

Calcul approché des intégrales définies

Pour ce chapitre, $I = [a, b]$ est un segment réel avec $a < b$, $\mathcal{C}(I)$ est l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur I à valeurs réelles et continues et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$, on note :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |f'(t)|.$$

20.1 Formules de quadrature

Définition 20.1 On appelle formule (ou méthode) de quadrature à $n + 1$ points sur $\mathcal{C}(I)$ la donnée d'une forme linéaire φ_n définie sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \varphi_n(f) = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} f(x_{n,k})$$

où n est un entier naturel non nul, $(x_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ une suite de points deux à deux distincts dans l'intervalle I et $(\lambda_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ une suite de réels non tous nuls.

On cherche des formules de quadrature, avec des coefficients $x_{n,k}$ et $\lambda_{n,k}$ indépendants de f , permettant d'approximer l'intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$. On écrira alors :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \varphi_n(f) = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} f(x_{n,k}).$$

Pour chaque formule de quadrature il sera important de savoir estimer l'erreur de quadrature :

$$E_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \varphi_n(f).$$

Définition 20.2 Une formule de quadrature à $n + 1$ points sur $\mathcal{C}(I)$ est dite d'ordre p si elle est exacte sur $\mathbb{R}_p[x]$ et inexacte pour au moins un polynôme de degré strictement supérieur à p .

Pour vérifier qu'une formule de quadrature est d'ordre p , il suffit, par linéarité de φ_n et de l'intégrale, de vérifier qu'elle est exacte sur une base de $\mathbb{R}_p[x]$ (par exemple la base canonique) et inexacte pour un polynôme de degré $p + 1$ (par exemple le polynôme x^{p+1}).

Remarque 20.1 L'ordre maximum d'une formule de quadrature à $n+1$ points est $2n+1$. En effet en considérant le polynôme P de degré $2n+2$ défini par $P(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_{n,k})^2$, on a :

$$\int_a^b P(x) \pi(x) dx > 0 = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} P(x_{n,k}).$$

On dit qu'une méthode de quadrature définie par une suite de formes linéaires $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ la suite $(\varphi_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(f)$.

20.2 La méthode des rectangles à gauche

Pour $I = [a, b]$ intervalle fermé borné, en prenant les points $x_{n,k}$ équidistants dans I , c'est-à-dire :

$$x_{n,k} = a + k \frac{b-a}{n} \quad (0 \leq k \leq n)$$

et les coefficients $\lambda_{n,k}$ tous égaux à $\frac{b-a}{n}$ pour k compris entre 0 et $n-1$, le coefficient $\lambda_{n,n}$ étant nul, on obtient la formule des rectangles à gauche :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k})$$

et le cours sur l'intégrale de Riemann nous dit que :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

La méthode des rectangles à gauche est donc convergente.

Cette méthode est d'ordre 0. En effet il est clair que $R_n(f) = \int_a^b f(x) dx$ pour f constante et pour $f(x) = x$ sur $[0, 1]$, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \neq \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

De manière plus générale, en choisissant pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ un réel $\xi_{n,k}$ dans l'intervalle $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$, les sommes de Riemann :

$$\varphi_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{n,k})$$

définissent une méthode de quadrature sur $\mathcal{C}(I)$ qui est exacte sur l'ensemble des fonctions constantes et pour toute fonction f dans $\mathcal{C}(I)$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

La méthode des rectangles en un point quelconque de $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$ est donc convergente.

Pour f monotone, on peut facilement obtenir un encadrement de l'erreur d'approximation pour la méthode des rectangles à gauche.

Théorème 20.1 Avec les notations qui précèdent, on a pour f monotone sur $[a, b]$:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - R_n(f) \right| \leq \frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)|$$

Démonstration. Par exemple, pour f croissante, on a pour k compris entre 0 et $n-1$:

$$\forall x \in [x_{n,k}, x_{n,k+1}], f(x_{n,k}) \leq f(x) \leq f(x_{n,k+1})$$

ce qui entraîne en intégrant sur $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$:

$$\frac{b-a}{n} f(x_{n,k}) \leq \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} f(x_{n,k+1})$$

et en effectuant la somme :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{n,k})$$

soit :

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx - R_n(f) \leq \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

Dans le cas où f est décroissante, $-f$ est croissante et $R_n(f) = -R_n(-f)$. On a donc :

$$0 \leq \int_a^b -f(x) dx - R_n(-f) \leq \frac{b-a}{n} (-f(b) + f(a))$$

ou encore :

$$0 \leq R_n(f) - \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} (f(a) - f(b)).$$

■

Remarque 20.2 Il n'est pas nécessaire de supposer que f est continue dans le théorème précédent puisque une fonction monotone est Riemann-intégrable.

Pour f de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, on peut donner une majoration de l'erreur d'approximation de $\int_a^b f(x) dx$ par la méthode des rectangles à gauche.

Nous utiliserons à plusieurs reprises le lemme suivant, conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

Lemme 20.1 Si φ est une fonction continue sur $[a, b]$ et $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de points de $[a, b]$ avec $n \geq 2$, il existe alors un réel c dans $[a, b]$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(x_k) = n \cdot \varphi(c)$$

Démonstration. En désignant par m [resp. M] la borne inférieure [resp. supérieure] de φ sur $[a, b]$, on a :

$$n \cdot m \leq \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x_k) \leq n \cdot M$$

et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit alors qu'il existe c dans $[a, b]$ tel que $\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(x_k) = n \cdot \varphi(c)$. ■

Lemme 20.2 Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx - f(a)(b-a) = \frac{f'(c)}{2} (b-a)^2.$$

Démonstration. En désignant par $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ la primitive de f nulle en a , cette fonction est de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ et le théorème de Taylor-Lagrange nous dit qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_a^b f(x) dx = F(a) + F'(a)(b-a) + \frac{F''(c)}{2} (b-a)^2 \\ &= f(a)(b-a) + \frac{f'(c)}{2} (b-a)^2 \end{aligned}$$

■

On déduit de ce lemme une majoration de l'erreur dans la méthode de base du rectangle à gauche :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - f(a)(b-a) \right| \leq \frac{\|f'\|_\infty}{2} (b-a)^2$$

Pour ce qui est de la méthode composée des rectangles, on a le résultat suivant.

