13

Géométrie dans les espaces préhilbertiens

Pour ce chapitre $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ est la norme associée.

13.1 Mesures de l'angle non orienté de deux vecteurs non nuls

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit que pour tous vecteurs x et y non nuls dans E, on a :

$$-1 \leq \frac{\langle x \mid y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1,$$

ce qui implique qu'il existe un unique réel θ dans $[0, \pi]$ tel que :

$$\langle x \mid y \rangle = \cos(\theta) \|x\| \|y\| .$$

Le réel θ est la mesure dans $[0, \pi]$ de l'angle géométrique (ou angle non orienté) que font les vecteurs x et y dans $E - \{0\}$. On note $\widehat{(x, y)}$ cette mesure. On a donc :

$$\widehat{(x, y)} = \arccos\left(\frac{\langle x \mid y \rangle}{\|x\| \|y\|}\right) \in [0, \pi] .$$

Pour $\theta \in \{0, \pi\}$, on a $|\langle x \mid y \rangle| = \|x\| \|y\|$, ce qui équivaut à dire que les vecteurs x et y sont liés (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\langle x \mid y \rangle = 0$ et les vecteurs x, y sont orthogonaux.

De manière générale, on a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\cos(\theta) \|x\| \|y\| + \|y\|^2$$

où θ est la mesure dans $[0, \pi]$ de l'angle que font les vecteurs non nuls x et y.

On peut remarquer que si λ, μ sont deux réels strictement positifs, alors :

$$\widehat{(\lambda x, \mu y)} = \arccos\left(\frac{\langle x \mid y \rangle}{\|x\| \|y\|}\right) = \widehat{(x, y)}$$

ce qui permet de définir la mesure dans $[0, \pi]$ de l'angle géométrique de deux demi-droites $\Delta_1 = \mathbb{R}^+ x_1$ et $\Delta_2 = \mathbb{R}^+ x_2$ par :

$$\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \widehat{(x_1, x_2)}$$

où x_1 est un vecteur directeur de Δ_1 et x_2 un vecteur directeur de Δ_2.

On dit parfois que $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}$ est l'angle géométrique ou l'écart angulaire de Δ_1 et Δ_2.

On a :

– $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = 0$ si, et seulement si, $\Delta_1 = \Delta_2$;
– $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \pi$ si, et seulement si, $\Delta_1 = -\Delta_2$ (i. e. Δ_1 et Δ_2 sont opposées) ;
– $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)} = \frac{\pi}{2}$ si, et seulement si, Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.

13.2 Sphères dans un espace préhilbertien

Le fait de disposer d'une norme sur E permet de définir les notions de sphère et de boule ouverte ou fermée dans E.

Définition 13.1 *On dit qu'une partie S de E est une sphère s'il existe un point ω dans E et un réel R positif ou nul tels que :*

$$S = \{x \in E \mid \|x - \omega\| = R\}$$

On dit alors que ω est un centre et R un rayon de cette sphère.

On notera $S(\omega, R)$ une telle sphère.
Il semble intuitif que le centre et le rayon d'une sphère sont uniquement déterminés, c'est ce que nous allons vérifier.

Théorème 13.1 *Le centre et le rayon d'une sphère sont uniquement déterminés.*

Démonstration. Soit $S = S(\omega, R)$ une sphère.
Si $R = 0$, on a alors $S = \{\omega\}$ et il n'y a rien à prouver.
On suppose donc que $R > 0$.
Pour tous x, y dans $S = S(\omega, R)$, on a :

$$\|y - x\| \leq \|y - \omega\| + \|\omega - x\| = 2R$$

l'égalité étant réalisée pour $(x, y) = (\omega + Ru, \omega - Ru) \in S^2$ où $\|u\| = 1$ (pour tout vecteur non nul $v \in E$ le vecteur $u = \frac{1}{\|v\|} v$ est de norme 1). On a donc :

$$2R = \sup_{(x,y) \in S^2} \|y - x\|$$

ce qui prouve l'unicité du rayon R.
Si a, b dans $S(\omega, R)$ sont tels que $\|b - a\| = 2R$, on a l'égalité :

$$\|b - a\| = \|b - \omega\| + \|\omega - a\| = 2R$$

et il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $b - \omega = \lambda(\omega - a)$ (cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski). Avec $\|b - \omega\| = \|\omega - a\| = R > 0$, on déduit que $\lambda = 1$ et $\omega = \frac{1}{2}(a + b)$, ce qui prouve l'unicité du centre ω. ■

Définition 13.2 *Si $S(\omega, R)$ une sphère de centre ω et de rayon R, on appelle diamètre de $S(\omega, R)$ tout segment $[a, b]$ où a, b sont deux points de S tels que $\|b - a\| = 2R$.*

Définition 13.3 *Soient ω un point de E et R un réel positif ou nul.*
La boule fermée [resp. ouverte] de centre ω et de rayon R est l'ensemble :

$$B(\omega, R) = \{x \in E \mid \|x - \omega\| \leq R\}$$

$$\text{[resp. } \overset{\circ}{B}(\omega, r) = \{x \in E \mid \|x - \omega\| < R\}\text{]}$$

Remarque 13.1 *Pour $R = 0$, on a $S(\omega, R) = B(\omega, R) = \{\omega\}$ et $\overset{\circ}{B}(\omega, R) = \emptyset$.*

Dans le cas où $\omega = 0$ et $R = 1$, on dit que $S(0,1)$ [resp. $B(0,1)$] est la sphère [resp. boule] unité.

Si $R > 0$, le centre ω n'est pas dans $S(\omega, R)$ et on a vu dans la démonstration du théorème précédent que $S(\omega, R)$ contient au moins deux points.

Dans le cas où E est une droite dirigée par e_1 de norme 1, on a, pour $R > 0$:

$$(x \in S(\omega, R)) \Leftrightarrow (|x_1 - \omega_1| = R) \Leftrightarrow (x_1 = \omega_1 \pm R)$$

c'est-à-dire que $S(\omega, R)$ est réduit aux deux points $\{\omega_1 - R, \omega_1 + R\}$.

Si E est de dimension 2, une sphère est appelée cercle.

L'utilisation de l'identité polaire pour le produit scalaire nous fournit une autre définition géométrique d'une sphère.

Théorème 13.2 *Soient a, b deux points de E. L'ensemble :*

$$S = \{x \in E \mid \langle x - a \mid x - b \rangle = 0\}$$

est une sphère de centre $\omega = \dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $R = \left\| \dfrac{b-a}{2} \right\|$ (sphère de diamètre $[a,b]$).

Démonstration. En utilisant l'identité polaire, on a :

$$\begin{aligned}\langle x - a \mid x - b \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|(x-a)+(x-b)\|^2 - \|(x-a)-(x-b)\|^2\right) \\ &= \left\| x - \frac{a+b}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{b-a}{2} \right\|^2\end{aligned}$$

et :

$$(x \in S) \Leftrightarrow \left(\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\| = \left\| \frac{b-a}{2} \right\| \right)$$

ce qui signifie que S est la sphère de centre $\omega = \dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $\left\| \dfrac{b-a}{2} \right\|$. ■

Cette sphère passe par a et b. Pour $R > 0$ et E de dimension 2, on retrouve la caractérisation du cercle de diamètre $[a,b]$ dans le plan euclidien comme l'ensemble des points x tels que le triangle axb soit rectangle en x (figure 13.1).

13.3 Sphères dans un espace euclidien

Dans le cas où E est un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ (le cas $n = 1$ étant trivial), l'utilisation d'une base orthonormée permet de donner une définition analytique d'une sphère.

On suppose, a priori, que le rayon R d'une sphère $S(\omega, R)$ est non nul.

Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E euclidien, on a alors en notant $x_1, \cdots, x_n$ les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans cette base :

$$\begin{aligned}(x \in S(\omega, R)) &\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - \omega_k)^2 = R^2 \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k + \sum_{k=1}^{n} \omega_k^2 - R^2 = 0 \right)\end{aligned}$$

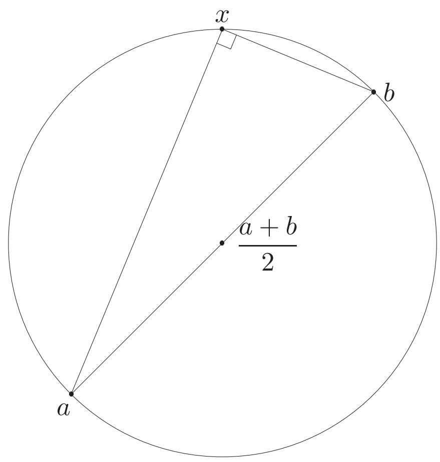

FIG. 13.1 – Sphère : $\langle x-a, x-b\rangle = 0$

Réciproquement si $\omega_1, \cdots, \omega_n$ et c sont des réels, alors en notant $\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k e_k$, l'ensemble des vecteurs $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ de E tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k + c = 0$$

est :

- l'ensemble vide si $c > \|\omega\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^2$;
- réduit à $\{\omega\}$ si $c = \|\omega\|^2$;
- la sphère de centre ω et de rayon $R = \sqrt{\|\omega\|^2 - c}$ si $c < \|\omega\|^2$.

Il suffit en effet d'écrire que :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k + c = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \omega_k)^2 + c - \sum_{k=1}^{n} \omega_k^2.$$

Dans le cas où E est un plan euclidien, on peut donner une représentation paramétrique d'un cercle.

Pour ce faire, on rappelle que si u, v sont deux réels tels que $u^2 + v^2 = 1$, il existe un unique réel θ dans $]-\pi, \pi]$ tel que $u = \cos(\theta)$ et $v = \sin(\theta)$ (voir la définition de l'argument d'un nombre complexe non nul).

Désignant par $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E, on en déduit que tout point x du cercle $S(\omega, R)$ s'écrit de manière unique $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ avec :

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1 + R\cos(\theta) \\ x_2 = \omega_2 + R\sin(\theta) \end{cases}$$

avec $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$.

En écrivant $(x_1, x_2) = (\rho \cos(t), \rho \sin(t))$ et $(\omega_1, \omega_2) = (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$ où $\rho = \|x\|$, $r = \|\omega\|$ et α, t réels, on a aussi :

$$\begin{aligned}(x \in S(\omega, R)) &\Leftrightarrow \left(\rho^2 - 2\rho r (\cos(t)\cos(\alpha) + \sin(t)\sin(\alpha)) + r^2 - R^2 = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\rho^2 - 2\rho r \cos(t - \alpha) + r^2 - R^2 = 0\right)\end{aligned}$$

Ce cercle passe par 0 si, et seulement si $r = \|\omega\| = R$ et dans ce cas, on a :

$$(x \in S(\omega, R)) \Leftrightarrow (\rho(\rho - 2r\cos(t - \alpha)) = 0)$$

On en déduit qu'une équation polaire d'un cercle passant par 0 est donnée par $\rho = 2r\cos(t - \alpha)$ où t décrit $\mathbb{R}$ et $\rho = \|x\|$ ($t = \alpha + \frac{\pi}{2}$ donne le point 0 du cercle).

Dans le cas où $n = 3$, on peut aboutir à une représentation paramétrique de $S(\omega, R)$ dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E comme suit.

Pour $x \in S(\omega, R)$, on a :

$$x_3 - \omega_3 = \langle x - \omega \mid e_3 \rangle = \|x - \omega\| \|e_3\| \cos(\theta_3) = R\cos(\theta_3)$$

avec $\theta_3 = (\widehat{x - \omega, e_3}) \in [0, \pi]$ et de :

$$\begin{aligned}(x_1 - \omega_1)^2 + (x_2 - \omega_2)^2 &= R^2 - (x_3 - \omega_3)^2 \\ &= R^2\left(1 - \cos^2(\theta_3)\right) = R^2 \sin^2(\theta_3)\end{aligned}$$

avec $\sin(\theta_3) \geq 0$, on déduit qu'il existe un réel $\theta_2 \in \left]-\pi, \pi\right]$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \omega_1 + R\cos(\theta_2)\sin(\theta_3) \\ x_2 = \omega_2 + R\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) \\ x_3 = \omega_3 + R\cos(\theta_3) \end{array}\right. \tag{13.1}$$

Réciproquement, on vérifie facilement que (13.1) définit la sphère de centre ω et de rayon R.

Pour $n = 4$, de :

$$x_4 - \omega_4 = \langle x - \omega \mid e_4 \rangle = \|x - \omega\| \|e_4\| \cos(\theta_4) = R\cos(\theta_4)$$

avec $\theta_4 \in [0, \pi]$ et :

$$(x_1 - \omega_1)^2 + (x_2 - \omega_2)^2 + (x_3 - \omega_3)^2 = R^2 \sin^2(\theta_4)$$

on déduit, en remplaçant R par $R\sin(\theta_4) \geq 0$, que :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \omega_1 + R\cos(\theta_2)\sin(\theta_3)\sin(\theta_4) \\ x_2 = \omega_2 + R\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)\sin(\theta_4) \\ x_3 = \omega_3 + R\cos(\theta_3)\sin(\theta_4) \end{array}\right.$$

et la paramétrisation :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \omega_1 + R\cos(\theta_2)\sin(\theta_3)\sin(\theta_4) \\ x_2 = \omega_2 + R\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)\sin(\theta_4) \\ x_3 = \omega_3 + R\cos(\theta_3)\sin(\theta_4) \\ x_4 = \omega_4 + R\cos(\theta_4) \end{array}\right.$$

avec $\theta_2 \in \left]-\pi, \pi\right]$ et θ_3, θ_4 dans $[0, \pi]$.

