Agrégation Externe

Séries formelles

[1]

Ce problème est en relation avec les leçons d'oral suivantes :

– 124 Anneau des série formelles. Applications
– 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

On pourra consulter les ouvrages suivants.

– J. Calais. *Éléments de théorie des anneaux.* Ellipses (2006).
– H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann (1961).
– S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. *Oraux X-ENS. Algèbre 2.* Cassini (2009).
– D. Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses (1996).
– R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 1.* Cambridge University Press. (2012)
– P. Tauvel. *Mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson (1993).
– H. Wilf. *Generatingfunctionology.* S. R. C. Press. (2005).

1. Le 25/11/2014

$\mathbb{A}$ [resp. $\mathbb{K}$] désigne un anneau commutatif unitaire [resp. un corps commutatif].

Une série formelle à coefficients dans $\mathbb{A}$ est une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{A}$.

On note $S(X) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ (ou $S = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$) une telle série formelle et $\mathbb{A}[[X]]$ l'ensemble de ces séries formelles.

On dit que la série formelle $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ est la série génératrice de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On définit une addition, une multiplication externe et une multiplication interne sur $\mathbb{A}[[X]]$ par :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n$$

$$\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n X^n$$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X^n$$

où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$\mathbb{A}[[X]]$ est une $\mathbb{A}$-algèbre commutative qui contient $\mathbb{A}[X]$ et $\mathbb{A}$ comme sous-anneaux.

La valuation d'une série formelle $S(X) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ est définie par :

$$\operatorname{val}(S) = \begin{cases} +\infty \text{ si } S = 0 \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\} \text{ si } S \neq 0 \end{cases}$$

La dérivée de la série formelle $S = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ est la série formelle :

$$D(S) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) a_{n+1} X^n$$

On note aussi S' pour $D(S)$.

On peut itérer cet opérateur de dérivation, ce qui donne, pour tout entier $p \geq 1$, l'opérateur D^p défini par :

$$D^p\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+p)\cdots(n+1) a_{n+p} X^n$$

– I – Généralités sur l'anneau $\mathbb{K}[[X]]$ des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) l'anneau $\mathbb{A}[[X]]$ est intègre ;
   (b) l'anneau $\mathbb{A}$ est intègre ;
   (c) pour toutes séries formelles S, T dans $\mathbb{A}[[X]]$, on a :
   $$\operatorname{val}(ST) = \operatorname{val}(S) + \operatorname{val}(T)$$

   En particulier $\mathbb{K}[[X]]$ est intègre.

2. Soient $S = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ et $T = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n$ deux séries formelles avec $\operatorname{val}(T) = 0$ (soit $b_0 \neq 0$).
   Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{K}_n[X] \times \mathbb{K}[[X]]$ tel que $S = TQ_n + X^{n+1}R_n$.
   Dans le cas où S et T sont des polynômes, avec $T(0) \neq 0$, on retrouve le théorème de division suivant les puissances croissantes dans $\mathbb{K}[X]$.
3. Montrer qu'une série formelle est inversible si, et seulement si, $\operatorname{val}(S) = 0$.
   Pour $S \in \mathbb{K}[[X]]$ inversible, on note S^{-1} ou $\dfrac{1}{S}$ l'inverse de S.
4. Montrer que, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, la série formelle $1 - \lambda X$ est inversible d'inverse :
$$\frac{1}{1-\lambda X} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n X^n$$
5. Montrer que, pour tous scalaires $\lambda \neq \mu$ dans $\mathbb{K} \setminus \{0\}$, la série formelle $(1-\lambda X)(1-\mu X)$ est inversible d'inverse :et :
$$\frac{1}{(1-\lambda X)(1-\mu X)} = \frac{1}{\lambda-\mu}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda X} - \frac{\mu}{1-\mu X}\right)$$
6. Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, la série formelle $(1-X)^p$ est inversible d'inverse :
$$\frac{1}{(1-X)^p} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{n+p-1}{p-1} X^n$$
7. On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle.
   Soient S, T deux séries formelles dans $\mathbb{K}[[X]]$, la série T étant inversible.
   (a) Montrer que $S' = 0$ si, et seulement si, $S \in \mathbb{K}$.
   (b) Montrer que $(ST)' = S'T + ST'$ et $\left(\dfrac{S}{T}\right)' = \dfrac{S'T - ST'}{T^2}$.
   (c) En supposant S également inversible, montrer que $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{T'}{T}$ si, et seulement si, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $S = \lambda T$.
8. Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, la dérivée p-ème de $1 - X$ est :
$$D^p\left(\frac{1}{1-X}\right) = p!\frac{1}{(1-X)^{p+1}}$$
9. Montrer que les idéaux non réduit à $\{0\}$ de $\mathbb{K}[[X]]$ sont de la forme :
$$(X^n) = \{S \in \mathbb{K}[[X]] \mid \operatorname{val}(S) \geq n\}$$
   Donc l'anneau $\mathbb{K}[[X]]$ est principal.
10. Quels sont les éléments irréductibles de $\mathbb{K}[[X]]$? Écrire la décomposition en facteurs irréductibles d'une série entière non nulle et non inversible.
11. Montrer que l'anneau $\mathbb{K}[[X]]$ est euclidien (donc principal) pour le stathme :
$$\operatorname{val} : S \in \mathbb{K}[[X]] \setminus \{0\} \mapsto \operatorname{val}(S)$$

– II – Séries formelles et dénombrement

1. Pour $n \geq 1$, on appelle dérangement de $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ toute permutation σ de I_n n'ayant aucun point fixe.
On note δ_n le nombre de dérangements de I_n en convenant que $\delta_0 = 1$.