Théorème 20.2 Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et n un entier naturel non nul. Avec les notations qui précèdent, il existe un réel $c_n \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx - R_n(f) = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c_n)$$

et on a :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - R_n(f) \right| \leq \frac{\|f'\|_\infty (b-a)^2}{2n}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - R_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x) dx - (x_{n,k+1} - x_{n,k}) f(x_{n,k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f'(c_{n,k})}{2} (x_{n,k+1} - x_{n,k})^2 = \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} f'(c_{n,k}) \end{aligned}$$

où chaque $c_{n,k}$ est dans $]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$.

Le lemme 20.1 nous dit alors qu'il existe c_n dans $[a, b]$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} f'(c_{n,k}) = n \cdot f'(c_n)$. On a donc :

$$\int_a^b f(x) dx - R_n(f) = \frac{(b-a)^2}{2n^2} n \cdot f'(c_n) = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c_n)$$

et :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - R_n(f) \right| \leq \frac{\|f'\|_\infty (b-a)^2}{2n}$$

Avec ce théorème, on retrouve le fait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Pour une fonction f suffisamment dérivable, on peut donner, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange, un développement asymptotique de l'erreur d'approximation dans la méthode des rectangles à gauche.

Lemme 20.3 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^3([a, b], \mathbb{R})$, il existe des réel c_1, c_2, c_3 dans $[a, b]$ tels que :*

$$\begin{aligned} F(b) &= f(a)(b-a) + \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12}(f'(b)-f'(a)) \\ &\quad + \frac{(b-a)^4}{24}(f^{(3)}(c_1) - f^{(3)}(c_2) + f^{(3)}(c_3)) \end{aligned}$$

Démonstration. En désignant par $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ la primitive de f nulle en a , cette fonction est de classe \mathcal{C}^4 sur $[a, b]$ et le théorème de Taylor-Lagrange nous dit qu'il existe un réel $c_1 \in]a, b[$ tel que :

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx \quad (20.1)$$

$$\begin{aligned} &= F(a) + F'(a)(b-a) + \frac{F''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{F^{(3)}(a)}{6}(b-a)^3 + \frac{F^{(4)}(c)}{24}(b-a)^4 \quad (20.2) \\ &= f(a)(b-a) + \frac{f'(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{f''(a)}{6}(b-a)^3 + \frac{f^{(3)}(c_1)}{24}(b-a)^4 \end{aligned}$$

On a aussi, avec la formule de Taylor-Lagrange pour f :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(c_2)}{6}(b-a)^3$$

soit, en multipliant la première relation par $\frac{b-a}{2}$:

$$\frac{f'(a)}{2}(b-a)^2 = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)) - \frac{f''(a)}{4}(b-a)^3 - \frac{f^{(3)}(c_2)}{12}(b-a)^4$$

et en reportant dans (20.1), on obtient :

$$\begin{aligned} F(b) &= f(a)(b-a) + \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)) - \frac{f''(a)}{4}(b-a)^3 - \frac{f^{(3)}(c_2)}{12}(b-a)^4 \\ &\quad + \frac{f''(a)}{6}(b-a)^3 + \frac{f^{(3)}(c_1)}{24}(b-a)^4 \\ &= f(a)(b-a) + \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)) - \frac{f''(a)}{12}(b-a)^3 + \frac{(b-a)^4}{24}(f^{(3)}(c_1) - f^{(3)}(c_2)) \end{aligned}$$

De même, avec :

$$f'(b) = f'(a) + f''(a)(b-a) + \frac{f^{(3)}(c_3)}{2}(b-a)^2$$

on obtient :

$$\frac{f''(a)}{12} (b-a)^3 = \frac{(b-a)^2}{12} (f'(b) - f'(a)) - \frac{f^{(3)}(c_3)}{24} (b-a)^4$$

et :

$$\begin{aligned} F(b) = f(a)(b-a) + \frac{b-a}{2} (f(b) - f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12} (f'(b) - f'(a)) \\ + \frac{(b-a)^4}{24} (f^{(3)}(c_1) - f^{(3)}(c_2) + f^{(3)}(c_3)) \end{aligned}$$

■

Théorème 20.3 Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^3([a, b], \mathbb{R})$ on a le développement asymptotique :

$$R_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2n} (f(b) - f(a)) + \frac{(b-a)^2}{12n^2} (f'(b) - f'(a)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Démonstration. On a, pour tout k compris entre 0 et $n-1$:

$$\begin{aligned} \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x) dx &= f(x_{n,k})(x_{n,k+1} - x_{n,k}) + \frac{x_{n,k+1} - x_{n,k}}{2} (f(x_{n,k+1}) - f(x_{n,k})) \\ &\quad - \frac{(x_{n,k+1} - x_{n,k})^2}{12} (f'(x_{n,k+1}) - f'(x_{n,k})) \\ &\quad + \frac{(x_{n,k+1} - x_{n,k})^4}{24} (f^{(3)}(c_{1,k}) - f^{(3)}(c_{2,k}) + f^{(3)}(c_{3,k})) \\ &= \frac{b-a}{n} f(x_{n,k}) + \frac{b-a}{2n} (f(x_{n,k+1}) - f(x_{n,k})) \\ &\quad - \frac{(b-a)^2}{12n^2} (f'(x_{n,k+1}) - f'(x_{n,k})) \\ &\quad + \frac{(b-a)^4}{24n^4} (f^{(3)}(c_{1,k}) - f^{(3)}(c_{2,k}) + f^{(3)}(c_{3,k})) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x) dx \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) + \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{n,k+1}) - f(x_{n,k})) \\ &\quad - \frac{(b-a)^2}{12n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (f'(x_{n,k+1}) - f'(x_{n,k})) \\ &\quad + \frac{(b-a)^4}{24n^4} \sum_{k=0}^{n-1} (f^{(3)}(c_{1,k}) - f^{(3)}(c_{2,k}) + f^{(3)}(c_{3,k})) \end{aligned}$$

soit en désignant par c_n, d_n et e_n des réels dans $[a, b]$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} f^{(3)}(c_{1,k}) = n f^{(3)}(c_n)$,

