au tableau. C'est pourquoi peu d'exemples y figurent ; ceux-ci seront détaillés en cours, tout particulièrement la classe des "intégrales de référence". D'autres théorèmes, qui ne sont pas directement du ressort de la construction de l'intégrale généralisée, seront eux-aussi vus en cours.

Les symboles ■ et ■■ indiquent respectivement le début et la fin d'une démonstration.

I. Intégrale généralisée des fonctions positives sommables

1. Fonctions positives sommables

Définition : Soit $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbf{R})$ une fonction à valeurs **positives**. On dit que f est *sommable* sur I s'il existe une constante positive M telle que, pour tout segment $J=[a,b]$ inclus dans I, on ait :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_J f \le M \ .$$

On définit alors l'intégrale de f sur I en posant :

$$\int_I f = \sup_{J \text{ segment} \subset I} \int_J f \ .$$

Remarque : une fonction "sommable" au sens qui vient d'être défini est aussi dite *intégrable* sur I. Les deux termes sont parfaitement interchangeables, cependant seul le mot "sommable" sera employé dans ce cours, afin d'éviter toute ambiguïté (il existe des fonctions Riemann-intégrables, d'autres Lebesgue-intégrables, alors le choix du mot "intégrable" dans ce contexte ne me semble guère judicieux…)

Avant d'aller plus loin, il est essentiel de vérifier le point suivant : dans le cas où I est un segment et où f est continue par morceaux et positive sur I, la nouvelle intégrale de f qui vient d'être définie coïncide-t-elle bien avec l'intégrale de Riemann classique de f sur $[a,b]$ (laquelle sera notée $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$) ?

Pour voir cela, prenons un segment quelconque J inclus dans $I=[a,b]$. Par positivité de f, on a bien entendu :

$$\int_J f \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\,.$$

On a donc trouvé une constante majorant les intégrales de f sur tout segment J inclus dans I ; par définition, f est sommable sur I, et en passant au sup, il vient :

$$\int_I f \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Inversement, posons pour ε positif assez petit : $J_\varepsilon=[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$. J_ε est un segment inclus dans I et donc, par définition de l'intégrale généralisée, il vient :

$$\int_{J_\varepsilon} f = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_I f\,.$$

Faisons alors tendre ε vers 0, on obtient, grâce essentiellement aux résultats de continuité des intégrales fonctions d'une de leur borne, l'inégalité :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_I f\,.$$

En adaptant la démonstration précédente au cas par cas, on arrive facilement au résultat suivant qui, pour la cohérence de ce cours et celle des notations employées, est essentiel :

> <u>Définition</u> : Soit $f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbf{R})$ une fonction à valeurs positives. Alors f est sommable sur $[a,b]$, sur $[a,b[$, sur $]a,b]$ et sur $]a,b[$, et les intégrales généralisées de f sur ces quatre intervalles sont toutes égales à l'intégrale "classique" $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Les définitions qui ont été données de la sommabilité d'une fonction positive, ainsi que de la valeur de son intégrale, sont très intuitives mais reposent de manière **essentielle** sur la positivité de la fonction : elles souffrent donc d'un double défaut ;

i. la difficulté d'une généralisation aux fonctions à valeurs dans **C** ;

ii. le manque de maniabilité de la définition de l'intégrale, définie comme la borne supérieure des intégrales sur les segments inclus dans I.

C'est essentiellement en vue de remédier à cela que le théorème qui suit prend tout son intérêt.

> <u>Théorème 1</u> : Caractérisation par réunion croissante
>
> Soit $f\in\mathcal{CM}(I,\mathbf{R})$ une fonction à valeurs positives.
>
> *i.* S'il existe une suite (J_n) induisant I telle que la suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ soit majorée, alors f est

sommable sur I et l'on a $\int_I f = \sup_n \int_{J_n} f = \lim_n \int_{J_n} f$.

ii. Réciproquement : si f est sommable sur I, alors, pour toute suite (J_n) induisant I, la suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ est convergente et sa limite est l'intégrale généralisée $\int_I f$.

