14

Séries entières

Nous faisons ici l'étude des séries entières réelles ou complexes sans référence aux séries de fonctions qui seront étudiées plus loin. Avec les exercices 3.31 et 6.34 nous avons déjà rencontré la fonction exponentielle complexe définie comme somme d'une série entière.

14.1 Rayon de convergence d'une série entière

On appelle série entière toute série numérique de la forme $\sum a_n z^n$, où $(a_n)_{n \geq n_0}$ est une suite donnée de nombres complexes.

Comme pour l'étude des séries numériques, on supposera, a priori, que $n_0 = 0$.

On peut remarquer qu'une série entière converge pour $z = 0$.

En désignant par D l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels la série $\sum a_n z^n$ est convergente, on note pour tout z dans D, $f(z)$ la somme de cette série, soit :

$$\forall z \in D,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

et on définit ainsi une fonction de D dans $\mathbb{C}$.

L'ensemble D est appelé domaine de convergence de la séries entière. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient toujours 0.

Dans le cas où les coefficients a_n sont tous nuls à partir d'un rang $p+1$, la série est convergente pour tout nombre complexe z et sa somme est la fonction polynomiale définie par :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k.$$

On peut donc voir une série entière comme un polynôme de degré au plus infini.

Exercice 14.1 *Déterminer les domaines de convergence des séries entières* $\sum n! z^n$, $\sum n^n z^n$, $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ *et* $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Solution 14.1 *Pour* $a_n = n!$ *et* $z \neq 0$ *on a :*

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = (n+1)\,|z| \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$$

ce qui entraîne $\lim_{n\to+\infty} |a_n z^n| = +\infty$ *et la divergence de* $\sum a_n z^n$ *(son terme général ne tend pas vers* 0*). Il en résulte que le domaine de convergence de* $\sum n!z^n$ *est* $D = \{0\}$.
Pour $a_n = n^n$ *et* $z \neq 0$ *on a :*

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n |z| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

ce qui entraîne $\lim_{n\to+\infty} |a_n z^n| = +\infty$ *(exercice 3.19) et la divergence de* $\sum a_n z^n$ *(son terme général ne tend pas vers* 0*). Il en résulte que le domaine de convergence de* $\sum n!z^n$ *est* $D = \{0\}$.
On sait que la série géométrique $\sum z^n$ *est convergente si, et seulement si,* $|z| < 1$ *(exercice 6.1), ce qui signifie que son domaine de convergence est le disque unité ouvert* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
Pour $a_n = \dfrac{1}{n}$ *et* $z \neq 0$ *on a :*

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{n}{n+1}|z| \underset{n\to+\infty}{\to} |z|.$$

Si $|z| < 1$ *le théorème de d'Alembert nous dit alors que la série* $\sum \dfrac{z^n}{n}$ *converge absolument. Si* $|z| > 1$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} |a_n z^n| = +\infty$ *et la série* $\sum \dfrac{z^n}{n}$ *diverge. Si* $|z| = 1$, *on a alors* $z = e^{it}$ *avec* $t \in [0, 2\pi[$ *et le théorème d'Abel nous dit que la série* $\sum \dfrac{z^n}{n} = \sum \dfrac{e^{int}}{n}$ *diverge uniquement pour* $t = 0$, *soit pour* $z = 1$ *(exercice 6.25). En définitive, le domaine de convergence de* $\sum \dfrac{z^n}{n}$ *est le disque unité fermé privé de* 1, *soit* $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} \setminus \{1\}$.
La série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ *étant absolument convergente pour tout nombre complexe* z *(exercice 6.34), son domaine de convergence est* $D = \mathbb{C}$.

Exercice 14.2 *Déterminer les domaines de convergence des séries entières* $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ *et* $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

Solution 14.2 *En posant* $u_n = \left|\dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right|$, *on a pour* $z \neq 0$ *:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et le théorème de d'Alembert nous dit alors que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ *est absolument convergente. Son domaine de convergence est* $D = \mathbb{C}$.
Le résultat est le même pour la deuxième série.

Nous allons voir que de manière générale, que le domaine de convergence d'une série entière est $\mathbb{C}$ tout entier ou un disque ouvert de rayon $R \geq 0$ éventuellement complété par des points du bord de ce disque.

Pour tout réel $R > 0$, on note respectivement $D(0, R)$ et $\overline{D(0, R)}$ les disques ouvert et fermé de centre 0 et de rayon R, soit :

$$D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \text{ et } \overline{D(0, R)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$$

Théorème 14.1 (Abel) *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. S'il existe un scalaire non nul z_0 tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire que pour tout entier naturel n et tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, on a :

$$|a_n z^n| = |a_n z^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

où M est un majorant de la suite $(|a_n z_0^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$. La série géométrique $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ étant convergente puisque $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, on en déduit la convergence de $\sum |a_n z^n|$. ∎

Comme conséquence de ce théorème, on déduit que si une série entière converge en un point z_0, elle converge alors absolument sur tout le disque ouvert de centre 0 et de rayon $|z_0|$.

En fait ce théorème peut aussi s'interpréter comme suit.

Théorème 14.2 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et I l'ensemble de réels défini par :*

$$I = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

Cet ensemble I est un intervalle qui est soit réduit à $\{0\}$, soit de la forme $[0, R]$ ou $[0, R[$ avec $R > 0$, soit égal à $\mathbb{R}^+$ tout entier.

Démonstration. Comme une série entière converge pour $z = 0$, I est non vide du fait qu'il contient 0. S'il est réduit à $\{0\}$ c'est terminé. On suppose donc que $I \neq \{0\}$.

Le théorème précédent nous dit que si $r > 0$ est dans I, alors I contient le segment $[0, r]$. En effet dire que $r \in I$ signifie que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et le théorème d'Abel nous dit alors que pour tout réel $s \in [0, r[$, la série $\sum a_n s^n$ est convergente et la suite $(a_n s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers 0, ce qui implique qu'elle est bornée et signifie que $s \in I$. L'ensemble I est donc un intervalle de $\mathbb{R}^+$ qui contient 0, il est donc nécessairement de la forme $[0, R]$ avec $R > 0$, ou $[0, R[$ avec $0 < R \leq +\infty$. ∎

On peut donc poser :

$$R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$$

dans $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}^+$ d'extrémité droite R.

