Analyse - Agrégation 1967

corrigé par G. Deruelle

Partie I

1. (a) La convergence de la série entière double (1) dans l'ouvert U équivaut à la sommabilité (et donc l'absolue sommabilité) de la famille $\left(a_{n_1,n_2}(z_1-w_1)^{n_1}(z_2-w_2)^{n_2}\right)_{n_1,n_2}$ pour tout (z_1,z_2) dans U. Elle entraîne en particulier la sommabilité de la famille $\left(|a_{n_1,n_2}|r_1^{n_1}r_2^{n_2}\right)_{n_1,n_2}$ pour $r=(r_1,r_2)$ suffisamment petit et la convergence uniforme de la série entière double dans le polydisque fermé $\overline{\Delta}(w,r)$ s'en déduit en utilisant par exemple la condition de Cauchy: soit $\varepsilon>0$; il existe une partie finie I de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ telle que pour toute partie finie J de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ vérifiant $J\cap I=\emptyset$, on a $\displaystyle\sum_{(n_1,n_2)\in J}|a_{n_1,n_2}|r_1^{n_1}r_2^{n_2}\leq\varepsilon.$

   On a alors pour de telles parties J :

$$\forall(z_1,z_2)\in\overline{\Delta}(w,r),\ |\sum_{(n_1,n_2)\in J}a_{n_1,n_2}(z_1-w_1)^{n_1}(z_2-w_2)^{n_2}|\leq\varepsilon.$$

   (b) • Notons pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $z\in D$, $f_n(z)=\displaystyle\sum_{n_1\leq n,n_2\leq n}a_{n_1,n_2}(z_1-w_1)^{n_1}(z_2-w_2)^{n_2}$.

   En vertu de ce qui précède, cette suite converge simplement vers f sur D.

   En utilisant les notations du (a) il existe, pour ε donné, $N\in\mathbb{N}$ tel que $I\subset[0,N]\times[0,N]$. Alors:

$$\forall n>N,\forall p\in\mathbb{N},\forall z\in\overline{\Delta}(w,r)\ ,\ |f_{n+p}(z)-f_n(z)|\leq\varepsilon.$$

   La suite (f_n) converge donc uniformément vers f sur $\overline{\Delta}(w,r)$ et l' on conclut en notant que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est polynomiale donc continue .

   • Soit $(a_1,a_2)\in D$. $f^1_{a_1}$ est définie sur $D^1_{a_1}$ qui est ouvert. En effet, $D^1_{a_1}$ est l'image réciproque de l'ouvert D par l'application continue $z_2\mapsto(a_1,z_2)$. On a, toujours en vertu de la sommabilité de la famille $\left(a_{n_1,n_2}(z_1-a_1)^{n_1}(z_2-a_2)^{n_2}\right)_{n_1,n_2}$ dans $\overline{\Delta}(a,r)$:

$$(2)\quad\forall z\in\Delta(a,r)\ ,\ f(z)=\sum_{n_2}\Big(\sum_{n_1}a_{n_1,n_2}(z_1-a_1)^{n_1}\ \Big).(z_2-a_2)^{n_2}.$$

   D'où:

$$(3)\quad\forall z_2\in\delta(a_2,r_2)\ ,\ f^1_{a_1}(z_2)=\sum_{n_2}a_{0,n_2}(z_2-a_2)^{n_2}\ .$$

   Ceci montre que $f^1_{a_1}$ est développable en série entière au voisinage de tout point $a_2\in D^1_{a_1}$ et donc analytique sur $D^1_{a_1}$.

   De même on montre que $f^2_{a_2}$ est analytique sur $D^2_{a_2}$.

(c) L'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial z_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z_2}$ découle de l'analycité de $f^2_{z_2}$ et $f^2_{z_1}$ pour tout $(z_1, z_2) \in D$.

On a par exemple à partir de (2), pour z_1 fixé dans $\delta(a_1, r_1)$:

$$\forall z_2 \in \delta(a_2, r_2)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z_2}(z_1, z_2) = \sum_{n_2 \geq 1} \Big(\sum_{n_1} a_{n_1,n_2}(z_1 - a_1)^{n_1} \Big).n_2(z_2 - a_2)^{n_2-1}\ .$$

$\dfrac{\partial f}{\partial z_2}(z_1, z_2)$ est analytique dans D et $\dfrac{\partial f}{\partial z_2}(a_1, a_2) = a_{0,1}$.

On obtient un résultat analogue pour $\dfrac{\partial f}{\partial z_1}$. Ce résultat se généralise sans difficulté: f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial^{k_1+k_2} f}{\partial {z_1}^{k_1} \partial {z_2}^{k_2}}$ qui sont analytiques sur D. Précisément on a:

$$\forall z \in \Delta(a, r)\ ,\ \frac{\partial^{k_1+k_2} f}{\partial {z_1}^{k_1} \partial {z_2}^{k_2}}(z_1, z_2) = \sum_{n_1 \geq k_1, n_2 \geq k_2} \frac{n_1! n_2!}{(n_1 - k_1)!(n_2 - k_2)!}\, a_{n_1,n_2}(z_1 - a_1)^{n_1-k_1}(z_2 - a_2)^{n_2-k_2}$$

On en déduit:

$$\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2,\ a_{k_1,k_2} = \frac{1}{k_1! k_2!}\ \frac{\partial^{k_1+k_2} f}{\partial {z_1}^{k_1} \partial {z_2}^{k_2}}(a_1, a_2).$$

D'où l'unicité du développement (1).

2. • Soit $w \in D$ et r tel que $\overline{\Delta}(w, r) \subset D$. Notons $\gamma_1 = \gamma(w_1, r_1)$ et $\gamma_2 = \gamma(w_2, r_2)$. On a donc $\gamma_1 \subset D^2_{w_2}$ et $\gamma_2 \subset D^1_{w_1}$.