Par récurrence, on déduit que pour $n \geq 3$, une paramétrisation de la sphère $S(\omega, R)$ est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \omega_1 + R\cos(\theta_2)\sin(\theta_3)\cdots\sin(\theta_n) \\ x_2 = \omega_2 + R\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)\cdots\sin(\theta_n) \\ x_3 = \omega_3 + R\cos(\theta_3)\sin(\theta_4)\cdots\sin(\theta_n) \\ \vdots \\ x_{n-2} = \omega_{n-2} + R\cos(\theta_{n-2})\sin(\theta_{n-1})\sin(\theta_n) \\ x_{n-1} = \omega_{n-1} + R\cos(\theta_{n-1})\sin(\theta_n) \\ x_n = \omega_n + R\cos(\theta_n) \end{array}\right. \tag{13.2}$$

avec $\theta_2 \in \left]-\pi, \pi\right]$ et $\theta_3, \cdots, \theta_n$ dans $[0, \pi]$.

En effet, pour $n = 3$, c'est vrai. Le supposant acquis pour $n \geq 3$, on a pour $x \in S(\omega, R)$ dans E de dimension $n+1$:

$$x_{n+1} - \omega_{n+1} = \langle x - \omega \mid e_{n+1} \rangle = \|x - \omega\| \, \|e_{n+1}\| \cos(\theta_{n+1}) = R\cos(\theta_{n+1})$$

avec $\theta_{n+1} \in [0, \pi]$ et le vecteur $x' = x - x_{n+1}e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ est tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \omega_k)^2 = R^2 - (x_{n+1} - \omega_{n+1})^2 = R^2 \sin^2(\theta_{n+1})$$

avec $\sin(\theta_{n+1}) \geq 0$, ce qui signifie qu'il est sur la sphère $S(\omega', R')$ où $\omega' = \omega - \omega_{n+1}e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k e_k$ et $R' = R\sin(\theta_{n+1})$ de l'espace euclidien de dimension n, E' engendré par $e_1, \cdots, e_n$. Il existe donc un réel $\theta_2 \in \left]-\pi, \pi\right]$ et des réels $\theta_3, \cdots, \theta_n$ dans $[0, \pi]$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \omega_1 + R\sin(\theta_{n+1})\cos(\theta_2)\sin(\theta_3)\cdots\sin(\theta_n) \\ x_2 = \omega_2 + R\sin(\theta_{n+1})\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)\cdots\sin(\theta_n) \\ x_3 = \omega_3 + R\sin(\theta_{n+1})\cos(\theta_3)\sin(\theta_4)\cdots\sin(\theta_n) \\ \vdots \\ x_{n-2} = \omega_{n-2} + R\sin(\theta_{n+1})\cos(\theta_{n-2})\sin(\theta_{n-1})\sin(\theta_n) \\ x_{n-1} = \omega_{n-1} + R\sin(\theta_{n+1})\cos(\theta_{n-1})\sin(\theta_n) \\ x_n = \omega_n + R\sin(\theta_{n+1})\cos(\theta_n) \end{array}\right.$$

et on a la paramétrisation :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \omega_1 + R\cos(\theta_2)\sin(\theta_3)\cdots\sin(\theta_n)\sin(\theta_{n+1}) \\ x_2 = \omega_2 + R\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)\cdots\sin(\theta_n)\sin(\theta_{n+1}) \\ x_3 = \omega_3 + R\cos(\theta_3)\sin(\theta_4)\cdots\sin(\theta_n)\sin(\theta_{n+1}) \\ \vdots \\ x_{n-2} = \omega_{n-2} + R\cos(\theta_{n-2})\sin(\theta_{n-1})\sin(\theta_n)\sin(\theta_{n+1}) \\ x_{n-1} = \omega_{n-1} + R\cos(\theta_{n-1})\sin(\theta_n)\sin(\theta_{n+1}) \\ x_n = \omega_n + R\cos(\theta_n)\sin(\theta_{n+1}) \\ x_{n+1} = \omega_{n+1} + R\cos(\theta_{n+1}). \end{array}\right. \tag{13.3}$$

Réciproquement, on vérifie que (13.2) définit bien la sphère de centre ω et de rayon R dans E de dimension n.

Pour $n = 3$, si $x \in E$ vérifie (13.1), on a :

$$\begin{aligned}\|x-\omega\|^2 &= R^2\left(\cos(\theta_2)^2\sin^2(\theta_3)+\sin^2(\theta_2)\sin^2(\theta_3)+\cos^2(\theta_3)\right)\\ &= R^2\left(\left(\cos(\theta_2)^2+\sin^2(\theta_2)\right)\sin^2(\theta_3)+\cos^2(\theta_3)\right)\\ &= R^2\left(\sin^2(\theta_3)+\cos^2(\theta_3)\right)=R^2\end{aligned}$$

et $x \in S(\omega, R)$.

Supposant le résultat acquis pour les espaces euclidiens de dimension $n \geq 3$, si x dans E de dimension $n+1$ vérifie (13.3), alors $x' = x - x_{n+1}e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ vérifie (13.2) dans E' engendré par $e_1, \cdots, e_n$ avec $R' = R\sin(\theta_{n+1}) \geq 0$, il est donc sur la sphère $S(\omega', R')$ où $\omega' = \omega - \omega_{n+1}e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k e_k$ et on a :

$$\begin{aligned}\|x-\omega\|^2 &= \|x'-\omega'\|^2 + (x_{n+1}-\omega_{n+1})^2\\ &= R^2\sin^2(\theta_{n+1}) + R^2\cos^2(\theta_{n+1}) = R^2\end{aligned}$$

et $x \in S(\omega, R)$.

13.4 Hyperplans dans un espace euclidien

On rappelle qu'un hyperplan vectoriel d'un espace vectoriel E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Plus généralement on peut définir un hyperplan affine par :

$$H = \ell^{-1}\{\lambda\} = \{x \in E \mid \ell(x) = \lambda\}$$

où ℓ est une forme linéaire non nulle et λ un réel.

Une forme linéaire non nulle étant surjective, il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $\lambda = \ell(x_0)$ (donc H est non vide) et un vecteur x est dans l'hyperplan d'équation $\ell(x) = \lambda$ si, et seulement si, $x - x_0$ est dans l'hyperplan vectoriel $\ker(\ell)$. On a donc $H = x_0 + \ker(\ell)$, ce qui revient à placer l'origine en x_0. On dit que H est l'hyperplan affine passant par x_0 et dirigé par $\ker(\ell)$.

Les notions d'espace et sous-espace affines seront étudiées plus loin.

Pour tout vecteur non nul a d'un espace préhilbertien, l'application $x \mapsto \langle a \mid x\rangle$ est une forme linéaire non nulle et pour tout réel λ l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tel que $\langle a \mid x\rangle = \lambda$ est un hyperplan.

Dans le cas où E est un espace euclidien, la réciproque est vraie, c'est-à-dire que toute forme linéaire et tout hyperplan peuvent être ainsi décrits.

Théorème 13.3 *Soit E un espace euclidien de dimension n. Pour tout forme linéaire ℓ sur E, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :*

$$\forall x \in E,\ \ell(x) = \langle a \mid x\rangle .$$

Si H est un hyperplan vectoriel de E, il existe alors un vecteur non nul a tel que $H = \{a\}^{\perp}$. Si H est un hyperplan affine de E ne contenant pas 0, il existe alors un vecteur non nul b tel que $H = \{x \in E \mid \langle b \mid x\rangle = 1\}$.

Démonstration. On note $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de l'espace euclidien E.

Dans la base $\mathcal{B}$ l'expression de ℓ est $\ell(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \langle a \mid x \rangle$, où on a noté $a = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$. Prenant $x = e_j$ avec j compris entre 1 et n, on a $\ell(e_j) = a_j = \langle a \mid e_j \rangle$.
Si a' est un autre vecteur tel que $\ell(x) = \langle a' \mid x \rangle$ pour tout $x \in E$, on a $\langle a \mid x \rangle = \langle a' \mid x \rangle$ pour tout $x \in E$, soit $\langle a - a' \mid x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$ et $a - a' \in E^{\perp} = \{0\}$, soit $a = a'$.

Si H est un hyperplan vectoriel de E, il existe une forme linéaire ℓ non nulle telle que $H = \ker(\ell)$ et désignant a le vecteur qui définit ℓ, on a :

$$(x \in H) \Leftrightarrow (\ell(x) = \langle a \mid x \rangle = 0) \Leftrightarrow \left(x \in \{a\}^{\perp}\right).$$

Si H est un hyperplan affine de E d'équation $\ell(x) = \langle a \mid x \rangle = \lambda$ dans $\mathcal{B}$, avec $\lambda \neq 0$, on a :

$$(x \in H) \Leftrightarrow (\langle a \mid x \rangle = \lambda) \Leftrightarrow (\langle b \mid x \rangle = 1)$$

en notant $b = \frac{1}{\lambda} a$. ■

Ce résultat peut s'exprimer en disant que pour E euclidien, l'application qui associe à tout vecteur $a \in E$ la forme linéaire $x \mapsto \langle a \mid x \rangle$ réalise un isomorphisme de E sur son dual E^*.

Le théorème précédent n'est pas valable pour E préhilbertien de dimension infinie comme le montre l'exercice qui suit.

Exercice 13.1 *Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$ et ℓ la forme linéaire définie sur E par $\ell(f) = f(0)$ pour tout $f \in E$. Peut-on trouver une fonction $a \in E$ telle que $\ell(f) = \langle a \mid f \rangle$ pour tout $f \in E$?*
Construire un hyperplan H de E qui n'est pas l'orthogonal d'une droite.

Solution 13.1 *Supposons qu'une telle fonction existe. Comme $\ell \neq 0$, on a $a \neq 0$. Prenant $f : t \mapsto t \cdot a(t)$, on a :*

$$\ell(f) = f(0) = 0 = \int_0^1 t a^2(t)\, dt$$

ce qui est impossible puisque f est continue positive et non identiquement nulle. Le premier point du théorème précédent est donc faux en dimension infinie.

Prenons pour hyperplan le noyau de ℓ et supposons que $H = \{a\}^{\perp}$ avec $a \neq 0$. La fonction $f : t \mapsto t \cdot a(t)$ est non identiquement nulle dans H et $\langle f \mid a \rangle = \int_0^1 t a^2(t)\, dt > 0$, donc $f \notin \{a\}^{\perp}$. Une telle fonction a ne peut donc exister.

Pour ce qui suit, on suppose que E est un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E.

En notant p_F la projection orthogonale sur un sous-espace F de E, l'identité $p_F + p_{F^{\perp}} = Id$ et le théorème précédent nous permettent d'obtenir une expression simple de la projection orthogonale sur un hyperplan vectoriel et de la distance d'un point à un hyperplan vectoriel ou affine.

Théorème 13.4 *Soit H un hyperplan de E d'équation $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$ dans la base $\mathcal{B}$ et p_H la projection orthogonale sur H. En posant $a = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, on a :*

$$\forall x \in E,\ p_H(x) = x - \frac{\langle x \mid a \rangle}{\|a\|^2} a$$

et pour tout $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ *dans* E, *la distance de* x *à* H *est :*

$$d(x, H) = \frac{|\langle a \mid x \rangle|}{\|a\|} = \frac{\left| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}}.$$

Démonstration. L'hyperplan H s'écrit $H = \{a\}^\perp = (\mathbb{R}a)^\perp$ avec $a \neq 0$ et pour tout $x \in E$, on a :

$$p_H(x) = x - p_{H^\perp}(x) = x - p_{\mathbb{R}a}(x) = x - \frac{\langle x \mid a \rangle}{\|a\|^2} a.$$

De plus pour tout $x \in E$, on a :

$$d(x, H) = \|x - p_H(x)\| = \|p_{H^\perp}(x)\|$$

avec $p_{H^\perp}(x) = \frac{\langle x \mid a \rangle}{\|a\|^2} a$, ce qui donne :

$$d(x, H) = \frac{|\langle x \mid a \rangle|}{\|a\|} = \frac{\left| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}}.$$

■

De manière un peu plus générale, si H est un hyperplan affine d'équation $\ell(x) = \lambda$, on peut encore définir la distance de $x \in E$ à H par $d(x, H) = \inf_{z \in H} \|x - z\|$.

En désignant par x_0 un point de H, on a $\lambda = \ell(x_0)$ et $H = x_0 + \ker(\ell)$, de sorte qu'en notant $H_0 = \ker(\ell)$, on a :

$$\begin{aligned} d(x, H) &= \inf_{z \in H} \|x - z\| = \inf_{y \in H_0} \|x - x_0 - y\| \\ &= d(x - x_0, H_0) = \|x - x_0 - p_{H_0}(x - x_0)\| \end{aligned}$$

Le vecteur $x_0 + p_{H_0}(x - x_0) \in H$ est la projection orthogonale de x sur H, on le note $p_H(x)$. On a :

$$(y = p_H(x)) \Leftrightarrow \left(y \in H \text{ et } x - y \in H_0^\perp\right) \Leftrightarrow (y \in H \text{ et } \|x - y\| = d(x, H))$$

En effet, si $y = p_H(x) = x_0 + p_{H_0}(x - x_0) \in H$, alors $x - y = x - x_0 - p_{H_0}(x - x_0) \in H_0^\perp$ et $\|x - y\| = \|x - x_0 - p_{H_0}(x - x_0)\| = d(x, H)$ comme on vient de le voir. Si $\|x - y\| = d(x, H)$ avec $y \in H = x_0 + H_0$, on a $y - x_0 \in H_0$ et :

$$\|(x - x_0) - (y - x_0)\| = \|x - y\| = d(x, H) = d(x - x_0, H_0)$$

ce qui signifie que $y - x_0 = p_{H_0}(x - x_0)$ et $y = p_H(x)$.

On peut remarquer que la définition de $p_H(x)$ ne dépend pas du choix d'un point x_0 de H. En effet, si x_1 est un autre élément de H, on a :

$$x_1 + p_{H_0}(x - x_1) - x_0 - p_{H_0}(x - x_0) = (x_1 - x_0) - p_{H_0}(x_1 - x_0) = 0$$

puisque $x_1 - x_0 \in H$.