Définition 14.1 *Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est l'élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$ défini par :*

$$R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

Remarque 14.1 *Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on aura $1 \in I$ et $R \geq 1$, dans le cas contraire $1 \notin I$ et $R \leq 1$.*

Théorème 14.3 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R et R'.*

1. *Si $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $R \geq R'$.*
2. *Si $a_n = O(b_n)$, alors $R \geq R'$.*
3. *Si $a_n \sim b_n$, alors $R = R'$.*

Démonstration.

1. Comme $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout n, on a :

$$I' = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid (b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée} \right\} \subset I = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée} \right\}$$

et en conséquence $R' = \sup(I') \leq R = \sup(I)$.

2. Dire que $a_n = O(b_n)$ signifie que l'on a $a_n = \varphi_n b_n$ où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M|b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en conséquence $R \geq R'$.
3. Dire que $a_n \sim b_n$ signifie que l'on a $a_n = \varphi_n b_n$ où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite égale à 1, ce qui entraîne que $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$ et $R = R'$.

■

Corollaire 14.1 *Si $\sum a_n z^n$ est une série entière telle qu'il existe deux réels strictement positifs m et M avec :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq |a_n| \leq M$$

alors le rayon de convergence de cette série vaut 1.

Démonstration. La série $\sum z^n$ étant de rayon de convergence égal à 1, il en est de même des séries $\sum mz^n$ et $\sum Mz^n$. Le premier point du théorème précédent nous dit alors que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ est tel que $R \leq 1$ et $R \geq 1$, il vaut donc 1. ■

Exercice 14.3 *Quel est le rayon de convergence de la série $\sum e^{\sin(n)} z^n$?*

Solution 14.3 *Avec $\dfrac{1}{e} \leq e^{\sin(n)} \leq e$, on déduit du corollaire précédent que le rayon de convergence de $\sum e^{\sin(n)} z^n$ vaut* 1.

Théorème 14.4 *En utilisant les notations qui précèdent :*

1. *dans le cas où $R > 0$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < R$;*
2. *dans le cas où R est fini, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n z^n|$ sont divergentes pour tout z tel que $|z| > R$*

Démonstration.

1. Pour $|z| < R$, tout réel r tel que $|z| < r < R$ est dans I et le théorème d'Abel nous dit que $\sum a_n z^n$ converge absolument.
2. Si $|z| > R$, alors $|z| \notin I$, alors la suite $(a_n |z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc les suites $(a_n |z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers 0 et les séries correspondantes divergent.

■

Remarque 14.2 *Réciproquement, si $R' \in \overline{\mathbb{R}^+}$ est tel que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < R'$ (dans le cas où $R' > 0$) et divergente pour $|z| > R'$ [resp. $\sum |a_n z^n|$ est divergente pour $|z| > R'$], alors R' est le rayon de convergence R de cette série. En effet, si $0 \leq r < R'$, alors $\sum a_n r^n$ est convergente et $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car elle converge vers 0, donc $r \in I$. On a donc $[0, R'[\subset I$ et $R' \leq R$. Si $R' = +\infty$, nécessairement $R = +\infty$. Sinon, si $0 \leq r < R$, alors $\sum |a_n r^n|$ est convergente et r ne peut être strictement supérieur à R', donc $r \leq R'$, on a donc $[0, R[\subset [0, R']$ et $R \leq R'$. On a donc bien $R = R'$.*

Remarque 14.3 *Dans le cas où $R = 0$, le domaine de convergence D de la série est réduit à $\{0\}$, dans le cas où $R = +\infty$, c'est $\mathbb{C}$ tout entier et dans le cas où R est fini, tout ce que l'on peut dire est que $D(0, R) \subset D \subset \overline{D(0, R)}$.*

Exercice 14.4 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que, pour tout entier $p \geq 2$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{pn}$ est $+\infty$ si $R = +\infty$ ou $\sqrt[p]{R}$ si R est fini (on dit que la série $\sum a_n z^{pn}$ est lacunaire).*

Solution 14.4 *Si $R = +\infty$, alors $\sum a_n t^n$ converge pour tout nombre complexe t et donc pour tout les nombres complexes de la forme z^p.*
Si R est fini. Pour $|z| < \sqrt[p]{R}$, on a $|z|^p < R$ et $\sum a_n z^{pn}$ converge absolument. Pour $|z| > \sqrt[p]{R}$, on a $|z|^p > R$ et $\sum a_n z^{pn}$ diverge. Il en résulte que $\sqrt[p]{R}$ est le rayon de convergence de $\sum a_n z^{pn}$.

Exercice 14.5 *Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum (-1)^n z^{2n}$ et étudier la série pour $|z| = R$. Quelle est la somme de cette série ?*

Solution 14.5 *Le rayon de convergence de la série géométrique $\sum (-1)^n z^n$ valant 1, celui de $\sum (-1)^n z^{2n}$ est aussi 1 et pour $|z| < 1$, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-1z^2\right)^n = \frac{1}{1+z^2}.$$

Pour $|z| = 1$, la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0.

Exercice 14.6 *Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes telle qu'il existe un nombre complexe z_0 tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.*

Solution 14.6 *En désignant par M un majorant de la suite $(|a_n z_0^n|)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout nombre complexe z :*

$$\left|\frac{a_n}{n!} z^n\right| = |a_n z_0^n| \frac{1}{n!} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \frac{1}{n!} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

avec $\sum \frac{1}{n!} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < +\infty$ ($\sum \frac{t^n}{n!}$ converge pour tout t), ce qui entraîne la convergence absolue de $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

Exercice 14.7 *On désigne par $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \frac{1}{p_n} z^{p_n}$.*

Solution 14.7 *Pour $z = 1$, cette série diverge, donc $R \leq 1$.*
Les coefficients de cette série sont définis par $a_n = \frac{1}{n}$ si n est premier et $a_n = 0$ sinon, donc, pour $r \geq 0$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée si, et seulement si la suite $\left(\frac{1}{p_n} r^{p_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, ce qui est réalisé pour tout $r \in [0, 1]$, donc $R \geq 1$ et $R = 1$.

Exercice 14.8 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.*

1. *Que peut-on dire des rayons de convergence des séries* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$. *On note respectivement* $f(z)$ *et* $g(z)$ *les sommes de ces séries entières.*
2. *Montrer que pour tout réel* $x \in \left]0,1\right[$, *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt$ *est convergente.*
3. *Montrer que* $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt = xf(x)$ *pour tout réel* $x \in \left]0,1\right[$.

