agrégation de Mathématiques **Université Joseph Fourier**
Année 2013-2014

géométrie affine

1 Rappels de cours

1.1 espaces affines

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble, K un corps et E un espace vectoriel sur K. On dit que $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E lorsqu'il existe une action de E sur $\mathcal{E}$ transitive et fidèle.
Les éléments de $\mathcal{E}$ sont alors appelés des points.
On note $\overrightarrow{\mathcal{E}} := E$. On appelle dimension de $\mathcal{E}$ la dimension de sa direction $\overrightarrow{\mathcal{E}}$
Pour un point m de $\mathcal{E}$ et un vecteur u de E on note $m+u$ l'image du couple (m,u) par l'action de E sur $\mathcal{E}$.

Exercice 1.1. Pour tout point m de $\mathcal{E}$ et pour tous vecteurs u et v de E on a

$$m+0=m \quad et \quad m+(u+v)=(m+u)+v$$

De plus, l'action de E sur $\mathcal{E}$ est simplement transitive : étant donnés deux points a et b de $\mathcal{E}$, il existe un unique vecteur u de E tel que $b=a+u$. Ce vecteur est noté $\overrightarrow{ab}$.

Exercice 1.2. Retrouver la relation de Chasles

Soit u un vecteur de E. L'aplication de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à un point m associe le point $m+u$ est appelée la translation de vecteur u. Elle est notée t_u.
La translation de vecteur u est une bijection : son application réciproque est la translation de vecteur $-u$.
remarque : tout espace vectoriel est un espace affine de direction lui-même, si bien que les éléments de l'espace vectoriel sont considérés tantôt comme des vecteurs et tantôt comme des points.

1.2 sous-espaces affine

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un corps K et A une partie de $\mathcal{E}$. On dit que A est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ lorsqu'il existe un élément a de A et un sous-espace vectoriel F de E tels que

$$A=a+F=\{m\in\mathcal{E}|\ \exists\ w\in F,\quad m=a+w\}$$

Exercice 1.3. a) Montrer qu'alors, pour tout élément b de A on a $A=b+F$.
b) Montrer que $F=\{\overrightarrow{mn},\ m\in A\ \ n\in A\}$.
c) Montrer que A est un espace affine de direction F.

Exercice 1.4. Soient E et E' deux espaces vectoriels et $f:E\to E'$ une application linéaire et $y\in Imf$. Montrer que $f^{-1}(y)$ est un sous-espace affine de E. Quelle est sa direction ?

Exercice 1.5. a) Tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace affine de E.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-espace affine A de E soit aussi un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 1.6. Soient A et B deux sous-espaces affine d'un espace affine $\mathcal{E}$, de directions respectives $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$. Montrer que $A\cap B$ est soit vide soit un sous espace affine de direction $\overrightarrow{A}\cap\overrightarrow{B}$.

1.3 applications affines

Soient A et A' deux espaces affines, une application $f : A \to A'$ est affine lorsqu'il existe une application linéaire T de $\overrightarrow{A}$ dans $\overrightarrow{A'}$ vérifiant $\forall a \in A \quad \forall b \in A \quad T(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{f(a)f(b)}$. L'application T est alors uniquement déterminée puisque, pour tout vecteur v de $\overrightarrow{A}$, il existe a et b dans A tels que $v = \overrightarrow{ab}$. On note $T = \overrightarrow{f}$ et on l'appelle l'application linéaire associée à f ou la partie linéaire de f.
Etant donné un point a de A. Une application affine f est entiérement déterminée par l'image de a et par sa partie linéaire puisque pour tout point b de A on a $f(b) = f(a) + \overrightarrow{f(a)f(b)} = f(a) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{ab})$.

Exercice 1.7. Soit f une application de A dans A' et a un point de A. On définit l'application $\overrightarrow{f_a} : \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{A'}$ ainsi : soit $v \in \overrightarrow{A}$ et $m \in A$ tel que $m = a + v$, on pose $\overrightarrow{f_a}(v) = \overrightarrow{f(a)f(m)}$. Montrer que si $\overrightarrow{f_a}$ est linéaire alors f est affine et $\overrightarrow{f_a}$ est sa partie linéaire. En particulier, $\overrightarrow{f_a}$ ne dépend pas du point a choisi.