Avant de prouver ce théorème, observons bien comment il fonctionne. La partie *i*. donne un moyen pratique de prouver qu'une fonction donnée est sommable : au lieu d'envisager, comme le demanderait la définition, n'importe quel segment J inclus dans I pour ensuite majorer l'intégrale de f sur J, il est possible, grâce à la propriété *i*., de **choisir** des segments J_n, le principal étant qu'ils aient tendance à "remplir" I. Bien entendu, cela permet de simplifier l'étude de la sommabilité, en sélectionnant des intervalles (J_n) qui soient bien adaptés à la définition de f.

La partie *ii*., elle, outre qu'elle donne une propriété générale des fonctions positives sommables, présente l'avantage majeur de présenter l'intégrale généralisée non plus comme une borne supérieure, mais comme une limite de suite, ce qui se manipule notablement mieux !

■ On notera avant toute chose que, par positivité de f et par croissance de la suite (J_n), la suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ est croissante. Elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée, et dans ce cas, sa limite n'est autre que sa borne supérieure.

i. Soit J un segment inclus dans I. La suite (J_n) induisant I, il est facile de voir que, pour n assez grand, on a $J \subset J_n$ (s'en convaincre !). Il en résulte donc que, toujours pour n assez grand, on a :

$$\int_J f \leq \int_{J_n} f \leq \sup_n \int_{J_n} f .$$

On a trouvé une constante qui majore les intégrales de f sur tout segment inclus dans I, f est donc sommable sur I et en passant au sup à gauche, on récupère :

$$\int_I f \leq \sup_n \int_{J_n} f .$$

Mais inversement, J_n étant un segment inclus dans I, on a, par définition de l'intégrale généralisée :

$$\forall n \in \mathrm{N}, \int_{J_n} f \leq \int_I f .$$

On n'a plus qu'à faire tendre n vers l'infini pour obtenir l'inégalité inverse de celle déjà obtenue, à savoir :

$$\sup_n \int_{J_n} f \leq \int_I f .$$

ii. On suppose ici que f est sommable, et que (J_n) est une suite quelconque induisant I. J_n étant un segment inclus dans I, on a, par définition de l'intégrale généralisée :

$$\forall n \in \mathrm{N}, \int_{J_n} f \leq \int_I f .$$

La suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ est donc majorée, étant croissante, elle converge. On reprend alors la démonstration de *i*. pour voir que sa limite n'est autre que l'intégrale de f sur I. ■■

<u>Corollaire immédiat</u> : Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{R})$ une fonction à valeurs positives, supposée sommable.

Soit (a_n) une suite de points de I qui converge en décroissant vers a (la borne inférieure de I), et (b_n) une suite de points de I qui converge en croissant vers b (la borne supérieure de I).

Alors la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right)$ est convergente, et sa limite est égale à $\int_I f$.

■ Je pose $J_n = [a_n, b_n]$. La suite (J_n) est une suite de segments inclus dans I, croissante au sens de l'inclusion, et dont la réunion est "presque" I, en ce sens que I et $\bigcup_{n \geq 0} J_n$ sont deux intervalles de $\mathbf{R}$ qui ont les mêmes bornes (ce qui est sans importance en vertu de ce qui a été vu plus haut). On conclut grâce à la "caractérisation par réunion croissante". ■■

<u>Théorème 2</u> : Caractérisation par découpage

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{R})$ une fonction à valeurs positives et soit c un point de I.

On note I^+ (resp. I^-) l'ensemble des points de I plus grands (resp. plus petits) que c. Alors f est sommable sur I si et seulement si f est sommable sur I^+ et sur I^-, et on a alors la formule dite de Chasles : $\int_I f = \int_{I^+} f + \int_{I^-} f$.

■ $\Rightarrow$: On suppose ici que f est sommable sur I. Si J est un segment inclus dans I^+, c'est aussi un segment inclus dans I, donc :

$$\int_J f \leq \int_I f .$$

On a ainsi majoré par une constante les intégrales de f sur n'importe quel segment inclus dans I^+ : f est sommable sur I^+. De même, f est sommable sur I^-.

