15

Exponentielle complexe, fonctions trigonométriques, nombre π

15.1 Rappels sur la fonction exponentielle réelle

Si on suppose connue la fonction logarithme ln définie sur $]0,+\infty[$ comme la primitive nulle en 1 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, on vérifie alors que cette fonction ln vérifie l'équation fonctionnelle $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pour tous réels strictement positifs x, y, que c'est un homéomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque est appelée fonction exponentielle réelle. On note $x \mapsto \exp(x)$ ou $x \mapsto e^x$ cette fonction réciproque. Cette fonction est indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, égale à sa dérivée et vérifie l'équation fonctionnelle $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous réels x, y.

Rappelons comment se montrent ces résultats.

1. On a $\ln(1) = 0$ et, pour tout $y > 0$ fixé, la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(xy)$ est égale à $\dfrac{y}{xy} = \dfrac{1}{x} = \ln'(x)$, ce qui donne $\ln(xy) = \ln(x) + C_y$, la constante C_y étant égale à $\ln(y) - \ln(1) = \ln(y)$, ce qui donne bien $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(x)$.
2. La fonction ln étant dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, elle est strictement croissante sur cet intervalle. Avec $\ln(2) > \ln(1) = 0$, $\ln(2^n) = n\ln(2)$ on déduit que cette fonction n'est pas bornée et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. Enfin avec $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, on déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$. La fonction ln est donc continue strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, c'est donc un homéomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On peut alors définir sa fonction réciproque exp par :
$$(x \in \mathbb{R} \text{ et } y = \exp(x)) \Leftrightarrow \left(y \in \mathbb{R}^{+,*} \text{ et } x = \ln(y)\right).$$
Cette fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \frac{1}{\ln'(y)} = y = \exp(x)$$
Il en résulte que exp est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tous réels x, y, on a :
$$\ln(\exp(x+y)) = x + y = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = \ln(\exp(x)\exp(y))$$
et donc $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Réciproquement, on peut montrer que si f est une fonction dérivable [resp. monotone] de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ telle que $f'(x) = f(x)$ pour tout réel x [resp. $f(x+y) = f(x) f(y)$ pour tous réels x, y], il existe alors un réel α tel que $f(x) = \alpha e^x$ [resp. $f(x) = e^{\alpha x}$] pour tout $x \in \mathbb{R}$, la constante α étant définie par $\alpha = f(0)$ [resp. $\alpha = \ln(f(1))$].

Rappelons comment se montrent ces résultats.

1. Pour f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$, la fonction g définie par $g(x) = f(x) e^{-x}$ est également dérivable avec $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$. Si $f' = f$, on a alors $g' = 0$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \alpha$, soit $f(x) = \alpha e^x$ avec $\alpha = g(0) = f(0)$.
2. Supposons que f soit monotone telle que $f(x+y) = f(x) f(y)$ pour tous réels x, y. La fonction $g = \ln \circ f$ vérifie alors l'équation fonctionnelle de Cauchy $g(x+y) = g(x) + g(y)$ et il est alors facile de vérifier que $g(x) = \alpha x$ pour tout réel x, ce qui entraîne $f(x) = e^{\alpha x}$ avec $\alpha = g(1) = \ln(f(1))$.

L'utilisation de la formule de Taylor-Lagrange permet de montrer que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Cette formule s'écrit pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

avec $R_n(x) = \dfrac{e^{\theta_{n,x} x}}{(n+1)!} x^{n+1}$ où $\theta_{n,x} x \in]0,1[$. Pour tout réel x, on a :

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

ce qui entraîne :

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

15.2 La fonction exponentielle complexe

Sans connaissance préalable de la fonction exponentielle réelle, la définition de la fonction exponentielle complexe est basée sur le résultat suivant.

Lemme 15.1 *Pour tout réel $x \geq 0$ la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente.*

Démonstration. Pour $x = 0$ c'est clair et pour $x > 0$, en notant $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$, on a $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. On déduit alors du théorème de d'Alembert que la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente. ■

Théorème 15.1 *Pour tout nombre complexe z la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente.*

Démonstration. Le lemme précédent nous dit que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et donc convergente pour tout nombre complexe z. ■

On note $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ la somme de cette série pour tout nombre complexe z.

Le rayon de convergence de cette série étant infini, la fonction f ainsi définie est continue sur $\mathbb{C}$.

On rappelle que le produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes est absolument convergent et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

où $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Théorème 15.2 *Pour tous nombres complexes λ et μ on a $f(\lambda) f(\mu) = f(\lambda + \mu)$.*

Démonstration. Les séries $\sum \frac{\lambda^n}{n!}$ et $\sum \frac{\mu^n}{n!}$ étant absolument convergentes on a :

$$f(\lambda) f(\mu) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

où :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k \mu^{n-k} = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

ce qui donne $f(\lambda) f(\mu) = f(\lambda + \mu)$. ■

Si maintenant on se souvient de la fonction exponentielle réelle, on a le résultat suivant.

Théorème 15.3 *La restriction de f à $\mathbb{R}$ coïncide avec la fonction exponentielle réelle.*

Démonstration. La restriction de f à $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$, on a $f(x) = e^{\alpha x}$ pour tout réel x où $\alpha = \ln(f(1))$. Comme $f(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, on a $\alpha = \ln(e) = 1$ et $f(x) = e^x$.

On peut aussi dire que cette restriction est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$ (la somme d'une série entière réelle est dérivable sur son domaine réel de convergence et la dérivée s'obtient en dérivant terme à terme), donc $f(x) = \alpha e^x$ avec $\alpha = f(0) = 1$ ■

Les résultats précédents nous conduisent à noter, pour tout nombre complexe z, e^z ou $\exp(z)$ la somme de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$, ce qui définit ainsi la fonction exponentielle complexe.

Remarque 15.1 *Avec l'égalité $1 = e^0 = e^{z-z} = e^z e^{-z}$, on déduit que $e^z \neq 0$ pour tout nombre complexe z et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.*

Remarque 15.2 *La continuité de la fonction exponentielle et relation fonctionnelle $e^{\lambda+\mu} = e^\lambda e^\mu$ pour tous nombres complexes λ, μ se traduisent en disant que la fonction exponentielle est un morphisme de groupes continu de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Nous verrons plus loin que ce morphisme est surjectif de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$ une fois défini le nombre π.*

En fait, on peut retrouver les propriétés de la fonction exponentielle réelle avec cette définition de l'exponentielle complexe.

1. Avec $e^x \neq 0$ et $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$, on déduit que $e^x > 0$ pour tout réel x.
2. Avec $(e^x)' = e^x > 0$ pour tout réel x, on déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Avec $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x$ pour $x > 0$, on déduit que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et avec $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, on déduit que $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.
4. La fonction exponentielle est donc continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ et en conséquence, c'est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. La fonction réciproque est notée ln et on l'appelle fonction logarithme népérien. On a l'équation fonctionnelle :

$$\ln(xy) = \ln(e^u e^v) = \ln\left(e^{u+v}\right) = u + v = \ln(x) + \ln(y)$$

valable pour tous réels $x = e^u > 0$ et $y = e^v > 0$ (les réels u et v sont uniquement déterminés) et en particulier $\ln(1) = 0$. Cette fonction ln est dérivable de dérivée donnée par :

$$\ln'(x) = \frac{1}{(e^u)'} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{x}.$$

Avec $\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ pour $x \in]-1, 1[$, on déduit que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

pour $x \in]-1, 1[$ (intégration des développements en série entière), le rayon de convergence de cette série entière étant égal à 1.