Dans la pratique, pour montrer qu'une application $f : A \to A'$ est affine, il suffit donc de choisir un point a de A est de vérifier que $\overrightarrow{f_a}$ est linéaire.

Exercice 1.8. Si f et g sont des applications affines alors $f \circ g$ est une application affine et $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

1.4 barycentres

Exercice 1.9. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un corps K.
Soient $a_1, ..., a_s$ s points de $\mathcal{E}$, soient $\lambda_1, ..., \lambda_s \in K$ vérifiant $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$.
Pour g un point de $\mathcal{E}$ les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\exists c \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{cg} = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \overrightarrow{ca_i}$
2. $\forall c \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{cg} = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \overrightarrow{ca_i}$
3. $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \overrightarrow{ga_i} = 0$

Il existe un unique point g de $\mathcal{E}$ vérifiant les propriétés précédentes. On dit que g est le barycentre des points $a_1, ..., a_s$ affectés des coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_s$. On note

$$g = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i$$

On dit aussi que g est le barycentre des points $a_1, ..., a_s$ affectés des coefficients $\alpha_1, ..., \alpha_s \in K$, pour tout s-uplet de coefficients $(\alpha_1, ..., \alpha_s)$ proportionnel à $(\lambda_1, ..., \lambda_s)$.(attention NE PAS noter $g = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i$)

Exercice 1.10. Soient a, b, m trois points de $\mathcal{E}$. Montrer que $m + \overrightarrow{ab} = m + b - a$ et plus généralement, pour $\lambda \in K$, $m + \lambda\overrightarrow{ab} = m + \lambda b - \lambda a$.

Exercice 1.11. (associativité du barycentre) Dans une combinaison linéaire $g = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i$ où les a_i sont des points de $\mathcal{E}$ et les λ_i des scalaires dont la somme vaut 1, on peut remplacer la combinaison linéaire partielle $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i$ par $(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i) n$ où $n = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i} a_i$.

Exercice 1.12. Soit maintenant E un espace vectoriel sur un corps K et A un sous-espace affine de E qui ne contient pas 0_E.

1. Montrer que $\forall a \in A, \ \ \forall \lambda \in K, \ \ (\lambda a \in \overrightarrow{A} \iff \lambda = 0)$
2. Montrer que, pour tout entier positif n, pour tous scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_s \in K$, pour tous points $a_1, ..., a_s \in A$ on a :

$$\sum_1^s \lambda_i a_i \in A \iff \sum_1^s \lambda_i = 1$$

$$\sum_1^s \lambda_i a_i \in \overrightarrow{A} \iff \sum_1^s \lambda_i = 0$$

Lorsque $\sum_1^s \lambda_i = 1$, le point $g = \sum_1^s \lambda_i a_i$ est le barycentre des points a_i affectés des coefficients λ_i.

Exercice 1.13. Soient $a_1, ..., a_s$ des points de $\mathcal{E}$ et V le sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{a_1 a_i}$, $1 \leq i \leq s$. Montrer que l'ensemble des barycentres des points $a_1, ...a_s$ est le sous-espace affine $a_1 + V$ de $\mathcal{E}$ et c'est aussi le plus petit sous-espace affine de $\mathcal{E}$ qui contient les point $a_1, ..., a_s$.

On obtient donc qu'une droite affine est l'ensemble des barycentres de deux de ses points, un plan affine est l'ensemble des barycentres de trois de ses points non alignés...

Exercice 1.14. a) Soient deux points a et b de $\mathcal{E}$. Le segment $[a, b]$ est l'ensemble des barycentres de a et b à coefficients positifs.
b) Soient trois points non alignés a, b et c de $\mathcal{E}$. Le triangle plein $[a, b, c]$ est l'ensemble des barycentres de a, b et c à coefficients positifs.

Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension d , on appelle repère affine de $\mathcal{E}$ toute famille de $d+1$ points de $\mathcal{E}$ telle que la famille de vecteurs $\overrightarrow{a_2 a_1}, ..., \overrightarrow{a_{d+1} a_1}$ soit une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Exercice 1.15. Si $a_1, ..., a_{d+1}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$, alors l'expression d'un point m de $\mathcal{E}$ comme barycentre des points $a_1, ...a_{d+1}$ est unique.

