L3 A, M363, contrôle 1
Février 2014

Exercice 1 *Soit* $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ *une suite finie de parties d'un ensemble non vide* X*. Montrer que :*

$$\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} = \min_{1\leq k\leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \max_{1\leq k\leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

et :

$$\left((A_k)_{1\leq k\leq n} \text{ est une partition de } A\right) \Leftrightarrow \left(\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}\right)$$

où A *est une partie de* X*.*

Solution. On vérifie facilement par récurrence sur $n \geq 1$ que :

$$\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} = \min_{1\leq k\leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

C'est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$. En supposant le résultat acquis pour $n - 1 \geq 2$, on a :

$$\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k} = \mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} A_k} \mathbf{1}_{A_n} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$$

et on vérifie facilement que pour tout $x \in X$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x) = \min_{1\leq k\leq n} \mathbf{1}_{A_k}(x)$$

Pour ce qui est de la réunion, on vérifie facilement que :

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \max_{1\leq k\leq n} \mathbf{1}_{A_k}$$

En effet, soit $x \in X$. Si $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, il existe alors un indice k tel que $x \in A_k$ et on a :

$$1 = \mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}(x) = \mathbf{1}_{A_k}(x) = \max_{1\leq j\leq n} \mathbf{1}_{A_j}(x)$$

Si $x \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, on a alors $x \notin A_k$ pour tout k compris entre 1 et n et :

$$0 = \mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}(x) = \max_{1\leq j\leq n} \mathbf{1}_{A_j}(x)$$

Supposons que $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ soit une partition de A, c'est-à-dire que $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, les A_k étant deux à deux disjoints.
Pour tout $x \in A$, il existe un unique j compris entre 1 et n tel que $x \in A_j$, donc $\mathbf{1}_{A_k}(x) = 0$ pour $k \neq j$, $\mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$ et $1 = \mathbf{1}_A(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x)$.

Pour $x \notin A$, x n'est dans aucun des A_k et $0 = \mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x)$.

Réciproquement supposons que $\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}$.

Si $x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, il existe un indice j compris entre 1 et n tel que $x \in A_j$, donc $\mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$ et $\mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x) \geq 1$, ce qui impose $\mathbf{1}_{A_k}(x) = 0$ pour $k \neq j$ et $\mathbf{1}_A(x) = 1$, ce qui signifie que les A_k sont deux à deux disjoints et $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$.

Pour $x \in A$, on a $1 = \mathbf{1}_A(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(x)$, donc il existe un unique j compris entre 1 et n tel que $\mathbf{1}_{A_j}(x) = 1$, ce qui signifie que x est dans un unique A_k et $x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, donc $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et on a l'égalité $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, les A_k étant deux à deux disjoints.

Exercice 2 *On rappelle que la mesure ℓ des intervalles réels se prolonge de manière unique en une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens, cette mesure étant invariante par translation. C'est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*
Nous allons vérifier que cette mesure ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
On désigne par $\mathcal{C}$ le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

1. *Vérifier que, pour toute classe d'équivalence $c \in \mathcal{C}$, on peut trouver un représentant x dans $[0, 1[$.*
   Pour tout $c \in \mathcal{C}$, on se fixe un représentant x_c de c dans $[0, 1[$ (axiome du choix) et on désigne par A l'ensemble de tous ces réels x_c.
2. *Montrer que les translatés $r + A$, où r décrit $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints et que :*
$$[0, 1] \subset \bigcup_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1, 2]$$
3. *En déduire que A n'est pas borélien et que ℓ ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (on pourra raisonner par l'absurde).*
4. *Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non mesurable ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu de Borel) telle que $|f|$ soit mesurable.*

Solution. La relation :
$$(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (y - x \in \mathbb{Q})$$
est une relation d'équivalence puisque $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ et l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est un groupe puisque le groupe $(\mathbb{R}, +)$ est commutatif.

1. Soit $c = \overline{x} \in \mathcal{C}$. En désignant par $n = [x] \in \mathbb{Z}$ la partie entière de x, on a $0 \leq x_c = x - n < 1$ et $c = \overline{x_c}$ puisque $x - x_c = n \in \mathbb{Q}$.
   L'axiome du choix nous permet de choisir, pour toute classe d'équivalence un représentant $x_c \in [0, 1]$.
   Ces choix étant faits, on a $c = c'$ dans $\mathcal{C}$ si, et seulement si $x_c = x_{c'}$.
2. Si r, r' dans $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ sont tels que $(r + A) \cap (r' + A) \neq \emptyset$, il existe alors y dans $(r + A) \cap (r' + A)$, donc $y = r + x_c = r' + x_{c'}$ et $c = \overline{x_c} = \overline{x_{c'}} = c'$, ce qui nous donne $x_c = x_{c'}$ et $r = r'$.
   Donc les ensembles $r + A$, où r décrit $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints.

Comme $A \subset [0,1[$, on a $r + A \subset [-1,2]$ pour tout $r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ et $\bigcup\limits_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1,2]$.

