L3 A, intégration : M363

– I – Exercices préliminaires

Exercice 1 *Soient A, B deux parties de X. Exprimer $\mathbf{1}_{X \setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\cap B}$, $\mathbf{1}_{AUB}$, $\mathbf{1}_{B\setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\Delta B}$, en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.*
Plus généralement, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ de parties de X, exprimer $\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k}$ et $\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_k}$.

Solution. Les fonctions indicatrices (ou caractéristiques) permettent de transformer des opérations ensemblistes en opérations algébriques.
Pour tout $x \in X$, on a :

$$\mathbf{1}_{X\setminus A}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \notin A \\ 0 \text{ si } x \in A \end{cases} = 1 - \mathbf{1}_A(x)$$

$$\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A\cap B \\ 0 \text{ si } x \notin A \cap B \end{cases} = \mathbf{1}_A(x)\,\mathbf{1}_B(x)$$

donc :

$$\mathbf{1}_{X\setminus A} = 1 - \mathbf{1}_A$$

et :

$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$$

Avec :

$$X \setminus (AUB) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

on déduit que :

$$\mathbf{1}_{X\setminus(AUB)} = \mathbf{1}_{X\setminus A}\mathbf{1}_{X\setminus B}$$

soit :

$$1 - \mathbf{1}_{AUB} = (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B)$$

et :

$$\mathbf{1}_{AUB} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$$

Avec :

$$B \setminus A = (X \setminus A) \cap B$$

on déduit que :

$$\mathbf{1}_{B\setminus A} = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \max(\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A, 0)$$

Avec :

$$A\Delta B = (AUB) \setminus A \cap B$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A\Delta B} &= \mathbf{1}_{AUB}(1 - \mathbf{1}_{A\cap B}) = (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)(1 - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B \\ &= (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2 = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B| \end{aligned}$$

On vérifie facilement par récurrence sur $n \geq 1$ que :

$$\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} = \min_{1\leq k\leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

C'est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$. En supposant le résultat acquis pour $n - 1 \geq 2$, on a :

$$\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k} = \mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} A_k}\mathbf{1}_{A_n} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$$

et on vérifie facilement que pour tout $x \in X$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x) = \min_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}(x)$$

Pour ce qui est de la réunion, on vérifie facilement que :

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

En effet, soit $x \in X$. Si $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, il existe alors un indice k tel que $x \in A_k$ et on a :

$$1 = \mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}(x) = \mathbf{1}_{A_k}(x) = \max_{1 \leq j \leq n} \mathbf{1}_{A_j}(x)$$

Si $x \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, on a alors $x \notin A_k$ pour tout k compris entre 1 et n et :

$$0 = \mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}(x) = \max_{1 \leq j \leq n} \mathbf{1}_{A_j}(x)$$

On peut aussi généraliser la formule $\mathbf{1}_{AUB} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
Avec :

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)$$

on déduit que :

$$1 - \mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{1}_{A_k})$$

donc :

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{1}_{A_k})$$

On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_{n,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, l'entier k étant compris entre 0 et n, sont définies par :

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sigma_{n,k}(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \\ \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k} \text{ si } k \in \{1, \cdots, n\} \end{cases}$$

et on a :

$$\prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$$

avec :

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\},\ a_{n-k} = (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

L'évaluation en 1 nous donne :

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - \alpha_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}$$

donc :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbf{1}_{A_k}) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1}} \mathbf{1}_{A_{i_2}} \cdots \mathbf{1}_{A_{i_k}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots A_{i_k}} \end{aligned}$$

et :

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots A_{i_k}}$$

(voir la formule de Poincaré, exercice 9).

Exercice 2 *Soient $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite finie de parties d'un ensemble non vide X et A une partie de X. Montrer que :*

$$\left((A_k)_{1 \leq k \leq n} \text{ est une partition de } A \right) \Leftrightarrow \left(\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} \right)$$

Solution. Supposons que $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ soit une partition de A, c'est-à-dire que $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, les A_k étant deux à deux disjoints.

Pour tout $x \in A$, il existe un unique j compris entre 1 et n tel que $x \in A_j$, donc $\mathbf{1}_{A_k}(x) = 0$ pour $k \neq j$, $\mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$ et $1 = \mathbf{1}_A(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x)$.

Pour $x \notin A$, x n'est dans aucun des A_k et $0 = \mathbf{1}_A(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x)$.

Réciproquement supposons que $\mathbf{1}_A = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$.

Si $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, il existe un indice j compris entre 1 et n tel que $x \in A_j$, donc $\mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$ et $\mathbf{1}_A(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x) \geq 1$, ce qui impose $\mathbf{1}_{A_k}(x) = 0$ pour $k \neq j$ et $\mathbf{1}_A(x) = 1$, ce qui signifie que les A_k sont deux à deux disjoints et $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$.

Pour $x \in A$, on a $1 = \mathbf{1}_A(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x)$, donc il existe un unique j compris entre 1 et n tel que $\mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$, ce qui signifie que x est dans un unique A_k et $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, donc $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ et on a l'égalité $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, les A_k étant deux à deux disjoints.

Exercice 3 *Montrer que l'application qui associe à une partie A de X sa fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ réalise une bijection de $\mathcal{P}(X)$ sur $\{0,1\}^X$ (ensemble des applications de X dans $\{0,1\}$). Préciser son inverse.*

Solution. Notons :

$$\chi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \to & \{0,1\}^X \\ A & \mapsto & \mathbf{1}_A \end{array}$$

Si A, B dans $\mathcal{P}(X)$ sont tels que $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$, on a alors pour tout $x \in A$, $\mathbf{1}_B(x) = 1$ et $x \in B$, donc $A \subset B$. Comme A et B jouent des rôles symétriques, on en déduit que $A = B$.

L'application χ est donc injective.

Pour toute application $\gamma \in \{0,1\}^X$, en notant $A = \gamma^{-1}\{1\}$, on a $\mathbf{1}_A = \gamma$, donc χ est surjective.

En conclusion, χ est bijective d'inverse :

$$\chi^{-1} : \begin{array}{ccc} \{0,1\}^X & \to & \mathcal{P}(X) \\ \gamma & \mapsto & \gamma^{-1}\{1\} \end{array}$$

Exercice 4 *Montrer qu'il n'existe pas de bijection de X sur $\mathcal{P}(X)$ (théorème de Cantor). On en déduit en particulier que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.*

Solution. Supposons qu'il existe une bijection φ de X sur $\mathcal{P}(X)$.
Le sous-ensemble A de X défini par :

$$A = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$$

a alors un antécédent x_0 par φ et on a :

$$(x_0 \in A) \Leftrightarrow (x_0 \in \varphi(x_0)) \Leftrightarrow (x_0 \notin A)$$

ce qui n'est pas possible.
En particulier, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas équipotent à $\mathbb{N}$ et il en est de même de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ qui est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
On peut aussi vérifier, en utilisant les développements dyadiques que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $[0,1]$.

Exercice 5 *Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $\sum u_n$ une série réelle absolument convergente. Montrer que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument avec $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*
Cela justifie l'écriture $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ dans le cas d'une série absolument convergente, ce qui est le cas pour une série à termes positifs convergente, ce qui est utilisé implicitement dans la définition d'une mesure.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \left|u_{\sigma(k)}\right| \leq \sum_{j=0}^{\max\limits_{0\leq k\leq n} \sigma(k)} |u_j| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = S$$

donc la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.
Il reste à montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
On montre tout d'abord le résultat pour les séries à termes positifs.
On vient de voir que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

En appliquant le résultat précédent à la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ et à la permutation σ^{-1}, on a aussi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_{\sigma^{-1}(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(\sigma^{-1}(n))} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$$

ce qui nous donne l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Pour le cas général, on introduit les séries de terme général $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. On a $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$, $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$, $u_n = u_n^+ - u_n^{-1}$, donc les séries à termes positifs $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes si $\sum u_n$ est absolument convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Ce résultat est encore valable pour les séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie (on raisonne sur les composantes).

Exercice 6 *La longueur d'un intervalle réel I est définie par :*

$$\ell(I) = \sup(I) - \inf(I) \in [0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

1. *Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé, borné et $(I_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

2. *Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé, borné et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

3. *Soient I un intervalle et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

4. *Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles deux à deux disjoints inclus dans un intervalle I. Montrer que :*

$$\ell(I) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

Solution. Si I est un intervalle borné d'extrémités $a < b$, on a alors :

$$\ell(I) = b - a$$

En particulier, on a pour tout réel a :

$$\ell(\emptyset) = \ell(]a, a[) = 0 \text{ et } \ell([a, a]) = 0$$

Si I est non bornée, on a alors $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ et $\ell(I) = +\infty$.

1. Si l'un des intervalles I_j, pour j compris entre 1 et n, est non borné, on a alors $\ell(I_j) = +\infty$ et :

$$\ell(I) = b - a \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) = +\infty$$

On suppose donc que chaque intervalle I_k, pour k compris entre 1 et n, est borné et on note $\alpha_k \leq \beta_k$ ses extrémités.

On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, on a $I \subset I_1$, donc $\alpha_1 \leq a \leq b \leq \beta_1$ et :

$$\ell(I) = b - a \leq \beta_1 - \alpha_1 = \ell(I_1)$$

Supposons le résultat acquis pour $n - 1 \geq 1$ et soit $I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ un recouvrement fini de l'intervalle $I = [a, b]$ par des intervalles I_k bornés.
L'extrémité b de I est contenue dans l'un des I_k et, en modifiant au besoin la numérotation, on peut supposer que $k = n$.
Si $\alpha_n \leq a$, on a alors $\alpha_n \leq a \leq b \leq \beta_n$, soit $I \subset I_n$ et :

$$\ell(I) \leq \ell(I_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

Sinon, on a $a < \alpha_n \leq b \leq \beta_n$, donc :

$$[a, \alpha_n[\subset \bigcup_{k=1}^{n-1} I_k$$

et par hypothèse de récurrence, on a :

$$\alpha_n - a \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ell(I_k)$$

et tenant compte de :

$$b - \alpha_n \leq \beta_n - \alpha_n = \ell(I_n)$$

on déduit que :

$$\ell(I) = b - a = (b - \alpha_n) + (\alpha_n - a) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

2. Si l'un des I_n est non borné, le résultat est évident.
On suppose que chaque intervalle I_n, pour $n \in \mathbb{N}$, est borné et on note $\alpha_n \leq \beta_n$ ses extrémités.
Pour $\varepsilon > 0$ donné, on désigne par $(I_n(\varepsilon))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'intervalles ouverts définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(\varepsilon) = \left]\alpha_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \beta_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right[$$

et on a un recouvrement ouvert du compact $I = [a, b]$:

$$I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n(\varepsilon)$$

duquel on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} J_k$$

On déduit alors de la question précédente que :

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \ell(J_k) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n(\varepsilon))$$

avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ell(I_n(\varepsilon)) = \beta_n - \alpha_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

ce qui nous donne :

$$\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) + \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) + \varepsilon$$

Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n)$$

3. Si $\ell(I) = 0$ ou si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) = +\infty$, le résultat est alors évident.

   Si $\ell(I) > 0$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$ est convergente, tous les I_n et I sont bornés. En notant $a < b$ les extrémités de I, pour tout segment $I' = [a', b']$ contenu dans I, on a $I' \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et de la question précédente, on déduit que :

   $$\ell(I') = b' - a' \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

   Faisant tendre (a', b') vers (a, b), on en déduit le résultat annoncé.

4. Si $\ell(I) = +\infty$, le résultat est alors évident.

   On suppose que I est borné d'extrémités $a \leq b$.

   Comme $I_n \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous ces intervalles sont bornés et on a $\bigcup_{k=0}^{n} I_k \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   En modifiant au besoin la numérotation et en notant $\alpha_n \leq \beta_n$ les extrémités de chaque intervalle I_n, comme ils sont deux à deux disjoints, on peut supposer que :

   $$a \leq \alpha_0 \leq \beta_0 < \alpha_1 \leq \beta_1 < \cdots < \alpha_{n-1} \leq \beta_{n-1} < \alpha_n \leq \beta_n \leq b$$

   et on a :

   $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \ell(I_k) &= \sum_{k=0}^{n} (\beta_k - \alpha_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) + (\beta_n - \alpha_n) \\ &\leq \alpha_n - \alpha_0 + b - \alpha_n \leq b - a = \ell(I)\end{aligned}$$

   Faisant tendre n vers l'infini, on en déduit le résultat annoncé.

Exercice 7 *Pour tous réels $a < b$, on désigne par $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.*

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.*

   Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, b]$ (théorème de Dini). On donnera deux démonstrations de ce résultat, l'une utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass et l'autre utilisant celle de Borel-Lebesgue.

2. *Le résultat précédent est-il encore vrai dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ si on ne suppose plus l'intervalle I compact ?*

3. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^+)$ telle que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.*

   Montrer que :

   $$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt$$

4. *On désigne par $\mathcal{A}$ la famille des parties de $\mathbb{R}^2$ de la forme :*

   $$A(f, g) = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

   où f, g sont dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ et on note :

   $$\mu(A(f, g)) = \int_a^b (g(t) - f(t))\, dt$$

   Montrer que cette application μ est σ-additive sur $\mathcal{A}$.

Solution.

1.

(a) *Solution utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass :* « un espace métrique E est compact si et seulement si de toute suite de points de E on peut extraire une sous suite convergente ».
Pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. On a donc $f(x)-f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
De la continuité de chaque fonction f_n sur le compact $[a,b]$, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in [a,b] \mid \|f-f_n\|_\infty = f(x_n) - f_n(x_n)$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|f-f_{n+1}\|_\infty &= f(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \\ &\leq f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) \leq \|f-f_n\|_\infty\end{aligned}$$

donc la suite $(\|f-f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et elle converge vers un réel $\lambda \geq 0$.
Il s'agit alors de montrer que $\lambda = 0$.
Dans le compact $[a,b]$, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in [a,b]$.
Soit p un entier positif. La fonction φ étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on peut trouver un entier n_p tel que $\varphi(n) \geq p$ pour tout $n \geq n_p$. On a alors pour tout $n \geq n_p$:

$$\begin{aligned}0 \leq \lambda \leq \left\|f-f_{\varphi(n)}\right\|_\infty &= f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right) \\ &\leq f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_p\left(x_{\varphi(n)}\right)\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini (à p fixé) et en utilisant la continuité de f, on déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leq \lambda \leq f(x) - f_p(x)$$

Enfin, en faisant tendre p vers l'infini, en utilisant la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f(x)$, on déduit que $\lambda = 0$.

(b) *Solution utilisant la caractérisation de Borel-Lebesgue :* « un espace métrique E est compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous recouvrement fini ».
Pour tout $x \in [a,b]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\forall x \in I,\ \exists n_x \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_x,\ 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon$$

De la continuité de f et f_{n_x}, on déduit qu'il existe un voisinage ouvert V_x de x dans $[a,b]$ tel que :

$$\forall t \in V_x, \quad |f(x) - f(t)| \leq \varepsilon,\ |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(t)| \leq \varepsilon$$

On déduit alors que pour tout $t \in V_x$:

$$0 \leq f(t) - f_{n_x}(t) \leq |f(t) - f(x)| + |f(x) - f_{n_x}(x)| + |f_{n_x}(x) - f_{n_x}(t)| \leq 3\varepsilon$$

Du recouvrement de $[a,b]$ par les ouverts V_x, on peut extraire un sous recouvrement fini $\bigcup_{i=1}^{p} V_{x_i}$.
On pose alors $n_0 = \max\limits_{1\leq i\leq p} n_{x_i}$ et on a :

$$\forall n \geq n_0,\ \forall t \in I, \quad 0 \leq f(t) - f_n(t) \leq f(t) - f_{n_{x_i}}(t) \leq 3\varepsilon$$

l'indice i étant tel que $t \in V_{x_i}$. Ce qui prouve bien la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur I.

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $]0,1[$ par $f_n(x) = \dfrac{-1}{1+nx}$ converge en croissant vers la fonction nulle et la convergence n'est pas uniforme sur $]0,1[$ puisque $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{-1}{2}$.

3. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de fonctions $\sum f_n$ est croissante (puisque les f_n sont à valeurs positives) et converge simplement vers la fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Le théorème de Dini nous dit alors que la convergence est uniforme et :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b S_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt$$

4. Pour f, g dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ on a :

$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b (g(t) - f(t))\,dt = \int_a^b \ell([f(t), g(t)])\,dt$$

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f_n \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et f, g dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telles que $f \leq g$ et :

$$A(f,g) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A(f_n, g_n)$$

étant deux à deux disjoints.
Dans ces conditions, on a :

$$\forall t \in [a,b],\ [f(t), g(t)] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [f_n(t), g_n(t)]$$

En effet, pour tout $t \in [a,b]$ et tout $y \in [f(t), g(t)]$, on a $(t,y) \in A(f,g)$, donc il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $(t,y) \in A(f_n, g_n)$, ce qui signifie que $y \in [f_n(t), g_n(t)]$. Réciproquement si $y \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [f_n(t), g_n(t)]$, il existe alors un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in [f_n(t), g_n(t)]$, donc $(t,y) \in A(f_n, g_n) \subset A(f,g)$ et $y \in [f(t), g(t)]$.
On en déduit alors que :

$$\forall t \in [a,b],\ \ell([f(t), g(t)]) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell([f_n(t), g_n(t)])$$

les fonctions $t \mapsto \ell([f_n(t), g_n(t)])$ étant continues et positives. Il en résulte que :

$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b \ell([f(t), g(t)])\,dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b \ell([f_n(t), g_n(t)])\,dt = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A(f_n, g_n))$$

La fonction μ est donc σ-additive sur $\mathcal{A}$.

– II – Les mesures

X est un ensemble non vide et $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X.

Définition : Une σ-algèbre (ou tribu) sur X est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ telle que :
- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;
- Si $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable).

Définition : Si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur X, on dit alors que le couple $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

Définition : Une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est une application

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

telle que :
- $\mu(\emptyset) = 0$;
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (i. e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$), on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

  (σ-additivité de μ).

Avec ces conditions, on dit que le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Définition : Si $\mathcal{A}$ est une famille de parties de X, on dit alors que l'intersection de toutes les σ-algèbres sur X qui contiennent $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$. C'est aussi la plus petite σ-algèbre sur X (pour l'ordre de l'inclusion sur $\mathcal{P}(X)$) qui contient $\mathcal{A}$.

On la note $\sigma(\mathcal{A})$ et on a :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ tribu sur } X \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{B}}} \mathcal{B}$$

Définition : Si X est un espace topologique, la tribu de Borel sur X est la σ-algèbre engendrée par les ouverts de X.

On la note $\mathcal{B}(X)$ et ses éléments sont les boréliens de X.

Une mesure de Borel sur X est une mesure sur $\mathcal{B}(X)$.

Exercice 8 *Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Montrer que :*

1. *$X \in \mathcal{A}$;*
2. *si A, B sont dans $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \bigtriangleup B$ sont dans $\mathcal{A}$;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable).*

Solution.

1. $X = X \setminus \emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ en posant $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$.
   $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \in \mathcal{A}$, donc $A \cap B = X \setminus (X \setminus (A \cap B)) \in \mathcal{A}$.
   $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{B}$ et $A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{B}$.

3. On a :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = X \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus A_n\right) \in \mathcal{A}$$

Exercice 9 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) < +\infty$. Montrer que :*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)$$

(formule de Poincaré).

Solution. Comme $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ contient toutes les intersections $A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}$, l'hypothèse $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) < +\infty$ nous dit que tous ces ensembles $A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}$ sont de mesure finie.
On peut prouver la formule de Poincaré par récurrence sur $n\geq 1$.
Pour $n=1$, c'est clair.
Pour $n=2$, on utilise les partitions :

$$\begin{cases} A_1 = (A_1\cap A_2)\cup(A_1\setminus A_2) \\ A_2 = (A_1\cap A_2)\cup(A_2\setminus A_1) \\ A_1\cup A_2 = (A_1\cap A_2)\cup(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_1) \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$\mu(A_1) = \mu(A_1\cap A_2) + \mu(A_1\setminus A_2)$$

$$\mu(A_2) = \mu(A_1\cap A_2) + \mu(A_2\setminus A_1)$$

$$\begin{aligned} \mu(A_1\cup A_2) &= \mu(A_1\cap A_2) + \mu(A_1\setminus A_2) + \mu(A_2\setminus A_1) \\ &= \mu(A_1\cap A_2) + \mu(A_1) - \mu(A_1\cap A_2) + \mu(A_2) - \mu(A_1\cap A_2) \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1\cap A_2) \end{aligned}$$

Supposons le résultat acquis pour $n\geq 2$ et soit $(A_k)_{1\leq k\leq n+1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n+1} A_k\right) < +\infty$.
En notant $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, le cas $n=2$, nous donne :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mu(A_{n+1}) + \mu(B) - \mu(A_{n+1}\cap B)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)$$

donc :

$$\mu(A_{n+1}) + \mu(B) = \sum_{i_1=1}^{n+1} \mu(A_{i_1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k<n+1} \mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)$$

et :

$$\begin{aligned}
\mu\left(A_{n+1}\cap B\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap A_{n+1}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq n}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}\cap A_{n+1}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j<i_{j+1}=n+1}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}\cap A_{i_{j+1}}\right)
\end{aligned}$$

Le changement d'indice $k=j+1$ dans cette dernière somme nous donne :

$$\mu\left(A_{n+1}\cap B\right)=\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}<i_k=n+1}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{k-1}}\cap A_{i_k}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}A_k\right) &= \sum_{i_1=1}^{n+1}\mu\left(A_{i_1}\right)+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k<n+1}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\\
&\quad+\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}<i_k=n+1}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{k-1}}\cap A_{i_k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1}\mu\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)
\end{aligned}$$

en utilisant, pour tout k compris entre 2 et $n+1$ la partition :

$$\begin{aligned}
\{(i_1,\cdots,i_k)\mid 1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1\} &= \{(i_1,\cdots,i_k)\mid 1\leq i_1<\cdots<i_k<n+1\}\\
&\quad\cup\{(i_1,\cdots,i_{k-1},n+1)\mid 1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}<n+1\}
\end{aligned}$$

Exercice 10

1. *Montrer que, pour tout $x\in X$, l'application :*

$$\begin{array}{rccc}\delta_x: & \mathcal{P}(X) & \to & \{0,1\}\\ & A & \mapsto & \mathbf{1}_A(x)\end{array}$$

est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$ (mesure de Dirac en x).

2. *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels positifs ou nuls indexée par (n,m) dans $\mathbb{N}^2$. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{m\in\mathbb{N}}u_{n,m}$ est convergente de somme S_n et que la série $\sum S_n$ est convergente de somme S.*
Montrer que pour tout $m\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_{n,m}$ est convergente de somme T_m, que la série $\sum T_m$ est convergente et qu'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$$

(en fait cette égalité valable dans $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ pour toute suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs).

3. *Calculer :*

$$\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^m}$$

4. *Pour cette question et la suivante, on suppose que $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable. Montrer que pour toute suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls tels que la série $\sum p_n$ soit convergente, l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{P}(X) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) \end{array} \tag{1}$$

est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$.

5. *Montrer que toute mesure finie μ sur $\mathcal{P}(X)$ peut s'exprimer sous la forme* (1) *(pour X dénombrable, toute mesure finie est une série pondérée de masses de Dirac).*

Solution.

1. Comme $x \notin \emptyset$, on a $\delta_x(\emptyset) = 0$.
Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Si $x \notin A$, on a alors $x \notin A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\delta_x(A_n) = 0$ et :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_x(A_n) = 0 = \delta_x(A)$$

Si $x \in A$, il existe alors un unique entier n_0 tel que $x \in A_{n_0}$, donc $\delta_x(A_{n_0}) = 1$ et $\delta_x(A_n) = 0$ pour tout $n \neq n_0$, ce qui nous donne :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_x(A_n) = 1 = \delta_x(A)$$

En définitive, δ_x est bien une mesure sur $\mathcal{P}(X)$.
Comme $\delta_x(X) = 1$, cette mesure est finie (c'est une probabilité).

2. Pour tout entier naturel m, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n,m} \leq S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$$

avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n = S < +\infty$, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_{n,m}$.

En notant $T_m = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}$, on a pour tout m :

$$\sum_{k=0}^{m} T_k = \sum_{k=0}^{m}\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k}$$

avec :

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} u_{j,k} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} u_{j,k} \leq \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{j,k} = \sum_{j=0}^{n} S_j \leq \sum_{n=0}^{+\infty} S_n = S$$

donc :

$$\sum_{k=0}^{m} T_k \leq S$$

ce qui signifie que la suite croissante $\left(\sum\limits_{k=0}^{m} T_k\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est majorée et en conséquence convergente. La série $\sum T_m$ est donc convergente avec $T = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} T_m \leq S$. En permutant les rôles de n et m, on aboutit de manière analogue à $S \leq T$ et $T = S$.

Dans le cas où l'une des sommes positives $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ ou $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ est infinie, il en est de même de l'autre, puisque si l'une est finie l'autre l'est. L'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ est donc valable pour toute suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs.

3. Dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^m} &= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{m=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^m = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)} = 1\end{aligned}$$

(en écrivant que $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$).

On peut donc calculer $\sum\limits_{m=2}^{+\infty}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^m}$ alors qu'on ne connaît pas toutes les valeurs de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^m}$ pour $m \geq 2$.

4. Comme $\sum p_n$ converge et $0 \leq p_n\delta_{x_n}(A) \leq p_n$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la série définissant $\mu(A)$ est bien définie et en particulier :

$$\mu(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n < +\infty$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\delta_{x_n}(\emptyset) = 0$, donc $\mu(\emptyset) = 0$.

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

En notant $u_{n,m} = p_n\delta_{x_n}(A_m)$ pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} p_n\delta_{x_n}(A_m) = p_n\sum_{m=0}^{+\infty}\delta_{x_n}(A_m) = p_n\delta_{x_n}(A) < +\infty$$

et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n\delta_{x_n}(A) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_n < +\infty$$

donc :

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\delta_{x_n}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} p_n\delta_{x_n}(A_m) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} p_n\delta_{x_n}(A_m) = \sum_{m=0}^{+\infty}\mu(A_m)\end{aligned}$$

En conclusion μ est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$.

5. Il suffit de poser $p_n = \mu(\{x_n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a bien :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\mu(\{x_n\}) = \mu(X) < +\infty$$

et pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$:

$$\mu(A) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ x_n \in A}} \mu(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A)$$

En fait, ce résultat est encore valable pour $\mu(X) = +\infty$.

Exercice 11 *Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ telle que :*

– $\emptyset \in \mathcal{A}$ *;*

– $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;*

– $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2,\ A \cap B \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par intersection finie) ;*

($\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole) et $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ une application telle que :

– $\mu(\emptyset) = 0$ *;*

– *μ est σ-additive (i. e. $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$).*

1. *Montrer que, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ et $A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$ (dans le cas où $n \geq 2$).*
2. *Montrer que μ est croissante.*
3. *Soient $A \in \mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que :*

$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Solution.

1. On vérifie par récurrence sur $n \geq 1$ que, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_{k=1}^{n} A_r \in \mathcal{A}$, donc :

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_r = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus A_r) \in \mathcal{A}$$

et $\bigcup_{k=1}^{n} A_r = X \setminus \left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_r\right) \in \mathcal{A}$.

Pour A, B dans $\mathcal{A}$, on a $B \setminus A = (X \setminus A) \cap B \in \mathcal{A}$, donc $A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$.

2. Pour $A \subset B$ dans $\mathcal{A}$, on a $B \setminus A \in \mathcal{A}$ et :

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

ce qui signifie que μ est croissante.

3. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X définie par $B_0 = A_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (pour $0 \leq n < m$, on a $B_n \subset A_n$ et un élément de B_m n'est pas dans A_n).
Comme $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Pour tout $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ il existe un plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_n$. Si $n = 0$, on a alors $x \in A_0 = B_0$. Si $n \geq 1$, on a alors $x \in A_n$ et $x \notin A_k$ pour tout k compris entre 0 et $n-1$, soit $x \in B_n$.
On a donc $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ et $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A \cap B_n$ dans $\mathcal{A}$. Comme μ est σ-additive et croissante, il en résulte que :

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

(puisque $A \cap B_n \subset B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 12 *Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur X supposée dénombrable (i. e. en bijection avec une partie, finie ou infinie, de $\mathbb{N}$). Pour tout $x \in X$, on note :*

$$A(x) = \bigcap_{\substack{A\in\mathcal{A} \\ x\in A}} A$$

(atome de x).

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, $A(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ qui contient x.*
2. *Soient x, y dans X. Montrer que si $y \in A(x)$, on a alors $A(x) = A(y)$.*
3. *Montrer que, pour tous x, y dans X, on a $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ ou $A(x) = A(y)$.*
4. *En désignant par $(x_i)_{i\in I}$ la famille des éléments de X telle que les $A(x_i)$ soient deux à deux disjoints, montrer que cette famille est dénombrable et que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a une partition $A = \bigcup\limits_{j\in J} A(x_j)$, où J est une partie de I.*
5. *En déduire que $\mathcal{A}$ est finie, son cardinal étant une puissance de 2.*

Solution.

