Distance d'un point à une droite   soit M un point de $\mathcal{E}$ et D une droite de $\mathcal{E}$ définie par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, la distance de M à D est: $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$

Si A a pour coordonnées (a, b, c) et si $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$, une équation cartésienne du cylindre de révolution d'axe D et de rayon R est:

$(\gamma(y-b) - \beta(z-c))^2 + (\alpha(z-c) - \gamma(x-a))^2 + (\beta(x-a) - \alpha(y-b))^2 = R^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$

Cosinus d'un angle   soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de E non nuls, on a $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|u\|\,\|v\|}$

Soit Ω le point de coordonnées (a, b, c), soit $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$, soit $\theta \in [0, \pi]$, une équation cartésienne du cône de révolution, de sommet Ω, d'axe $(\Omega, \overrightarrow{u})$, de demi-angle au sommet θ est:

$(\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c))^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\cos(\theta)^2((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)$

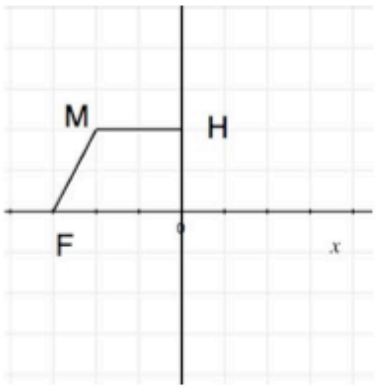
Coniques

Soit $\mathcal{E}$ le plan euclidien orienté.

Définition foyer, directrice

Soient Fun point, D une droite de $\mathcal{E}$, on suppose que F n'appartient pas à D, soit $e \in \mathbb{R}_+^*$
On appelle conique de foyer F, de directrice D, d'excentricité e, l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ vérifiant: $MF = eMH$ où H est la projection orthogonale de M sur D

Dans toute la suite, on prend pour axe des abscisses la droite (FK) où K est la projection orthogonale de F sur D
On note $\overrightarrow{i}$ un vecteur unitaire de cet axe, on note k le réel défini par: $\overrightarrow{FK} = k\overrightarrow{i}$ et $h = |k|$, distance de F à D
Enfin on pose $p = eh$ paramètre de la conique.



Equation polaire

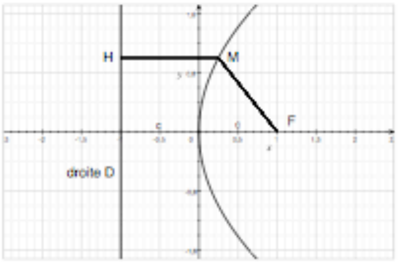
On choisit, dans ce paragraphe F comme origine et on oriente l'axe des abscisses de F à D d'où $k = h$
On a: $\overrightarrow{FM} = \rho(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j})$ et $MH = |h - \rho\cos\theta|$ D'où la relation $\rho = \varepsilon e(h - \rho\cos\theta)$ avec $\varepsilon = \pm 1$ On a donc suivant le signe de ε deux expressions de ρ : ρ_+ et ρ_-
$\rho_+(\theta) = \dfrac{eh}{1 + e\cos\theta}$ et $\rho_-(\theta) = \dfrac{-eh}{1 - e\cos\theta} = -\rho_+(\theta + \pi)$ Ces deux expressions définissent la même courbe, ainsi: une équation polaire de la conique, en prenant pour origine un foyer et pour axe la droite passant par ce foyer et perpendiculaire à la directrice associée est: $\rho(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ où $p = eh$

Description des coniques

On choisit une origine O sur l'axe des abscisses et on note c le réel défini par $\overrightarrow{OF} = c\,\overrightarrow{i}$, on oriente l'axe de telle façon que c soit positif. $\overrightarrow{OK} = (c + k)\,\overrightarrow{i}$, on pose $d = c + k$ la distance de O à D est $|k|$
$FM = eMH \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e\,|d - x| \Leftrightarrow (x - c)^2 + y^2 = e^2(d - x)^2$ d'où l'équation de la conique notée $\mathcal{C}$: $x^2(1 - e^2) + 2(de^2 - c)x + y^2 + c^2 - e^2d^2 = 0$

Parabole

Supposons $e = 1$ l'équation de la conique est:
$2kx + y^2 + c^2 - d^2 = 0$ On choisit alors $c = -d$
$c = -c - k$ et $c = \dfrac{-k}{2}$ Comme on veut $c \geq 0$ on oriente l'axe des abscisses de D vers F
alors $k = -h = -eh = -p$ et $\underline{\underline{y^2 = 2px}}$
$\mathcal{C}$ est une parabole, de sommet O, de foyer $F(c, 0)$ de directrice la droite $x = -c$, de paramètre $p = 2c$