La formule de Cauchy donne ($f^1_{z_1}$ analytique) :

$$\forall (z_1, z_2) \in \Delta(w, r)\ ,\ f^1_{z_1}(z_2) = f(z_1, z_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(z_1, u_2)}{u_2 - z_2} du_2 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f^2_{u_2}(z_1)}{u_2 - z_2} du_2\ ;$$

puis ($f^2_{u_2}$ analytique) :

$$(4) \quad \forall z \in \Delta(w, r)\ ,\ f(z_1, z_2) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\gamma_2} \frac{1}{u_2 - z_2} \Big(\int_{\gamma_1} \frac{f^2_{u_2}(u_1)}{u_1 - z_1} du_1 \Big) du_2.$$

• Le résultat demandé est l'analogue de celui obtenu pour une fonction d'une variable complexe que nous rappelons ici:

soit $I \mapsto \mathbb{C}$ un chemin continu et f une fonction continue sur $\gamma(I)$; alors la fonction $z \mapsto \int_\gamma \dfrac{f(u)}{u - z} du$ est analytique dans l'ouvert $\mathbb{C} \backslash \gamma(I)$.

La technique est la même.

Pour tout $z \in \Delta(w, r)$ et tout $(u_1, u_2) \in \gamma_1 \times \gamma_2$, on a:

$$\frac{1}{u_i - z_i} = \frac{1}{(u_i - w_i)\big(1 - \dfrac{z_i - w_i}{u_i - w_i}\big)} = \sum_n \frac{(z_i - w_i)^n}{(u_i - w_i)^{n+1}},$$

séries qui sont normalement convergentes sur le compact γ_i car $\left| \dfrac{(z_i - w_i)^n}{(u_i - w_i)^{n+1}} \right| \leq \dfrac{|z_i - w_i|^n}{r_i^{n+1}} < 1$.

Ceci permet d'écrire à partir de (4) (f **est bornée sur** $\gamma_1 \times \gamma_2$):

$$\forall z \in \Delta(w, r), f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\gamma_2} \frac{1}{u_2 - z_2} \Big(\sum_{n_1} \int_{\gamma_1} \frac{f(u_1, u_2)}{(u_1 - w_1)^{n_1+1}} du_1\ .(z_1 - w_1)^{n_1} \Big)\ du_2$$

$$= \frac{1}{(2i\pi)^2} \sum_{n_1,n_2} \iint_{\gamma_1 \times \gamma_2} \frac{f(u_1, u_2)}{(u_1 - w_1)^{n_1+1}(u_2 - w_2)^{n_2+1}} du_1 du_2\ .\ (z_1 - w_1)^{n_1}(z_2 - w_2)^{n_2}$$

D'où l'analycité de f sur D.

3. Le résultat précédent montre que si une fonction f est continue sur un ouvert D de $\mathbb{C}^2$ et si, en tout point de D, les fonctions partielles de f sont analytiques, alors f est analytique sur D. Il est alors immédiat de vérifier que $\mathcal{O}_D$ est un sous-anneau de l'anneau des fonctions continues sur D puisque la somme et le produit de deux fonctions analytiques d'une variable complexe est analytique.

   Si f est un élément inversible de l'anneau $\mathcal{O}_D$, il existe $g \in \mathcal{O}_D$ telle que: $\forall z \in D, f(z)g(z) = 1$. Il est clair qu'alors: $\forall z \in D, f(z) \neq 0$. Réciproquement, si $f(z) \neq 0$, pour tout $z \in D$, les fonctions partielles de f en tout point de D ne s'annulent pas et sont analytiques d'une variable complexe: on en déduit que pour tout $(z_1, z_2) \in D$, $\dfrac{1}{f^1_{z_1}} = \left(\dfrac{1}{f}\right)^1_{z_1}$ et $\dfrac{1}{f^2_{z_2}} = \left(\dfrac{1}{f}\right)^2_{z_2}$ sont analytiques. La question $I-2$ montre alors que $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{O}_D$ et f est bien inversible dans $\mathcal{O}_D$.

4. (a)
   - Les fonctions partielles étant analytiques, on peut écrire : $\dfrac{\partial f^1_{z_1}}{\partial \overline{z_2}} = \dfrac{\partial f^1_{z_1}}{\partial x_2} + i\dfrac{\partial f^1_{z_1}}{\partial y_2} = 0$; mais f étant à valeurs réelles, il en est de même de $\dfrac{\partial f^1_{z_1}}{\partial x_2}$ et de $\dfrac{\partial f^1_{z_1}}{\partial y_2}$.

     On obtient alors: $\dfrac{\partial f^1_{z_1}}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f^1_{z_1}}{\partial y_2} = 0$. On montre de même que $\dfrac{\partial f^2_{z_2}}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f^2_{z_2}}{\partial y_1} = 0$.

     Finalement, f considérée comme fonction de classe C^1 de quatre variables réelles, a toutes ses dérivées partielles nulles dans l'ouvert connexe D: f est constante sur D.

   - Soit $(z_1, z_2) \in D$; $|f^1_{z_1}|$ est constante sur $D^1_{z_1}$; en appliquant le principe du maximum à $f^1_{z_1}$ sur un disque $\delta(z_2, r_2) \subset D^1_{z_1}$, on voit que $f^1_{z_1}$ est constante sur $\delta(z_2, r_2)$. De même on montre que $f^2_{z_2}$ est constante sur un disque $\delta(z_1, r_1) \subset D^1_{z_1}$.

     On montre alors comme ci-dessus que f a toutes ses dérivées partielles nulles dans l'ouvert connexe D, donc est constante sur D.

   (b) Notons Z l'intérieur de l'ensemble des zéros dans D de $f - g$.

   - Par hypothèse l'ouvert Z est non vide.