1. Comme $x \in X \in \mathcal{A}$, il existe des éléments de $\mathcal{A}$ qui contiennent x et $A(x)$ est bien défini contenant x.
Comme $\mathcal{A}$ est dénombrable, l'ensemble $A(x)$ qui est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$.
Si B est un élément de $\mathcal{A}$ qui contient x, il fait partie des éléments de $\mathcal{A}$ qui apparaissent dans l'intersection $A(x)$, donc $A(x) \subset B$.
2. Si $y \in A(x)$, l'ensemble $A(x)$ est un élément de $\mathcal{A}$ qui contient x, donc $A(y) \subset A(x)$.
Si $x \notin A(y)$, l'ensemble $A(x) \setminus A(y)$ est dans $\mathcal{A}$ contenant x, donc :

$$A(x) \subset A(x) \setminus A(y)$$

ce qui contredit le fait que $y \in A(x)$ et $y \in A(y)$.
On a donc $x \in A(y)$ et $A(x) \subset A(y)$, d'où l'égalité $A(x) = A(y)$.
3. Si $A(x) \cap A(y) = \emptyset$, c'est alors terminé.
Sinon, pour tout $z \in A(x) \cap A(y)$, on a $A(x) = A(z) = A(y)$.

4. Comme les $A(x)$ sont dans $\mathcal{A}$ qui est dénombrable, la famille $(A(x))_{x\in X}$ est aussi dénombrable et comme deux de ces ensembles sont disjoints ou confondus, il existe une partie I de $\mathbb{N}$ telle que $(A(x))_{x\in X} = (A(x_i))_{i\in I}$ (axiome du choix dénombrable : on choisit un représentant de chaque classe dans la relation d'équivalence « être dans le même $A(x)$ »), les $A(x_i)$ étant deux à deux disjoints.
On a alors une partition $X = \bigcup_{i\in I} A(x_i)$ et tout $A \in \mathcal{A}$ s'écrit $A = \bigcup_{j\in J} A(x_j)$ où $J \subset I$.

5. Si I est infini, on peut prendre $I = \mathbb{N}$ et l'application :
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \rightarrow & \mathcal{A} \\ & J & \mapsto & \bigcup\limits_{j\in J} A(x_j) \end{array}$$
est bijective.
En effet, elle est surjective car tout $A \in \mathcal{A}$ s'écrit $A = \bigcup_{j\in J} A(x_j)$ où $J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et pour $J \neq K$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a $\varphi(J) \neq \varphi(K)$ puisque les $A(x_i)$, pour $i \in \mathbb{N}$, sont non vides et deux à deux disjoints.
Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable, on aboutit à une contradiction.
Donc I est fini et il en est de même de $\mathcal{A} = \left\{ \bigcup\limits_{j\in J} A(x_j) \mid J \subset I \right\}$. Précisément, on a :
$$\operatorname{card}(\mathcal{A}) = \operatorname{card}(\mathcal{P}(I)) = 2^{\operatorname{card}(I)}$$
En conclusion, une tribu dénombrable sur X est nécessairement finie de cardinal égal à une puissance de 2.

Exercice 13 *Soit X un ensemble dénombrable. Quelle est la σ-algèbre engendrée par les singletons de X ?*

Solution. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ la σ-algèbre engendrée par les singletons de X.
Tout $A \in \mathcal{P}(X)$ s'écrivant comme réunion dénombrable de singletons, il est dans $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

Exercice 14 *Soit X un ensemble non dénombrable.*

1. *Quelle est la σ-algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par les singletons de X ?*
2. *Montrer que l'application :*
$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{A} & \rightarrow & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \textit{ si } A \textit{ est dénombrable} \\ 1 \textit{ si } X \setminus A \textit{ est dénombrable} \end{array} \right. \end{array}$$
est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Solution.

1. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ la σ-algèbre engendrée par les singletons de X.
On note :
$$\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ ou } X \setminus A \text{ est dénombrable}\}$$
On vérifie que $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre sur X qui contient les singletons de X, donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.
Comme $\emptyset$ est dénombrable, il est dans $\mathcal{B}$.
Soit $A \in \mathcal{B}$. Si A est dénombrable, alors $X \setminus A$ est de complémentaire dénombrable, donc $X \setminus A \in \mathcal{B}$, sinon $X \setminus A$ est dénombrable et $X \setminus A \in \mathcal{B}$.

La famille $\mathcal{B}$ est donc stable par passage au complémentaire.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. On a :

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ A_n \text{ dénombrable}}} A_n \cup \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ X\setminus A_n \text{ dénombrable}}} A_n = B \cup C$$

avec B dénombrable et C de complémentaire dénombrable ($X \setminus C = \bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ X\setminus A_n \text{ dénombrable}}} (X \setminus A_n)$).
Si $C = \emptyset$, on a alors $A = B \in \mathcal{B}$, sinon $X \setminus A = (X \setminus B) \cap (X \setminus C) \subset X \setminus C$ est dénombrable, donc $A \in \mathcal{B}$.
Un singleton qui est dénombrable est dans $\mathcal{B}$.
Soit $A \in \mathcal{B}$. Si A est dénombrable, il est alors réunion dénombrable de singletons, donc dans $\mathcal{A}$, sinon c'est $X \setminus A$ qui est dans $\mathcal{A}$ et $A = X \setminus (X \setminus A)$ est aussi dans $\mathcal{A}$.
On a donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

2. On a $\mu(\emptyset) = 0$ car $\emptyset$ est dénombrable.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints. Si tous les A_n sont dénombrables, il en est alors de même de $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et :

$$\mu(A) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Sinon, il existe un A_n non dénombrable et $X \setminus A_n$ est dénombrable. Comme $A_m \cap A_n = \emptyset$ pour $m \neq n$, on a $A_m \subset X \setminus A_n$ et A_m est dénombrable, donc :

$$\mu(A) = 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

(A qui contient A_n est non dénombrable, donc $X \setminus A$ est dénombrable puisque $A \in \mathcal{A}$).

Exercice 15 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Montrer que si A, B sont des éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A \subset B$ et $\mu(B) < +\infty$, on a alors :*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

2. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $\mu(A)$.*
3. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En supposant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers $\mu(A)$.*

Solution.

1. Pour $A \subset B$ dans $\mathcal{A}$, on a la partition $B = A \cup (B \setminus A)$, donc :

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

Avec $\mu(A) \leq \mu(B) < +\infty$, on en déduit que :

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

2. On a :
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$$
En effet si $x \in A$, il existe un entier n tel que $x \in A_n$. Si $n = 0$, on a bien $x \in A_0 \cup \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$, sinon en désignant par $n \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $x \in A_n$, on a $x \in A_n \setminus A_{n-1}$ et $x \in A_0 \cup \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (A_n \setminus A_{n-1})$.
Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, cette réunion est une partition. En effet, pour $0 \leq n < m$, on a $A_n \subset A_{m-1}$ et $(A_m \setminus A_{m-1}) \cap A_n = \emptyset$, donc $(A_m \setminus A_{m-1}) \cap (A_n \setminus A_{n-1}) = \emptyset$ (en posant $A_{-1} = \emptyset$).
Il en résulte que :
$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\mu(A_0) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \setminus A_{k-1})\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mu\left(A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \setminus A_{k-1})\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)\end{aligned}$$
la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante.
3. Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a :
$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n \subset A_{n_0}$$
et :
$$\mu(A) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_{n_0} \setminus A)$$
(puisque $\mu(A_{n_0}) < +\infty$) avec :
$$A_{n_0} \setminus A = A_{n_0} \setminus \bigcap_{n=n_0+1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty} (A_{n_0} \setminus A_n)$$
la suite $(A_{n_0} \setminus A_n)_{n\geq n_0+1}$ étant croissante dans $\mathcal{A}$, ce qui nous donne :
$$\mu(A_{n_0} \setminus A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_{n_0} \setminus A_n) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$
et :
$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$
la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante.
Si tous les $\mu(A_n)$ sont infinis, ce résultat n'est plus vrai comme le montrer de $A_n = [n, +\infty[$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue. On a $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Exercice 16 *Soient μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mu([x, +\infty[)$$

1. *Montrer que F est décroissante avec, pour tout réel x :*

$$\lim_{\substack{t\to x\\ t<x}} F(t) = F(x)\,,\ \lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} F(t) = F(x) - \mu(\{x\})$$

et :

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \mu(\mathbb{R})\,,\ \lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$$

2. *Montrer que l'ensemble :*

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x\}) > 0\}$$

est dénombrable.

Solution. Comme μ est finie, on a pour tout réel x :

$$F(x) = \mu([x, +\infty[) \leq \mu(\mathbb{R}) < +\infty$$

1. Pour $x \leq y$, on a $[y, +\infty[\subset [x, +\infty[$ et en conséquence $F(y) \leq F(x)$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\left[x - \frac{1}{n}, +\infty\right[\right)_{n\geq1}$ est décroissante dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $\mu([x-1, +\infty[) \leq \mu(\mathbb{R}) < +\infty$ et :

$$[x, +\infty[= \bigcap_{n\geq1} \left[x - \frac{1}{n}, +\infty\right[$$

donc :

$$F(x) = \mu([x, +\infty[) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\left[x - \frac{1}{n}, +\infty\right[\right) = \lim_{n\to+\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right)$$

et comme F est décroissante, on en déduit que $\lim\limits_{t\to x^-} F(t) = F(x)$, c'est-à-dire que continue à gauche en x.
Avec les mêmes arguments, on a :

$$\begin{aligned}\mu(]x, +\infty[) &= \mu\left(\bigcup_{n\geq1}\left[x + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\left[x + \frac{1}{n}, +\infty\right[\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

et :

$$\lim_{t\to x^+} F(t) = \mu(]x, +\infty[) = \mu([x, +\infty[\setminus \{x\}) = F(x) - \mu(\{x\})$$

Comme $([-n, +\infty[)_{n\geq1}$ est croissante et $([n, +\infty[)_{n\geq1}$ est décroissante dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$\mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigcup_{n\geq1} [-n, +\infty[\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu([-n, +\infty[) = \lim_{n\to+\infty} F(-n)$$

et :

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcap_{n\geq1} [n, +\infty[\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu([n, +\infty[) = \lim_{n\to+\infty} F(n)$$

soit avec la décroissance de F, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \mu(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

2. L'ensemble des points de discontinuité de F est dénombrable puisque cette fonction est décroissante (donc réglée).
Mais F est continue en x si, et seulement si, $\lim\limits_{t\to x^+} F(t) = \lim\limits_{t\to x^-} F(t) = F(x)$, ce qui revient à dire que $\mu(\{x\}) = 0$, donc l'ensemble $\mathcal{D}$ est exactement l'ensemble des points de discontinuité de F et il est dénombrable.

– III – Fonctions mesurables

Définition. Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est mesurable si, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Dans le cas où X, Y sont deux espaces topologiques et $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont les tribus de Borel, une fonction mesurable de X dans Y est dite borélienne.

La composée, la somme, le produit et une limite simple de fonctions mesurables est mesurable.

Les fonctions réglées de $[a, b]$ dans un espace de Banach sont mesurables (par exemples, les fonctions continues par morceaux et les fonctions monotones de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$).

Si $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}^+$ est mesurable, il existe alors une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de X telles que $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu(A_n) \leq +\infty$$

Définition. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est intégrable (ou sommable) si elle est mesurable et $\displaystyle\int_X |f| \, d\mu < +\infty$.

Dans ce cas, on a :

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

L'ensemble des fonctions intégrables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel et l'application $f \mapsto \displaystyle\int_X f d\mu$ est une forme linéaire positive avec :

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu < +\infty$$

Exercice 17 *La mesure ℓ des intervalles réels se prolonge de manière unique en une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens, cette mesure étant invariante par translation. C'est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*
Nous allons vérifier que cette mesure ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
On désigne par $\mathcal{C}$ le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

1. *Vérifier que, pour toute classe d'équivalence $c \in \mathcal{C}$, on peut trouver un représentant x dans $[0, 1[$.*
   Pour tout $c \in \mathcal{C}$, on se fixe un représentant x_c de c dans $[0, 1[$ (axiome du choix) et on désigne par A l'ensemble de tous ces réels x_c.
2. *Montrer que les translatés $r + A$, où r décrit $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints et que :*
$$[0, 1] \subset \bigcup_{r\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1, 2]$$
3. *En déduire que A n'est pas borélien et que ℓ ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*
4. *Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non mesurable ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu de Borel) telle que $|f|$ soit mesurable.*

Solution. La relation :

$$(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (y - x \in \mathbb{Q})$$

est une relation d'équivalence puisque $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ et l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est un groupe puisque le groupe $(\mathbb{R},+)$ est commutatif.

1. Soit $c = \overline{x} \in \mathcal{C}$. En désignant par $n = [x] \in \mathbb{Z}$ la partie entière de x, on a $0 \leq x_c = x - n < 1$ et $c = \overline{x_c}$ puisque $x - x_c = n \in \mathbb{Q}$.
   L'axiome du choix nous permet de choisir, pour toute classe d'équivalence un représentant $x_c \in [0,1]$.
   Ces choix étant faits, on a $c = c'$ dans $\mathcal{C}$ si, et seulement si $x_c = x_{c'}$.
2. Si r, r' dans $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ sont tels que $(r + A) \cap (r' + A) \neq \emptyset$, il existe alors y dans $(r + A) \cap (r' + A)$, donc $y = r + x_c = r' + x_{c'}$ et $c = \overline{x_c} = \overline{x_{c'}} = c'$, ce qui nous donne $x_c = x_{c'}$ et $r = r'$.
   Donc les ensembles $r + A$, où r décrit $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints.
   Comme $A \subset [0,1[$, on a $r + A \subset [-1,2]$ pour tout $r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ et $\displaystyle\bigcup_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1,2]$.
   Pour tout $x \in [0,1]$ il existe $x_c \in A$ tel que $\overline{x} = \overline{x_c}$, donc il existe un rationnel r tel que $x = r + x_c$ et comme $|r| = |x - x_c| \leq 1$ (x et x_c sont dans $[0,1]$), on a $r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$. On a donc $[0,1] \subset \displaystyle\bigcup_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A)$.
3. Si A est borélien, il en est alors de même de tous les $r + A$ (image réciproque de A par l'application continue, donc mesurable, $x \mapsto x - r$) et la réunion dénombrable $\displaystyle\bigcup_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A)$ est un borélien, mais alors :
   $$\ell([0,1]) = 1 \leq \ell\left(\bigcup_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A)\right) = \sum_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \ell(r + A) = \sum_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \ell(A) \leq \ell([-1,2]) = 3$$
   ce qui impose $\ell(A) > 0$ et $\displaystyle\sum_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \ell(A) = +\infty$, ce qui est impossible.
   On a donc ainsi prouvé que l'ensemble A est borné, non borélien et que ℓ ne peut se prolonger à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
4. La fonction $f = 2\mathbf{1}_A - 1$ définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ -1 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$
   est non borélienne ($f^{-1}(\{1\}) = A$ est non borélien) et $|f| = 1$ est mesurable.

Exercice 18 $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable si, et seulement si, la restriction de f à tout segment $[a,b]$ est mesurable.

Solution. Notons $f_{a,b} = f_{|[a,b]}$.
Si f est mesurable, pour tout borélien A de $\mathbb{R}$:

$$f_{a,b}^{-1}(A) = \{x \in [a,b] \mid f(x) \in A\} = [a,b] \cap f^{-1}(A)$$

est un borélien de A, donc $f_{a,b}$ est mesurable.
Réciproquement, supposons que toutes les restrictions $f_{a,b}$ soient mesurables.
Pour tout borélien A de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in [-n,n] \mid f(x) \in A\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_{-n,n}^{-1}(A) \end{aligned}$$

est un borélien de A, donc f est mesurable.

Exercice 19 *Soient E un espace vectoriel normé complet et $a < b$ deux réels.*
Une fonction $f : [a,b] \to E$ est dite réglée si elle admet une limite à droite en tout point de $[a,b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a,b]$.
On notera $f(x^-)$ [resp. $f(x^+)$] la limite à gauche [resp. à droite] en $x \in]a,b]$ [resp. en $x \in [a,b[$].

1. *Montrer qu'une fonction réglée est bornée.*
2. *Montrer qu'une limite uniforme de fonctions réglées de $[a,b]$ dans E est réglée.*
3. *Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction réglée et $\varepsilon > 0$. On note :*
$$E_\varepsilon = \left\{ x \in]a,b] \mid \textit{il existe } \varphi \textit{ en escaliers sur } [a,x] \textit{ telle que } \sup_{t\in[a,x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon \right\}$$
Montrer que $E_x \neq \emptyset$, puis que $b = \max(E_\varepsilon)$.
4. *Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \to E$ est réglée si, et seulement si, elle est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions en escaliers.*
5. *Montrer qu'une fonction réglée $f : [a,b] \to E$ est borélienne et qu'elle est continue sur $[a,b]$ privé d'un ensemble D dénombrable (éventuellement vide).*
6. *La fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est-elle réglée ?*
7. *En désignant par $E(t)$ la partie entière d'un réel t, montrer que la fonction f définie sur $[0,1]$ par :*
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(nx)}{2^n}$$
est réglée, puis calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ (il s'agit d'une intégrale de Riemann).

Solution.

1. Soit $f : [a,b] \to E$ réglée.
Si elle n'est pas bornée, pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver un réel $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f(x_n)\| \geq n$.
Dans le compact $[a,b]$, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha \in [a,b]$.
Supposons que $\alpha \in]a,b[$. Il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in [a,b] \cap]\alpha - \eta, \alpha[, \ \left\|f(x) - f\left(\alpha^-\right)\right\| < 1$$
et :
$$\forall x \in [a,b] \cap]\alpha, \alpha + \eta[, \ \left\|f(x) - f\left(\alpha^+\right)\right\| < 1$$
Il existe aussi un entier $n_0 \geq 1$ tel que :
$$\forall n \geq n_0, \ x_{\varphi(n)} \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$$
ce qui nous donne pour tout $n \geq n_0$:
$$\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(\alpha^-\right)\right\| < 1 \text{ ou } \left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(\alpha^+\right)\right\| < 1$$
et en conséquence :
$$\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| < 1 + \left\|f\left(\alpha^-\right)\right\| \text{ ou } \left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| < 1 + \left\|f\left(\alpha^+\right)\right\|$$
en contradiction avec $\left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| \geq \varphi(n) \geq n$.
Pour $\alpha = a$ [resp. $\alpha = b$], on procède de manière analogue en utilisant seulement la limite à droite [resp. à gauche].
La fonction f est donc bornée.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réglées de $[a,b]$ dans E qui converge uniformément vers une fonction f.
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_ε tel que :
$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \sup_{x\in[a,b]} \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$
La fonction f_{n_ε} ayant une limite à gauche en $\alpha \in]a,b]$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x \in [a,b] \cap]\alpha - \eta, \alpha[,\ \left\|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}\left(\alpha^-\right)\right\| < \varepsilon$$
ce qui nous donne, pour tout x, y dans $[a,b] \cap]\alpha - \eta, \alpha[$:
$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\| &\leq \|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)\| + \left\|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}\left(\alpha^-\right)\right\| + \left\|f_{n_\varepsilon}\left(\alpha^-\right) - f_{n_\varepsilon}(y)\right\| + \|f_{n_\varepsilon}(y) - f(y)\| \\ &\leq 4\varepsilon\end{aligned}$$
On déduit alors du critère de Cauchy que f admet une limite à gauche en α.
De plus avec :
$$\left\|f_n\left(\alpha^-\right) - f\left(\alpha^-\right)\right\| = \lim_{x\to\alpha^-} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \sup_{x\in[a,b]} \|f_n(x) - f(x)\|$$
on déduit que :
$$f\left(\alpha^-\right) = \lim_{n\to+\infty} f_n\left(\alpha^-\right)$$
On procède de même pour la limite à droite.
3. Comme f admet une limite à droite en a, il existe un réel $\eta_a \in]0, b-a[$ tel que :
$$\forall t \in]a, a+\eta_a],\ \left\|f(t) - f\left(a^+\right)\right\| < \varepsilon$$
donc en désignant par φ la fonction en escaliers définie sur $[a, a+\eta_a]$ par $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(t) = f(a^+)$ pour tout $t \in]a, a+\eta_a]$, on a $\sup\limits_{t\in[a,a+\eta_a]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, ce qui signifie que $a + \eta_a \in E_\varepsilon$.
L'ensemble E_ε est donc non vide majorée par b, donc il admet une borne supérieure $\beta \in]a,b]$ (on a $a + \eta_a \leq \beta$).
Supposons que $\beta < b$. Comme f admet une limite à droite et à gauche en β, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $[\beta - \eta, \beta + \eta] \subset]a,b[$ et :
$$\forall t \in [\beta - \eta, \beta[,\ \left\|f(t) - f\left(\beta^-\right)\right\| < \varepsilon$$
$$\forall t \in]\beta, \beta + \eta],\ \left\|f(t) - f\left(\beta^+\right)\right\| < \varepsilon$$
Par définition de la borne supérieure β, il existe $x \in]\beta - \eta, \beta] \cap E_\varepsilon$. On désigne alors par φ une fonction en escaliers sur $[a,x]$ telle que $\sup\limits_{t\in[a,x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ et on la prolonge en une fonction en escaliers sur $[a, \beta+\eta]$ en posant $\varphi(t) = f(\beta^-)$ pour $t \in]x, \beta[$, $\varphi(\beta) = f(\beta)$ et $\varphi(t) = f(\beta^+)$ pour $t \in]\beta, \beta+\eta]$.
On a donc $\sup\limits_{t\in[a,\beta+\eta]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, soit $\beta + \eta \in E_x$, ce qui contredit le fait que β est la borne supérieure de E_ε.
En définitive, on a $\beta = b$.
Comme f admet une limite à gauche en b, il existe un réel $\eta_b > 0$ tel que $[b - \eta_b, b] \subset]a,b]$ et :
$$\forall t \in [b - \eta_b, b[,\ \left\|f(t) - f\left(b^-\right)\right\| < \varepsilon$$
Prenant $x \in]b - \eta_b, b] \cap E_\varepsilon$, on désigne par φ une fonction en escaliers sur $[a,x]$ telle que $\sup\limits_{t\in[a,x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ et on la prolonge en une fonction en escaliers sur $[a,b]$ en posant $\varphi(t) = f(b^-)$ pour $t \in]x, b[$ et $\varphi(b) = f(b)$ (si $x = b$, il n'y a rien à faire), ce qui nous donne φ en escaliers sur $[a,b]$ telle que $\|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in [a,b]$.
On a donc $b \in E_\varepsilon$ et $\beta = b$.

4. Si f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions en escaliers, elle est réglée comme limite uniforme d'une suite de fonctions réglées (une fonction en escaliers est réglée).
Réciproquement, soit $f:[a,b]\to E$ une fonction réglée.
Pour tout entier $n\geq 1$, on a $b\in E_{\frac{1}{n}}$, donc il existe φ_n en escaliers sur $[a,b]$ telle que $\sup\limits_{t\in[a,b]}\|f(t)-\varphi_n(t)\|<\frac{1}{n}$.
La suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge donc uniformément vers f sur $[a,b]$.
5. Une limite simple de fonctions boréliennes étant borélienne, on en déduit qu'une fonction réglée est borélienne.
En particulier, les fonctions en escaliers, monotones, continues par morceaux, sont boréliennes.
Soit $f:[a,b]\to E$ une fonction réglée et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$ l'ensemble D_n des points de discontinuité de f_n est fini et la réunion $D=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}D_n$ est une partie dénombrable de de $[a,b]$.
Toutes les fonctions f_n sont continues sur l'ouvert $[a,b]\setminus D$, donc il en est de même de f puisque cette fonction est limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,b]\setminus D$.
Les points de discontinuité de f sont tous de première espèce.
6. La fonction $f=\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas réglée puisqu'elle est discontinue en tout point de $[0,1]$.
En effet, si $a\in[0,1]$ est un nombre rationnel [resp. irrationnel], alors pour tout réel $\eta>0$, on peut trouver un nombre irrationnel [resp. rationnel] x dans $]a-\eta,a+\eta[\cap[0,1]$ et on a $|f(x)-f(a)|=1$, ce qui prouve la discontinuité de f en a.
Comme $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ est un borélien de $\mathbb{R}$, cette fonction f est étagée.
7. Pour tout entier $n\geq 1$ et tout réel $x\in[0,1]$, on a :
$$0\leq\frac{E(nx)}{2^n}\leq\frac{n}{2^n}$$
avec $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}<+\infty$, donc la série de fonctions $\sum\frac{E(nx)}{2^n}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
Pour montrer que f est réglée, il nous suffit de vérifier que les sommes partielles de cette série de fonctions sont des fonctions en escaliers. Comme l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[0,1]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il suffit de vérifier que chaque fonction :
$$f_n:x\in[0,1]\mapsto E(nx)$$
est en escaliers.
Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ et tout $x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[$, on a $E(nx)=k$ et pour $x=1$, $E(nx)=n$, donc :
$$f_n=\sum_{k=0}^{n-1}k\cdot\mathbf{1}_{\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right[}+n\cdot\mathbf{1}_{\{1\}}$$
est en escaliers.
La fonction f est don réglée sur $[0,1]$ et en conséquence Riemann-intégrable.
Comme la série de fonctions définissant f est uniformément convergente, on a :
$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\frac{E(nx)}{2^n}dx$$
avec :
$$\int_0^1 E(nx)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}=\frac{n-1}{2}$$

ce qui nous donne :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^3} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{1}{2^3} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Exercice 20 $[a,b]$ *est un intervalle fermé borné fixé avec* $a<b$ *réels.*

1. *Montrer que les fonctions en escaliers positives sur* $[a,b]$ *sont exactement les fonctions du type :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, *les* a_k *sont des réels positifs ou nuls et les* I_k *sont des intervalles contenus dans* $[a,b]$.

2. *Montrer que si* $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ *est une suite finie de fonctions en escaliers sur* $[a,b]$, *alors la fonction* $\varphi = \max\limits_{1\leq k\leq n} \varphi_k$ *est aussi en escaliers.*

3. *Soit* f *une fonction réglée définie sur* $[a,b]$ *et à valeurs positives.*

   (a) *Montrer qu'il existe une suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$ *et telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ \varphi_n(x) \leq f(x)$$

   (b) *On désigne par* $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de fonctions définie sur* $[a,b]$ *par* $\psi_0 = 0$ *et pour tout* $n \geq 1$ *:*

$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

   Monter que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$.

   (c) *Montrer qu'il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série* $\sum f_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$.

4. *Montrer que les fonctions réglées à valeurs positives sur* $[a,b]$ *sont exactement les fonctions de la forme :*

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$$

où les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels positifs ou nuls,* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'intervalles contenus dans* $[a,b]$ *et la série considérée converge uniformément sur* $[a,b]$.

Solution.

1. Si φ est une fonction en escaliers sur $[a,b]$, il existe alors un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision :

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p = b$$

telle que φ soit constante sur chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq p-1)$, ce qui peut s'écrire :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

où $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ est une partition de $[a,b]$ en n intervalles (les I_k sont les $]a_j,a_{j+1}[$, pour j compris entre 0 et $p-1$ et les $\{a_j\}=[a_j,a_j]$, pour j compris entre 0 et p, les a_k étant les valeurs constantes prises par φ sur chacun de ces intervalles).
Si φ est à valeurs positives, les a_k sont tous positifs ou nuls.
Réciproquement une telle fonction est en escaliers puisque l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a,b]$ est un espace vectoriel et elle est à valeurs positives si les a_k sont tous positifs ou nuls (en dehors de la réunion des I_k, la fonction φ est nulle).

2. Si $\varphi=\sum_{k=1}^{n}a_k\mathbf{1}_{I_k}$ est une fonction en escaliers sur $[a,b]$, alors la fonction $|\varphi|=\sum_{k=1}^{n}|a_k|\,\mathbf{1}_{I_k}$ est aussi en escaliers.
Il en résulte que, si ψ est une autre fonction en escaliers sur $[a,b]$, la fonction :
$$\max(\varphi,\psi)=\frac{\varphi+\psi}{2}+\frac{|\psi-\varphi|}{2}$$
en escaliers, puis par récurrence on en déduit que si $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$, alors la fonction $\max\limits_{1\leq k\leq n}\varphi_k$ est aussi en escaliers.

3.
(a) Comme f réglée sur $[a,b]$, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on peut trouver une fonction en escaliers f_n telle que :
$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-f_n(x)|<\frac{1}{n+1}$$
La fonction $\varphi_n=f_n-\dfrac{1}{n+1}$ est aussi en escaliers et pour tout $x\in[a,b]$, on a :
$$-\frac{1}{n+1}<f(x)-f_n(x)<\frac{1}{n+1}$$
donc :
$$0<f(x)-\varphi_n(x)<\frac{2}{n+1}$$
donc $\varphi_n<f$ et :
$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-\varphi_n(x)|=\sup_{x\in[a,b]}(f(x)-\varphi_n(x))\leq\frac{2}{n+1}$$
ce qui signifie que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f par valeurs inférieures.