   (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_k$$

   (b) On désigne par $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\delta_n}{n!} X^n$ la série génératrice de la suite $\left(\frac{\delta_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ($\frac{\delta_n}{n!}$ est la proportion de dérangements dans $\mathcal{S}_n$).
Montrer que $S(X)\, e^X = \frac{1}{1-X}$ et en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \delta_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par u_n le nombre de permutations de l'ensemble $I_n = \{1, \cdots, n\}$ d'ordre au plus égal à 2 (les involutions de I_n).
On note aussi $u_0 = u_1 = 1$

   (a) Montrer que, pour $2 \leq r \leq n$, dans $\mathcal{S}_n$ il y a $\binom{n}{r}(r-1)! = \frac{n!}{r\,(n-r)!}$ cycles d'ordre r distincts.

   (b) Calculer u_2, u_3 et u_4.

   (c) Montrer que :
$$\forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} + (n-1)\, u_{n-2}$$

   (d) On désigne par $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{n!} X^n$ la série génératrice de la suite $\left(\frac{u_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ($\frac{u_n}{n!}$ est la proportion d'involutions dans $\mathcal{S}_n$).
Montrer que $S' = (1+X)\, S$ et en déduire que $S = e^X e^{\frac{X^2}{2}}$, puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{p+2q=n} \frac{n!}{2^q p! q!}$$

   (e) Déterminer le nombre v_n d'involutions de I_n sans point fixe, en convenant que $v_0 = 1$ et en remarquant que $v_1 = 0$.

   (f) Déterminer le nombre w_n d'involutions de I_n ayant un unique point fixe, en convenant que $w_0 = 0$ et en remarquant que $w_1 = 1$.

3. Pour tout couple (p, n) d'entiers naturels non nuls, on désigne par $u_{p,n}$ le nombre d'applications surjectives de l'ensemble $I_p = \{1, \cdots, p\}$ sur l'ensemble $I_n = \{1, \cdots, n\}$, en convenant que $u_{p,0} = 0$ pour tout entier naturel non nul p.

   (a) Montrer que :
$$\forall p \geq n \geq 1,\ n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{p,k}$$

(b) Pour $p \geq 1$ fixé, on désigne par $S_p = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_{p,n}}{n!} X^n$ la série génératrice de la suite $\left(\frac{u_{p,n}}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que $S_p(X)\, e^X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^p}{n!} X^n$ et en déduire que :

$$\forall p \geq n \geq 1,\ u_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p$$

– III – Fractions rationnelles et séries formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$

1. Soit :

$$Q(X) = 1 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_r X^r = \prod_{k=1}^{p} (1 - \gamma_k X)^{m_k}$$

un polynôme de degré $r \geq 1$ dans $\mathbb{K}[X]$ (donc $\alpha_r \neq 0$) supposé scindé de racines non nulles $\left(\frac{1}{\gamma_k}\right)_{1\leq k\leq r}$ deux à deux distinctes de multiplicités respectives $(m_k)_{1\leq k\leq r}$.

Montrer que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré au plus égal à $r-1$ tel que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n X^n = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

dans $\mathbb{K}[[X]]$;

(b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+r} + \alpha_1 u_{n+r-1} + \cdots + \alpha_r u_n = 0$$

(le polynôme Q est le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence) ;

(c) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \sum_{k=1}^{p} P_k(n)\, \gamma_k^n$$

où, pour tout k compris entre 1 et p, P_k est un polynôme de degré au plus égal à $m_k - 1$.

2. Soient r un entier naturel non nul et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré au plus égal à $r-1$ tel que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n X^n = \frac{P(X)}{(1-X)^r}$$

dans $\mathbb{K}[[X]]$;

(b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} u_{n+k} = 0$$

(c) il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ de degré au plus égal à $r-1$ tel que $u_n = R(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. **Suite de Fibonacci.**
   On désigne par $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

   et par $F(X)$ sa série génératrice dans $\mathbb{R}\left[[X]\right]$.

   (a) Montrer que :

$$F\left(X\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha_1 X} - \frac{1}{1-\alpha_2 X}\right)$$

   où

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha_1^n - \alpha_2^n)$$

4. **Question de monnaie.**
   De combien de manières différentes peut-on payer la somme de $10,01$ euros avec des pièces de 1, 2 et 5 centimes ?