Théorème 15.4

1. *Pour tout nombre complexe z, on a $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.*
2. *Pour tout nombre réel t, on a $|e^{it}| = 1$.*

Démonstration. Le premier point se déduit de la continuité de la fonction $z \mapsto \overline{z}$ sur $\mathbb{C}$ (qui résulte de $|\overline{z_1} - \overline{z_2}| = |z_1 - z_2|$) :

$$\left(e^z = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)\right) \Rightarrow \left(\overline{e^z} = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!}\right) = e^{\overline{z}}\right)$$

Pour tout nombre complexe z on a alors :

$$|e^z|^2 = e^z \overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\Re(z)}$$

et en particulier, pour tout réel t :

$$\left|e^{it}\right|^2 = e^0 = 1.$$

■

15.3 Les fonctions ch, sh, cos et sin

On définit les fonctions cosinus et sinus réels par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(t) = \Re\left(e^{it}\right) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ et } \sin(t) = \Im\left(e^{it}\right) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

L'égalité $|e^{it}| = 1$ se traduit alors par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

et ces fonctions sont donc à valeurs dans $[-1, 1]$.

De la définition de l'exponentielle complexe et de la continuité des fonction partie réelle et partie imaginaire, on déduit que ces fonctions sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\cos(t) = \Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re\left(\frac{i^n t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}$$

et :

$$\sin(t) = \Im\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Im\left(\frac{i^n t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

On déduit également que ces fonctions sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cos'(t) = \Re\left(ie^{it}\right) = -\sin(t) \text{ et } \sin'(t) = \Im\left(ie^{it}\right) = \cos(t).$$

En fait, on définit plus généralement les fonctions cos, sin, ch et sh sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \begin{cases} \operatorname{ch}(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)!} z^{2n} \\ \operatorname{sh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ \cos(z) = \operatorname{ch}(iz) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\ \sin(z) = -i \operatorname{sh}(iz) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \begin{cases} \operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = 1 \\ \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \end{cases}$$

Les fonctions $\cos, \operatorname{ch}$ sont paires et les fonctions $\sin, \operatorname{sh}$ sont impaires.

En se limitant à l'ensemble des réels, les fonctions ch et sh sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x) \text{ et } \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x).$$

De la définition $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, on déduit que $\operatorname{ch}(x) > 0$ et avec $\operatorname{ch}^2(x) = \operatorname{sh}^2(x) + 1$, que $\operatorname{ch}(x) \geq 1$ pour tout réel x, la valeur 1 étant atteinte pour $x = 0$. Il en résulte que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\operatorname{sh}(x) > \operatorname{sh}(0) = 0$ pour $x > 0$ et ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Enfin avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$ et l'argument de parité, on peut tracer les graphes de ces fonctions (figure 15.1).

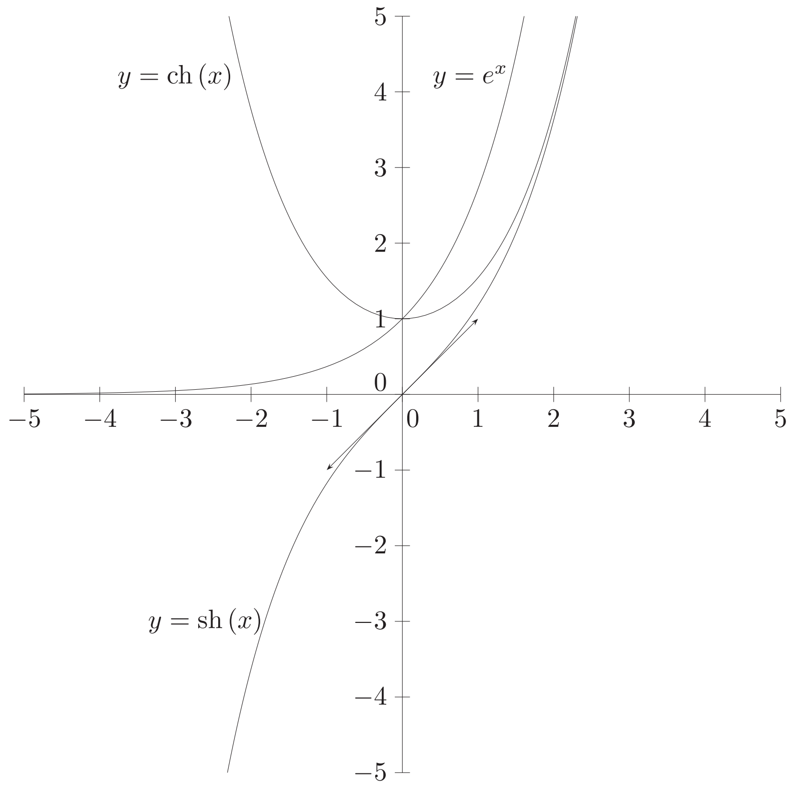

FIG. 15.1 – fonctions e^x, $\mathrm{ch}\,(x)$ et $\mathrm{sh}\,(x)$

On vérifie facilement que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left\{ \begin{array}{l} e^z = \mathrm{ch}\,(z) + \mathrm{sh}\,(z) \\ e^{-z} = \mathrm{ch}\,(z) - \mathrm{sh}\,(z) \\ e^{iz} = \cos\,(z) + i\sin\,(z) \\ e^{-iz} = \cos\,(z) - i\sin\,(z) \end{array} \right.$$

De l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction exponentielle, on déduit les relations suivantes valables pour tous nombres complexes a, b :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{sh}\,(a)\,\mathrm{sh}\,(b) \\ \cos\,(a+b) = \cos\,(a)\cos\,(b) - \sin\,(a)\sin\,(b) \\ \mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{sh}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{ch}\,(a)\,\mathrm{sh}\,(b) \\ \sin\,(a+b) = \sin\,(a)\cos\,(b) + \cos\,(a)\sin\,(b) \end{array} \right.$$

et de ces formules on déduit les classiques formules de trigonométrie circulaire et hyperbolique.

La démonstration de la première formule peut se faire comme suit.

Pour a, b dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{ch}\,(a+b) &= e^{a+b} + e^{-a-b} = e^a e^b + e^{-a} e^{-b} \\ &= (\mathrm{ch}\,(a) + \mathrm{sh}\,(a))\,(\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{sh}\,(b)) + (\mathrm{ch}\,(a) - \mathrm{sh}\,(a))\,(\mathrm{ch}\,(b) - \mathrm{sh}\,(b)) \\ &= 2\,(\mathrm{ch}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{sh}\,(a)\,\mathrm{sh}\,(b)) \end{aligned}$$

La deuxième s'en suit :

$$\begin{aligned} \cos\,(a+b) &= \mathrm{ch}\,(ia+ib) = \mathrm{ch}\,(ia)\,\mathrm{ch}\,(ib) + \mathrm{sh}\,(ia)\,\mathrm{sh}\,(ib) \\ &= \cos\,(a)\cos\,(b) - \sin\,(a)\sin\,(b) \end{aligned}$$

Les deux dernières formules se montrent de manière analogue.