(b) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction :
$$\psi_n=\max(0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$$
est en escaliers et pour tout $x\in[a,b]$, on a :
$$\psi_0=0\leq\psi_n(x)\leq\psi_{n+1}(x)<f(x)$$
(puisque $f\geq0$ et $f\geq\varphi_k$ pour tout entier k) et :
$$0<f(x)-\psi_n(x)\leq f(x)-\varphi_n(x)<\frac{2}{n+1}$$
donc $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément en croissant vers f sur $[a,b]$.

(c) On pose $f_0=0$ et $f_n=\psi_n-\psi_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, ce qui définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives.
Avec :
$$\sum_{k=0}^{n}f_k=\sum_{k=1}^{n}(\psi_k-\psi_{k-1})=\psi_n-\psi_0=\psi_n$$
on déduit que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

4. Si $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$, où la série est uniformément convergentes, les a_n sont positifs et les I_n des intervalles contenus dans $[a, b]$, la fonction :
$$f = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$
est alors limite uniforme d'une suite de fonctions réglées positives et en conséquence, elle est réglée positive.
Soit f une fonction réglée positive sur $[a, b]$.
Il existe alors une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
En écrivant chaque fonction en escaliers f_n sous la forme :
$$f_n = \sum_{k=1}^{p_n} a_{n,k} \mathbf{1}_{I_{n,k}}$$
où les $a_{n,k}$ sont des réels positifs ou nuls et les $I_{n,k}$ sont des intervalles contenus dans $[a, b]$, en notant $p_0 = 0$, on utilise la partition :
$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{n \geq 1} \{p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1, \cdots, p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n\}$$
et le fait qu'il s'agit d'une séries de fonctions positives pour écrire que :
$$f = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \mathbf{1}_{I_j}$$
où pour $j = p_1 + \cdots + p_{n-1} + k$ avec $1 \leq k \leq p_n$, on note :
$$a_j \mathbf{1}_{I_j} = a_{n,k} \mathbf{1}_{I_{n,k}}$$
ce qui définit bien une suite $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls et une suite $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'intervalles contenus dans $[a, b]$.
A priori la convergence de cette série est simple.
Pour tout entier $m \geq 1$ il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que $m \in \{p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1, \cdots, p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n$
et on a :
$$R_m = \sum_{j=m}^{+\infty} a_j \mathbf{1}_{I_j} \leq \sum_{j=p_1+\cdots+p_{n-1}+1}^{+\infty} a_j \mathbf{1}_{I_j} = \sum_{p=n}^{+\infty} f_p = R'_n$$
ce qui assure la convergence uniforme (pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $R'_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, donc pour tout $m \geq m_\varepsilon = p_1 + \cdots + p_{n_\varepsilon - 1} + 1$, on aura $R_m < \varepsilon$).

Exercice 21 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que sa dérivée f' est borélienne.*

Solution. On a $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$, où $(f_n)_{n \geq 1}$ est la suite de fonctions définies sur $]0, 1[$ par :
$$f_n(x) = n \left(f\left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right)$$
Chaque fonction f_n étant continue par morceaux est borélienne, donc f' est borélienne comme limite simple de fonctions boréliennes.

Exercice 22

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente est-il ouvert ? fermé ?*
2. *Soient $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu borélienne).*
   Montrer que l'ensemble des éléments x de X tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente est mesurable.

Solution.

1. On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions affines par morceaux et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :
$$f_n(x) = \begin{cases} n \text{ si } x \leq -\dfrac{1}{n} \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 - \dfrac{1}{n} \end{cases}$$
   (faire un dessin). L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente est l'intervalle $[0,1[$ qui n'est ni ouvert ni fermé.
2. Notons :
$$A = \left\{x \in X \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\right\}$$
   Dire que la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente équivaut à dire qu'elle est de Cauchy, ce qui équivaut aussi à dire que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n_k \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n_k,\ \forall q \geq n_k,\ |f_q(x) - f_p(x)| < \frac{1}{k}$$
   ou encore :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n_k \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n_k,\ \forall q \geq n_k,\ x \in (f_q - f_p)^{-1}\left(\left]-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right[\right)$$
   donc :
$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{\substack{p\geq n\\ q\geq n}} (f_q - f_p)^{-1}\left(\left]-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right[\right)$$
   et cet ensemble est mesurable dans $(X,\mathcal{A})$.

– IV – Intégration

Exercice 23 *On se place sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \ \mu(A) = \text{card}(A) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

1. *Calculer* $\int_{\mathbb{N}} x d\mu$ *pour toute suite réelle positive* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs complexes soit sommable.*

Solution.

1. En écrivant que $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \mathbf{1}_{\{n\}}$, les x_n étant positifs, on a :

$$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \int_{\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{n\}} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \mu\{n\} = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

2. Une suite $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est sommable si, et seulement si, $\int_{\mathbb{N}} |x| \, d\mu < +\infty$, ce qui revient à dire que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty$.

Exercice 24 *On se place sur* $(X, \mathcal{P}(X))$ *muni d'une mesure de Dirac* $\mu = \delta_x$*, où* $x \in X$ *est fixé. Calculer* $\int_X f d\mu$ *pour toute fonction* $f : X \to \mathbb{R}^+$.

Solution. Toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable car pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(X)$. Pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}^+$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X telles que $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et on a par définition de l'intégrale :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \delta_x(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}(x) = f(x)$$

Exercice 25 *Soient* X, Y *deux espaces métriques munis de leur tribu borélienne respective. Montrer qu'une fonction* $f : X \to Y$ *qui est continue sur* X *privé d'un ensemble* D *dénombrable est borélienne.*

Solution. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de Y, en notant :

$$\mathcal{U} = \left(f^{-1}(\mathcal{O})\right) \cap (X \setminus D) \text{ et } \mathcal{V} = \left(f^{-1}(\mathcal{O})\right) \cap D$$

on a alors $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.
L'ensemble $\mathcal{V}$ qui est contenu dans D est dénombrable, donc borélien.
La restriction g de f à $X \setminus D$ est continue, donc :

$$\mathcal{U} = \{x \in X \setminus D \mid f(x) \in \mathcal{O}\} = \{x \in X \setminus D \mid g(x) \in \mathcal{O}\} = g^{-1}(\mathcal{O})$$

est un ouvert de $X \setminus D$, ce qui signifie qu'il existe un ouvert $\mathcal{W}$ de X tel que $\mathcal{U} = (X \setminus D) \cap \mathcal{W}$ et cet ensemble est un borélien de X comme intersection de deux boréliens ($X \setminus D$ est le complémentaire d'un borélien, donc un borélien et $\mathcal{W}$ est ouvert dans X, donc borélien).
En définitive, $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ est un borélien comme union de deux boréliens.

Exercice 26 *On se place sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, *où* λ *est la mesure de Lebesgue.*

1. *Montrer que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver un ouvert* $\mathcal{O}$ *dense dans* $\mathbb{R}$ *tel que* $\lambda(\mathcal{O}) < \varepsilon$.
2. *Montrer qu'une partie mesurable bornée de* $\mathbb{R}$ *est de mesure finie. La réciproque est-elle vraie ?*
3. *Montrer qu'une partie mesurable de* $\mathbb{R}$ *d'intérieur non vide est de mesure non nulle. La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Montrer qu'une partie mesurable* A *de* $[0,1]$ *de mesure égale à* 1 *est dense dans* $[0,1]$. *Réciproquement un ouvert dense de* $[0,1]$ *est-il de mesure égale à* 1 *?*

Solution.

1. En désignant par $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres rationnels, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on désigne par $(I_n(\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'intervalles définie par :
$$I_n(\varepsilon) = \left]r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right[$$
et on désigne par $\mathcal{O}$ l'ouvert défini par :
$$\mathcal{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n(\varepsilon)$$
Comme $\mathcal{O}$ contient $\mathbb{Q}$, il est dense dans $\mathbb{R}$ et :
$$\lambda(\mathcal{O}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n(\varepsilon)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$$
2. Si A est bornée, elle est alors contenue dans un segment $[a,b]$ et si de plus, elle est mesurable, on a alors $\lambda(A) \leq \lambda([a,b]) = b - a < +\infty$.
La réciproque est fausse : l'ensemble $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle non borné.
L'exemple précédent nous donne un exemple d'ouvert non borné de mesure finie aussi petite que l'on veut.
3. Si A est mesurable d'intérieur $\mathcal{O}$ non vide, il existe alors $x \in \mathcal{O}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathcal{O}$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc :
$$\lambda(A) \geq \lambda(\mathcal{O}) \geq \lambda(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[) = 2\varepsilon > 0$$
La réciproque est fausse.
Par exemple $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ est tel que $\lambda(A) = \lambda([0,1]) - \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 1$ et :
$$\overset{\circ}{A} = [0,1] \setminus \overline{[0,1] \cap \mathbb{Q}} = \emptyset$$
On rappelle que si E est un espace métrique (ou topologique) et F une partie de E, on a :
$$\overset{\circ}{\widehat{E \setminus F}} = E \setminus \overline{F}$$
En effet si $\mathcal{O}$ est un ouvert de E contenu dans $E \setminus F$, le fermé $E \setminus \mathcal{O}$ contient F, donc aussi son adhérence, soit $\overline{F} \subset E \setminus \mathcal{O}$ et $\mathcal{O} \subset E \setminus \overline{F}$. Comme $E \setminus \overline{F}$ est un ouvert de E contenu dans $E \setminus F$, on en déduit l'égalité $\overset{\circ}{\widehat{E \setminus F}} = E \setminus \overline{F}$.
4. Si A est mesurable de mesure égale à 1 dans $[0,1]$, son complémentaire $[0,1] \setminus A$ est de mesure nulle donc d'intérieur vide et comme :
$$\overset{\circ}{\widehat{[0,1] \setminus A}} = [0,1] \setminus \overline{A}$$
on en déduit que $\overline{A} = [0,1]$, ce qui signifie que A est dense dans $[0,1]$.
Une partie dense mesurable de $[0,1]$ n'est pas nécessairement de mesure égale à 1 comme le montre l'exemple de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Exercice 27 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré avec* $\mu \neq 0$, $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel et les fonctions considérées sont à valeurs réelles.*

1. *Montrer que si* f, g *sont deux fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$, *les fonctions* $f+g$ *et* fg *sont mesurables.*
2. *Montrer que la somme de deux fonctions intégrables est intégrable.*
3. *Le produit de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
4. *La composée de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
5. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable positive. Montrer que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe un réel* $\eta > 0$ *tel que :*
$$(A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < \eta) \Rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon$$
6. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Montrer que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe une partie mesurable* A *de* X *telle que* $\mu(A) > 0$ *et* $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ *pour tous* x, y *dans* A.
7. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable positive. Montrer que pour tout réel* $\alpha > 0$, *on a :*
$$\mu\left(f^{-1}([\alpha, +\infty[)\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu$$
8. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable positive. Montrer que* $\displaystyle\int_X f d\mu = 0$ *si, et seulement si,* f *est nulle presque partout.*
9. *Soit* $f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *une fonction mesurable positive. Montrer que si* $\displaystyle\int_X f d\mu < +\infty$, *on a alors* $f(x) < +\infty$ *presque partout.*
10. *Soient* f, g *deux fonctions mesurables positives sur* X. *Montrer que si* $f = g$ *presque partout, alors* $\displaystyle\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.
11. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une partie mesurable* A *de* X *telle que* $\mu(A) > 0$ *et* f *est bornée sur* A.
12. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable telle que* $f \neq 0$ *presque partout. Montrer qu'il existe une partie mesurable* A *de* X *telle que* $\mu(A) > 0$ *et* $|f|$ *est minorée sur* A *par une constante strictement positive.*
13. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable. Montrer que si* $\displaystyle\int_A f d\mu = 0$ *pour toute partie* A *mesurable dans* X, *alors la fonction* f *est nulle presque partout.*

Solution.

1. L'application :
$$\begin{array}{cccc} \varphi & X & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$
est mesurable du fait que pour tout pavé $[a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble :
$$\varphi^{-1}([a, b] \times [c, d]) = f^{-1}([a, b]) \cap g^{-1}([c, d])$$
est mesurable (on rappelle que la tribu borélienne $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ est engendré par les pavés).
Comme la composée de deux fonctions mesurables est mesurable et les opérations d'addition et de multiplication sont continues (donc mesurables) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $f+g$ et fg sont mesurables.

2. Si f, g sont intégrables, on a alors :

$$\int_X |f+g|\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu + \int_X |g|\, d\mu < +\infty$$

et $f+g$ est intégrable.

3. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1[$ et son carré ne l'est pas.

4. Les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $g : x \mapsto x^2$ sont intégrables sur $]0,1[$ et la composée $g \circ f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ne l'est pas.

5. On rappelle que, pour tout mesurable $A \in \mathcal{A}$, et toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable positive, l'intégrale de f sur A est :

$$\int_A f d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_A d\mu$$

Si $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}$ est une fonction étagée intégrable positive, les réels a_k étant tous strictement positifs, pour tout réel $\eta > 0$ et tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \eta$, on a :

$$\begin{aligned}\int_A f d\mu &= \int_X \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k} \cdot \mathbf{1}_A\right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_X \mathbf{1}_{A_k \cap A} d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap A) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \eta\end{aligned}$$

donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, en prenant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$, on a $\displaystyle\int_A f d\mu < \varepsilon$.

Si $f : X \to \mathbb{R}^+$ est intégrable, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de X telles que $f = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et on a par définition de l'intégrale :

$$\int_A f d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_A d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu(A_n \cap A) < +\infty$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que :

$$0 \leq \int_A f d\mu - \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap A) = \int_A \left(f - \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}\right) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

et il existe $\eta > 0$ tel que tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \eta$, on a :

$$\int_A \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}\right) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui nous donne $\displaystyle\int_A f d\mu < \varepsilon$.

6. En désignant par $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres rationnels, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on désigne par $(A_n(\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de parties mesurables de X définie par :

$$A_n(\varepsilon) = f^{-1}\left(\left]r_n - \frac{\varepsilon}{2}, r_n + \frac{\varepsilon}{2}\right[\right)$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on a :

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n(\varepsilon)$$

Si tous les $A_n(\varepsilon)$ sont de mesure nulle, on a alors $\mu(X) = 0$, ce qui n'est pas. Il existe donc un rationnel r_n tel que $\mu(A_n(\varepsilon)) > 0$ et pour tous x, y dans $A_n(\varepsilon)$, on a :

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - r_n| + |r_n - f(x)| < \varepsilon$$

7. Pour $\alpha > 0$, on note A_α l'ensemble mesurable :
$$A_\alpha = f^{-1}\left([\alpha, +\infty[\right)$$
Comme f est mesurable à valeurs positives, on a :
$$f \geq \alpha \mathbf{1}_{A_\alpha}$$
ce qui nous donne :
$$\int_X f d\mu \geq \alpha \int_X \mathbf{1}_{A_\alpha} d\mu = \alpha \mu\left(A_\alpha\right)$$
soit l'inégalité de Tchebychev :
$$\mu\left(f^{-1}\left([\alpha, +\infty[\right)\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu$$

8. Si $\displaystyle\int_X f d\mu = 0$, on a alors $\mu\left(A_\alpha\right) = \mu\left(f^{-1}\left([\alpha, +\infty[\right)\right) = 0$ pour tout réel $\alpha > 0$. La suite $\left(\mu\left(A_{\frac{1}{n}}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors une suite croissante d'ensemble de mesures nuls donc leur réunion :
$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_{\frac{1}{n}} = f^{-1}\left(\mathbb{R}^{+,*}\right)$$
est mesurable de mesure nulle, ce qui signifie que f est nulle presque partout.
Réciproquement si f est nulle presque partout, l'ensemble $A = f^{-1}\left(\mathbb{R}^{+,*}\right)$ est alors de mesure nulle. On a alors $f = f \cdot \mathbf{1}_A$ et en écrivant que $f = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables de X, on a :
$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n \cap A}$$
et :
$$\int_X f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mu\left(A_n \cap A\right) = 0$$

9. En notant $A_\infty = f^{-1}\left(\{\infty\}\right)$, comme f est à valeurs positives, on a $f \geq n \mathbf{1}_{A_\infty}$ pour tout entier $n \geq 1$, donc $\int_X f d\mu \geq n \mu\left(A_\infty\right)$ et :
$$0 \leq \mu\left(A_\infty\right) \leq \frac{1}{n} \int_X f d\mu \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$
si $\displaystyle\int_X f d\mu < +\infty$, ce qui nous donne $\mu\left(A_\infty\right) = 0$ et signifie que $f(x) < +\infty$ presque partout.

10. L'ensemble :
$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = (f - g)^{-1}\{0\}$$
est mesurable. En écrivant que :
$$f = f \cdot \mathbf{1}_A + f \cdot \mathbf{1}_{X \setminus A}$$
on a :
$$\int_X f d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_A d\mu + \int_X f \cdot \mathbf{1}_{X \setminus A} d\mu$$
La fonction $f \cdot \mathbf{1}_{X \setminus A}$ est mesurable positive et nulle presque partout car :
$$\left\{x \in X \mid f \cdot \mathbf{1}_{X \setminus A}(x) \neq 0\right\} \subset X \setminus A$$
avec $X \setminus A$ de mesure nulle, donc :
$$\int_X f d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_A d\mu$$
ce résultat étant également valable pour g. Comme $f \cdot \mathbf{1}_A = g \cdot \mathbf{1}_A$, on en déduit que $\displaystyle\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.
La réciproque est bien évidemment fausse.

11. Pour tout entier naturel n, l'ensemble :

$$A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \leq n\} = f^{-1}([-n, n])$$

est mesurable et $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, donc :

$$\mu(X) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

et comme $\mu(X) > 0$, il existe un entier n tel que $\mu(A_n) > 0$, la fonction f étant bornée sur A_n (on peut aussi se contenter d'écrire que $0 < \mu(X) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$).

12. Pour tout entier naturel non nul n, l'ensemble :

$$A_n = \left\{x \in X \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n}\right\} = |f|^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[\right)$$

est mesurable et $f^{-1}(\mathbb{R}^{+,*}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, donc :

$$\mu\left(f^{-1}\left(\mathbb{R}^{+,*}\right)\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$$

En supposant que $f \neq 0$ presque partout, on a $\mu\left(f^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})\right) > 0$, donc il existe un entier n tel que $\mu(A_n) > 0$, la fonction f étant minorée par $\frac{1}{n}$ sur A_n (on peut aussi se contenter d'écrire que $0 < \mu\left(f^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$).

13. On suppose d'abord que f est à valeurs positive.
Pour tout entier naturel non nul n, l'ensemble :

$$A_n = \left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[\right)$$

est mesurable et on a :

$$0 = \int_{A_n} f d\mu \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n)$$

donc $\mu(A_n)$ et $\mu\left(f^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = 0$, ce qui signifie que f est nulle presque partout.
Pour le cas général, on introduit les ensembles mesurables :

$$A^+ = \{x \in X \mid f(x) > 0\} \text{ et } A^- = \{x \in X \mid f(x) < 0\}$$

et les fonctions mesurables $f^+ = f \cdot \mathbf{1}_{A^+} \geq 0$ et $f^- = f \cdot \mathbf{1}_{A^-} \leq 0$.
Pour toute partie A mesurable dans X, on a :

$$\int_A f^{\pm} d\mu = \int_A f \cdot \mathbf{1}_{A^{\pm}} d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_{A^{\pm}} \mathbf{1}_A d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_{A^{\pm} \cap A} d\mu = \int_{A^{\pm} \cap A} f d\mu = 0$$

Il en résulte que $f^{\pm}$ est nulle presque partout, ce qui signifie que $\mu(A^{\pm}) = 0$ ou encore que f est nulle presque partout ($f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est la réunion de A^+ et A^-).
La réciproque est bien évidemment vraie (si f est nulle presque partout, il en est alors de même de $|f|$, donc $\int_A |f| d\mu = 0$ pour tout $\mathcal{A}$, et avec $\left|\int_A f d\mu\right| \leq \int_A |f| d\mu$, on déduit que $\int_A f d\mu = 0$).

Exercice 28 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré, la mesure* μ *étant finie, et* f *une fonction mesurable de* X *dans* $\mathbb{R}^+$ *(*$\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel). On définit les suites* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de parties mesurables de* X *par :*

$$A_n = f^{-1}([n, +\infty[)\,,\ B_n = f^{-1}([n, n+1[)$$

et g *est la fonction définie sur* X *par :*

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{1}_{B_n}$$

1. *Montrer que, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(B_k)$$

2. *Montrer que* $g \leq f < g + 1$.
3. *Montrer que* f *est intégrable si, et seulement si, la série* $\sum_{n\geq 1} n\mu(B_n)$ *est convergente.*
4. *Montrer que, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} k\mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - n\mu(A_{n+1})$$

5. *Montrer que la suite* $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et converge vers* 0.
6. *Montrer que* f *est intégrable si, et seulement si, la série* $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ *est convergente.*
7. *Le résultat précédent est-il valable dan le cas où* $\mu(X) = +\infty$ *?*

Solution. Comme $\mu(X) < +\infty$, toutes les parties mesurables de X sont de mesure finie. C'est donc le cas pour tous les ensembles A_n et B_n.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a la partition :

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} B_k$$

donc :

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(B_k)$$

la série considérée étant convergente (puisque $\mu(A_n) < +\infty$).

2. Pour tout $x \in X$, en désignant par $n_x \in \mathbb{N}$ la partie entière de $f(x)$, on a :

$$n_x \leq f(x) < n_x + 1$$

donc $x \in B_{n_n}$ et $g(x) = n_x$, ce qui nous donne l'encadrement :

$$g(x) \leq f(x) < g(x) + 1$$

3. La fonction f qui est mesurable positive est intégrable si, et seulement si, $\int_X f d\mu < +\infty$, ce qui équivaut, compte tenu de l'encadrement $g \leq f < g + 1$, à :

$$\int_X g d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(B_n) < +\infty$$

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier k compris entre 1 et n, on a :

$$\mu(A_k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \mu(B_j) = \sum_{j=k}^{n} \mu(B_j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} \mu(B_j) = \sum_{j=k}^{n} \mu(B_j) + \mu(A_{n+1})$$

donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \mu(B_j) + n\mu(A_{n+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \mu(B_j) + n\mu(A_{n+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\mu(B_j) + n\mu(A_{n+1})
\end{aligned}$$

5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $A_{n+1} \subset A_n$, donc $\mu(A_{n+1}) \leq \mu(A_n)$ et la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $\mu(A_0) = \mu(X)$ est fini et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, on en déduit que :

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$$

(si tous les $\mu(A_n)$ sont infinis, ce résultat n'est plus vrai comme le montre l'exemple de $A_n = [n, +\infty[$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue. On a $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$).

6. Si f est intégrable, la série $\sum_{n\geq 1} n\mu(B_n)$ est alors convergente et avec l'inégalité :

$$n\mu(A_{n+1}) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mu(B_k)$$

on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\mu(A_{n+1}) = 0$$

ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ avec l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(B_n)$$

Réciproquement si la série $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ est convergente, des inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n} k\mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - n\mu(A_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

on déduit alors que la série $\sum_{n\geq 1} n\mu(B_n)$ est convergente, ce qui revient à dire que f est intégrable.

7. En se plaçant sur $X = \mathbb{R}$ muni de la tribu de Borel, la fonction constante égale à $\frac{1}{2}$ est telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = +\infty$.

Exercice 29 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable.*

1. *Montrer que s'il existe une fonction intégrable* $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ *telle* $|f| \leq \varphi$ *presque partout, la fonction* f *est alors intégrable.*
2. *Montrer que si* f *est bornée presque partout et* $\mu(X)$ *est fini, la fonction* f *est alors intégrable. En particulier, une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *qui est mesurable et bornée presque partout est intégrable.*

Solution.

1. En notant :
$$A = \{x \in X \mid |f(x)| \leq \varphi(x)\} = (\varphi - |f|)^{-1}(\mathbb{R}^+)$$
on définit un ensemble mesurable et $\mu(X \setminus A) = 0$. On a alors :
$$\int_X |f| \, d\mu = \int_X |f| \cdot \mathbf{1}_A d\mu + \int_X |f| \cdot \mathbf{1}_{X \setminus A} d\mu$$
avec $|f| \cdot \mathbf{1}_{X \setminus A} = 0$ presque partout (cette fonction est nulle sur A, donc l'ensemble des points où elle est non nulle est contenu dans $X \setminus A$ qui est de mesure nulle), donc :
$$\int_X |f| \, d\mu = \int_X |f| \cdot \mathbf{1}_A d\mu \leq \int_X \varphi \cdot \mathbf{1}_A d\mu \leq \int_X \varphi d\mu < +\infty$$
et f est intégrable.
2. Si f est presque partout bornée sur X, il existe une constante $M \geq 0$ telle que $|f| \leq M$ presque partout et dans le cas où $\mu(X)$ fini, la fonction constante égale à M est intégrable ($M = M \cdot \mathbf{1}_X$, donc $\int_X M d\mu = \mu(X) < +\infty$), ce qui entraîne l'intégrabilité de f.

Exercice 30

1. *Soient* I *un intervalle réel non réduit à un point et* $a \in I$.
Pour tout $x \in I$, *on désigne par* $I_{a,x}$ *l'intervalle fermé d'extrémités* a *et* x.
On se donne une fonction mesurable bornée, $f : I \to \mathbb{R}$ *et on désigne par* F *la fonction définie sur* I *par :*
$$\forall x \in I, \ F(x) = \int_{I_{a,x}} f(t) \, dt$$
soit :
$$F(x) = \begin{cases} \int_a^x f(t) \, dt \text{ si } a \leq x \\ \int_x^a f(t) \, dt \text{ si } x \leq a \end{cases}$$
Montrer que F *est lipschitzienne (donc uniformément continue) sur* I *et qu'elle est dérivable en tout point* $x_0 \in I$ *où la fonction* f *est continue avec* $F'(x_0) = f(x_0)$.
2. *Montrer que si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction dérivable de dérivée bornée, alors* f' *est intégrable sur* $[a, b]$ *et :*
$$\int_a^b f'(t) \, dt = f(b) - f(a)$$
3. *En considérant la fonction* f *définie sur* $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *par* $f(0) = 0$ *et :*
$$f(x) = \frac{x}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
pour $x \neq 0$, *vérifier que le résultat précédent n'est plus valable pour* f *dérivable de dérivée non bornée.*

Solution.