Exercice 1.16. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et S une partie de $\mathcal{E}$. On appelle enveloppe convexe de S l'intersection des ensembles convexes de $\mathcal{E}$ qui contiennent S. Montrer que l'enveloppe convexe de S est l'ensemble des barycentres à coefficient positifs des points de S.

1.5 barycentres et applications affines

Exercice 1.17. Une application d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans un espace affine $\mathcal{E}'$ est affine si et seulement si elle conserve les barycentres.

Exercice 1.18. Soit $(a_1, ...a_{d+1})$ un repère affine d'un espace affine $\mathcal{E}$, soit $\mathcal{E}'$ un espace affine et $b_1, ..., b_{d+1}$ $d+1$ points de $\mathcal{E}'$

1. Montrer qu'il existe une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ telle que pour tout $i \in \{1, ..., d+1\}$ $f(a_i) = b_i$.
2. Montrer que deux applications affines $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ et $g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ sont égales si et seulement si on a $f(a_i) = g(a_i)$ pour $1 \leq i \leq d+1$.

Exercice 1.19. a) L'image d'un convexe par une application affine est convexe.
b) L'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe.

Exercice 1.20. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines,$(a_1, ...a_{d+1})$ un repère affine de $\mathcal{E}$, $a'_1, ...a'_{d+1}$ $d+1$ point de $\mathcal{E}'$, il existe une et une seule application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ telle que $f(a_i) = a'_i$ pour $1 \leq i \leq d+1$. De plus f est
-injective si et seulement si la famille des vecteurs $\overrightarrow{a'_2 a'_1}, ..., \overrightarrow{a'_{d+1} a'_1}$ est libre
-surjective si et seulement si la famille des vecteurs $\overrightarrow{a'_2 a'_1}, ..., \overrightarrow{a'_{d+1} a'_1}$ engendre $\overrightarrow{\mathcal{E}'}$
-bijective si et seulement si la famille $a'_1, ...a'_{d+1}$ est un repère affine de $\mathcal{E}'$.

1.6 projections et symétries

Exercice 1.21. Soient A et B deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) $A \cap B \neq \emptyset$
   (b) $\forall a \in A, \forall b \in B, \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$
   (c) $\exists a \in A, \exists b \in B, \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ pour qu'il existe deux sous-espaces affines A' et B' de directions respectives $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ avec $A' \cap B' = \emptyset$.
3. Montrer que si A et B sont deux sous-espaces affines d'un même espace affine $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{A} \oplus \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathcal{E}}$ alors $A \cap B$ est un singleton.

Soit F un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$. Soit $\overrightarrow{G}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ supplémentaire de $\overrightarrow{F}$. On a donc $\overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G} = \overrightarrow{\mathcal{E}}$. On définit la projection p de $\mathcal{E}$ sur F parallélement à G ainsi : soit $m \in \mathcal{E}$, le sous-espace affine $m + \overrightarrow{G}$ de $\mathcal{E}$ rencontre F en un point et un seul, c'est $p(m)$. Soit m' le symétrique de m par rapport à $p(m)$, c'est-à-dire le point m' de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{mm'} = 2\overrightarrow{mp(m)}$. L'application $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui à m associe m' est appelée symétrie par rapport à F parallélement à $\overrightarrow{G}$.

Exercice 1.22. Les applications p et s sont affines.

Exercice 1.23. a) Montrer qu'une application affine $f : A \to A$ est une projection si et seulement si $f \circ f = f$.
b) Montrer qu'une application affine $f : A \to A$ est une symétrie si et seulement si $f \circ f = id_A$.

1.7 homothéties et translations

Soit A un espace affine . Soit $a \in A$ et $k \in K$. L'homothétie $h_{a,k}$ de centre a et de rapport k est l'application qui à tout point m de A associe le point m' de A tel que $\overrightarrow{am'} = k\overrightarrow{am}$. Soit $v \in \overrightarrow{A}$. La translation t_v de vecteur v est l'application qui à un point m de A associe le point $m' = m + v$.