On peut aussi remarquer que l'application p_H (projection orthogonale sur H) n'est pas une application linéaire si $0 \notin H$. En fait c'est une application affine.

Corollaire 13.1 *Soit H un hyperplan de E d'équation $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = \lambda$ dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ dans E, la distance de x à H est :*

$$d(x, H) = \frac{\left| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k - \lambda \right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}}.$$

Démonstration. On note $a = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ et ℓ est la forme linéaire définie sur E par $\ell(x) = \langle a \mid x \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$.

En désignant par x_0 un point de H, on a $\lambda = \ell(x_0)$ et $H = x_0 + \ker(\ell)$, de sorte que :

$$\begin{aligned} d(x, H) = d(x - x_0, \ker(\ell)) &= \frac{|\langle x - x_0 \mid a \rangle|}{\|a\|} \\ &= \frac{|\ell(x) - \ell(x_0)|}{\|a\|} = \frac{\left| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k - \lambda \right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}} \end{aligned}$$

■

Exemple 13.1 *La distance d'un point $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan $\mathbb{R}^2$ à la droite D d'équation $ax + by + c = 0$ est :*

$$d(M, D) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La distance d'un point M de l'espace $\mathbb{R}^3$ au plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(M, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

13.5 Hyperplan médiateur dans un espace préhilbertien

E est un espace préhilbertien.

Théorème 13.5 *Soient a, b deux points distincts de E. L'ensemble :*

$$H = \{x \in E \mid \|x - a\| = \|x - b\|\}$$

est l'hyperplan affine passant par $c = \frac{1}{2}(a + b)$ (milieu du segment $[a, b]$) et de direction $H_0 = \{b - a\}^{\perp}$, soit :

$$H = \{x \in E \mid \langle x - c \mid b - a \rangle = 0\}$$

Démonstration. En notant $d = \frac{1}{2}(b-a)$, on a $a = c - d$, $b = c + d$ et :

$$\begin{aligned}\|x-a\|^2 - \|x-b\|^2 &= \|x-c+c-a\|^2 - \|x-c+c-b\|^2 \\ &= \|x-c+d\|^2 - \|x-c-d\|^2 \\ &= 4\langle x-c \mid d\rangle\end{aligned}$$

de sorte que :

$$(x \in H) \Leftrightarrow (\|x-a\| = \|x-b\|) \Leftrightarrow (\langle x-c \mid d\rangle = 0)$$

■

Définition 13.4 *Avec les notations du théorème, on dit que H est l'hyperplan médiateur du segment $[a,b]$.*

Dans le cas où E est un plan euclidien, on parle plutôt de médiatrice.

À un tel hyperplan médiateur on associe les demi-hyperplans qui contiennent a et b respectivement, soit :

$$H_a = \{x \in E \mid \|x-a\| < \|x-b\|\}$$

et :

$$H_b = \{x \in E \mid \|x-a\| > \|x-b\|\}$$

La démonstration du théorème précédent nous dit que :

$$H_a = \{x \in E \mid \langle x-c \mid b-a\rangle < 0\}$$

et :

$$H_b = \{x \in E \mid \langle x-c \mid b-a\rangle > 0\}$$

où $c = \frac{1}{2}(a+b)$ est le milieu du segment $[a,b]$.

On a alors la partition de E :

$$E = H_a \cup H \cup H_b.$$

Comme dans le plan euclidien, on a le résultat suivant.

Théorème 13.6 *Avec les notations précédentes, pour $x \in H_a$ et $y \in H_b$, l'intersection $[x,y] \cap H$ est réduite à un point.*

Démonstration. Tout point de $[x,y]$ s'écrit de manière unique $z(t) = (1-t)x + ty$, où t est un réel dans $[0,1]$ et il s'agit alors de montrer qu'il existe un unique réel $t \in [0,1]$ tel que $z(t) \in H$. Pour ce faire, on introduit la fonction :

$$\begin{array}{rccc}\varphi : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \langle z(t) - c \mid b-a\rangle\end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \langle (1-t)x + ty - c \mid b-a\rangle \\ &= \langle t(y-x) + x - c \mid b-a\rangle \\ &= \langle y-x \mid b-a\rangle t + \langle x-c \mid b-a\rangle\end{aligned}$$

Cette fonction est dérivable de dérivée :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \langle y-x \mid b-a\rangle \\ &= \langle y-c \mid b-a\rangle - \langle x-c \mid b-a\rangle > 0\end{aligned}$$

($x \in H_a$ et $y \in H_b$), elle donc strictement croissante et avec $\varphi(0) = \langle x-c \mid b-a\rangle < 0$, $\varphi(1) = \langle y-c \mid b-a\rangle > 0$, on déduit qu'il existe un unique $t \in]0,1[$ tel que $\varphi(t) = 0$, ce qui équivaut à dire que $[x,y] \cap H$ est réduit à un point. ■

13.6 Intersection d'un hyperplan et d'une sphère dans un espace euclidien

E est toujours un espace euclidien.

Théorème 13.7 *Soient S une sphère de centre ω et de rayon $R > 0$ et $H = x_0 + H_0$ un hyperplan affine de E avec $H_0 = \ker(\ell)$ où ℓ une forme linéaire non nulle. On note $d = d(\omega, H)$ la distance de ω à H.*

1. *Si $d > R$, alors $H \cap S = \emptyset$.*
2. *Si $d = R$, alors $H \cap S = \{p_H(\omega)\}$, où $p_H(\omega)$ est la projection orthogonale de ω sur H.*
3. *Si $d < R$, alors $H \cap S$ est une sphère de H de centre et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.*

Démonstration. En posant $\omega_0 = \omega - x_0$, on a :

$$d = d(\omega, H) = d(\omega_0, H_0) = \|\omega_0 - p_{H_0}(\omega_0)\|.$$

Pour tout $x = x_0 + y \in H$ avec $y \in H_0$, on a :

$$\begin{aligned} \|x - \omega\|^2 &= \|y - (\omega - x_0)\|^2 = \|y - \omega_0\|^2 \\ &= \|(y - p_{H_0}(\omega_0)) + (p_{H_0}(\omega_0) - \omega_0)\|^2 \\ &= \|y - p_{H_0}(\omega_0)\|^2 + \|p_{H_0}(\omega_0) - \omega_0\|^2 \\ &= \|y - p_{H_0}(\omega_0)\|^2 + d^2 \end{aligned}$$

puisque $y - p_{H_0}(\omega_0) \in H_0$ et $p_{H_0}(\omega_0) - \omega_0 \in F^\perp$.

1. Si $d > R$, on a pour $x \in H$, $\|x - \omega\|^2 \geq d^2 > R^2$ et $x \notin S$. On a donc $H \cap S = \emptyset$.
2. Si $d = R$, on a pour $x \in H$, $\|x - \omega\|^2 = \|y - p_{H_0}(\omega_0)\|^2 + R^2$ et $\|x - \omega\| = R$ équivaut à $y = p_{H_0}(\omega_0)$. On a donc $H \cap S = \{x_0 + p_{H_0}(\omega_0)\} = \{p_H(\omega)\}$.
3. Supposons $d < R$. Si $x \in H \cap S$, on a alors :

$$\|y - p_{H_0}(\omega_0)\|^2 = \|x - \omega\|^2 - d^2 = R^2 - d^2$$

et $y \in S_0 = S\left(p_{H_0}(\omega_0), \sqrt{R^2 - d^2}\right) \subset H_0$, ce qui entraîne $x = x_0 + y \in S' = S\left(x_0 + p_{H_0}(\omega_0), \sqrt{R^2 - d\right.$ H. Réciproquement si $x \in S'$, il est dans H, $y = x - x_0$ est dans S_0 et $\|x - \omega\|^2 = \|y - p_{H_0}(\omega_0)\|^2 + d^2 = R^2 - d^2 + d^2 = R^2$, soit $x \in S$.

■

Dans le cas où $H \cap S$ est réduit à un point, on dit que l'hyperplan H est tangent à la sphère S.

13.7 Intersection de deux sphères dans un espace euclidien

Si S et S' sont deux sphères de E de même centre ω (sphères concentriques) et de rayons respectifs R et R', on vérifie facilement que $S \cap S' = \emptyset$ si $R \neq R'$ et $S \cap S' = S = S'$ si $R = R'$.

On s'intéresse maintenant à l'intersection de deux sphères non concentriques.

On se donne deux sphères non concentriques $S = S(\omega, R)$, $S' = S(\omega', R')$ (i. e. $\omega \neq \omega'$) et on note $\delta = \|\omega - \omega'\| > 0$ la distance entre les deux centres.

En supposant $S \cap S'$ non vide, on a pour tout $x \in S \cap S'$:

$$\begin{aligned} |R' - R| &= |\|x - \omega'\| - \|x - \omega\|| \\ &\leq \|(x - \omega') - (x - \omega)\| = \|\omega - \omega'\| = \delta \\ &\leq \|x - \omega'\| + \|x - \omega\| = R + R' \end{aligned}$$

soit $|R' - R| \leq \delta \leq R + R'$.

Il en résulte que $S \cap S' = \emptyset$ si $\delta \notin [|R' - R|, R + R']$.

On suppose donc que $\delta \in [|R' - R|, R + R']$.

En notant $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega + \omega')$ le milieu du segment $[\omega, \omega']$ et $x_0 = \frac{1}{2}(\omega' - \omega)$, on a pour tout vecteur $x \in E$:

$$\|x - \omega'\|^2 - \|x - \omega\|^2 = 2\langle x \mid \omega - \omega' \rangle + \|\omega'\|^2 - \|\omega\|^2$$

avec $\omega - \omega' = -2x_0$ et :

$$\|\omega'\|^2 - \|\omega\|^2 = \|\omega_0 + x_0\|^2 - \|\omega_0 - x_0\|^2 = 4\langle \omega_0 \mid x_0 \rangle$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \|x - \omega'\|^2 - \|x - \omega\|^2 &= 4\left(\langle \omega_0 \mid x_0 \rangle - \langle x \mid x_0 \rangle\right) \\ &= 4\langle \omega_0 - x \mid x_0 \rangle \end{aligned}$$

Si $x \in S \cap S'$, on a $\|x - \omega'\| = R'$, $\|x - \omega\| = R$ et l'identité précédente nous dit que x est dans l'hyperplan H d'équation $4\langle \omega_0 - x \mid x_0 \rangle = R'^2 - R^2$. Réciproquement si $x \in S \cap H$, on a $\|x - \omega\| = R$, $4\langle \omega_0 - x \mid x_0 \rangle = R'^2 - R^2$ et avec l'identité précédente, on déduit que :

$$\|x - \omega'\|^2 = \|x - \omega\|^2 + 4\langle \omega_0 - x \mid x_0 \rangle = R'^2$$

soit $x \in S \cap S'$.

On a donc $S \cap S' = S \cap H = S' \cap H$ (S et S' jouent des rôles symétriques), où H est l'hyperplan d'équation $4\langle \omega_0 - x \mid x_0 \rangle = R'^2 - R^2$.

Si $R = R'$, H est alors l'hyperplan d'équation $\langle \omega_0 - x \mid x_0 \rangle = 0$, soit l'hyperplan passant par $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega + \omega')$ et de direction $H_0 = \{x_0\}^\perp = \{\omega' - \omega\}^\perp$, c'est-à-dire l'hyperplan médiateur de $[\omega, \omega']$. Dans ce cas, on a :

$$p_H(\omega) = \omega_0 + p_{H_0}(\omega - \omega_0) = \omega_0$$

puisque $\omega - \omega_0 = -x_0 \in H_0^\perp$. On a alors :

$$\begin{aligned} d = d(\omega, H) &= \|\omega - p_H(\omega)\| = \|\omega - \omega_0\| \\ &= \|x_0\| = \frac{\|\omega' - \omega\|}{2} = \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

avec $0 = |R' - R| \leq \delta \leq R + R' = 2R$.

Le théorème 13.7 nous dit alors que :

- si $\delta = \|\omega - \omega'\| = 2R$, alors $S \cap S' = S \cap H = \{\omega_0\}$;
- si $0 < \delta = \|\omega - \omega'\| < 2R$, alors $S \cap S'$ est la sphère de H de centre ω_0 et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2} = \dfrac{\sqrt{4R^2 - \delta^2}}{2}$.