Avec les arguments de parité, on déduit alors les formules suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \end{cases}$$

Prenant $a = b$, on a :

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2(a) + \operatorname{sh}^2(a) = 1 + 2\operatorname{sh}^2(a) = 2\operatorname{ch}^2(a) - 1 \\ \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\ \operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) \\ \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b) \end{cases}$$

Si les fonctions cos et sin restreintes à $\mathbb{R}$ bornées, il n'en n'est pas de même pour ces fonctions définies sur $\mathbb{C}$. Précisément pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy) \\ &= \cos(x)\operatorname{ch}(y) + i\sin(x)\operatorname{sh}(y) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} |\cos(z)|^2 &= \cos^2(x)\operatorname{ch}^2(y) + \sin^2(x)\operatorname{sh}^2(y) \\ &= \cos^2(x)\operatorname{ch}^2(y) + \left(1 - \cos^2(x)\right)\operatorname{sh}^2(y) \\ &= \cos^2(x)\left(\operatorname{ch}^2(y) - \operatorname{sh}^2(y)\right) + \operatorname{sh}^2(y) \\ &= \cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y) \geq \operatorname{sh}^2(y) \end{aligned}$$

la fonction sh étant non majorée sur $\mathbb{R}$.

15.4 Le nombre π

On désigne par Γ l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1. C'est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

De l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction exponentielle, on déduit le résultat suivant.

Théorème 15.5 *L'application $\varphi : t \mapsto e^{it}$ réalise un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\Gamma, \cdot)$.*

Nous allons voir que ce morphisme φ est surjectif et que son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$, comme c'est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, il est dense ou discret. Nous allons voir qu'il est discret, c'est-à-dire de la forme $\mathbb{Z}\alpha$, où α est un réel strictement positif.

Lemme 15.2 *On a* $\cos(2) < 0$.

Démonstration. $\cos(2)$ est la somme de la série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n}$, donc en notant S_n la somme partielle d'indice n de cette série, on a pour tout entier $n \geq 0$:

$$S_{2n+1} \leq \cos(2) \leq S_{2n}$$

et en particulier :

$$\cos(2) \leq S_4 = 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3} < 0$$

■

Lemme 15.3 *L'ensemble* $E = \{t \in [0,2] \mid \cos(t) = 0\}$ *est non vide et admet une borne inférieure* $\alpha \in]0,2[\cap E$.

Démonstration. Comme E est contenu dans $[0,2]$, il est borné. Il reste à montrer qu'il est non vide.

Comme la fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$ avec $\cos(0) = 1 > 0$ et $\cos(2) < 0$ le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe un réel $t \in]0,2[$ tel que $\cos(t) = 0$.

L'ensemble E étant non vide et minoré admet une borne inférieure α et cette borne inférieure est dans E puisque cet ensemble est fermé ($E = [0,2] \cap \cos^{-1}\{0\}$ avec cos continue). On a donc $\cos(\alpha) = 0$ et $\alpha \in]0,2[$ puisque $\cos(0) \neq 0$ et $\cos(2) \neq 0$ (on peut aussi dire, par définition de la borne inférieure, qu'il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E qui converge vers α, donc $\cos(\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(t_n) = 0$ et $\alpha \in E$). ■

On définit le nombre π par $\pi = 2\alpha$.

$\dfrac{\pi}{2}$ est donc le plus petit réel positif qui vérifie $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Lemme 15.4 *On a* $\cos(t) > 0$ *pour tout* $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, *la fonction* sin *est strictement croissante de* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1,1]$, $\sin(t) > 0$ *pour tout* $t \in]0,\pi[$ *et la fonction* cos *est strictement décroissante de* $[0,\pi]$ *sur* $[-1,1]$.

Démonstration. Par définition de α, on a $\cos(t) > 0$ pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. En effet, on a $\cos(t) \neq 0$ pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par définition de $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ comme borne inférieure de E. La fonction continue cos est donc de signe constant sur cet intervalle et avec $\cos(0) = 1 > 0$, on déduit que $\cos(t) > 0$ pour $t > 0$ voisin de 0 et $\cos(t) > 0$ pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Comme la fonction cos est paire avec $\cos(0) = 1 > 0$, on déduit que $\cos(t) > 0$ pour tout $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Comme $\sin'(t) = \cos(t) > 0$ pour tout $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, la fonction sin est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Avec $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, on déduit que $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pm 1$ et avec $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > \sin(0) = 0$, que $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. La fonction sin étant impaire, on a $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ et l'image de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par sin est bien $[-1,1]$.

Pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(t) > \sin(0) = 0$ et pour $t = \dfrac{\pi}{2} + t' \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\sin(t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\cos(t') + \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\sin(t') = \cos(t') > 0$.

Comme $\cos'(t) = -\sin(t) < 0$ pour tout $t \in]0,\pi[$, la fonction cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

Avec $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = \cos\left(2\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, on déduit que l'image de $[0,\pi]$ par cos est bien $[-1,1]$. ■

Remarque 15.3 *La fonction* cos *[resp.* sin*] est continue strictement décroissante [resp. croissante] de* $[0,\pi]$ *[resp.* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$*] sur* $[-1,1]$, *elle réalise donc un homéomorphisme de* $[0,\pi]$ *[resp.* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$*] sur* $[-1,1]$. *Sa fonction réciproque est notée* arccos *[resp.* arcsin*]. Comme* cos *[resp.*

sin*] est dérivable de dérivée non nulle sur* $]0,\pi[$ *[resp.* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$*] la fonction* arccos *[resp.* arcsin*] est dérivable sur* $]-1,1[$ *de dérivée* $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *[resp.* $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$*].*

Lemme 15.5 *Pour tout* $t \in]0,2\pi[$*, on a* $e^{it} \neq 1$.

Démonstration. Soient $t \in]0,2\pi[$ et $z = e^{i\frac{t}{4}} = \cos\left(\frac{t}{4}\right) + i\sin\left(\frac{t}{4}\right)$. Comme $\frac{t}{4} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\left(\frac{t}{4}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{t}{4}\right) > 0$.

En écrivant que :

$$\begin{aligned} e^{it} = \left(e^{i\frac{t}{4}}\right)^4 &= \cos^4\left(\frac{t}{4}\right) - 6\cos^2\left(\frac{t}{4}\right)\sin^2\left(\frac{t}{4}\right) + \sin^4\left(\frac{t}{4}\right) \\ &\quad +4i\cos\left(\frac{t}{4}\right)\sin\left(\frac{t}{4}\right)\left(\cos^2\left(\frac{t}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

on déduit que l'égalité $e^{it} = 1$ entraîne $\cos^2\left(\frac{t}{4}\right) = \sin^2\left(\frac{t}{4}\right)$ et avec $\cos^2\left(\frac{t}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{4}\right) = 1$, cela impose $\cos^2\left(\frac{t}{4}\right) = \sin^2\left(\frac{t}{4}\right) = \frac{1}{2}$ et :

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos^4\left(\frac{t}{4}\right) - 6\cos^2\left(\frac{t}{4}\right)\sin^2\left(\frac{t}{4}\right) + \sin^4\left(\frac{t}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{6}{4} = -1 \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. ∎

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Lemme 15.6 *On a :*

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ e^{i\pi} = -1 \text{ et } e^{2i\pi} = 1$$

et pour tout réel t :

$$\begin{cases} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(t) \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(t) \\ \cos(t+\pi) = -\cos(t) \\ \sin(t+\pi) = -\sin(t) \end{cases}$$

Les fonctions cos *et* sin *sont périodiques de plus petite période* 2π.

