Thème : *Pavages directs du plan*

(version 1 – 27.02.08)

L'objet de ce petit texte est de décrire rapidement et en toute rigueur les pavages réguliers directs du plan. On montre en particulier qu'il existe, à conjugaison près dans le groupe affine, 5 *tels groupes.*

Prérequis

Il s'agit des points suivants :
- Classification des isométries affines (en particulier les isométries directes).
- Réseaux d'un plan vectoriel réel.
- Sous-groupes finis de $\mathrm{O}^+(E)$.

Les points 2 et 3 sont développés dans l'annexe.

1 Notations, définitions, exemples

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien (dont la direction est notée E). Nous noterons
- $\mathrm{Ga}(\mathcal{E})$ le groupe affine de $\mathcal{E}$,
- $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ le groupe des isométries affines de $\mathcal{E}$,
- $\mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$ le groupe des isométries affines directes de $\mathcal{E}$,
- $\mathrm{Sim}(\mathcal{E})$ le groupe des similitudes de $\mathcal{E}$.
- $\mathrm{Gl}(E)$ le groupe linéaire de E.
- $\mathrm{O}(E)$ le groupe orthogonal de E.

Un pavage régulier (qu'on abrège en pavage dans la suite) de $\mathcal{E}$ sera pour nous la donnée
- D'une partie compacte P d'intérieur non vide de $\mathcal{E}$,
- D'un sous-groupe G de $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$,

tels que
- $\displaystyle\bigcup_{g\in G} g(P) = \mathcal{E}$,
- $\forall g \in G,\ \mathrm{Int}(g(P)) \cap \mathrm{Int}(P) \neq \emptyset \Rightarrow g = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$

Un sous-groupe G de $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ pour lequel il existe une telle partie P est qualifié de groupe paveur. Il sera dit direct s'il est contenu dans $\mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$.
Nous lui associerons
- $T(G)$, sous-groupe des translations contenues dans G.
- $\Gamma(G)$, sous-groupe de E formé des u tels que $t_u \in T(G)$.
- $\overrightarrow{G} = \{\overrightarrow{f},\ f \in G\}$, sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$.

Voici quelques exemples de pavages réguliers. Lorsque le pavé admet une symétrie, on a ajouté la lettre "P" pour clarifier la façon dont un pavé est déduit d'un autre.

1.1 Pavage par un réseau - $p1$

On considère un réseau Γ de E, et $G = \{t_u, u \in \Gamma\}$. On peut prendre pour pavé $P = \{x \in \mathcal{E}; x = \Omega + \lambda u + \mu v\}$, où Ω est un point fixé dans $\mathcal{E}$, $\lambda, \mu \in [0, 1]$.

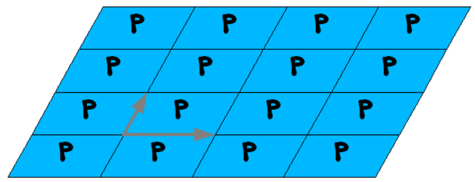

FIG. 1 – p1

Dans la classification à venir, tous les pavages par réseau seront comme équivalents. Dans la nomenclature usuelle en cristallographie, "le" groupe associé est noté $p1$.
Notons que, pour un groupe paveur donné G, la forme du pavé peut varier à l'infini. Le pavage suivant, obtenu par une simple déformation du pavé, est par exemple associé au même groupe paveur :

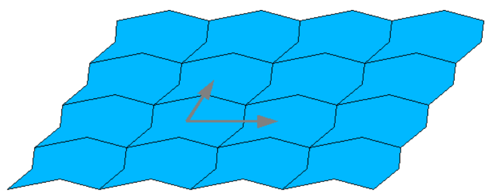

FIG. 2 – p1

C'est cette possibilité (plus une bonne dose d'imagination et de talent) qui est mise à profit par des artistes tels que Escher (ou bien avant lui ceux de l'Alhambra) pour obtenir leurs figures extraordinaires.

1.2 Pavage $p2$

Dans ce second exemple, le groupe est engendré par deux translations (flèches grises) et une rotation d'angle π (par rapport au point rouge).