1. Comme f est mesurable et bornée, elle est intégrable sur tout segment $I_{a,x}$ contenu dans I et la fonction F est bien définie.
Pour tous $x < y$ dans $[a,b]$, on a :
$$F(y) = \int_a^y f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^y f(t)\,dt = F(x) + \int_x^y f(t)\,dt$$
donc :
$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt$$
et :
$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq M(y-x)$$
où M est un majorant de $|f|$.
De même, pour $y < x$, on a :
$$|F(y) - F(x)| \leq M(x-y)$$
On a donc $|F(y) - F(x)| \leq M|y-x|$ pour tous x, y dans I, ce qui signifie que la fonction F est lipschitzienne sur I et en conséquence, elle est uniformément continue.
Supposons que f soit continue en un point $x_0 \in I$.
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$(t \in I \text{ et } |t - x_0| < \eta) \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$
donc pour $x \in I$ tel que $0 < |x - x_0| < \eta$ et tout t compris entre x_0 et x, on a :
$$|t - x_0| \leq |x - x_0| < \eta$$
(le segment d'extrémités t et x_0 est contenu dans le segment d'extrémités x_0 et x qui a une longueur strictement inférieure à η) et :
$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{I_{x_0,x}} (f(t) - f(x_0))\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|x-x_0|}\int_{I_{x_0,x}} |f(t) - f(x_0)|\,dt \\ &\leq \frac{1}{|x-x_0|}\varepsilon|x-x_0| = \varepsilon\end{aligned}$$
On a donc ainsi prouvé que :
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$
ce qui signifie que F est dérivable en x_0 de nombre dérivé $F'(x_0) = f(x_0)$.
Si F est dérivable, sa dérivée F' doit vérifier la propriété des valeurs intermédiaires (théorème de Darboux), donc l'égalité $F' = f$ ne sera pas réalisée pour f ne vérifiant pas la propriété des valeurs intermédiaires.
Par exemple la fonction en escaliers $f = 0 \cdot \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} + 1 \cdot \mathbf{1}_{]\frac{1}{2},1]}$ est mesurable bornée sur $[0,1]$ et $F(x) = 0 \cdot \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}]} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \mathbf{1}_{]\frac{1}{2},1]}$ est non dérivable en $\frac{1}{2}$.
2. On a $f' = \lim_{n\to+\infty} f_n$, où $(f_n)_{n\geq 2}$ est la suite de fonctions définies sur $[a,b]$ par :
$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{b-a}\left(f\left(x + \dfrac{b-a}{n}\right) - f(x)\right) \text{ si } a \leq x \leq b - \dfrac{b-a}{n} \\ 0 \text{ si } b - \dfrac{b-a}{n} \leq x \leq b \end{cases}$$

Chaque fonction f_n étant continue par morceaux est borélienne, donc f' est borélienne comme limite simple de fonctions boréliennes.
Si de plus f' est bornée, elle est intégrable sur $[a,b]$.
En notant M un majorant de $|f'|$, le théorème des accroissements finis nous dit que $|f_n| \leq M$ pour tout $n \geq 2$ et le théorème de convergence dominée nous dit que :

$$\int_a^b f'(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

En désignant par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

la primitive de f nulle en a (f est continue et on utilise la convention $\int_a^x f(t)\,dt = -\int_x^a f(t)\,dt$ pour $x < a$), on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_n(t)\,dt &= \frac{n}{b-a} \int_a^{b-\frac{b-a}{n}} \left(f\left(t + \frac{b-a}{n}\right) - f(t) \right) dt \\
&= \frac{n}{b-a} \left(\int_a^{b-\frac{b-a}{n}} f\left(t + \frac{b-a}{n}\right) dt - \int_a^{b-\frac{b-a}{n}} f(t)\,dt \right) \\
&= \frac{n}{b-a} \left(\int_{a+\frac{b-a}{n}}^b f(x)\,dx - F\left(b - \frac{b-a}{n}\right) \right) \\
&= \frac{n}{b-a} \left(F(b) - F\left(a + \frac{b-a}{n}\right) - F\left(b - \frac{b-a}{n}\right) \right) \\
&= \frac{n}{b-a} \left(F(b) - F\left(b - \frac{b-a}{n}\right) \right) - \frac{n}{b-a} \left(F\left(a + \frac{b-a}{n}\right) - F(a) \right)
\end{aligned}$$

et comme F est dérivable de dérivée $F' = f$, on déduit que :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(t)\,dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = F'(b) - F'(a) \\
&= f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

3. La fonction f est dérivable sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ avec :

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\ln^2(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x\ln(|x|)} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

pour $x \neq 0$ et :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(on a $\left| \frac{1}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \frac{1}{\ln(|x|)} \underset{x\to 0}{\to} 0$).
La fonction g définie sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par $g(0) = 0$ et :

$$g : x \mapsto \frac{1}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{\ln(|x|)}\right)$$

pour $x \neq 0$ est continue sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (on a $|g(x)| \leq \frac{1}{\ln(|x|)} \left(1 - \frac{1}{\ln(|x|)}\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$) donc intégrable, mais la fonction

$$h : x \mapsto \frac{1}{x\ln(|x|)} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

ne l'est pas. En effet, le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ nous donne :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |h(x)\,dx| = \int_2^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t \cdot \ln(t)} dt \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t \cdot \ln(t)} dt$$

et pour tout $n \geq 1$, le changement de variable $t = n\pi + u$ nous donne :

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t \cdot \ln(t)} dt &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{(n\pi + u)\ln(n\pi + u)} du \\ &\geq \frac{1}{(n+1)\pi \ln((n+1)\pi)} \int_0^{\pi} \sin(u)\,du = \frac{2}{(n+1)\pi \ln((n+1)\pi)}\end{aligned}$$

la série $\sum \dfrac{1}{n \ln(n\pi)}$ étant divergente, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} |h(x)\,dx| = +\infty$.

La dérivée f' n'est pas bornée sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ puisque :

$$\lim_{n \to +\infty} h\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right) = -\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}{\ln\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} = -\infty$$

– V – Convergence monotone, dominée

Exercice 31 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$ qui converge vers une fonction f. Montrer que s'il existe une constante $M > 0$ telle que $\displaystyle\int_X f_n d\mu \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\displaystyle\int_X f d\mu \leq M$.*
2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$ qui converge presque partout vers une fonction f.*
   Montrer que si f_0 est intégrable, il en est alors de même de toutes les fonctions f_n ainsi que de f et qu'on a :
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$
   Le résultat subsiste-t-il si $\displaystyle\int_X f_0 d\mu = +\infty$?
3. *Soient $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de parties mesurables de X définie par :*
   $$A_n = |f|^{-1}([n, +\infty[)$$
   (a) *Montrer que f est finie presque partout et que :*
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_{A_n} |f|\,d\mu = 0$$
   (b) *Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*
   $$(A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < \eta) \Rightarrow \int_A |f|\,d\mu < \varepsilon$$

(c) *En prenant* $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *où* λ *est la mesure de Lebesgue, montrer que la fonction* F *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ *(*$\int_0^x f(t)\, dt$ *désigne l'intégrale de* f *sur l'intervalle d'extrémités* 0 *et* x*).*

Solution.

1. En utilisant le lemme de Fatou, on a :

$$\int_X f d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} (f_n)\, d\mu = \int_X \liminf_{n\to+\infty} (f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \leq M$$

On rappelle que :

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{p\geq n} u_p\right) \text{ et } \limsup_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{p\geq n} u_p\right)$$

2. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout en décroissant vers f, on a $0 \leq f \leq f_n \leq f_0$ presque partout pour tout $n \in \mathbb{N}$ et l'intégrabilité de f_0 entraîne celle des f_n et de f.
Comme $(f_0 - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions intégrables positives qui converge presque partout vers la fonction intégrable $f_0 - f$, le théorème de convergence monotone (Beppo Levi) nous dit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X (f_0 - f_n)\, d\mu = \int_X (f_0 - f)\, d\mu$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.
On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée : les f_n et f sont mesurables avec $|f_n| = f_n \leq f_0$, la fonction f_0 étant positive intégrable, donc $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.
En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\mathbf{1}_{[n,+\infty[}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $\lim_{n\to+\infty} (f_n) = 0$ et $\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\mu = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.

(a) Comme f est intégrable, elle est finie presque partout. En effet, dans le cas contraire l'ensemble mesurable :

$$A_\infty = |f|^{-1}(\{+\infty\})$$

est de mesure strictement positive et :

$$\int_X |f|\, d\mu \geq \int_{A_\infty} |f|\, d\mu = \int_{A_\infty} (+\infty)\, d\mu = +\infty \cdot \mu(A_\infty) = +\infty$$

On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{A_\infty} = 0 \; p.p.$$

(on a $\int_X \mathbf{1}_{A_\infty} d\mu = \mu(A_\infty) = 0$, ce qui revient à dire que $\mathbf{1}_{A_\infty} = 0$ *p.p.*), ce qui entraîne que $\lim_{n\to+\infty} |f| \cdot \mathbf{1}_{A_n} = 0$ presque partout avec $|f| \cdot \mathbf{1}_{A_n} \leq |f|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $|f|$ étant intégrable. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} |f|\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X |f| \cdot \mathbf{1}_{A_n} d\mu = 0$$

(b) Ce résultat a été montré en approchant $|f|$ par des fonctions étagées positives. On va le retrouver en utilisant la question précédente.
Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \int_{A_n} |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \eta$, où η est à préciser, on a :

$$\int_A |f|\, d\mu = \int_{A\cap A_n} |f|\, d\mu + \int_{A\cap(X\setminus A_n)} |f|\, d\mu$$

avec :

$$\int_{A\cap A_n} |f|\, d\mu \leq \int_{A_n} |f|\, d\mu$$

et :

$$\int_{A\cap(X\setminus A_n)} |f|\, d\mu \leq n \int_{A\cap(X\setminus A_n)} d\mu \leq n \int_A d\mu = n\mu(A) < n\cdot\eta$$

ce qui nous donne :

$$\int_A |f|\, d\mu \leq \int_{A_n} |f|\, d\mu + n\cdot\eta$$

Prenant $n = n_\varepsilon$ et $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, on obtient $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$.

(c) Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\lambda(A) < \eta$.
Pour x, y dans $\mathbb{R}$ tels que $0 < y - x < \eta$, on a :

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_{[x,y]} f(t)\, dt \right| \leq \int_{[x,y]} |f(t)|\, dt < \varepsilon$$

puisque $\lambda([x,y]) = y - x < \eta$. Cette inégalité étant encore valable pour $0 < x - y < \eta$.
On a donc $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$ pour tous réels x, y tels que $|y - x| < \eta$, ce qui signifie que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32 *On se place sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu(A) = \operatorname{card}(A) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par δ_n la mesure de Dirac en n.

1. *Montrer que :*

$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$$

2. *Montrer que pour toute suite réelle positive $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :*

$$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

3. *Calculer :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right)$$

Solution.

1. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on a :

$$\mu(A) = \mathrm{card}(A) = \sum_{n \in A} 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_A(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n(A)$$

2. En écrivant que $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbf{1}_{\{n\}}$, les x_n étant positifs, on a par définition de l'intégrale des fonctions mesurables positives :

$$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mu(\{n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par x_n la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$x_n(k) = \frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right)$$

et on a :

$$\int_{\mathbb{N}} x_n d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} x_n(k) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right)$$

cette série à termes positifs étant convergente puisque :

$$\frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite x_n est sommable et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n(k) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right) = \frac{1}{k^2}$$

c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la suite $x : k \mapsto \frac{1}{k^2}$.

Comme $|x_n(k)| \leq \frac{1}{k^2}$ (on a $0 \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $x \in [0,1]$), la suite x étant sommable, on déduit du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{N}} x_n d\mu = \int_{\mathbb{N}} \lim_{n \to +\infty} x_n d\mu = \int_{\mathbb{N}} x d\mu$$

soit :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 33 *Calculer*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 n^2 x (1-x)^n \, dx$$

et conclure.

Solution. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = n^2 x (1-x)^n$ sur $I = [0,1]$. Cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle et :

$$\int_0^1 f_n(x) \, dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$$

On peut conclure qu'il est impossible de dominer la convergence.

Exercice 34 *Pour tout réel $\alpha > 0$, on désigne par $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :*

$$I_n(\alpha) = \int_0^{n^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{x^\alpha}{n}\right)^n dx$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Solution. On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^\alpha}{n}\right)^n \text{ si } x \in \left]0, n^{\frac{1}{\alpha}}\right[\\ 0 \text{ si } x \geq n^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x^\alpha} \\ \forall n \geq 1, \ |f_n(x)| \leq e^{-x^\alpha} \end{cases}$$

et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha} dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}$$

On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}$$

Exercice 35 *Pour tout réel $\alpha > 0$, on désigne par $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :*

$$I_n(\alpha) = \int_1^{+\infty} n^\alpha \sin\left(\frac{x}{n}\right) e^{-n^2x^2} dx$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Solution. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = n^\alpha \sin\left(\dfrac{x}{n}\right) e^{-n^2x^2}$ sur $I = [1, +\infty[$. On a :

$$\forall x \geq 1, \ |f_n(x)| \leq n^\alpha e^{-n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

avec :

$$\forall x \geq 1, \ |f_n(x)| \leq n^\alpha e^{-\frac{n}{2}^2} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(la suite $\left(n^\alpha e^{-\frac{n}{2}^2}\right)_{n\geq1}$ est majorée puisque convergente vers 0). On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = 0$$

Exercice 36

1. *Montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt$$

2. *Montrer que :*

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt$.

Solution.

1. On désigne par $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t) \text{ si } t\in\,]0,n[\\ 0 \text{ si } t\geq n \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ avec :

$$\forall t\in\,]0,+\infty[\,,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t) = e^{-t}\ln(t)$$

et :

$$\forall t\in\,]0,n[\,,\ |f_n(t)| = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n |\ln(t)| \leq \varphi(t) = e^{-t}|\ln(t)|$$
$$\forall t\geq n,\ |f_n(t)| = 0 \leq \varphi(t)$$

(pour $0<x<1$, on a $\ln(1-x)\leq -x$, donc $\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)\leq -\dfrac{t}{n}$ pour $t\in\,]0,n[$ et $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}$) la fonction φ étant continue et intégrable sur $]0,+\infty[$. On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt$$

2. On a :

$$I_n = \int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt = \int_0^1 (1-x)^n\ln(nx)\,ndx = \frac{n\ln(n)}{n+1} + nJ_n$$

et une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \int_0^1 (1-x)^{n+1}\ln(x)\,dx = (n+1)\int_0^1 (1-x)^n (x\ln(x) - x)\,dx \\ &= -(n+1)J_{n+1} + (n+1)J_n - (n+1)\int_0^1 x(1-x)^n\,dx \end{aligned}$$

On a donc la relation de récurrence $(n+2)J_{n+1} = (n+1)J_n - \dfrac{1}{n+2}$, avec $J_0 = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx = -1$, ce qui donne $(n+1)J_n = -\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{k}$ et $I_n = \dfrac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{k}\right)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt &= \lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right) \\ &= -\gamma \backsimeq -0.577215664\end{aligned}$$

Exercice 37

1. *Montrer que, tout réel* x *et tout réel* $t\in\,]-1,1[$ *la série* $\sum t^{n-1}\sin(nx)$ *est convergente et calculer sa somme. On notera* $f(x,t)$ *cette somme.*

2. *Montrer que, pour tout réel $x \in \left]0, \pi\right[$, on a :*

$$\int_0^1 f(x,t)\,dt = \frac{\pi - x}{2}$$

3. *Monter que, pour tout réel $x \in \left]0, \pi\right[$, on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$

Solution.

1. Pour tout entier $n \geq 1$, tout réel x et tout réel $t \in \left]-1, 1\right[$, on note :

$$S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} \sin(kx)$$

la somme partielle de la série considérée.
On a :

$$\begin{aligned} S_n(x,t) &= \Im\left(\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} e^{ikx}\right) = \Im\left(e^{ix} \sum_{k=1}^{n} \left(te^{ix}\right)^{k-1}\right) = \Im\left(e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} \left(te^{ix}\right)^{k}\right) \\ &= \Im\left(e^{ix} \frac{1 - t^n e^{inx}}{1 - te^{ix}}\right) \end{aligned}$$

et comme $|t| < 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} S_n(x,t) &= \Im\left(\frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}}\right) = \frac{1}{\left|1 - te^{ix}\right|^2} \Im\left(e^{ix} - t\right) \\ &= \frac{\sin(x)}{1 - 2t\cos(x) + t^2} = f(x,t) \end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in \left]0, \pi\right[$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x,t)\,dt &= \sin(x) \int_0^1 \frac{dt}{1 - 2t\cos(x) + t^2} = \sin(x) \int_0^1 \frac{dt}{(t - \cos(x))^2 + \sin^2(x)} \\ &= \frac{1}{\sin(x)} \int_0^1 \frac{dt}{1 + \left(\frac{t - \cos(x)}{\sin(x)}\right)^2} \end{aligned}$$

($\sin(x) \neq 0$ pour $x \in \left]0, \pi\right[$) et le changement de variable $u = \dfrac{t - \cos(x)}{\sin(x)}$ nous donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x,t)\,dt &= \int_{-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}^{\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}} \frac{du}{1 + u^2} = \int_{-\operatorname{cotan}(x)}^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \arctan(\operatorname{cotan}(x)) \\ &= \frac{x}{2} + \arctan(\operatorname{cotan}(x)) \end{aligned}$$

et avec $\arctan(\operatorname{cotan}(x)) = \dfrac{\pi}{2} - x$ (cette fonction est définie et dérivable sur $\left]0, \pi\right[$ de dérivée $-\dfrac{1}{\sin^2(x)} \dfrac{1}{1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}} = -1$, elle est donc égale à $-x + c$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ donne $c = \dfrac{\pi}{2}$), on déduit que $\displaystyle\int_0^1 f(x,t)\,dt = \frac{\pi - x}{2}$.

3. Pour x fixé dans $]0,\pi[$, la suite de fonctions $(S_n(x,\cdot))_{n\geq 1}$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $t\mapsto f(x,t)$, toutes les fonctions considérées étant continues sur $]0,1[$ avec :

$$\begin{aligned}|S_n(x,t)| &= \left|\Im\left(e^{ix}\frac{1-t^n e^{inx}}{1-te^{ix}}\right)\right| \leq \left|e^{ix}\frac{1-t^n e^{inx}}{1-te^{ix}}\right| \\ &\leq \frac{2}{|1-te^{ix}|} = \frac{2}{\sqrt{1-2t\cos(x)+t^2}} = \varphi(t)\end{aligned}$$

la fonction φ étant continue sur $[0,1]$, donc intégrable. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned}\frac{\pi-x}{2} &= \int_0^1 f(x,t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x,t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(\sum_{k=1}^n t^{k-1}\sin(kx)\right)dt \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.\end{aligned}$$

Exercice 38 *Soient $a<b$ deux réels et $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles telles que :*

$$\forall x\in\,]a,b[\,,\ \lim_{n\to+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))=0$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ (lemme de Cantor).
On peut raisonner par l'absurde en utilisant une suite de fonctions définie par :

$$f_k(x) = \frac{(a_{n_k}\cos(n_k x)+b_{n_k}\sin(n_k x))^2}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}$$

où la suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ est judicieusement choisie.

Solution. Supposons que l'une des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ ou $(b_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0. La suite $(a_n^2+b_n^2)_{n\geq 1}$ ne peut alors converger vers 0 et il existe alors un réel $\varepsilon>0$ tel que pour tout entier $k\geq 1$, il existe un entier $n>k$ tel que $a_n^2+b_n^2>\varepsilon$. On peut alors construire une suite strictement croissante d'entier $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $a_{n_k}^2+b_{n_k}^2>\varepsilon$ pour tout $k\geq 1$. On définit alors la suite de fonctions $(f_k)_{k\geq 1}$ par $f_k(x) = \dfrac{(a_{n_k}\cos(n_k x)+b_{n_k}\sin(n_k x))^2}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$, on a pour tout $x\in\,]a,b[$:

$$0\leq f_k(x)\leq \frac{\left(a_{n_k}^2+b_{n_k}^2\right)\left(\cos^2(n_k x)+\sin^2(n_k x)\right)}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2} = \varphi(x) = 1$$

et par hypothèse, la suite $(f_k)_{k\geq 1}$ converge simplement vers 0 puisque :

$$0\leq f_k(x)\leq \frac{(a_{n_k}\cos(n_k x)+b_{n_k}\sin(n_k x))^2}{\varepsilon}$$

On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx = 0.$$

En développant $(a_{n_k}\cos(n_k x)+b_{n_k}\sin(n_k x))^2$, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f_k(x)\,dx &= \int_a^b \frac{a_{n_k}^2\cos^2(n_k x)+2a_{n_k}b_{n_k}\cos(n_k x)\sin(n_k x)+b_{n_k}^2\sin(n_k x)^2}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}dx \\ &= \int_a^b \frac{a_{n_k}^2+a_{n_k}b_{n_k}\sin(2n_k x)+\left(b_{n_k}^2-a_{n_k}^2\right)\sin(n_k x)^2}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}dx\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_k(x)\,dx &= \frac{a_{n_k}^2 (b-a)}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2} + \frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\cos(2n_k a)-\cos(2n_k b)}{2n_k} + \frac{\left(b_{n_k}^2-a_{n_k}^2\right)}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\int_a^b \frac{1-\cos(2n_k x)}{2}dx \\
&= \frac{a_{n_k}^2 (b-a)}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2} + \frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\cos(2n_k a)-\cos(2n_k b)}{2n_k} \\
&+ \frac{\left(b_{n_k}^2-a_{n_k}^2\right)}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{1}{2}\left(b-a-\frac{\sin(2n_k b)-\sin(2n_k a)}{2n_k}\right) \\
&= \frac{b-a}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\left(a_{n_k}^2+\frac{b_{n_k}^2-a_{n_k}^2}{2}\right) + \frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\cos(2n_k a)-\cos(2n_k b)}{2n_k} \\
&- \frac{\left(b_{n_k}^2-a_{n_k}^2\right)}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\sin(2n_k b)-\sin(2n_k a)}{4n_k} \\
&= \frac{b-a}{2} + \frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\cos(2n_k a)-\cos(2n_k b)}{2n_k} - \frac{b_{n_k}^2-a_{n_k}^2}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\sin(2n_k b)-\sin(2n_k a)}{4n_k}
\end{aligned}$$

avec :

$$\left|\frac{a_{n_k}b_{n_k}}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\cos(2n_k a)-\cos(2n_k b)}{2n_k}\right| \leq \frac{1}{2n_k} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

(en utilisant $|a_{n_k}b_{n_k}| \leq \dfrac{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}{2}$) et :

$$\left|\frac{b_{n_k}^2-a_{n_k}^2}{a_{n_k}^2+b_{n_k}^2}\frac{\sin(2n_k b)-\sin(2n_k a)}{4n_k}\right| \leq \frac{1}{2n_k} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f_k(x)\,dx = \frac{b-a}{2} > 0$ et une contradiction.

Exercice 39 *On désigne par $\mathcal{H}$ le demi plan complexe défini par :*

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

1. *Montrer que, pour tout nombre complexe z, la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$.*
2. *Soit z un nombre complexe. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement si, $z \in \mathcal{H}$.*

   La fonction gamma d'Euler est la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

3. *Montrer que :*

$$\Gamma(1) = 1 \text{ et } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

4. *Montrer que la fonction gamma vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2}$$

5. *Montrer que pour tout entier naturel n, on a :*

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ et } \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

6.

(a) *Soient z et α deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $(z,\alpha) \in \mathcal{H}^2$.*

(b) *Montrer que :*

$$\forall (z,\alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}} dt = \Gamma(z+1)\,\zeta(z+1,\alpha)$$

où ζ est la fonction dzéta de Hurwitz définie par :

$$\forall (z,\alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*},\ \zeta(z+1,\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{z+1}}$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, on a :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{e^t-1} dt = \Gamma(z+1)\,\zeta(z+1)$$

où ζ est la fonction dzéta de Riemann.

7. *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on note :*

$$I_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

(a) *Montrer que :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = I_n(z)$$

(b) *En déduire que :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

(formule d'Euler).

8. *Montrer que :*

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}$$

soit :

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

(formule de Wallis).

9.

(a) *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$I_{2n}(z) = 2^{z-1}\left(1+\frac{z}{2n+1}\right)\frac{I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}$$

(b) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

(formule de Legendre).

10. *On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}$ par :*

$$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R},\ f(x,u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \leq -\sqrt{x} \\ \left(1 + \dfrac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} \text{ si } u > -\sqrt{x} \end{cases}$$

   (a) *Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :*

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\, du$$

   (b) *Montrer que, pour tout réel u, on a :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

   (c) *Montrer que pour tout $(x,u) \in [1, +\infty[\times \mathbb{R}$, on a :*

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u) = \begin{cases} e^{-\frac{u^2}{2}} \text{ si } u \leq 0 \\ (1+u)\, e^{-u} \text{ si } u > 0 \end{cases}$$

   (d) *En déduire la formule de Stirling :*

$$\Gamma(x+1) \underset{x \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

   Pour $x = n$ entier naturel non nul, on retrouve la formule usuelle :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

11. *Montrer que la fonction gamma est continue sur $\mathcal{H}$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec pour tout entier naturel non nul n et tout réel strictement positif x :*

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n\, t^{x-1} e^{-t} dt$$

12. *En utilisant l'équation fonctionnelle (2), montrer que la fonction Γ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et que ce prolongement vérifie la même équation fonctionnelle. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, on notera encore $\Gamma(z)$ ce prolongement.*

13. *Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :*

$$\Gamma(z) \underset{z \to -n}{\backsim} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

14. ***La formule des compléments.***
   On désigne par φ la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \varphi(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1+t} dt$$

   et par $\mathcal{D}$ la bande ouverte du plan complexe définie par :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(z) < 1\}$$

(a) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

(b) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

(c) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$$

(d) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} - 2z\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2}$$

(e) *Montrer que, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et tout réel $t \in [0, \pi]$, on a :*

$$\cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \left(\frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} \cos(nt) \right)$$

(f) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

(g) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}$$

(h) *En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Solution.

1. Pour tout nombre complexe z, la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   Avec $\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\Re(z)-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$, on déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ converge absolument pour tout nombre complexe z.
2. Avec $\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\Re(z)-1}e^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{\Re(z)-1}$, on déduit que l'intégrale $\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt$ converge absolument si, et seulement si, $\Re(z) > 0$.
3. On a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$$

   En effectuant le changement de variable $t = x^2$, le calcul de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ se ramène au calcul de l'intégrale de Gauss :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

   (voir l'exercice 9).

4. Une intégration par parties donne pour $z \in \mathcal{H}$ et $0 < \varepsilon < R$:

$$\int_{\varepsilon}^{R} t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_{\varepsilon}^{R} + z \int_{\varepsilon}^{R} t^{z-1} e^{-t} dt$$

et le passage à la limite quand (ε, R) tend vers $(0, +\infty)$ donne le résultat.

5. De l'équation fonctionnelle (2) , on déduit facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$$

et :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

6.

(a) Pour tous nombres complexes z et α, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Avec $\left|\dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}\right| = \dfrac{t^{\Re(z)} e^{-\Re(\alpha)t}}{1-e^{-t}} \underset{t \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\Re(z)}}$, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}} dt$ converge absolument si, et seulement si, $\Re(z) > 0$.

Pour $\Re(z) > 0$, on a $\left|\dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}\right| = \dfrac{t^{\Re(z)} e^{-\Re(\alpha)t}}{1-e^{-t}} \underset{t \to +\infty}{\sim} t^{\Re(z)} e^{-\Re(\alpha)t}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}} dt$ converge absolument si, et seulement si, $\Re(\alpha) > 0$ (pour $\Re(\alpha) > 0$, on a $t^{\Re(z)} e^{-\Re(\alpha)t} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et pour $\Re(\alpha) \leq 0$, on a $t^{\Re(z)} e^{-\Re(\alpha)t} > 1$ pour t grand).

(b) Pour tout $(z, \alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*}$, et tout réel $t > 0$, on a $0 < e^{-t} < 1$ et :

$$\frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^z e^{-(n+\alpha)t}$$

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}$ et $t \mapsto t^z e^{-(n+\alpha)t}$, pour $n \geq 0$, sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left|t^z e^{-(n+\alpha)t}\right| dt &= \int_0^{+\infty} t^{\Re(z)} e^{-(n+\alpha)t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\Re(z)}}{(n+\alpha)^{\Re(z)}} e^{-x} \frac{dx}{n+\alpha} \\ &= \frac{1}{(n+\alpha)^{\Re(z)+1}} \Gamma(\Re(z)+1)\end{aligned}$$

et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left|t^z e^{-nt}\right| dt = \Gamma(\Re(z)+1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{\Re(z)+1}} < +\infty$$

On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^z e^{-(n+\alpha)t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \Gamma(z+1) \frac{1}{(n+\alpha)^{z+1}} \\ &= \Gamma(z+1)\zeta(z+1, \alpha)\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$ et $z = 1$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \Gamma(2)\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

7.

(a) Pour $n \geq 1$ et $z \in \mathcal{H}$, le changement de variable $t = nx$ nous donne :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^1 (1-x)^n x^{z-1} n^z dx = n^z J_n(z)$$

Une intégration par parties nous donne :

$$J_{n+1}(z) = \int_0^1 (1-x)^{n+1} x^{z-1} dx = \frac{n+1}{z} \int_0^1 (1-x)^n x^z dx = \frac{n+1}{z} J_n(z+1)$$

et par récurrence, on déduit que :

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} J_0(z+n) \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 t^{z+n-1} dt \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)} \end{aligned}$$

On peut aussi écrire que :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{t^{k+z-1}}{n^k} dt = n^z \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}(-1)^k}{k+z}$$

et constater que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $P_n(z) = \dfrac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)}$ s'écrit $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^n \dfrac{\alpha_k}{k+z}$, les coefficients α_k étant donnés par :

$$\alpha_k = \left((z+k) P_n(z)\right)_{|z=-k} = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{n!}$$

(b) On désigne par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \text{ si } t \in \left]0, n\right[\\ 0 \text{ si } t \geq n \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $\left]0, +\infty\right[$ avec :

$$\forall t \in \left]0, +\infty\right[, \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = e^{-t} t^{z-1} \\ \forall n \geq 1, \ |f_n(t)| \leq e^{-t} t^{\Re(z)-1} = f(t) \end{cases}$$

la fonction f étant continue et intégrable sur $\left]0, +\infty\right[$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z)$$

soit :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} I_n(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

8. Pour $z = \dfrac{1}{2}$, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n!\sqrt{n}}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2}\right)} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1}\sqrt{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

et de la formule d'Euler, on déduit la formule de Wallis :

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} I_n\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}\sqrt{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Comme :

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{2^{2n+1}}{2n} = \frac{2^{2n}}{n}$$

on a aussi :

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}$$

soit :

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

9.