$\sum_{k=0}^{n-1} f^{(3)}(c_{2,k}) = n f^{(3)}(d_n)$, et $\sum_{k=0}^{n-1} f^{(3)}(c_{3,k}) = n f^{(3)}(e_n)$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= R_n(f) + \frac{b-a}{2n} (f(b) - f(a)) - \frac{(b-a)^2}{12n^2} (f'(b) - f'(a)) \\ &\quad + \frac{(b-a)^4}{24n^3} (f^{(3)}(c_n) - f^{(3)}(d_n) + f^{(3)}(e_n)) \end{aligned}$$

avec :

$$|f^{(3)}(c_n) - f^{(3)}(d_n) + f^{(3)}(e_n)| \leq 3 \|f^{(3)}\|_\infty$$

ce qui donne bien le résultat annoncé. ■

Exemple 20.1 Pour $f(t) = \frac{1}{1+t}$ sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \ln(2) + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Exemple 20.2 Pour $f(t) = \frac{1}{(1+t)^\alpha}$ sur $[0, 1]$, avec $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$:

$$n^{\alpha-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} - 1 \right) - \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2^\alpha} - 1 \right) + \frac{\alpha}{12n^2} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha+1}} \right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

20.3 La méthode des points milieux

Cette méthode consiste à utiliser les sommes de Riemann avec le point milieu $\xi_{n,k} = \frac{x_{n,k} + x_{n,k+1}}{2}$. On utilise donc l'opérateur M_n défini sur $\mathcal{C}([a, b])$ par :

$$M_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{n,k} + x_{n,k+1}}{2}\right).$$

La méthode de base, qui correspond à $n = 1$, est définie par :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq M_1(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Si f est une fonction affine, elle peut s'écrire $f(x) = \alpha(x-a) + \beta$ et le changement de variable $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ nous donne :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b (\alpha(x-a) + \beta) dx = \int_{-1}^1 \left(\alpha \frac{b-a}{2} (t+1) + \beta \right) \frac{b-a}{2} dt \\ &= 2 \int_0^1 \left(\alpha \frac{b-a}{2} + \beta \right) \frac{b-a}{2} dt = \left(\alpha \frac{b-a}{2} + \beta \right) (b-a) \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

et :

$$M_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{n,k+1} - x_{n,k}) f\left(\frac{x_{n,k} + x_{n,k+1}}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Pour $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} M_n(f) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} + \frac{1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{k}{n^2} + \frac{1}{4n^2} \right) \\ &= \frac{1}{n^3} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{4} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2} \neq \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La méthode est donc d'ordre 1.

Dans le cas où f est une fonction dérivable, la tangente au graphe de f en $\frac{a+b}{2}$ a pour équation :

$$y = h(x) = f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) + f \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

et :

$$\int_a^b h(x) dx = (b-a) h \left(\frac{a+b}{2} \right) = (b-a) f \left(\frac{a+b}{2} \right).$$

On a donc :

$$M_1(f) = \int_a^b h(x) dx.$$

Dans le cas où f est une fonction dérivable convexe, son graphe est toujours au dessus des tangentes, on a donc $f(x) \geq h(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et :

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b h(x) dx = (b-a) f \left(\frac{a+b}{2} \right).$$

Pour ce qui est d'une estimation de l'erreur d'approximation, on s'intéresse d'abord à la méthode de base.

Lemme 20.4 Soit f une fonction à valeurs réelles de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle $[a, b]$. Il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx - (b-a) f \left(\frac{a+b}{2} \right) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(c)$$

Démonstration. On se ramène à l'intervalle $[-1, 1]$ en utilisant le changement de variable $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ avec $t \in [-1, 1]$, ce qui conduit à introduire la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par :

$$g(t) = f \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t \right).$$

L'erreur dans la méthode du point milieu de base pour f sur $[a, b]$ est :

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_a^b f(x) dx - (b-a) f \left(\frac{a+b}{2} \right) \\ &= \frac{b-a}{2} \left(\int_{-1}^1 g(t) dt - 2g(0) \right) \end{aligned}$$

On désigne par $G : x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ la primitive sur $[0, 1]$ de g nulle en 0 et par φ la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\varphi(x) = \int_{-x}^x g(t) dt - 2xg(0) = G(x) - G(-x) - 2xg(0)$$

(erreur dans la méthode du point milieu sur $[-x, x]$). La fonction G est de classe \mathcal{C}^3 sur $[0, 1]$ et la formule de Taylor-Lagrange nous donne pour $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} G(x) &= G(0) + G'(0)x + \frac{G''(0)}{2}x^2 + \frac{G^{(3)}(c_x)}{6}x^3 \\ &= g(0)x + \frac{g'(0)}{2}x^2 + \frac{g''(c_x)}{6}x^3 \end{aligned}$$

avec $0 < c_x < x$ et en conséquence :

$$\varphi(x) = G(x) - G(-x) - 2xg(0) = \frac{g''(c_x) + g''(c_{-x})}{6}x^3.$$

avec $-x < c_{-x} < 0$. Le lemme 20.1 nous dit alors qu'il existe d_x dans $[-x, x] \subset]-1, 1[$ tel que $g''(c_x) + g''(c_{-x}) = 2g''(d_x)$. On a donc :

$$\varphi(x) = \frac{g''(d_x)}{3}x^3$$

et :

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{b-a}{2}\varphi(1) = \frac{b-a}{2}\frac{g''(d_1)}{3} \\ &= \frac{b-a}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\frac{f''(c)}{3} = \frac{(b-a)^3}{24}f''(c) \end{aligned}$$

avec $c = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}d_1 \in]a, b[$. ■

On déduit de ce lemme une majoration de l'erreur dans la méthode de base du point milieu pour une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24}(b-a)^3$$

Pour la méthode composée, on en déduit le résultat suivant.

Théorème 20.4 Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ et n un entier naturel non nul. Avec les notations qui précèdent, il existe un réel $c_n \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx - M_n(f) = \frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(c_n)$$

et on a :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - M_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2}\|f''\|_\infty$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - M_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x) dx - (x_{n,k+1} - x_{n,k}) f\left(\frac{x_{n,k} + x_{n,k+1}}{2}\right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{n,k+1} - x_{n,k})^3}{24} f''(c_{n,k}) = \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{k=0}^{n-1} f''(c_{n,k}) \end{aligned}$$

où chaque $c_{n,k}$ est dans $]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$.