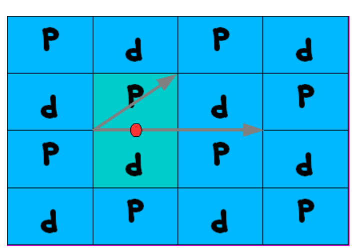

FIG. 3 – p2

On remarque le phénomène suivant : considérons l'un des pavé, et son image par une symétrie centrale du groupe (par exemple le pavé turquoise supérieur et son image par la symétrie par rapport au point rouge). On obtient alors la totalité du pavage en prenant l'image de ces deux pavés par les translations du groupe (lesquelles, comme on le montrera, forment un réseau). Ce phénomène est tout à fait systématique : si, pour un pavage quelconque (P, G), on considère un sous-ensemble C de G contenant un unique représentant de chaque classe de G modulo $T(G)$, on a une bijection de $T(G) \times C$ dans G définie par $(t, f) \mapsto t \circ f$. Les $g(P)$, $g \in G$, sont donc représentés de manière unique sous la forme $g(P) = (t \circ f)(P)$, où $f \in C$, $t \in T(G)$ (et C est fini ainsi qu'on le montrera ci-dessous).

1.3 Pavages p3, p4, p6

Voici encore trois exemples de pavages. Dans chaque cas on a dessiné en turquoise l'image d'un pavé P par un système un sous-ensemble C de G comme ci-dessus et, en marron, une base du réseau associé (voir plus loin).

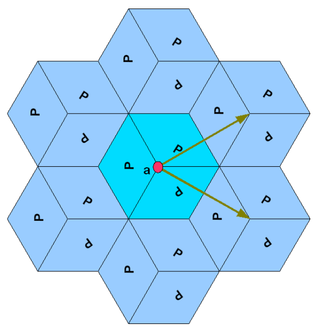

FIG. 4 – p3

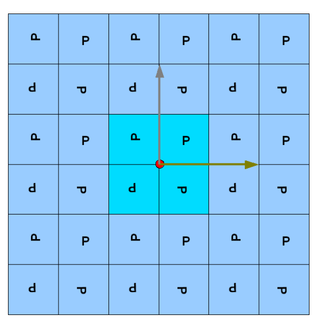

FIG. 5 – p4

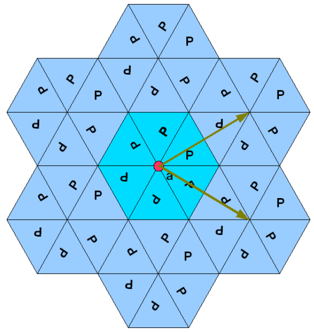

FIG. 6 – p6

2 Réseau associé à un pavage

Soit (P, G) un pavage du plan. On remarque que :

- $T(G)$ est le noyau du morphisme surjectif $G \to \overrightarrow{G}$. C'est donc un sous-groupe distingué de G, et $G/T(G)$ est canoniquement isomorphe à $\overrightarrow{G}$.
- $\Gamma(G)$ est invariant par $\overrightarrow{G}$. En effet[1], si $u \in \Gamma(G)$ et $g \in G$, $t_{\overrightarrow{g}(u)} = g \circ t_u \circ g^{-1} \in G$.

De plus :

Proposition 1 *Soit G un groupe paveur direct[2] du plan. Alors $\Gamma(G)$ est un réseau.*

Démonstration. Il suffit, d'après le théorème 3 de prouver que $\Gamma(G)$ contient une base de E et est discret.

Supposons par l'absurde $\Gamma(G) = \{0\}$. Alors G est abélien car pour tout $f, g \in G$, $fgf^{-1}g^{-1}$, qui est une translation, vaut $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Il en résulte que si a est le centre d'une rotation non triviale de G alors a est fixe par tous les éléments de G : toutes les rotations de G ont a pour centre. Donc $\bigcup_{g \in G} g(P)$ est borné, ce qui est absurde.