(a) On a :

$$\begin{aligned}
I_{2n}(z) &= \frac{(2n)!2^z n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)(z+n+1)\cdots(z+2n)} \\
&= \frac{(2n)!2^z n^z}{z(z+2)\cdots(z+2n)(z+1)\cdots(z+1+2(n-1))} \\
&= \frac{(2n)!2^z n^z\left(\frac{z+1}{2}+n\right)}{2^{2n+1}\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right)\left(\frac{z+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+(n-1)\right)\left(\frac{z+1}{2}+n\right)}
\end{aligned}$$

avec :

$$\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right) = \frac{n!n^{\frac{z}{2}}}{I_n\left(\frac{z}{2}\right)}$$

et :

$$\left(\frac{z+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+n\right) = \frac{n!n^{\frac{z+1}{2}}}{I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
I_{2n}(z) &= \frac{(2n)!2^z n^z\left(\frac{z+1}{2}+n\right)}{2^{2n+1}(n!)^2 n^{\frac{2z+1}{2}}} I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{2^z}{2^{2n+1}}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{z+1}{2}+n\right) I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)
\end{aligned}$$

et tenant compte de :

$$I_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{2n+1}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}
I_{2n}(z) &= \frac{1}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{2^z}{2n+1}\left(\frac{z+1}{2}+n\right) I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right) \\
&= 2^{z-1}\left(1+\frac{z}{2n+1}\right)\frac{I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

(b) En faisant tendre n vers l'infini dans ce qui précède, on obtient :

$$\Gamma(z) = 2^{z-1}\frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

10.

(a) Pour $x > 0$ fixé, le changement de variable $t = x + u\sqrt{x}$ nous donne :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(x + u\sqrt{x}\right)^x e^{-\left(x+u\sqrt{x}\right)} \sqrt{x} du \\ &= \sqrt{x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} du \\ &= \sqrt{x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\, du\end{aligned}$$

(b) Pour $u = 0$ et $x > 0$, on a $u > -\sqrt{x}$ et :

$$f(x,u) = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} = 1 \underset{x\to+\infty}{\to} 1 = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

On se fixe un réel $u \neq 0$ et on désigne par x_u un réel strictement positif tel que $\sqrt{x_u} > -u$. Pour tout réel $x > x_u$, on a $u > -\sqrt{x_u} > -\sqrt{x}$ et :

$$f(x,u) = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\ln(f(x,u)) &= x\left(\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) - \frac{u}{\sqrt{x}}\right) \\ &= x\left(-\frac{u^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= -\frac{u^2}{2} + o(1) \underset{x\to+\infty}{\to} -\frac{u^2}{2}\end{aligned}$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(c) On se fixe $x \geq 1$.
Pour $u \leq -\sqrt{x}$, on a $f(x,u) = 0 \leq e^{-\frac{u^2}{2}}$.
Pour $u > -\sqrt{x}$, on a :

$$f(x,u) = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} = \left(\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) e^{-\frac{u}{\sqrt{x}}}\right)^x$$

Pour $-\sqrt{x} < u \leq 0$, on a $\dfrac{u}{\sqrt{x}} \in \left]-1, 0\right]$ et de **I.9** on déduit que :

$$0 \leq f(x,u) \leq e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(la fonction $f : t \mapsto (1+t)\, e^{\frac{t^2}{2}-t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(t) = e^{\frac{t^2}{2}-t}\left(1 + (1+t)(t-1)\right) = t^2 e^{\frac{t^2}{2}-t} \geq 0$, donc f est croissante et $f(t) \leq f(0) = 1$ pour tout $t \leq 0$, soit $(1+t)\, e^{-t} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $0 \leq (1+t)\, e^{-t} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$ pour tout $t \in [-1, 0]$).
Pour $u > 0$, avec la décroissance sur $\mathbb{R}^+$ de l'application $t \mapsto (1+t)\, e^{-t}$, on déduit que :

$$\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) e^{-\frac{u}{\sqrt{x}}} \leq (1+u)\, e^{-u} \leq 1$$

et :

$$0 \leq f(x,u) \leq \left((1+u)\, e^{-u}\right)^x \leq (1+u)\, e^{-u}$$

On a donc pour tout réel $x \geq 1$ et tout réel u :

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u) = \begin{cases} e^{-\frac{u^2}{2}} \text{ si } u \leq 0 \\ (1+u)\, e^{-u} \text{ si } u > 0 \end{cases}$$

(d) Pour tout réel u, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

les fonctions $u \mapsto f(x,u)$ étant continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ pour tout réel $x \geq 1$, avec :

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u)$$

pour tout réel $x \geq 1$ et tout réel u, la fonction φ étant continue intégrable sur $\mathbb{R}$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,du &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

et :

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,du \underset{x\to+\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

11. La fonction $(z,t) \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*}$ et pour tous réels $0 < a < b$, tout nombre complexe $z \in \mathcal{H}$ tel que $a \leq \Re(z) \leq b$, tout réel $t > 0$, on a :

$$\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\Re(z)-1}e^{-t} \leq \varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} \text{ si } 0 < t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t} \text{ si } t > 1\end{cases}$$

la fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (pour $a > 0$, la fonction t^{a-1} est intégrable sur $]0,1[$ et avec $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{b-1}e^{-\frac{t}{2}} = 0$, on déduit que $\varphi(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$ pour t assez grand, la fonction $e^{-\frac{t}{2}}$ étant intégrable sur $]1,+\infty[$). Il en résulte que la fonction Γ est continue sur toute bande fermée $\mathcal{H}_{a,b} = \{z \in \mathcal{H} \mid a \leq \Re(z) \leq b\}$, donc sur $\mathcal{H}$.
On peut aussi procéder comme suit.
Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $(z,t) \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathcal{H}_{a,b} \times \left[\frac{1}{n}, n\right]$, donc la fonction $\Gamma_n : z \mapsto \int_{\frac{1}{n}}^{n} t^{z-1}e^{-t}dt$ est continue sur $\mathcal{H}_{a,b}$ et avec :

$$\begin{aligned}|\Gamma(z) - \Gamma_n(z)| &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^{\Re(z)-1}e^{-t}dt + \int_n^{+\infty} t^{\Re(z)-1}e^{-t}dt \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^{a-1}e^{-t}dt + \int_n^{+\infty} t^{b-1}e^{-t}dt \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^{a-1}dt + e^{-n}\int_n^{+\infty} t^{b-1}dt = \frac{1}{a\cdot n^a} + \frac{n^b}{b\cdot e^n}\end{aligned}$$

on déduit que la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers Γ sur $\mathcal{H}_{a,b}$. Il en résulte que Γ est continue sur $\mathcal{H}_{a,b}$.
La fonction $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est indéfiniment dérivable sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$ avec pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+,*}$ (avec $a < b$) et $x \in [a,b]$:

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln(t)|^n t^{x-1}e^{-t} \leq g_n(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^n t^{a-1} \text{ si } 0 < t \leq 1 \\ |\ln(t)|^n t^{b-1}e^{-t} \text{ si } t > 1\end{cases}$$

la fonction g_n étant continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (on a $\lim\limits_{t\to0^+} |\ln(t)|^n t^{\frac{a}{2}} = 0$, donc pour $t > 0$ assez petit on a $|g_n(t)| \leq t^{\frac{a}{2}-1}$, la fonction $t^{\frac{a}{2}-1}$ étant intégrable sur $]0,1[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} |\ln(t)|^n t^{b-1}e^{-\frac{t}{2}} = 0$, donc $|g_n(t)| \leq e^{-\frac{t}{2}}$ pour t assez grand, la fonction $e^{-\frac{t}{2}}$ étant intégrable sur $]1,+\infty[$). On en déduit alors que la fonction Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et qu'on peut dériver sous le signe d'intégration.

12. On utilise le découpage :

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^- = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n$$

où on a noté :

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$$

et pour tout entier $n \geq 1$:

$$\mathcal{H}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid -n < \Re(z) \leq -(n-1)\} \setminus \{-(n-1)\}$$

On peut définir, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction Γ_n sur $\mathcal{H}_n$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H}_n,\ \Gamma_n(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^{+\infty} t^{z+(n-1)} e^{-t} dt$$

($\Gamma(z+n)$ est bien défini puisque $\Re(z+n) = \Re(z) + n > 0$ et $z \notin \{-(n-1), \cdots, -1, 0\}$ valide la division par $z(z+1)\cdots(z+n-1)$).
Comme Γ est continue sur $\mathcal{H}$, chaque fonction Γ_n est continue sur $\mathcal{H}_n$, comme quotient de deux fonctions continues.
On peut donc prolonger la fonction Γ en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-,\ \widetilde{\Gamma}(z) = \begin{cases} \Gamma(z) \text{ si } \Re(z) > 0 \\ \Gamma_n(z) \text{ si } -n < \Re(z) \leq -(n-1) \text{ et } z \neq -(n-1) \end{cases}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tel que $\Re(z) > 0$, on a $\Re(z+1) > 0$ et :

$$\widetilde{\Gamma}(z+1) = \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z\widetilde{\Gamma}(z)$$

et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tel que $-n < \Re(z) \leq -(n-1)$, on a $-(n-1) < \Re(z+1) \leq -(n-2)$ et :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}(z+1) = \Gamma_{n-1}(z+1) &= \frac{\Gamma(z+1+n-1)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+1+n-1)} = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \\ &= z\Gamma_n(z) = z\widetilde{\Gamma}(z) \end{aligned}$$

13. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tel que $-(n+1) < \Re(z) \leq -(n-1)$, on a :

$$\Gamma(z) = \Gamma_{n+1}(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)}$$

donc :

$$\begin{aligned} \lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) &= \lim_{z \to -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \end{aligned}$$

soit :

$$\Gamma(z) \underset{z \to -n}{\backsim} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

En particulier :

$$\Gamma(z) \underset{z \to 0}{\backsim} \frac{1}{z}$$

14.

(a) La condition $0 < \Re(z) < 1$ nous assure que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{z-1}}{1+t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$.

Le changement de variable $t = \dfrac{1}{\theta}$, nous donne :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{\theta^{-z}}{1+\theta} d\theta = \varphi(1-z)$$

et le résultat annoncé.

(b) En utilisant le théorème de Fubini-Lebesgue, on a pour tout $z \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^{+\infty} u^{z-1}e^{-u}du \int_0^{+\infty} v^{-z}e^{-v}dv \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u^{z-1}e^{-u}v^{-z}e^{-v}du\right)dv \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-v}\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{v}\right)^{z-1}e^{-u}\frac{du}{v}\right)dv\end{aligned}$$

et en faisant, pour tout $v > 0$ fixé, le changement de variable $w = \dfrac{u}{v}$, $dw = \dfrac{du}{v}$, on obtient, en utilisant encore le théorème de Fubini-Lebesgue :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^{+\infty} e^{-v}\left(\int_0^{+\infty} w^{z-1}e^{-vw}dw\right)dv \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-v}e^{-vw}dv\right)w^{z-1}dw \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(w+1)v}dv\right)w^{z-1}dw \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{w^{z-1}}{1+w}dw = \varphi(z) + \varphi(1-z)\end{aligned}$$

(c) Pour tout entier $n \geq 1$, tout $z \in \mathcal{H}$ et tout réel $t \in \left]0,1\right[$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{z+k-1} = t^{z-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = t^{z-1}\frac{1-(-t)^n}{1+t}$$

$$\begin{aligned}\frac{t^{z-1}}{1+t} &= t^{z-1}\frac{(1-(-t)^n)}{1+t} + \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{1+t} = t^{z-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k + \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{1+t} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{z+k-1} + \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{1+t}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^1 t^{z+k-1}dt + (-1)^n\int_0^1\frac{t^{z+n-1}}{1+t}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+z} + (-1)^n\int_0^1\frac{t^{z+n-1}}{1+t}dt\end{aligned}$$

avec :

$$0 \leqslant \left|\int_0^1\frac{t^{z+n-1}}{1+t}dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)+n-1}dt = \frac{1}{\mathrm{Re}(z)+n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Ce qui nous donne :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+z}$$

(d) Pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a $1 - z \in \mathcal{D}$ et en utilisant la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \varphi(z) + \varphi(1-z) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-z} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-z} \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n-z} \right) \\
&= \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2}
\end{aligned}$$

(e) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ fixé, on désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui est 2π-périodique et telle que :

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \ f(t) = \cos(zt)$$

Cette fonction est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle est donc développable en série de Fourier, soit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$$

Comme f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(zt)\cos(nt)\, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos((z+n)t) + \cos((n-z)t))\, dt \\
&= \frac{(-1)^n \sin(z\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n-z} \right) \\
&= -2 \frac{(-1)^n z \sin(z\pi)}{\pi} \frac{1}{n^2 - z^2}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall t \in [0, \pi], \ \cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \left(\frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} \cos(nt) \right)$$

(f) Prenant $t = 0$ dans le développement en série de Fourier précédent, on a pour tout $z \in \mathcal{D}$:

$$1 = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \left(\frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} \right)$$

et :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

(g) En désignant par θ la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \ \theta(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin(\pi z)$$

le résultat précédent nous dit que cette fonction est constante égale à π sur $\mathcal{D}$.
Comme, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a $z + 1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et :

$$\begin{aligned}
\theta(z+1) &= \Gamma(z+1)\Gamma(-z)\sin(-\pi z) \\
&= z\Gamma(z)\frac{\Gamma(1-z)}{-z}(-\sin(\pi z)) = \theta(z)
\end{aligned}$$

on déduit que θ est constante égale à π sur $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_n$, en notant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{D}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid n < \Re(z) < n+1\}$$

puis, par continuité, que θ est constante égale à π sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
On en déduit en particulier que $\Gamma(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ (pour $z \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n) = n! \neq 0$).
Prenant $z = \frac{1}{2}$, on retrouve les égalités $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(h) En écrivant que $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$, la formule des compléments s'écrit aussi :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},\ \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}$$

(i) Avec :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{1}{z} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z}{(1+z)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$

et :

$$\Gamma(-z) = -\frac{1}{z} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-z}}{(1-z)\cdots\left(1-\frac{z}{n}\right)}$$

on déduit que :

$$-\frac{\pi}{z\sin(\pi z)} = \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1-z^2)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)}$$

et :

$$\begin{aligned} \sin(\pi z) &= \pi z \lim_{n\to+\infty} (1-z^2)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \\ &= \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \end{aligned}$$

cette formule étant valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ (pour $z \in \mathbb{Z}$, tout est nul).

Exercice 40 ***Utilisation d'une intégrale double pour calculer*** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1. *Montrer que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y} dy$$

2. *En déduire que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \int\int_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{1-xy}$$

3. *Montrer que l'application* $\varphi : (u,v) \mapsto (u-v, u+v)$ *est un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur lui même et préciser son inverse.*
4. *Déterminer l'image par* φ^{-1} *du carré* $[0,1]^2$.

5. *Montrer que pour tout* $u \in \left]0,1\right[$, *on a :*

$$\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arcsin(u)$$

et :

$$\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin(u)}{2}$$

6. *En utilisant le changement de variable* $(x,y) = \varphi(u,v)$, *montrer que* $\displaystyle\iint \frac{dxdy}{1-xy} = \frac{\pi^2}{6}$ *et en conséquence* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution.

1. Pour tout $y \in \left]0,1\right[$, on a :

$$-\frac{\ln(1-y)}{y} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^{n-1}}{n}$$

les fonctions considérées étant toutes à valeurs positives et continues sur $\left]0,1\right[$. Tenant compte de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{n} dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

on déduit du théorème de convergence monotone que :

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y} dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{n} dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

2. Pour y fixé dans $\left]0,1\right[$, on a :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-xy} = \left[-\frac{\ln(1-xy)}{y}\right]_0^1 = -\frac{\ln(1-y)}{y}$$

et le théorème de Fubini-Tonelli nous donne :

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{1-xy} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dx}{1-xy}\right) dy = -\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y} dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

3. L'application $\varphi : (u,v) \mapsto (u-v, u+v)$ est linéaire bijective de $\mathbb{R}^2$ sur lui même (son déterminant vaut $2 \neq 0$) d'inverse $\varphi^{-1} : (x,y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$ et en conséquence réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même.

4. L'image par φ^{-1} du carré $[0,1]^2$ est le carré $\mathcal{C}$ de sommets $\varphi^{-1}(0,0) = (0,0)$, $\varphi^{-1}(1,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\varphi^{-1}(1,1) = (1,0)$ et $\varphi^{-1}(0,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

   En effet, en désignant par (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, un point du carré $[0,1]^2$ s'écrit $xe_1 + ye_2$ avec $0 \leq x, y \leq 1$ et son image par φ^{-1} est $x\left(\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2\right) + y\left(\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2\right)$, elle est donc dans le carré $\mathcal{C}$ et réciproquement tout point de $\mathcal{C}$ s'écrit $\varphi^{-1}(xe_1 + ye_2)$ avec $xe_1 + ye_2 \in [0,1]^2$).

5. Si $g(u) = \arctan\left(\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$, on a pour $u \in \left]0,1\right[$:

$$g'(u) = \frac{\sqrt{1-u^2} - u\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} \frac{1}{1+\frac{u^2}{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin'(u)$$

donc $g(u) = \arcsin(u) + c$, où c est une constante réelle. Faisant tendre u vers 0, on a $c = 0$ et $g(u) = \arcsin(u)$.

De même, si $h(u) = \arctan\left(\dfrac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$, on a pour $u \in \left]0,1\right[$:

$$h'(u) = \frac{-\sqrt{1-u^2} - (1-u)\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} \frac{1}{1+\frac{(1-u)^2}{1-u^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{2}\arcsin'(u)$$

donc $h(u) = -\dfrac{1}{2}\arcsin(u) + c$, où c est une constante réelle. Faisant tendre u vers 0, on a $c = \dfrac{\pi}{4}$ et $h(u) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\arcsin(u)$.

6. Le changement de variable $(x,y) = \varphi(u,v) = (u-v, u+v)$ nous donne $dxdy = 2dudv$ et :

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{1-xy} = 2\iint_{\varphi^{-1}\left([0,1]^2\right)} \frac{dudv}{1-u^2+v^2} \\
&= 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-u}^{u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right) du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{-(1-u)}^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right) du\right) \\
&= 4\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{0}^{u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right) du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{0}^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right) du\right)
\end{aligned}$$

avec, pour u fixé dans $\left]0,1\right[$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dv}{1-u^2+v^2} &= \frac{1}{1-u^2}\int \frac{dv}{1+\frac{v^2}{1-u^2}} = \frac{1}{1-u^2}\int \frac{dv}{1+\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\frac{I}{4} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(u)}{\sqrt{1-u^2}} du + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin(u)\right) du \\
&= \left[\frac{\arcsin^2(u)}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\left[\arcsin(u)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{2}\left[\frac{\arcsin^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{72}\right) = \frac{\pi^2}{24}
\end{aligned}$$

et $I = \dfrac{\pi^2}{6}$.

– VI – Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne la tribu de toutes les parties de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ (i. e. la tribu engendrée par les intervalles ouverts).

Pour tout partie A de $\mathbb{R}$, on note :

$$\ell^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n} \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) \in \overline{\mathbb{R}^+}$$

la borne inférieure étant prise sur toutes les suites d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est négligeable si $\ell^*(A) = 0$, ce qui revient à dire que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles telle que :

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) < \varepsilon$$

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable (on dira simplement mesurable) si pour toute partie E de $\mathbb{R}$, on a :

$$\ell^*(E) = \ell^*(E \cap A) + \ell^*(E \setminus A)$$

où $E \setminus A = E \cap (\mathbb{R} \setminus A)$ (condition de Carathéodory).

La famille de toutes les parties de $\mathbb{R}$ qui sont Lebesgue-mesurable est une tribu qui contient la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On la note $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, on note $\lambda(A) = \ell^*(A)$ et λ est une mesure sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ (mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$).

Exercice 41 *Montrer que $\ell^*(I) = \ell(I)$ pour tout intervalle réel I et que ℓ^* est une mesure extérieure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que :*

$$\ell^*(\emptyset) = 0$$

$$A \subset B \Rightarrow \ell^*(A) \leq \ell^*(B)$$

et pour toute partie A de $\mathbb{R}$, toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}$, telles que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, on a :

$$\ell^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell^*(A_n)$$

Solution. Si I est un intervalle réel, il fait alors partie des recouvrements possibles de I par des intervalles et on a $\ell^*(I) \leq \ell(I)$.

Du fait de la sous-additivité de ℓ, on a $\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$ pour tout recouvrement de I par des intervalles, donc $\ell(I) \leq \ell^*(I)$ et on a l'égalité $\ell^*(I) = \ell(I)$.

En particulier, on a $\ell^*(\emptyset) = \ell(\emptyset) = 0$.

Supposons que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, où A et les A_n sont des parties de $\mathbb{R}$.

S'il existe un entier p tel que $\ell^*(A_p) = +\infty$, l'inégalité $\ell^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell^*(A_n) = +\infty$ est alors assurée.

En supposant que $\ell^*(A_n) < +\infty$, pour tout entier naturel n, étant donné un réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver pour chacun de ces entiers n, une suite d'intervalles $(I_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $A_n \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{n,k}$ et :

$$\ell^*(A_n) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,k}) < \ell^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

(définition de la borne inférieure), ce qui nous donne :

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{n,k}$$

et :

$$\begin{aligned}\ell^*(A) &\leq \sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,k}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,k})\right) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\ell^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell^*(A_n) + \varepsilon\end{aligned}$$

Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $\ell^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell^*(A_n)$.

Exercice 42

1. *Montrer qu'une partie négligeable de $\mathbb{R}$ est mesurable de mesure nulle.*
2. *Montrer que toute partie d'un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}$ est négligeable et qu'une réunion dénombrable de parties négligeables est négligeable.*
3. *Montrer qu'une partie négligeable de $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide. La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est négligeable si, et seulement si, elle est contenue dans un borélien de mesure nulle.*

Solution.

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$ telle $\ell^*(A) = 0$.
   Comme ℓ^* est sous-additive, pour toute partie E de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\ell^*(E) &= \ell^*((E\cap A) \cup (E \setminus A)) \\ &\leq \ell^*(E\cap A) + \ell^*(E\setminus A)\end{aligned}$$

   Puis avec :

$$E\cap A \subset A \Rightarrow \ell^*(E\cap A) \leq \ell^*(A) = 0$$

$$E\setminus A \subset E \Rightarrow \ell^*(E\setminus A) \leq \ell^*(E)$$

   on déduit que :

$$\ell^*(E\cap A) + \ell^*(E\setminus A) \leq \ell^*(E)$$

   et l'égalité :

$$\ell^*(E) = \ell^*(E\cap A) + \ell^*(E\setminus A)$$

   Donc A est mesurable et $\lambda(A) = 0$.
2. Si B est négligeable et $A \subset B$, on a alors $0 \leq \ell^*(A) \leq \ell^*(B) = 0$ et $\ell^*(A) = 0$, ce qui signifie que A est négligeable.
   Si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de négligeables, on a alors :

$$0 \leq \ell^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell^*(A_n) = 0$$

   donc $\ell^*(A) = 0$ et A est négligeable.

3. C'est déjà vu avec l'exercice 26.
   Si A est mesurable d'intérieur $\mathcal{O}$ non vide, il existe alors $x \in \mathcal{O}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathcal{O}$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc :
   $$\lambda(A) \geq \lambda(\mathcal{O}) \geq \lambda(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[) = 2\varepsilon > 0$$
   La réciproque est fausse.
   Par exemple $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ est d'intérieur vide ($\overset{\circ}{A} = [0,1] \setminus \overline{[0,1] \cap \mathbb{Q}} = \emptyset$) et $\lambda(A) = \lambda([0,1]) - \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 1$ (λ est une mesure).
4. Si A est contenu dans un borélien négligeable, il est lui même négligeable.
   Soit A négligeable. Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une suite $(I_{n,m})_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles telle que :
   $$A \subset B_m = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_{n,m} \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m}) < \frac{1}{m}$$
   L'ensemble :
   $$B = \bigcap_{m\geq 1} (B_1 \cap \cdots \cap B_m)$$
   est un borélien qui contient A et on a :
   $$\lambda(B) = \lim_{m\to+\infty} \lambda(B_1 \cap \cdots \cap B_m)$$
   (suite décroissante de boréliens) avec :
   $$0 \leq \lambda(B_1 \cap \cdots \cap B_m) \leq \lambda(B_m) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m}) < \frac{1}{m} \underset{m\to+\infty}{\to} 0$$
   donc $\lambda(B) = 0$.

Exercice 43 *Montrer que, pour toutes parties A, B de $\mathbb{R}$, on a :*
$$\ell^*(A \cup B) + \ell^*(A \cap B) \leq \ell^*(A) + \ell^*(B)$$

Solution. Si $\ell^*(A) + \ell^*(B) = +\infty$, l'inégalité est alors vérifiée.
Supposons que $\ell^*(A) < +\infty$ et $\ell^*(B) < +\infty$.
Dans le cas où A et B sont mesurables (de mesure finie), on a :
$$\begin{aligned}\ell^*(A \cup B) &= \lambda(A \cup B) = \lambda((A \cap B) \cup (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)) \\ &= \lambda(A \cap B) + \lambda(A \setminus A \cap B) + \lambda(B \setminus A \cap B)\end{aligned}$$
avec :
$$\lambda(A \setminus A \cap B) = \lambda(A) - \lambda(A \cap B)$$
et :
$$\lambda(B \setminus A \cap B) = \lambda(B) - \lambda(A \cap B)$$
(exercice **??**), ce qui nous donne :
$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B)$$
Dans le cas général pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des suites d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $A \subset A' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, $A \subset B' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et :
$$\ell^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) < \ell^*(A) + \varepsilon$$

$$\ell^*(B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(J_n) < \ell^*(B) + \varepsilon$$

On a alors $A \cup B \subset A' \cup B'$ et $A \cap B \subset A' \cap B'$, les ensembles A' et B' étant mesurables (comme réunions de boréliens), donc :

$$\begin{aligned}
\ell^*(A \cup B) + \ell^*(A \cap B) &\leq \ell^*\left(A' \cup B'\right) + \ell^*\left(A' \cap B'\right) = \lambda\left(A' \cup B'\right) + \lambda\left(A' \cap B'\right) \\
&\leq \lambda\left(A'\right) + \lambda\left(B'\right) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(J_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(J_n) \\
&< \ell^*(A) + \ell^*(B) + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

et faisant tendre ε vers 0, on a l'inégalité annoncée.

Exercice 44 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ contenu dans un mesurable B. Montrer que pour toute partie C de $\mathbb{R}$ telle que $B \cap C = \emptyset$, on a :*

$$\ell^*(A \cup C) = \ell^*(A) + \ell^*(C)$$

Solution. Comme $A \subset B$ avec B mesurable, la caractérisation de Carathéodory des mesurables nous donne :

$$\ell^*(A \cup C) = \ell^*((A \cup C) \cap B) + \ell^*((A \cup C) \setminus B)$$

avec :

$$(A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B) = A \cap B = A$$

et :

$$(A \cup C) \setminus B = (A \setminus B) \cup (C \setminus B) = \emptyset \cup C = C$$

donc :

$$\ell^*(A \cup C) = \ell^*(A) + \ell^*(C)$$

Exercice 45 *Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $d(A, B) > 0$. Montrer que :*

$$\ell^*(A \cup B) = \ell^*(A) + \ell^*(B)$$

Solution. Soit $\delta = d(A, B) = \inf\limits_{(x,y)\in A\times B} |x - y| > 0$. L'ouvert :

$$\mathcal{O} = \bigcup_{x\in A} \left]x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}\right[$$

est disjoint de B et mesurable (un ouvert est réunion dénombrable d'intervalles deux à deux disjoints, donc mesurable), donc :

$$\ell^*(A \cup B) = \ell^*(A) + \ell^*(B)$$

De ce résultat, on déduit que la restriction de ℓ^* à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une mesure.

Exercice 46 *Soit B une partie négligeable de $\mathbb{R}$. Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{R}$ on a :*

$$\ell^*(A \cup B) = \ell^*(A) = \ell^*(A \setminus B)$$

Solution. On a :

$$\ell^*(A) \leq \ell^*(A \cup B) \leq \ell^*(A) + \ell^*(B) = \ell^*(A)$$

donc :

$$\ell^*(A \cup B) = \ell^*(A)$$

En écrivant que $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ avec $\ell^*(A \cap B) = 0$, on en déduit que :

$$\ell^*(A) = \ell^*(A \setminus B)$$

Exercice 47 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est mesurable ;*
2. *pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tel que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus A) < \varepsilon$;*
3. *pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que $\ell^*(A \setminus \mathcal{F}) < \varepsilon$.*

Solution.