Démonstration. Les deux premières égalités se déduisent de (et sont même équivalentes à) :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ \cos(\pi) = -1,\ \sin(\pi) = 0$$

($\cos(\pi) = -1$ a été montré avec le lemme précédent et $\sin^2(\pi) = 1 - \cos^2(\pi) = 0$).

Il en résulte que $e^{2i\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^2 = 1$, ce qui équivaut à $\cos(2\pi) = 1$ et $\sin(2\pi) = 0$.

Les formules de trigonométries nous donnent les dernières égalité et la 2π-périodicité de cos et sin .

Si $T \in]0,2\pi[$ est une période plus petite, on a alors $\cos(T) = 1, \sin(T) = 0$, soit $e^{iT} = 1$ avec $T \in]0,2\pi[$, ce qui est impossible. ∎

Théorème 15.6 *Le noyau du morphisme de groupes* $\exp : z \mapsto e^z$, *de* $(\mathbb{C}, +)$ *dans* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, *est* $2i\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. Pour tout entier naturel k, on a $e^{2ik\pi} = \left(e^{2i\pi}\right)^k = 1$ et avec $e^{-2ik\pi} = \dfrac{1}{e^{2ik\pi}}$, on déduit que le résultat est valable pour tout entier relatif k. La fonction ψ s'annule donc sur $2i\pi\mathbb{Z}$.

Si $e^z = 1$ avec $z = x + iy$, on a $|e^z| = e^x \left|e^{iy}\right| = e^x = 1$ et $x = 0$, donc $z = iy$ et $e^{iy} = 1$. Si $y \notin 2\pi\mathbb{Z}$, il existe un entier relatif k tel que $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$ $\left(k = E\left(\dfrac{y}{2\pi}\right)\right)$ donc $y - 2k\pi \in \left]0, 2\pi\right[$ et $e^{iy} = e^{i(y-2k\pi)} \neq 1$ d'après le lemme précédent. On a donc $y \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $z = iy \in 2i\pi\mathbb{Z}$. ∎

Le théorème précédent se traduit en disant que la fonction $z \mapsto e^z$ est périodique de période $2i\pi$. Il se traduit aussi en disant que l'égalité $e^z = 1$ est réalisée si, et seulement si, il existe un entier relatif k tel que $z = 2ik\pi$.

Remarque 15.4 *L'égalité* $\left(e^{2i\pi}\right)^k = 1$ *pour* k *non entier n'est pas vraiment valable, sans quoi on montrerait que* $-1 = 1$ *comme suit :*

$$\left(1 = e^{2i\pi}\right) \Rightarrow \left(1 = 1^{\frac{1}{2}} = \left(e^{2i\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}2i\pi} = e^{i\pi} = -1\right)$$

Corollaire 15.1 *L'application* $\varphi : t \mapsto e^{it}$ *réalise un morphisme continu de groupes de* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $(\Gamma, \cdot)$ *de noyau* $\ker(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}$.

On peut aussi montrer directement qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\ker(\varphi) = \alpha\mathbb{Z}$ et définir π par $\alpha = 2\pi$ (voir [?] ou [?]).

Montrons enfin que φ est surjectif.

Théorème 15.7 *L'application* $\varphi : t \mapsto e^{it}$ *réalise un morphisme continu de groupes surjectif de* $(\mathbb{R}, +)$ *sur* $(\Gamma, \cdot)$ *de noyau* $\ker(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $z = x + iy$ dans Γ. On distingue les cas de figure suivants.

1. Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors avec $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$, on déduit que x et y sont dans $[0, 1]$. Comme la fonction cos est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $\cos(0) = 1$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, elle réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$ et il existe un unique réel $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = \cos(t)$. On a alors $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$ et $y = \sin(t)$ puisque ces deux quantités sont positives. Il en résulte que $z = e^{it}$.
2. Si $x < 0$ et $y \geq 0$, alors $-iz = y - ix$ se trouve dans le premier cas de figure, il s'écrit donc $-iz = e^{it}$ et $z = ie^{it} = e^{i\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}$.
3. Si $y < 0$ et x est réel quelconque, alors $-z$ se trouve dans le premier ou deuxième cas de figure, il s'écrit donc $-z = e^{it}$ et $z = -e^{it} = e^{i(t+\pi)}$.

∎

Le résultat précédent nous dit en fait que pour tout nombre complexe $z \in \Gamma$ il existe un unique réel $t \in \left[0, 2\pi\right[$ tel que $z = e^{it}$. En effet, il existe un réel y tel que $z = e^{iy}$ et désignant par k l'entier relatif tel que $2k\pi \leq y < 2(k+1)\pi$ $\left(k = E\left(\dfrac{y}{2\pi}\right)\right)$, on a $t = y - 2k\pi \in \left[0, 2\pi\right[$ et $e^{it} = e^{i(y-2k\pi)} = e^{iy} = z$. Si $t_1 \leq t_2$ sont deux tels réels, alors $t_2 - t_1 \in \left[0, 2\pi\right[$ est dans $\ker(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}$, donc nécessairement nul.

En notant, pour $z \in \Gamma$, t_0 le réel dans $[0, 2\pi[$ tel que $z = e^{it_0}$, on a $e^{it} = z$ avec z réel si, et seulement si, $t = t_0 + 2k\pi$ avec k entier relatif.

On peut aussi résumer cela en disant que le groupe multiplicatif Γ est isomorphe au groupe additif $\dfrac{\mathbb{R}}{\ker(\varphi)} = \dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$.

Corollaire 15.2 *L'application* exp : $z \mapsto e^z$ *réalise un morphisme de groupes surjectif de* $(\mathbb{C}, +)$ *sur* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ *de noyau* $\ker(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. On sait déjà que exp un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.

Pour tout nombre complexe non nul, on a $\dfrac{z}{|z|} \in \Gamma$ et il existe un réel y tel que $\dfrac{z}{|z|} = e^{iy}$, soit $z = |z| e^{iy}$ où $\rho = |z|$ est un réel strictement positif. Mais on a vu que l'exponentielle réelle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, il existe donc un unique réel x tel que $|z| = e^x$ et $z = e^{x+iy}$. ∎

15.5 Les fonctions complexes tan et th

Pour z dans $\mathbb{C}$, l'égalité $\cos(z) = 0$ équivaut à $e^{iz} = -e^{-iz} = e^{i(\pi - z)}$, soit à $e^{i(2z-\pi)} = 1$, ce qui revient à dire qu'il existe un entier relatif k tel que $2z = (2k+1)\pi$, ou encore $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. On a donc ainsi toutes les racines complexes de cos.