$\Leftarrow$: On suppose ici que f est sommable sur I^+ et sur I^-. Si J est un segment inclus dans I, on décompose J en J^+ (ensemble des éléments de J plus grands que c) et J^- (ensemble des éléments de J plus petits que c). J^+ et J^- sont des segments respectivement inclus dans I^+ et dans I^-, il vient donc :

$$\int_J f = \int_{J^-} f + \int_{J^+} f \leq \int_{I^-} f + \int_{I^+} f .$$

Les intégrales de *f* sur un segment quelconque inclus dans I sont majorées, *f* est sommable sur I.

Reste à prouver la formule de Chasles proprement dite. Pour cela, considérons une suite (a_n) de points de I plus petits que c, qui converge en décroissant vers la borne inférieure de I, et une suite (b_n) de points de I plus grands que c, qui converge en croissant vers la borne supérieure de I.

En passant à la limite dans la formule de Chasles classique :

$$\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a_n}^{c} f(t)\mathrm{d}t + \int_{c}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t ,$$

et en utilisant "Corollaire immédiat", on obtient directement :

$$\int_I f = \int_{I^+} f + \int_{I^-} f \quad \blacksquare\blacksquare$$

Nous verrons dans le paragraphe **3.** l'intérêt majeur de ce théorème.

2. Premiers exemples

a. Exemple 1

On définit sur $\mathbf{R}^+$ une fonction *f* de la façon suivante :

Pour n entier supérieur ou égal à 2, $f(n-\frac{1}{n^3}) = f(n+\frac{1}{n^3}) = 0$ et $f(n) = n$; par ailleurs, *f* est affine sur les segments $[n-\frac{1}{n^3}, n]$ et $[n, n+\frac{1}{n^3}]$. Enfin, *f* est nulle en dehors de la réunion des segments $[n-\frac{1}{n^3}, n+\frac{1}{n^3}]$ (dessin !!!).

Posons $J_n = [0, n+\frac{1}{n^3}]$. La suite (J_n) induit évidemment $\mathbf{R}^+$, et on a de manière évidente :

$$\int_{J_n} f = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\infty]{} \sum_{2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 .$$

La fonction *f* est donc sommable sur $\mathbf{R}^+$, et son intégrale vaut $\frac{\pi^2}{6} - 1$.

L'intérêt majeur de cet exemple est qu'il permet d'ores et déjà de casser une idée fausse : une fonction continue peut parfaitement être sommable sur $\mathbf{R}^+$, sans pour autant tendre vers 0 en $+\infty$, et même sans être bornée au voisinage de $+\infty$.

b. Exemple 2

Soit la fonction définie sur $[\pi,+\infty[$ par $f(t)=\left|\dfrac{\sin t}{t}\right|$.

Il est bien évident que *f* est continue par morceaux sur *I*, et que la suite de segments $(J_n)=([\pi,n\pi])$, qui bien sûr induit *I*, est bien adaptée à *f*.

On a alors :

$$\int_{J_n} f = \int_{\pi}^{n\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t\,.$$

Mais par le changement de variable par translation $u=t-k\pi$, on a :

$$u_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{|\sin(u+k\pi)|}{u+k\pi}\mathrm{d}u=\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+k\pi}\geq\frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin u\mathrm{d}u=\frac{2}{(k+1)\pi}\,.$$

Au total, on obtient :

$$\int_{J_n} f\geq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\xrightarrow[n\infty]{}+\infty$$ puisque la série $\sum\frac{1}{k+1}$ est divergente à termes positifs.

On a ainsi prouvé que les intégrales de *f* sur les J_n ne sont pas majorées, *f* n'est pas sommable sur $[\pi,+\infty[$.

3. Théorèmes de comparaison

Le théorème qui suit, de démonstration triviale, est l'outil numéro 1 pour l'étude de la sommabilité.

Premier théorème de comparaison : Soient *f* et *g* deux fonctions positives, continues par morceaux sur *I*. On suppose $0\leq f\leq g$. Alors si *g* est sommable sur *I*, *f* l'est aussi.