(1) $\Rightarrow$ (2) Soit A mesurable de mesure finie.
Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles telle que :

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ et } \lambda(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, l'intervalle I_n est borné et on peut trouver un intervalle ouvert $I_n(\varepsilon)$ tel que :

$$I_n \subset I_n(\varepsilon) \text{ et } \ell(I_n(\varepsilon)) = \ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$$

(pour I_n d'extrémités $\alpha < \beta$, on prend $I_n(\varepsilon) = \left]\alpha - \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}, \beta + \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}\right[$).
L'ensemble $\mathcal{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n(\varepsilon)$ est alors un ouvert qui contient A et on a :

$$\lambda(\mathcal{O}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n(\varepsilon)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda(A) + \varepsilon$$

Comme A est mesurable de mesure finie, on a pour toute partie B de $\mathbb{R}$ qui contient A :

$$\ell^*(B \setminus A) = \ell^*(B) - \lambda(A)$$

En effet, en utilisant la caractérisation de Carathéodory, on a :

$$\ell^*(B) = \ell^*(B \cap A) + \ell^*(B \setminus A)$$

et pour B contenant A, cela donne :

$$\ell^*(B) = \ell^*(A) + \ell^*(B \setminus A) = \lambda(A) + \ell^*(B \setminus A)$$

soit, puisque $\lambda(A)$ est fini :

$$\ell^*(B \setminus A) = \ell^*(B) - \lambda(A)$$

Pour $B = \mathcal{O}$, cela nous donne :

$$\ell^*(\mathcal{O} \setminus A) = \ell^*(\mathcal{O}) - \lambda(A) = \lambda(\mathcal{O}) - \lambda(A) < \varepsilon$$

Pour le cas général, on écrit que :

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$$

où :

$$A_n = A \cap [-n, n]$$

Chaque ensemble A_n étant mesurable de mesure finie, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}_n$ de $\mathbb{R}$ qui contient A_n tel que $\ell^* (\mathcal{O}_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. L'ouvert $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{O}_n$ contient alors A et :

$$\begin{aligned}\ell^* (\mathcal{O} \setminus A) = \ell^* \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\mathcal{O}_n \setminus A) \right) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ell^* (\mathcal{O}_n \setminus A_n) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon\end{aligned}$$

(1) $\Rightarrow$ (3) Si A est mesurable, il en est alors de même $\mathbb{R} \setminus A$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{R} \setminus A$ tel que $\ell^* (\mathcal{O} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)) < \varepsilon$.
L'ensemble $\mathcal{F} = \mathbb{R} \setminus \mathcal{O}$ est alors un fermé contenu dans A avec :

$$\ell^* (A \setminus \mathcal{F}) = \ell^* (A \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathcal{O})) = \ell^* (\mathcal{O} \setminus (\mathbb{R} \setminus A)) < \varepsilon$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Si (2) est vérifie, pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver un ouvert $\mathcal{O}_n$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tel que $\ell^* (\mathcal{O}_n \setminus A) < \frac{1}{n}$. L'ensemble $B = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{O}_n$ est alors un borélien qui contient A et on a :

$$\ell^* (B \setminus A) = \ell^* \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (\mathcal{O}_n \setminus A) \right) \leq \ell^* (\mathcal{O}_n \setminus A) < \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui nous donne $\ell^* (B \setminus A) = 0$. L'ensemble $B \setminus A$ est donc négligeable et en conséquence mesurable. Il en résulte que $A = B \setminus (B \setminus A)$ est mesurable.

(3) $\Rightarrow$ (1) Si (3) est vérifie, pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver un fermé $\mathcal{F}_n$ de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que $\ell^* (A \setminus \mathcal{F}_n) < \frac{1}{n}$. L'ensemble $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{F}_n$ est alors un borélien contenu dans A et on a :

$$\ell^* (A \setminus B) = \ell^* \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (A \setminus \mathcal{F}_n) \right) \leq \ell^* (A \setminus \mathcal{F}_n) < \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui nous donne $\ell^* (A \setminus B) = 0$. L'ensemble $A \setminus B$ est donc négligeable et en conséquence mesurable. Il en résulte que $A = B \cup (A \setminus B)$ est mesurable.

Exercice 48 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A est mesurable de mesure finie si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $\mathbb{R}$ contenu dans A et un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tels que $\ell^* (\mathcal{O} \setminus K) < \varepsilon$.*

Solution. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme A est mesurable, il existe un fermé $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que $\ell^* (A \setminus \mathcal{F}) < \frac{\varepsilon}{2}$.
On notant, pour tout entier $n \geq 1$, $K_n = \mathcal{F} \cap [-n, n]$, on définit une suite croissante de compacts de $\mathbb{R}$ (les K_n sont fermés et bornés) telle que $\mathcal{F} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} K_n$ et :

$$\ell^* (\mathcal{F}) = \lambda (\mathcal{F}) = \lim_{n\to+\infty} \lambda (K_n)$$

Dans le cas où A est de mesure finie, $\lambda (\mathcal{F})$ est fini et il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\lambda (\mathcal{F}) - \frac{\varepsilon}{2} < \lambda (K_{n_0}) < \lambda (\mathcal{F}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc $K = K_{n_0}$ est un compact de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que :

$$\begin{aligned}\lambda(A \setminus K) &= \lambda(A) - \lambda(K) = (\lambda(A) - \lambda(\mathcal{F})) + (\lambda(\mathcal{F}) - \lambda(K)) \\ &= \lambda(A \setminus \mathcal{F}) + (\lambda(\mathcal{F}) - \lambda(K)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

En désignant par $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient A et tel que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus A) < \varepsilon$, on aboutit à :

$$\begin{aligned}\ell^*(\mathcal{O} \setminus K) = \lambda(\mathcal{O} \setminus K) &= \lambda((\mathcal{O} \setminus A) \cup (A \setminus K)) \\ &= \lambda(\mathcal{O} \setminus A) + \lambda(A \setminus K) < 2\varepsilon\end{aligned}$$

Réciproquement soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $\mathbb{R}$ contenu dans A et un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tels que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus K) < \varepsilon$.
Dans ces conditions, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un compact K_n contenu dans A et un ouvert $\mathcal{O}_n$ qui contient A tels que $\ell^*(\mathcal{O}_n \setminus K_n) < \frac{1}{n}$.
L'ensemble $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$ est alors un borélien contenu dans A et on a, pour tout entier $n \geq 1$:

$$A \setminus B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (A \setminus K_n) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (\mathcal{O}_n \setminus K_n) \subset \mathcal{O}_n \setminus K_n$$

donc :

$$\ell^*(A \setminus B) \leq \ell^*(\mathcal{O}_n \setminus K_n) < \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

ce qui nous donne $\ell^*(A \setminus B) = 0$. L'ensemble $A \setminus B$ est alors négligeable et en conséquence mesurable. Il en résulte que $A = B \cup (A \setminus B)$ est mesurable.
En écrivant que :

$$A = K_1 \cup (A \setminus K_1) \subset K_1 \cup (\mathcal{O}_1 \setminus K_1)$$

on déduit que :

$$\lambda(A) \leq \lambda(K_1) + \lambda(\mathcal{O}_1 \setminus K_1) < \lambda(K_1) + 1 < +\infty$$

(un compact est mesurable de mesure finie).

Exercice 49 ***Fonctions Riemann-intégrables.***
On se donne deux réels $a < b$ et une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in [a, b]$, l'oscillation de f en x est le réel :

$$\omega(x) = \inf_{\eta > 0} \sup_{]x-\eta, x+\eta[\cap [a,b]} |f(y) - f(z)|$$

1. *Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est :*

$$C = \{x \in [a, b] \mid \omega(x) = 0\}$$

2. *Montrer que la fonction ω est semi-continue supérieurement.*
3. *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble :*

$$D_n = \left\{x \in [a, b] \mid \omega(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

est un fermé et en déduire que l'ensemble D des points de discontinuité de f est mesurable.

4. *On se propose de montrer dans cette question, qu'une fonction Riemann-intégrable est continue presque partout.*
On suppose que la fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.
On se donne un réel $\varepsilon > 0$ et un entier $n \geq 1$.

   (a) *Justifier l'existence de deux fonctions en escaliers φ et ψ telles que $|f - \varphi| \leq \psi$ et $\displaystyle\int_a^b \psi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2n}$.*
   On se donne une subdivision $a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ de $[a,b]$ telle que $\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \varphi_k \mathbf{1}_{[a_k, a_{k+1}[}$ et $\psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \psi_k \mathbf{1}_{[a_k, a_{k+1}[}$ (la valeur de ces fonctions en b est sans importance).

   (b) *Montrer que :*
$$\forall x \in [a,b] \setminus \{a_0, a_1, \cdots, a_p\},\ \omega(x) < 2\psi(x)$$

   (c) *En déduire que $0 \leq \lambda(D_n) < \varepsilon$ et conclure.*

5. *On se propose de montrer dans cette question, la réciproque du résultat précédent, à savoir qu'une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est continue presque partout est Riemann-intégrable.*
On suppose que l'ensemble D des points de discontinuité de la fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est négligeable et pour tout réel $\varepsilon > 0$, on note :
$$D_\varepsilon = \{x \in [a,b] \mid \omega(x) \geq \varepsilon\}$$

   (a) *Montrer qu'il existe une suite finie $(I_k)_{1 \leq k \leq p}$ d'intervalles ouverts telle que :*
$$D_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^{p} I_k \text{ et } \sum_{k=1}^{p} \ell(I_k) < \varepsilon$$

   (b) *Montrer qu'il existe une suite $(J_k)_{1 \leq k \leq m}$ d'intervalles ouverts telle que :*
$$K_\varepsilon = [a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k \subset \bigcup_{k=1}^{m} J_k$$
   avec :
$$\forall k \in \{1, \cdots, m\},\ \sup_{(y,z) \in J_k^2} |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

   (c) *On ordonne les extrémités des intervalles de $R_1 = (I_k)_{1 \leq k \leq p}$ et de $R_2 = (J_k)_{1 \leq k \leq m}$ en une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq r}$ de $[a,b]$, chaque intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$ étant dans au moins un des I_j ou un des J_i.*
   On note E_1 l'ensemble des indices k compris entre 0 et $r-1$ tels que $]a_k, a_{k+1}[$ est dans au moins un des I_j et E_2 le complémentaire de cet ensemble.
   On note M la borne supérieure de $|f|$ sur $[a,b]$ et on définit les fonctions en escaliers φ et ψ par :
$$\forall k \in E_1 \text{ et } \forall t \in]a_k, a_{k+1}[,\ \varphi(t) = 0,\ \psi(t) = M$$
$$\forall k \in E_2 \text{ et } \forall t \in]a_k, a_{k+1}[,\ \varphi(t) = f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right),\ \psi(t) = \varepsilon$$
   (la définition de ces fonctions aux points de la subdivision σ n'ayant pas d'importance).
   Montrer que $|f - \varphi| \leq \psi$ et $\displaystyle\int_a^b \psi(x)\,dx < (M + b - a)\,\varepsilon$. Conclure.

Solution. Pour tout $x \in [a,b]$ et tout réel $\eta > 0$, on note :

$$\mathcal{V}_{x,\eta} =]x-\eta, x+\eta[\cap [a,b]$$

Le diamètre de $f(\mathcal{V}_{x,\eta})$ est le réel :

$$\delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) = \sup_{y,z\in\mathcal{V}_{x,\eta}} |f(y) - f(z)|$$

Comme la fonction f est supposée bornée, il existe un réel $M > 0$ tel que $|f(t)| \le M$ pour tout $t \in [a,b]$, donc l'ensemble $\left\{|f(y) - f(z)| \mid (y,z) \in (\mathcal{V}_{x,\eta})^2\right\}$ est borné et le diamètre $\delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta}))$ est bien définie. Il en résulte que l'oscillation de f en $x \in [a,b]$:

$$\omega(x) = \inf_{\eta>0} \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta}))$$

est bien définie.

1. La fonction f est continue en $x \in [a,b]$ si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall t \in \mathcal{V}_{x,\eta},\ |f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
Il en résulte que pour tous y,z dans $\mathcal{V}_{x,\eta}$, on a $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$, donc $\delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) \le \varepsilon$ et $0 \le \omega(x) \le \varepsilon$. Faisant tendre ε vers 0^+, on en déduit que $\omega(x) = 0$.
Réciproquement la condition $\omega(x) = 0$ signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$0 \le \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) < \varepsilon$$
ce qui nous donne pour tout réel $t \in \mathcal{V}_{x,\eta}$:
$$|f(t) - f(x)| \le \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) < \varepsilon$$
et cela signifie que f est continue en x.
2. On rappelle qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite est semi-continue supérieurement si, pour tout réel α l'ensemble :
$$\varphi^{-1}(]-\infty, \alpha[) = \{x \in [a,b] \mid \varphi(x) < \alpha\}$$
est un ouvert de $[a,b]$.
Pour $\alpha \le 0$, l'ensemble $\omega^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ est vide, donc ouvert.
Pour $\alpha > 0$ et $x \in [a,b]$ tel que $\omega(x) < \alpha$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\omega(x) \le \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) < \alpha$$
Pour tout réel $t \in \left]x - \frac{\eta}{2}, x + \frac{\eta}{2}\right[$, on a :
$$\left]t - \frac{\eta}{2}, t + \frac{\eta}{2}\right[\subset]x-\eta, x+\eta[$$
donc :
$$\mathcal{V}_{t,\frac{\eta}{2}} \subset \mathcal{V}_{x,\eta} \text{ et } \delta\left(f\left(\mathcal{V}_{t,\frac{\eta}{2}}\right)\right) \le \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) < \alpha$$
ce qui nous donne $\omega(t) < \alpha$.
On a donc $\left]x - \frac{\eta}{2}, x + \frac{\eta}{2}\right[\cap [a,b] \subset \omega^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ et l'ensemble $\omega^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ est un ouvert.
3. De la semi-continuité supérieure de ω, on déduit que, pour tout entier $n \ge 1$, l'ensemble :
$$D_n = \left\{x \in [a,b] \mid \omega(x) \ge \frac{1}{n}\right\}$$
est un fermé de $[a,b]$ et en particulier, il est mesurable. En écrivant que l'ensemble des points de discontinuité de f est :
$$D = [a,b] \setminus C = \{x \in [a,b] \mid \omega(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$$
on en déduit que D est mesurable.

4.

(a) Comme f est Riemann-intégrable, il existe deux fonctions en escaliers φ et ψ telles que $|f-\varphi| \leq \psi$ et $\displaystyle\int_a^b \psi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2n}$.

(b) Pour tout entier k compris entre 0 et $p-1$ et tout réel $x \in \left]a_k, a_{k+1}\right[$, on a :

$$|f(x)-\varphi_k| = |f(x)-\varphi(x)| \leq \psi(x) = \psi_k$$

donc pour $\eta > 0$ tel que $\left]x-\eta, x+\eta\right[\subset \left]a_k, a_{k+1}\right[$ et y, z dans $\left]x-\eta, x+\eta\right[$, on a $|f(y)-f(z)| < 2\psi_k = 2\psi(x)$, ce qui nous donne :

$$\omega(x) \leq \delta\left(f\left(\mathcal{V}_{x,\eta}\right)\right) < 2\psi_k = 2\psi(x)$$

En conclusion, on a :

$$\forall x \in [a,b] \setminus \{a_0, a_1, \cdots, a_p\},\ \omega(x) < 2\psi(x)$$

(c) De la question précédente, on déduit que :

$$\begin{aligned} D_n &= \left\{x \in [a,b] \mid \omega(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \\ &\subset \left\{x \in [a,b[\mid \psi(x) \geq \frac{1}{2n}\right\} \cup \{a_0, a_1, \cdots, a_p\} \end{aligned}$$

ce qui nous donne, en notant :

$$\Delta_n = \left\{x \in [a,b[\mid \psi(x) \geq \frac{1}{2n}\right\}$$

$$\lambda(D_n) \leq \lambda(\Delta_n)$$

($\{a_0, a_1, \cdots, a_p\}$ est négligeable et les ensembles D_n et Δ_n sont mesurables).
Comme :

$$\Delta_n = \bigcup_{k \mid \psi_k \geq \frac{1}{2n}} [a_k, a_{k+1}[$$

on a :

$$\begin{aligned} \lambda(\Delta_n) &= \sum_{k \mid \psi_k \geq \frac{1}{2n}} (a_{k+1}-a_k) \leq 2n \sum_{k \mid \psi_k \geq \frac{1}{2n}} \psi_k (a_{k+1}-a_k) \\ &\leq 2n \sum_{k=0}^{p-1} \psi_k (a_{k+1}-a_k) = 2n \int_a^b \psi(x)\,dx < \varepsilon \end{aligned}$$

En définitive, on a $0 \leq \lambda(D_n) < \varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon > 0$, ce qui revient à dire que $\lambda(D_n) = 0$.
On a donc montré que tous les ensembles D_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, sont négligeables et en conséquence l'ensemble D des points de discontinuité de la fonction f est négligeable, ce qui revient à dire que f est continue presque partout.

5.

(a) L'ensemble :

$$D_\varepsilon = \{x \in [a,b] \mid \omega(x) \geq \varepsilon\}$$

est un compact négligeable (ω est semi-continue supérieurement, donc D_ε est fermé et comme il est borné, il est compact ; D_ε étant contenu dans D est négligeable), donc on peut le recouvrir par une réunion d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est inférieure à ε et de ce recouvrement, on extrait un sous-recouvrement fini, ce qui signifie qu'il existe une suite $(I_k)_{1 \leq k \leq p}$ d'intervalles ouverts telle que :

$$D_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^{p} I_k \text{ et } \sum_{k=1}^{p} \ell(I_k) < \varepsilon$$

(b) L'ensemble :

$$K_\varepsilon = [a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k = [a,b] \cap \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k\right)$$

est fermé, borné, donc compact.
Pour tout $x \in K_\varepsilon$, on a $\omega(x) < \varepsilon$ (puisque $x \notin D_\varepsilon$), donc il existe un réel $\eta_x > 0$ tel que :

$$\omega(x) \leq \delta\left(f\left(\mathcal{V}_{x,\eta_x}\right)\right) = \sup_{(y,z)\in(\mathcal{V}_{x,\eta_x})^2} |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

Du recouvrement ouvert du compact K_ε par la réunion des $]x-\eta_x, x+\eta_x[$, pour x décrivant K_ε, on extrait un sous recouvrement fini, ce qui signifie qu'il existe une suite $(J_k)_{1\leq k\leq m} = (]x_k - \eta_{x_k}, x_k + \eta_{x_k}[)_{1\leq k\leq m}$ d'intervalles ouverts telle que :

$$K_\varepsilon = [a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k \subset \bigcup_{k=1}^{m} J_k$$

avec :

$$\forall k \in \{1,\cdots,m\}, \sup_{(y,z)\in J_k^2} |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

(c) Pour $k \in E_1$, $t \in]a_k, a_{k+1}[$, on a :

$$|f(t) - \varphi(t)| = |f(t)| \leq M = \psi(t)$$

et pour $k \in E_2$, $t \in]a_k, a_{k+1}[$, on a $t \in \bigcup_{k=1}^{m} J_k$, donc :

$$|f(t) - \varphi(t)| = \left|f(t) - f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)\right| \leq \varepsilon = \psi(t)$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi(t)\,dt &= \sum_{k\in E_1} M(a_{k+1} - a_k) + \sum_{k\in E_2} \varepsilon(a_{k+1} - a_k) \\ &\leq M\sum_{k=1}^{p} \ell(I_k) + \varepsilon(b-a) \leq (M+b-a)\,\varepsilon\end{aligned}$$

La fonction f est donc Riemann-intégrable.

Exercice 50 *Montrer que la fonction* $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ *est Lebesgue-intégrable et non Riemann-intégrable sur* $[0,1]$.

Solution. Comme $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est dénombrable, il est négligeable et en conséquence mesurable de mesure nulle, donc $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est Lebesgue-intégrable d'intégrale nulle.
Comme f est discontinue en tout point de $[0,1]$ (si $a \in [0,1]$ est rationnel [resp. irrationnel], pour tout réel $\eta > 0$, on peut trouver un nombre irrationnel [resp. rationnel] x dans $]a-\eta, a+\eta[$ et on a $|f(x) - f(a)| = 1$, donc f est discontinue en a), elle n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 51 *Soient* I, *un intervalle réel d'intérieur non vide,* a *un point de* I *et* f, g *deux fonctions intégrables de* I *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer* $f = g$ *presque partout si, et seulement si,* $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt$ *pour tout* $x \in I$.

Solution. Avec la linéarité de l'intégrale, il revient au même de montrer que, pour toute fonction intégrable $f : I \to \mathbb{R}$, on a :

$$(f = 0 \; p.p.) \Leftrightarrow \left(\forall x \in I, \; \int_a^x f(t)\,dt = 0 \right)$$

Si f est nulle presque partout, il en est alors de même de $|f|$, ce qui signifie que l'ensemble $A = |f|^{-1}(\mathbb{R}^{+,*})$ est de mesure nulle.
Comme $|f|$ est mesurable, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de I telles que $|f| = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et en écrivant que $|f| = |f| \cdot \mathbf{1}_A$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_I |f|\,d\lambda &= \int_I |f| \cdot \mathbf{1}_A d\lambda = \int_I \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n \cap A} \right) d\lambda \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mu(A_n \cap A) = 0 \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités $\int_a^x |f(t)|\,dt \leq \int_I |f|\,d\lambda$ pour $x \leq a$ et $\int_x^a |f(t)|\,dt \leq \int_I |f|\,d\lambda$ pour $x \geq a$, on en déduit que $\int_x^a |f(t)|\,dt = 0$ pour tout $x \in I$.
Enfin avec $\left| \int_a^x f(t)\,dt \right| \leq \int_x^a |f(t)|\,dt$, on en déduit que $\int_x^a f(t)\,dt = 0$ pour tout $x \in I$.
Réciproquement, si $\int_x^a f(t)\,dt = 0$ pour tout $x \in I$, comme la fonction $x \mapsto \int_x^a f(t)\,dt$ est dérivable de dérivée égale à f presque partout (théorème de différentiation de Lebesgue), on en déduit que $f = 0$ presque partout.

– VII – Fonction définie par une intégrale

Exercice 52 ***Théorème de Fubini pour les fonctions continues sur un rectangle.***
Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b] \times [c,d], \mathbb{C})$, où $a < b$ et $c < d$, on lui associe les fonctions α et β définies sur $[c,d]$ par :

$$\forall z \in [c,d], \; \begin{cases} \alpha(z) = \displaystyle\int_c^z \left(\int_a^b f(t,x)\,dt \right) dx \\ \beta(z) = \displaystyle\int_a^b \left(\int_c^z f(t,x)\,dx \right) dt \end{cases}$$

1. *Montrer que la fonction α est de classe C^1 sur $[c,d]$ et donner une expression de sa dérivée α'.*
2. *On désigne par γ la fonction définie sur le rectangle $R = [a,b] \times [c,d]$ par :*

$$\gamma(t,z) = \int_c^z f(t,x)\,dx$$

Montrer que la fonction γ est continue sur R et qu'elle admet une dérivée partielle par rapport à z en tout point de R, cette dérivée $\dfrac{\partial \gamma}{\partial z}$ étant continue sur R.
3. *Montrer que la fonction β est de classe C^1 sur $[c,d]$ et donner une expression de sa dérivée β'.*
4. *Déduire de ce qui précède que :*

$$\forall z \in [c,d], \; \int_c^z \left(\int_a^b f(t,x)\,dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^z f(t,x)\,dx \right) dt$$

et en particulier :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(t,x)\,dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(t,x)\,dx \right) dt$$

Solution.

1. La fonction f est continue des deux variables et l'intégration se fait sur un intervalle compact, donc la fonction :
$$\varphi : x \mapsto \int_a^b f(t,x)\,dt$$
est continue sur $[c,d]$. La fonction α qui est une primitive de φ est de classes C^1 sur $[c,d]$, avec :
$$\forall z \in [c,d],\ \alpha'(z) = \varphi(z) = \int_a^b f(t,z)\,dt$$

2. Pour $(t,z) \in [a,b] \times]c,d]$, le changement de variable $x = c + \theta(z-c)$ avec $0 \leq \theta \leq 1$ donne :
$$\gamma(t,z) = (z-c)\int_0^1 f(t, c+\theta(z-c))\,d\theta$$
ce résultat étant encore valable pour $z = c$.
Comme la fonction $(\theta,t,z) \mapsto f(t,c+\theta(z-c))$ est continue sur $[0,1] \times [a,b] \times [c,d]$ et l'intégration se fait sur un segment, on en déduit que la fonction γ est continue sur $R = [a,b] \times [c,d]$.
La fonction γ est dérivable par rapport à z avec :
$$\frac{\partial \gamma}{\partial z}(t,z) = f(t,z)$$
qui est continue sur R.

3. Les fonctions γ et $\dfrac{\partial \gamma}{\partial z}$ sont continues sur R et l'intégration se fait sur un segment, donc la fonction β est de classe C^1 sur $[c,d]$ avec :
$$\beta'(z) = \int_a^b \frac{\partial \gamma}{\partial z}(t,z)\,dt = \int_b^b f(t,z)\,dt$$

4. On a $\alpha' = \beta'$ sur $[c,d]$ avec $\alpha(c) = \beta(c) = 0$, ce qui équivaut à $\alpha = \beta$, soit à :
$$\forall z \in [c,d],\ \int_c^z \left(\int_a^b f(t,x)\,dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_c^z f(t,x)\,dx\right) dt$$

Exercice 53 ***Théorème de Fubini pour les fonctions continues sur un triangle.***
Soient deux réels $a < b$ et φ une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le triangle :
$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq y \leq b\right\}$$

1. *Montrer que la fonction ψ définie sur le carré $C = [a,b]^2$ par :*
$$\forall (x,y) \in C,\ \psi(x,y) = \begin{cases} \varphi(x,y) - \varphi(x,x) & si\ (x,y) \in T \\ 0 & si\ (x,y) \notin T \end{cases}$$
est continue sur C.

2. *Soit $k \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que :*
$$\forall z \in [a,b],\ \int_a^z \left(\int_a^y k(x)\,dx\right) dy = \int_a^z \left(\int_x^z k(x)\,dy\right) dx$$

3. *Déduire de ce qui précède que :*

$$\forall z \in [a,b]\,,\ \int_a^z \left(\int_a^y \varphi(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^z \left(\int_x^z \varphi(x,y)\,dy\right) dx$$

et en particulier :

$$\int_a^b \left(\int_a^y \varphi(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_x^b \varphi(x,y)\,dy\right) dx$$

Solution.

1. On désigne par :

$$\Delta = \{(x,x) \mid a \leq x \leq b\}$$

la diagonale du carré C.
La continuité de la fonction ψ sur $C \setminus \Delta$ ne pose pas de problème.
On se donne un point $(x_0,x_0) \in \Delta$.
La fonction φ étant continue en $(x_0,x_0) \in T$, pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$(x,y) \in T,\ |x - x_0| \leq \eta,\ |y - x_0| \leq \eta,\ \Rightarrow\ |\varphi(x,y) - \varphi(x_0,x_0)| < \varepsilon$$

Pour $(x,y) \in C$ tel que $|x - x_0| \leq \eta$ et $|y - x_0| \leq \eta$, on a soit $(x,y) \notin T$ et dans ce cas $\psi(x,y) - \psi(x_0,x_0) = 0$, soit $(x,y) \in T$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned}|\psi(x,y) - \psi(x_0,x_0)| &= |\psi(x,y)| = |\varphi(x,y) - \varphi(x,x)| \\ &\leq |\varphi(x,y) - \varphi(x_0,x_0)| + |\varphi(x,x) - \varphi(x_0,x_0)| < 2\varepsilon\end{aligned}$$

On a donc ainsi prouvé la continuité de ψ en (x_0,x_0).

2. On définit les fonctions α et β sur $[a,b]$ par :

$$\begin{cases} \alpha(z) = \displaystyle\int_a^z \left(\int_a^y k(x)\,dx\right) dy \\ \beta(z) = \displaystyle\int_a^z \left(\int_x^z k(x)\,dy\right) dx = \int_a^z (z-x)\,k(x)\,dx = z\int_a^z k(x)\,dx - \int_a^z xk(x)\,dx \end{cases}$$

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec :

$$\begin{cases} \alpha'(z) = \displaystyle\int_a^z k(x)\,dx \\ \beta'(z) = \displaystyle\int_a^z k(x)\,dx + zk(z) - zk(z) = \int_a^z k(x)\,dx \end{cases}$$

On a donc $\alpha' = \beta'$ avec $\alpha(a) = \beta(a) = 0$, ce qui équivaut à $\alpha = \beta$ sur $[a,b]$.

