

Opérations élémentaires et déterminants

On note toujours \mathbb{K} le corps de réels ou des complexes.

On se donne un entier $n \geq 1$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} .

Pour i, j entiers compris entre 1 et n , on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) (ligne i et colonne j) qui vaut 1.

On rappelle que la famille $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est donc de dimension n^2 .

Pour toute matrice $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note pour tout entier i compris entre 1 et n :

$$L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

sa ligne numéro i (c'est une matrice à une ligne et n colonnes) et pour tout entier j compris entre 1 et n :

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

sa colonne numéro j (c'est une matrice à n lignes et une colonne).

On écrira :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}.$$

Définition 10.1 On dit qu'une matrice $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire inférieure [resp. supérieure] si $a_{ij} = 0$ pour $1 \leq i < j \leq n$ [resp. pour $1 \leq j < i \leq n$].

Une matrice triangulaire inférieure est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et une matrice triangulaire supérieure de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 10.2 Une matrice diagonale est une matrice triangulaire inférieure et supérieure.

Une matrice diagonale est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

10.1 Opérations élémentaires. Matrices de dilatation et de transvection

On suppose que $n \geq 2$.

On appelle matrice déduite de A par opération élémentaire sur les lignes de A toute matrice de la forme :

$$A_i(\lambda) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ \lambda L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix},$$

avec $1 \leq i \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, c'est-à-dire que la matrice $A_i(\lambda)$ est déduite de la matrice A en multipliant sa ligne numéro i par λ ou de la forme :

$$A_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i + \lambda L_j \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

$1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire que la matrice $A_{ij}(\lambda)$ est déduite de la matrice A en ajoutant à la ligne numéro i la ligne numéro j multipliée par λ .

On appelle matrice déduite de A par opération élémentaire sur les colonnes de A toute matrice de la forme :

$$A'_j(\lambda) = (C_1 \quad \cdots \quad C_{j-1} \quad \lambda C_j \quad C_{j+1} \quad \cdots \quad C_n),$$

avec $1 \leq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, c'est-à-dire que la matrice $A'_i(\lambda)$ est déduite de la matrice A en multipliant sa colonne numéro j par λ ou de la forme :

$$A'_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_{j-1} & C_j + \lambda C_i & C_{j+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix}$$

$1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire que la matrice $A'_{ij}(\lambda)$ est déduite de la matrice A en ajoutant à la colonne numéro j la colonne numéro i multipliée par λ .

Définition 10.3 On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme :

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij},$$

avec $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ est donc une matrice triangulaire dont tous les termes diagonaux valent 1 et de termes hors de la diagonale tous nuls sauf celui d'indice (i, j) (i. e. en ligne i et colonne j) qui vaut λ .

Définition 10.4 On appelle matrice de dilatation toute matrice de la forme :

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{ii},$$

avec $1 \leq i \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ est donc diagonale de termes diagonaux tous égaux à 1 sauf le numéro i qui vaut λ .

Théorème 10.1 Avec les notations qui précèdent on a :

$$\begin{aligned} A_i(\lambda) &= D_i(\lambda) A, \quad A_{ij}(\lambda) = T_{ij}(\lambda) A, \\ A'_j(\lambda) &= A D_j(\lambda), \quad A'_{ij}(\lambda) = A T_{ij}(\lambda). \end{aligned}$$

C'est-à-dire que :

1. la multiplication à gauche par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la ligne i par λ ;
2. la multiplication à droite par une matrice de dilatation $D_j(\lambda)$ a pour effet de multiplier la colonne j par λ ;
3. la multiplication à gauche par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$;
4. la multiplication à droite par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la colonne C_j par $C_j + \lambda C_i$.

Démonstration. Le coefficient d'indice (p, q) du produit de matrices $D_i(\lambda) A$ est obtenu en faisant le produit de la ligne p de $D_i(\lambda)$ par la colonne q de A , ce qui donne en notant $\alpha_{p,q}$ ce coefficient :

$$\alpha_{p,q} = \begin{cases} a_{p,q} & \text{si } 1 \leq p \neq i \leq n, \quad 1 \leq q \leq n, \\ \lambda a_{iq} & \text{si } p = i, \quad 1 \leq q \leq n. \end{cases}$$

On a donc bien $A_i(\lambda) = D_i(\lambda) A$.

Les autres égalités se montrent de façon analogue. ■

Ce résultat justifie la définition suivante.

Définition 10.5 On appelle *matrice élémentaire* une *matrice de dilatation* ou de *transvection*.

Lemme 10.1 Une *matrice élémentaire* est *inversible* avec :

$$T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda),$$

pour une *matrice de transvection* et :

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

pour une *matrice de dilatation*.

Démonstration. Pour λ, μ dans \mathbb{K} et $i \neq j$ compris entre 1 et n , la matrice $T_{ij}(\lambda)T_{ij}(\mu)$ se déduit de $T_{ij}(\mu)$ en ajoutant à sa ligne i sa ligne j multipliée par λ , ce qui donne la matrice $T_{ij}(\lambda + \mu)$.