Solution 14.8 *On note* $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

1. *Comme la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, la série* $\sum a_n z^n$ *à un rayon de convergence* $R \geq 1$. *Par exemple pour* $a_n = \frac{1}{\rho^n}$ *avec* $\rho > 1$ *ce rayon de convergence est* $R = \rho$. *Avec* $\left|\frac{a_n}{n!}\right| \leq \frac{M}{n!}$, *on déduit que le rayon de convergence de la deuxième série est infini.*
2. *Pour* $x \in \left]0,1\right[$ *et* $t > 0$, *on a :*
$$\left|g(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n e^{-\frac{t}{x}}\right| \leq M \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\right) e^{-\frac{t}{x}} = M e^{t\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$
et avec $\int_0^{+\infty} e^{t\left(1-\frac{1}{x}\right)} dt < +\infty$ *(on a* $1 - \frac{1}{x} < 0$*), on déduit que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt$ *est absolument convergente.*
3. *Le changement de variable* $t = xu$ *donne :*
$$\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt = x \int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u} du$$
et en notant :
$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$$
on a :
$$\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u} du = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du + \int_0^{+\infty} R_n(xu)\, e^{-u} du$$
avec $\Gamma(k+1) = \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = k!$. *Donc :*
$$\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u} du = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \int_0^{+\infty} R_n(xu)\, e^{-u} du$$
et il s'agit de montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} R_n(xu)\, e^{-u} du = 0$. *Pour ce faire, on écrit que :*
$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{+\infty} R_n(xu)\, e^{-u} du\right| &\leq M \int_0^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k u^k}{k!} e^{-u} du \\
&\leq M \int_0^{+\infty} \left(e^{xu} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k u^k}{k!}\right) e^{-u} du \\
&\leq M \left(\int_0^{+\infty} e^{(x-1)u} du - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du\right) \\
&\leq M \left(\frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

14.2 Calcul pratique du rayon de convergence

Les théorème de d'Alembert et de Cauchy relatifs aux séries numériques nous fournissent deux critères pratiques pour calculer le rayon de convergence d'une série entière.

Théorème 14.5 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}^+}$, alors le rayon de convergence de cette série est $R = \frac{1}{\ell}$ avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.*

Démonstration. Pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \ell\,|z|$$

et le théorème de d'Alembert nous dit que si $|z| < \frac{1}{\ell}$, alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et si $|z| > \frac{1}{\ell}$, alors la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente. Il en résulte que $\frac{1}{\ell}$ est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. ∎

Remarque 14.4 *La réciproque du théorème précédent est fausse, c'est-à-dire que si R est le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$, rien ne permet d'affirmer que la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.*
Par exemple la série $\sum a_n z^n$ où $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ pour tout $n \geq 0$, a un rayon de convergence égal à 1 ($\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$ pour $|z| < 1$) et $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie puisque $a_n = 1$ pour n pair et $a_n = 0$ pour n impair.
L'exercice suivant nous fournit un autre contre-exemple.

Exercice 14.9 *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où $a_n = (2+(-1)^n)^n$ pour tout $n \geq 0$. Que dire de la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$?*

Solution 14.9 *On a $a_n = 3^n$ pour n pair et $a_n = 1$ pour n impair. Pour $r > \frac{1}{3}$, on a $|a_{2n}r^{2n}| = |3r|^{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc $R \leq \frac{1}{3}$. Pour $0 \leq r \leq \frac{1}{3}$, on a :*

$$|a_n r^n| = \left\{\begin{array}{l} (3r)^n \text{ si } n \text{ est pair} \\ r^n \text{ si } n \text{ est impair} \end{array}\right. \leq 1$$

et donc $R \geq \frac{1}{3}$. On a donc $R = \frac{1}{3}$.
On a :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{3^n} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{3^{n+1}}{1} \text{ si } n \text{ est impair} \end{array}\right.$$

et la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Corollaire 14.2 *Si $\sum a_n z^n$ est une série entière telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \neq 0$, alors son rayon de convergence vaut* 1.

Démonstration. Comme $\ell \neq 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ et $R = 1$. ■

L'exemple de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ nous montre que ce résultat est faux pour $\ell = 0$.

Corollaire 14.3 *Si $\sum a_n z^n$ est une série entière telle que a_n soit une fonction rationnelle non nulle de n, alors son rayon de convergence vaut* 1.

Démonstration. On a $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ où P et Q sont des fonctions polynomiales de degrés respectifs p et q (le polynôme Q n'ayant qu'un nombre fini de racines réelles, on aura $Q(n) \neq 0$ pour n assez grand). Avec $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_p n^p}{b_q n^q}$, on déduit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \left(\frac{n}{n+1}\right)^q$ et $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, donc $R = 1$. ■

Exercice 14.10 *Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$.*

Solution 14.10 *En posant $a_n = \frac{n!}{n^n}$, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

et $R = e$.

Exercice 14.11 *Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par a_n le nombre de diviseurs de n. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$.*

Solution 14.11 *Pour $n \geq 1$, on a $1 \leq a_n \leq n$, les séries entières $\sum z^n$ et $\sum n z^n$ ayant un rayon de convergence égal à* 1. *Il en résulte que $R = 1$.*

Exercice 14.12 *Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \arctan(n^\alpha) z^n$ où α est un réel et étudier la série pour $|z| = R$.*

Solution 14.12 *On note $a_n = \arctan(n^\alpha)$ pour tout $n \geq 1$.*
Pour $\alpha > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{\pi}{2} \neq 0$, donc $R = 1$. Pour $|z| = 1$, la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0.
Pour $\alpha = 0$, on a $a_n = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et $R = 1$. Pour $|z| = 1$, la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0.
Pour $\alpha = -\beta < 0$, on a $a_n \underset{+\infty}{\sim} n^\alpha$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = 1$$

donc $R = 1$. Pour $z = 1$, $a_n z^n = a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta}$ avec $a_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, il en résulte que $\sum a_n z^n$ converge si, et seulement si $\beta > 1$ (soit $\alpha < -1$). Pour $|z| = 1$ et $z \neq 1$, on *a* $z = e^{it}$ *avec* $t \in \left]0, 2\pi\right[$, *donc* $a_n z^n = \arctan\left(\frac{1}{n^\beta}\right) e^{int}$ *avec* $\left(\arctan\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)_{n\geq 1}$ *qui tend vers* 0 *en décroissant et le théorème d'Abel nous dit alors que la série* $\sum \arctan\left(\frac{1}{n^\beta}\right) e^{int}$ *est convergente (exercice 6.25).*

Théorème 14.6 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière. Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \overline{\mathbb{R}^+}$, *alors le rayon de convergence de cette série est* $R = \frac{1}{\ell}$.