   - Soit $w \in D \cap \overline{Z}$ et $r > 0$ tel que $\overline{\Delta}(w, r) \subset D$. Puisque $w \in \overline{Z}$, $\Delta(w, \frac{r}{2}) \cap Z \neq \emptyset$;

     soit alors $w' \in \Delta(w, \frac{r}{2}) \cap Z$. Comme $\Delta(w', \frac{r}{2}) \cap Z$ est ouvert, il contient un voisinage de w'; sur ce voisinage, $f - g$ est identiquement nulle; or $f - g$ est développable au point w' en série entière double, développement valable sur $\Delta(w', \frac{r}{2}) \subset \Delta(w, r) \subset D$ (cf. $I-2$: le développement au point z obtenu est valable sur tout polydisque $\Delta(z, r)$ tel que $\overline{\Delta}(z, r) \subset D$); les coefficients de ce développement, qui s'expriment à partir des dérivées partielles de $f - g$ au point w', sont donc tous nuls. Celà entraîne que $f - g$ est identiquement nulle sur $\Delta(w', \frac{r}{2})$ qui est un voisinage de w: $w \in Z$.

     En conclusion Z est une partie non vide à la fois ouverte et fermée dans D qui est connexe: $Z = D$ et $f - g$ est identiquement nulle dans D.

Partie II

1. Pas de difficulté ...

2. (a) Notons $\{\overline{\Delta}_p \; ; \; p \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des polydisques fermés contenus dans D et tels que les parties réelles et imaginaires de z_1, z_2 soient rationnelles ainsi que r_1 et r_2.

Notons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \bigcup_{p=0}^{n} \overline{\Delta}_p$.

- $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (au sens de l'inclusion) de compacts contenus dans D.

- Soit $z \in D$; il existe $r > 0$ tel que $\overline{\Delta}(z,r) \subset D$. Du fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $r' \in (\mathbb{Q}^{+*})^2$ tel que $\overline{\Delta}(z,r') \subset \overline{\Delta}(z,r)$ (prendre r_1' et r_2' dans Q^{+*} tels que $0 < r_i' < r_i$).

  Choisissons en suite $z' \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^2$ tel que $|z_i - z_i'| < \frac{r_i'}{2}$ ce qui est possible toujours par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On a alors:

$$z \in \Delta(z', \frac{r'}{2}) \text{ et } \overline{\Delta}(z', \frac{r'}{2}) \subset \overline{\Delta}(z,r) \ .$$

  On a ainsi montré que tout z de D appartient à l'un des $\overline{\Delta}_p$ et en conséquence:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = D \ .$$

- Soit maintenant K, un compact contenu dans D. D'après ce qui précède, $(\Delta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de K. On peut en extraire un sous-recouvrement fini:

$$K \subset \bigcup_{j\in J} \Delta_j \subset \bigcup_{j\in J} \overline{\Delta}_j \subset K_{j_0} \ \text{ où } \ j_0 = \max_J j \ .$$

$(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{A}$-famille de D.

(b)
- On notera que d est bien définie puisque:

  $\forall (f,g) \in (\mathcal{C}_D)^2, \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}} \leq 1$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$.

- Soient f et $g \in \mathcal{C}_D$ telles que $d(f,g) = 0$. Soit $z \in D$; puisque $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $z \in K_m$. Or $d(f,g) = 0$ entraîne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f-g\|_{K_n} = 0$. En particulier, $\|f-g\|_{K_m} = 0$ et en conséquence $f(z) = g(z)$. Finalement, $f = g$.

- Soient $(f,g,h) \in (\mathcal{C}_D)^3$; on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f-h\|_{K_n} \leq \|f-g\|_{K_n} + \|g-h\|_{K_n}$.

  Il suffit pour prouver l'inégalité triangulaire, de montrer que si $x \leq y+z$ ($x,y,z \leq 0$) , $f(x) \leq f(y) + f(z)$ où $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$.

  Il est immédiat de vérifier que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$; on a donc $f(x) \leq f(y+z)$; reste alors à vérifier que $f(y+z) \leq f(y) + f(z)$, ce qui ne pose pas de problème.

3. On donne une $\mathcal{A}$-famille de D.

- Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite convergente (vers f) d'éléments de $\mathcal{C}_D$. Soit K un compact de D. Montrons que (f_p) converge uniformément sur K.

  Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset K_{n_0}$. On a pour tout p:

$$0 \leq 2^{-n_0} \frac{\|f-f_p\|_{K_{n_0}}}{1+\|f-f_p\|_{K_{n_0}}} \leq d(f,f_p) \ ,$$

  qui montre que la suite $\dfrac{\|f-f_p\|_{K_{n_0}}}{1+\|f-f_p\|_{K_{n_0}}}$ tend vers zéro quand p tend vers l'infini. Il est alors immédiat de vérifier que $\lim_{p\to+\infty} \|f-f_p\|_{K_{n_0}} = 0$.

(par exemple, soit ε tel que $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$; il existe $P\in\mathbb{N}$ tel que:

$$\forall p\in\mathbb{N}, p\geq P \Rightarrow \frac{\|f-f_p\|_{K_{n_0}}}{1+\|f-f_p\|_{K_{n_0}}}\leq\varepsilon \quad \text{ce qui entraine} \quad \|f-f_p\|_{K_{n_0}}\leq 2\varepsilon\ ).$$

On obtient ainsi la convergence uniforme de la suite (f_p) sur K_{n_0}, donc sur K.

- Supposons que la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de D. Il est clair qu'alors (f_p) converge simplement vers une fonction f continue sur D. Montrons que (f_p) converge vers f dans $\mathcal{C}_D$.

  Notons pour tout $(p,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $u_n(p)=2^{-n}\dfrac{\|f-f_p\|_{K_n}}{1+\|f-f_p\|_{K_n}}$.

  On a : $\forall(p,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, 0\leq u_n(p)\leq 2^{-n}$ et $\sum\limits_n 2^{-n}$ converge. D'autre part, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{p\to\infty}u_n(p)=0$, par hypothèse.