Prenant $\mu = -\lambda$, on a $T_{ij}(\lambda)T_{ij}(-\lambda) = T_0 = I_n$, ce qui signifie que $T_{ij}(\lambda)$ est inversible d'inverse $T_{ij}(-\lambda)$.

Le deuxième résultat est évident. ■

Avec l'exercice qui suit, on vérifie que toute matrice inversible d'ordre 2 est produit de matrices élémentaires. Ce résultat est en fait vrai pour les matrices inversibles d'ordre $n \geq 2$.

Exercice 10.1 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une *matrice inversible*.

1. On suppose que $c \neq 0$.

(a) Déterminer un scalaire λ_1 tel que :

$$A_1 = T_{12}(\lambda_1)A = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer un scalaire λ_2 tel que :

$$A_2 = T_{21}(\lambda_2)A_1 = \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

(c) Déterminer un scalaire λ_3 tel que :

$$A_3 = A_2T_{12}(\lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$$

(d) En déduire qu'il existe des matrices de transvection P_1, P_2, Q_1 et une matrice de dilatation D telles que :

$$A = P_1P_2DQ_1$$

2. Donner un résultat analogue dans le cas où $c = 0$.

Solution 10.1

1.

(a) Pour tout scalaire λ_1 , on a :

$$T_{12}(\lambda_1) A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c\lambda_1 & b + d\lambda_1 \\ c & d \end{pmatrix}$$

et prenant λ_1 tel que $a + c\lambda_1 = 1$, soit $\lambda_1 = \frac{1-a}{c}$, on a :

$$T_{12}(\lambda_1) A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d - \det(A)}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$$

(b) Pour tout scalaire λ_2 , on a :

$$T_{21}(\lambda_2) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ c + \lambda_2 & d + b_1\lambda_2 \end{pmatrix}$$

et prenant $\lambda_2 = -c$, on a :

$$T_{21}(\lambda_2) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & d - cb_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d - \det(A)}{c} \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix}$$

(c) Pour tout scalaire λ_3 , on a :

$$A_2 T_{12}(\lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_2 + \lambda_3 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

et prenant $\lambda_3 = -b_2$, on a :

$$A_2 T_{12}(\lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix}$$

(d) On a donc en définitive :

$$T_{21}(\lambda_2) T_{12}(\lambda_1) A T_{12}(\lambda_3) = D(\det(A))$$

et utilisant le fait que les matrices de transvections sont inversibles, on déduit que :

$$A = T_{12}(-\lambda_1) T_{21}(-\lambda_2) D(\det(A)) T_{12}(-\lambda_3)$$

$$\text{où } \lambda_1 = \frac{1-a}{c}, \lambda_2 = -c \text{ et } \lambda_3 = \frac{\det(A) - d}{c}.$$

2. Si $c = 0$, on a nécessairement $a \neq 0$ puisque A est inversible et :

$$T_{21}(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b + d \end{pmatrix}$$

ce qui nous ramène au cas précédent et donne :

$$T_{21}(1) A = P_1 P_2 D Q_1$$

soit :

$$A = T_{21}(-1) P_1 P_2 D Q_1.$$

De manière plus générale, on a le résultat suivant.

Théorème 10.2 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $n \geq 2$) est inversible si, et seulement si, elle est produit de matrices élémentaires. Précisément si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, il existe alors des matrices de transvection P_1, \dots, P_r et Q_1, \dots, Q_s et une matrice de dilatation $D_n(\lambda)$ telles que :

$$A = P_1 \cdots P_r D_n(\lambda) Q_1 \cdots Q_s.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geq 2$.

Le cas $n = 2$ a été traité avec l'exercice précédent.

On le suppose vrai pour toutes les matrices inversibles d'ordre $n - 1 \geq 2$ et on se donne une matrice inversible A d'ordre n .

On se ramène tout d'abord par opération élémentaire au cas où $a_{21} \neq 0$. Si $a_{21} = 0$, comme A est inversible, sa colonne 1 n'est pas nulle (cette colonne est Ae_1 où e_1 est le premier vecteur de base canonique et $x = 0$ est l'unique solution de $Ax = 0$), il existe donc un indice $i \in \{1, 3, \dots, n\}$ tel que $a_{i1} \neq 0$ et la matrice $T_{2i}(1)A$ (déduite de A en ajoutant la ligne i à la ligne 2) est telle que son coefficient d'indice $(2, 1)$ est non nul.

Une fois ramené à $a_{21} \neq 0$, on se ramène à $a_{11} = 1$ en remplaçant la première ligne L_1 par $L_1 + \lambda L_2$ (multiplication à gauche par $T_{12}(\lambda)$) où le scalaire λ est choisi tel que $a_{11} + \lambda a_{21} = 1$.