Démonstration. Pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \ell\,|z|$$

et le théorème de Cauchy nous dit que si $|z| < \frac{1}{\ell}$, alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et si $|z| > \frac{1}{\ell}$, alors la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente. Il en résulte que $\frac{1}{\ell}$ est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. ■

Remarque 14.5 *Là encore la réciproque est fausse. Par exemple, pour* $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ *on a* $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ *pour* n *pair et* $\sqrt[n]{|a_n|} = 0$ *pour* n *impair, donc la suite* $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente et pourtant le rayon de convergence de* $\sum a_n z^n = \sum z^{2n}$ *vaut* 1.*En utilisant la notion de limite supérieure, on peut montrer le résultat suivant.*

Théorème 14.7 (Hadamard) *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est :*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Démonstration. Voir le problème 26. ■

Exercice 14.13 *Déterminer le rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum \frac{1}{n^{\ln(n)}} z^n$.

Solution 14.13 *En posant* $a_n = \frac{1}{n^{\ln(n)}}$, *on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\ln(n)}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right) = 1$$

et $R = 1$.

Exercice 14.14 *Déterminer le rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha} z^n$, *où* α *est un réel donné.*

Solution 14.14 *En posant pour $n \geq 1$, $a_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$, on a :*

$$u_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^{\alpha-1}}$$

Un développement limité nous donne :

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= n^{\alpha-1}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= n^{\alpha-1}\ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= n^{\alpha-1}\left(-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{n^{3-\alpha}}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right).\end{aligned}$$

Pour $\alpha < 3$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ et $R = 1$.
Pour $\alpha = 3$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) = -\frac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ et $R = \sqrt{e}$.
Pour $\alpha > 3$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$ et $R = +\infty$.

14.3 Opérations sur les séries entières

Comme pour les fonctions polynomiales, on peut définir sur l'ensemble des séries entières les opérations suivantes.

- la somme des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$;
- le produit des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$, où les coefficients c_n sont définis pour tout entier naturel n par :

  $$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

  Cette définition est donnée par analogie avec le produit de deux polynômes et on reconnaît là le produit de Cauchy des deux séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$;
- la série dérivée de la série entière $\sum a_n z^n$ est la série entière $\sum n a_n z^{n-1}$;
- la série primitive de la série entière $\sum a_n z^n$ est la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.

Théorème 14.8 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'. On désigne par R'' le rayon de convergence de la série entière somme $\sum (a_n + b_n) z^n$.*

1. *Si $R \neq R'$, alors $R'' = \min(R, R')$.*
2. *Si $R = R'$, alors $R'' \geq \min(R, R')$.*
3. *Dans tous les cas, on a pour $|z| < \min(R, R')$:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Démonstration. Pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \min(R, R')$, la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ est absolument convergente comme somme des séries absolument convergentes $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. On a donc $R'' \geq \min(R, R')$.

Supposons que $0 \leq R < R'$. On peut alors trouver un réel r tel que $R < r < R'$ et $\sum (a_n + b_n) r^n$ est divergente comme somme de la série divergente $\sum a_n r^n$ et de la série convergente $\sum b_n r^n$. On a donc $R'' \leq R$ et $R'' = R$ dans ce cas. ■

Remarque 14.6 *Dans le cas où $R = R'$, l'égalité $R'' = R$ n'est pas assurée en général comme le montre l'exemple de $b_n = -a_n$ avec R fini.*

Théorème 14.9 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'. On désigne par R'' le rayon de convergence de la série entière produit $\sum \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$. On a $R'' \geq \min(R, R')$ et pour $|z| < \min(R, R')$:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) \tag{14.1}$$

Démonstration. On suppose que R et R' sont strictement positifs et on note, pour tout entier naturel n, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Pour $0 \leq r < \min(R, R')$, on a pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} |c_n r^n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k r^k b_{n-k} r^{n-k}\right| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left|a_k r^k\right| \left|b_{n-k} r^{n-k}\right| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{n} \left|a_k r^k\right|\right) \left(\sum_{k=0}^{n} \left|b_{n-k} r^{n-k}\right|\right) \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left|a_k r^k\right|\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left|b_k r^k\right|\right) < +\infty \end{aligned}$$

ce qui signifie que la suite $(|c_n r^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On a donc $R'' \geq \min(R, R')$.

Pour $|z| < \min(R, R')$, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes et le théorème 6.19 nous donne l'égalité (14.1) (ce théorème nous permet aussi d'aboutir à la minoration $R'' \geq \min(R, R')$ puisqu'il nous dit que le produit de Cauchy des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est absolument convergent). ■

Remarque 14.7 *L'égalité $R'' = \min(R, R')$ n'est pas assurée en général comme le montre l'exemple des séries $\sum z^n$ et $1 - z$ de rayons de convergence respectifs 1 et $+\infty$. On a $c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 = 0$ pour $n \geq 1$ et $c_0 = a_0 b_0$. La série produit est de rayon de convergence infini de somme $\dfrac{1}{1-z}(1 - z) = 1$.*

Théorème 14.10 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. La série dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ et la série primitive $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont le même rayon de convergence R.*

Démonstration. Comme $\sum a_n z^n$ est la série dérivée de $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, il suffit de montrer qu'une série et sa série dérivée ont même rayon de convergence.

Notons :

$$I = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$$

et :

$$I' = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \left(n a_n r^{n-1} \right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée} \right\}$$

Ce sont deux intervalles réels contenant 0 et de bornes supérieures respectives R et R', les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$. Avec les inégalités :

$$\forall n \geq 1,\ |a_n r^n| \leq |n a_n r^n| = r \left| n a_n r^{n-1} \right|$$

on déduit que $I' \subset I$ et $R' \leq R$.

Si $R = 0$, on a alors $R' = 0$.