On définit alors la fonction tangente sur $\mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $\tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

De même $\mathrm{ch}(z) = 0$ équivaut à $e^z = -e^{-z} = e^{i\pi - z}$, soit à $e^{2z - i\pi} = 1$, ce qui revient à dire qu'il existe un entier relatif k tel que $2z = (2k+i)\pi$, ou encore $z = k\pi + i\dfrac{\pi}{2}$. On a donc ainsi toutes les racines complexes de ch.

On définit alors la fonction tangente hyperbolique sur $\mathbb{C} \setminus \left\{k\pi + i\dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $\mathrm{th}(z) = \dfrac{\mathrm{sh}(z)}{\mathrm{ch}(z)}$.

On peut remarque que la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{th}(x)$ est défini pour tout réel x.

On peut aussi remarquer que $\tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)} = -i\dfrac{\mathrm{sh}(iz)}{\mathrm{ch}(iz)} = -i\,\mathrm{th}(iz)$.

15.6 Les fonctions réelles arctan et argth

La fonction tan est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ de dérivée $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Cette fonction est impaire, strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (dérivée strictement positive) avec $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$. Elle définit donc un homéomorphisme de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est notée arctan, c'est la fonction arc-tangente. Elle est dérivable de dérivé $\dfrac{1}{1+x^2}$.

De même, la fonction th est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.

Cette fonction est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (dérivée strictement positive) avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}\,(x) = 1$. Elle définit donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. Sa fonction réciproque est notée argth, c'est la fonction argument-tangente. Elle est dérivable de dérivé $\dfrac{1}{1-x^2}$.

15.7 Le lien avec le nombre π des géomètres

Le cercle unité du plan affine euclidien, identifié à Γ, peut être paramétré par :

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

Théorème 15.8 *Le périmètre du cercle unité du plan euclidien vaut 2π.*

Démonstration. On rappelle que la longueur d'un arc géométrique paramétré par une application γ de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^2$ est $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle, ce qui donne pour le cercle :

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}dt = 2\pi.$$

■

15.8 Les fonctions argument principal et logarithme

On a en fait montré que tout nombre complexe non nul z s'écrit de manière unique $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ ($\rho = |z|$) et $\theta \in [0, 2\pi[$. Le réel ρ est le module de z.

Avec ces notations, on aura $z = \rho e^{it}$ si, et seulement si, $\rho e^{it} = \rho e^{i\theta}$, ce équivaut à $e^{i(t-\theta)} = 1$ ou encore à $t = \theta + 2k\pi$ avec k entier relatif. On dit alors que t est un argument de z. En se fixant k un tel argument est unique dans $[2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

En utilisant les arguments, on peut montrer que les application $t \mapsto e^{i\alpha t}$ sont les seuls morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\Gamma, \cdot)$.

Lemme 15.7 *Les seuls morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\Gamma, \cdot)$ sont les applications $x \mapsto e^{i\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Avec ce qui précède, on voit que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto e^{i\alpha x}$ est un morphisme de groupes continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\Gamma, \cdot)$.

Réciproquement si $f : \mathbb{R} \to \Gamma$ est un morphisme de groupes, il existe alors un unique réel $\alpha \in [0, 2\pi[$ tel que $f(1) = e^{i\alpha}$. Par récurrence on vérifie facilement que $f(n) = e^{in\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis avec $e^{i\alpha} = f\left(n\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)^n$ on déduit que $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{i\frac{\alpha}{n}}$ pour tout $n \geq 1$. Il en résulte que $f(r) = e^{ir\alpha}$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Si de plus f est continue, avec la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que $f(x) = e^{i\alpha x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Enfin avec $1 = f(x - x) = f(x) f(-x)$ (le neutre est transformé en neutre), on déduit que $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)} = \overline{f(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il en résulte que $f(x) = e^{i\alpha x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. ■

Connaissant tous les morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ (ce sont les $x \mapsto e^{ax}$ avec a réel), on déduit le résultat suivant.

Théorème 15.9 *Les seuls morphismes de groupes continus de* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ *sont les applications* $x \mapsto e^{\alpha x}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Si f est un morphisme de groupes continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, alors $|f|$ est un morphisme de groupes continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, il existe donc un réel a tel que $|f(x)| = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g : x \mapsto f(x) e^{-ax}$ est alors un morphisme de groupes continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\Gamma, \cdot)$, il existe donc un réel b tel que $f(x) e^{-ax} = e^{ibx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc $f(x) = e^{\alpha x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$.

La réciproque est évidente. ■

En fait un tel argument peut être uniquement déterminé dans tout intervalle de longueur 2π, $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ où θ_0 est un réel fixé. En effet en désignant par θ l'argument de $z \in \mathbb{C}^*$ dans $[0, 2\pi[$, il existe un entier k tel que $t = \theta - 2k\pi \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ (il s'agit de réaliser $\theta_0 \leq \theta - 2k\pi < \theta_0 + 2\pi$, soit $2k\pi \leq \theta - \theta_0 < 2(k+1)\pi$ ou encore $k \leq \dfrac{\theta - \theta_0}{2\pi} < k + 1$, ce qui définit $k = E\left(\dfrac{\theta - \theta_0}{2\pi}\right)$) et $z = \rho e^{i\theta} = \rho e^{it}$. Si $t \leq t'$ sont deux tels arguments, on a $0 \leq t' - t < 2\pi$ et $t' - t = 2k\pi$ avec k entier, ce qui impose $k = 0$.

Le choix de $\theta_0 = -\pi$ définit l'argument principal dans $[-\pi, \pi[$ d'un nombre complexe non nul z.

En résumé tout nombre complexe non nul s'écrit de manière unique $z = \rho e^{i\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un réel dans $[-\pi, \pi[$. On note $\theta = \arg(z)$ cet argument principal.

On aura $\arg(z) = -\pi$ si, et seulement si, z est un réel strictement négatif.

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ s'écrit donc $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$, ce qui donne :

$$\begin{cases} 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \cos(\theta) + 1 = \dfrac{x}{\rho} + 1 \\ 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sin(\theta) = \dfrac{y}{\rho} \end{cases}$$

Comme $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$ et divisant la première égalité par la seconde, on obtient :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho} + 1} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

soit :

$$\theta = \arg(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) = 2\arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z) + |z|}\right)$$

On peut donc définir la fonction argument principal par :

$$\begin{array}{rccc} \arg : & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- & \to &]-\pi, \pi[\\ & z & \mapsto & 2\arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)+|z|}\right) \end{array}$$

et cette fonction est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Cette fonction est donc définie par $\arg(z) \in]-\pi, \pi[$ et $z = |z| e^{i\arg(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Remarque 15.5 *Une telle fonction argument principal ne peut pas être prolongée en une fonction continue sur un ouvert contenant strictement* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.
En effet, supposons que cette fonction arg *se prolonge en une fonction continue* φ *sur une partie* Ω *de* $\mathbb{C}$ *contenant strictement* $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. *L'ensemble* Ω *contient alors un réel* $x < 0$ *et le*

cercle $\mathcal{C}(0,|x|)$ est tout entier contenu dans Ω (les points autres que x sont dans $\mathbb{C}-\mathbb{R}_- \subset \Omega$). Considérant les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{C}(0,|x|)\setminus\{x\}$ définies par :

$$u_n = |x|\, e^{i\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)},\ v_n = |x|\, e^{-i\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -|x| = x$ *(la fonction* exp *est continue sur* $\mathbb{C}$*) avec :*

$$\varphi(u_n) = \arg(u_n) = \pi\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \pi$$

et :

$$\varphi(v_n) = \arg(v_n) = -\pi\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} -\pi$$

(on a $u_n = |u_n|\, e^{i\arg(u_n)} = |x|\, e^{i\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)}$ *avec* $\arg(u_n)$ *et* $\pi\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ *dans* $]-\pi,\pi[$, *donc* $\arg(u_n) = \pi\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$, *de même pour* v_n*), ce qui est incompatible avec la continuité de* φ.