Pour tout $x \in [0,1]$ il existe $x_c \in A$ tel que $\overline{x} = \overline{x_c}$, donc il existe un rationnel r tel que $x = r + x_c$ et comme $|r| = |x - x_c| \leq 1$ (x et x_c sont dans $[0,1]$), on a $r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$. On a donc $[0,1] \subset \bigcup\limits_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A)$.

3. Si A est borélien, il en est alors de même de tous les $r + A$ (image réciproque de A par l'application continue, donc mesurable, $x \mapsto x - r$) et la réunion dénombrable $\bigcup\limits_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A)$ est un borélien, mais alors :

$$\ell([0,1]) = 1 \leq \ell\left(\bigcup_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A)\right) = \sum_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \ell(r + A) = \sum_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \ell(A) \leq \ell([-1,2]) = 3$$

ce qui impose $\ell(A) > 0$ et $\sum\limits_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \ell(A) = +\infty$, ce qui est impossible.

On a donc ainsi prouvé que l'ensemble A est donc borné et non borélien et que ℓ ne peut se prolonger à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

4. La fonction $f = 2\mathbf{1}_A - 1$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ -1 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

est non borélienne ($f^{-1}(\{1\}) = A$ est non borélien) et $|f| = 1$ est mesurable.

Exercice 3 *$[a,b]$ est un intervalle fermé borné fixé avec $a < b$ réels.*

1. *Montrer que les fonctions en escaliers positives sur $[a,b]$ sont exactement les fonctions du type :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, les a_k sont des réels positifs ou nuls et les I_k sont des intervalles contenus dans $[a,b]$.

2. *Montrer que si $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite finie de fonctions en escaliers sur $[a,b]$, alors la fonction $\varphi = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \varphi_k$ est aussi en escaliers.*

3. *Soit f une fonction réglée définie sur $[a,b]$ et à valeurs positives.*

   (a) *Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ et telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ \varphi_n(x) \leq f(x)$$

   (b) *On désigne par $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[a,b]$ par $\psi_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:*

$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

   Monter que $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

   (c) *Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

4. *Montrer que les fonctions réglées à valeurs positives sur $[a, b]$ sont exactement les fonctions de la forme :*

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$$

où les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs ou nuls, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'intervalles contenus dans $[a, b]$ et la série considérée converge uniformément sur $[a, b]$.

Solution.

1. Si φ est une fonction en escaliers sur $[a, b]$, il existe alors un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision :

$$\alpha_0 = a < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p = b$$

telle que φ soit constante sur chacun des intervalles $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq p-1)$, ce qui peut s'écrire :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

où $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ est une partition de $[a, b]$ en n intervalles (les I_k sont les $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$, pour j compris entre 0 et $p-1$ et les $\{\alpha_j\} = [\alpha_j, \alpha_j]$, pour j compris entre 0 et p, les a_k étant les valeurs constantes prises par φ sur chacun de ces intervalles).
Si φ est à valeurs positives, les a_k sont tous positifs ou nuls.
Réciproquement une telle fonction est en escaliers puisque l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a, b]$ est un espace vectoriel et elle est à valeurs positives si les a_k sont tous positifs ou nuls (en dehors de la réunion des I_k, la fonction φ est nulle).

2. Si $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$ est une fonction en escaliers sur $[a, b]$, alors la fonction $|\varphi| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \mathbf{1}_{I_k}$ est aussi en escaliers.
Il en résulte que, si ψ est une autre fonction en escaliers sur $[a, b]$, la fonction :

$$\max(\varphi, \psi) = \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{|\psi - \varphi|}{2}$$

en escaliers, puis par récurrence on en déduit que si $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$, alors la fonction $\max\limits_{1\leq k\leq n} \varphi_k$ est aussi en escaliers.

3.
   (a) Comme f réglée sur $[a, b]$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une fonction en escaliers f_n telle que :

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n+1}$$

   La fonction $\varphi_n = f_n - \frac{1}{n+1}$ est aussi en escaliers et pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$-\frac{1}{n+1} < f(x) - f_n(x) < \frac{1}{n+1}$$

   donc :

$$0 < f(x) - \varphi_n(x) < \frac{2}{n+1}$$

   donc $\varphi_n < f$ et :

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)| = \sup_{x\in[a,b]} (f(x) - \varphi_n(x)) \leq \frac{2}{n+1}$$

   ce qui signifie que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f par valeurs inférieures.

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction :

$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

est en escaliers et pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$\psi_0 = 0 \leq \psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x) < f(x)$$

(puisque $f \geq 0$ et $f \geq \varphi_k$ pour tout entier k) et :

$$0 < f(x) - \psi_n(x) \leq f(x) - \varphi_n(x) < \frac{2}{n+1}$$

donc $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément en croissant vers f sur $[a, b]$.