Si $R > 0$, pour tout réel $r \in \left]0, R\right[$, on peut trouver un réel $s \in \left]r, R\right[$ et posant $s = r + h$ avec $h > 0$, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$s^n = (r+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k r^{n-k} h^k \geq n r^{n-1} h$$

et :

$$\left| n a_n r^{n-1} \right| \leq \frac{1}{h} |a_n s^n|$$

la suite $(a_n s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée puisque $s \in \left[0, r\right[\subset I$ et en conséquence $r \in I'$. On a donc $\left]0, R\right[\subset I'$, ce qui entraîne $R \leq R'$ et $R = R'$. ∎

Corollaire 14.4 *Une série entière $\sum a_n z^n$ et toutes ses séries dérivées $\sum n(n-1)\cdots(n-p+1)\, a_n z^{n-p}$ ont toutes le même rayon de convergence.*

Démonstration. Se déduit immédiatement du théorème précédent par récurrence sur $p \geq 1$. ∎

Exemple 14.1 *La série géométrique $\sum z^n$ et toutes ses séries dérivées $\sum n(n-1)\cdots(n-p+1)\, z^{n-p}$, pour $p \geq 1$, ont toutes le même rayon de convergence 1. La série primitive $\sum \frac{z^{n+1}}{n+1}$ a également son rayon de convergence égal à 1.*

14.4 Fonctions développables en série entière

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de domaine de convergence D, on définit une fonction sur D en posant :

$$\forall z \in D,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

et on rappelle que, dans le cas où le rayon de convergence R de cette série entière est non nul, D contient le disque ouvert $D(0, R)$ de centre 0 et de rayon R.

Réciproquement, on s'intéresse ici aux fonctions définies sur un voisinage ouvert de 0 dans le plan complexe qui peuvent s'écrire comme somme d'une série entière.

Définition 14.2 *On dit qu'une fonction f définie sur un disque ouvert $D(0, \alpha)$ de centre 0 et de rayon $\alpha > 0$ du plan complexe est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ et un réel $r \in \left]0, \alpha\right]$ tels que :*

$$\forall z \in D(0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Dans un premier temps, on constate que si une fonction est développable en série entière sur un disque ouvert $D(0,r)$ elle est alors continue sur ce disque. En réalité elle est même indéfiniment dérivable (on peut définir la notion de dérivabilité au sens complexe, mais dans ce chapitre nous nous limiterons au cas réel).

Théorème 14.11 *Une fonction f développable en série entière sur un disque ouvert $D(0,r)$ du plan complexe est continue sur ce disque.*

Démonstration. On se donne un point $z_0 \in D(0,r)$. Pour tout $z \in D(0,r)$, on a :

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z^n - z_0^n)$$

avec, pour $n \geq 1$:

$$z^n - z_0^n = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k = (z - z_0) P_n(z)$$

ce qui donne :

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n P_n(z)$$

Comme $|z| < r$ et $|z_0| < r$, il existe un réel $t \in]0,r[$ tel que $|z| < t$ et $|z_0| < t$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$|a_n P_n(z)| \leq |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z|^{n-1-k} |z_0|^k < n |a_n| t^n$$

Une série et sa série dérivée ayant même rayon de convergence, la série $\sum n |a_n| t^n$ est convergente, donc $\sum a_n P_n(z)$ est absolument convergente et :

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |z - z_0| \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n P_n(z)| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n |a_n| t^n \right) |z - z_0|$$

ce qui entraîne la continuité de f en z_0. ■

Cette continuité de la somme d'une série entière nous permet de montrer l'unicité d'un développement en série entière.

Théorème 14.12 *Si une fonction est développable en série entière au voisinage de* 0, *alors ce développement est uniquement déterminé.*

Démonstration. Supposons qu'il existe deux suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $r > 0$ tels que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in D(0,r)$. En évaluant f en 0, on déduit que $f(0) = a_0 = b_0$. On termine alors le raisonnement par récurrence sur $n \geq 0$. Supposant que $a_k = b_k$ pour tout k compris entre 0 et n, de :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k z^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k z^k \end{aligned}$$

sur $D(0,r)$, on déduit que $z^{n+1}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^{k-n-1} = z^{n+1}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k z^{k-n-1}$ pour tout $z \in D(0,r)$ et $g(z) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^{k-n-1} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k z^{k-n-1}$ pour tout $z \in D(0,r) \setminus \{0\}$. Avec la continuité en 0 de la somme d'une série entière, on déduit alors que $a_{n+1} = \lim\limits_{z\to 0} g(z) = g(0) = b_{n+1}$. On a donc bien montré que $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ∎

Corollaire 14.5 *Si une fonction paire [resp. impaire] f est développable en série entière au voisinage de* 0, *alors ce développement est nécessairement de la forme :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$$

[resp. :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n+1} \;]$$

Pour la suite de ce paragraphe, on se limite aux séries entières et fonctions de la variable réelle, les coefficients des séries entières considérées pouvant être complexes.

Dans le cas où une série entière réelle $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence fini $R > 0$ converge pour $x = R$, on peut la prolonger par continuité en R. La démonstration de ce résultat se fait en utilisant une transformation d'Abel.

Théorème 14.13 (Abel) *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence fini $R > 0$ telle que la série $\sum a_n R^n$ soit convergente. En notant $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in \left]-R, R\right[$, on a :*

$$\lim_{x\to R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

et f peut être prolongée par continuité en R en posant $f(R) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Démonstration. On note $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ et pour tout $x \in \left]0, R\right]$, tout entier naturel n, $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. On a alors $a_n R^n = S_n(R) - S_{n-1}(R)$ pour tout $n \geq 1$ et pour $x \in \left]0, R\right[$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(S_k(R) - S_{k-1}(R)\right)\left(\frac{x}{R}\right)^k \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k - \sum_{k=1}^{n} S_{k-1}(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k \\
&= S_0(R) + \sum_{k=1}^{n} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} S_k(R)\left(\left(\frac{x}{R}\right)^k - \left(\frac{x}{R}\right)^{k+1}\right) + S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{k=0}^{n-1} S_k(R)\left(\frac{x}{R}\right)^k + S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n
\end{aligned}$$

et tenant compte de :

$$S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} S\cdot 0 = 0$$

pour $|x| < R$, on déduit que la série $\sum S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n$ converge et :

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Tenant compte de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{R}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{R}}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
f(x) - S &= \left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(R)\left(\frac{x}{R}\right)^n - S\left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{R}\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{x}{R}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(S_n(R) - S\right)\left(\frac{x}{R}\right)^n.
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(R) = S$, pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |S_n(R) - S| < \varepsilon$$

et pour $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned}
|f(x) - S| &\leq \left(1 - \frac{x}{R}\right)\left(\sum_{k=0}^{n_0} |S_k(R) - S|\left(\frac{x}{R}\right)^k + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{+\infty}\left(\frac{x}{R}\right)^k\right) \\
&\leq A(R - x) + \varepsilon
\end{aligned}$$

où :

$$\sum_{k=0}^{n_0} |S_k(R) - S|\left(\frac{x}{R}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{n_0} |S_k(R) - S| = R\cdot A$$

et :

$$\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{x}{R}}$$

Pour x voisin de R, on aura alors $|f(x) - S| \leq 2\varepsilon$. On a donc bien prouvé le résultat annoncé. ■

Théorème 14.14 *Soit f une fonction de la variable réelle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ où $r > 0$ avec :*

$$\forall x \in]-r, r[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes. La fonction f est alors continûment dérivable sur $]-r, r[$ avec :

$$\forall x \in]-r, r[\,,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Démonstration. On se fixe un réel x_0 dans $]-r, r[$ et nous allons montrer dans un premier temps que f est dérivable en x_0, la dérivée $f'(x_0)$ ayant la forme annoncée.