Ensuite, pour tout $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, en remplaçant la ligne L_i par $L_i - a_{i1}L_1$ (multiplication à gauche par $T_{i1}(-a_{i1})$), on annule le coefficient d'indice $(i, 1)$.

On peut donc trouver des matrices de transvection P_1, \dots, P_k telles que :

$$P_k \cdots P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

De manière analogue, en multipliant à droite par des matrices de transvection, Q_1, \dots, Q_m , on obtient :

$$P_k \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & B & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

On peut alors conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence à la matrice B qui est d'ordre $n - 1$ et inversible. En effet, si B n'est pas inversible, il existe $x' \neq 0$ dans \mathbb{K}^{n-1} tel que $Bx' = 0$, donc $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ est non nul solution de $P_k \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_m x = 0$ qui équivaut à $Ay = 0$ avec $y = Q_1 \cdots Q_m x \neq 0$ puisque les matrices P_i et Q_j sont inversibles, en contradiction avec A inversible. ■

Nous verrons plus loin (paragraphe 10) que, comme dans le cas $n = 2$, le scalaire λ qui intervient dans le théorème précédent est uniquement déterminé par la matrice A , c'est son déterminant.

Pour $n = 1$, le résultat est encore vrai avec $A = (a) = D(a)$.

10.2 Déterminants des matrices carrées

Nous avons déjà défini le déterminant d'une matrice d'ordre deux, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(définition 8.14).

Une matrice d'ordre 1 étant tout simplement un réel ou un complexe, son déterminant est lui même.

Le déterminant d'une matrice carrée $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$ d'ordre $n \geq 3$ peut se définir par récurrence comme suit :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1})$$

où $A_{i,1}$ est, pour i compris entre 1 et n , la matrice d'ordre $n-1$ déduite de A en supprimant la première colonne et la ligne numéro i .

Dans cette expression, on dit qu'on développe le déterminant suivant la première colonne.

On note :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Les lignes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant notées L_1, L_2, \dots, L_n , on écrira aussi :

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 10.1 Pour $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, on a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 10.2 Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels ou des complexes. Calculer le déterminant de la matrice :

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est dite de Vandermonde.

Solution 10.2 On a :

$$\begin{aligned}
 \det(V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) &= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} - \alpha_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} + \alpha_1^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \\
 &= \alpha_2 \alpha_3^2 - \alpha_2^2 \alpha_3 - \alpha_1 (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) + \alpha_1^2 (\alpha_3 - \alpha_2) \\
 &= \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_3 - \alpha_2) - \alpha_1 (\alpha_3 - \alpha_2) (\alpha_3 + \alpha_2) + \alpha_1^2 (\alpha_3 - \alpha_2) \\
 &= (\alpha_3 - \alpha_2) (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 (\alpha_3 + \alpha_2) + \alpha_1^2) \\
 &= (\alpha_3 - \alpha_2) (\alpha_2 (\alpha_3 - \alpha_1) - \alpha_1 (\alpha_3 - \alpha_1)) \\
 &= (\alpha_3 - \alpha_2) (\alpha_3 - \alpha_1) (\alpha_2 - \alpha_1)
 \end{aligned}$$

Exercice 10.3 Calculer le déterminant de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution 10.3 On a $\det(A) = 38$.

Théorème 10.3 Si $A_i(\lambda)$ est la matrice déduite de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en multipliant sa ligne i par un scalaire λ , on a alors $\det(A_i(\lambda)) = \lambda \det(A)$, soit :

$$\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ \lambda L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$ c'est clair et pour $n = 2$, on a :

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda(ad - bc) = \lambda \det(A).$$

Supposons le résultat acquis pour les matrices d'ordre $n - 1 \geq 2$. Soient A d'ordre n et $A' = A_i(\lambda)$ déduite de A en multipliant sa ligne i par λ . On a alors :

$$\det(A') = (-1)^{i+1} \lambda a_{i,1} \det(A_{i,1}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(A'_{k1})$$

la matrice $A'_{k,1}$, pour $k \neq i$, étant déduite de $A_{k,1}$ en multipliant sa ligne i par λ . On a donc $\det(A'_{k,1}) = \lambda \det(A_{k,1})$ pour $k \neq i$ et $\det(A') = \lambda \det(A)$. ■

Corollaire 10.1 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une ligne nulle, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration. Supposons que la ligne i de A soit nulle. En désignant par $A' = A_i(\lambda)$ la matrice déduite de A en multipliant sa ligne i par $\lambda = 0$, on a $A' = A$ et $\det(A) = \det(A') = 0 \det(A) = 0$. ■

Corollaire 10.2 Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout scalaire λ , on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration. En utilisant n fois le théorème précédent, on a :

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda L_1 \\ \lambda L_2 \\ \vdots \\ \lambda L_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \lambda L_2 \\ \vdots \\ \lambda L_n \end{pmatrix} \\ &= \cdots = \lambda^n \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

Théorème 10.4 Le déterminant d'une matrice triangulaire est égale au produit de ses termes diagonaux, soit :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas des matrices triangulaires inférieures.