■ Soit *J* un segment inclus dans *I*. On a $\int_J f\leq\int_J g\leq\int_I g$. On a majoré par une constante les intégrales de *f* sur n'importe quel segment inclus dans *I*, *f* est sommable sur *I*. On notera qu'en passant au sup à gauche, on obtient aussi que l'intégrale de *f* est plus petite que celle de *g*. ■■

Second théorème de comparaison : Soient *f* et *g* deux fonctions positives, continues par morceaux sur $I=[a,b[$. On suppose $f(t)\underset{b}{\approx}g(t)$. Alors *f* est sommable sur *I* si et seulement si *g* l'est.

■ Il existe *d* dans $I=[a,b[$ tel que pour tout *t* de $[d,b[$, on ait $\frac{1}{2}f(t)\leq g(t)\leq\frac{3}{2}f(t)$.

L'inégalité de gauche prouve que si *g* est sommable, *f* l'est (premier théorème de comparaison), l'inégalité de droite prouve l'inverse. Il reste enfin à rajouter les intégrales de *f* et de *g* sur $[a,d]$ qui étant parfaitement définies, ne jouent aucun rôle dans la sommabilité. ■■

Remarque importante : Pour étudier la sommabilité d'une fonction positive et continue par morceaux sur un intervalle ouvert $I =]a,b[$, on ne raisonnera généralement pas de manière globale, mais on séparera l'étude en deux, l'une au voisinage de a et l'autre au voisinage de b (ceci est rendu possible par le théorème de découpage, c'est là son intérêt majeur) : cette séparation sera souvent indispensable, puisque les majorations ou les équivalents dont on dispose aux points a et b n'ont généralement rien à voir !

4. Opérations sur les fonctions positives sommables

Propriété 1 : Soient f et g deux fonctions positives, continues par morceaux sur I, et λ et μ deux réels positifs. Si f et g sont sommables sur I, alors $\lambda f + \mu g$ est sommable sur I et on a :

$$\int_I \lambda f + \mu g = \lambda \int_I f + \mu \int_I g .$$

■ On écrit la relation de linéarité de l'intégrale sur les segments J_n d'une suite induisant I, puis on passe à la limite. ■■

Propriété 2 : Soit f une fonction positive, **continue** sur I, sommable sur I, vérifiant :

$$\int_I f = 0 .$$

Alors f est nulle sur I.

■ Soit J un segment inclus dans I, on a $0 \leq \int_J f \leq \int_I f = 0$. L'intégrale de la fonction continue positive f sur le segment J est nulle, f est donc nulle sur J. Enfin, f étant nulle sur tout segment inclus dans I, elle est nulle sur I. ■■

5. Intégrales partielles

On suppose ici que I est un intervalle semi-ouvert, par exemple $I = [a,b[$ (b étant éventuellement égal à $+\infty$). Soit f une fonction continue par morceaux sur I. On peut définir, pour tout x de I, $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (ces intégrales s'appellent les intégrales partielles de f).

Théorème : Soit f une fonction positive, continue par morceaux sur $I = [a,b[$.

Alors f est sommable sur I si et seulement si $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbf{R}$, et on a alors :

$$\int_I f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t .$$

■ $\Rightarrow$: on suppose ici *f* sommable sur *I*. Pour *x* dans *I*, le segment $[a, x]$ est inclus dans *I*, on a donc :

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \le \int_I f .$$

Mais *f* étant positive, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ croît avec *x*. Étant majorée, elle a une limite finie en *b*, et en passant à la limite, il vient :

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \le \int_I f .$$

$\Leftarrow$: on suppose ici que les intégrales partielles de *f* ont une limite finie. Soit *J* un segment inclus dans *I*. Pour *x* assez proche de *b*, on a $J \subset [a, x]$, et donc :

$$\int_J f \le \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \le \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t .$$

On a majoré par une constante les intégrales de *f* sur n'importe quel segment inclus dans *I*, *f* est sommable, et en passant au sup à gauche, il vient :

$$\int_I f \le \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t .$$ ■■

L'intérêt majeur de ce résultat est bien entendu, pour les fonctions positives, de pouvoir justifier des sommabilités et de calculer des intégrales généralisées via un calcul de primitive.