Sachant qu'une série et sa série dérivée ont même rayon de convergence, on peut définir la fonction g sur $]-r, r[$ par :

$$\forall x \in]-r, r[\,,\ g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et pour $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(P_n(x) - n x_0^{n-1}\right)$$

où on a posé pour $n \geq 1$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k.$$

Pour $n = 1$, on a :

$$P_n(x) - n x_0^{n-1} = 1 - 1 = 0$$

et donc :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left(P_n(x) - n x_0^{n-1}\right)$$

Comme $|x| < r$ et $|x_0| < r$, il existe un réel $t \in]0, r[$ tel que $|x| < t$ et $|x_0| < t$ et pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} a_n \left(P_n(x) - n x_0^{n-1}\right) &= a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k \left(x^{n-1-k} - x_0^{n-1-k}\right) \\ &= a_n \sum_{k=0}^{n-2} x_0^k \left(x^{n-1-k} - x_0^{n-1-k}\right) \end{aligned}$$

avec, pour $p = n - 1 - k$:

$$\begin{aligned}\left|x^p - x_0^p\right| &= |x - x_0| \left|\sum_{j=0}^{p-1} x^{p-1-j} x_0^j\right| \\ &< |x - x_0| \sum_{j=0}^{p-1} t^{p-1-j} t^j = |x - x_0|\, p t^{p-1}\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\left|a_n \left(P_n(x) - n x_0^{n-1}\right)\right| &\leq |a_n| \sum_{k=0}^{n-2} \left|x_0^k\right| \left|x^{n-1-k} - x_0^{n-1-k}\right| \\ &< |a_n|\, |x - x_0| \sum_{k=0}^{n-2} t^k (n - 1 - k)\, t^{n-2-k} \\ &< |a_n|\, |x - x_0|\, t^{n-2} \sum_{p=1}^{n-1} p = \frac{n(n-1)}{2} |a_n|\, t^{n-2} |x - x_0|\end{aligned}$$

La série dérivée seconde $\sum n(n-1) a_n z^{n-2}$ ayant même rayon de convergence que la série $\sum a_n z^n$, on déduit que la série $\sum n(n-1)|a_n| t^{n-2}$ est convergente, donc que la série $\sum a_n \left(P_n(x) - n x_0^{n-1}\right)$ est absolument convergente et :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0)\right| &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \left|a_n \left(P_n(x) - n x_0^{n-1}\right)\right| \\ &\leq \frac{|x - x_0|}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n|\, t^{n-2}\end{aligned}$$

On en déduit alors que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)$.

La fonction f est donc dérivable de dérivée égale à g et cette dérivée est continue d'après le théorème 14.11. ■

Par récurrence, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 14.6 *Soit f une fonction de la variable réelle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ où $r > 0$ avec :*

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes. La fonction f est alors indéfiniment dérivable sur $]-r, r[$ avec, pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel $x \in]-r, r[$:

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)\, a_n x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}.$$

En évaluant $f^{(p)}$ en 0, on retrouve l'unicité du développement en série entière de la fonction f avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Le théorème précédent nous permet également de donner le développement en série entière de la primitive nulle en 0 d'une fonction développable en série entière.

Corollaire 14.7 *Soit f une fonction de la variable réelle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ où $r > 0$ avec :*

$$\forall x \in]-r, r[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes. La primitive de f nulle en 0 est la fonction F définie par :

$$\forall x \in]-r, r[\,,\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exemple 14.2 *À partir du développement :*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

on déduit par dérivation et intégration, les développements :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

et :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

chacune de ces séries étant de rayon de convergence égal à 1.
Prenant $x = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}$$

la convergence de cette série étant plus rapide que celle de la série classique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$ (exercice 6.9). Pour $N = 10$, on obtient :

$$\ln(2) - \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}} \approx 3.793 \cdot 10^{-5}$$

La primitive nulle en 0 de $-\ln(1-x)$ est :

$$x + (1-x)\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)},$$

ce qui donne le développement en série entière :

$$(1-x)\ln(1-x) = -x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$$

le rayon de convergence étant égal à 1. Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\ln(2) = 1 - 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)\,2^n}.$$

Exercice 14.15 *En utilisant la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, *calculer* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Solution 14.15 *Le rayon de convergence de cette série entière est* 1 *(en utilisant le théorème de d'Alembert) et cette série converge pour* $x = 1$ *(théorème des séries alternées). Pour tout* $x \in \left]-1,1\right[$, *on note* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ *et la fonction* f *ainsi définie est dérivable sur* $\left]-1,1\right[$ *avec :*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

et donc $f(x) = \ln(1+x)$. *En utilisant le théorème 14.13 d'Abel, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \ln(2).$$

Exercice 14.16 *En utilisant la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, *calculer* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Solution 14.16 *Le rayon de convergence de cette série entière est* 1 *(en utilisant le théorème de d'Alembert) et cette série converge pour* $x = 1$ *(théorème des séries alternées). Pour tout* $x \in \left]-1,1\right[$, *on note* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ *et la fonction* f *ainsi définie est dérivable sur* $\left]-1,1\right[$ *avec :*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

et donc $f(x) = \arctan(x)$. *En utilisant le théorème 14.13 d'Abel, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 14.17

1. *Donner le développement en série entière, en précisant son rayon de convergence, de la fonction* arctan.
2. *En déduire la valeur de* $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n \frac{1}{2n+1}$.
3. *Calculer la primitive qui s'annule en* 0 *de la fonction* arctan *et donner le développement en série entière de cette fonction, en précisant son rayon de convergence,*
4. *En déduire la valeur de* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Solution 14.17

1. *À partir du développement :*

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

on déduit par intégration le développement :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

chacune de ces séries étant de rayon de convergence égal à 1.