On procède par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$ c'est clair et pour $n = 2$, on a :

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = ad - 0 \cdot c = ad.$$

Supposons le résultat acquis pour les matrices triangulaires inférieures d'ordre $n - 1 \geq 2$ et soit A triangulaire inférieure d'ordre n . La matrice A_{11} est triangulaire inférieure de diagonale a_{22}, \dots, a_{nn} et pour i compris entre 2 et n , la matrice A_{i1} est telle que sa première ligne est nulle, elle est donc de déterminant nul et :

$$\det(A) = a_{1,1} \det(A_{1,1}) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Pour le cas des matrices triangulaires supérieures, le cas $n = 1$ est encore évident et le cas $n = 2$ se vérifie par le calcul. Supposant le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 2$, pour A triangulaire supérieure d'ordre n , La matrice A_{11} est triangulaire supérieure de diagonale a_{22}, \dots, a_{nn} et pour i compris entre 2 et n , les coefficients a_{i1} sont nuls de sorte que :

$$\det(A) = a_{1,1} \det(A_{1,1}) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

■

Exemple 10.2 Si $A = I_n$ est la matrice identité, on a alors $\det(I_n) = 1$.

Exemple 10.3 Si $A = D_i(\lambda)$ est une matrice de dilatation, on a alors $\det(D_i(\lambda)) = \lambda$.

Exemple 10.4 Si $A = T_{ij}(\lambda)$ est une matrice de transvection, on a alors $\det(T_{ij}(\lambda)) = 1$.

Théorème 10.5 Soient A, A', A'' des matrices de lignes respectives L_i, L'_i, L''_i (pour i compris entre 1 et n) telles que $L_i = L'_i = L''_i$ pour $i \neq k$ et $L''_k = L_k + L'_k$ où k est un indice compris entre 1 et n . On a :

$$\det(A'') = \det(A) + \det(A')$$

soit :

$$\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{k-1} \\ L_k + L'_k \\ L_{k+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{k-1} \\ L_k \\ L_{k+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{k-1} \\ L'_k \\ L_{k+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$ c'est clair et pour $n = 2$, il suffit de calculer.

Supposons le résultat acquis pour les matrices d'ordre $n - 1 \geq 2$. Soient A, A', A'' d'ordre n vérifiant les conditions du théorème. On a alors :

$$\det(A'') = (-1)^{k+1} (a_{k,1} + a'_{k,1}) \det(A''_{k,1}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A''_{i,1})$$

avec $A''_{k,1} = A_{k,1} = A'_{k,1}$ et pour $i \neq k$, les matrices $A_{i,1}, A'_{i,1}, A''_{i,1}$ vérifiant les hypothèses du théorème au rang $n - 1$ (avec des notations évidentes), donc :

$$\begin{aligned} \det(A'') &= (-1)^{k+1} (a_{k,1} \det(A_{k,1}) + a'_{k,1} \det(A'_{k,1})) \\ &+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det(A'_{i,1}) \\ &= \det(A) + \det(A'). \end{aligned}$$

■

Les théorèmes 10.3 et 10.5 se traduisent en disant que le déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne.

Théorème 10.6 Si A' est la matrice déduite de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en permutant deux lignes, on a alors $\det(A') = -\det(A)$, soit :

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

où les pointillés indiquent les lignes inchangées.

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geq 2$.

Pour $n = 2$, il suffit de calculer.

Supposons le résultat acquis pour les matrices d'ordre $n - 1 \geq 2$.

La permutation de deux lignes se faisant avec un nombre impair de permutations de deux lignes successives (par exemple la permutation $(2, 4)$ se fait par les trois permutations $(2, 3, 4) \rightarrow (3, 2, 4) \rightarrow (3, 4, 2) \rightarrow (4, 3, 2)$), il suffit de considérer le cas où $j = i + 1$ (montrer ce point rigoureusement). On se donne donc A d'ordre n et A' est déduite de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en permutant les lignes i et $i + 1$. Pour $k \neq i$ et $k \neq i + 1$, on a $a'_{k1} = a_{k,1}$ et $\det(A'_{k,1}) = -\det(A_{k,1})$ par hypothèse de récurrence, et avec $a'_{i,1} = a_{(i+1),1}$, $a'_{(i+1),1} = a_{i,1}$, $A'_{i,1} = A_{(i+1),1}$, $A'_{(i+1),1} = A_{i,1}$, on déduit que :

$$\begin{aligned} \det(A') &= (-1)^{i+1} a_{(i+1),1} \det(A_{(i+1),1}) + (-1)^i a_{i,1} \det(A_{i,1}) \\ &\quad - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq i+1}}^n (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(A_{k,1}) = -\det(A). \end{aligned}$$

■

Le résultat précédent se traduit en disant que le déterminant est une forme alternée sur les lignes.