Supposons maintenant, toujours par l'absurde, l'existence de $u \in E \setminus \{0\}$ tel que $u \in \Gamma(G) \subset \mathbb{R}u$. Alors, pour tout $g \in G$, $\overrightarrow{g}(u) \in \Gamma(G) \subset \mathbb{R}u$, donc $\overrightarrow{g}(u) \in \mathbb{R}u$ puis, g étant une isométrie, $\overrightarrow{g}(u) = u$ ou $\overrightarrow{g}(u) = -u$. Donc g ne peut être qu'une translation de vecteur colinéaire à u ou une symétrie centrale. En outre, si g et h sont deux symétries centrales de G, de centres respectifs a et b, alors hg est une translation de vecteur $2\overrightarrow{ab}$ d'où $\overrightarrow{ab} \in \mathbb{R}u$. On en déduit que $\bigcup_{g \in G} g(P)$ est contenu dans une bande dont l'axe est dirigé par u, ce qui à nouveau est absurde. On a ainsi prouvé que $\Gamma(G)$ engendre E (en tant qu'espace vectoriel).

Pour voir enfin que $\Gamma(G)$ est discret, il suffit de choisir $\varepsilon > 0$ tel que P contienne une boule de rayon ε et de noter que, puisque $\mathrm{Int}(g(P)) \cap \mathrm{Int}(P) \neq \emptyset$ pour tout $g \in G$, on a $u \in \Gamma(G) \setminus \{0\} \Rightarrow \|u\| \geqslant 2\varepsilon$. Le théorème rappelé en annexe permet alors de conclure que $\Gamma(G)$ est un réseau.

[1]Cette formule de conjugaison est très naturelle et doit être parfaitement comprise. Elle signifie simplement que si on transforme le plan par g, alors l'application t_u "devient" la translation $t_{\overrightarrow{g}(u)}$, selon le diagramme $\begin{array}{ccccc} & \mathcal{E} & \xrightarrow{t_u} & \mathcal{E} & \\ g & \downarrow & & \downarrow & g \\ & \mathcal{E} & \xrightarrow[t_{\overrightarrow{g}(u)}]{} & \mathcal{E} & \end{array}$

[2]Cet énoncé reste vrai, et n'est pas beaucoup plus difficile à établir, pour un groupe paveur quelconque.

3 Transformation d'un pavage par une application affine

Soient (P, G) un pavage de $\mathcal{E}$ et $f \in \mathrm{Ga}(\mathcal{E})$. Transformer le pavage par f, c'est considérer l'ensemble des parties $f(Q)$, où Q parcourt le pavage initial. Ce sont donc les parties de la forme $f(g(P))$, où g parcourt G, ou encore les $(f \circ g \circ f^{-1})(P')$, où $P' = f(P)$. Notons que l'image d'un pavage par une bijection affine n'est en général pas un pavage (du moins au sens ci-dessus), car le conjugué d'une isométrie par une application affine n'est pas en général une isométrie. On est néanmoins amené à considérer le groupe $G' = fGf^{-1}$, conjugué de G par f, et à définir :

- Deux groupes paveurs G et G' sont dits équivalents par similitude s'ils sont conjugués dans $\mathrm{Sim}(\mathcal{E})$: $\exists f \in \mathrm{Sim}(\mathcal{E});\ G' = fGf^{-1}$
- Ils sont dits affinement équivalents (ou plus brièvement équivalents) s'ils sont conjugués dans $\mathrm{Ga}(\mathcal{E})$: $\exists f \in \mathrm{Ga}(\mathcal{E});\ G' = fGf^{-1}$

On voit tout de suite qu'il existe une infinité de classes de groupes paveurs pour la conjugaison par similitude. Deux réseaux de translations par exemple ne sont en effet que fort rarement équivalents par similitude. Beaucoup plus souple est la relation d'équivalence affine, pour laquelle l'ensemble des classes d'équivalences est considérablement réduit. Les réseaux de translation par exemple sont tous affinement équivalents. Le nombre de classes d'équivalence pour cette relation est même fini et, en fait, égal à 17. Dans la suite, on prouve qu'en se restreignant aux groupes paveurs directs, on obtient exactement 5 classes d'équivalence.