2. *La valeur* $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *donne :*

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3}3^n (2n+1)}$$

et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{6}\sqrt{3}.$$

3. *Une intégration par parties donne :*

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\, dx = \int \arctan(x)\,(x)'\, dx &= x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c \\ &= x\arctan(x) - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) + c\end{aligned}$$

la primitive nulle en 0 *étant obtenue pour* $c = 0$. *Il en résulte que :*

$$x\arctan(x) - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$$

le rayon de convergence valant 1.

4. *Comme la série* $\sum (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ *est convergente, en utilisant le théorème 14.13 d'Abel, on a :*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} &= \lim_{x\to 1}\left(x\arctan(x) - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \ln(2).\end{aligned}$$

Exercice 14.18 *Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle :*

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}.$$

Solution 14.18 *Le coefficient de cette série entière étant une fonction rationnelle, son rayon de convergence vaut* 1. *Notons* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$ *sa somme pour tout* $x \in \left]-1,1\right[$. *Cette fonction est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\left]-1,1\right[$ *avec :*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \text{ et } f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

ce qui donne $f'(x) = -\ln(1-x)$ *et en effectuant une intégration par parties :*

$$\begin{aligned}f(x) = \int \ln(1-x)(-1)\, dx &= \int \ln(1-tx)(1-x)'\, dx \\ &= (1-x)\ln(1-x) - \int \frac{-1}{1-x}(1-x)\, dx \\ &= (1-x)\ln(1-x) + x + c\end{aligned}$$

avec $c = f(0) = 0$.

Exercice 14.19 *Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle :*

$$\sum \frac{n^2-1}{n+2} x^n.$$

Solution 14.19 *Le coefficient de cette série entière étant une fonction rationnelle, son rayon de convergence vaut* 1. *Notons* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n+2} x^n$ *sa somme pour tout* $x \in]-1,1[$. *La fonction* $g : x \mapsto x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n+2} x^{n+2}$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1,1[$ *avec :*

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n-1) x^{n+1} \\ &= x^3 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} + x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= x^3 \left(\frac{1}{1-x}\right)'' + x^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)' - x \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{2x^3}{(1-x)^3} + \frac{x^2}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} \\ &= \frac{2x^3 + x^2(1-x) - x(1-x)^2}{(1-x)^3} = \frac{3x^2-x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

En écrivant que :

$$\begin{aligned} 3x^2 - x &= 3(1-x)^2 + 5x - 3 \\ &= 3(1-x)^2 - 5(1-x) + 2 \end{aligned}$$

on a :

$$g'(x) = \frac{3}{1-x} - \frac{5}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^3}$$

et :

$$g(x) = -3\ln(1-x) - \frac{5}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + c$$

avec $g(0) = 0 = -4 + c$. *On a donc :*

$$\begin{aligned} x^2 f(x) &= -3\ln(1-x) - \frac{5}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + 4 \\ &= \frac{x(4x-3)}{(1-x)^2} - 3\ln(1-x) \end{aligned}$$

et :

$$f(x) = \frac{4x-3}{x(1-x)^2} - 3\frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

la fonction du second membre se prolongeant par continuité en 0 *comme le montre un développement limité en* 0 *de* $\ln(1-x)$ *et* $\frac{1}{(1-x)^2}$.

On a vu que si une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 est développable en série entière, alors ce développement est nécessairement donné par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Mais il ne faut pas croire que de manière générale toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 est développable en série entière. Par exemple, la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec toutes ses dérivées en 0 qui sont nulles et pourtant elle n'est pas développable en série entière puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x)$ pour $x \neq 0$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 soit développable en série entière est donnée par le théorème qui suit.

Théorème 14.15 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage ouvert I de 0 et à valeurs complexes. Cette fonction est développable en série entière au voisinage de 0 si, et seulement si, il existe un réel $r > 0$ tel que $]-r, r[\subset I$ et pour tout $x \in I$ la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

converge vers 0 sur $]-r, r[$. Dans ce cas, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$ et le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à r.

Démonstration. Si f est développable en série entière en 0, ce développement est nécessairement $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ sur un intervalle $]-r, r[\subset I$ et pour tout $x \in]-r, r[$, la suite des restes $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle.

Réciproquement dire que pour tout $x \in]-r, r[$, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle signifie exactement que la série numérique $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge et que sa somme est $f(x)$. ■

Pour montrer que la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on peut utiliser l'expression de Lagrange du reste $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_{n,x} x)}{(n+1)!} x^{n+1}$ avec $0 < \theta_{n,x} < 1$ ou sa représentation intégrale :

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(\theta x) (1-\theta)^n \, d\theta.$$

Exemple 14.3 *Dans le cas de la fonction exponentielle réelle, on a pour tout réel x :*

$$|R_n(x)| = \frac{e^{\theta_{n,x} x}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Il en résulte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

et le rayon de convergence de cette série est infini.

Ce exemple est un cas particulier du résultat suivant.

Théorème 14.16 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur un voisinage ouvert I de 0 et à valeurs complexes. S'il existe un réel $r>0$ tel que $]-r,r[\subset I$ et pour tout x dans $]-r,r[$ on peut trouver une constante M_x avec :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right|\leq M_x,$$

alors f est développable en série entière dans $]-r,r[$ avec $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Démonstration. La formule de Taylor-Lagrange nous permet d'écrire pour tout réel $x\in\ ]-r,r[$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta_{n,x}x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

où $\theta_{n,x}$ est un réel (dépendant de n et de x) compris entre 0 et 1 et on a :

$$|R_n(x)|=\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|\leq M_x\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\underset{n\to+\infty}{\to}0$$

■

En utilisant ce résultat, on déduit les développements classiques suivants où le rayon de convergence est indiqué entre parenthèses.