Le lemme 20.1 nous dit qu'il existe c_n dans $[a, b]$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} f''(c_{n,k}) = n \cdot f''(c_n)$. On a donc :

$$\int_a^b f(x) dx - M_n(f) = \frac{(b-a)^3}{24n^3}n \cdot f''(c_n) = \frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(c_n)$$

et :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - M_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f''\|_\infty$$

■

Là encore, on retrouve le fait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Remarque 20.3 Pour $n \geq 1$, on a :

$$M_n(f) = 2R_{2n}(f) - R_n(f)$$

En effet :

$$\begin{aligned} R_{2n}(f) &= \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(x_{2n,k}) = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{2n}\right) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + 2j \frac{b-a}{2n}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + (2j+1) \frac{b-a}{2n}\right) \right) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{n,j}) + \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{n,j} + x_{n,j+1}}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} 2R_{2n}(f) &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{n,j}) + \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{n,j} + x_{n,j+1}}{2}\right) \\ &= R_n(f) + M_n(f). \end{aligned}$$

On a donc accéléré la convergence de la suite $(R_n(f))_{n \geq 1}$ en utilisant la suite $(M_n(f))_{n \geq 1}$ formée des moyennes de $R_{2n}(f)$ et $R_n(f)$ avec les poids 2 et -1 respectivement.

20.4 Les méthodes de Newton-Cotes

Ces méthodes sont basées sur l'interpolation de Lagrange.

On se place ici dans le cas où $I = [a, b]$ est intervalle fermé borné, on se donne un entier $p \geq 1$ et on lui associe les points $x_{p,k}$ définis par :

$$x_{p,k} = a + k \frac{b-a}{p} \quad (0 \leq k \leq p).$$

Théorème 20.5 Pour tout entier naturel non nul p , il existe des coefficients réels uniques $(\mu_{p,k})_{0 \leq k \leq p}$ tels que pour toute fonction polynomiale P de degré au plus égal à p on ait :

$$\int_a^b P(x) dx = \frac{b-a}{p} \sum_{k=0}^p \mu_{p,k} P(x_{p,k}). \quad (20.3)$$

Ces coefficients sont donnés par :

$$\mu_{p,k} = \frac{(-1)^{p-k}}{p!} C_p^k \int_0^p \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^p (t-j) dt \quad (0 \leq k \leq p)$$

Démonstration. On désigne par $(L_{p,k})_{0 \leq k \leq p}$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_p[x]$ définie par :

$$L_{p,k}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^p \frac{x - x_{p,j}}{x_{p,k} - x_{p,j}}$$

Par linéarité, la propriété (20.3) est vérifiée pour tout P dans $\mathbb{R}_p[x]$ si, et seulement si, elle est vérifiée pour tous les $L_{p,k}$, ce qui équivaut à :

$$\int_a^b L_{p,k}(x) dx = \frac{b-a}{p} \mu_{p,k}$$

pour tout entier k compris entre 0 et p . On a donc ainsi prouvé l'existence et l'unicité des coefficients $\mu_{p,k}$.

Le changement de variable $x = a + t \frac{b-a}{p}$ nous donne :

$$\mu_{p,k} = \int_0^p L_{p,k} \left(a + t \frac{b-a}{p} \right) dt$$

avec :

$$\begin{aligned} L_{p,k} \left(a + t \frac{b-a}{p} \right) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^p \frac{t-j}{k-j} = \frac{(-1)^{p-k}}{k!(p-k)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^p (t-j) \\ &= \frac{(-1)^{p-k}}{p!} C_p^k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^p (t-j) \end{aligned}$$

■

Remarque 20.4 Les coefficients $(\mu_{p,k})_{0 \leq k \leq p}$ ne dépendent que de p et de k , mais pas de l'intervalle I .

Remarque 20.5 On peut aussi déterminer les coefficients $(\mu_{p,k})_{0 \leq k \leq p}$ en utilisant la base $\left((x-a)^i \right)_{0 \leq i \leq p}$ de $\mathbb{R}_p[x]$, ce qui fait apparaître ces coefficients comme solutions du système linéaire :

$$\sum_{k=0}^p \mu_{p,k} (x_{p,k} - a)^i = \frac{p}{b-a} \int_a^b (x-a)^i dx \quad (0 \leq i \leq p)$$

Soit :

$$\sum_{k=0}^p k^i \mu_{p,k} = \frac{p^{i+1}}{i+1} \quad (0 \leq i \leq p) \quad (20.4)$$

La matrice de ce système est la matrice de type Vandermonde :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & p & p^2 & \cdots & p^p \end{pmatrix}$$

de déterminant

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p & p^2 & \cdots & p^p \end{vmatrix} = p! \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & p & \cdots & p^{p-1} \end{vmatrix} \\ &= p! \prod_{1 \leq j < i \leq p} (i - j) = p! \prod_{i=2}^p (i - 1)! = \prod_{i=2}^p i!. \end{aligned}$$

Ce déterminant étant non nul, on retrouve l'existence et l'unicité des coefficients $\mu_{p,k}$. En résolvant ces systèmes on obtient les coefficients $\mu_{p,k}$.

Si f est une fonction continue sur I , en notant P_p le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $(x_{p,k})_{0 \leq k \leq p}$, on a :

$$\int_a^b P_p(x) dx = \frac{b-a}{p} \sum_{k=0}^p \mu_{p,k} P(x_{p,k}) = \frac{b-a}{p} \sum_{k=0}^p \mu_{p,k} f(x_{p,k}).$$

La méthode de Newton-Cotes correspondante consiste à remplacer $\int_a^b f(x) dx$ par $\int_a^b P_p(x) dx$, ce qui revient à utiliser la méthode de quadrature décrite par la fonctionnelle φ_p définies par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \varphi_p(f) = \frac{b-a}{p} \sum_{k=0}^p \mu_{p,k} f(x_{p,k}).$$

Théorème 20.6 Avec les notations qui précèdent, les coefficients $(\mu_{p,k})_{0 \leq k \leq n}$ sont des nombres rationnels et on a :

$$\mu_{p,p-k} = \mu_{p,k} \quad (0 \leq k \leq p)$$

Démonstration. Pour tout k compris entre 0 et p , le polynôme $\pi_{p,k}$ défini par :

$$\pi_{p,k}(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^p (t - j)$$

est à coefficients entiers, donc $\int_0^p \pi_{p,k}(t) dt$ est un nombre rationnel et il en est de même de $\mu_{p,k}$.