On est maintenant en mesure de définir une fonction logarithme complexe sur $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$. Précisément, on va définir une fonction notée ln sur $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$ telle que $e^{\ln(z)} = z$ pour tout $z\in\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$.

Supposons le résultat acquis. En notant respectivement P et Q les parties réelle et imaginaire de ln, on doit avoir $z = e^{\ln(z)} = e^{P(z)+iQ(z)}$, donc $|z| = \left|e^{P(z)+iQ(z)}\right| = e^{P(z)}$ et $P(z) = \ln(|z|)$ où ln est la fonction logarithme réel réciproque de l'exponentielle réelle. En écrivant que $z = |z|\, e^{i\arg(z)}$, on a $e^{P(z)}e^{iQ(z)} = |z|\, e^{i\arg(z)}$ avec $|z| = e^{P(z)}$, donc $e^{iQ(z)} = e^{i\arg(z)}$ et $Q(z) = \arg(z)+2k\pi$ avec $k = k(z)$ entier. Si on souhaite la fonction ln continue sur $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$, il doit en être de même des fonctions $Q = \Im(\ln)$ et $k = \dfrac{Q-\arg}{2\pi}$. En définitive, k est une fonction continue à valeurs entières sur le connexe $\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$, elle est nécessairement constante.

On définit donc, au vu de cette analyse la détermination principale du logarithme par :

$$\begin{array}{rccl} \ln : & \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^- & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \ln(|z|) + i\arg(z) = \ln(|z|) + 2i\arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)+|z|}\right) \end{array}$$

et cette fonction est continue sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ avec :

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-,\ e^{\ln(z)} = z.$$

Par exemple, on a $\ln(i) = i\dfrac{\pi}{2}$.

15.9 Mesure des angles

On note $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

Théorème 15.10 *Si θ est un argument de $z\in\mathbb{C}^*$ affixe d'un vecteur non nul $\overrightarrow{v}$, c'est alors une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{v}})$.*

Démonstration. Par définition d'une mesure θ' de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v}})$, il existe un unique automorphisme orthogonal direct u tel que $u(\overrightarrow{e_1}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$. Dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la matrice de u est $\begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix}$ et si $z = x + iy$ est l'affixe de $\overrightarrow{v}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = \|\overrightarrow{v}\| u(\overrightarrow{e_1}) \\ &= |z| (a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}) = |z| (\cos(\theta')\overrightarrow{e_1} + \sin(\theta')\overrightarrow{e_2}) \end{aligned}$$

ce qui entraîne $x = |z|\cos(\theta')\,,\ y = |z|\sin(\theta')$ et $\theta' \equiv \theta\ (2\pi)\,.$ ■

Remarque 15.6 *Le choix d'une orientation de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ nous permet de définir sans ambiguïté la mesure principale dans $[-\pi, \pi[$ d'un angle de vecteurs. Ce choix d'une orientation correspond au choix d'une racine carrée i de -1 dans $\mathbb{C}$.*

Plus généralement on a le résultat suivant.

Théorème 15.11 *Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2 alors un argument de $\frac{z_2}{z_1}$ est une mesure de l'angle orienté $\theta = (\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}})$ et on a :*

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}}{\|\overrightarrow{v_1}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})}{\|\overrightarrow{v_1}\|\,\|\overrightarrow{v_2}\|} \end{cases}$$

Démonstration. On a $\frac{1}{\|\overrightarrow{v_2}\|}\overrightarrow{v_2} = u\left(\frac{1}{\|\overrightarrow{v_1}\|}\overrightarrow{v_1}\right)$ où l'automorphisme orthogonal direct u a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, ce qui donne :

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{\|\overrightarrow{v_2}\|}{\|\overrightarrow{v_2}\|}(\cos(\theta)\,x_1 - \sin(\theta)\,y_1) \\ \quad = \dfrac{|z_2|}{|z_1|}(\cos(\theta)\,x_1 - \sin(\theta)\,y_1) \\ y_2 = \dfrac{\|\overrightarrow{v_2}\|}{\|\overrightarrow{v_2}\|}(\sin(\theta)\,x_1 + \cos(\theta)\,y_1) \\ \quad = \dfrac{|z_2|}{|z_1|}(\sin(\theta)\,x_1 + \cos(\theta)\,y_1) \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned} z_2 &= x_2 + iy_2 \\ &= \frac{|z_2|}{|z_1|}((\cos(\theta)\,x_1 - \sin(\theta)\,y_1) + i(\sin(\theta)\,x_1 + \cos(\theta)\,y_2)) \\ &= \frac{|z_2|}{|z_1|}(x_1 + iy_1)(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ &= \frac{|z_2|}{|z_1|}z_1(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \end{aligned}$$

soit :

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|} \left(\cos(\theta) + i \sin(\theta)\right),$$

ce qui signifie que θ est un argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$.

On rappelle que :

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \Re\left(\overline{z_1} z_2\right) = |z_1|^2 \Re\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

et :

$$\det\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right) = \Im\left(\overline{z_1} z_2\right) = |z_1|^2 \Im\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

avec $\Re\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| \cos(\theta)$ et $\Im\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| \sin(\theta)$, ce qui donne compte tenu de $|z_1| = \|\overrightarrow{v_1}\|$ et $|z_2| = \|\overrightarrow{v_2}\|$:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = \|\overrightarrow{v_1}\| \, \|\overrightarrow{v_2}\| \cos(\theta) \text{ et } \det\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right) = \|\overrightarrow{v_1}\| \, \|\overrightarrow{v_2}\| \sin(\theta)$$

■

On déduit de ce théorème que $(\lambda\overrightarrow{v_2}, \lambda\overrightarrow{v_1}) \equiv (\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1})$ modulo 2π pour tout réel non nul et en particulier $(-\overrightarrow{v_2}, -\overrightarrow{v_1}) \equiv (\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1})$ modulo 2π.

Corollaire 15.3 *Si les points A, B, C sont deux à deux distincts alors un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$ est une mesure de l'angle orienté $\theta_A = \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}$ et on a :*

$$\begin{cases} \cos(\theta_A) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} \\ \sin(\theta_A) = \dfrac{\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{AB \cdot AC} \end{cases}$$

En particulier, on a $\arg(b-a) = \widehat{\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right)}$ (modulo 2π).