II. Fonctions sommables à valeurs dans C

À peu près tous les résultats qui seront vus dans ce paragraphe se généralisent sans modification aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé complet *E*, le module étant systématiquement remplacé par la norme de *E*.

1. Fonctions sommables

Définition : Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbf{C})$. On dit que *f* est sommable sur *I* si et seulement si $|f|$ l'est.

Ainsi, pour l'étude de la sommabilité d'une fonction complexe, il n'y a strictement rien de nouveau par rapport au paragraphe précédent sur les fonctions positives puisque, par définition, on doit s'y ramener.

Théorème 1 : L'ensemble des fonctions sommables de *I* dans **C** est un **C**-espace vectoriel, que l'on notera $L^1(I, \mathbf{C})$.

■ Soient *f* et *g* deux éléments de $L^1(I, \mathbf{C})$, et soient λ et μ deux scalaires.

Dans l'inégalité $|\lambda f + \mu g| \le |\lambda||f| + |\mu||g|$, la fonction majorante est sommable, la fonction $|\lambda f + \mu g|$ est donc sommable d'après le premier théorème de comparaison, ce qui, par définition, assure que $\lambda f + \mu g$ est dans $L^1(I, \mathbf{C})$ ■■

La sommabilité d'une fonction *f* étant équivalente à celle de son module, il est facile d'adapter les théorèmes de comparaison. On obtient alors de manière évidente les résultats suivants :

Théorème 2 : Soient *f* et *g* deux éléments de $\mathcal{CM}(I, \mathbf{C})$. On suppose $0 \le |f| \le g$. Alors, si *g* est sommable sur *I*, *f* l'est aussi.

Théorème 3 : On suppose ici que $I = [a, b[$. Soient *f* et *g* deux éléments de $\mathcal{CM}(I, \mathbf{C})$. On suppose $f(t) \underset{b}{\approx} g(t)$. Alors *f* est sommable sur *I* si et seulement si *g* l'est.

On remarquera que, contrairement à ce qui se passe pour les séries, l'hypothèse de positivité des fonctions aux voisinage de *b* est ici parfaitement inutile, puisque l'hypothèse $f(t) \underset{b}{\approx} g(t)$ entraîne que leurs modules sont équivalents, et donc simultanément sommables ou non sommables (c'est un peu comme si, dans le cours sur les séries, on n'admettait que les séries absolument convergentes ; le théorème sur les équivalents serait alors toujours vrai, sans hypothèse de signe).

2. Intégrale généralisée

Soit *f* un élément de $L^1(I, \mathbf{C})$. On cherche à définir l'intégrale de *f* sur *I*, de telle sorte que cette nouvelle définition généralise celle qui a été donnée pour les fonctions positives. Évidemment, la première définition de l'intégrale qui a été vue, en termes de borne supérieure des intégrales sur les segments inclus dans *I*, est ici parfaitement inadaptable, la fonction *f* prenant ses valeurs dans **C**. D'où l'idée de généraliser la "caractérisation par réunion croissante".

Théorème et définition : Soit *f* un élément de $L^1(I, \mathbf{C})$.

i. Pour toute suite (J_n) induisant *I*, la suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ est convergente.

ii. La limite d'une telle suite d'intégrales ne dépend que de *I*, et pas de la suite (J_n) induisant *I* choisie.

On peut donc définir l'intégrale de *f* sur *I* par $\int_I f = \lim_n \int_{J_n} f$, où (J_n) est une suite quelconque induisant *I*.

■ *i.* Soient *p* et *q* deux entiers, avec $p > q$. On notera pour tout *n* : $J_n = [\alpha_n, \beta_n]$.

La croissance de la suite (J_n) au sens de l'inclusion assure les inégalités $\alpha_p \leq \alpha_q \leq \beta_q \leq \beta_p$.