Dans le cas général x est dans $S \cap S' = S \cap H$ si, et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|x - \omega\| = R \\ 4 \langle x - \omega_0 \mid x_0 \rangle = R^2 - R'^2 \end{array} \right. \tag{13.4}$$

En écrivant que $E = H_0 \oplus D_0$, où $H_0 = \{x_0\}^\perp$ et $D_0 = \mathbb{R}x_0$ et en plaçant l'origine en ω_0, on a $x - \omega_0 = y + \lambda x_0$ avec $y \in H_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Avec $\omega = \omega_0 - x_0$, on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|x - \omega\|^2 = \|x - \omega_0 + x_0\|^2 = \|y + (\lambda + 1) x_0\|^2 = \|y\|^2 + (\lambda + 1)^2 \|x_0\|^2 \\ 4 \langle x - \omega_0 \mid x_0 \rangle = 4\lambda \|x_0\|^2 \end{array} \right.$$

de sorte que (13.4) est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|y\|^2 + (\lambda + 1)^2 \|x_0\|^2 = R^2 \\ 4\lambda \|x_0\|^2 = R^2 - R'^2 \end{array} \right.$$

ou encore en tenant compte de $\|x_0\| = \dfrac{\|\omega' - \omega\|}{2} = \dfrac{\delta}{2}$, à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{R^2 - R'^2}{\delta^2} \\ \|y\|^2 = \dfrac{4R^2 - (\lambda + 1)^2 \delta^2}{4} = \dfrac{(2R - (\lambda + 1)\delta)(2R + (\lambda + 1)\delta)}{4} \end{array} \right.$$

On a donc $\lambda + 1 = \dfrac{R^2 - R'^2 + \delta^2}{\delta^2}$ et :

$$\begin{aligned} 4R^2 - (\lambda + 1)^2 \delta^2 &= (2R - (\lambda + 1)\delta)(2R + (\lambda + 1)\delta) \\ &= \left(2R - \frac{R^2 - R'^2 + \delta^2}{\delta}\right)\left(2R + \frac{R^2 - R'^2 + \delta^2}{\delta}\right) \\ &= \frac{(R'^2 - (R^2 - 2R\delta + +\delta^2))((R^2 + 2R\delta + \delta^2) - R'^2)}{\delta^2} \\ &= \frac{\left(R'^2 - (R - \delta)^2\right)\left((R + \delta)^2 - R'^2\right)}{\delta^2} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \frac{\left(R'^2 - (R - \delta)^2\right)\left((R + \delta)^2 - R'^2\right)}{4\delta^2} \\ &= \frac{(R' - (R - \delta))(R' + (R - \delta))((R + \delta) - R')((R + \delta) + R')}{4\delta^2} \\ &= \frac{(R' - R + \delta)(R + \delta - R')(R' + R - \delta)(R + \delta + R')}{4\delta^2} \\ &= \frac{\left(\delta^2 - (R' - R)^2\right)\left((R' + R)^2 - \delta^2\right)}{4\delta^2} \end{aligned}$$

Pour $|R' - R| \leq \delta \leq R + R'$, on a $\delta^2 - (R' - R)^2 \geq 0$ et $(R' + R)^2 - \delta^2 \geq 0$ et y est sur la sphère de H_0 de centre 0 et de rayon $R'' = \dfrac{\sqrt{\delta^2 - (R' - R)^2}\sqrt{(R' + R)^2 - \delta^2}}{2\delta}$, ce qui entraîne que $x = \omega_0 + \lambda x_0 + y$ est sur la sphère S'' de H de centre $\omega_0 + \lambda x_0$ et de rayon R'' (la condition

$\lambda = \dfrac{R^2 - R'^2}{\delta^2} = \dfrac{R^2 - R'^2}{4\left\|x_0\right\|^2}$ donne $4\left\langle \omega_0 + \lambda x_0 - \omega_0 \mid x_0 \right\rangle = 4\lambda \left\|x_0\right\|^2 = R^2 - R'^2$ et $\omega_0 + \lambda x_0$ est bien dans H).

Réciproquement si $x = \omega_0 + \lambda x_0 + y$ avec $\lambda = \dfrac{R^2 - R'^2}{\delta^2}$ et $\|y\| = R''$ dans H_0, on a $\omega_0 + \lambda x_0 \in H$, donc $x \in H$ et :

$$\begin{aligned}
\|x-\omega\|^2 &= \|\omega_0 + \lambda x_0 + y - \omega\|^2 = \|y + (\lambda+1)\, x_0\|^2 \\
&= \|y\|^2 + (\lambda+1)^2 \|x_0\|^2 \\
&= \frac{\left(\delta^2 - (R'-R)^2\right)\left((R'+R)^2 - \delta^2\right)}{4\delta^2} + \left(\frac{R^2 - R'^2}{\delta^2} + 1\right)^2 \frac{\delta^2}{4} \\
&= \frac{\left(\delta^2 - (R'-R)^2\right)\left((R'+R)^2 - \delta^2\right)}{4\delta^2} + \frac{\left(R^2 - R'^2 + \delta^2\right)^2}{4\delta^2} \\
&= \frac{\left(\delta^2 - (R'-R)^2\right)\left((R'+R)^2 - \delta^2\right) + \left(R^2 - R'^2 + \delta^2\right)^2}{4\delta^2} = R^2
\end{aligned}$$

(il suffit en fait de remonter les calculs).

En définitive, pour $|R' - R| \leq \delta \leq R + R'$, $S \cap S'$ est la sphère de H de centre $\omega_0 + \lambda x_0$ et de rayon R''.

Cette sphère est réduite à un point pour $|R' - R| = \delta$ ou $\delta = R + R'$.

On a donc montré le théorème suivant qui généralise celui qu'on connaît pour l'intersection de deux cercles dans le plan euclidien.

Théorème 13.8 *Soient $S = S(\omega, R)$, $S' = S(\omega', R')$ deux sphères non concentriques et $\delta = \|\omega - \omega'\|$ la distance entre les deux centres.*

1. *Si $\delta \notin [|R' - R|, R + R']$, alors $S \cap S' = \emptyset$;*
2. *Si $\delta \in [|R' - R|, R + R']$, alors $S \cap S'$ est non vide et $S \cap S' = S \cap H = S' \cap H$, où H est l'hyperplan d'équation $4\langle \omega_0 - x \mid x_0 \rangle = R'^2 - R^2$.*
   Cette intersection est la sphère de H de centre $\omega_0 + \lambda x_0$ et de rayon R'', où $\omega_0 = \dfrac{1}{2}(\omega + \omega')$, $x_0 = \dfrac{1}{2}(\omega' - \omega)$, $\lambda = \dfrac{R^2 - R'^2}{\delta^2}$ et $R'' = \dfrac{\sqrt{\delta^2 - (R'-R)^2}\sqrt{(R'+R)^2 - \delta^2}}{2\delta}$.
   Pour $|R' - R| = \delta$ ou $\delta = R + R'$, cette sphère est réduite au point $\omega_0 + \lambda x_0$.

13.8 Inversion

Dans le plan complexe privé de l'origine, on définit l'inversion par $z \mapsto \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{z}{|z|^2}$.

De manière plus générale, on définit sur un espace préhilbertien E, l'inversion u par :

$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ u(x) = \frac{1}{\|x\|^2} x.$$

Lemme 13.1 *L'inversion u est involutive de $E \setminus \{0\}$ sur $E \setminus \{0\}$ et conserve les angles géométriques de vecteurs.*

Démonstration. L'application u est bien à valeurs dans $E \setminus \{0\}$. Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\|u(x)\| = \dfrac{1}{\|x\|}$ et :

$$u(u(x)) = \frac{1}{\|u(x)\|^2} u(x) = \|x\|^2 \frac{1}{\|x\|^2} x = x$$

c'est-à-dire que $u \circ u = Id$.

Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, le vecteur $u(x)$ est non nul et colinéaire à x, donc :

$$\widehat{(u(x), u(y))} = \widehat{(x, y)}$$

pour tous x, y dans $E \setminus \{0\}$. ■

Lemme 13.2 *Pour tous x, y dans $E \setminus \{0\}$, on a :*

$$\|u(x) - u(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}$$

Démonstration. On a :

$$\langle u(x) \mid u(y)\rangle = \frac{1}{\|x\|^2 \|y\|^2} \langle x \mid y\rangle$$

et :

$$\begin{aligned} \|u(x) - u(y)\|^2 &= \|u(x)\|^2 - 2\langle u(x) \mid u(y)\rangle + \|u(y)\|^2 \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{1}{\|x\|^2 \|y\|^2}\langle x \mid y\rangle + \frac{1}{\|y\|^2} \\ &= \frac{1}{\|x\|^2 \|y\|^2}\left(\|y\|^2 - 2\langle x \mid y\rangle + \|x\|^2\right) \\ &= \frac{\|x - y\|^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}. \end{aligned}$$

■

L'inversion peut être utilisée pour montrer une inégalité de Ptolémée comme suit.

Théorème 13.9 *Pour tous vecteurs x, y, z, t dans E, on a :*

$$\|t - x\| \|y - z\| \leq \|t - y\| \|x - z\| + \|t - z\| \|x - y\|$$

(inégalité de Ptolémée).

Démonstration. On suppose tout d'abord que $t = 0$. Il s'agit alors de montrer que pour x, y, z dans E, on a :

$$\|x\| \|y - z\| \leq \|y\| \|x - z\| + \|z\| \|x - y\|$$

Pour $x = 0$, on a $0 \leq \|y\| \|z\| + \|z\| \|y\|$, pour $y = 0$, on a $\|x\| \|z\| \leq \|z\| \|x\|$ et pour $z = 0$, on a $\|x\| \|y\| \leq \|y\| \|x\|$.

En supposant x, y, z non nuls, en divisant par $\|x\| \|y\| \|z\|$, il est équivalent de montrer que :

$$\frac{\|y - z\|}{\|y\| \|z\|} \leq \frac{\|x - z\|}{\|x\| \|z\|} + \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}$$

soit :

$$\|u(y) - u(z)\| \leq \|u(x) - u(z)\| + \|u(x) - u(y)\|$$

ce qui se déduit de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|u(y) - u(z)\| &= \|(u(y) - u(x)) + (u(x) - u(z))\| \\ &\leq \|u(y) - u(x)\| + \|u(x) - u(z)\|. \end{aligned}$$

On place ensuite, pour t quelconque, l'origine en t, ce qui revient à poser $x' = x-t$, $y' = y-t$ et $z' = z - t$ dans l'inégalité :

$$\|x'\| \|y' - z'\| \leq \|y'\| \|x' - z'\| + \|z'\| \|x' - y'\|$$

et donne :

$$\|t - x\| \|y - z\| \leq \|t - y\| \|x - z\| + \|t - z\| \|x - y\| .$$

■

Remarque 13.2 *On peut montrer que l'inégalité de Ptolémée est caractéristique des normes qui dérivent d'un produit scalaire.*

13.9 Symétries orthogonales dans les espaces euclidiens

On suppose ici que E est un espace euclidien de dimension n.

Définition 13.5 *Si F est un sous-espace vectoriel de E, la symétrie orthogonale par rapport à F est l'application définie sur E par :*

$$\forall x \in E,\ s_F (x) = p_F (x) - p_{F^\perp} (x) .$$

Comme p_F et $p_{F^\perp}$, l'application s_F est linéaire.

Remarque 13.3 *Pour $F = \{0\}$, on a $s_F = -Id$ et pour $F = E$, $s_F = Id$. On supposera a priori que F distinct de $\{0\}$ et de E (sous-espace vectoriel propre de E).*

Avec $p_F + p_{F^\perp} = Id$, on déduit que s_F est aussi définie par :

$$\forall x \in E,\ s_F (x) = 2p_F (x) - x = x - 2p_{F^\perp} (x) .$$

Si $D = \mathbb{R}a$ est une droite vectorielle, on a :

$$s_D (x) = 2p_D (x) - x = 2\frac{\langle x \mid a\rangle}{\|a\|^2} a - x.$$

Si $H = D^\perp$ est un hyperplan d'un espace euclidien, on a :

$$s_H (x) = 2p_H (x) - x = x - 2\frac{\langle x \mid a\rangle}{\|a\|^2} a.$$

Définition 13.6 *On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan et demi-tour ou retournement une symétrie orthogonale par rapport à une droite.*

Des propriétés des projections orthogonales, on déduit le résultat suivant.

Théorème 13.10 *Soit F un sous espace vectoriel de E.*

1. *Pour $x \in E$, on a $x \in F$ si, et seulement si, $s_F (x) = x$ et $x \in F^\perp$ si, et seulement si, $s_F (x) = -x$.*
2. *$s_F \circ s_F = Id$ (on dit que s_F est une involution). Une symétrie orthogonale est donc un automorphisme de E avec $s_F^{-1} = s_F$.*

3. *Pour tous x, y dans E, on a :*
$$\langle s_F(x) \mid y\rangle = \langle x \mid s_F(y)\rangle$$
(s_F est auto-adjoint).
4. *Pour tous x, y dans E, on a :*
$$\langle s_F(x) \mid s_F(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle$$
(on dit que s_F est une isométrie).
5. *On a $s_F + s_{F^\perp} = 0$ et $s_F \circ s_{F^\perp} = s_{F^\perp} \circ s_F = -Id$.*
6. *Si F est de dimension $p \in \{1, \cdots, n-1\}$, il existe alors une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de s_F est $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ et $\det(s_F) = (-1)^{n-p}$.*

Démonstration.

1. On a :
$$x \in F \Leftrightarrow p_F(x) = x \Leftrightarrow s_F(x) = x$$
et :
$$x \in F^\perp \Leftrightarrow p_{F^\perp}(x) = x \Leftrightarrow s_F(x) = -x$$
2. On a :
$$\begin{aligned} s_F \circ s_F &= (p_F - p_{F^\perp}) \circ (p_F - p_{F^\perp}) \\ &= p_F \circ p_F - p_{F^\perp} \circ p_F - p_F \circ p_{F^\perp} + p_{F^\perp} \circ p_{F^\perp} \\ &= p_F + p_{F^\perp} = Id \end{aligned}$$
3. On a :
$$\begin{aligned} \langle s_F(x) \mid y\rangle &= 2\langle p_F(x) \mid y\rangle - \langle x \mid y\rangle \\ &= 2\langle x \mid p_F(y)\rangle - \langle x \mid y\rangle \\ &= \langle x \mid 2p_F(y)\rangle - \langle x \mid y\rangle = \langle x \mid s_F(y)\rangle \end{aligned}$$
4. On a :
$$\langle s_F(x) \mid s_F(y)\rangle = \langle x \mid s_F \circ s_F(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle$$
5. On a :
$$s_F + s_{F^\perp} = (p_F - p_{F^\perp}) + (p_{F^\perp} - p_F) = 0$$
et :
$$\begin{aligned} s_F \circ s_{F^\perp} &= (p_F - p_{F^\perp}) \circ (p_{F^\perp} - p_F) \\ &= p_F \circ p_{F^\perp} - p_{F^\perp} \circ p_{F^\perp} - p_F \circ p_F + p_{F^\perp} \circ p_F \\ &= -p_{F^\perp} - p_F = -Id. \end{aligned}$$
6. Il suffit de se placer dans une base formée de la réunion d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de $F^\perp$.

■

Exemple 13.2 *Si s_H est une réflexion, on a* $\det(s_H) = -1$ *et si s_D est un demi-tour, on a* $\det(s_D) = (-1)^{n-1}$.