Exercice 1.24. Translations et homothéties sont des applications affines.

Exercice 1.25. Soient a et a' deux points de A, et h et h' deux homothéties de centres respectifs a et a'.
a) Montrer que $h \circ h'$ est soit une translation de vecteur colinéaire à $\overrightarrow{aa'}$, soit une homothétie de centre aligné avec a et a'.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que h et h' commutent.

Exercice 1.26. Le groupe des homothéties-translations est un sous-groupe distingué du groupe affine.

2 Vrai ou faux

1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E, soient a et b deux points de $\mathcal{E}$, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
$$a + F \subset b + G \iff \overrightarrow{ab} \subset G \; et \; F \subset G$$
2. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et A une partie de $\mathcal{E}$, A est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\{\overrightarrow{mn}, m \in A \; et \; n \in A\}$ et un sous-espace vectoriel de E.

3. Soient B et C deux sous-espaces affines d'un espace affine A, alors
   a) $B \cap C$ est un sous espace affine de A
   b) $B \cup C$ est un sous espace affine de A

4. Soient B et C deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$.
   Si $dim(B) + dim(C) \geq dim(\mathcal{E})$ alors $B \cap C$ est non vide.

5. Soit E un espace vectoriel et A un sous-espace affine de E. Soient $a_1, ..., a_s$ des points de A , l'ensemble des points $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i$ avec $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 2$ est un sous-espace affine de E.

6. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines. L'image d'un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ par une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}'$.

7. Il existe une application affine $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$ où
   (a) $a = (2, 1)$, $b = (6, 3)$, $c = (8, 4)$
   $a' = (1, 2)$, $b' = (3, 1)$, $c' = (1, 4)$.
   (b) $a = (2, 1)$, $b = (6, 3)$, $c = (8, 4)$
   $a' = (1, 2)$, $b' = (2, 4)$, $c' = (4, 8)$.
   (c) $a = (2, 1)$, $b = (6, 3)$, $c = (8, 4)$
   $a' = (2, 5)$, $b' = (6, 5)$, $c' = (8, 5)$.
   (d) $a = (1, 3)$, $b = (2, 3)$, $c = (1, 0)$
   $a' = (2, 1)$, $b' = (6, 3)$, $c' = (8, 4)$.

8. Il existe une application affine $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$ et $f(d) = d'$ où
   (a) $a = (3, 1)$, $b = (6, 1)$, $c = (7, 2)$, $d = (13, 2)$
   $a' = (1, 2)$, $b' = (2, 2)$, $c' = (5, 1)$, $d' = (9, 1)$.
   (b) $a = (3, 1)$, $b = (6, 1)$, $c = (7, 2)$, $d = (13, 2)$
   $a' = (1, 4)$, $b' = (1, 2)$, $c' = (2, 4)$, $d' = (2, 0)$.

9. On considère dans $\mathbb{R}^2$ six points a, b, c, d, i, j tels que $[a; b; c; d]$ soit un parallélogramme. Il existe une application affine $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(a) = f(b) = i$ et $f(c) = f(d) = j$.

3 Exercices

1. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'equation $x + 2y - 3z = 5$ et B celui d'equations $x + y = 3$ et $x - y - z = 2$. Montrer que A et B sont des sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$. Quelles en sont les directions et dimensions respectives ?

2. Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 4 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X], \quad P(3) = 2 \quad et \quad P'(3) = 1\}$. Montrer que F est un sous-espace affine de E. Quelle est sa direction ? Quelle est sa dimension ?

3. Soit l'équation différentielle $\alpha : y' + 5y = t^2$. On note S l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de α. Montrer que S est un sous-espace affine de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est sa direction ? Quelle est sa dimension ?

Résoudre α.

4. Soient a, b, c, d quatre points du plan, i le milieu de $[a; b]$, j le milieu de $[b; c]$, k le milieu de $[c; d]$, l le milieu de $[d; a]$. Montrer que $[i; j; k; l]$ est un parallélogramme.

5. Soient a, b, c un repère affine du plan. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que trois points m, n, p du plan soient alignés à l'aide d'un déterminant faisant intervenir les coordonnées barycentriques des points m, n et p dans le repère affine a, b, c. Généraliser en dimension plus grande.