  On en déduit que:

$$\lim_{p\to\infty}d(f,f_p)=\lim_{p\to\infty}\sum_{n\geq1}u_n(p)=\sum_{n\geq1}\lim_{p\to\infty}u_n(p)=0\ .$$

4. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{C}_D$. Reprenons les notations utilisées dans le premier point de la question précédente pour montrer que, pour tout compact K de D, la suite $(f_{p\ /K})_p$ est une suite de Cauchy de l'espace $(\mathcal{C}_K,\|.\|_K)$:

   en partant de $d(f_p,f_q)\leq\varepsilon$ pour p et q assez grand (avec un ε quelconque tel que $2^{n_0}\varepsilon<\frac{1}{2}$), on obtient

$$2^{-n_0}\ \frac{\|f_p-f_q\|_{K_{n_0}}}{1+\|f_p-f_q\|_{K_{n_0}}}\leq\varepsilon \quad \text{qui entraine} \quad \|f_p-f_q\|_{K_{n_0}}\leq 2^{n_0+1}\varepsilon.$$

   Cet espace étant un Banach, on en déduit que (f_p) converge uniformément sur tout compact K de D. D'après la question précédente, celà équivaut à dire que (f_p) converge dans $\mathcal{C}_D$.

   En conclusion, $\mathcal{C}_D$ est complet pour d.

5. Soient (f_p) (resp. (g_p)) une suite d'éléments de $\mathcal{C}_D$ convergeant vers f (resp. g).

   - On a :

$$\forall p\in\mathbb{N}, d(f+g,f_p+g_p)\leq d(f+g,f_p+g)+d(f_p+g,f_p+g_p)=d(f,f_p)+d(g,g_p)\ ,$$

     puisque d est invariante par translation. Ceci montre que la suite (f_p+g_p) converge vers $f+g$: l'application $(f,g)\mapsto f+g$ est bien continue.

   - Soit K un compact de D. Les suites $(f_{p\ /K})$ et $(g_{p\ /K})$ convergent dans l'espace $(\mathcal{C}_K,\|.\|_K)$, respectivement vers $f_{/K}$ et $g_{/K}$. Il est clair que la suite $((f_p.g_p)_{/K})$ converge dans cet espace vers $f.g_{/K}$. On conclut à l'aide de la question 3 : l'application $(f,g)\mapsto f.g$ est bien continue.

6. $\mathcal{O}_D$ est un sous-anneau de $\mathcal{C}_D$. Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}_D$ convergeant vers f dans $\mathcal{C}_D$. Montrons que $f\in\mathcal{O}_D$.

   Soit $(z_1,z_2)\in D$. Pour tout compact K_2 de $D^1_{z_1}$, $((f_p)^1_{z_1})$ converge uniformément sur K_2 vers $f^1_{z_1}$ puisque l'on a:

$$\|f^1_{z_1}-(f_p)^1_{z_1}\|_{K_2}=\|f-f_p\|_{\{z_1\}\times K_2} \quad \text{avec} \quad \{z_1\}\times K_2 \quad \text{compact de } D\ .$$

On en déduit que $f^1_{z_1}$ est analytique sur $D^1_{z_1}$. On montre de même que $f^2_{z_2}$ est analytique sur $D^2_{z_2}$ et l'aide du résultat de la question $I-2$, on obtient f analytique sur D.

En conclusion $\mathcal{O}_D$ est fermé dans $\mathcal{C}_D$.

ou ... En reprenant les notations et la formule (4) du $I-2$, on a (par le théorème de Fubini):

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in \Delta(w,r), f_p(z) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int\int_{\gamma_1\times\gamma_2} \frac{f_p(u_1,u_2)}{(u_1-z_1)(u_2-z_2)} du_1 du_2 \ .$$

La convergence uniforme de (f_p) sur le compact $\gamma_1 \times \gamma_2$ permet d'écrire:

$$\forall z \in \Delta(w,r), f(z) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int\int_{\gamma_1\times\gamma_2} \frac{f(u_1,u_2)}{(u_1-z_1)(u_2-z_2)} du_1 du_2 \ ,$$

ce qui montre (cf. détails de la question $I-2$) que f est analytique sur D.

Partie III

1. (a) D'après le principe des zéros isolés (pour les fonctions analytiques d'une variable complexe ...), il existe $s_2 > 0$ tel que:

$$\overline{\delta}(0,s_2) \subset \delta(0,r_2) \quad \text{et} \quad \forall z_2 \in \overline{\delta}(0,s_2)\backslash\{0\}, g(0,z_2) \neq 0 \ .$$

La borne inférieure θ de g^1_0 sur le compact $\gamma(0,s_2)$ est atteinte en un point de $\gamma(0,s_2)$: $\theta > 0$.

Par ailleurs l'application $h : (z_1,z_2) \mapsto |g(z_2,z_2) - g(0,z_2)|$ est continue sur $\Delta(\widetilde{\omega},r)$ et nulle sur le compact $K = \{0\} \times \gamma(0,s_2)$ de $\Delta(\widetilde{\omega},r)$. Soit alors $\varepsilon > 0$; pour tout $Z_2 \in \gamma(0,s_2)$, il existe $\alpha_{Z_2} > 0$ tel que:

$$\forall (z_1,z_2) \in \delta(0,\alpha_{Z_2}) \times \delta(Z_2,\alpha_{Z_2}) \subset \Delta(\widetilde{\omega},r) \ , \ |h(z_1,z_2) - h(0,Z_2)| = |h(z_1,z_2)| < \varepsilon \ .$$

Les ouverts $\Delta_{Z_2} = \delta(0,\alpha_{Z_2}) \times \delta(Z_2,\alpha_{Z_2})$ où Z_2 parcourt $\gamma(0,s_2)$ recouvrent le compact K: on peut trouver $Z^1_2,\ldots Z^k_2 \in \gamma(0,s_2)$ tels que $K \subset \Delta_{Z^1_2} \cup \cdots \Delta_{Z^k_2}$. En notant s_1 le plus petit des $\alpha_{Z^1_2},\ldots,\alpha_{Z^k_2}$, il vient:

$$\forall z_1 \in \delta(0,s_1), \forall z_2 \in \gamma(0,s_2), |h(z_1,z_2)| < \varepsilon.$$

En effet soit $(z_1,z_2) \in \delta(0,s_1) \times \gamma(0,s_2)$; alors $(0,z_2)$ qui est dans K, appartient à l'un des $\Delta_{Z^j_2}$, par exemple $\Delta_{Z^1_2}$. On a donc $(z_1,z_2) \in \delta(0,s_1) \times \delta(Z^1_2,\alpha_{Z^1_2}) \subset \delta(0,\alpha_{Z^1_2}) \times \delta(Z^1_2,\alpha_{Z^1_2}) = \Delta_{Z^1_2}$, ce qui est suffisant.