Exercice 13.2 *Soient F, G deux sous espaces vectoriels de E tels que $F \subset G^\perp$ (F et G sont orthogonaux). Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_H$, où $H = (F \oplus G)^\perp$.*

Solution 13.2 *Pour $x \in H^\perp = F \oplus G$, il existe $(y, z) \in F \times G \subset G^\perp \times G$ tel que $x = y + z$ et on a :*

$$s_G(x) = z - y$$

puis comme $G = \left(G^\perp\right)^\perp \subset F^\perp$, on a aussi $(y, z) \in F \times F^\perp$ et :

$$s_F(s_G(x)) = -y - z = -x$$

Pour $x \in H = (F \oplus G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, on a :

$$s_G(s_F(x)) = s_G(-x) = -(-x) = x$$

On a donc $s_F \circ s_G = s_H$ et comme les sous-espaces F et G jouent des rôles symétriques, on a aussi $s_G \circ s_F = s_H$

13.10 Isométries

E est un espace préhilbertien.

Définition 13.7 *Une isométrie (ou application orthogonale) de E est une application $u : E \to E$ qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :*

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ \langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Exemple 13.3 *Les seules homothéties $x \mapsto \lambda x$ qui sont des isométries sont Id et $-Id$. En effet pour $e \in E$ de norme égale à 1, on a $1 = \|e\|^2 = \|u(e)\|^2 = \lambda^2$ et $\lambda = \pm 1$.*

Exemple 13.4 *Les symétries orthogonales sont des isométries (point **4.** du théorème 13.10).*

Exercice 13.3 *Soient a un vecteur non nul dans E, α un réel et u l'application linéaire définie par :*

$$\forall x \in E, \ u(x) = x + \alpha \langle x \mid a \rangle a$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles u est une isométrie.

Solution 13.3 *Pour $\alpha = 0$, u est l'identité et c'est une isométrie.*
Pour $\alpha \neq 0$ et $x \in E$, on a :

$$\|u(x)\|^2 = \langle x \mid a \rangle^2 \|a\|^2 \alpha^2 + 2 \langle x \mid a \rangle^2 \alpha + \|x\|^2$$

Si $u \in \mathcal{O}(E)$, on a alors $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ pour tout $x \in E$, ce qui équivaut à :

$$\langle x \mid a \rangle^2 \left(\|a\|^2 \alpha + 2\right) = 0$$

ou encore à $\|a\|^2\alpha + 2 = 0$ *et donne* $\alpha = -\dfrac{2}{\|a\|^2}$.

Réciproquement, si $\alpha = -\dfrac{2}{\|a\|^2}$*, l'application u est définie par :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = x - 2\frac{\langle x \mid a\rangle}{\|a\|^2}a$$

et on reconnaît ici la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal au vecteur a (on a $u(x) = x$ *pour* $\langle x \mid a\rangle = 0$ *et* $u(a) = -a$*).*

Exercice 13.4 *Soient a un vecteur non nul dans E,* α *un réel et u l'application linéaire définie par :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = \alpha \langle x \mid a\rangle a - x$$

Déterminer les valeurs de α *pour lesquelles u est une isométrie.*

Solution 13.4 *Pour* $\alpha = 0$*, u est l'homothétie de rapport* -1 *(*$u = -Id$*) et c'est une isométrie.*
Pour $\alpha \neq 0$ *et* $x \in E$*, on a :*

$$\|u(x)\|^2 = \langle x \mid a\rangle^2 \|a\|^2 \alpha^2 - 2\langle x \mid a\rangle^2 \alpha + \|x\|^2$$

Si $u \in \mathcal{O}(E)$*, on a alors* $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ *pour tout* $x \in E$*, ce qui équivaut à :*

$$\langle x \mid a\rangle^2 \left(\|a\|^2 \alpha - 2\right) = 0$$

ou encore à $\|a\|^2\alpha - 2 = 0$ *et donne* $\alpha = \dfrac{2}{\|a\|^2}$.

Réciproquement, si $\alpha = \dfrac{2}{\|a\|^2}$*, l'application u est définie par :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = 2\frac{\langle x \mid a\rangle}{\|a\|^2}a - x$$

et on reconnaît ici le demi-tour par rapport à la droite dirigée par a (on a $u(x) = -x$ *pour* $\langle x \mid a\rangle = 0$ *et* $u(a) = a$*).*

Remarque 13.4 *Une isométrie conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire que pour tous* x, y *dans E, on a :*

$$\langle x \mid y\rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x) \mid u(y)\rangle = 0$$

mais une application qui conserve l'orthogonalité n'est pas nécessairement une isométrie comme le montre l'exemple d'une homothétie de rapport $\lambda \notin \{-1, 1\}$.

Exercice 13.5 *Soit E un espace euclidien de dimension* $n \geq 2$, $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ *une base orthonormée de E et u une application linéaire de E dans E qui conserve l'orthogonalité.*

1. *Montrer que* $\|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$ *pour tous* i, j *compris entre 1 et n. On notera* λ *cette valeur commune.*
2. *Montrer que* $\|u(x)\| = \lambda\|x\|$ *pour tout* $x \in E$ *(pour* $\lambda > 0$*, on dit que u est une similitude de rapport* λ*).*

Solution 13.5

1. *Pour* $1 \leq i, j \leq n$, *on vérifie facilement que les vecteurs* $e_i - e_j$ *et* $e_i + e_j$ *sont orthogonaux, donc :*
$$\langle u(e_i - e_j) \mid u(e_i + e_j) \rangle = 0$$
et avec :
$$\begin{aligned}\langle u(e_i - e_j) \mid u(e_i + e_j) \rangle &= \langle u(e_i) - u(e_j) \mid u(e_i) + u(e_j) \rangle \\ &= \|u(e_i)\|^2 - \|u(e_j)\|^2\end{aligned}$$
on déduit que $\|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$.

2. *Pour tout vecteur* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, *on a* $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$ *et :*
$$\begin{aligned}\|u(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|u(e_i)\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j} x_i x_j \langle u(e_i) \mid u(e_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|u(e_i)\|^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda^2 \|x\|^2\end{aligned}$$
($\langle e_i \mid e_j \rangle = 0$ *pour* $i \neq j \Rightarrow \langle u(e_i) \mid u(e_j) \rangle = 0$*).*

Théorème 13.11 *Une application* $u : E \to E$ *est une isométrie si, et seulement si, elle est linéaire et conserve la norme, c'est-à-dire que :*
$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$$

Démonstration. Si u est linéaire et conserve la norme, on déduit alors de l'identité de polarisation qu'elle conserve le produit scalaire. En effet, pour tous x, y dans E, on a :
$$\begin{aligned}\langle u(x) \mid u(y) \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|u(x + y)\|^2 - \|u(x - y)\|^2\right) \text{ (linéarité)} \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) \text{ (conservation de la norme)} \\ &= \langle x \mid y \rangle\end{aligned}$$

Réciproquement, si u est une application de E dans E qui conserve le produit scalaire, il est clair qu'elle conserve la norme. Il nous reste à montrer qu'elle est linéaire.

Pour x, y dans E et λ dans $\mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned}\|u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2 &= \|u(x + \lambda y)\|^2 + \|u(x)\|^2 + \lambda^2 \|u(y)\|^2 \\ &\quad - 2\left(\langle u(x + \lambda y) \mid u(x) \rangle + \lambda \langle u(x + \lambda y) \mid u(y) \rangle\right) \\ &\quad + 2\lambda \langle u(x) \mid u(y) \rangle \\ &= \|x + \lambda y\|^2 + \|x\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2 \\ &\quad - 2\left(\langle x + \lambda y \mid x \rangle + \lambda \langle x + \lambda y \mid y \rangle\right) \\ &\quad + 2\lambda \langle x \mid y \rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda \langle x \mid y \rangle \\ &\quad - 2\|x\|^2 - 4\lambda \langle x \mid y \rangle - 2\lambda^2 \|y\|^2 \\ &\quad + 2\lambda \langle x \mid y \rangle = 0\end{aligned}$$

ce qui équivaut à $u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$ et u est linéaire. ∎

Remarque 13.5 *Une application $u : E \to E$ qui conserve la norme n'est pas nécessairement linéaire et n'est donc pas une isométrie en général. Par exemple pour $e \in E$ de norme égale à 1, l'application $u : x \mapsto \|x\| e$ conserve la norme et n'est pas linéaire ($u(-x) = u(x) \neq -u(x)$ pour $x \neq 0$).*

Exercice 13.6 *Soit u une application de E dans E qui conserve les distances, c'est-à-dire que :*

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$$

Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ et une isométrie v de E tels que $u(x) = a + v(x)$ pour tout $x \in E$.

Solution 13.6 *Soient $a = u(0)$ et $v : E \to E$ définie par $v(x) = u(x) - a$, pour tout $x \in E$. Pour tous x, y dans E, on a :*

$$\|v(x)\| = \|u(x) - u(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$$

$$\|v(x) - v(y)\|^2 = \|u(x) - u(y)\|^2 = \|x - y\|^2$$

soit :

$$\|v(x)\|^2 - 2 \langle v(x) \mid v(y) \rangle + \|v(y)\|^2 = \|x\|^2 - 2 \langle x \mid y \rangle + \|y\|^2$$

et en conséquence $\langle v(x) \mid v(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$. L'application v est donc orthogonale.

Théorème 13.12 *Si E est un espace euclidien (donc de dimension finie), alors une isométrie est un automorphisme de E et $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Pour $x \in \ker(u)$, on a $0 = \|u(x)\| = \|x\|$ et $x = 0$. Donc $\ker(u) = \{0\}$ et u est injective, ce qui équivaut à dire que u est un automorphisme de E dans le cas où E est de dimension finie.

On a $Id \in \mathcal{O}(E)$ et pour u, v dans $\mathcal{O}(E)$, x dans E, on a :

$$\|u \circ v(x)\| = \|u(v(x))\| = \|v(x)\| = \|x\|$$

$$\left\|u^{-1}(x)\right\| = \left\|u\left(u^{-1}(x)\right)\right\| = \|x\|$$

donc $u \circ v$ et u^{-1} sont dans $\mathcal{O}(E)$. L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ est donc bien un sous-groupe de $GL(E)$.
■

On dit, dans le cas où E est de dimension finie, que $\mathcal{O}(E)$ est le groupe orthogonal de E.

Remarque 13.6 *Si E est de dimension finie, une isométrie est toujours injective (son noyau est réduit à $\{0\}$), mais n'est pas nécessairement surjective.*
Donc, dans le cas de la dimension infinie, $\mathcal{O}(E)$ n'est pas un groupe.
Considérons par exemple un espace préhilbertien E de dimension infinie dénombrable (par exemple $E = \mathbb{R}[x]$ muni du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(x) Q(x) \, dx$.). On se donne une base orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (le procédé de Gram-Schmidt nous permet de construire une telle base) et on définit l'endomorphisme u par $u(e_n) = e_{n+1}$ pour tout entier $n \geq 0$. Pour $x = \sum_{k=0}^{n_x} x_k e_k$ dans E, on a $u(x) = \sum_{k=0}^{n_x} x_k e_{k+1}$ et $\|u(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n_x} x_k^2 = \|x\|^2$ et u est une isométrie. Comme $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}^*\} \neq E$, *cette application n'est pas surjective.*

Remarque 13.7 *On peut donner, dans un espace préhilbertien, la définition suivante d'une isométrie : une isométrie est un automorphisme qui conserve la norme et dans ce cas $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.*

De l'injectivité et de la conservation de l'orthogonalité par une isométrie, on déduit le résultat suivant.

Théorème 13.13 *Soit u une isométrie de l'espace préhilbertien E. Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie stable par u, alors son orthogonal $F^{\perp}$ est aussi stable par u.*

Démonstration. Comme u est injective, on a $\dim(u(F)) = \dim(F)$ et avec $u(F) \subset D$, on déduit que $u(F) = F$.

Pour $x \in F^{\perp}$ et $y \in F$, on a :

$$\langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle = 0$$

donc $u(x) \in (u(F))^{\perp} = F^{\perp}$. ■

Théorème 13.14 *Soient E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E et u une application linéaire de E dans E. L'application u est une isométrie si, et seulement si, elle transforme $\mathcal{B}$ en une base orthonormée de E.*

Démonstration. Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$. Avec $\langle u(e_i) \mid u(e_j) \rangle = \langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$, on déduit que $u(\mathcal{B}) = (u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est orthonormé. Il en résulte que $u(\mathcal{B})$ est libre et c'est une base puisque formé de $n = \dim(E)$ vecteurs.

Réciproquement supposons que $u \in \mathcal{L}(E)$ transforme $\mathcal{B}$ en une base orthonormée de E. On a alors pour tout $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans E :

$$\|u(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$$

et $u \in \mathcal{O}(E)$. ■

Ce théorème va nous donner une caractérisation des matrices d'isométries dans une base orthonormée de E.

En munissant $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et en notant pour toute matrice réelle $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ par $C_j = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ la colonne numéro $j \in \{1, \cdots, n\}$ de A, on a :

$$^tAA = ((\alpha_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \left(\text{ligne } i \text{ de } {}^tA\right)(\text{colonne } j \text{ de } A) = {}^tC_iC_j \\ &= (a_{1i}, \cdots, a_{ni}) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \langle C_i \mid C_j \rangle . \end{aligned}$$

De plus si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E, en notant pour tout $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans E, $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur colonne formé des composantes de X dans $\mathcal{B}$, on a pour tous x, y dans E :

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \langle X \mid Y \rangle$$

le produit scalaire de gauche étant celui de E et celui de droite celui de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 13.15 *Soient E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E et u une application linéaire de E dans E de matrice A dans $\mathcal{B}$. L'application u est une isométrie si, et seulement si, ${}^tAA = A\,{}^tA = I_n$.*

Démonstration. Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$. En notant ${}^tAA = ((\alpha_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ et en utilisant les notations qui précèdent, on a, pour $1 \leq i, j \leq n$:

$$\alpha_{ij} = \langle C_i \mid C_j \rangle = \langle u(e_i) \mid u(e_j) \rangle = \langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij}$$

ce qui signifie que ${}^tAA = I_n$. La matrice A est donc inversible d'inverse ${}^tA$ et en conséquence, on a aussi $A\,{}^tA = I_n$.