Il vient donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_{J_p} f - \int_{J_q} f\right| &= \left|\int_{\alpha_p}^{\alpha_q} f + \int_{\beta_q}^{\beta_p} f\right| \\ &\leq \int_{\alpha_p}^{\alpha_q} |f| + \int_{\beta_q}^{\beta_p} |f| \\ &= \int_{J_p} |f| - \int_{J_q} |f|\end{aligned}$$

Mais $|f|$ est une fonction positive sommable. Son intégrale sur *I* est donc la limite de ses intégrales sur les J_n. Donc $\int_{J_p} |f| - \int_{J_q} |f|$ tend vers zéro quand *p* et *q* tendent vers $+\infty$. La majoration précédente prouve alors que la suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ est de Cauchy, donc convergente puisqu'on est dans **C** qui est complet.

ii. Soient (I_n) et (J_n) deux suites induisant *I*. Soit *c* un point de *I*. Pour *n* assez grand ($n \geq n_0$), *c* est à la fois dans I_n et dans J_n. Dans ce cas, $K_n = I_n \cup J_n$ est encore un segment inclus dans *I*. On peut donc écrire, en posant $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ et $K_n = [a_n, b_n]$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{K_n} f - \int_{I_n} f\right| &= \left|\int_{a_n}^{\alpha_n} f + \int_{\beta_n}^{b_n} f\right| \\ &\leq \int_{a_n}^{\alpha_n} |f| + \int_{\beta_n}^{b_n} |f| \\ &= \left|\int_{K_n} |f| - \int_{I_n} |f|\right|\end{aligned}$$

Mais $|f|$ est une fonction positive sommable. Son intégrale sur *I* est donc la limite de ses intégrales sur les I_n et aussi sur les K_n. Donc $\left|\int_{K_n} |f| - \int_{I_n} |f|\right|$ tend vers 0 quand *n* tend vers $+\infty$, et à plus forte raison $\left|\int_{K_n} f - \int_{I_n} f\right|$ tend aussi vers 0.

Ce qui vient d'être fait avec les I_n peut être refait avec les J_n, et on en déduit :

$$\lim \int_{I_n} f = \lim \int_{K_n} f = \lim \int_{J_n} f \text{ . ■■}$$

Remarque importante : On peut voir là encore que dans le cas où I est un segment $[a,b]$, si f est une fonction continue par morceaux sur I, alors elle est sommable sur I, mais aussi sur les trois intervalles autres que I ayant les mêmes extrémités que I, et que les intégrales généralisées de f sur ces quatre intervalles sont toutes égales à l'intégrale classique de f sur I.

3. Premières propriétés de l'intégrale

Dans le but d'alléger ce polycopié déjà passablement lourdingue, certaines des propriétés ci-dessous énoncées ne sont pas démontrées : il suffit pour ce faire d'écrire les propriétés analogues pour les fonctions continues sur un segment en considérant une suite induisant I, et de passer à la limite.

Propriété 1 : L'application définie sur $L^1(I,\mathbf{C})$ par $f \mapsto \int_I f$ est linéaire.

Il s'ensuit toujours la même remarque : il n'y a donc aucun problème pour regrouper, lors d'un calcul, deux intégrales en une seule. Mais attention à l'opération inverse ! Avant de scinder une intégrale en deux, et donc pour écrire $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$, il est indispensable de justifier au préalable que l'une des deux fonctions, f ou g, est sommable (l'autre l'étant alors par différence).

Propriété 2 : Si f est sommable sur I, et si I_1 est un sous-intervalle de I, alors f est sommable sur I_1 et on a $\int_{I_1} f = \int_I f.\chi_{I_1}$.

Corollaire : Soit f une fonction complexe continue par morceaux sur un intervalle I, et c un point de I. On note I^+ (resp. I^-) l'ensemble des points de I plus grands (resp. plus petits) que c. Alors f est sommable sur I si et seulement si f est sommable sur I^+ et sur I^-, et on a la formule dite de Chasles : $\int_I f = \int_{I^+} f + \int_{I^-} f$.

Étant donnée une fonction f à valeurs complexes, puisque sa fonction conjuguée a le même module, il est bien évident que f est sommable si et seulement si $\bar{f}$ l'est. Mais puisque l'on a :

$$\mathrm{Re}(f) = \frac{f+\bar{f}}{2}, \quad \mathrm{Im}(f) = \frac{f-\bar{f}}{2\mathrm{i}}, \quad f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f),$$

il en résulte immédiatement par linéarité :

Propriété 3 : Soit f un élément de $\mathcal{CM}(I,\mathbf{C})$.