On peut aussi dire que les $\mu_{p,k}$ sont rationnels comme solutions du système linéaire (20.4) qui est à coefficients rationnels.

En notant $\pi_p(t) = \prod_{j=0}^p (t - j)$, le changement d'indice $k = p - j$ nous donne :

$$\begin{aligned} \pi_p(p-t) &= \prod_{j=0}^p (p-t-j) = (-1)^{p+1} \prod_{j=0}^p (t - (p-j)) \\ &= (-1)^{p+1} \prod_{k=0}^p (t - k) = (-1)^{n+1} \pi_p(t), \end{aligned}$$

et en écrivant que $\pi_{p,k}(t) = \frac{\pi_p(t)}{t-k}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\pi_{p,k}(n-t) &= -\frac{\pi_p(p-t)}{t-(p-k)} = (-1)^p \frac{\pi_p(t)}{t-(p-k)} \\ &= (-1)^p \pi_{p,p-k}(t).\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = p - u$ nous donne alors :

$$\int_0^p \pi_{p,k}(t) dt = (-1)^p \int_0^p \pi_{p,p-k}(u) du$$

et tenant compte de $C_p^{p-k} = C_p^k$, on en déduit que $\mu_{p,p-k} = \mu_{p,k}$ pour tout k compris entre 0 et p . ■

Remarque 20.6 Les formules de Newton-Cotes à $p+1$ points sont exactes sur $\mathbb{R}_p[x]$, elles sont donc d'ordre au moins égal à p .

Exercice 20.1 Montrer que pour tout entier naturel non nul p pair, les formules de Newton-Cotes à $p+1$ points sont exactes sur $\mathbb{R}_{p+1}[x]$.

Solution 20.1 En effectuant un changement de variable on se ramène à l'intervalle $I = [-1, 1]$.

On sait déjà que les formules de Newton-Cotes à $p+1$ points sont exactes sur $\mathbb{R}_p[x]$.

Soit $p = 2q$ avec q non nul. La fonction x^{p+1} étant impair, on a :

$$\int_{-1}^1 x^{p+1} dx = 0.$$

D'autre part, avec :

$$\begin{cases} \mu_{p,p-k} = \mu_{p,k} \\ x_{p,p-k} = -1 + (2q-k) \frac{1}{q} = 1 - \frac{k}{q} = -x_{p,k} \end{cases}$$

pour k compris entre 0 et $q-1$, $x_{p,q} = 0$ et $p+1$ impair, on déduit que :

$$\sum_{k=0}^p \mu_{p,k} x_{p,k}^{p+1} = \sum_{k=0}^{q-1} \mu_{p,k} x_{p,k}^{p+1} + \sum_{k=0}^{q-1} \mu_{p-k,k} x_{p-k,k}^{p+1} = 0.$$

La formule de quadrature correspondante est donc exacte sur $\mathbb{R}_{p+1}[x]$.

Remarque 20.7 On peut montrer que les formules de Newton-Cotes à $p+1$ points sont d'ordre p pour p impair et d'ordre $p+1$ pour p pair (voir [43]).

Pour ce qui est de l'erreur d'approximation, on peut montrer le résultat suivant (voir [43]), où $\pi_p(t) = \prod_{j=0}^p (t-j)$.

Théorème 20.7 Soient f une fonction de classe \mathcal{C}^{p+2} sur $I = [a, b]$ et

$$E_p(f) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{p} \sum_{k=0}^p \mu_{p,k} f(x_{p,k})$$

l'erreur de quadrature dans la méthode de Newton-Cotes à $p+1$ points dans I .
Si p est pair, il existe alors un réel ξ dans $[a, b]$ tel que :

$$E_p(f) = \left(\frac{b-a}{n}\right)^{p+3} \frac{f^{(p+2)}(\xi)}{(p+2)!} \int_0^p t \pi_p(t) dt.$$

Si p est impair, il existe alors un réel ξ dans $[a, b]$ tel que :

$$E_p(f) = \left(\frac{b-a}{p}\right)^{p+2} \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!} \int_0^p \pi_p(t) dt.$$

Les méthodes que nous venons de décrire sont les méthodes de Newton-Cotes de base. En pratique, on utilise les formules de Newton-Cotes composées qui consistent à se fixer un entier naturel non nul p (égal dans la pratique à 1, 2, 4 ou 6) et pour tout entier naturel non nul n on utilise une formule de Newton-Cotes d'ordre p sur chacun des intervalles $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$ pour k compris entre 0 et $n-1$, où $x_{n,k} = a + k \frac{b-a}{n}$. Ces formules sont décrites par les fonctionnelles $\varphi_{n,p}$ définies sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$\varphi_{n,p}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{np} \sum_{j=0}^p \mu_{p,j} f\left(x_{n,k} + j \frac{b-a}{np}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{n,p,k}(f). \quad (20.5)$$

En écrivant :

$$\varphi_{n,p}(f) = \sum_{j=0}^p \frac{\mu_{p,j}}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(x_{n,k} + j \frac{b-a}{np}\right) = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^p \mu_{p,j} S_{n,p,j}(f)$$

et en remarquant que pour tout entier j compris entre 0 et p , $S_{n,p,j}(f)$ est une somme de Riemann de f sur $[a, b]$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n,p,j}(f) = \int_a^b f(x) dx$$

et avec $\sum_{j=0}^p \mu_{p,j} = p$, on déduit que :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{n,p}(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Les méthodes de Newton-Cotes composées sont donc convergentes.

20.5 La méthode des trapèzes

On conserve les notations du paragraphe précédent.

Pour $p = 1$, on a $x_{1,0} = a$, $x_{1,1} = b$ et :

$$\mu_{1,0} = \mu_{1,1} = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

La formule de quadrature de base correspondante est la formule du trapèze :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

Cette formule est exacte pour les polynômes de degré 1 mais pas pour x^2 , elle est donc d'ordre 1.