Réciproquement, si ${}^tAA = A\,{}^tA = I_n$, on a alors pour $1 \leq i, j \leq n$:

$$\langle u(e_i) \mid u(e_j) \rangle = \langle C_i \mid C_j \rangle = \delta_{ij}$$

ce qui signifie que $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{O}(E)$. ■

Définition 13.8 *On appelle matrice orthogonale, une matrice réelle A telle que ${}^tAA = A\,{}^tA = I_n$.*

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Il revient au même de dire qu'une matrice orthogonale est une matrice inversible A d'inverse ${}^tA$.

Le théorème précédent nous dit qu'une application linéaire u de E dans E est une isométrie si, et seulement si, sa matrice dans une base orthonormée quelconque de E est orthogonale.

Théorème 13.16 *Pour toute matrice A dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A) = \pm 1$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. De $\det(A) = \det({}^tA)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^tAA = A\,{}^tA = I_n$ pour $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on déduit que $(\det(A))^2 = 1$ et $\det(A) = \pm 1$.

Il en résulte que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Comme $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et pour A, B dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left({}^tA\right)^{-1} = {}^tA^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = {}^tB\,{}^tA = {}^t(AB)$$

on en déduit que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. ■

Corollaire 13.2 *Si u est une isométrie d'un espace euclidien E, on a alors* $\det(u) = \pm 1$.

Démonstration. On a $\det(u) = \det(A)$ où A est la matrice de u dans une base orthonormée et $u \in \mathcal{O}(E)$ si, et seulement si, $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, ce qui entraîne $\det(A) = \pm 1$. ■

On note :

$$\mathcal{O}^+(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = 1\}$$

$$\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

$$\mathcal{O}^-(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = -1\}$$

$$\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = -1\}$$

et on dit que les éléments de $\mathcal{O}^+(E)$ [resp. $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$] sont des automorphismes orthogonaux positifs ou des isométries directes ou des rotations vectorielles [resp. des matrices orthogonales positives] et les éléments de $\mathcal{O}^-(E)$ [resp. $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$] sont des automorphismes orthogonaux négatifs [resp. les matrices orthogonales négative].

Théorème 13.17 *$\mathcal{O}^+(E)$ [resp. $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$] est un sous-groupe distingué de $\mathcal{O}(E)$ [resp. de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$] d'indice 2.*

Démonstration. Voir le paragraphe 20.8. ■

Exercice 13.7 *Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, on désigne par u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que $u \in \mathcal{O}^+(E)$.*
2. *Soit H un hyperplan de E d'équation $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$, où les α_i ne sont pas tous nuls. Déterminer l'image de H par u.*

Solution 13.7

1. *On vérifie que $A \in \mathcal{O}_4^+(\mathbb{R})$, ce qui équivaut à $u \in \mathcal{O}^+(E)$.*
2. *On a $H = \{a\}^\perp$, où a est le vecteurs de coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ dans la base canonique et pour tout $x \in H$, on a $\langle u(x) \mid u(a)\rangle = \langle x \mid a\rangle = 0$, ce qui signifie que $u(x) \in \{u(a)\}^\perp$. On a donc $H \subset \{u(a)\}^\perp$, avec $u(a) \neq 0$ puisque $a \neq 0$ et u est un isomorphisme, donc $\{u(a)\}^\perp$ est un hyperplan et $H = \{u(a)\}^\perp$ puisque ces deux espaces sont de dimension 3. En définitive, $u(H)$ est l'hyperplan d'équation $\langle u(a) \mid x\rangle = 0$.*

On rappelle que si $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice carrée d'ordre n, la matrice des cofacteurs de A est la matrice $C = ((c_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$, où $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ en notant A_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ déduite de A en supprimant la ligne numéro i et la colonne numéro j. On a alors :

$$A \cdot {}^tC = {}^tC \cdot A = \det(A)\, I_n$$

et dans le cas où A est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\, {}^tC.$

Théorème 13.18 *Si $A \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ [resp. $A \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$], on a alors $A = C$ [resp. $A = -C$], où C est la matrice des cofacteurs de A.*

Démonstration. Résulte de :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^tC = \pm\, {}^tC = {}^tA$$

pour $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. ■

13.11 Orientation d'un espace euclidien

E est un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

La notion d'isométrie nous permet de retrouver le théorème 12.6.

Théorème 13.19 *Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux bases orthonormées de E, alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale.*

Démonstration. L'application linéaire u définie par $u(e_j) = e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$ pour tout j compris entre 1 et n est une isométrie puisqu'elle transforme une base orthonormée en base orthonormée et en conséquence sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, qui n'est autre que la matrice $P = ((p_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$, est orthogonale. ∎

Avec les notations du théorème, on a $\det(P) = \pm 1$.

On définit une relation sur l'ensemble des bases orthonormées de E en disant qu'une base orthonormée $\mathcal{B}$ est en relation avec une base orthonormée $\mathcal{B}'$ si, et seulement si, la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est dans $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$. On notera $\sim$ cette relation.

Théorème 13.20 *La relation $\sim$ ainsi définie est une relation d'équivalence et il y a exactement deux classes d'équivalence pour cette relation.*

Démonstration. Cette relation est réflexive puisque $I_n \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B} = I_d(\mathcal{B})$.

Cette relation est symétrique puisque $P \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ entraîne $P^{-1} \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Cette relation est transitive puisque le produit de deux matrices de $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ ($\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ est un groupe).

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E fixée.

Pour toute autre base orthonormée $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1\leq i\leq n}$, en désignant par $P = ((p_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a soit $P \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}$, soit $P \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ et en désignant par $\mathcal{B}^-$ la base orthonormée définie par :

$$\mathcal{B}^- = (e_1, \cdots, e_{n-1}, -e_n)$$

la matrice de passage P^- de $\mathcal{B}^-$ à $\mathcal{B}'$ est :

$$P^- = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ p_{n-1,1} & & \ddots & p_{n-1,n} \\ -p_{nn} & \cdots & \cdots & -p_{nn} \end{pmatrix}$$

et $\det(P^-) = -\det(P) = 1$, donc $P^{-1} \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}^-$.

Donc $\mathcal{B}'$ est soit dans la classe de $\mathcal{B}$, soit dans celle de $\mathcal{B}^-$ et ces deux classes sont distinctes puisque la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}^-$ est $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$. On a donc deux classes distinctes. ∎

Définition 13.9 *Orienter l'espace euclidien E revient à choisir une base orthonormée E.*

Le théorème précédent nous dit qu'il n'y a que deux orientations possibles pour E.

Définition 13.10 *Si l'espace E est orienté par le choix d'une base orthonormée $\mathcal{B}$, on dit qu'une base orthonormée $\mathcal{B}'$ est directe (ou qu'elle définit la même orientation que $\mathcal{B}$) si $\mathcal{B}'$ est dans la classe d'équivalence de $\mathcal{B}$ et on dit que cette base $\mathcal{B}'$ est indirecte dans le cas contraire.*

L'espace $\mathbb{R}^n$, pour $n \geq 2$, est en général orienté par le choix de la base canonique.

Exercice 13.8 *On suppose que E est orienté par le choix d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ et on se donne une permutation σ de $\{1, 2, \cdots, n\}$. À quelle condition portant sur σ la base $\mathcal{B}_\sigma = \left(e_{\sigma(i)}\right)_{1\leq i\leq n}$ est-elle directe ?*

Solution 13.8 *En notant $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ, on a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_\sigma) = \varepsilon(\sigma)\det(I_n) = \varepsilon(\sigma)$ et $\mathcal{B}_\sigma$ est directe si, et seulement si, σ est une permutation paire.*

13.12 Produit vectoriel dans un espace euclidien

On désigne par E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$ orienté par le choix d'une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On rappelle que si $\mathcal{B}$ est une autre base de E, alors pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de vecteurs de E, on a :

$$\det_{\mathcal{B}_0}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

(théorème 10.13).

Il en résulte que la quantité $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est indépendante du choix d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E. On la note $\det(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ (ce qui suppose le choix d'une orientation de E) et on dit que c'est le produit mixte des vecteurs ordonnés $x_1, x_2, \cdots, x_n$. On le note parfois $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$.

En remarquant que, pour tout $(n-1)$-uplet $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ de vecteurs de E, l'application $x \mapsto \det(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x)$ est une forme linéaire, on déduit du théorème 13.3 qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \det(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x) = \langle a \mid x \rangle \tag{13.5}$$

ce vecteur a étant fonction des vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$.

On peut donc donner la définition suivante.

Définition 13.11 *Le produit vectoriel (ou produit extérieur) des $n-1$ vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ de E est le vecteur a défini par* (13.5). *On le note $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1}$.*

Dans la base orthonormée $\mathcal{B}_0$, en notant $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} e_i$ pour tout i compris entre 1 et n, les réels :

$$\det(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, e_i) = \langle x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mid e_i \rangle$$

sont les composantes du vecteur $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1}$ dans la base $\mathcal{B}_0$. On a donc :

$$x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \delta_i e_i \tag{13.6}$$

où δ_i est le déterminant de la matrice d'ordre $n-1$ déduite de la matrice $(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1})$ en supprimant de cette matrice la ligne numéro i (X_i étant le vecteur de $\mathbb{R}^n$ formé des composantes de x_i dans la base $\mathcal{B}$).

Remarque 13.8 $(-1)^{i+n} \delta_i$ *est aussi le cofacteur $C_{i,n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ d'indice (i, n) de la matrice $(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}, 0)$ (i. e. celui en ligne i et colonne n)*

Par exemple dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, le produit vectoriel de $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ est le vecteur $z = (z_1, z_2, z_3)$ défini par :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 y_3 - x_3 y_2 \\
z_2 &= -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_3 y_1 - x_1 y_3 \\
z_3 &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1
\end{aligned}$$

Exercice 13.9 *On suppose que E est de dimension 3. Montrer que si (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée directe, on a alors :*

$$f_1 \wedge f_2 = f_3,\ f_2 \wedge f_3 = f_1,\ f_3 \wedge f_1 = f_2$$

Solution 13.9 *Le vecteur $f_1 \wedge f_2$ est orthogonal au plan engendré par f_1, f_2, donc colinéaire à f_3 et il existe un réel λ tel que $f_1 \wedge f_2 = \lambda f_3$. Ce réel λ est déterminé par :*

$$\lambda = \langle f_1 \wedge f_2 \mid f_3 \rangle = \det (f_1, f_2, f_3) = 1$$

De même $f_2 \wedge f_3 = \lambda f_1$ avec :

$$\begin{aligned} \lambda &= \langle f_2 \wedge f_3 \mid f_1 \rangle = \det (f_2, f_3, f_1) \\ &= -\det (f_2, f_1, f_3) = \det (f_1, f_2, f_3) = 1 \end{aligned}$$

et $f_3 \wedge f_1 = f_2$ se montre de manière analogue

En utilisant les propriétés du déterminant, on obtient le résultat suivant.

Théorème 13.21
- *Le produit vectoriel est une application $(n-1)$-linéaire alternée de E^{n-1} dans E ;*
- *le vecteur $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1}$ est orthogonal à tous les vecteurs x_i $(1 \leq i \leq n-1)$;*
- *$x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ est liée ;*
- *si la famille $(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ est libre, alors la famille $(x_1, ..., x_{n-1}, x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1})$ est une base de E.*

Démonstration.
- Chacune des applications :

$$(x_1, ..., x_{n-1}) \mapsto (-1)^{i+n} \delta_i = C_{i,n} (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$$

  étant $(n-1)$-linéaire alternée, il en est de même de l'application $(x_1, ..., x_{n-1}) \mapsto x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}$.
- Avec :

$$\langle x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mid x_i \rangle = \det (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_i) = 0$$

  on déduit que $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}$ est orthogonal à x_i.
- Si la famille $(x_1, ..., x_{n-1})$ est liée, il en est de même de la famille $(x_1, ..., x_{n-1}, x)$ pour tout $x \in E$ et :

$$\langle x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mid x \rangle = \det (x_1, \cdots, x_{n-1}, x) = 0$$

  et donc $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \in E^{\perp} = \{0\}$.
  Si la famille $(x_1, ..., x_{n-1})$ est libre, elle se prolonge en une base $(x_1, \cdots, x_{n-1}, x)$ et :

$$\langle x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mid x \rangle = \det (x_1, \cdots, x_{n-1}, x) \neq 0$$

  ce qui entraîne $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \neq 0$.
- Si $(x_1, ..., x_{n-1})$ est libre, on a $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \neq 0$ et :

$$\det (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}) = \|x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}\|^2 \neq 0$$

  ce qui revient à dire que $(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1})$ est une base de E.

■

Remarque 13.9 *Avec* $\det(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}) = \|x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}\|^2 > 0$ *dans le cas où* $(x_1, ..., x_{n-1})$ *est libre, on déduit que la base* $(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1})$ *est directe.*

Remarque 13.10 *Pour* $n = 3$, *le caractère* 2-*linéaire alterné du produit vectoriel se traduit par :*

$$\begin{cases} (x+y) \wedge = x \wedge z + y \wedge z \\ x \wedge (y+z) = x \wedge y + x \wedge z \\ (\lambda x) \wedge y = x \wedge (\lambda y) = \lambda (x \wedge y) \\ x \wedge y = -(y \wedge x) \end{cases}$$

pour tous vecteurs x, y, z *et tout réel* λ.

Exercice 13.10 *Montrer que si* $(x_1, ..., x_{n-1})$ *est une famille orthonormée dans* E, *alors* $(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_1 \wedge$ *est une base orthonormée directe de* E.