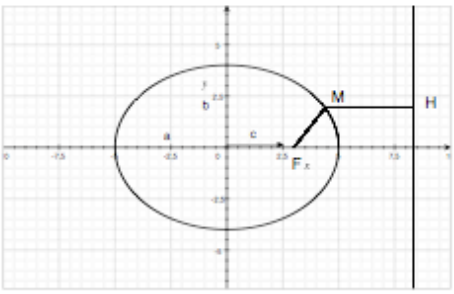


Equation réduite pour $e \neq 1$

Supposons $e \neq 1$, on cherche c pour que: $c = de^2$, $c = ce^2 + ke^2$ et donc $c = \dfrac{e^2k}{1 - e^2}$
$c^2 - e^2d^2 = e^2d^2(e^2 - 1) = c^2\dfrac{e^2 - 1}{e^2} = \dfrac{e^2k^2}{e^2 - 1} = \dfrac{p^2}{e^2 - 1}$ D'où l'équation: $(1 - e^2)x^2 + y^2 = \dfrac{p^2}{1 - e^2}$

Ellipse On suppose $e \in]0, 1[$

On oriente l'axe des abscisses de F à D alors $k > 0$ et $k = h$
on a: $c = \dfrac{ep}{1 - e^2}$
On pose $a = \dfrac{p}{1 - e^2}$ et $b = \dfrac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$ alors $p = \dfrac{b^2}{a}$ et $e = \dfrac{c}{a}$
$a^2 - b^2 = \dfrac{p^2}{(1 - e^2)^2} - \dfrac{p^2}{1 - e^2} = \dfrac{p^2e^2}{(1 - e^2)^2} = c^2$ on en déduit: $a > b$
$d = c + h = \dfrac{ep}{1 - e^2} + \dfrac{p}{e} = \dfrac{p}{e(1 - e^2)} = \dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c}$
$\mathcal{C}$ est une ellipse de centre O, d'équation réduite:
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$, de paramètre $p = \dfrac{b^2}{a}$



de foyer $F(c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, de directrice associée la droite $x = \dfrac{a^2}{c}$

Si on note $F'(-c,0)$ et D' la droite d'équation $x=-c$ par symétrie par rapport à O, F' est un foyer associé à la droite D', c'est-à-dire $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow MF' = eMH'$ où H' est la projection orthogonale de M sur la droite D'
Pour tout point M de $\mathcal{C}$ on a: $MF + MF' = e(MH + MH') = 2ed = 2a$

Hyperbole $e > 1$

On oriente l'axe des abscisses de D à F, d'où $k < 0$ et $k = -h$

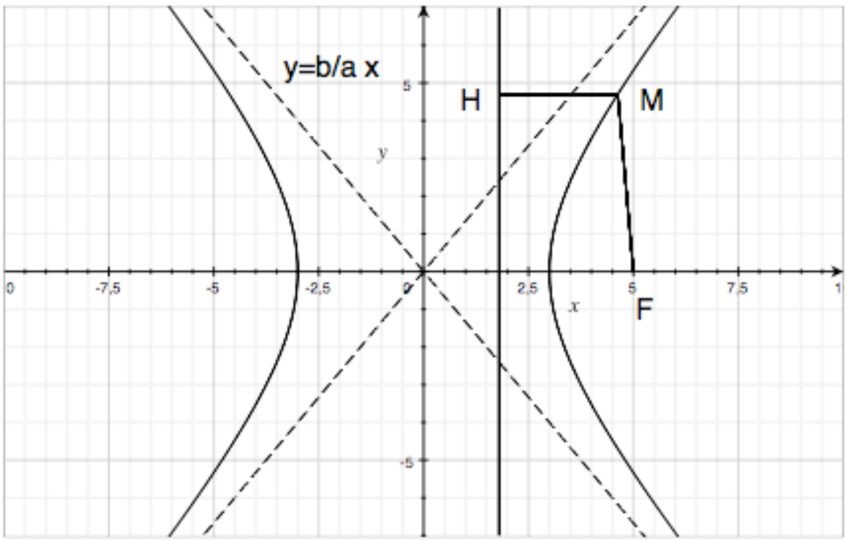
L'équation de $\mathcal{C}$ est: $(e^2-1)x^2 - y^2 = \dfrac{p^2}{e^2-1}$ avec $c = \dfrac{ep}{e^2-1}$