La méthode composée est la méthode des trapèzes définie par :

$$\begin{aligned} T_n(f) &= \frac{b-a}{2n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{n,k}) + f(x_{n,k+1})) \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{n,k}) \right) \end{aligned}$$

où on a noté $x_{n,k} = a + k \frac{b-a}{n}$ pour tout k compris entre 0 et n .

La formule de Taylor avec reste intégral et le théorème de la moyenne nous permettent d'obtenir une estimation de l'erreur d'approximation dans la méthode du trapèze.

Comme pour la méthode du point milieu, un changement de variable nous ramène à $[-1, 1]$.

Le lemme qui suit nous sera utile pour obtenir cette estimation de l'erreur.

Lemme 20.5 Soit h une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$ telle que $h'(0) = 0$. Pour tout x dans $]0, 1]$ il existe un réel c_x dans $[0, 1]$ tel que :

$$\int_0^x h(t) dt - xh(x) = -\frac{h''(c_x)}{3}x^3.$$

Démonstration. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} h(x) &= h(0) + h'(0)x + \int_0^x (x-t)h''(t) dt \\ &= h(0) + \int_0^x (x-t)h''(t) dt. \end{aligned}$$

De même, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 pour la primitive de h nulle en 0, $H : x \mapsto \int_0^x h(t) dt$ (qui est de classe \mathcal{C}^3) nous donne :

$$\begin{aligned} H(x) &= H(0) + H'(0)x + \frac{H''(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}H'''(t) dt \\ &= h(0)x + \frac{h'(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}h''(t) dt \\ &= h(0)x + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}h''(t) dt. \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \int_0^x h(t) dt - xh(x) &= H(x) - xh(x) \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} h''(t) dt - x \int_0^x (x-t) h''(t) dt \\ &= - \int_0^x \frac{x^2 - t^2}{2} h''(t) dt. \end{aligned}$$

Pour $x \in]0, 1]$, la fonction $t \mapsto x^2 - t^2$ étant à valeurs positives sur $[0, x]$, le théorème de la moyenne nous dit qu'il existe $c_x \in [0, x]$ tel que :

$$\int_0^x h(t) dt - xh(x) = -h''(c_x) \int_0^x \frac{x^2 - t^2}{2} dt = -\frac{h''(c_x)}{3} x^3.$$

■

Lemme 20.6 Soit f une fonction à valeurs réelles de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle $[a, b]$. Il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(c)$$

Démonstration. Le changement de variable $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ avec $t \in [-1, 1]$ nous ramène à l'intervalle $[-1, 1]$. En définissant la fonction g sur $[-1, 1]$ par :

$$g(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right),$$

l'erreur dans la méthode du trapèze pour f sur $[a, b]$ s'écrit :

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \\ &= \frac{b-a}{2} \left(\int_{-1}^1 g(t) dt - (g(-1) + g(1)) \right). \end{aligned}$$

En désignant par h la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $h(t) = g(-t) + g(t)$, on a :

$$E(f) = \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 h(x) dx - h(1) \right),$$

la fonction h étant de classe \mathcal{C}^2 sur $[-1, 1]$ avec $h'(0) = g'(0) - g'(0) = 0$ et le lemme précédent nous dit qu'il existe un réel c_1 dans $[0, 1]$ tel que :

$$E(f) = -\frac{b-a}{2} \frac{h''(c)}{3} = -\frac{b-a}{2} \frac{g''(c_1) + g''(-c_1)}{3}.$$

Le lemme 20.1 nous dit qu'il existe d_1 dans $[0, 1]$ tel que $g''(-c_1) + g''(c_1) = 2g''(d_1)$. On a donc :

$$E(f) = -\frac{b-a}{3} g''(d_1) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(c)$$

avec $c = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}d_1$ dans $[a, b]$. ■

On déduit de ce lemme une majoration de l'erreur dans la méthode du trapèze pour une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{12} (b-a)^3$$

Remarque 20.8 Une démonstration élémentaire, mais plus astucieuse, du lemme précédent peut se faire comme suit (voir [10]).

On peut remarquer qu'une intégration par parties nous donne pour f de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) dx &= \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) - \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Pour f de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ une autre intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x) dx &= \left[f'(x) \frac{1}{2} \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \right) \right]_a^b \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \right) f''(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \right) f''(x) dx \end{aligned}$$

et en conséquence :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) &= \frac{1}{2} \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \right) f''(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \left(\frac{b-a}{2}\right) \right) \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right) \right) f''(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_a^b (b-x)(x-a) f''(x) dx. \end{aligned}$$

Comme sur l'intervalle $[a, b]$, on a $(b-x)(x-a) \geq 0$, on déduit du théorème de la moyenne qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b (b-x)(x-a) f''(x) dx = f''(c) \int_a^b (b-x)(x-a) dx = f''(c) \frac{(b-a)^3}{6}$$

et :

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(c)$$

Pour la méthode composée, on en déduit le résultat suivant.

Théorème 20.8 Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ et n un entier naturel non nul. Avec les notations qui précèdent, il existe un réel $c_n \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx - T_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c_n)$$

et on a :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_\infty$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - T_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x) dx - \frac{x_{n,k+1} - x_{n,k}}{2} (f(x_{n,k}) + f(x_{n,k+1})) \right) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{n,k+1} - x_{n,k})^3}{12} f''(c_{n,k}) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{k=0}^{n-1} f''(c_{n,k}) \end{aligned}$$

où chaque $c_{n,k}$ est dans $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$.

Le lemme 20.1 nous dit qu'il existe c_n dans $[a, b]$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} f''(c_{n,k}) = n \cdot f''(c_n)$. On a donc :

$$\int_a^b f(x) dx - T_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} n \cdot f''(c_n) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c_n)$$

et :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_\infty$$

■

De ce théorème, on déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Remarque 20.9 Pour $n \geq 1$, on a :

$$T_n(f) = \frac{R_n(f) + R'_n(f)}{2}$$

où $R'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k+1})$ est une approximation de $\int_a^b f(x) dx$ par la méthode composée des rectangles à droite. On a donc accéléré la convergence des suites $(R_n(f))_{n \geq 1}$ $(R'_n(f))_{n \geq 1}$ en utilisant la suite $(T_n(f))_{n \geq 1}$ formée des moyennes de $R_n(f)$ et $R'_n(f)$ avec les poids $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ respectivement.