15.10 Une définition de l'exponentielle complexe à partir de la suite de fonctions $\left(\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$

On se place tout d'abord dans le cas réel.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \geq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Pour $x = 0$, cette suite est stationnaire sur 1.

Lemme 15.8 *Pour tout réel x, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x)\, u_n(-x) = 1.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$1 - u_n(x)\, u_n(-x) = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = \frac{x^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^k.$$

Pour tout $n > |x|$, on a $0 < 1 - \dfrac{x^2}{n^2} \leq 1$ et :

$$|1 - u_n(x)\, u_n(-x)| \leq \frac{x^2}{n^2} n = \frac{x^2}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

■

En notant E la fonction partie entière, on associe à tout réel x l'entier n_x défini par :

$$n_x = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \geq 0, \\ E(|x|) + 1 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

et on a $u_n(x) > 0$ pour tout $n \geq n_x$.

Nous allons montrer dans ce qui suit que pour tout réel x, la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers un réel $f(x) > 0$. En utilisant le lemme précédent on voit qu'il suffit de montrer ce résultat pour $x > 0$ ou pour $x < 0$.

Lemme 15.9 *Pour tout entier $n_0 \geq 1$ et tout entier $n \geq n_0$, la fonction $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $]-n_0, 0]$.*

Démonstration. On se fixe un entier $n_0 \geq 1$.

Pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in]-n_0, 0]$, on a $n \geq n_0 > -x$ et $u_n(x) > 0$, cette inégalité étant également vérifiée pour $x > 0$ et $n \geq 1$.

Pour $n \geq n_0$ la restriction de la fonction u_n à $]-n_0, +\infty[$ est dérivable à valeurs strictement positives avec $\dfrac{u_n'(x)}{u_n(x)} = \dfrac{n}{n+x}$ et :

$$\forall x \in]-n_0, +\infty[\,, \ \frac{u_{n+1}'(x)}{u_{n+1}(x)} - \frac{u_n'(x)}{u_n(x)} = \frac{x}{(n+x)(n+1+x)}.$$

En utilisant $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)' = \dfrac{u_{n+1}' u_n - u_{n+1} u_n'}{u_n^2}$, on en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x > 0, \ \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)'(x) > 0, \\ \forall x \in]-n_0, 0[\,, \ \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)'(x) < 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que pour $n \geq n_0$, la fonction $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $]-n_0, 0]$. ■

Lemme 15.10 *Pour tout réel x la suite $(u_n(x))_{n\geq n_x}$ est à valeurs strictement positives et pour tout entier $n_0 \geq 1$, tout réel non nul x dans $]-n_0, +\infty[$, la suite $(u_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.*

Démonstration. Par définition de n_x, on a $u_n(x) > 0$ pour tout réel x et tout entier $n \geq n_x$.
Pour x non nul dans $]-n_0, +\infty[$ le lemme précédent nous dit que :

$$\forall n \geq n_0, \ \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} > \frac{u_{n+1}(0)}{u_n(0)} = 1,$$

c'est-à-dire que la suite $(u_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante. ∎

Théorème 15.12 *Pour tout réel x, la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers un réel $f(x)$.*
De plus on a $f(0) = 1$, $f(x) > 0$ et $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ pour tout réel x.

Démonstration. Pour $x = 0$ on a $u_n(0) = 1$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(0) = 1 = f(0)$.

Pour $x < 0$, on a $0 < 1 + \dfrac{x}{n} < 1$ et $0 < u_n(x) < 1$ pour tout $n \geq n_x$, c'est-à-dire que la suite $(u_n(x))_{n\geq n_x}$ est bornée et comme par ailleurs elle est croissante à partir d'un certain rang n_0, on en déduit qu'elle est convergente. On note $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)$. De la stricte croissance de $(u_n(x))_{n\geq n_0}$, on déduit que $f(x) > u_{n_0}(x) > 0$.

Enfin pour $x > 0$, on a :

$$u_n(x) = \frac{u_n(x)\, u_n(-x)}{u_n(-x)} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{f(-x)}$$

(lemme 15.8), soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$. ∎

Remarque 15.7 *Avec :*

$$f(x) = \frac{1}{f(-x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n(-x)},$$

on déduit que $f(x)$ est aussi limite de la suite $(v_n(x))_{n\geq n_{-x}}$ définie par :

$$\forall n \geq n_{-x}, \ v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Pour x non nul, il existe un entier n_0 tel que $(u_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante, $(v_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante et en conséquence :

$$\forall n \geq n_0, \ u_n(x) < f(x) < v_n(x).$$

Lemme 15.11 *Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :*

$$1 + x \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x}.$$

Démonstration. Pour $n_0 = 1$ et $x \in]-1, +\infty[$ on a vu précédemment que la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ est strictement croissante et donc $u_1(x) = 1 + x \leq f(x)$.

Pour $x \in]-1, 1[$, $-x$ est aussi dans $]-1, 1[$ et on a $u_1(-x) = 1 - x \leq f(-x)$, ce qui donne $f(x) = \dfrac{1}{f(-x)} \leq \dfrac{1}{1-x}$. ∎

Lemme 15.12 *La fonction f est continue en* 0.

Démonstration. Du lemme précédent on déduit immédiatement que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, ce qui signifie que f est continue en 0. ■

Lemme 15.13 *Pour tout suite réelle* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente vers un réel* x, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = f(x)$.

Démonstration. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(x_n) = \frac{u_n(x_n)\, u_n(-x)}{u_n(-x)}$$

avec :

$$u_n(x_n)\, u_n(-x) = \left(\left(1+\frac{x_n}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n = u_n(\varepsilon_n)$$

où :

$$\varepsilon_n = x_n - x - \frac{x x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Pour n assez grand, on a $\varepsilon_n \in]-1,+\infty[$ de sorte que la suite $(u_m(\varepsilon_n))_{m\geq 1}$ est croissante et donc :

$$u_1(\varepsilon_n) = 1+\varepsilon_n \leq u_n(\varepsilon_n) \leq f(\varepsilon_n)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_1(\varepsilon_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\varepsilon_n) = 1$ (continuité de f en 0), ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = 1$.

On a donc en définitive $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n)\, u_n(-x) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$. ■

Théorème 15.13 *Pour tous* x, y *dans* $\mathbb{R}$ *on a* $f(x+y) = f(x)\, f(y)$.

Démonstration. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on a :

$$u_n(x)\, u_n(y) = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = u_n(z_n)$$

avec $z_n = x+y+\dfrac{xy}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} x+y$. On déduit alors du lemme précédent que :

$$f(x)\, f(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)\, u_n(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(z_n) = f(x+y).$$

■

Corollaire 15.4 *La fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ on a :

$$f(y) - f(x) = f(x+y-x) - f(x) = f(x)\,(f(y-x)-1) \underset{y\to x}{\to} 0$$

en utilisant la continuité en 0 de f. ■

En utilisant le lemme de Dini, on peut montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle compact $[a, b]$.

Théorème 15.14 *Si* $I = [a, b]$ *est un intervalle réel compact, alors la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément vers* f *sur* I.