6. Soit $[a; b; c]$ un triangle non aplati du plan. On note
a_1 le symétrique de b par rapport à c,
b_1 le symétrique de c par rapport à a,
c_1 le symétrique de a par rapport à b,
a_2 le point d'intersection de la droite (bc) avec la droite (b_1c_1),
b_2 le point d'intersection de la droite (ac) avec la droite (a_1c_1),
c_2 le point d'intersection de la droite (ba) avec la droite (b_1a_1).
   (a) Donner les coordonnées barycentriques des point a_1, b_1, c_1 dans le repère affine a, b, c.
   (b) Comparer les déterminants $det(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ et $det(\overrightarrow{a_1b_1}, \overrightarrow{a_1c_1})$.
   (c) Donner les coordonnées barycentriques des point a_2, b_2, c_2 dans le repère affine a, b, c et dans le repère affine a_1,b_1,c_1.
   (d) En déduire que les trois triangles $[a; b; c]$, $[a_1; b_1; c_1]$, $[a_2; b_2; c_2]$ ont le même centre de gravité.
   (e) Expliquer comment on peut construire le triangle $[a; b; c]$ à partir du triangle $[a_1; b_1; c_1]$.

7. Soient o, a, b, c quatre points non coplanaires de $\mathbb{R}^3$ et k un réel différent de 1. On note $a' = o + k\overrightarrow{oa}$, $b' = o + k\overrightarrow{ob}$, $c' = o + k\overrightarrow{oc}$.
   (a) Soit g' l'isobarycentre des points a', b' et c'. Montrer que g' est aussi l'isobarycentre des point $a", b"$ et $c"$ où $a"$ désigne le milieu de $[b'; c']$, $b"$ celui de $[a'; c']$, $c"$ celui de $[a'; b']$
   (b) Soit g l'isobarycentre des points a, b, c, montrer que les points o, g et g' sont alignés.
   (c) Dans le cas où $k \neq -2$, montrer que les droites $(aa")$ et $(gg")$ sont concourrantes. Montrer ensuite que les droites $(aa"), (bb")$ et $(cc")$ le sont aussi.
   (d) Dans le cas où $k = -2$, que peut-on dire ?

8. Soient a, b, c, a', b', c' six points du plan tels que les droites (aa'),(bb') et (cc') aient exactement un point commun que l'on note o. On suppose que les points o, a, b, c, a', b', c' sont tous distincts. On suppose aussi que les droites (bc) et $(b'c')$ se coupent en un point p, les droites (ac) et $(a'c')$ se coupent en un point q et les droites (ab) et $(a'b')$ se coupent en un point r. Le but de cet exercice est de montrer que les points p, q et r sont alignés.
   (a) Dites pourquoi il existe des réels α, β, γ uniques tels que l'on ait
   $$o = \alpha a + (1 - \alpha)a' = \beta b + (1 - \beta)b' = \gamma c + (1 - \gamma)c'$$
   (b) Montrer que
   $$\beta\overrightarrow{pb} = \gamma\overrightarrow{pc}, \quad \alpha\overrightarrow{qa} = \gamma\overrightarrow{qc}, \quad \beta\overrightarrow{rb} = \alpha\overrightarrow{ra}$$
   (c) Ecrire les points p, q et r comme barycentres de a, b et c.

(d) Montrer que les points p, q et r sont alignés.

9. Peut-on dire que les bissectrices d'un triangle sont concourantes ?

10. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.
    (a) Soient C et C' deux convexes de l'espace affine $\mathcal{E}$. Montrer que l'ensemble des milieux des points m,m' lorsque m parcourt C et m' parcourt C' est convexe.
    (b) Soient a,b,c,d quatre points distincts de $\mathcal{E}$. Déterminer l'ensemble des milieux des points m,m' quand m parcourt le segment $[a; b]$ et m' le segment $[c; d]$.

11. Soit D une droite d'un plan affine P et a un point n'appartenant pas à D . Déterminer l'enveloppe convexe de $\{a\} \cup D$. L'enveloppe convexe d'un fermé est-elle nécessairement fermée ?