3. Le théorème de Fubini appliqué à la fonction continue ψ sur le rectangle $[a,b] \times [a,z]$ donne :

$$\forall z \in [a,b]\,,\ \int_a^z \left(\int_a^b \psi(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_a^z \psi(x,y)\,dy\right) dx$$

avec :

$$\begin{aligned}\int_a^z \left(\int_a^b \psi(x,y)\,dx\right) dy &= \int_a^z \left(\int_a^y \psi(x,y)\,dx\right) dy \\ &= \int_a^z \left(\int_a^y \varphi(x,y)\,dx\right) dy - \int_a^z \left(\int_a^y \varphi(x,x)\,dx\right) dy\end{aligned}$$

et :

$$\int_a^b \left(\int_a^z \psi(t,x)\,dx\right) dt = \int_a^z \left(\int_a^z \psi(t,x)\,dx\right) dt = \int_a^z \left(\int_t^z \psi(t,x)\,dx\right) dt$$
$$= \int_a^z \left(\int_t^z \varphi(t,x)\,dx\right) dt - \int_a^z \left(\int_t^z \varphi(t,t)\,dx\right) dt$$

En utilisant l'égalité :

$$\int_a^z \left(\int_a^y \varphi(x,x)\,dx\right) dy = \int_a^z \left(\int_x^z \varphi(x,x)\,dy\right) dx$$

$(k(x) = \varphi(x,x))$, on déduit que :

$$\int_a^z \left(\int_a^y \varphi(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^z \left(\int_x^z \varphi(x,y)\,dy\right) dx$$

Exercice 54 ***L'intégrale de Gauss*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

1. *Montrer que la fonction* $f : t \mapsto e^{-t^2}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^+$.
2. *Pour tout réel* $R > 0$, *on note :*

$$I_R = \int_0^R e^{-t^2}dt$$

$$C_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq R\right\} \text{ et } T_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq R\right\}$$

   (a) *Montrer que :*

$$I_R^2 = 2\iint_{T_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

   (b) *Montrer que :*

$$I_R^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}}d\theta$$

   et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. *En munissant, pour tout entier* $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ *de sa structure euclidienne canonique, calculer* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}dx$.

Solution.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \geq 1$ on a $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$ avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-1}$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt < +\infty$.
2.
   (a) Pour tout réel $R > 0$, en utilisant le théorème de Fubini sur un carré, on a :

$$I_R^2 = \int_0^R e^{-x^2}dx \int_0^R e^{-y^2}dy = \iint_{C_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

   où $C_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq R\right\}$.
   La fonction $\varphi : (x,y) \mapsto e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ étant symétrique (on a $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$), on en déduit que :

$$I_R^2 = 2\iint_{T_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

   où $T_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq R\right\}$.

(b) Le changement de variable $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ nous donne :

$$\begin{aligned}(0 < y \leq x \leq R) &\Leftrightarrow (0 < r\sin(\theta) \leq r\cos(\theta) \leq R) \\ &\Leftrightarrow \left(0 < \tan(\theta) \leq 1 \text{ et } 0 < r \leq \frac{R}{\cos(\theta)}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(0 < \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ et } 0 < r \leq \frac{R}{\cos(\theta)}\right)\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\iint_{T_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{R}{\cos(\theta)}} e^{-r^2} r dr\right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\frac{R}{\cos(\theta)}} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta\right)\end{aligned}$$

et :

$$I_R^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta$$

Pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(\theta) \leq 1$ et $0 \leq e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}} \leq e^{-R^2}$, ce qui nous donne :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2} d\theta = \frac{\pi}{4} e^{-R^2} \underset{R\to+\infty}{\to} 0$$

donc $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R^2 = \frac{\pi}{4}$ et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{R\to+\infty} I_R = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par parité, on en déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n e^{-x_k^2} dx_1 \cdots dx_n = \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-x_k^2} dx_k = \pi^{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

Exercice 55 ***L'intégrale de Gauss*** $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

On considère les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2,\ G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$$

1. *Montrer que ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' + G' = 0$.*
2. *En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

Solution.

1. Les fonctions F et G sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ avec :

$$F'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } G'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt$$

(la fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et on intègre sur un segment).
Le changement de variable $y = xt$, pour $x > 0$, dans $G'(x)$ donne :

$$G'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-y^2} dy = -F'(x)$$

ce résultat étant encore valable pour $x = 0$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F'(x) + G'(x) = 0$$

2. Il en résulte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{4}$$

Puis avec :

$$0 \leq G(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{4} e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{4} - \lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \dfrac{\pi}{4}$, soit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 56 ***L'intégrale de Gauss*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+,*},\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$$

1. *Montrer que la fonction :*

$$F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et solution d'une équation différentielle de la forme $y' - y = -\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$, où λ est une constante réelle.*
3. *Résoudre cette équation différentielle et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

Exercice 57 ***L'intégrale de Dirichlet*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

1. Montrer que la fonction :

$$F : x \in \mathbb{R}^{+} \mapsto F(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^{+}$.

2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et solution de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.
3. Résoudre cette équation différentielle et en déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet.

Exercice 58 *$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions Lebesgue-intégrables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.*
Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on note :

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt$$

1. Soient f, g deux fonctions dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que :
   (a) pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t)\, g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;
   (b) la fonction $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, dt$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;
   (c) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|f\|_1$.

   La fonction $f * g$ est le produit de convolution de f et g.
2. Montrer que la loi de composition interne $*$ est commutative et associative sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 59 *Pour tout intervalle réel I non réduit à un point, on désigne par $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.*
$I = \mathbb{R}^{+}$ ou $I = [0, X]$ pour un réel $X > 0$, E est l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et T est l'opérateur de Volterra (ou opérateur de primitivation) défini par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in I,\ T(f)(x) = \int_{0}^{x} f(t)\, dt$$

Pour toutes fonctions f, g dans E, on définit le produit de convolution $f * g$ par :

$$\forall x \in I,\ f * g(x) = \int_{0}^{x} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

1. Montrer que :
   (a) la loi $*$ est une loi de composition interne sur E ;
   (b) cette loi est commutative ;
   (c) cette loi est associative ;
   (d) il n'existe pas d'élément neutre pour cette loi.
2. Montrer que pour toutes fonctions f, g dans E, on a :

$$T(f * g) = T(f) * g = f * T(g)$$

   et pour tout entier naturel n :

$$T^n(f * g) = T^n(f) * g = f * T^n(g)$$

3. *On suppose que f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Montrer que $f*g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec :*
$$(f*g)' = f(0)\,g + f'*g = g(0)\,f + f*g'$$
4. *On prend ici $I=[0,1]$ et on se propose de montrer le cas particulier suivant du théorème de Titchmarsh : si f,g sont deux fonctions développables en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ où $R>1$ telles que $f*g=0$, on a alors $f=0$ ou $g=0$.*
   (a) *On suppose que f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ avec $f(0)\neq 0$. Montrer que si $f*g=0$, on a alors $g^{(n)}(0)=0$ et $f*g^{(n+1)}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.*
   (b) *On suppose que f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ telles que $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$ et $f*g=0$. Montrer qu'on a $f'*g=0$ et $g^{(n)}(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.*
   (c) *Soient f,g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Montrer que si $f*g=0$, on a alors $f^{(n)}(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, ou $g^{(n)}(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.*
   (d) *Soient f,g deux fonctions développables en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ où $R>1$. Montrer que si $f*g=0$, on a alors $f=0$ ou $g=0$.*

Solution.

1.

(a) Pour f,g dans E, la fonction :
$$x\in I\mapsto f*g(x)=\int_0^x f(x-t)\,g(t)\,dt = x\int_0^1 f((1-\theta)\,x)\,g(\theta x)\,d\theta$$
est continue (la fonction $(\theta,x)\mapsto f((1-\theta)\,x)\,g(\theta x)$ est continue sur $[0,1]\times I$ et on intègre sur un segment), donc $*$ est une loi de composition interne sur E.

(b) Le changement de variable $y=x-t$ donne pour tout $x\in I$:
$$f*g(x)=\int_0^x f(y)\,g(x-y)\,dy = g*f(x)$$
D'où la commutativité du produit de convolution.

(c) Soient f,g,h dans E. Pour tout réel $z\in I$, on a :
$$\begin{aligned} f*(g*h)(z) &= \int_0^z f(z-x)\,g*h(x)\,dx = \int_0^z\left(\int_0^x f(z-x)\,g(x-t)\,h(t)\,dt\right)dx \\ &= \iint\limits_{0\leq t\leq x\leq z} f(z-x)\,g(x-t)\,h(t)\,dtdx \end{aligned}$$
et en utilisant le théorème de Fubini sur le triangle $T=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq t\leq x\leq z\right\}$, on aboutit à :
$$f*(g*h)(z)=\int_0^z\left(\int_t^z f(z-x)\,g(x-t)\,dx\right)h(t)\,dt$$
Le changement de variable $y=x-t$, à t fixé dans $[0,z]$ donne :
$$\begin{aligned} f*(g*h)(z) &= \int_0^z\left(\int_0^{z-t} f((z-t)-y)\,g(y)\,dy\right)h(t)\,dt \\ &= \int_0^z (f*g)(z-t)\,h(t)\,dt = (f*g)*h(z) \end{aligned}$$
Ce qui montre que le produit de convolution est associatif.

(d) Si $g\in E$ est un élément neutre pour la loi $*$, on a alors $f*g=f$ pour tout $f\in E$, donc $f(0)=f*g(0)=0$, ce qui n'est pas vérifié par toutes les fonctions f de E.

2. Pour $f \in E$, $T(f)$ est la primitive de f nulle en 0.
   On peut aussi remarquer que :
$$\forall f \in E,\ \forall x \in I,\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt = (T * 1)(x)$$
   Pour f, g dans E, du fait de l'associativité et de la commutativité du produit de convolution, on a :
$$T(f * g) = (f * g) * 1 = f * (g * 1) = f * T(g)$$
   et :
$$T(f * g) = T(g * f) = T(g) * f = f * T(g)$$
   On peut aussi le vérifier directement par le calcul en utilisant le théorème de Fubini sur un triangle :
$$\begin{aligned} T(f * g)(x) &= \int_0^x (f * g)(t)\,dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(t-y)\,g(y)\,dy\right) dt \\ &= \int_0^x \left(\int_y^x f(t-y)\,dt\right) g(y)\,dy = \int_0^x \left(\int_0^{x-y} f(u)\,du\right) g(y)\,dy \\ &= \int_0^x T(f)(x-y)\,g(y)\,dy = (T(f) * g)(x) \end{aligned}$$
   Par récurrence, on en déduit que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ T^n(f * g) = T^n(f) * g = f * T^n(g)$$
   C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ et supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a :
$$T^{n+1}(f * g) = T(T^n(f * g)) = T(T^n(f) * g) = T^{n+1}(f) * g$$
   Puis par commutativité du produit de convolution, on a la deuxième égalité.
3. On suppose d'abord que $f(0) = 0$. Dans cas, on a :
$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = T(f')(x)$$
   et :
$$f * g = T(f') * g = T(f' * g)$$
   ce qui donne par dérivation (la fonction $T(f' * g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc aussi $f * g$) :
$$(f * g)' = (T(f' * g))' = f' * g$$
   Dans le cas général, en notant $h = f - f(0)$, on a :
$$\begin{aligned} (f * g)' &= ((h + f(0)) * g)' = (h * g)' + f(0)(1 * g)' \\ &= h' * g + f(0)(T(g))' = f' * g + f(0)\,g \end{aligned}$$
   Puis par commutativité du produit de convolution, on a la deuxième égalité.
4.
   (a) Si $f * g = 0$, on a alors :
$$0 = (f * g)' = f(0)\,g + f' * g = g(0)\,f + f * g'$$
   donc :
$$g = -\frac{1}{f(0)} f' * g$$
   ce qui nous donne :
$$g(0) = -\frac{1}{f(0)}(f' * g)(0) = 0 \text{ et } f * g' = 0$$

On en déduit alors que $g^{(n)}(0) = 0$ et $f * g^{(n+1)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En effet, c'est vrai pour $n = 0$ et supposant le résultat acquis pour n, on a :

$$0 = \left(f * g^{(n+1)}\right)' = f(0) g^{(n+1)} + f' * g^{(n+1)} = g^{(n+1)}(0) f + f * g^{(n+2)}$$

donc :

$$g^{(n+1)} = -\frac{1}{f(0)} f' * g^{(n+1)}$$

ce qui nous donne :

$$g^{(n+1)}(0) = -\frac{1}{f(0)} \left(f' * g^{(n+1)}\right)(0) = 0 \text{ et } f * g^{(n+2)} = 0$$

(b) Si $f * g = 0$ et $f(0) = 0$, on a alors :

$$f' * g = (f * g)' - f(0) g = 0$$

et dans le cas où $f'(0) \neq 0$, on déduit de la question précédente que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Dans le cas où $f(0) \neq 0$ [resp. $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$] on a vu que $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(0) = 0$ et qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^{(n)}(0) \neq 0$. On a alors nécessairement $f'(0) = 0$ (sinon $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $f' * g = (f * g)' - f(0) g = 0$. Vérifions que $f^{(k)}(0) = 0$ et $f^{(k)} * g = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposant le résultat acquis jusqu'au rang $k \geq 1$, on a :

$$f^{(k+1)} * g = \left(f^{(k)} * g\right)' - f(0) g = 0$$

et $f^{(k+1)}(0) = 0$ (puisque $f^{(k)} * g = 0$, $f^{(k)}(0) = 0$ et $f^{(k+1)}(0) \neq 0$ entraînent $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

(d) Résulte du fait que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ (et même chose pour g) pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 60 ***Opérateurs de Volterra***

On se donne deux réels $a < b$ et E est l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si $\ker(\lambda Id - u) \neq \{0\}$.
On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur spectrale de $u \in \mathcal{L}(E)$ si $\lambda Id - u$ n'est pas bijective.
Le spectre de u est l'ensemble $\sigma(u)$ des valeurs spectrales de u.
Étant donnée une fonction $K \in \mathcal{C}^0\left([a, b]^2, \mathbb{R}\right)$, où $a < b$, on lui associe les endomorphismes de E, T_K et T_K^* définis par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [a, b],\ T_K(f)(x) = \int_a^x f(t) K(t, x)\, dt \tag{3}$$

et :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [a, b],\ T_K^*(f)(x) = \int_x^b f(t) K(x, t)\, dt$$

On dit que T_K est un opérateur de Volterra de noyau K.
Pour K constante égale à 1 sur $[0, 1]^2$, on notera simplement T l'opérateur de Volterra correspondant et T^* l'opérateur T_K^*.

1. *Montrer que T_K^* est l'unique endomorphisme de E tel que pour toutes fonctions f, g dans E, on ait :*

$$\langle T_K(f) \mid g \rangle = \langle f \mid T_K^*(g) \rangle$$

2. *On se propose de montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec :*

$$\|T_K\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x |K(t,x)|\, dt$$

   (a) *Montrer le résultat pour K à valeurs positives.*

   (b) *Montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec :*

$$\|T_K\|_\infty \leq \left\|T_{|K|}\right\|_\infty$$

   (c) *Justifier l'existence de $x_0 \in [a,b]$ tel que :*

$$\left\|T_{|K|}\right\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x |K(t,x)|\, dt = \int_a^{x_0} |K(t,x_0)|\, dt$$

   (d) *On désigne par $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions continues définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a,b],\ f_n(t) = \frac{K(t,x_0)}{|K(t,x_0)| + \varepsilon_n}$$

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_K(f_n)(x_0) = \left\|T_{|K|}\right\|_\infty$ et conclure.

3. *On suppose que K est à valeurs positives et on se propose de montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$ avec :*

$$\|T_K\|_1 = \sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(x,t)\, dt$$

   (a) *Montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$ avec :*

$$\|T_K\|_1 \leq \sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(x,t)\, dt$$

   (b) *Justifier l'existence de $x_0 \in [a,b]$ tel que :*

$$\sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(x,t)\, dt = \int_{x_0}^b K(x_0,t)\, dt$$

   (c) *Montrer que :*

$$\|T_K\|_1 = \sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(x,t)\, dt$$

4. *Montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans $(E, \|\cdot\|_2)$ et que :*

$$\|T_K\|_2 \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|K\|_\infty$$

   où $\|K\|_\infty = \sup\limits_{(x,t)\in[a,b]^2} |K(x,t)|$.

5. *On se propose de montrer que l'opérateur T_K n'a pas de valeur propre réelle non nulle.*

   (a) *On suppose que $K = 1$. Montrer que T n'admet pas de valeur propre.*

(b) *On revient au cas général.*
Comme pour $K = 0$ le résultat est évident, on suppose que $K \neq 0$.
On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et une onction $f \in E \setminus \{0\}$ tels que $_K(f) = \lambda f$.
On désigne par g la fonction définie par $g = T(f^2)$.

i. *Montrer que la fonction g est croissante et qu'il existe un réel $\alpha \in [a, b[$ tel que $g(x) = 0$ pour tout $x \in [a, \alpha]$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha, b]$.*

ii. *Montrer qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que :*

$$\forall x \in [a, b], \ \lambda^2 g'(x) \leq \beta g(x)$$

iii. *Conclure.*

(c) *On suppose que $[a, b] = [0, 1]$ et T_K est l'opérateur défini par :*

$$\forall f \in E, \ \forall x \in [0, 1], \ T_K(f)(x) = \int_0^x f(t) \cos(x - t) \, dt$$

(opérateur de convolution par la fonction $\cos$*).*

i. *Montrer que, pour toute fonction $f \in E$, la fonction $T_K(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.*

ii. *Montrer que T_K n'a pas de valeur propre.*

6. *Montrer que si K_1 et K_2 sont deux fonctions continues sur $[a, b]^2$, alors la composée $T_{K_1} \circ T_{K_2}$ est un opérateur de Volterra sur E.*

7. *On se propose de montrer que $\sigma(T_K) = \{0\}$.*

(a) *Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, l'application T_K^n est un opérateur de Volterra, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $K_n \in \mathcal{C}^0\left([a, b]^2, \mathbb{R}\right)$ telle que :*

$$\forall f \in E, \ \forall x \in [a, b], \ T_K^n(f)(x) = \int_a^x f(t) K_n(t, x) \, dt$$

(b) *Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :*

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \ |K_n(x, y)| \leq \frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} |x - y|^{n-1}$$

(c) *Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :*

$$\|T_K^n\|_2 \leq \frac{\|K\|_\infty^n (b - a)^n}{n!}$$

(d) *Montrer que la série $\sum T_K^n$ est convergente dans $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|_2)$, que $Id - T_K$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et donner une expression de $(Id - T_K)^{-1}$.*

(e) *Montrer que, pour tout réel non nul λ, l'opérateur $\lambda Id - T_K$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et retrouver le fait que T_K n'a pas de valeur propre non nulle.*

(f) *Montrer que $\sigma(T_K) = \{0\}$.*

8. *Pour cette question et les suivantes, $K = 1$.*

(a) *Montrer que, pour tout $f \in E$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$, on a :*

$$T^n(f)(x) = \int_a^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \, dt$$

la fonction $T^n(f)$ étant de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$.

(b) *Calculer* $\|T^n\|_\infty$ *et* $\|T^n\|_1$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
(c) *Donner une expression de* $(\lambda Id - T)^{-1}$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
(d) *Montrer que, pour tout* $f \in E$, *tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in [a,b]$, *on a :*

$$(T^*)^n (f)(x) = \int_x^b \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt$$

(e) *Montrer que, pour tout* $f \in E$, *tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in [a,b]$, *on a :*

$$T^n (f)(x) + (T^*)^n (f)(x) = \int_a^b \frac{|t-x|^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt$$

9. *Soit* H *un sous-espace vectoriel de dimension finie de* E *stable par* T. *Montrer que* $H = \{0\}$.
10. *Soient* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$ *telle que* $f(a) = 0$ *et* φ *la fonction définie sur l'intervalle ouvert* $]a,b[$ *par :*

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2(b-a)\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)}$$

(a) *Montrer que la fonction* φ *se prolonge par continuité en* b *et que la fonction* $\varphi \cdot f$ *se prolonge par continuité en* a.
(b) *Montrer que :*

$$\forall t \in \,]a,b[\,,\ \varphi^2(t) + \varphi'(t) = -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2}$$

(c) *Montrer que :*

$$\|f' - \varphi \cdot f\|_2^2 = \|f'\|_2^2 - \frac{\pi^2}{4(b-a)^2}\|f\|_2^2$$

(d) *En déduire que :*

$$\|f\|_2 \leq \frac{2(b-a)}{\pi}\|f'\|_2$$

l'égalité étant réalisée uniquement pour les fonctions $f : t \in [a,b] \mapsto \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)$, *où* λ *est une constante réelle.*

11. *Calculer* $\|T\|_2$.

Solution.

1. Comme pour l'opérateur T_K, on vérifie que $T_K^* \in \mathcal{L}(E)$.
Pour f, g dans E, on déduit du théorème de Fubini sur un triangle que :

$$\begin{aligned}
\langle T_K(f) \mid g\rangle &= \int_a^b T_K(f)(x)\, g(x)\, dt = \int_a^b \left(\int_a^x f(t) K(t,x)\, dt\right) g(x)\, dx \\
&= \int_a^b f(t) \left(\int_t^b g(x) K(t,x)\, dx\right) dt = \int_a^b f(t)\, T_K^*(g)(t)\, dt \\
&= \langle f \mid T_K^*(g)\rangle
\end{aligned}$$

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que :

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle T_K(f) \mid g\rangle = \langle f \mid u(g)\rangle$$

on a alors :

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f \mid T_K^*(g)\rangle = \langle f \mid u(g)\rangle$$

ou encore :

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f \mid (T_K^* - u)(g)\rangle = 0$$

ce qui équivaut à $u = T_K^*$ puisque $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

2.

(a) Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [a, b]$, on a :

$$|T_K(f)(x)| = \left|\int_a^x f(t) K(t,x)\,dt\right| \leq \left(\int_a^x K(t,x)\,dt\right) \|f\|_\infty$$
$$\leq \left(\sup_{x\in[a,b]} \int_a^x K(t,x)\,dt\right) \|f\|_\infty$$

donc :

$$\|T_K(f)\|_\infty \leq \left(\sup_{x\in[a,b]} \int_a^x K(t,x)\,dt\right) \|f\|_\infty$$

et l'application linéaire T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec :

$$\|T_K\|_\infty \leq \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x K(t,x)\,dt$$

Comme :

$$\|T_K(1)\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |T_K(1)(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x K(t,x)\,dt$$

on en déduit que :

$$\|T_K\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x K(t,x)\,dt$$

En particulier, pour $K = 1$, on a $\|T\|_\infty = b - a$.

(b) Pour tout $f \in E$ et tout $x \in [a, b]$, on a :

$$|T_K(f)(x)| = \left|\int_a^x f(t) K(t,x)\,dt\right| \leq \left(\int_a^x |f(t)|\,|K(t,x)|\,dt\right) = T_{|K|}(|f|)(x)$$

donc :

$$\|T_K(f)\|_\infty \leq \left\|T_{|K|}(|f|)\right\|_\infty \leq \left\|T_{|K|}\right\|_\infty \||f|\|_\infty = \left\|T_{|K|}\right\|_\infty \|f\|_\infty$$

et :

$$\|T_K\|_\infty \leq \left\|T_{|K|}\right\|_\infty$$

(c) La fonction :

$$\varphi : x \mapsto \int_a^x |K(t,x)|\,dt = T_{|K|}(1)(x)$$

étant continue sur le segment $[a, b]$, elle y est bornée et atteint ses bornes, il existe donc un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que :

$$\alpha = \sup_{x\in[a,b]} \varphi(x) = \varphi(x_0)$$

(d) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge simplement sur $[a, b]$ vers la fonction (en général non continue) $t \mapsto \text{signe}(K(x_0, t))$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a, b]$, on a $|f_n(t)| = \dfrac{|K(t,x_0)|}{|K(t,x_0)| + \varepsilon_n} < 1$, donc$\|f_n\|_\infty \leq 1$.

De plus, pour tout $t \in [a, b]$, on a :

$$|f_n(t) K(t,x_0) - |K(t,x_0)|| = \left|\frac{K^2(t,x_0)}{|K(t,x_0)| + \varepsilon_n} - |K(t,x_0)|\right| = \frac{\varepsilon_n |K(t,x_0)|}{|K(t,x_0)| + \varepsilon_n} < \varepsilon_n$$

donc la suite de fonctions $(f_n \cdot K(\cdot, x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction $|K(\cdot, x_0)|$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} T_K(f_n)(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{x_0} f_n(t) K(t,x_0)\,dt = \int_a^{x_0} |K(t,x_0)|\,dt = \left\|T_{|K|}\right\|_\infty$$

Avec $|T_K(f_n)(x_0)| \leq \|T_K(f_n)\|_\infty \leq \|T_K\|_\infty \|f_n\|_\infty \leq \|T_K\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit en faisant tendre n vers l'infini, que $\left\|T_{|K|}\right\|_\infty \leq \|T_K\|_\infty$ et l'égalité :

$$\|T_K\|_\infty = \left\|T_{|K|}\right\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x |K(t,x)|\, dt$$

Dans le cas particulier où $K(t,x) = \varphi(x)$ avec φ continue sur $[a,b]$, on a :

$$\|T_K\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} (x-a)\,|\varphi(x)|$$

3.

(a) Pour toute fonction $f \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\|T_K(f)\|_1 &= \int_a^b |T_K(f)(x)|\, dx \leq \int_a^b \left(\int_a^x |f(t)|\,|K(t,x)|\, dt\right) dx \\ &\leq \int_a^b \left(\int_t^b |K(t,x)|\, dx\right) |f(t)|\, dt \\ &\leq \left(\sup_{t\in[a,b]} \int_t^b |K(t,x)|\, dx\right) \|f\|_1\end{aligned}$$

(théorème de Fubini sur un triangle), donc l'application linéaire T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$ avec :

$$\|T_K\|_1 \leq \sup_{t\in[a,b]} \int_t^b |K(t,x)|\, dx$$

(b) La fonction :

$$\varphi : t \mapsto \int_t^b |K(t,x)|\, dx = T^*_{|K|}(1)(t)$$

étant continue sur le segment $[a,b]$, elle y est bornée et atteint ses bornes, il existe donc un réel $t_0 \in [a,b]$ tel que :

$$\sup_{t\in[a,b]} \varphi(t) = \varphi(t_0)$$

(c) Si $\varphi(t_0) = 0$, on a alors $\|T_K\|_1 = 0 = \sup\limits_{t\in[a,b]} \varphi(t)$.

Si $\varphi(t_0) = \displaystyle\int_{t_0}^b |K(t_0,x)|\, dx > 0$.

Par continuité de φ en t_0, on peut trouver, pour tout entier naturel n, un réel $\eta_n > 0$ tel que :

$$\forall t \in [a_n, b_n] = [a,b] \cap [t_0 - \eta_n, t_0 + \eta_n],\ \varphi(t) > 0 \text{ et } |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \frac{1}{n+1}$$

On désigne alors par $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction affine par morceaux et continue qui est nulle en dehors de $]a_n, b_n[$ et telle que :

$$\|f_n\|_1 = \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\, dx = 1$$

(voir la figure 1)

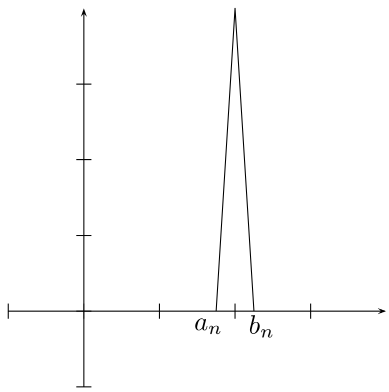

FIGURE 1 – graphe de f_n

Pour K à valeurs positives, comme f_n est aussi à valeurs positives, on a :

$$\begin{aligned}
\|T_K(f_n)\|_1 - \beta &= \int_a^b |T_K(f_n)(t)|\,dt - \int_{x_0}^b |K(t,x_0)|\,dt \\
&= \int_a^b \left(\int_a^t K(t,x) f_n(x)\,dx\right) dt - \int_{x_0}^b K(t,x_0)\,dt \\
&= \int_a^b \left(\int_x^b K(t,x)\,dt\right) f_n(x)\,dx - \int_{x_0}^b K(t,x_0)\,dt \int_a^b f_n(x)\,dx \\
&= \int_a^b \left(\int_x^b K(t,x)\,dt - \int_{x_0}^b K(t,x_0)\,dt\right) f_n(x)\,dx \\
&= \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_x^b K(t,x)\,dt - \int_{x_0}^b K(t,x_0)\,dt\right) f_n(x)\,dx \\
&= \int_{a_n}^{b_n} (\varphi(x) - \varphi(x_0))\, f_n(x)\,dx
\end{aligned}$$

et :

$$|\|T_K(f_n)\|_1 - \beta| \leq \int_{a_n}^{b_n} |\varphi(x) - \varphi(x_0)|\, f_n(x)\,dx \leq \varepsilon_n \int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\,dx = \varepsilon_n$$

de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_K(f_n)\|_1 = \beta$.
Avec $\|T_K(f_n)\|_1 \leq \|T_K\|_1 \|f_n\|_1 = \|T_K\|_1$, on en déduit que $\varphi(x_0) \leq \|T_K\|_1$ et :

$$\|T_K\|_1 = \varphi(x_0) = \sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(t,x)\,dt$$

4. On a :

$$\int_a^b (T_K(f)(x))^2\,dx = \int_a^b \left(\int_a^x K(x,t) f(t)\,dt\right)^2 dx$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[a,x]$, à x fixé dans $]a,b]$, on a :

$$\left(\int_a^x K(x,t) f(t)\,dt\right)^2 \leq \int_a^x (K(x,t))^2\,dt \int_a^x f^2(t)\,dt \leq \int_a^x (K(x,t))^2\,dt\, \|f\|_2^2$$

cette inégalité étant encore vraie pour $x = a$, donc :

$$\|T_K(f)\|_2^2 \leq \left(\int_a^b \left(\int_a^x (K(x,t))^2\,dt\right) dx\right) \|f\|_2^2$$

et on en déduit que T_K est linéaire continue de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans $(E, \|\cdot\|_2)$ avec

$$\|T\|_2^2 \leq \int_a^b \left(\int_a^x (K(x,t))^2 \, dt \right) dx \leq \|K\|_\infty^2 \int_a^b \left(\int_a^x dt \right) dx = \|K\|_\infty^2 \frac{(b-a)^2}{2}$$

5.