Solution 13.10 *On sait déjà que* $(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1})$ *est une base directe de* E. *En prolongeant* $(x_1, ..., x_{n-1})$ *en une base orthonormée directe de* E, $(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$, *on a* $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} = \lambda x_n$ *avec :*

$$\lambda = \langle x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mid x_n \rangle = \det(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) = 1$$

et $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} = x_n$ *est de norme* 1.

Théorème 13.22 *Si* H *est un hyperplan de* E *et* $(x_1, ..., x_{n-1})$ *une base de* H, *alors la droite* $D = H^\perp$ *est dirigée par le vecteur* $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}$ *et pour tout vecteur* x *de* E, *la projection orthogonale de* x *sur* H *est :*

$$p_H(x) = x - \frac{\langle x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mid x \rangle}{\|x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}\|^2} (x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1})$$

et la distance de x *à* H *est donnée par :*

$$d(x, H) = \frac{|\langle x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mid x \rangle|}{\|x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}\|}$$

Démonstration. Le vecteur $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}$ étant orthogonal à tous les x_i qui engendrent H, est nécessairement dans $H^\perp$. Comme $H^\perp$ est une droite et $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}$ non nul, la droite $D = H^\perp$ est dirigée par $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}$.

On a $d(x, H) = \|x - y\|$ où $y = p_H(x)$ est la projection orthogonale de x sur H. Comme $x - y \in H^\perp$, il existe un réel λ tel que $x - y = \lambda (x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1})$ et avec :

$$\lambda \|x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}\|^2 = \langle x - y \mid x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \rangle = \langle x \mid x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \rangle$$

(puisque $y \in H$ et $x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \in H^\perp$), on déduit que :

$$\lambda = \frac{\langle x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mid x \rangle}{\|x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}\|^2}$$

$$y = x - \frac{\langle x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mid x \rangle}{\|x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}\|^2} (x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1})$$

et :

$$d(x, H) = \|x - y\| = \frac{|\langle x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mid x \rangle|}{\|x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}\|}$$

■

Remarque 13.11 *Le théorème précédent nous dit aussi qu'une équation de l'hyperplan H de base $(x_1, ..., x_{n-1})$ est donnée par :*

$$x \in H \Leftrightarrow \langle x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mid x \rangle = 0.$$

Remarque 13.12 *En prenant pour $(x_1, ..., x_{n-1})$ une base orthonormée de H (c'est toujours possible avec le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt), on a :*

$$p_H(x) = x - \langle x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mid x \rangle (x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1})$$

et :

$$d(x, H) = |\langle x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \mid x \rangle|$$

Exercice 13.11 *Donner une équation du plan vectoriel P de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 3)$. Calculer la distance de $x = (1 - 1, 1)$ à P.*

Solution 13.11 *Ce plan est orthogonal au vecteur :*

$$u \wedge v = (1, -2, 1)$$

et une équation est donc $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.
La distance de $x = (1 - 1, 1)$ à P est donnée par :

$$d(x, P) = \frac{|\langle u \wedge v \mid x \rangle|}{\|x_1 \wedge v\|} = \frac{4}{\sqrt{6}}.$$

Exercice 13.12 *Montrer que si u et v sont deux applications dérivables d'un intervalle réel I dans $\mathbb{R}^n$, alors l'application $u \wedge v$ est dérivable avec :*

$$\forall t \in I, \ (u \wedge v)'(t) = u'(t) \wedge v(t) + u(t) \wedge v'(t)$$

Solution 13.12 *Laissée au lecteur.*

13.13 Isométries en dimension 2

Pour ce paragraphe, E est un espace euclidien de dimension 2 et il est orienté par le choix d'une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$.

13.13.1 Isométries directes ou rotations. Angles orientés de vecteurs

Théorème 13.23 *Un endomorphisme u de E est une isométrie positive [resp. négative] si, et seulement si, il existe un réel θ tel que la matrice de u dans la base orthonormée $\mathcal{B}_0$ soit de la forme :*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{resp. } S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Démonstration. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ la matrice de u dans $\mathcal{B}_0$ et $C = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ sa comatrice.

Si $u \in \mathcal{O}^+(E)$, on a alors $A = C$, soit $a = d$ et $b = -c$, de sorte que $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ avec $\det(A) = a^2 + c^2 = 1$ et il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$ (on peut le voir simplement en écrivant que, dans $\mathbb{C}$ on a, $|a + ic| = \sqrt{a^2 + c^2} = 1$, ce qui entraîne $a + ic = e^{i\theta}$).

Si $u \in \mathcal{O}^-(E)$, on a alors $A = -C$, soit $d = -a$ et $b = c$, de sorte que $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $\det(A) = a^2 + c^2 = 1$ et il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$. ■

Remarque 13.13 *Le réel θ qui intervient dans le théorème précédent est unique si on le prend dans $[-\pi, \pi[$, c'est la détermination principale de l'argument de $a + ic$.*

Corollaire 13.3 *Les groupes $\mathcal{O}^+(E)$ et $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ sont commutatifs.*

Démonstration. Pour θ, θ' dans $\mathbb{R}$, on vérifie facilement que $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} R_\theta$. ■

Corollaire 13.4 *Si $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont deux bases orthonormées de E définissant la même orientation et $u \in \mathcal{O}^+(E)$, alors les matrices de u dans $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont égales.*

Démonstration. La matrice de passage P de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est dans $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ puisque les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont orthonormées et définissent la même orientation. Comme le groupe $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ est commutatif, en désignant respectivement par A et A' les matrices de u dans $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$, on a $A' = P^{-1}AP = P^{-1}PA = A$. ■

Théorème 13.24 *Soit $u \in \mathcal{O}^+(E)$ de matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}_0$.*
Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe [resp. indirecte], alors la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est R_θ [resp. ${}^tR_\theta = R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$].

Démonstration. Soit R la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Si la base $\mathcal{B}$ est directe, on a alors $R = R_\theta$.

Si la base $\mathcal{B}$ est indirecte, elle définit alors la même orientation que $\mathcal{B}_0^- = (e_1, -e_2)$, la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_0^-$ est $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice de u dans $\mathcal{B}_0^-$ est :

$$\begin{aligned} R = Q^{-1}R_\theta Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_{-\theta} \end{aligned}$$

cette matrice étant aussi celle de u dans $\mathcal{B}$. ■

En résumé, une isométrie $u \in \mathcal{O}^+(E)$ de matrice R_θ dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$, est une rotation et θ est une mesure de l'angle de cette rotation. Si $\theta \in [-\pi, \pi[$, on dit que c'est la mesure principale de la rotation. Dans une base indirecte, cette mesure principale est $-\theta$.

On dit aussi, de manière plus précise, que $\overline{\theta} = \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \in \dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ (groupe quotient) est l'angle de la rotation dans l'espace orienté E.

Par abus de langage, on dit parfois que θ est l'angle de la rotation, étant entendu que le réel θ est définie modulo 2π.

Exemple 13.5 *L'identité est la rotation d'angle $\overline{0}$, $-Id$ est la rotation d'angle $\overline{\pi}$.*

Exemple 13.6 *Si ρ est la est la rotation d'angle $\overline{\dfrac{\pi}{2}}$ et (f_1, f_2) une base orthonormée directe, on a alors $\rho(f_1) = f_2$ et $\rho(f_2) = -f_1$.*

De l'étude du groupe commutatif $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$, on déduit que l'inverse de la rotation d'angle $\overline{\theta}$ est la rotation d'angle $\overline{-\theta}$ et la composée des rotations ρ d'angle $\overline{\theta}$ et ρ' d'angle $\overline{\theta'}$ est la rotation $\rho \circ \rho' = \rho' \circ \rho$ d'angle $\overline{\theta + \theta'}$.

Remarque 13.14 *Les seules rotations involutives sont Id et $-Id$.*

Cette notion d'angle de rotation permet de définir la notion d'angle orienté de deux vecteurs non nuls dans l'espace orienté E.

Théorème 13.25 *Si x, y sont deux vecteurs non nuls dans E, il existe alors une unique rotation $\rho \in \mathcal{O}^+(E)$ telle que $\dfrac{1}{\|y\|} y = \rho\left(\dfrac{1}{\|x\|} x\right)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour des vecteurs x, y unitaires (i. e. de norme égale à 1).

En choisissant une base orthonormée directe (f_1, f_2) où $f_1 = x$, il existe deux réels a, b tels que $y = af_1 + bf_2$ et avec $\|y\|^2 = a^2 + b^2 = 1$, on déduit qu'il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$. On a alors, en désignant par ρ la rotation d'angle $\overline{\theta} \in \dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$:

$$\rho(x) = \rho(f_1) = \cos(\theta) f_1 + \sin(\theta) f_2 = y$$

Si ρ' est une autre rotation d'angle $\overline{\theta'} \in \dfrac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ telle que $\rho'(x) = y$, on a alors $\rho(f_1) = \rho'(f_1)$, soit :

$$\cos(\theta) f_1 + \sin(\theta) f_2 = \cos(\theta') f_1 + \sin(\theta') f_2$$

donc $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$, ce qui équivaut à $\overline{\theta'} = \overline{\theta}$ et entraîne $\rho' = \rho$. ■

Si, avec les notations du théorème qui précède, ρ est la rotation d'angle $\overline{\theta}$, on dit alors que $\overline{\theta}$ est l'angle orienté des vecteurs x et y et on note $\widehat{(x, y)} = \overline{\theta}$. Un réel θ dans la classe d'équivalence $\overline{\theta}$ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{(x, y)}$, le représentant $\theta \in [-\pi, \pi[$ est la mesure principale de $\widehat{(x, y)}$.

Exercice 13.13 *Quels sont les points fixes d'une rotation du plan.*

Solution 13.13 *Tout revient à déterminer le noyau de $\rho - Id$.*
Si $\rho = Id$ (rotation d'angle 0), alors tous les points de E sont fixes. Sinon, 0 est l'unique point fixe puisque dans une base orthonormée de E la matrice de $\rho - Id$ est :

$$R_\theta - I_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) - 1 & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - 1 \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned} \det(\rho - Id) &= (\cos(\theta) - 1)^2 + \sin^2(\theta) \\ &= 2(1 - \cos(\theta)) \neq 0 \end{aligned}$$

pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui signifie que $\rho - Id$ est injective et $\ker(\rho - Id) = \{0\}$.

Exercice 13.14 *On se place dans un plan euclidien E et on se donne deux droites distinctes D et D' dans E.*

1. *Déterminer toutes les rotations ρ telles que $\rho(D) = D$.*
2. *Montrer qu'il existe une rotation ρ telle que $\rho(D) = D'$ et $\rho(D') = D$ si, et seulement si, les droites D et D' sont orthogonales. Préciser alors le nombre de ces rotations.*

Solution 13.14

1. *On a déjà $\rho = Id$ qui laisse D stable. Si $\rho \neq Id$ est une rotation qui laisse stable D, pour tout vecteur directeur unitaire f_1 de D, on a alors $\rho(f_1) = -f_1$ et $\rho = -Id$ (il y a une unique rotation qui transforme un vecteur unitaire en un autre).*
2. *Soit f_1 un vecteur unitaire qui dirige la droite D. Si $D' = \rho(D)$, le vecteur unitaire $\rho(f_1)$ dirige D' et si $\rho(D') = D$, on a alors $\rho^2(f_1) = \pm f_1$. Comme $D \neq D'$, les vecteurs f_1 et $\rho(f_1)$ sont linéairement indépendants et la matrice de ρ dans la base $(f_1, \rho(f_1))$ est $D = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et comme $\det(D) = 1$, on a nécessairement $\rho^2(f_1) = -f_1$ et :*

$$\langle f_1 \mid \rho(f_1)\rangle = -\left\langle \rho^2(f_1) \mid \rho(f_1)\right\rangle = -\langle \rho(f_1) \mid f_1\rangle$$

entraîne $\langle f_1 \mid \rho(f_1)\rangle = 0$, ce qui signifie que les droites D et D' sont orthogonales.
Réciproquement, si les droites D et D' sont orthogonales, alors les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ transforment D en D' et ce sont les seules.

13.13.2 Isométries indirectes ou réflexions

On sait déjà que les réflexions du plan euclidien (i. e. les symétries orthogonales par rapport à une droite) sont des isométries indirectes (théorème 13.10).

Nous allons vérifier que ce sont les seules.

Si s_D est une réflexion par rapport à la droite D, on a alors $s_D(x) = x$ pour tout $x \in D$ et $s_D(x) = -x$ pour tout $x \in D^\perp$. En désignant par f_1 un vecteur non nul de D et f_2 un vecteur non nul de $D^\perp$, la famille (f_1, f_2) est une base orthogonale de s_D et la matrice de s_D dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. De plus la droite D est l'ensemble des points fixes de s_D, soit $D = \ker(s_D - Id)$.

Si σ est une isométrie indirecte, on a vu que sa matrice dans la base $\mathcal{B}_0$ est de la forme :

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où θ est un réel uniquement déterminé modulo 2π.

L'ensemble des points fixes de σ est formé des vecteurs $x = x_1e_1 + x_2e_2$ tels que $\sigma(x) = x$, ce qui revient à dire que les réels x_1, x_2 sont solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} (\cos(\theta) - 1)\, x_1 + \sin(\theta)\, x_2 = 0 \\ \sin(\theta)\, x_1 - (\cos(\theta) + 1)\, x_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_2\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(- -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) x_1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) x_2\right) = 0 \end{cases}$$

et est équivalent à :

$$-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x_1+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)x_2=0 \tag{13.7}$$

puisque $\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\neq(0,0)$.

L'ensemble des points fixes de σ est donc la droite D d'équation (13.7). Cette droite est dirigée par le vecteur unitaire $f_1=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e_1+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_2$, la droite $D^\perp$ est dirigée par le vecteur unitaire $f_2=-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_1+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e_2$ et on a $u(f_1)=f_1$, $u(f_2)=\lambda f_2$ puisque $D^\perp$ est aussi stable par u (théorème 13.13). La matrice de u dans la base (f_1,f_2) est donc $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$ et avec $\det(u)=-1$, on déduit que $\lambda=-1$, ce qui signifie que u est la réflexion par rapport à D.