Enfin le résultat escompté est obtenu en prenant $\varepsilon = \theta$.

Remarque: $\forall z_1 \in \delta(0,s_1), \forall z_2 \in \gamma(0,s_2), g(z_1,z_2) \neq 0$: sinon il viendrait $|g(0,z_2)| < \theta$ avec $z_2 \in \gamma(0,s_2)$ ...

(b) Soit $z_1 \in \delta(0,s_1)$ fixé; d'après ce qui précède on a:

$$\forall z_2 \in \gamma(0,s_2), |g^1_0(z_2) - g^1_{z_1}(z_2)| < \theta \leq |g^1_0(z_2)| \ .$$

D'après le théorème de *Rouché*, g^1_0 et $g^1_{z_1}$ ont même nombre de zéros dans $\delta(0,s_2)$.

(c) Soit X l'ensemble des zéros de g dans $\Delta(\widetilde{\omega}, r)$.

– $X = g^{-1}(\{0\})$ est fermé dans $\Delta(\widetilde{\omega}, r)$ puisque g est continue sur $\Delta(\widetilde{\omega}, r)$.

– si X était voisinage de l'un de ses points; g serait identiquement nulle sur un ouvert non vide contenu dans $\Delta(\widetilde{\omega}, r)$, donc sur $\Delta(\widetilde{\omega}, r)$ en vertu de $I-4-b$, puisque $\Delta(\widetilde{\omega}, r)$ est connexe.

2. (a)
- D'après la remarque faite à la fin de la question $III-1-a$, $\forall z_1 \in \delta(0, s_1), \forall x \in \gamma(0, s_2), g(z_1, x)$ est non nul et donc $(z_1, x) \in Y$. En particulier, pour tout z_1 fixé dans $\delta(0, s_1)$, l'application $x \mapsto f(z_1, x)$ est bien définie et continue sur $\gamma(0, s_2)$. Ceci permet d'affirmer que l'application:

$$z_2 \mapsto \widehat{f}(z_1, z_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(0,s_2)} \frac{f(z_1, x)}{x - z_2} dx$$

  est analytique sur $\delta(0, r_2) \backslash \gamma(0, s_2)$, donc sur $\delta(0, s_2)$ (cf. résultat classique rappelé dans $I-2$).

- Considérons maintenant pour z_2 fixé dans $\delta(0, s_2)$, l'application : $z_1 \mapsto \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma(0,s_2)} \frac{f(z_1, x)}{x - z_2} dx$.

  Pour tout $x \in \gamma(0, s_2)$ la fonction $z_1 \mapsto f(z_1, x)$ est analytique sur $\delta(0, s_1)$ puisque $\delta(0, s_1) \times \gamma(0, s_2) \subset Y$ et $f \in \mathcal{O}_Y$. Il en est de même de $z_1 \mapsto \dfrac{f(z_1, x)}{x - z_2} = h(z_1, x)$.

  Par ailleurs les applications $(z_1, x) \mapsto h(z_1, x)$ et $(z_1, x) \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial z_1}(z_1, x)$ sont continues sur $\delta(0, s_1) \times \gamma(0, s_2)$. On en déduit l'analycité de $z_1 \mapsto \int_{\gamma(0,s_2)} h(z_1, x) dx = \widehat{f}(z_1, z_2)$ sur $\delta(0, s_1)$

  (on consultera avec profit *Dieudonné - Calcul Infinitésimal - Chap VII.10*).

  On pourra noter que le théorème invoqué permet de traiter aussi le point précédent.

  <u>ou</u> ... Par continuité sous le signe somme (on intègre sur un compact), l'application $z_1 \mapsto \widehat{f}(z_1, z_2)$ est continue sur $\delta(0, s_1)$. Utilisons le théorème de *Morera* pour montrer que cette application est analytique sur $\delta(0, s_1)$; soit donc un rectangle R contenu dans $\delta(0, s_1)$, il vient:

$$\int_R \widehat{f}(z_1, z_2) dz_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_R \int_{\gamma(0,s_2)} \frac{f(z_1, x)}{x - z_2} dx \; dz_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(0,s_2)} \int_R \frac{f(z_1, x)}{x - z_2} dz_1 \; dx$$

  en utilisant le théorème de Fubini, valide ici puisque l'on intègre une fonction continue sur un compact.

  La fonction $z_1 \mapsto f(z_1, x)$ est analytique sur $\delta(0, s_1)$, pour tout $x \in \gamma(0, s_2)$ (cf. ci-dessus): le théorème de *Morera* lui-même montre

  que $\int_R \dfrac{f(z_1, x)}{x - z_2} dz_1 = 0$ et l'on en déduit $\int_R \widehat{f}(z_1, z_2) dz_1 = 0$, ce que l'on voulait montrer.

- Enfin $\widehat{f}$, qui est continue sur $\Delta(\widetilde{\omega}, s)$ toujours par continuité sous le signe somme, est telle que $\forall (z_1, z_2) \in \Delta(\widetilde{\omega}, s)$, $\widehat{f}^1_{z_1}$ et $\widehat{f}^2_{z_2}$ sont analytiques respectivement sur $\delta(0, s_2)$ et $\delta(0, s_1)$. En vertu du résultat de la question $I-2$, $\widehat{f}$ est analytique sur $\Delta(\widetilde{\omega}, s)$.

(b) Soit z_1 fixé dans $\delta(0, s_1)$. Alors $f^1_{z_1}$ est bornée et analytique sur $\delta(0, s_2)$ privé d'un nombre fini de points, puisque $\{z_1\} \times \delta(0, s_2) \cap X$ est fini d'après $III-1-b$. En vertu du théorème de prolongement de *Riemann* (singularités isolées "escamotables"), $f^1_{z_1}$ admet un prolongement analytique dans $\delta(0, s_2)$ que nous noterons toujours $f^1_{z_1}$.