(a) Pour $f \in E$, $T(f)$ est la primitive de f nulle en a. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
Supposons que T admette une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou même $\lambda \in \mathbb{C}$). Il existe alors une fonction $f \in E \setminus \{0\}$ (ou $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C}) \setminus \{0\}$) telle que :

$$\forall x \in [a,b], \; T(f)(x) = \int_a^x f(t)\, dt = \lambda f(x) = \lambda T(f)'(x)$$

Si $\lambda = 0$, on a alors $T(f) = 0$ et $f = T(f)' = 0$, ce qui n'est pas.
Si $\lambda \neq 0$, on a alors $T(f)(x) = \alpha e^{\frac{1}{\lambda}(x-a)}$ avec $\alpha = T(f)(a) = 0$, donc $T(f) = 0$ et $f = T(f)' = 0$, ce qui n'est pas.
Dans les deux cas, on a une impossibilité, donc T n'admet pas de valeur propre réelle (ou même complexe).

(b)

i. On a, pour tout $x \in [a,b]$:

$$g(x) = T\left(f^2\right)(x) = \int_a^x f^2(t)\, dt$$

donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ et à valeurs positives sur $[a,b]$ avec :

$$g'(x) = f^2(x) \geq 0$$

donc g est croissante sur $[a,b]$.
Comme $g(a) = 0$, l'ensemble $A = \{x \in [a,b] \mid g(x) = 0\}$ est non vide majoré par b, il admet donc une borne supérieure α.
Par continuité de g, on a $g(\alpha) = 0$ (si $\alpha = a$, c'est clair, sinon, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in A$ tel que $\alpha - \dfrac{1}{n} < x_n \leq \alpha$ et $g(\alpha) = \lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = 0$).
Si $\alpha = b$, on a alors $g(b) = \displaystyle\int_a^b f^2(t)\, dt = 0$ et $f = 0$, ce qui n'est pas. On a donc $\alpha \in [a,b[$.
Pour tout $x \in [a,\alpha]$, on a $0 \leq g(x) \leq g(\alpha) = 0$, donc $g(x) = 0$.
Un réel $x \in]\alpha, b]$ n'est pas dans A, donc $g(x) > 0$.

ii. Pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$\lambda f(x) = T_K(f)(x) = \int_a^x K(x,t) f(t)\, dt$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que :

$$\lambda^2 f^2(x) \leq \int_a^x K^2(x,t)\, dt \int_a^x f^2(t)\, dt \leq (b-a) \|K\|_\infty^2 g(x)$$

soit :

$$\lambda^2 g'(x) \leq \beta g(x)$$

où $\beta = (b-a)\|K\|_\infty^2 > 0$ puisque $K \neq 0$.

iii. Pour tout $x \in]\alpha, b]$, on a $\lambda^2 \dfrac{g'(x)}{g(x)} \leq \beta$, ce qui signifie que la fonction :

$$h : x \mapsto \beta(x-\alpha) - \lambda^2 \ln(g(x))$$

est croissante sur $]\alpha, b]$, donc :

$$\forall x \in]\alpha, b] \, , \; h(x) = \beta(x - \alpha) - \lambda^2 \ln(g(x)) \leq h(b) = \beta(b - \alpha) - \lambda^2 \ln(g(b))$$

ce qui contredit :

$$\lim_{x \to \alpha^+} h(x) = +\infty$$

pour $\lambda \neq 0$.
En définitive, T_K n'a pas de valeur propre réelle non nulle.

(c)

i. Pour $f \in E$ et $x \in [0, 1]$, on a :

$$T_K(f)(x) = \cos(x) \int_0^x f(t) \cos(t) \, dt + \sin(x) \int_0^x f(t) \sin(t) \, dt$$

donc $T_K(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ avec :

$$\begin{aligned} T_K(f)'(x) &= -\sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t) \, dt + \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) \, dt \\ &\quad + f(x) \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) \\ &= \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) \, dt - \sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t) \, dt + f(x) \end{aligned}$$

ii. On sait déjà que T_K n'a pas de valeur propre non nulle.
Il s'agit donc d'étudier le noyau de T_K.
Si $T_K(f) = 0$, on a aussi $T_K(f)' = 0$, soit :

$$f(x) = \sin(x) \int_0^x f(t) \cos(t) \, dt - \cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) \, dt$$

et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ avec :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \int_0^x f(t) \cos(t) \, dt + \sin(x) \int_0^x f(t) \sin(t) \, dt \\ &\quad + f(x) (\sin(x) \cos(x) - \cos(x) \sin(x)) \\ &= T_K(f)(x) = 0 \end{aligned}$$

ce qui nous donne $f = f(0) = 0$.
Donc $\ker(T_K) = \{0\}$ et T_K n'a pas de valeur propre.

6. Pour $f \in E$ et $x \in [a, b]$, on a :

$$\begin{aligned} T_{K_1} \circ T_{K_2}(f)(x) &= \int_a^x K_1(x, t) \, T_{K2}(f)(t) \, dt = \int_a^x \left(\int_a^t f(y) \, K_1(x, t) \, K_2(t, y) \, dy \right) dt \\ &= \int_a^x \left(\int_y^x K_1(x, t) \, K_2(t, y) \, dt \right) f(y) \, dy = \int_a^x K_3(x, y) \, f(y) \, dy \end{aligned}$$

(théorème de Fubini sur un triangle) où on a posé :

$$\begin{aligned} K_3(x, y) &= \int_y^x K_1(x, t) \, K_2(t, y) \, dt \\ &= (x - y) \int_0^1 K_1(x, y + \theta(x - y)) \, K_2(y + \theta(x - y), y) \, d\theta \end{aligned}$$

pour $(x, y) \in [a, b]^2$.
Comme la fonction :

$$(\theta, x, y) \mapsto K_1(x, y + \theta(x - y)) \, K_2(y + \theta(x - y), y)$$

est continue sur $[0, 1] \times [a, b]^2$ et l'intégration se fait sur un segment, on déduit que l'application K_3 est continue sur $[a, b]^2$ et $T_{K_1} \circ T_{K_2}$ est un opérateur de Volterra sur E.

7.

(a) Du résultat précédent, on déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que les T_K^n sont des opérateurs de Volterra, les noyaux associés étant définis par $K_1 = K$ et :

$$K_{n+1}(x,y) = \int_y^x K_n(t,y) K(x,t)\, dt$$

(b) On procède par récurrence sur $n \geq 1$.
C'est vrai pour $n = 1$ et supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a, pour $(x,y) \in [a,b]^2$:

$$\begin{aligned} |K_{n+1}(x,y)| &= \left| \int_y^x K_n(t,y) K(x,t)\, dt \right| \leq \|K\|_\infty \frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} \left| \int_y^x |t-y|^{n-1}\, dt \right| \\ &\leq \|K\|_\infty \frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} \frac{|x-y|^n}{n} = \frac{\|K\|_\infty^{n+1}}{n!} |x-y|^n \end{aligned}$$

(distinguer les cas $x \leq y$ et $x > y$).

(c) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in E$ et $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} (T_K^n(f)(x))^2 &= \left(\int_a^x f(t) K_n(x,t)\, dt \right)^2 \leq \int_a^x f^2(t)\, dt \int_a^x K_n^2(x,t)\, dt \\ &\leq \|f\|_2^2 \left(\frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} \right)^2 \int_a^x (x-t)^{2(n-1)}\, dt \\ &\leq \|f\|_2^2 \left(\frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} \right)^2 \frac{(x-a)^{2n-1}}{2n-1} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \|T_K^n(f)\|_2^2 &\leq \|f\|_2^2 \left(\frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} \right)^2 \int_a^b \frac{(x-a)^{2n-1}}{2n-1} dx = \|f\|_2^2 \left(\frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} \right)^2 \frac{(b-a)^{2n}}{2n(2n-1)} \\ &\leq \|f\|_2^2 \left(\frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} \right)^2 \frac{(b-a)^{2n}}{n^2} \end{aligned}$$

($2n(2n-1) \geq n^2$ équivaut à $3n \geq 2$ pour $n \geq 1$) et :

$$\|T_K^n\|_2 \leq \frac{\|K\|_\infty^n (b-a)^n}{n!}$$

(d) De $\|T_K^n\|_2 \leq \dfrac{\|K\|_\infty^n (b-a)^n}{n!}$ pour tout $n \geq 1$, on déduit que la série $\sum T_K^n$ est normalement convergente dans $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|_2)$ et avec :

$$\begin{aligned} (Id - T_K) \circ \sum_{n=0}^{+\infty} T_K^n &= (Id - T_K) \circ \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^n T_K^k = \lim_{n \to +\infty} (Id - T_K) \circ \sum_{k=0}^n T_K^k \\ &= \lim_{n \to +\infty} \left(Id - T_K^{n+1} \right) = Id \end{aligned}$$

(continuité de la composition), on déduit que :

$$(Id - T_K)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T_K^n$$

soit, pour $f \in E$ et $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}
(Id - T_K)^{-1}(f)(x) &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} T_K^n(f)(x) \\
&= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^x f(t) K_n(x,t)\, dt \\
&= f(x) + \int_a^x f(t) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} K_n(x,t) \right) dt \\
&= f(x) + \int_a^x f(t) L(x,t)\, dt
\end{aligned}$$

où :

$$L(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_n(x,t)$$

la convergence uniforme de cette série étant assurée par les inégalités :

$$|K_n(x,t)| \leq \frac{\|K\|_\infty^n (b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

(e) En écrivant que $\lambda Id - T_K = \lambda \left(Id - \frac{1}{\lambda} T_K \right) = \lambda \left(Id - T_{\frac{1}{\lambda}K} \right)$ et en remplaçant la fonction K par $\frac{1}{\lambda} K$, on déduit que $\lambda Id - T_K$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'endomorphisme $\lambda Id - T_K$ est en particulier injectif, donc λ ne peut être valeur propre de T_K.

(f) Comme $T_K(f)(a) = 0$, l'opérateur T_K n'est pas surjectif et en conséquence n'est pas inversible, donc $\sigma(T_K) = \{0\}$.

8.

(a) C'est vrai pour $n = 1$ et supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}
T^{n+1}(f)(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} T(f)(t)\, dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} T(f)(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt \\
&= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt
\end{aligned}$$

La fonction $T^{n+1}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ de dérivée $T^n(f)$ qui est de classe $\mathcal{C}^n$, donc $T^{n+1}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$.
On a aussi $(T^n(f))^{(k)}(a) = 0$ pour k compris entre 0 et $n-1$.

(b) On a donc $T^n = T_{K_n}$, où $K_n(x,t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$ sur $[a,b]^2$ et :

$$\|T^n\|_\infty = \|T_{K_n}\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \sup_{x \in [a,b]} \frac{(x-a)^n}{n!} = \frac{(b-a)^n}{n!}$$

En remarquant qu'on peut aussi écrire $T^n = T_{K_n}$, avec $K_n(x,t) = \frac{|x-t|^n}{n!} \geq 0$ sur $[a,b]^2$, on déduit que :

$$\|T^n\|_1 = \sup_{t \in [a,b]} \int_t^b \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dx = \sup_{t \in [a,b]} \frac{(b-t)^n}{n!} = \frac{(b-a)^n}{n!}$$

(c) On a $K_n(x,y) = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ pour tout $n \geq 1$ et $(Id - T)^{-1} = Id + T_L$ avec :

$$L(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{x-t}$$

donc :

$$(Id - T)^{-1}(f)(x) = f(x) + \int_a^x e^{x-t} f(t)\,dt$$

et, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
(\lambda Id - T)^{-1}(f)(x) &= \frac{1}{\lambda}\left(Id - \frac{1}{\lambda}T\right)^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^n}T^n(f)(x) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^n}\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(f(x) + \frac{1}{\lambda}\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^{n-1}}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda^2}\int_a^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)}f(t)\,dt
\end{aligned}$$

(d) C'est vrai pour $n = 1$ et supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}
(T^*)^{n+1}(f)(x) &= \int_x^b \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}T^*(f)(t)\,dt = \left[\frac{(x-t)^n}{n!}T^*(f)(t)\right]_x^b + \int_x^b \frac{(x-t)^n}{n!}f(t)\,dt \\
&= \int_x^b \frac{(t-x)^n}{n!}f(t)\,dt
\end{aligned}$$

(e) On a :

$$\begin{aligned}
T^n(f)(x) + (T^*)^n(f)(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt + \int_x^b \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt \\
&= \int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt + \int_x^b \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt \\
&= \int_a^b \frac{|t-x|^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt
\end{aligned}$$

9. Supposons que $H \neq \{0\}$, notons $n = \dim(H) \geq 1$ et $\pi(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ le polynôme minimal de la restriction de T à H avec $1 \leq p \leq n$ et $a_p = 1$.
Pour toute fonction $f \in E$, on a $\sum_{k=0}^{p} a_k T^k(f) = 0$. La fonction $y = T^p(f)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$ avec $y^{(k)} = T^{p-k}(f)$ pour $1 \leq k \leq p$ et $y^{(k)}(a) = 0$ pour $0 \leq k \leq p-1$, donc y est solution du problème de Cauchy :

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y^{(p-k)} = 0 \text{ avec } y^{(k)}(a) = 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq p-1$$

ce qui impose $y = 0$ par unicité de cette solution, ce qui contredit $H \neq \{0\}$.
En définitive, $H = \{0\}$ est l'unique sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par T.

10.

(a) Comme $\lim\limits_{t\to b^-} \varphi(t) = 0$, la fonction φ se prolonge par continuité en b en posant $\varphi(b) = 0$.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec $f(a) = 0$, on a :

$$\lim_{t\to a^+} \frac{f(t)}{t-a} = \lim_{t\to a^+} \frac{f(t) - f(a)}{t-a} = f'(a)$$

et :

$$\varphi(t) \cdot f(t) = \frac{\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)} \frac{f(t)}{t-a} \underset{t\to a^+}{\to} f'(a)$$

donc $\varphi \cdot f$ se prolonge par continuité en a en posant $(\varphi \cdot f)(a) = f'(a)$.

(b) Pour tout $t \in \left]a,b\right[$, on a $\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)} = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\frac{b-t}{b-a}\right)} = -\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{b-t}{b-a}\right)$ et :

$$\varphi'(t) = -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{b-t}{b-a}\right)\right) = -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2} - \varphi^2(t)$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}\left\|f' - \varphi \cdot f\right\|_2^2 &= \int_a^b \left(f'(t) - \varphi(t) \cdot f(t)\right)^2 dt \\ &= \left\|f'\right\|_2^2 + \int_a^b \left(\varphi^2(t) f^2(t) - 2\varphi(t) f(t) f'(t)\right) dt\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\varphi^2 f^2 - 2\varphi \cdot f \cdot f' &= -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2} f^2 - \left(\varphi' f^2 + 2\varphi \cdot f \cdot f'\right) \\ &= -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2} f^2 - \left(\varphi f^2\right)'\end{aligned}$$

sur l'intervalle $\left]a,b\right[$, ce qui nous donne pour $a < \alpha < \beta < b$:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \left(\varphi^2(t) f^2(t) - 2\varphi(t) f(t) f'(t)\right) dt &= -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2}\int_\alpha^\beta f^2(t)\,dt - \int_\alpha^\beta \left(\varphi f^2\right)'(t)\,dt \\ &= -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2}\int_\alpha^\beta f^2(t)\,dt - \left(\varphi(\beta) f^2(\beta) - \varphi(\alpha) f^2(\alpha)\right)\end{aligned}$$

et faisant tendre (α,β) vers (a,b), on aboutit à :

$$\begin{aligned}\left\|f' - \varphi \cdot f\right\|_2^2 &= \left\|f'\right\|_2^2 - \frac{\pi^2}{4(b-a)^2}\left\|f\right\|_2^2 - \left(\varphi(b) f^2(b) - (\varphi \cdot f)(a) f(a)\right) \\ &= \left\|f'\right\|_2^2 - \frac{\pi^2}{4(b-a)^2}\left\|f\right\|_2^2\end{aligned}$$

(d) On en déduit que $\left\|f'\right\|_2^2 - \dfrac{\pi^2}{4(b-a)^2}\left\|f\right\|_2^2 \geq 0$, soit que $\left\|f\right\|_2 \leq \dfrac{2(b-a)}{\pi}\left\|f'\right\|_2$.
L'égalité $\left\|f\right\|_2 = \dfrac{2(b-a)}{\pi}\left\|f'\right\|_2$ est réalisée si, et seulement si, $f' = \varphi \cdot f$, ce qui équivaut à :

$$f(t) = \lambda e^{\Phi(t)}$$

pour tout $t \in \left]a,b\right]$, où Φ est la primitive de φ nulle en b, soit :

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= -\int_t^b \varphi(x)\,dx = -\frac{\pi}{2(b-a)}\int_t^b \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x-a}{b-a}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x-a}{b-a}\right)} dx = -\left[\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x-a}{b-a}\right)\right)\right]_t^b \\ &= \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)\right)\end{aligned}$$

On a donc :

$$f(t) = \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)$$

pour tout $t \in]a,b]$, cette égalité étant également assurée en a par continuité.

11. Pour toute fonction $f \in E$, la fonction $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec $(T(f))' = f$ et $(T(f))(a) = a$. On déduit alors de la question précédente que :

$$\|T(f)\|_2 \leq \frac{2(b-a)}{\pi}\left\|(T(f))'\right\|_2 = \frac{2(b-a)}{\pi}\|f\|_2$$

donc $\|T\|_2 \leq \dfrac{2(b-a)}{\pi}$.

Pour $f(t) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{t-a}{b-a}\right)$, on a $T(f)(t) = \dfrac{2(b-a)}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{t-a}{b-a}\right)$ et $\|T(f)\|_2 = \dfrac{2(b-a)}{\pi}\|f\|_2$, donc $\|T\|_2 = \dfrac{2(b-a)}{\pi}$.

– VIII – Théorèmes de changement de variables et de Fubini sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 61 *Quelle est l'image de $\mathcal{U} = \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ par l'application qui à (x,y) associe $(x+y,y)$? Montrer que cette application est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur son image. En déduire la valeur de $\int_{\mathcal{U}} e^{-(x+y)^2}dx\,dy$.*

Solution. Notons

$$\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \text{ et } \mathcal{V} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \mid u > v\right\}$$

L'application $\varphi : (x,y) \mapsto (x+y,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$. Elle est injective ($(x+y,y) = (x'+y',y')$ impose $y = y'$ et $x = x'$) et surjective (tout $(u,v) \in \mathcal{V}$ s'écrit $(u,v) = (x+y,y)$ avec $y = v > 0$ et $x = u - v > 0$), c'est donc une bijection. Comme $\varphi^{-1} : (u,v) \mapsto (u-v,v)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$, cette application φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$.
On peut utiliser le théorème de changement de variables pour écrire que :

$$\begin{aligned} I = \int_{\mathcal{U}} e^{-(x+y)^2}dx\,dy &= \int_{\mathcal{V}} e^{-u^2}\left|J_{\varphi^{-1}}(u,v)\right|du\,dv = \int_{\mathcal{V}} e^{-u^2}du\,dv \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^u e^{-u^2}dv\right)du = \int_0^{+\infty} ue^{-u^2}du = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 62 *Soient a et b deux réels tels que $-1 < a < b$.*

1. *Montrer que la fonction la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = y^x$ est intégrable sur le rectangle $[a,b] \times [0,1]$.*
2. *En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln(y)}dy$.*

Solution.

1. La fonction $f : (x,y) \mapsto y^x = e^{x\ln(y)}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+,*}$, donc mesurable, à valeurs strictement positives. Dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]\times[0,1]} f(x,y)\,dxdy &= \int_a^b\left(\int_0^1 y^x dy\right)dx = \int_a^b\left[\frac{y^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 dx \\ &= \int_a^b \frac{dx}{x+1} = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right) \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

donc f est intégrable sur $[a,b]\times[0,1]$ avec :

$$\int_{[a,b]\times[0,1]} f(x,y)\,dxdy = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

2. On a aussi :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]\times[0,1]} f(x,y)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_a^b e^{x\ln(y)}dx\right)dy = \int_0^1 \left[\frac{e^{x\ln(y)}}{\ln(y)}\right]_a^b dy\\ &= \int_0^1 \frac{y^b-y^a}{\ln(y)}\,dy\end{aligned}$$

donc :

$$\int_0^1 \frac{y^b-y^a}{\ln(y)}\,dy = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

Exercice 63 *La fonction* $f:(x,y)\mapsto e^{-xy}\sin(x)\sin(y)$ *est-elle intégrable sur* $\mathcal{U}=\left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ *?*

Solution. La fonction f est continue, donc mesurable sur $\mathbb{R}^2$.
On partitionne l'ouvert $\mathcal{U}$ sous la forme $\mathcal{U}=\bigcup\limits_{k=1}^{4} R_k$, où :

$$R_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\le 1 \text{ et } 0<y\le 1\right\}$$

$$\begin{aligned}R_2&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>1 \text{ et } 0<y\le 1\right\}\\ R_3&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x\le 1 \text{ et } y>1\right\}\\ R_4&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>1 \text{ et } y>1\right\}\end{aligned}$$

Comme f est continue sur le compact $[0,1]^2$, elle y est intégrable, donc f est intégrable sur $R_1\subset[0,1]^2$.

$$\int_1^1\int_0^1 e^{-xy}\sin(x)\sin(y)\,dxdy$$

Pour tout $(x,y)\in R_2$, on a $|f(x,y)|\le ye^{-xy}$ avec :

$$\begin{aligned}\int_{R_2} ye^{-xy}dxdy &= \int_0^1\left(\int_1^{+\infty} ye^{-xy}dx\right)dy = \int_1^{+\infty}\left[-e^{-xy}\right]_{x=1}^{x=+\infty}dy\\ &= \int_1^{+\infty} e^{-y}dy = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

donc f est intégrable sur R_2.
Comme x et y jouent des rôles symétrique, f est intégrable sur R_3.
Pour tout $(x,y)\in R_4$, on a $|f(x,y)|\le e^{-xy}$ avec :

$$\begin{aligned}\int_{R_4} e^{-xy}dxdy &= \int_1^{+\infty}\left(\int_1^{+\infty} e^{-xy}dx\right)dy = \int_1^{+\infty}\left[-\frac{e^{-xy}}{y}\right]_{x=1}^{x=+\infty}dy\\ &= \int_1^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}dy<+\infty\end{aligned}$$

donc f est intégrable sur R_4.
En conclusion, f est intégrable sur $\left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$.

Exercice 64 *Soit f la fonction définie sur $R =]0,1[^2$ par :*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1. *La fonction f est-elle intégrable sur R ?*
2. *Calculer une primitive de $\dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ sur $\mathbb{R}$.*
3. *Calculer, pour tout $y \in]0,1[$:*
$$\varphi(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$$
4. *Montrer que :*
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx$$

Exercice 65 *Soient f, g les fonctions définies sur $R =]0,1[^2$ par :*

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ et } g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

1. *Montrer que f est intégrable sur R et calculer $\displaystyle\int_R f(x,y)\,dxdy$.*
2.
   (a) *Calculer, pour tout $y \in]0,1[$:*
   $$\varphi(y) = \int_0^1 g(x,y)\,dx$$
   (b) *Calculer :*
   $$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dx\right) dy \text{ et } \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dy\right) dx$$
   et conclure.

Exercice 66 ***Fonction Béta.***
On désigne par $\mathcal{H}$ le demi plan complexe défini par :

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

1. *Soient u, v deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{u-1}(1-t)^{v-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement si, $(u,v) \in \mathcal{H}^2$.*
   Définition : *la fonction béta (ou fonction de Bessel de seconde espèce) est la fonction définie sur $\mathcal{H}^2$ par :*
   $$\forall (u,v) \in \mathcal{H}^2,\ B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$$
2. *Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :*
$$B(u,v) = B(v,u) \text{ et } B(u+1,v) = \frac{u}{u+v} B(u,v)$$
3. *Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :*
$$\lim_{n\to+\infty} n^u B(u, v+n+1) = \Gamma(u)$$

4. Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a $B(u,v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$.

5. Calculer $B(n+1, m+1)$, pour n, m entiers naturels.

– IX – Espaces L^p

Exercice 67 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$ et $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.*
$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ est l'espace vectoriel des fonctions qui s'écrivent comme la somme d'une fonction mesurable bornée et d'une fonction nulle presque partout.
Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p = L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est l'espace vectoriel quotient $\dfrac{\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)}{\mathcal{N}(X, \mathcal{M}, \mu)}$ où $\mathcal{N}(X, \mathcal{M}, \mu)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ formé des fonctions nulles presque partout.
Une fonction $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est identifiée à sa classe d'équivalence $\overline{f} \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.
On se donne $p \in [1, \infty]$.

1. *Montrer que, si f, g sont à valeurs réelles et dans $\mathcal{L}^p$, alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont aussi dans $\mathcal{L}^p$.*
2. *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de L^p à valeurs réelles qui convergent dans L^p vers f et g respectivement. Montrer que la suite $(\max(f_n, g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p vers $\max(f,g)$.*
3. *Soient $q \in [1, \infty]$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \leq 1$ et $r \in [1, \infty]$ défini par $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$.*
   - *(a) Montrer que si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, on a alors $fg \in L^r$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*
   - *(b) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de L^p qui convergent dans L^p vers f et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^q qui convergent dans L^q vers g montrer alors que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fg dans L^r.*
4. *On suppose que p est fini. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^p et si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans L^∞ qui converge vers g presque partout, montrer alors que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fg dans L^p.*

Exercice 68 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ finie.*

1. *Montrer que pour tout $f \in L^\infty$, on a :*
$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$
2. *Soit $f \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p$ telle que $\sup_{1\leq p<\infty} \|f\|_p < \infty$. Montrer que $f \in L^\infty$.*
3. *Donner un exemple de fonction $f \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p$ telle que $f \notin L^\infty$.*

Exercice 69 *Pour cet exercice, $\mathbb{R}_+^\star$ est muni de la tribu de Borel et de la mesure de Lebesgue.*
Soit $p \in]1, \infty[$. À toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$, on associe les fonctions F, G, H définies sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\ G(x) = \frac{F(x)}{x^{\frac{1}{q}}},\ H(x) = \frac{F(x)}{x}$$
où $q = \dfrac{p}{p-1}$ désigne l'exposant conjugué de p.

1. *Montrer que $|F(x) - F(y)| \leq \|f\|_p |x-y|^{\frac{1}{q}}$ pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$. En déduire que F, G et H sont continues sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que $\|G\|_\infty \leq \|f\|_p$.*

2. *Montrer que* $\lim_{x \to 0^+} G(x) = 0.$

3. *Montrer que* $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$ *(on pourra commencer par supposer que* f *est continue et à support compact, puis utiliser le fait que l'espace des fonctions de* $\mathbb{R}_+^\star$ *dans* $\mathbb{R}$ *continues et à support compact est dense dans* $\left(L^p\left(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}\right), \|\cdot\|_p\right)$*).*

4. *On veut montrer que* $\|H\|_p \leq q \|f\|_p$, *c'est-à-dire que :*

$$\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p} dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p \, dx \tag{4}$$

(inégalité de Hardy).

   (a) *Montrer que, si* $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ *est continue, positive, et à support compact dans* $\mathbb{R}_+^\star$, *on a alors :*

$$\int_0^\infty \frac{F(x)^p}{x^p} dx = \frac{p}{p-1} \int_0^\infty \frac{F(x)^{p-1}}{x^{p-1}} f(x) \, dx$$

   En déduire que f *vérifie l'inégalité* (4).

   (b) *On suppose que* $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ *est continue et à support compact dans* $\mathbb{R}_+^\star$. *Montrer que* f *vérifie l'inégalité* (4).

   (c) *Par un argument de densité, montrer que* (4) *est vraie pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^p\left(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}^+\right)$, *puis montrer qu'elle est vraie pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^p\left(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}\right)$.

   (d) *En utilisant la suite de fonctions* $(f_n)_{n \geq 2}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 2, \; \forall t \in \mathbb{R}_+^\star, \; f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{]1,n[}(t)$$

   montrer que la constante $\frac{p}{p-1}$ *est optimale dans l'inégalité de Hardy* (4).

   (e) *Etudier les cas* $p = 1$ *et* $p = \infty$.