On pose $a = \dfrac{p}{e^2-1}$ et $b = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}}$ alors $p = \dfrac{b^2}{a}$ et $e = \dfrac{c}{a}$

$a^2 + b^2 = \dfrac{p^2}{(e^2-1)^2} + \dfrac{p^2}{e^2-1} = \dfrac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} = c^2$

$d = c + k = c - h = \dfrac{ep}{e^2-1} - \dfrac{p}{e} = \dfrac{p}{e(e^2-1)} = \dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c} < a$

$\mathcal{C}$ est une hyperbole, de centre O, d'axe transverse: Ox, d'équation: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ de foyer $F(c,0)$ avec $c = \sqrt{a^2+b^2}$, de directrice associée la droite $x = \dfrac{a^2}{c}$, d'asymptotes $y = \pm\dfrac{b}{a}x$



Par symétrie par rapport à O, on peut poser: $F'(-c,0)$ et D' la droite $x=-\frac{a^2}{c}$ alors
$M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow MF'=eMH'$ où H' est la projection orthogonale de M sur D'
On a alors $|MF-MF'|=e\,|MH-MH'|=2de=2a$

Courbe du second degré

Soit une courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne: $\Phi(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ pour déterminer la nature de cette courbe on réduit l'équation.
On cherche si la courbe admet un centre, c'est-à-dire si le système $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)=0\quad\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)=0$
Si le système est lié, l'expression $ax^2+bxy+cy^2$ est un carré et généralement $\mathcal{C}$ est une parabole.
Supposons que le système admette une solution $(\alpha,\,\beta)$ alors le point $\Omega(\alpha,\,\beta)$ est le centre de $\mathcal{C}$
On prend Ω comme nouvelle origine, d'où le changement: $x=x'+\alpha$ et $y=y'+\beta$, on reporte dans l'équation et on obtient l'équation: $ax'^2+bx'y'+cy'^2=h$
On associe à cette équation la matrice symétrique $A=\begin{pmatrix}a&b/2\\b/2&c\end{pmatrix}$ (on divise par deux le coefficient de $x'y'$ On cherche alors une base orthonormale directe de vecteurs propres de A:
$\overrightarrow{I}=\cos\theta\,\overrightarrow{i}+\sin\theta\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{J}=-\sin\theta\,\overrightarrow{i}+\cos\theta\,\overrightarrow{j}$ d'où le changement:
$x'=\cos\theta x"-\sin\theta y",\quad y'=\sin\theta x"+\cos\theta y"$ On reporte et on obtient l'équation réduite.

Exemple   reconnaitre la courbe d'équation: $3x^2+3y^2+2xy+4x-4y=0$
On résout le système: $\begin{cases}6x+2y&=&-4\\2x+6y&=&4\end{cases}$ on obtient $y=-2-3x$ et $x-6-9x=2$ donc $x=-1$ et $y=1$ On pose
$\Omega:(-1,1)$ centre de la courbe et $x=x'-1,\ y=y'+1$
$3(x'-1)^2+3(y'+1)^2+2(x'-1)(y'+1)+4(x'-1)(y'+1)+4(x'-1)-4(y'+1)=$
$3x'^2+3y'^2+2x'y'=4$
on pose $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$ et $\chi_A(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+8$ polynôme ayant pour racines: 2 et 4
$E_2(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right),\quad E_4=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ Posons $\overrightarrow{I}=\frac{1}{\sqrt2}(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}),\quad\overrightarrow{J}=\frac{1}{\sqrt2}(-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$
$(\overrightarrow{I},\,\overrightarrow{J})$ est une base orthonormale directe. la matrice de passage est $P=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$x'=\frac{1}{\sqrt2}(x"-y")$ et $y'=\frac{1}{\sqrt2}(x"+y")$ On reporte:
$\frac{3}{2}(x"^2+y"^2-2x"y"+x"^2+y"^2+2x"y")+(x"^2-y"^2)=4$
$4x"^2+2y"^2=4\quad x"^2+\frac{y"^2}{\sqrt2^2}=1$
$\mathcal{C}$ est une ellipse de centre $\Omega(-1,1)$, de grand axe $(\Omega,\,\frac{1}{\sqrt2}(-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}))$ Longueur de demi grand axe: $\sqrt2$
Longueur de demi petit axe: 1 (excentricité: $e=\frac{\sqrt2}{2}$, un foyer est F avec $\overrightarrow{\Omega F}=\overrightarrow{J}$ et une directrice est la droite passant par K tel que $\overrightarrow{\Omega K}=2\overrightarrow{J}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{I}$ d'équation dans l'ancien repère: $y-x=2\sqrt2+2$