4 Classification des groupes paveurs directs

Théorème 1 – *Si G est un groupe paveur direct, alors $\overrightarrow{G} \simeq G/T(G)$ est isomorphe à un groupe cyclique d'ordre $1, 2, 3, 4$ ou 6 (en particulier il est fini).*

- *Soit $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Il existe, à conjugaison près dans le groupe affine, un et un seul groupe paveur G pour lequel $\overrightarrow{G}$ est cyclique d'ordre n.*
- *Si $n \in \{3, 4, 6\}$. Deux groupes paveurs G_1 et G_2 pour lesquels $\overrightarrow{G_1}$ et $\overrightarrow{G_2}$ sont cycliques d'ordre n sont équivalents par similitude.*

Démonstration.

- Soit G est un groupe paveur direct. En écrivant la matrice de f dans une base du réseau $\Gamma(G)$, qui est par définition stable par G, on voit que $\mathrm{Tr}(f) \in \mathbb{Z}$. Or, si f est une rotation d'angle θ, $\mathrm{Tr}(f) = 2\cos(\theta)$. Donc $\cos(\theta) \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Par conséquent $\overrightarrow{G}$ est fini et le théorème 2 montre que $\overrightarrow{G}$ est cyclique, clairement d'ordre $1, 2, 3, 4$ ou 6.
- L'existence d'un groupe paveur pour lequel $\overrightarrow{G}$ est cyclique d'ordre n (où $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$) est immédiate dès lors qu'on exhibe un pavage répondant à cette condition, ce qu'on a fait dans la première partie.
- Soient $n \in \{1, 2\}$ et deux pavages (P_1, G_1), (P_2, G_2) tels que $\overrightarrow{G_1}$ et $\overrightarrow{G_2}$ soient cycliques d'ordre n. Il existe d'après le lemme ci-après deux points a_1 et a_2 tels que $G_i^{a_i} \simeq \overrightarrow{G_i}$. Soient encore (u_1, v_1) et (u_2, v_2) des bases de $\Gamma(G_1)$ et $\Gamma(G_2)$. Soit enfin f l'application affine définie par $f(a_1) = a_2$, $f(u_1) = u_2$ et $f(v_1) = v_2$. Alors G_i est engendré par les translations t_{u_i}, t_{v_i} si $n = 1$, et par ces translations ainsi que la symétrie centrale r_{a_i} de centre a_i si $n = 2$. Comme t_{u_2}, t_{v_2} et r_{a_2} sont les conjugués de t_{u_1}, t_{v_1} et r_{a_1} respectivement, on a $G_2 = fG_1f^{-1}$.
- Soient enfin $n \in \{3, 4, 6\}$ et deux pavages (P_1, G_1), (P_2, G_2) tels que $\overrightarrow{G_1}$ et $\overrightarrow{G_2}$ soient cycliques d'ordre n. Choisissons a_1 et a_2 comme ci-dessus et notons r_i un générateur de $G_i^{a_i}$. Soit u_i un

élément de norme minimale de $\Gamma(G) \setminus \{0\}$ et $v_i = g(u_i)$. Alors (u_i, v_i) est une famille libre et, puisque $\|v_i\| = \|u_i\|$, le théorème 3 montre que c'est une base de $\Gamma(G_i)$. Soit f l'application affine définie par $f(a_1) = a_2$, $f(u_1) = u_2$ et $f(v_1) = v_2$. C'est une similitude qui conjugue respectivement t_{u_1}, t_{v_1} et r_1 à t_{u_2}, t_{v_2} et r_2 ou r_2^{-1}, et on a $G_2 = fG_1f^{-1}$.

Lemme 1 *Soit G un groupe paveur direct*[3]. *On note, pour $a \in \mathcal{E}$,*

$$G^a = \{g \in G,\ g(a) = a\}$$

Alors G^a est un sous-groupe de G (stabilisateur de a) et il existe $a \in \mathcal{E}$ tel que l'application $g \mapsto \overrightarrow{g}$ de G^a dans $\overrightarrow{G}$ soit un isomorphisme.
En outre[4]*, si r est un générateur de G^a et (u, v) une base de $\Gamma(G)$, alors $\{r, t_u, t_v\}$ engendre G.*

Démonstration. Si $\overrightarrow{G} = \{\mathrm{Id}_E\}$, n'importe quel point de $\mathcal{E}$ convient. Sinon, soit $g \in G$ tel que $\overrightarrow{g}$ soit un générateur de $\overrightarrow{G}$. Alors g est une rotation et son centre a convient.
Enfin, pour tout $g \in G$ il existe $h \in G^a$ tel que $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{h}$ et l'on a $gh^{-1} \in T(G)$, ce qui montre que G est engendré par $G \cup T(G)$.