Remarque 20.10 On a aussi :

$$M_n(f) = 2T_{2n}(f) - T_n(f)$$

Pour $n \geq 2$ on a :

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \right).$$

En remarquant que pour tout j compris entre 0 et $n-1$ on a :

$$\begin{cases} x_{2n,2j} = x_{n,j} \\ x_{2n,2j+1} = x_{n,j} + \frac{b-a}{2n} = m_{n,j} \end{cases}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} T_{2n}(f) &= \frac{b-a}{2n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{n,j}) + \sum_{j=0}^{n-1} f(m_{n,j}) \right) \\ &= \frac{T_n(f) + M_n(f)}{2}. \end{aligned}$$

Ce résultat étant encore valable pour $n=1$.

Exercice 20.2 Donner une suite d'approximations rationnelles de $\ln(2)$ et $\frac{\pi}{4}$ en utilisant les méthodes composées des trapèzes. Donner une expression de l'erreur d'approximation.

Solution 20.2 On applique, pour tout entier $n \geq 1$, la méthode composée des trapèzes à la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ découpé en n intervalles égaux, ce qui donne :

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} \sim u_n = \frac{3}{4n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+n}.$$

Une expression de l'erreur d'approximation est donnée par :

$$|\ln(2) - u_n| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}.$$

Nous verrons plus loin que la formule d'Euler-Maclaurin nous donne le développement asymptotique :

$$\begin{aligned} \ln(2) - u_n &= -\frac{b_2}{2} (f'(1) - f'(0)) \frac{1}{n^2} - \frac{b_4}{24} f^{(4)}(\xi) \frac{1}{n^4} \\ &= -\frac{1}{16n^2} + \frac{1}{30n^4} \frac{1}{(1+\xi)^5}, \end{aligned}$$

avec $\xi \in [0, 1]$. La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$v_n = \frac{3}{4n} - \frac{1}{16n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+n}$$

converge vers $\ln(2)$ plus vite que $(v_n)_{n \geq 1}$.

Pour $n=10$, on a :

$$u_{10} \sim 0.69377, \quad v_{10} \sim 0.69315, \quad \ln(2) \sim 0.6931472.$$

Pour $\frac{\pi}{4}$, on procède de même avec la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 20.3 Vérifier que, pour $n \geq 2$, la formule des trapèzes composées sur $[0, 2\pi]$ est exacte pour la fonction \cos . Qu'en est-il pour la fonction $x \mapsto |\sin(x)|$ sur $[0, \pi]$.

Solution 20.3 La formule composée des trapèzes pour la fonction \cos sur $[0, 2\pi]$ s'écrit :

$$0 = \int_0^{2\pi} \cos(t) dt \sim \tau_n,$$

où :

$$\begin{aligned} \tau_n &= \frac{2\pi}{n} \left(\frac{\cos(0) + \cos(2\pi)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(k \frac{2\pi}{n}\right) \right) \\ &= \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(k \frac{2\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, on a :

$$\tau_1 = 2\pi$$

et pour $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(k \frac{2\pi}{n}\right) = \Re \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right) = \Re \left(\frac{1 - e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} \right) = 0.$$

La formule est donc exacte pour tout $n \geq 2$.

Pour $f(x) = |\sin(x)|$, on a $T = \pi$ et :

$$\int_0^\pi |\sin(x)| dx = 2, \quad \tau_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(k \frac{\pi}{n}\right) = -\frac{\pi}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - 1}.$$

20.6 La méthode de Simpson

Pour $p = 2$ dans la méthode de base de Newton-Cotes, on a $x_{2,0} = a$, $x_{2,1} = \frac{a+b}{2}$, $x_{2,2} = b$ et :

$$\begin{cases} \mu_{2,0} = \mu_{2,2} = \frac{1}{2} \int_0^2 t(t-1) dt = \frac{1}{3} \\ \mu_{2,1} = -\int_0^2 t(t-2) dt = \frac{4}{3} \end{cases}$$

La formule de quadrature correspondante est la formule de Simpson :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

On vérifie facilement, en se plaçant sur $I = [-1, 1]$ (on s'y ramène toujours par changement de variable affine) que cette formule est exacte pour les polynômes de degré 3 mais pas pour x^4 , elle est donc d'ordre 3.

La méthode composée de Simpson est définie par :

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \varphi_{n,2}(f) = \frac{b-a}{6n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{n,k}) + 4f(m_{n,k}) + f(x_{n,k+1})) \right) \\ &= \frac{b-a}{3n} \left(\frac{f(b) - f(a)}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{n,k}) + 2f(m_{n,k})) \right) \end{aligned}$$

où on a noté $x_{n,k} = a + k \frac{b-a}{n}$ pour tout k compris entre 0 et n et $m_{n,k} = x_k + \frac{b-a}{2n}$ (le milieu de $[x_k, x_{k+1}]$) pour tout k compris entre 0 et $n-1$.

Pour une majoration de l'erreur nous utiliserons le lemme suivant, analogue à celui utilisé pour la méthode des trapèzes.

Lemme 20.7 Soit h une fonction de classe \mathcal{C}^4 sur $[0, 1]$ telle que $h'(0) = 0$ et $h^{(3)}(0) = 0$. Pour tout x dans $]0, 1]$ il existe un réel c_x dans $[0, 1]$ tel que :

$$\int_0^x h(t) dt - x \frac{h(x) + 2h(0)}{3} = -\frac{h^{(4)}(c_x)}{180} x^5.$$

Démonstration. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} h(x) &= h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + \frac{h^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} h^{(4)}(t) dt \\ &= h(0) + \frac{h''(0)}{2}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} h^{(4)}(t) dt. \end{aligned}$$

et :

$$\frac{h(x) + 2h(0)}{3} = h(0) + \frac{h''(0)}{3!}x^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3 \cdot 3!} h^{(4)}(t) dt.$$