On peut remarquer que la droite D est la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$ et que pour $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$, c'est la droite d'équation $x_2=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)x_1$.

On a donc montré le résultat suivant.

Théorème 13.26 *Les isométries indirectes d'un plan euclidien sont les réflexions.*

Exercice 13.15 *On se place dans un plan euclidien E.*

1. *Soient ρ une rotation et σ,σ' deux réflexions. Préciser la nature géométrique de $\rho\circ\sigma'$, $\sigma'\circ\rho$, $\sigma\circ\sigma'$ et $\sigma'\circ\sigma$, en précisant les caractéristiques de ces applications.*
2. *Montrer que pour toute rotation ρ et toute réflexion σ, on a $\sigma\circ\rho\circ\sigma=\rho^{-1}$.*

Solution 13.15

1. *Toutes ces applications sont des isométries et avec* $\det(\rho\circ\sigma')=\det(\sigma'\circ\rho)=-1$, $\det(\sigma\circ\sigma')=\det(\sigma'\circ\sigma)=1$, *on déduit que la composée d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion et que la composée de deux réflexions est une rotation.*
   En désignant respectivement par R_θ, S_θ et $S_{\theta'}$ les matrices de ρ, σ et σ' dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}_0$, on vérifie par un calcul direct que :
   $$R_\theta S_{\theta'}=S_{\theta+\theta'},\ S_{\theta'}R_\theta=S_{\theta-\theta'},\ S_\theta S_{\theta'}=R_{\theta-\theta'},\ S_{\theta'}S_\theta=R_{\theta'-\theta}=\left(R_{\theta-\theta'}\right)^{-1}$$
   ce qui signifie que :
   - $\rho\circ\sigma'$ *est la réflexion par rapport à la droite d'angle polaire* $\frac{\theta+\theta'}{2}$;
   - $\sigma'\circ\rho$ *est la réflexion par rapport à la droite d'angle polaire* $\frac{\theta-\theta'}{2}$;
   - $\sigma\circ\sigma'$ *est la rotation d'angle $\theta-\theta'$ (modulo 2π) ;*
   - $\sigma'\circ\sigma$ *est la rotation inverse d'angle $\theta-\theta'$, ce qui est normal puisque* $\left(\sigma\circ\sigma'\right)^{-1}=\left(\sigma'\right)^{-1}\circ\sigma^{-1}=\sigma'\circ\sigma$ *(une réflexion est involutive).*
2. *On peut utiliser les expressions matricielles des rotations et réflexions dans une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ et vérifier par un calcul direct que pour tous réels θ et θ', on a :*
   $$S_{\theta'}R_\theta S_{\theta'}=S_{\theta-\theta'}S_{\theta'}=R_{-\theta}$$
   On peut aussi dire que $\rho\circ\sigma$ qui est une réflexion est involutive, donc $\rho\circ\sigma=(\rho\circ\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\circ\rho^{-}$ *et composant à gauche par σ, on obtient* $\sigma\circ\rho\circ\sigma=\rho^{-1}$.

13.14 Isométries en dimension 3

Pour ce paragraphe, E est un espace euclidien de dimension 3 et il est orienté par le choix d'une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$.

Nous aurons besoin du résultat suivant sur les isométries de l'espace euclidien E.

Théorème 13.27 *Pour toute isométrie $u \in \mathcal{O}(E)$, le polynôme P_u défini par :*

$$P_u(\lambda) = \det(u - \lambda Id)$$

a au moins une racine réelle et cette racine est dans $\{-1, 1\}$. Il existe donc un vecteur non nul x tel que $u(x) = \pm x$.

Démonstration. En développant le déterminant, on voit que :

$$P_u(\lambda) = -\lambda^3 + \mathrm{Tr}(u)\lambda^2 + \alpha_2\lambda^2 + \det(u)$$

où $\mathrm{Tr}(u)$ est la trace de u et α_2 un réel. Ce polynôme est donc de degré 3 à coefficients réels et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il a au moins une racine réelle (de manière plus générale, un polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle).

Dire que $\lambda \in \mathbb{R}$ est racine de P_u équivaut à dire que $u - \lambda Id$ est non injective, ce qui revient à dire que $\ker(u - \lambda Id) \neq \{0\}$ et il existe un vecteur non nul x tel que $u(x) = \lambda x$. Puis comme u est une isométrie, on a $\|u(x)\| = \|x\|$ et nécessairement $|\lambda| = 1$, ce qui signifie que ± 1. ■

Remarque 13.15 *Nous verrons plus loin que ce polynôme P_u est appelé le polynôme caractéristique de u et ses racines sont les valeurs propres de u.*

Exemple 13.7 *Pour $u = Id$, on a $P_u(\lambda) = (1-\lambda)^3$ et $\lambda = 1$ est l'unique valeur propre.*

Exemple 13.8 *Pour $u = -Id$, on a $P_u(\lambda) = -(1+\lambda)^3$ et $\lambda = -1$ est l'unique valeur propre.*

Exemple 13.9 *Si u est une réflexion, alors sa matrice dans une base convenablement choisie est :*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $P_u(\lambda) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$ et les valeurs propres de u sont -1 et 1.

Exemple 13.10 *Si u est un retournement, alors sa matrice dans une base convenablement choisie est :*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $P_u(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$ et les valeurs propres de u sont -1 et 1.

13.14.1 Isométries directes

Théorème 13.28 *Soit $u \in \mathcal{O}^+(E) \setminus \{Id\}$.*
L'ensemble des points fixes de u est une droite D.
Si (f_1, f_2) est une base orthonormé du plan $D^\perp$, alors $(f_1, f_2, f_1 \wedge f_2)$ est une base orthonormée directe de E et la matrice de u dans cette base est :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Soit $D = \ker(u - Id)$ l'ensemble des points fixes de u.

Di D est de dimension 3, il est égal à E et $u = Id$, ce qui n'est pas le cas.

Si D est de dimension 2, alors $D^\perp$ est de dimension 1 et stable par u, donc en désignant par (g_1, g_2) une base orthonormée de D, g_3 un vecteur unitaire de $D^\perp$, on a $u(g_3) = \pm g_3$ et la matrice de u dans la base (g_1, g_2, g_3) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

avec $\det(A) = 1$, ce qui impose $u(g_3) = g_3$ et $u = Id$, ce qui n'est pas le cas.

Si D est réduit à $\{0\}$, il n'existe pas de vecteur non nul tel que $u(x) = x$ et le théorème 13.27 nous dit qu'il existe alors un vecteur non nul x tel que $u(x) = -x$. Ce vecteur dirige une droite Δ qui est stable par u et le plan $\Delta^\perp$ est également stable par u. La restriction v de u au plan $\Delta^\perp$ est aussi une isométrie et en désignant par g_1 un vecteur unitaire directeur de Δ, (g_2, g_3) une base orthonormée de $\Delta^\perp$, la matrice de u dans la base (g_1, g_2, g_3) est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où B est la matrice de v dans (g_2, g_3). On a donc

$$1 = \det(u) = \det(A) = -\det(B) = -\det(v)$$

donc $\det(v) = -1$ et v est une réflexion. Mais alors v a des points fixes non nuls et ces points fixes sont des points fixes de u, ce qui contredit $F = \{0\}$.

On a donc en définitive $\dim(D) = 1$, c'est-à-dire que D est une droite.

La restriction de u au plan stable $D^\perp$ est une isométrie qui ne peut être une réflexion (sinon elle a des points fixes non nuls et l'ensemble des points fixes de u est de dimension 2), c'est donc une rotation.

Si (f_1, f_2) est une base orthonormé du plan $D^\perp$, on oriente le plan $D^\perp$ avec le choix de cette base et il existe un réel θ tel que la matrice dans (f_1, f_2) de la restriction de u à $D^\perp$ est $R'_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Le vecteur $f_3 = f_1 \wedge f_2$ est unitaire, orthogonal au plan engendré par (f_1, f_2) donc dans D, la famille $(f_1, f_2, f_1 \wedge f_2)$ est une base orthonormée directe de E (exercice 13.10) et la matrice de u dans cette base est :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Avec les notations du théorème, on dit que u est la rotation d'axe D orienté par $f_1 \wedge f_2$ et d'angle θ (défini modulo 2π).

Si $A \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R}) \setminus \{I_3\}$ est la matrice de $u \in \mathcal{O}^+(E) \setminus \{Id\}$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}_0$, alors l'axe de la rotation u est obtenu en déterminant le noyau de $u - Id$, ce qui revient à résoudre un système linéaire $(A - I_3) X = 0$, où la matrice $A - I_3$ est de rang 2.

Pour ce qui est de la mesure principale $\theta \in [-\pi, \pi[\setminus \{0\}$ de l'angle de cette rotation, avec :

$$\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(R_\theta) = 2\cos(\theta) + 1$$

on en déduit la valeur de $\cos(\theta)$ et celle de θ au signe près.

Si $\mathrm{Tr}(u) = -1$, on a alors $\cos(\theta) = -1$, donc $\sin(\theta) = 0$ et $\theta - -\pi$.

Dans le cas où $\theta \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$, on peut déterminer le signe de $\sin(\theta)$, et donc de θ, comme suit.

Avec $u(f_1) = \cos(\theta) f_1 + \sin(\theta) f_2$, on déduit que $\sin(\theta) = \langle u(f_1) \mid f_2 \rangle$. De plus, en notant $f_3 = f_1 \wedge f_2$, on a $f_3 \wedge f_1 = f_2$ (exercice 13.9) et :

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \langle u(f_1) \mid f_2 \rangle = \langle u(f_1) \mid f_3 \wedge f_1 \rangle = \det(f_3, f_1, u(f_1)) \\ &= \det(f_1, u(f_1), f_3)\end{aligned}$$

ce qui permet de déterminer $\sin(\theta)$ et θ.

En fait, comme seul le signe de θ nous importe, on choisit un vecteur non nul x dans $D^\perp$, on pose $f_1 = \dfrac{1}{\|x\|} x$, on complète ce vecteur en une base orthonormée (f_1, f_2, f_3) de E et $\sin(\theta) = \dfrac{\det(x, u(x), f_3)}{\|x\|^2}$ est du signe de $\det(x, u(x), f_3)$, ce qui permet de déterminer θ.

Exercice 13.16 *On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. On désigne par u l'endomorphisme de E de matrice :*

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

1. *Montrer que u est une rotation.*
2. *Donner une vecteur unitaire e_3 appartenant à l'axe de cette rotation.*
3. *Déterminer la mesure principale $\theta \in [-\pi, \pi[$ de l'angle de cette rotation.*

Solution 13.16

1. *Avec $A \neq I_3$, $A\, {}^tA = I_3$ et $\det(A) = 1$, on déduit que u est une rotation d'angle non nul (modulo 2π).*
2. *L'axe de cette rotation est obtenu en résolvant le système linéaire $(A - I_3) X = 0$, soit :*

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $x = y = z$ et l'axe D de u est la droite dirigée par $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. *Avec* $\mathrm{Tr}(u) = -1 = 2\cos(\theta) + 1$, *on déduit que* $\cos(\theta) = -1$ *et* $\theta = -\pi$.

Exercice 13.17 *On se place dans l'espace* $E = \mathbb{R}^3$ *muni de sa structure euclidienne canonique, on se donne des réels* a, b, c *et on désigne par* u *l'endomorphisme de* E *de matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

1. *Déterminer les réels* a, b, c *tels que* u *soit une isométrie.*
2. *Préciser, dans le cas où* u *est une isométrie, sa nature géométrique.*

Solution 13.17

1. *On a :*

$$A\,{}^tA = \left(a^2 + b^2 + c^2 - 1\right) \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} + \left(a^2 + b^2 + c^2\right) I_3$$

et l'égalité $A\,{}^tA = I_3$ *est réalisée si, et seulement si,* $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

2. *On a :*

$$\begin{aligned} \det(A) &= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 \\ &= \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

si u *est une isométrie. Donc* $u \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R}) \setminus \{I_3\}$ *et c'est une rotation d'angle* $\theta \in [-\pi, \pi[$ *tel que* $2\cos(\theta) + 1 = \mathrm{Tr}(A) = 1$, *ce qui donne* $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

L'axe D *de cette rotation est obtenu en résolvant le système linéaire* $(A - I_3)X = 0$, *soit :*

$$\begin{cases} (a^2 - 1)x + (ab - c)y + (ac + b)z = 0 & (1) \\ (ab + c)x + (b^2 - 1)y + (bc - a)z = 0 & (2) \\ (ac - b)x + (bc + a)y + (c^2 - 1)z = 0 & (3) \end{cases}$$

En effectuant les opérations $(1) + c\cdot(2) - b\cdot(3)$, $-c\cdot(1) + (2) + a\cdot(3)$ *et* $b\cdot(1) - a\cdot(2) + (3)$, *on obtient :*

$$\begin{cases} -cy + bz = 0 \\ cx - az = 0 \\ -bx + ay = 0 \end{cases}$$

Comme $(a, b, c) \neq 0$, *l'un de ces coefficients est non nul. En supposant* $a \neq 0$, *on obtient* $z = \dfrac{c}{a}x$ *et* $y = \dfrac{b}{a}x$ *et l'axe* D *de* u *est la droite dirigée par* $f_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *(les deux autres possibilités donnent le même résultat).*

En désignant par x *un vecteur non nul dans* $D^\perp$, *par exemple* $x = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ *si* $a \neq 0$, $\sin(\theta)$ *est du signe de :*

$$\det(x, u(x), f_3) = \begin{vmatrix} -b & -ac & a \\ a & -bc & b \\ 0 & 1 - c^2 & c \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0$$

et en conséquence $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. *On dit que* u *est un quart de tour.*