Corollaire 10.3 Si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a deux lignes identiques, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration. Si $L_i = L_j$ avec $i \neq j$, alors matrice A' déduite de A en permutant ces deux lignes est égale à A et $\det(A) = -\det(A)$, donc $\det(A) = 0$. ■

Corollaire 10.4 On ne change pas la valeur d'un déterminant si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat quand on ajoute à la ligne L_i la ligne L_j multipliée par un scalaire λ où $i \neq j$. Dans ce cas, on a :

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ L_i + \lambda L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

où les pointillés indiquent les lignes inchangées. ■

En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice A , on peut se ramener à une matrice triangulaire supérieure de même déterminant que celui de A .

Exercice 10.4 Calculer le déterminant de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

de l'exercice 10.3 en effectuant des opérations élémentaires.

Solution 10.4 Les opérations $L_2 \rightarrow L_2 - \frac{2}{5}L_1$, $L_3 \rightarrow L_3 + L_1$, $L_4 \rightarrow L_4 - \frac{1}{5}L_1$ donnent :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & -3 & -1 & 10 \\ 0 & -\frac{14}{5} & \frac{7}{5} & \frac{19}{5} \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 7 & 1 & -12 \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{12}{5} \\ -3 & -1 & 10 \\ -\frac{14}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{19}{5} \end{vmatrix} \\ &= 5 \frac{1}{5} \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 7 & 1 & -12 \\ -3 & -1 & 10 \\ -14 & -7 & 19 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 7 & 1 & -12 \\ -3 & -1 & 10 \\ -14 & -7 & 19 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Puis les opérations $L_2 \rightarrow L_2 + \frac{3}{7}L_1$, $L_3 \rightarrow L_3 + \frac{14}{7}L_1 = L_3 + 2L_1$ donnent :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 7 & 1 & -12 \\ 0 & -\frac{4}{7} & \frac{34}{7} \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \cdot 7 \cdot \frac{2}{7} \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 17 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 19 = 38 \end{aligned}$$

Exercice 10.5 Développer le déterminant de la matrice suivante sous la forme d'un produit de facteurs linéaires en x :

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{pmatrix}.$$

Solution 10.5 Les opérations $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$, $L_2 \rightarrow L_2 - L_1$ (dans l'ordre indiqué) donnent :

$$\begin{aligned} \det(A(x)) &= \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+1 & x+1 & x+1 \\ x+2 & 2x+4 & 6x+12 \end{vmatrix} \\ &= (x+1)(x+2) \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

puis $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$ donne :

$$\begin{aligned} \det(A(x)) &= (x+1)(x+2) \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (x+1)(x+2) \left((x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right) \\ &= (x+1)(x+2)(4(x+2) - (7x+11)) \\ &= -(x+1)(x+2)(3x+3) = -3(x+1)^2(x+2) \end{aligned}$$

Exercice 10.6 Soient α, β deux scalaires et $A(\alpha, \beta) = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice d'ordre $n \geq 3$ définie par :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \begin{cases} a_{ii} = \beta, \\ a_{ij} = \alpha \text{ si } j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i\}. \end{cases}$$

Calculer $\Delta(\alpha, \beta) = \det(A(\alpha, \beta))$.

Solution 10.6 La matrice $A(\alpha, \beta)$ est de la forme :

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \cdots & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha = 0$, la matrice est diagonale et :

$$\Delta(0, \beta) = \beta^n.$$

On suppose que $\alpha \neq 0$.

En ajoutant les lignes 2 à n à la première ligne on a :

$$\Delta(\alpha, \beta) = (\beta + (n-1)\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha & \beta & \alpha & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \cdots & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

Puis en retranchant la première ligne multipliée par α aux lignes 2 à n on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha, \beta) &= (\beta + (n-1)\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \beta - \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta - \alpha & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta - \alpha \end{vmatrix} \\ &= (\beta + (n-1)\alpha) (\beta - \alpha)^{n-1}. \end{aligned}$$

Exercice 10.7 En admettant que 1700, 1020, 1122 et 1309 sont tous divisibles par 17, montrer sans le calculer que le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

est divisible par 17.

Solution 10.7 On ne change pas la valeur de ce déterminant si on remplace la colonne 4 par $C_4 + 10C_3 + 10^2C_2 + 10^3C_1$, ce qui donne :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 1700 \\ 1 & 0 & 2 & 1020 \\ 1 & 1 & 2 & 1122 \\ 1 & 3 & 0 & 1309 \end{vmatrix} = 17 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & 2 & 60 \\ 1 & 1 & 2 & 66 \\ 1 & 3 & 0 & 77 \end{vmatrix} = 17q$$

avec q entier puisque tous les coefficients du déterminant sont entiers.