De même, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 pour la primitive de h nulle en 0, $H : x \mapsto \int_0^x h(t) dt$ (qui est de classe \mathcal{C}^5) nous donne :

$$\begin{aligned} H(x) &= H(0) + H'(0)x + \frac{H''(0)}{2}x^2 + \frac{H^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{H^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} H^{(5)}(t) dt \\ &= h(0)x + \frac{h'(0)}{2}x^2 + \frac{h''(0)}{3!}x^3 + \frac{h^{(3)}(0)}{4!}x^4 + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} h^{(4)}(t) dt \\ &= h(0)x + \frac{h''(0)}{3!}x^3 + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} h^{(4)}(t) dt. \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \int_0^x h(t) dt - x \frac{h(x) + 2h(0)}{3} &= H(x) - x \frac{h(x) + 2h(0)}{3} \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} h^{(4)}(t) dt - x \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3 \cdot 3!} h^{(4)}(t) dt \\ &= - \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} h^{(4)}(t) \left(\frac{x}{3} - \frac{x-t}{4} \right) dt \\ &= - \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} h^{(4)}(t) \frac{x+3t}{12} dt \end{aligned}$$

Pour $x \in]0, 1]$, la fonction $t \mapsto (x-t)^3(x+3t)$ étant à valeurs positives sur $[0, x]$, le théorème de la moyenne nous dit qu'il existe $c_x \in [0, x]$ tel que :

$$\begin{aligned} \int_0^x h(t) dt - x \frac{h(x) + 2h(0)}{3} &= -\frac{h^{(4)}(c_x)}{12 \cdot 3!} \int_0^x (x-t)^3(x+3t) dt \\ &= -\frac{h^{(4)}(c_x)}{12 \cdot 3!} \frac{2}{5} x^5 = -\frac{h^{(4)}(c_x)}{180} x^5. \end{aligned}$$

■

Lemme 20.8 Soit f une fonction à valeurs réelles de classe \mathcal{C}^4 sur un intervalle $[a, b]$. Il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c)$$

Démonstration. Le changement de variable $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ avec $t \in [-1, 1]$ nous ramène à l'intervalle $[-1, 1]$. En définissant la fonction g sur $[-1, 1]$ par :

$$g(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right),$$

l'erreur dans la méthode de Simpson sur $[a, b]$:

$$E(f) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

s'écrit alors :

$$E(f) = \frac{b-a}{2} \left(\int_{-1}^1 g(t) dt - \frac{1}{3} (g(-1) + 4g(0) + g(1)) \right).$$

En désignant par h la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $h(t) = g(-t) + g(t)$, on a :

$$E(f) = \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 h(x) dx - \frac{h(1) + 2h(0)}{3} \right),$$

la fonction h étant de classe \mathcal{C}^4 sur $[-1, 1]$ avec $h'(0) = h^{(3)}(0) = 0$ et le lemme précédent nous dit qu'il existe un réel c_1 dans $[0, 1]$ tel que :

$$E(f) = -\frac{b-a}{2} \frac{h^{(4)}(c_1)}{180} x^5 = -\frac{b-a}{2} \frac{g^{(4)}(c_1) + g^{(4)}(-c_1)}{180}.$$

Comme pour la méthode du point milieu ou du trapèze, le lemme 20.1 nous dit qu'il existe d_1 dans $[-1, 1]$ tels que $g^{(4)}(c_1) + g^{(4)}(-c_1) = 2g^{(4)}(d_1)$ et :

$$E(f) = -\frac{b-a}{2} \frac{g^{(4)}(d_1)}{90} = -\frac{(b-a)^5}{2^5 \cdot 90} f^{(4)}(c) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c)$$

avec $c = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}d_1$ dans $[a, b]$. ■

On déduit de ce lemme une majoration de l'erreur dans la méthode de base de Simpson pour une fonction f de classe \mathcal{C}^4 sur $[a, b]$:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \right| \leq \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{2880} (b-a)^5$$

Remarque 20.11 Cette méthode d'évaluation de l'erreur ne fonctionne pas pour les méthodes de Newton-Cotes plus générales.

Pour la méthode composée, on en déduit le résultat suivant.

Théorème 20.9 Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^4 sur $[a, b]$ et n un entier naturel non nul. Avec les notations qui précèdent, il existe un réel $c_n \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x) dx - S_n(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(c_n)$$

et on a :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \|f^{(4)}\|_\infty$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - S_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(x) dx - \frac{x_{n,k+1} - x_{n,k}}{6n} (f(x_{n,k}) + 4f(m_{n,k}) + f(x_{n,k+1})) \right) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{n,k+1} - x_{n,k})^5}{2880} f^{(4)}(c_{n,k}) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^5} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(4)}(c_{n,k}) \end{aligned}$$

où chaque $c_{n,k}$ est dans $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$.

Le lemme 20.1 nous dit alors qu'il existe c_n dans $[a, b]$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} f^{(4)}(c_{n,k}) = n \cdot f^{(4)}(c_n)$.

On a donc :

$$\int_a^b f(x) dx - S_n(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^5} n \cdot f^{(4)}(c_n) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(c_n)$$

et :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \|f^{(4)}\|_\infty$$

■

De ce théorème, on déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Remarque 20.12 Pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$S_n(f) = \frac{T_n(f) + 2M_n(f)}{3}$$

et :

$$S_n(f) = \frac{4T_{2n}(f) - T_n(f)}{3}$$

(c'est la première étape dans la méthode d'accélération de Romberg).

Pour la première formule, il suffit de la vérifier pour les méthodes de base, c'est-à-dire dans le cas $n = 1$. Dans ce cas on a :

$$S_1(f) = \frac{1}{3} \left(\frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) + 2(b-a)f(m) \right)$$

où $m = \frac{a+b}{2}$, ce qui donne bien la relation :

$$S_1(f) = \frac{T_1(f) + 2R_1(f)}{3}.$$

Puis en éliminant $M_n(f)$ dans les équations :

$$\begin{cases} S_n(f) = \frac{T_n(f) + 2M_n(f)}{3} \\ T_{2n}(f) = \frac{T_n(f) + M_n(f)}{2} \end{cases}$$

on obtient :

$$4T_{2n}(f) - 3S_n(f) = T_n(f),$$

$$\text{soit } S_n(f) = \frac{4T_{2n}(f) - T_n(f)}{3}.$$