La formule intégrale de Cauchy donne alors:

$$\forall z_2 \in \delta(0,s_2), f^1_{z_1}(z_2) = f(z_1,z_2) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,s_2)} \frac{f^1_{z_1}(x)}{x-z_2}dx = \widehat{f}(z_1,z_2)\ ,$$

ceci pour tout $z_1 \in \delta(0,s_1)$.

Partie IV

1. La réflexivité et la symétrie sont immédiates.

   Supposons $f\mathcal{R}g$ et $g\mathcal{R}h$. Soient V (resp. W) un voisinage de $\widetilde{\omega}$ contenu dans $V(f)\cap V(g)$ (resp. dans $V(g)\cap V(h)$) sur lequel f et g (resp. g et h) coincident. Alors $V\cap W$ est un voisinage de $\widetilde{\omega}$ sur lequel f, g et h coincident: en particulier $f\mathcal{R}h$.

2. (a) Considérons l'application φ qui à tout élément $f \in \mathcal{O}$, associe son développement en série entière double au voisinage de $\widetilde{\omega}$: φ est surjective .

   Il est clair par $I-1-c$ que si $f\mathcal{R}g$, f et g ont même développement au voisinage de $\widetilde{\omega}$: ceci permet de définir par passage au quotient une application $\widetilde{\varphi}$ de $\widetilde{\mathcal{O}}$ dans l'anneau $\mathcal{S}$ des séries entières doubles dont le domaine de convergence n'est pas réduit à $\{\widetilde{\omega}\}$. Cette application réalise une bijection de $\widetilde{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{S}$. On transporte enfin la structure d'anneau de $\mathcal{S}$ sur $\widetilde{\mathcal{O}}$ par φ:

   $$\widetilde{f}+\widetilde{g} = \widetilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{\varphi}(\widetilde{f})+\widetilde{\varphi}(\widetilde{g})) \ \text{ et } \ \widetilde{f}\widetilde{g} = \widetilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{\varphi}(\widetilde{f})\widetilde{\varphi}(\widetilde{g}))$$

   et φ devient un isomorphisme d'anneaux.

   <u>attention</u>: $\mathcal{O}$ n'est pas un anneau ...

   (b) $\mathcal{S}$ est intègre, donc $\widetilde{\mathcal{O}}$ aussi.

   Montrons que $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{O}}$ est non inversible si et seulement si $f(\widetilde{\omega}) = 0$:

   – si $\widetilde{f}$ est inversible dans $\widetilde{\mathcal{O}}$, il existe $\widetilde{g} \in \widetilde{\mathcal{O}}$ tel que $\widetilde{f}\widetilde{g} = \widetilde{1}$. En comparant les termes constants dans $\mathcal{S}$, il vient $f(\widetilde{\omega})g(\widetilde{\omega}) = 1$, ce qui entraine $f(\widetilde{\omega}) \neq 0$.

   – réciproquement si $f \in \mathcal{O}$ et si $f(\widetilde{\omega}) \neq 0$, par continuité f ne s'annule pas sur un voisinage V de $\widetilde{\omega}$; alors $f_{/V}$ est inversible dans $\mathcal{O}_V$ d'après $I-3$: il existe $g \in \mathcal{O}_V$ tel que $f_{/V}.g = 1$. Comme $\widetilde{f} = \widetilde{f_{/V}}$, il vient $\widetilde{f}\widetilde{g} = \widetilde{1}$ et $\widetilde{f}$ est inversible dans $\widetilde{\mathcal{O}}$.

   Grâce à cette caractérisation, on montre aisément que l'ensemble des éléments non inversibles de $\widetilde{\mathcal{O}}$ est un idéal. Cet idéal est maximal car tout idéal contenant un élément inversible est égal à l'anneau tout entier. Pour cette même raison, il n'y a pas d'autres idéal maximal dans $\widetilde{\mathcal{O}}$.

3. (a) Soit $\Delta(\widetilde{\omega},r) \subset V(f)$ et s tel que $\overline{\Delta}(\widetilde{\omega},s) \subset \Delta(\widetilde{\omega},r)$ comme au $III-1$. Pour tout $z_1 \in \delta(0,s_1)$, $f^1_{z_1}$ admet k zéros dans $\delta(0,s_2)$ que nous noterons $a_1(z_1),\dots,a_k(z_1)$. La condition imposée à h exige que pour tout $z_1 \in \delta(0,s_1)$, $z_2 \mapsto h(z_1,z_2)$ s'annule précisément aux points $a_1(z_1),\dots,a_k(z_1)$. On pose alors:

   $$h(z_1,z_2) = \prod_{i=1}^{k}(z_2-a_i(z_1)) = z_2^k + \sigma_1(z_1)z_2^{k-1}+\cdots+\sigma_k(z_1)\ ,$$

   où $\sigma_j(z_1) = (-1)^j s_j(a_1(z_1),\dots,a_k(z_1))$ et $s_j(X_1,\dots,X_k) = \displaystyle\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le k} X_{i_1}\cdots X_{i_j}$.

   On a bien : $\forall j = 1,\dots,k,\ \ \sigma_j(0) = 0$ puisque $a_1(0) = \cdots = a_k(0) = 0$, par hypothèse.

(b) • Cette intégrale est bien définie puisque l'on sait que pour tout $(z_1, x) \in \delta(0, s_1) \times \gamma(0, s_2)$, $f(z_1, x)$ n'est pas nul. Pour tout $z_1 \in \delta(0, s_1)$, la fonction $x \mapsto x^n \dfrac{\frac{\partial f}{\partial z_2}(z_1, x)}{f(z_1, x)} = F_{z_1}(x)$ admet $a_1(z_1), \ldots, a_k(z_1)$ (qui ne sont pas nécessairement distincts) pour pôles simples dans $\delta(0, s_2)$ et est analytique sur $\delta(0, s_2)$ privé de $a_1(z_1), \ldots, a_k(z_1)$.