Les théorèmes 10.3, 10.5 et le corollaire 10.1 se traduisent aussi par le résultat suivant.

Corollaire 10.5 Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, toute matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ et toute matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$, on a :

$$\begin{cases} \det(D_i(\lambda)A) = \det(D_i(\lambda)) \det(A) = \lambda \det(A) \\ \det(T_{ij}(\lambda)A) = \det(T_{ij}(\lambda)) \det(A) = \det(A) \end{cases}$$

En utilisant le théorème 10.2, on obtient le résultat suivant.

Théorème 10.7 Pour toute matrice inversible A et toute matrice B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Démonstration. La matrice A étant inversible s'écrit $A = P_1 \cdots P_r D_n(\lambda) Q_1 \cdots Q_s$, où les matrices P_i et Q_j sont des matrices de transvection et la matrice $D_n(\lambda)$ une matrice de dilatation (théorème 10.2). Une utilisation répétée du corollaire précédent nous donne :

$$\det(A) = \det(D_n(\lambda)) = \lambda$$

et pour toute matrice B :

$$\det(AB) = \det(D_n(\lambda)) \det(B) = \det(A) \det(B).$$

■

Le résultat précédent est en fait valable pour toutes matrices A et B . Le cas où la matrice A n'est pas inversible se traite en utilisant le résultat suivant.

Théorème 10.8 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul et dans ce cas, on a $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Démonstration. Si A est inversible d'inverse A^{-1} , on $AA^{-1} = I_n$ et le théorème précédent nous dit que $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$, donc $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

La réciproque se démontre par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, le résultat est évident car $\det(a) = a$ pour tout scalaire a .

Supposons le résultat acquis pour les matrices d'ordre $n - 1 \geq 1$ et soit A d'ordre n telle que $\det(A) \neq 0$. La première colonne de A est nécessairement non nulle (définition du déterminant) et on peut reprendre la démonstration du théorème 10.2 pour trouver des matrices de transvection P_1, \dots, P_k telles que :

$$P_k \cdots P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où α est un vecteur ligne à $n - 1$ composantes et B une matrice carrée d'ordre $n - 1$.

Comme les matrices P_k sont inversibles, on a :

$$\det(A) = \det(P_k \cdots P_1 A) = \det(B)$$

et $\det(B) \neq 0$. La matrice B est donc inversible, ce qui implique que A est aussi inversible. En effet si $Ax = 0$, en notant $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x' \end{pmatrix}$ avec $x_1 \in \mathbb{K}$ et $x' \in \mathbb{K}^{n-1}$, on a :

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x' = 0 \\ Bx' = 0 \end{cases}$$

ce qui entraîne $x' = 0$ et $x_1 = 0$, soit $x = 0$. La matrice A est donc inversible.

■

Théorème 10.9 Pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \det(B).$$

Démonstration. Il reste à traiter le cas où la matrice A n'est pas inversible. Dans ce cas la matrice AB ne peut être inversible (sinon, en notant C l'inverse de AB , on a $(AB)C = I_n$, soit $A(BC) = I_n$ et A est inversible) et on a :

$$0 = \det(AB) = \det(A) \det(B) = 0 \cdot \det(B).$$

L'égalité $\det(BA) = \det(B) \det(A)$ donne $\det(AB) = \det(BA)$. ■

On peut remarquer que $\det(AB) = \det(BA)$ alors qu'en général $AB \neq BA$.

La multiplication à droite par une matrice élémentaire se traduisant par une action particulière sur les colonnes, on déduit de ce théorème et du théorème 10.1 les propriétés suivantes du déterminant.

Corollaire 10.6 Si $A'_j(\lambda)$ est la matrice déduite de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en multipliant sa colonne j par un scalaire λ , on a alors $\det(A'_j(\lambda)) = \lambda \det(A)$.
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a une colonne nulle, alors $\det(A) = 0$.

Pour l'instant, le déterminant d'une matrice se calcule en utilisant la première colonne de cette dernière. En réalité, on peut aussi utiliser la première ligne et nous en déduirons que cette première ligne ou colonne peut être remplacée par n'importe quelle autre. Précisément, on a les résultats suivants.

Théorème 10.10 Pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det({}^tA) = \det(A)$.

Démonstration. Comme d'habitude c'est trivial pour $n = 1$. On suppose donc que $n \geq 2$.

Si A n'est pas inversible, il en est de même de sa transposée (en effet si tA est inversible, il en est de même de $A = {}^t({}^tA)$ – théorème 8.19 –) et on a alors $\det({}^tA) = \det(A) = 0$.

