1. Théorème d'Urysohn

Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $\|\|$ la norme définie par

$$\|x\|^2 =< x, x > .$$

Montrer que cette norme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ hors de 0.

Pour tout couple de réels $a < b$ on note $\varphi_{a,b}$ la fonction définie par

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin]a, b[\\ \exp\left(\frac{-1}{(x-a)(b-x)}\right) & \text{si} \quad x \in]a, b[\end{cases}$$

Soit

$$\psi_{a,b} : x \mapsto k \int_x^b \varphi_{a,b}(t)dt$$

où $k^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{a,b}(t)dt$.

Montrer que $\psi_{a,b}$ est $\mathcal{C}^\infty$, vaut 1 pour tout $x \leq a$, 0 pour $x \geq b$ et $f(x) \in [0, 1]$ pour tout réel x.

On pose

$$\forall u \in E \quad f_\delta(u) = \lambda \psi_{0\delta}(\|u\|) \quad \text{avec} \quad \lambda^{-1} = \int_E \psi_{0\delta}(\|u\|)\mathrm{d}u$$

Montrer que cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ et déterminer son support.

Soient K un compact de E et Ω un ouvert contenant K. On cherche à construire une application définie sur E, à valeurs dans $[0, 1]$, qui vaut 1 sur K, 0 sur Ω^c et infiniment différentiable.

Pour tout point $x \in K$ on note $d(x)$ la distance de x au complémentaire de Ω. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tell que pour tout $x \in K$ on ait $d(x) \geq 2\delta$.

On pose

$$V = \{x \in K;\ d(x, K) \leq \delta\}$$

et on note χ_V la fonction caractéristique de V.

Soit g la fonction définie par

$$\forall x \in E \quad g(x) = (f_\delta * \chi_V)(x) = \int_E f_\delta(x - t) \cdot \chi_V(t)\mathrm{d}t$$

Montrer que pour tout $g(x) \in [0, 1]$, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact et vérifie :

$$\forall x \in E \quad \chi_\Omega(x) \geq g(x) \geq \chi_K(x).$$

2. Partitions de l'unité

Les partitions de l'unité permettent le « passage du local au global »et sont particulièrement importantes en géométrie différentielle.

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant : Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Alors pour tout recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$, il existe une suite de fonctions différentiables $\varphi_i i \in N$ définies sur X (appelée partition de l'unité subordonnée aux ouverts U_α) qui vérifient les propriétés suivantes :

$0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ pour tout $x \in X$ et $i \in N$

Tout $x \in X$ admet un voisinage où toutes les φ_i sont identiquement nulles,sauf un nombre fini d'entre elles.

Pour tout $x \in X$, $\sum_i \varphi_i(x) = 1$.

Soit S un sous ensemble dénombrable dense de X et soit $\mathcal{B} = \{B_i\}$ l'ensemble des boules fermées de rayon rationnel r_i de centre p_i appartenant à S contenues dans l'un au moins des U_α. On note V_i la boule ouverte de rayon $r_i/2$ de centre p_i.

Montrer que $X = \bigcup V_i$

En utilisant la première partie, construire des fonctions ψ_i de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact positives ou nulles telles que $\sum_1^n \psi_k(x) = 1$ pour tout $x \in V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$.

Conclure.

Bonnes vacances :)