Le théorème des résidus donne pour $z_1 \in \delta(0, s_1)$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(0,s_2)} F_{z_1}(x)dx = \sum_p \mathrm{Ind}(a_p(z_1), F_{z_1}).\ \mathrm{Res}(a_p(z_1), F_{z_1})$$

où $a_p(z_1)$ parcourt l'ensemble des zéros distincts de $f^1_{z_1}$ dans $\delta(0, s_2)$ (z_1 fixé).

On peut écrire au voisinage de $a_p(z_1)$, $f(z_1, x) = (x - a_p(z_1))^{m_p}\ g(z_1, x)$ avec $g(z_1, a_p(z_1)) \neq 0$.

On obtient :

$$x^n.\ \frac{\frac{\partial f}{\partial z_2}(z_1, x)}{f(z_1, x)} = \big(a_p(z_1)^n + (x - a_p(z_1)).*\ \big)\Big(\frac{m_p}{x - a_p(z_1)} + \frac{\frac{\partial g}{\partial z_2}(z_1, x)}{g(z_1, x)}\Big)$$

qui donne:

$$\mathrm{Res}(a_p(z_1), F_{z_1}) = m_p\ a_p(z_1)^n\ .$$

Il vient:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma(0,s_2)} x^n \frac{\frac{\partial f}{\partial z_2}(z_1, x)}{f(z_1, x)} dx = \sum_p m_p a_p(z_1)^n = \sum_{i=1}^{k} a_i(z_1)^n = \Sigma_n(a_1(z_1), \ldots, a_k(z_1))$$

• Celà revient à montrer que $z_1 \mapsto \int_{\gamma(0,s_2)} x^n \dfrac{\frac{\partial f}{\partial z_2}(z_1, x)}{f(z_1, x)} dx$ est analytique sur $\delta(0, s_1)$: il suffit d'employer l'une des deux techniques exposées à la question $III - 2 - a \ldots$

On obtient ainsi l'analycité sur $\delta(0, s_1)$ de $z_1 \mapsto \Sigma_n(a_1(z_1), \ldots, a_k(z_1))$.

Les formules de *Newton* permettent d'exprimer les s_j (donc les σ_j) comme polynômes de $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$: on en déduit l'analycité de $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ sur $\delta(0, s_1)$.

(c) L'idée est d'appliquer le résultat de la question $III - 2$ à la fontion $\dfrac{f}{h}$ qui est analytique sur $\Delta(\widetilde{\omega}, s) \backslash \{X\}$ où X désigne l'ensemble des zéros de f dans $\Delta(\widetilde{\omega}, s)$: $\dfrac{f}{h}$ se prolongera en une fonction analytique que l'on notera $u \ldots$ Mais pour celà il faut montrer que $\dfrac{f}{h}$ est bornée.

• On rappelle que f et h ont les mêmes zéros dans $\Delta(\widetilde{\omega}, s)$.

Reprenons un détail de la question $III - 1 - a$: quitte à remplacer s_1 par $s_1/2$, on peut supposer que

$$\forall z_1 \in \overline{\delta}(0, s_1), \forall z_2 \in \gamma(0, s_2), |g(z_1, z_2) - g(0, z_2)| < \theta$$

et on en déduit que g ne s'annule pas sur $\overline{\delta}(0, s_1) \times \gamma(0, s_2)$.

Dans la question qui nous préoccupe, on peut alors annoncer que la borne inférieure de $|h|$ sur le compact $\overline{\delta}(0, s_1) \times \gamma(0, s_2)$ est strictement positive et l'on en déduit que $\dfrac{f}{h}$ est bornée, disons par M, sur $\overline{\delta}(0,s_1)\times\gamma(0,s_2)$.

Alors, pour z_1 fixé dans $\overline{\delta}(0,s_1)$, $z_2\mapsto\left|\dfrac{f(z_1,z_2)}{h(z_1,z_2)}\right|$ est majorée par M sur $\gamma(0,s_2)$ et se prolonge en une fonction analytique sur $\overline{\delta}(0,s_2)$ puisque $f^1_{z_1}$ et $h^1_{z_1}$ ont les mêmes zéros dans $\delta(0,s_2)$ (précisément k zéros en tenant compte des multiplicités). En vertu du principe du maximum, on obtient:

$$\forall z_2\in\overline{\delta}(0,s_2),\left|\frac{f(z_1,z_2)}{h(z_1,z_2)}\right|\leq M\ .$$

Ceci étant valable pour tout z_1 fixé dans $\overline{\delta}(0,s_1)$, $\dfrac{f}{h}$ esr bornée sur $\overline{\Delta}(\widetilde{\omega},s)$.

- $\dfrac{f}{h}$ étant analytique sur $\Delta(\widetilde{\omega},s)\backslash\{X\}$, coincide sur $\Delta(\widetilde{\omega},s)\backslash\{X\}$ avec une fonction analytique sur $\Delta(\widetilde{\omega},s)$, en vertu de la question $III-2-b$: il s'agit de la fonction $u=\widehat{\left(\dfrac{f}{h}\right)}$.

  On a donc : $\forall z\in\Delta(\widetilde{\omega},s)\backslash\{X\}, f(z)=h(z)u(z)$, égalité qui reste valable sur X puisque f et h ont les mêmes zéros.

  Il nous reste à montrer que $\widetilde{u}$ est inversible: du fait que $f=hu$, l'existence d'un zéro (z_1,z_2) de u dans $\Delta(\widetilde{\omega},s)$ entraînerait l'existence de $k+1$ zéros pour $f^1_{z_1}$ dans $\delta(0,s_2)$, ce qui n'est pas. En conclusion u ne s'annule pas sur $\Delta(\widetilde{\omega},s)$, donc u est inversible dans $\mathcal{O}_{\Delta(\widetilde{\omega},s)}$: $\widetilde{u}$ est bien inversible dans $\widetilde{\mathcal{O}}$ d'après la question $IV-2-b$.