Si A est inversible, elle s'écrit :

$$A = P_1 \cdots P_r D_n(\lambda) Q_1 \cdots Q_s$$

où les P_i, Q_j sont des matrices de transvection et $\lambda = \det(A)$, ce qui donne :

$${}^tA = {}^tQ_s \cdots {}^tQ_1 {}^tD_n(\lambda) {}^tP_r \cdots {}^tP_1$$

les transposées de matrices élémentaires étant des matrices élémentaires de même type avec ${}^tD_n(\lambda) = D_n(\lambda)$, ce qui donne :

$$\det({}^tA) = \det(D_n(\lambda)) = \lambda = \det(A).$$

■

De ce résultat, on déduit le développement du déterminant suivant la première ligne (pour $n \geq 2$) :

$$\det(A) = \det({}^tA) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(A_{1,j})$$

où $A_{1,j}$ est la matrice carrée d'ordre $n - 1$ déduite de A en supprimant la ligne 1 et la colonne j .

On en déduit alors les propriétés suivantes relatives aux colonnes, ces propriétés étant analogues à celles obtenues pour les lignes.

Corollaire 10.7 Si A' est la matrice déduite de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en permutant deux colonnes, on a alors $\det(A') = -\det(A)$.

Soient A, A', A'' des matrices de lignes respectives C_j, C'_j, C''_j (pour j compris entre 1 et n) telles que $C_j = C'_j = C''_j$ pour $j \neq k$ et $C''_k = C_k + C'_k$ où k est un indice compris entre 1 et n . On a :

$$\det(A'') = \det(A) + \det(A').$$

On ne change pas la valeur d'un déterminant si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

Ce corollaire se traduit en disant que le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne et que c'est une forme alternée sur les colonnes.

En général, pour calculer un déterminant, on essayera d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes dans le but de faire apparaître un maximum de coefficients nuls, ce qui facilitera le calcul du déterminant de la matrice obtenue.

De tout ce qui précède, on déduit les différentes formes de développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne (pour $n \geq 2$).

Théorème 10.11 Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) \quad (1 \leq j \leq n)$$

(développement suivant la colonne j) et

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) \quad (1 \leq i \leq n)$$

(développement suivant la ligne i) où $A_{i,j}$ est la matrice carrée d'ordre $n-1$ déduite de A en supprimant la ligne i et la colonne j .

Démonstration. Pour $j = 1$, c'est la définition première du déterminant et pour $i = 1$ c'est une conséquence immédiate de $\det({}^t A) = \det(A)$.

Fixons la colonne $j \geq 2$ et notons $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de \mathbb{K}^n .

La colonne C_j s'écrit $C_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ et en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la j -ième colonne, on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \det(B_{i,j})$$

où $B_{i,j}$ est la matrice déduite de A en remplaçant C_j par e_i . En permutant la colonne j avec la colonne $j-1$, puis $j-1$ avec $j-2$, \dots , 2 avec 1 et ensuite la ligne i avec la ligne $i-1$, $i-1$ avec $i-2$, \dots , 2 avec 1 (on fait rien pour $i = 1$) on aboutit à :

$$\begin{aligned} \det(B_{i,j}) &= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \end{aligned}$$

et on a le résultat annoncé.

On procède de manière analogue pour la deuxième formule. ■

Avec les notations du théorème, on dit que $\det(A_{i,j})$ est le mineur d'indice (i, j) de la matrice A et que $(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$ est le cofacteur d'indice (i, j) de A .

Exercice 10.8 Soient $n \geq 2$ un entier et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des scalaires.

1. Calculer le déterminant $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de la matrice :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est dite de Vandermonde.

2. À quelle condition une telle matrice est-elle inversible ?

Solution 10.8 Pour $n = 2$, on a $\Delta(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$ et pour $n = 3$, on a fait le calcul avec l'exercice 10.2.

1. Le calcul de $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ se fait par récurrence sur $n \geq 2$.

En retranchant, pour $i = n, n-1, \dots, 2$ à la ligne i la ligne $i-1$ multipliée par α_1 , on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \cdots & \alpha_n - \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_3 - \alpha_1 & \cdots & \alpha_n - \alpha_1 \\ \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \left(\prod_{k=2}^n (\alpha_k - \alpha_1) \right) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2^{n-2} & \cdots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \left(\prod_{k=2}^n (\alpha_k - \alpha_1) \right) \Delta(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

et par récurrence :

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= \prod_{k=2}^n (\alpha_k - \alpha_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i). \end{aligned}$$

2. Cette matrice est inversible si, et seulement si, les α_i sont deux à deux distincts.

Exercice 10.9 Calculer le déterminant de la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{pmatrix}.$$

Solution 10.9 On a :

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = n! \Delta(1, 2, \dots, n) \\ &= n! \prod_{1 \leq j < i \leq n} (i - j) = n! \prod_{i=2}^n (i-1)! = \prod_{i=2}^n i!. \end{aligned}$$

Exercice 10.10 Soit

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix},$$

une matrice tridiagonale d'ordre $n \geq 3$ à coefficients réels ou complexes.

Pour tout entier k compris entre 1 et n , on désigne par D_k le déterminant de la matrice d'ordre k formée des k premières lignes et k premières colonnes de A_n (les D_k sont les déterminants extraits principaux de A_n).

