Table des matières

Avant-propos **vii**

Notations **ix**

1 Espaces vectoriels normés **1**
1.1 Normes sur un espace vectoriel réel ou complexe 1
1.2 Topologie associée à une norme 3
1.3 Le théorème du point fixe de Banach 8
1.4 Applications linéaires continues 10
1.5 Espaces vectoriels normés de dimension finie 15
1.6 Exercices 19

2 Polynômes minimal et caractéristique. Sous espaces caractéristiques **35**
2.1 Définitions et premières propriétés 36
2.2 Localisation des valeurs propres 38
2.3 Le théorème de Cayley-Hamilton 41
2.4 Méthodes de calcul du polynôme caractéristique 43
2.5 Le théorème de décomposition des noyaux 45
2.6 Sous espaces caractéristiques 46
2.7 Exercices 50

3 Réduction des endomorphismes et des matrices **65**
3.1 Trigonalisation 65
3.2 Diagonalisation 67
3.3 Espaces vectoriels euclidiens 68
3.4 Réduction des matrices orthogonales 74
3.5 Réduction des matrices symétriques réelles 77
3.6 Tridiagonalisation des matrices symétriques réelles. Méthode de Householder 79

3.7 Espaces vectoriels hermitiens 82
3.8 Réduction des matrices normales 84
3.9 Forme réduite de Jordan des matrices complexes 87
3.10 Exercices 90

4 L'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) 105

4.1 Norme matricielle induite par une norme vectorielle 105
4.2 Le groupe topologique $GL_n(\mathbb{K})$ 109
4.3 Propriétés topologiques de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ 115
4.4 Rayon spectral d'une matrice complexe 119
4.5 Conditionnement d'une matrice 127
4.6 Quotient de Rayleigh-Ritz et Hausdorffien 129
4.7 Conditionnement du problème de valeurs propres 134
4.8 Exercices 137

5 Matrices positives et irréductibles 159

5.1 Matrices positives 159
5.2 Matrices strictement positives et théorème de Perron-Frobénius . 166
5.3 Matrices de permutation 173
5.4 Matrices irréductibles 174
5.5 Matrices primitives 179
5.6 Matrices stochastiques 181
5.7 Exercices 183

6 Systèmes linéaires 189

6.1 Position des problèmes et notations 189
6.2 Problèmes numériques liés à la résolution des systèmes linéaires . 191
6.3 Cas des matrices triangulaires 192
6.4 Matrices de dilatation et de transvection. Opérations élémentaires 193
6.5 Méthode des pivots de Gauss 197
6.6 Résolution des systèmes linéaires à coefficients entiers 199
6.7 Décomposition LR (méthode de Crout) 200
6.8 Décomposition $LD\,{}^tL$ des matrices symétriques réelles 203
6.9 Décomposition de Cholesky des matrices symétriques réelles définies positives. 204
6.10 Méthode d'élimination de Gauss-Jordan 205
6.11 Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires 207
6.12 Méthode de Jacobi 209
6.13 Méthode de Gauss-Seidel 209
6.14 Méthode de relaxation 211
6.15 Méthodes de descente et de gradient 219
6.16 Exercices 229

7 Calcul approché des valeurs et vecteurs propres 243
7.1 Introduction 243
7.2 Méthode de la puissance itérée 243
7.3 Méthode de Jacobi pour les matrices symétriques 247
7.4 La méthode de Givens et Householder 253
7.5 Exercices 258

8 Systèmes différentiels linéaires et exponentielle d'une matrice 267
8.1 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants 267
8.2 L'exponentielle d'une matrice 270
8.3 Un algorithme de calcul de l'exponentielle d'une matrice 277
8.4 Equations différentielles linéaires d'ordre n 278
8.5 Systèmes différentiels linéaires à coefficients non constants 280
8.6 Méthode de variation des constantes 284
8.7 Surjectivité et injectivité de l'exponentielle matricielle 286
8.8 Exercices 290

Bibliographie 303

Avant-propos

Cet ouvrage, qui pourrait s'intituler « Matrices réelles et complexes, propriétés algébriques et topologiques, applications » est consacré à l'étude de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ou complexes du point de vue algébrique et topologique. Cette étude est un préalable important à tout bon cours d'analyse numérique.

Des connaissances de base en algèbre linéaire sont amplement suffisantes pour la lecture de cet ouvrage.

Le public visé est celui des étudiants du deuxième cycle universitaire et des candidats à l'Agrégation externe et interne de Mathématiques.

La synthèse proposée est, je pense, un bon moyen de réviser ses connaissances sur les espaces vectoriels normés et l'algèbre linéaire. Les candidats à l'agrégation trouveront tout au long de cet ouvrage de nombreux exemples d'applications des résultats classiques souvent proposés dans les leçons d'oral. Par exemple, si dans une leçon sur le groupe orthogonal on pense à mentionner la compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ il faut avoir réfléchi à quelques exemples d'applications de ce résultat. En suivant cette idée je me suis efforcé de faire suivre chaque résultat classique et important d'un certain nombre d'applications.

Chaque chapitre est suivi d'une liste d'exercices corrigés. Une bonne utilisation de ces exercices consiste bien évidemment à les chercher au préalable puis à confronter les résultats obtenus aux solutions proposées.

Le premier chapitre est consacré à l'étude des espaces vectoriels normés et particulièrement au cas de la dimension finie. L'étude des propriétés topologiques de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'application aux méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires et de recherche des valeurs et vecteurs propres utilisent quelques résultats de ce chapitre. Le théorème du point fixe de Banach est utilisé dans l'étude des systèmes différentiels linéaires.

Les chapitre 2 et 3 sont consacrés à l'étude des valeurs et vecteurs propres des matrices réelles ou complexes. Les résultats importants sont le théorème de décomposition des noyaux et les divers théorèmes de réduction à la forme triangulaire ou diagonale.

C'est au chapitre 4 qu'on aborde l'étude des propriétés topologiques de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On y introduit les notions de norme matricielle induite par une norme vectorielle et on démontre quelques résultats classiques de densité et de connexité.

Pour ce qui est des applications de ce chapitre, je me suis limité à l'analyse numérique linéaire. Pour une application aux groupes de Lie, le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage de Mnéimné et Testard [10].

Les chapitres 5 et 6 sont deux chapitres importants de l'analyse numérique linéaire. On s'intéresse aux méthodes directes et itératives de résolution des systèmes linéaires et aux méthodes de calcul approché des valeurs et vecteurs propres d'une matrice carrée réelle ou complexe.

Enfin le chapitre 8 est une application à l'étude des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ou non et à l'exponentielle d'une matrice. L'exponentielle d'une matrice y est définie à partir de l'étude des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Un grand merci à René Adad qui a lu et critiqué une première version de ce travail et à Dominique Barbolosi pour ses remarques toujours judicieuses.

Mes remerciement vont aussi à toute l'équipe d'EDP Sciences pour la qualité de leur travail.