Démonstration. On peut trouver un entier n_0 tel que $I = [a, b] \subset]-n_0, +\infty[$ et pour tout x dans I la suite $(u_n(x))_{n \geq n_0}$ est croissante. En se restreignant à I, on a donc une suite croissante $(u_n)_{n \geq n_0}$ de fonctions continues sur I qui converge simplement sur I vers une fonction continue f, le théorème de Dini nous dit alors que la convergence est uniforme sur I. ■

Théorème 15.15 *La fonction f est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.*

Démonstration. Avec le lemme 15.11 on a pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$1 \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{1 - x}$$

et donc $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$, ce qui signifie que f est dérivable en 0 de dérivée égale à 1. Puis avec :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \frac{f(h) - 1}{h}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$, on déduit que $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)$, ce qui signifie que f est dérivable en x avec $f'(x) = f(x)$. Comme $f(0) = 1$, la fonction f est bien solution du problème de Cauchy.

Si y est une autre solution, la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = y(x) f(-x)$ est telle que $z' = 0$ avec $z(0) = 0$, c'est donc la fonction nulle et nécessairement $y(x) = \frac{1}{f(-x)} = f(x)$ pour tout réel x. ■

De ce résultat on déduit que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)} = f$ pour tout entier naturel n.

De l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction f, on déduit facilement par récurrence que, pour tout réel non nul a, on a $f(n \cdot a) = (f(a))^n$ pour tout entier naturel n, puis avec $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, on déduit que cette relation est valable pour tout entier relatif n. Si $r = \frac{p}{q}$ est un entier relatif, on a alors $f(r) = f\left(p\frac{1}{q}\right) = \left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p$ et avec $f(1) = f\left(q\frac{1}{q}\right) = \left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q$, on déduit que $f\left(\frac{1}{q}\right) = (f(1))^{\frac{1}{q}}$ et $f(r) = (f(1))^{\frac{p}{q}} = (f(1))^r$.

En notant $e = f(1)$, on a donc $f(r) = e^r$ pour tout rationnel r, ce qui nous conduit à noter $f(x) = e^x$ pour tout réel x et la fonction ainsi définie est appelée fonction exponentielle réelle. On la note aussi $f(x) = \exp(x)$.

La définition précédente de la fonction exponentielle peut être étendue à $\mathbb{C}$ (ou de manière plus générale aux algèbres de Banach).

Pour tout z dans $\mathbb{C}$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $u_n(z) = \left(1 + \frac{1}{n}z\right)^n$.

Pour $z \in E$ et $m > n$, on a :

$$\begin{aligned}
|u_m(z) - u_n(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(C_m^k \frac{1}{m^k} - C_n^k \frac{1}{n^k} \right) z^k - \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k} z^k \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left| C_m^k \frac{1}{m^k} - C_n^k \frac{1}{n^k} \right| |z|^k + \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k} |z|^k
\end{aligned}$$

Pour k compris entre 2 et n, on a :

$$\begin{aligned}C_m^k \frac{1}{m^k} &= \frac{m(m-1)\dots(m-(k-1))}{k!m^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\\ &\geq \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = C_n^k\frac{1}{n^k},\end{aligned}$$

et pour $k=0$ ou 1, ces deux quantités valent 1. On a donc :

$$\begin{aligned}|u_m(z)-u_n(z)| &\leq \sum_{k=0}^{n}\left(C_m^k\frac{1}{m^k}-C_n^k\frac{1}{n^k}\right)|z|^k+\sum_{k=n+1}^{m}C_m^k\frac{1}{m^k}|z|^k\\ &\leq u_m(|z|)-u_n(|z|)\end{aligned}$$

et il en résulte que la suite $(u_n(z))_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, elle est donc convergente. On note e^z sa limite dans $\mathbb{C}$.

Faisant tendre m vers l'infini dans l'inégalité précédente, on a :

$$\forall n\geq 1,\ |e^z-u_n(z)|\leq e^{|z|}-u_n(|z|)$$

et on en déduit que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{C}$ qui converge vers z, on en déduit que la suite $(u_n(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^z.

En écrivant que :

$$u_n(z)\,u_n(-z)=\left(1-\frac{1}{n^2}z^2\right)^n=u_n\left(-\frac{1}{n}z^2\right)$$

on en déduit par passage à la limite que $e^ze^{-z}=1$, c'est-à-dire que pour tout $z\in\mathbb{C}$, e^z est inversible d'inverse e^{-z}.

Pour z,z' dans $\mathbb{C}$, on a :

$$u_n(z)\,u_n(z')=\left(\left(1+\frac{1}{n}z\right)\left(1+\frac{1}{n}z'\right)\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}z_n\right)^n=u_n(z_n)$$

avec $z_n=z+z'+\frac{1}{n}zz' \underset{n\to+\infty}{\to} z+z'$. Il en résulte que :

$$e^ze^{z'}=\lim_{n\to+\infty}u_n(z)\,u_n(z')=\lim_{n\to+\infty}u_n(z_n)=e^{z+z'}.$$

Il reste à faire le lien avec la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Si y est solution de $y'=y$ avec la condition initiale $y(0)=1$, elle est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $y^{(n)}(0)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Pour tout réel non nul x, la formule de Taylor à l'ordre n nous donne alors :

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\theta x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}y(\theta x)$$

avec $\theta\in\,]0,1[$. Avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$, on en déduit alors que $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$, c'est-à-dire que y est limite de la suite de fonctions $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ w_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

Le lien entre cette suite et la suite $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ peut être précisé comme suit.

Lemme 15.14 *Pour tous $x > 0$ et n, p dans $\mathbb{N}^*$ on a :*

$$u_n(x) \leq w_n(x) \leq u_{n+p}(x).$$

Démonstration. Avec $C_n^k = 0$ et $\dfrac{C_n^k}{n^k} = \dfrac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\dfrac{j}{n}\right) \leq \dfrac{1}{k!}$ pour $1 \leq k \leq n$, on déduit que $u_n(x) \leq w_n(x)$ et avec $C_{n+p}^0 = 1$, $C_{n+p}^k = \dfrac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n+p-j) > \dfrac{1}{k!}$ pour $1 \leq k \leq n$, on déduit que $w_n(x) \leq u_{n+p}(x)$. ■

En particulier, pour $p = n^2$, on a :

$$u_{n+n^2}(x) < \left(1+\frac{x}{n^2}\right)^{n^2}\left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n = u_{n^2}(x)\, u_n\left(\frac{x}{n}\right)$$

et de $u_n(x) \leq w_n(x) \leq u_{n^2}(x)\, u_n\left(\dfrac{x}{n}\right)$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n(x) = e^x$ (on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\left(\dfrac{x}{n}\right) = e^0 = 1$), c'est-à-dire que $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ pour tout réel $x > 0$, ce résultat étant encore vrai pour $x = 0$.

Si on se place maintenant sur $\mathbb{C}$, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}|w_n(z) - u_n(z)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right)z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right)|z|^k \\ &\leq w_n(|z|) - u_n(|z|) \underset{n\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

et donc $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ (ce qui montre au passage, en prenant $E = \mathbb{R}$, que ce résultat est vrai pour les réel négatifs).