12. Soient A un espace affine et $f : A \to A$ une application affine. Soient a et b deux points de A. Montrer que si $f(a) = a$ et $f(b) = b$ alors f fixe tous les points de la droite (ab).
    Généraliser.

13. Pour tout point m du plan, on note s_m la symétrie centrale par rapport à m. Soient a, b, c trois points non alignés du plan. Déterminer $s_a \circ s_b \circ s_c$.

14. Soit f une application affine d'un espace affine A dans lui-même. On dit qu'un point m de A est un point fixe de f lorsque $f(m) = m$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un sous-espace affine de A.

15. Soient A un espace affine, F_1 et F_2 deux sous-espaces affines de A tels que
    $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{F_1} \oplus \overrightarrow{F_2}$.
    Soient s_1 la symétrie par rapport à F_1 parallélement à F_2 et s_2 la symétrie par rapport à F_2 parallélement à F_1 .
    a) Montrer que l'application $s_2 \circ s_1$ admet exactement un point fixe.
    b) Donner la nature géométrique de $s_2 \circ s_1$.

16. Soient a, b, c trois points non alignés d'un plan P.
    (a) Montrer qu'il existe une unique application affine $f : P \to P$ telle que
    $f(a) = b$, $f(b) = c$ et $f(c) = a$.
    (b) Ecrire la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ de $\overrightarrow{P}$.
    (c) L'application f est-elle injective ?
    (d) L'application f est-elle surjective ?
    (e) Décrire l'ensemble des points fixes de f.

17. Soit f une application affine d'un espace affine A dans lui-même. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
    (a) L'application f admet un point fixe et un seul.
    (b) 1 n'est pas valeur propre de l'application linéaire $\overrightarrow{f}$

18. Soient a et b deux points distincts du plan. Déterminer $s_b \circ t \circ s_a$ où s_a et s_b désignent les symétries centrales de centres respectifs a et b, et t la translation de vecteur $\overrightarrow{ab}$.

19. Soient p une projection , s une symétrie et $f : A \to A$ une application affine bijective. Montrer que $f \circ p \circ f^{-1}$ est une projection et $f \circ s \circ f^{-1}$ une symétrie. Quels sont leurs éléments caractéristiques ?

20. Une transformation affine transforme toute droite en une droite qui lui est parallèle si et seulement si c'est une homothétie ou une translation.

21. Soient $[a; b; c]$ et $[a'; b'; c']$ deux triangles du plan tels que les droites (ab) et $(a'b')$ soient parallèles ainsi que les droites (bc) et$(b'c')$ et les droites (ac) et $(a'c')$. Montrer que les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles.

22. Soient D et D' deux droites du plan affine. Soient a, b et c trois points de D et a', b' et c' trois points de D'. On suppose que (ab') et (ba') sont parallèles ainsi que (ac') et (ca'). Montrer que (bc') et (cb') sont parallèles.

23. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.
    (a) Montrer que pour toute partie H de $\mathcal{E}$ les assertions suivantes sont équivalentes
        i. H est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension $n - 1$.
        ii. Il existe une application affine non constante f de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $H = f^{-1}(\{0\})$.
        iii. Il existe n points de H affinement indépendants et H est l'ensemble des barycentres de ces n points.

    On dit que la partie H de $\mathcal{E}$ est un hyperplan affine de $\mathcal{E}$ lorsqu'elle vérifie l'une des assertions précédentes.

    (b) Soit H un hyperplan affine de $\mathcal{E}$ et $(a_0, a_1, ..., a_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$ tel que $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ soit un repère affine de H. Notons F_+ (respectivement F_-) l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ dont la coordonnée sur a_n est strictement positive (respectivement strictement négative).
        i. Pourquoi les ensembles F_+ et F_- sont-ils bien définis ?
        ii. Soit f une application affine non constante de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $H = f^{-1}(\{0\})$.
        Montrer que dans le cas où $f(a_n) > 0$, on a $F_+ = f^{-1}(]0; +\infty[)$ et $F_- = f^{-1}(]-\infty; 0[)$ et que les rôles sont échangés si $f(a_n) < 0$.