Alors : $f \in L^1(I,\mathbf{C}) \Leftrightarrow \bar{f} \in L^1(I,\mathbf{C}) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dans $L^1(I,\mathbf{R})$.

Soit enfin f une fonction à valeurs **réelles**. Définissons sa partie positive f^+ et sa partie négative f^- par :

$$f^+(x) = \sup\big(f(x),0\big) \text{ et } f^-(x) = -\inf\big(f(x),0\big) \quad \text{(dessin !)}$$

On a à peu près trivialement les relations suivantes :

$$f = f^+ - f^- \text{ et } |f| = f^+ + f^-$$

qui permettent, en les inversant, d'exprimer f^+ et f^- en fonction de f et de $|f|$, de voir que si f est continue par morceaux, f^+ et f^- le sont, et que l'on a :

Propriété 4 : Soit f un élément de $\mathcal{CM}(I,\mathbf{R})$.

Alors : $f \in L^1(I,\mathbf{R}) \Leftrightarrow f^+$ et f^- sont dans $L^1(I,\mathbf{R})$.

4. Intégrales partielles

Théorème : Soit f un élément de $\mathcal{CM}(I,\mathbf{R})$ avec $I = [a,b[$. Si f est sommable sur I, alors les intégrales partielles $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ ont une limite quand x tend vers b, qui vaut $\int_I f$.

La réciproque est fausse, en ce sens que les intégrales partielles $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ peuvent avoir une limite quand x tend vers b, sans pour autant que f soit sommable sur I.

■ Soit (x_n) une suite de points de I qui converge en croissant vers b. La suite de segments $(J_n) = ([a,x_n])$ induit I, et donc, par définition même de l'intégrale, il vient :

$$\int_I f = \lim_n \int_{J_n} f = \lim_n \int_a^{x_n} f.$$

On a donc prouvé que pour toute suite croissante (x_n) de points de I qui converge vers b, la suite $\left(\int_a^{x_n} f\right)$ a une limite égale à $\int_I f$. Un résultat classique vu dans le cours de topologie, et qui s'adapte sans difficulté au cas des seules suites croissantes, permet alors de conclure.

Il faut maintenant donner un exemple de fonction pour laquelle la réciproque soit fausse. Considérons pour cela la fonction définie sur $[\pi,+\infty[$ par $f(t) = \frac{\sin t}{t}$, qui est l'un des tous premiers exemples de fonctions non sommables que l'on ait vu (sa valeur absolue n'est pas sommable). Prouvons, grâce à une intégration par parties, que les intégrales partielles de f ont une limite finie en $+\infty$:

$$\int_\pi^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\pi^x + \int_\pi^x \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

Le terme en $\dfrac{1-\cos x}{x}$ provenant du crochet tend évidemment vers 0 à l'infini.

L'encadrement $0 \leq \dfrac{1-\cos t}{t^2} \leq \dfrac{2}{t^2}$ prouve que la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est sommable sur $[\pi,+\infty[$, ses intégrales partielles ont donc une limite finie. Au total, $\displaystyle\int_\pi^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$, ce que l'on voulait prouver. ■■

On retiendra de ce théorème qu'il permet, entre autres choses, de **calculer** des intégrales généralisées, via un calcul de primitive notamment, mais certainement pas, sauf pour les fonctions positives, de **justifier une sommabilité**.

5. Intégrales semi-convergentes

Comme on vient de le voir, il est possible qu'une fonction continue par morceaux soit non sommable sur un intervalle semi-ouvert $[a,b[$, mais que $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe dans **C**. On dira dans ce cas que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est semi-convergente, et la limite de ses intégrales partielles sera notée **abusivement** $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Théoriquement, ce type d'intégrales ne devrait être rencontré que de façon marginale tout au long de l'année. On retiendra simplement que l'intégration par parties utilisée pour la fonction $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ est souvent un moyen efficace de justifier la semi-convergence d'une intégrale.