1. Exprimer, pour tout k compris entre 3 et n , D_k en fonction de D_{k-1} et D_{k-2} .
2. Calculer le déterminant de :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2^2 & 5 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & (n-1)^2 & 2n-1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & n^2 & 2n+1 \end{pmatrix}$$

Solution 10.10

1. En développant D_k suivant la dernière ligne on a :

$$\begin{aligned} D_k &= a_k \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{k-2} & a_{k-2} & c_{k-2} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k-1} & a_{k-1} \end{vmatrix} - b_k \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & c_{k-3} & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{k-2} & a_{k-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{k-1} & c_{k-1} \end{vmatrix} \\ &= a_k D_{k-1} - b_k c_{k-1} D_{k-2}. \end{aligned}$$

Ce qui donne, avec les valeurs initiales $D_1 = a_1$ et $D_2 = a_1 a_2 - b_2 c_1$, un algorithme de calcul de D_n .

2. On a :

$$D_n = (2n + 1) D_{n-1} - n^2 D_{n-2}$$

avec les valeurs initiales $D_1 = 2$, $D_2 = 6$. En calculant D_3 et D_4 on conjecture que $D_n = (n + 1)!$. Ce qui se montre par récurrence sur $n \geq 2$. C'est vrai pour $n = 2$ et le supposant acquis jusqu'au rang $n - 1 \geq 2$, on a :

$$D_n = (2n + 1) n! - n^2 (n - 1)! = (n + 1)!$$

10.3 Déterminant d'une famille de vecteurs

Étant donnée une famille $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ de n vecteurs de \mathbb{K}^n , on définit le déterminant de cette famille comme le déterminant de la matrice A dont les colonnes sont formées de ces vecteurs. En notant, pour j compris entre 1 et n , $x_j = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$ (vecteur colonne), on a donc :

$$\det(x_1, \dots, x_n) = \det((x_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Du théorème 10.8 on déduit le résultat suivant bien utile pour vérifier qu'un système de n vecteurs dans \mathbb{K}^n est libre et donc forme une base.

Théorème 10.12 Une famille $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ de n vecteurs de \mathbb{K}^n est libre si, et seulement si, son déterminant est non nul.

Démonstration. En utilisant les notations qui précèdent, on note $P = ((x_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Dire que le système $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ est libre équivaut à dire que l'unique solution $\lambda \in \mathbb{K}^n$ du système linéaire $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$ est $\lambda = 0$, ce système s'écrivant aussi $P\lambda = 0$, cela revient à dire que la matrice P est inversible, ce qui est encore équivalent à $\det(P) \neq 0$. ■

Si E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension $n \geq 1$ et \mathcal{B} une base E , en notant pour tout vecteur $x \in E$, X le vecteur colonne de \mathbb{K}^n formé des composantes de x dans la base \mathcal{B} , on définit le déterminant d'une famille $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ de n vecteurs de E dans la base \mathcal{B} par :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(X_1, \dots, X_n).$$

Ce déterminant dépend du choix d'une base de E .

Théorème 10.13 Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de E , alors pour tout n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) de vecteurs de E , on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Démonstration. En désignant pour tout vecteur x de E par X [resp. X'] le vecteur colonne de \mathbb{K}^n formé des composantes de x dans la base \mathcal{B} [resp. \mathcal{B}'] et par P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , on a $X = PX'$ et :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \det(X_1, X_2, \dots, X_n) = \det(PX'_1, PX'_2, \dots, PX'_n) \\ &= \det(P \cdot (X'_1, X'_2, \dots, X'_n)) = \det(P) \det((X'_1, X'_2, \dots, X'_n)) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

■

10.4 Déterminant d'un endomorphisme

On désigne par E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension $n \geq 1$.

Si \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont deux bases de E , u un endomorphisme de E , A_1 la matrice de u dans la base \mathcal{B}_1 et A_2 sa matrice dans la base \mathcal{B}_2 , on sait alors que $A_2 = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de \mathcal{B}_1 à \mathcal{B}_2 . Il en résulte alors que :

$$\begin{aligned} \det(A_2) &= \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A_1) \det(P) \\ &= \frac{1}{\det(P)} \det(A_1) \det(P) = \det(A_1). \end{aligned}$$

C'est-à-dire que ces déterminants ne dépendent pas du choix d'une base.

On peut alors donner la définition suivante.

Définition 10.6 *Le déterminant d'un endomorphisme u de E est le déterminant de la matrice de u dans une base de E .*

Du théorème 9.19, on déduit le résultat suivant.

Théorème 10.14 *Si u, v sont deux endomorphismes de E , alors :*

$$\det(u \circ v) = \det(v \circ u) = \det(u) \det(v).$$

Et du théorème 9.20, on déduit le résultat suivant.

Théorème 10.15 *Un endomorphisme u de E est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul.*