***

Commentaires :

Le problème a pour but de démontrer un théorème de Weierstrass (IV-3-c) dit "théorème de préparation". Ce théorème de Weierstrass permet entre autres de montrer que l'anneau $\widetilde{\mathcal{O}}$ est factoriel. Le lecteur interessé pourra consulter le livre de R.C. Gunning et H. Rossi cité plus bas, dans la bibliographie. On y trouvera en particulier (p.70 et suivantes) le "théorème de division" de Weierstrass, ainsi que quelques applications.

Le texte du problème (sujet d'analyse d'agreg. 67) est d'ailleurs très proche du contenu des chapitres I-A, I-C, II-A et II-B de ce livre. Le texte du problème a été reproduit intégralement.

Le résultat III-2 est le théorème de prolongement de Riemann qui a une version simplifiée dans le cas des fonctions analytiques d'une variable complexe (singularités isolées "escamotables").

Ajoutons ici un résultat supplémentaire qui met en lumière la différence de comportement entre les fonctions analytiques de plus de deux variables complexes et les fonctions analytiques d'une seule variable complexe, qui constituent d'une certaine manière une "exception":

Théorème (Hartogs) *: Soit f une fonction analytique sur un voisinage U connexe de la frontière de $\Delta(\widetilde{\omega},r)$. Il existe une unique fonction analytique $\widehat{f}$ sur $\Delta(\widetilde{\omega},r)$ qui coincide avec f sur $U\cap\Delta(\widetilde{\omega},r)$ (en particulier f admet un unique prolongement analytique sur $U\cup\Delta(\widetilde{\omega},r)$).*

dem. On notera tout d'abord que la frontière $\partial\Delta(\widetilde{\omega},r)$ contient $\gamma(0,r_1)\times\delta(0,r_2)\cup\delta(0,r_1)\times\gamma(0,r_2)$. En particulier U contient, pour un ε suffisamment petit,

$$\{z_1/r_1-\varepsilon<|z_1|<r_1+\varepsilon\}\times\delta(0,r_2)\cup\delta(0,r_1)\times\{z_2/r_2-\varepsilon<|z_2|<r_2+\varepsilon\}\ .$$

Définissons pour $(z_1,z_2)\in\Delta(\widetilde{\omega},r)$, $\widehat{f}(z_1,z_2)=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma(0,r_2)}\frac{f(z_1,x)}{x-z_2}dx.$

D'une part $\widehat{f}$ est analytique sur $\Delta(\widetilde{\omega},r)$, comme on l'a montré au cours du problème.

D'autre part, $\Omega=\{z_1/r_1-\varepsilon<|z_1|<r_1\}\times\delta(0,r_2)\subset U\cap\Delta(\widetilde{\omega},r)$ et $f^1_{z_1}$ étant analytique sur $\delta(0,r_2)$, on obtient par la formule de cauchy:

$$\forall(z_1,z_2)\in\Omega, f(z_1,z_2)=f^1_{z_1}(z_2)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,r_2)}\frac{f^1_{z_1}(x)}{x-z_2}dx=\widehat{f}(z_1,z_2)\ .$$

Ceci montre que f et $\widehat{f}$ coincident sur l'ouvert Ω qui est contenu dans l'ouvert connexe $U\cap\Delta(\widetilde{\omega},r)$. En vertu de $I-4-b$, f et $\widehat{f}$ coincident sur $U\cap\Delta(\widetilde{\omega},r)$. L'unicité est claire toujours grâce au même résultat.

Ce résultat n'a pas cours pour les fonctions d'une variable complexe: étant donnés un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ et un ouvert Ω' contenant strictement Ω, il est toujours possible de trouver une fonction analytique sur Ω qui ne se prolonge pas en une fonction analytique sur Ω' (par exemple $z\mapsto\dfrac{1}{z-z_0}$ où $z_0\in\Omega'\backslash\Omega$)

Corollaire*: toute singularité isolée d'une fonction analytique de plus de deux variables complexes est "escamotable".*

dem. *Supposons que $\widetilde{\omega}$ soit une singularité isolée de f analytique sur $\Delta(\widetilde{\omega},r)\backslash\{\widetilde{\omega}\}$. Soit $\Delta(\widetilde{\omega},s)\subset\Delta(\widetilde{\omega},r)$. Alors $\Delta(\widetilde{\omega},r)\backslash\{\widetilde{\omega}\}$ est un voisinage connexe de $\partial\Delta(\widetilde{\omega},s)$. Donc f admet un unique prolongement analytique sur $\Delta(\widetilde{\omega},r)\backslash\{\widetilde{\omega}\}\cup\Delta(\widetilde{\omega},s)=\Delta(\widetilde{\omega},r)$.*

—–-

Bibliographie:

Pour les fonctions analytiques d'une variable complexe:

- *H. Cartan : Théorie élémentaire des fonctions analytiques - Hermann (1975).*

- *S. Lang : Complex analysis - Springer (1977).*
- *W. Rudin - Analyse réelle et complexe - Masson (1980).*
- *J. Dieudonné - Calcul infinitésimal - Hermann (1980).*
- *M. Hervé - Les fonctions analytiques - P.U.F. (1982).*
- *D. Leborgne - Calcul différentiel complexe - P.U.F. (collection "Que sais-je ?") (1991).*
- *Dictionnaire des Mathématiques - Analyse, Algèbre et Géométrie (Encyclopédie Universalis) - Albin Michel (1997) (Ch. "Fonctions analytiques" / "Exponentielle et logarithme")*

Pour les fonctions de plusieurs variables complexes:

- *R.C. Gunning et H. Rossi : Analytic functions of several complex variables - Prentice Hall (1965). La référence ...*
- *L. Hormander : An introduction to complex analysis in several variables - Van Nostrand (1966).*
- *R. Narasimhan : Several complex variables - Chicago (1971).*
- *Dictionnaire des Mathématiques - Fondements, Probabilités et applications (Encyclopédie Universalis) - Albin Michel (1998) (Ch. "Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes").*
- *Voir aussi le chapitre IV du livre de H. Cartan, ainsi que les chapitres I-2/3/4 et II-11 du livre de M. Hervé.*

* *
*