5 Annexe

Théorème 2 *Soit E un plan euclidien. Les sous-groupes finis de $\mathrm{O}^+(E)$ sont cycliques.*

Démonstration. Comme $\mathrm{O}^+(E)$ est isomorphe au groupe U des complexes de module 1, il suffit de prouver que les sous-groupes finis de U sont cycliques. Or un sous-groupe G d'ordre n de U vérifie : $\forall z \in G,\ z^n = 1$. Donc $G \subset \mathrm{U}_n$ (groupe des racines n-ièmes de l'unité) et, puisque $|G| = |\mathrm{U}_n|$, $G = \mathrm{U}_n$.

Définition 1 *Soit A une partie d'un evn E.*
- On dit que A est discret si pour tout point a de A, il existe un voisinage V de a dans E tel que $V \cap A = \{a\}$ (c'est-à-dire si, muni de la topologie induite, A est un espace discret).
- On dit que A est discret dans E si pour tout point $x \in E$, il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A \subset \{x\}$.

On voit aisément que A est discret dans E équivaut à A discret et fermé. Cependant, si G est un sous-groupe additif de l'espace vectoriel E, on a (preuve laissée au lecteur) équivalence entre
- G discret,
- G discret dans E,
- O est un point isolé de G.

Définition 2 *Soit E un plan vectoriel réel. Un réseau de E est un sous-groupe additif de la forme*

$$\Gamma = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$$

où (u, v) est une famille $\mathbb{R}$-libre de E (dont on dit qu'elle est une base de Γ).

Théorème 3 *Soit E un plan vectoriel réel. Soit Γ un sous-groupe de E. Si Γ est discret et si Γ engendre E (en tant qu'espace vectoriel), alors Γ est un réseau.*

[3] Ce lemme n'est plus vrai si G n'est pas direct. C'est ce qui rend la classification dans le cas général plus délicate.
[4] On a mieux, mais on l'utilisera pas : G est le produit semi-direct de $\Gamma(G)$ par $\overrightarrow{G}$, l'action de $\overrightarrow{G}$ sur $\Gamma(G)$ étant $\phi.u = \phi(u)$.

En outre, si E est muni d'une structure euclidienne, et si $(u,v) \in \Gamma$ vérifie

$$\begin{cases} \|u\| = \min\limits_{x \in \Gamma \setminus \{0\}} \|x\|, \\ \|v\| = \min\limits_{x \in \Gamma \setminus \mathbb{Z}u} \|x\| \end{cases}$$

alors (u,v) est une base de Γ.

Démonstration. Γ étant discret, on peut choisir $u \in \Gamma \setminus \{0\}$ tel que $\|u\|$ soit minimal, puis $v \in \Gamma \setminus \mathbb{Z}u$ tel que $\|v\|$ soit minimal. Montrons $\Gamma \subset \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$ (l'inclusion réciproque est évidente). Soit $w \in \Gamma$. Quitte à ajouter à w un élément adéquat de $\mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$, on peut supposer $w = \lambda u + \mu v$, où λ, $\mu \in [0,1[$. Puis, quitte à remplacer w par $(u+v) - w$ (ce qui revient à faire une symétrie par rapport à $\dfrac{u+v}{2}$), on peut supposer $\lambda + \mu \leqslant 1$. On a alors, si $w \notin \mathbb{Z}u$,

$$\|v\|^2 \leqslant \|w\|^2 \leqslant (\lambda\|u\| + \mu\|v\|)^2 \leqslant (\lambda+\mu)^2\|v\|^2 \leqslant \|v\|^2$$

L'égalité doit avoir lieu dans l'inégalité triangulaire, ce qui entraîne que λu et μv sont positivement liés et $w = 0$.