(c) On pose $f_0 = 0$ et $f_n = \psi_n - \psi_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives.
Avec :

$$\sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} (\psi_k - \psi_{k-1}) = \psi_n - \psi_0 = \psi_n$$

on déduit que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

4. Si $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$, où la série est uniformément convergentes, les a_n sont positifs et les I_n des intervalles contenus dans $[a, b]$, la fonction :

$$f = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

est alors limite uniforme d'une suite de fonctions réglées positives et en conséquence, elle est réglée positive.
Soit f une fonction réglée positive sur $[a, b]$.
Il existe alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
En écrivant chaque fonction en escaliers h_n sous la forme :

$$f_n = \sum_{k=1}^{p_n} a_{n,k} \mathbf{1}_{I_{n,k}}$$

où les $a_{n,k}$ sont des réels positifs ou nuls et les $I_{n,k}$ sont des intervalles contenus dans $[a, b]$, en notant $p_0 = 0$, on utilise la partition :

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{n\geq 1} \{p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1, \cdots, p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n\}$$

et le fait qu'il s'agit d'une séries de fonctions positives pour écrire que :

$$f = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \mathbf{1}_{I_j}$$

où pour $j = p_1 + \cdots + p_{n-1} + k$ avec $1 \leq k \leq p_n$, on note :

$$a_j \mathbf{1}_{I_j} = a_{n,k} \mathbf{1}_{I_{n,k}}$$

ce qui définit bien une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls et une suite $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'intervalles contenus dans $[a, b]$.
A priori la convergence de cette série est simple.

Pour tout entier $m \geq 1$ il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que $m \in \{p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1, \cdots, p_1 + \cdots + p_{n-1} + p_n\}$ et on a :

$$R_m = \sum_{j=m}^{+\infty} a_j \mathbf{1}_{I_j} \leq \sum_{j=p_1+\cdots+p_{n-1}+1}^{+\infty} a_j \mathbf{1}_{I_j} = \sum_{p=n}^{+\infty} f_p = R'_n$$

ce qui assure la convergence uniforme (pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $R'_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, donc pour tout $m \geq m_\varepsilon = p_1 + \cdots + p_{n_\varepsilon - 1} + 1$, on aura $R_m < \varepsilon$).

Exercice 4 *Soit X un ensemble non vide. Quelle est la σ-algèbre engendrée par les singletons de X ? (distinguer les cas X dénombrable et X non dénombrable).*

Solution. Supposons X dénombrable.
Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ la σ-algèbre engendrée par les singletons de X.
Tout $A \in \mathcal{P}(X)$ s'écrivant comme réunion dénombrable de singletons, il est dans $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.
Supposons X non dénombrable.
Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ la σ-algèbre engendrée par les singletons de X.
On note :

$$\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ ou } X \setminus A \text{ est dénombrable}\}$$

On vérifie que $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre sur X qui contient les singletons de X, donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.
Comme $\emptyset$ est dénombrable, il est dans $\mathcal{B}$.
Soit $A \in \mathcal{B}$. Si A est dénombrable, alors $X \setminus A$ est de complémentaire dénombrable, donc $X \setminus A \in \mathcal{B}$, sinon $X \setminus A$ est dénombrable et $X \setminus A \in \mathcal{B}$.
La famille $\mathcal{B}$ est donc stable par passage au complémentaire.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. On a :

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ A_n \text{ dénombrable}}} A_n \cup \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ X\setminus A_n \text{ dénombrable}}} A_n = B \cup C$$

avec B dénombrable et C de complémentaire dénombrable ($X \setminus C = \bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ X\setminus A_n \text{ dénombrable}}} (X \setminus A_n)$).
Si $C = \emptyset$, on a alors $A = B \in \mathcal{B}$, sinon $X \setminus A = (X \setminus B) \cap (X \setminus C) \subset X \setminus C$ est dénombrable, donc $A \in \mathcal{B}$.
Un singleton qui est dénombrable est dans $\mathcal{B}$.
Soit $A \in \mathcal{B}$. Si A est dénombrable, il est alors réunion dénombrable de singletons, donc dans $\mathcal{A}$, sinon c'est $X \setminus A$ qui est dans $\mathcal{A}$ et $A = X \setminus (X \setminus A)$ est aussi dans $\mathcal{A}$.
On a donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Exercice 5 *Soient f, g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu borélienne). Montrer que f est égale à g presque partout si, et seulement si, $f = g$.*

Solution. Si $f = g$, on a alors $f = g$ presque partout.
Réciproquement si $f = g$ presque partout, il existe alors un borélien A de mesure nulle tel $f = g$ sur $\mathbb{R} \setminus A$.
Comme $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$ est un ouvert qui est contenu dans A, il est vide (un ouvert non vide contient un intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ donc est de mesure non nulle), ce qui signifie que $f = g$.

Exercice 6 *On se place sur $(X, \mathcal{P}(X))$ muni d'une mesure de Dirac $\mu = \delta_x$, où $x \in X$ est fixé. Calculer $\int_X f d\mu$ pour toute fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$.*

Solution. Toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable car pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(X)$. Pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}^+$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X telles que $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et on a par définition de l'intégrale :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \delta_x (A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n} (x) = f(x)$$