–
$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ \ (R=+\infty)$$

ce qui se déduit de :

$$f^{(n)}(0)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^p\ \text{ si } n=2p\\ 0 \text{ si } n=2p+1\end{cases}$$

et de :

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\leq M_x=1$$

–
$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \ (R=+\infty)$$

ce qui se déduit de :

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^p\ \text{ si } n=2p+1\\ 0 \text{ si } n=2p\end{cases}$$

et de :

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\leq M_x=1$$

–
$$\operatorname{ch}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ \ (R=+\infty)$$

ce qui se déduit de :

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}\operatorname{ch}(0)=1 \text{ si } n \text{ est pair}\\ \operatorname{sh}(0)=0 \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

et de :

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=\begin{cases}\operatorname{ch}(x)\ \text{ si } n \text{ est pair}\\ |\operatorname{sh}(x)|\ \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}\leq M_x=\max\left(\operatorname{ch}(x),|\operatorname{sh}(x)|\right)$$

–

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \ (R = +\infty)$$

ce qui se déduit de :

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} \operatorname{sh}(0) = 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \operatorname{ch}(0) = 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et de :

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \begin{cases} |\operatorname{sh}(x)| \ \text{ si } n \text{ est pair} \\ \operatorname{ch}(x) \ \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \leq M_x = \max(\operatorname{ch}(x), |\operatorname{sh}(x)|)$$

–

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \ \ (R = 1)$$

où α est un réel non entier naturel, ce qui se déduit de :

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

et de :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\int_0^1 (1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n\, d\theta.$$

avec :

$$0 \leq \frac{1-\theta}{1+\theta x} \leq 1$$

pour $0 \leq \theta \leq 1$ et $-1 < x < 1$ (on a alors $-\theta < \theta x < \theta$ et $0 \leq 1-\theta < 1+\theta x$), ce qui donne :

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)\int_0^1 (1+\theta x)^{\alpha-1}\, d\theta \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

puisque la série $\sum \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}|x|^{n+1}$ converge pour $|x| < 1$ (en utilisant le théorème de d'Alembert). Le théorème de d'Alembert nous dit aussi que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.
Pour $\alpha = -1$, on retrouve le développement de $\frac{1}{1+x}$ et pour les valeurs particulières $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1.3\cdots(2n-3)}{2.4\cdots(2n)}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(2n-1)\,2^{2n}\,(n!)^2}x^n \ \ (R=1)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1.3\cdots(2n-1)}{2.4\cdots(2n)}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}x^n \ \ (R=1)$$

Exercice 14.20 *Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \arcsin(x)$ en précisant le rayon de convergence.*

Solution 14.20 *On a, pour $x \in]-1,1[$:*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} x^{2n}$$

et :

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{(2n+1)\, 2^{2n}} x^{2n+1}$$

le rayon de convergence étant égal à 1.

Exercice 14.21 *Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{\arcsin(x)}{2}\right)$ en précisant le rayon de convergence.*

Solution 14.21 *La fonction f est définie et continue sur $[-1,1] \setminus \{0\}$. Un développement limité nous donne en tenant compte de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{x} = 1$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left(\frac{\arcsin(x)}{2} + o(\arcsin(x))\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\arcsin(x)}{x} + o(1) \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On prolonge donc f par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$.
Pour $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, on a $\arcsin(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$, donc $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$ et :

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\arcsin(x)}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(\arcsin(x))) \\ = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-x^2}\right) &= \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

les quantités $\sin\left(\dfrac{\arcsin(x)}{2}\right)$ et $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ étant de même signe. On a donc :

$$f(x) = \frac{1}{x}\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}$$

sur $[-1,1] \setminus \{0\}$, le résultat étant encore valable en 0 par continuité.
Utilisant les développements en série entière de $\sqrt{1+x}$ et $\sqrt{1-x}$ sur $]-1,1[$, on en déduit que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!}{2^{4n+1}(2n+1)!\,(2n)!} x^{2n}.$$

Exercice 14.22 *On se fixe un réel θ dans $]0,\pi[$ et on s'intéresse à la série entière $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n} z^n$.*

1. *Montrer que le rayon de convergence de cette série vaut* 1.

2. *Étudier la série* $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n} z^n$ *pour* $z = 1$ *et* $z = -1$.
3. *On désigne par* f *la fonction définie sur* $[-1,1]$ *par :*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n.$$

Justifier le fait que f *est indéfiniment dérivable sur* $]-1,1[$ *et expliciter sa dérivée.*

4. *En déduire que :*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + \arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$$

pour $\theta \in]0,\pi[$ *et* $x \in]-1,1[$.

5. *Montrer que pour tous réels* x, y *tels que* $xy < 1$, *on a :*

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

6. *En déduire que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n = \arctan\left(\frac{x\sin(\theta)}{1 - x\cos(\theta)}\right)$$

pour $\theta \in]0,\pi[$ *et* $x \in]-1,1[$.

7. *Montrer que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

pour $\theta \in]0,\pi[$.

Solution 14.22

1. *Comme la suite* $\left(\frac{\sin(n\theta)}{n}\right)_{n\geq 1}$ *est bornée (on a* $\left|\frac{\sin(n\theta)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \leq 1$*), on déduit que si* R *est le rayon de convergence de cette série entière, alors* $R \geq 1$.
La série $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$ *étant semi-convergente (exercice 6.41), on a* $R \leq 1$ *(si* $R > 1$ *la série* $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$ *est absolument convergente, ce qui n'est pas). On a donc* $R = 1$.
2. *Pour* $z = 1$, *on sait déjà que* $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$ *est semi-convergente. Avec le théorème 6.25, on a vu que si la suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* 0 *en décroissant, alors la série* $\sum u_n e^{int}$ *est convergente pour tout réel* $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. *Prenant* $u_n = \frac{1}{n}$, *on en déduit que la série* $\sum \frac{1}{n} e^{in(\theta+\pi)}$ *est convergente (on a* $\theta + \pi \in]\pi, 2\pi[$*) et il en est de même de la partie imaginaire* $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}(-1)^n$.
3. *La somme d'une série entière de rayon de convergence* R *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R,R[$ *et sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme, ce qui donne pour* f *sur* $]-1,1[$ *:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\theta)\, x^{n-1} = \Im(g(x))$$

où :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta} x^{n-1} = e^{i\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(xe^{i\theta}\right)^n = \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}$$
$$= \frac{e^{i\theta}\left(1 - xe^{-i\theta}\right)}{\left(1 - x\cos(\theta)^2 + x^2\sin^2(\theta)\right)} = \frac{e^{i\theta} - x}{(1 - x\cos(\theta))^2 + x^2\sin^2(\theta)}$$

(on a $\left|xe^{i\theta}\right| = |x| < 1$*), ce qui donne :*

$$f'(x) = \frac{\sin(\theta)}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}$$

4. *Il s'agit de calculer une primitive de* $f'(x)$. *On a :*

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} = \int \frac{dx}{(x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)}$$
$$= \frac{1}{\sin^2(\theta)} \int \frac{dx}{1 + \left(\dfrac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2}$$

(on a $\sin(\theta)$ *pour* $\theta \in \left]0, \pi\right[$*) et en effectuant le changement de variable* $u = \dfrac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ *:*

$$F(x) = \frac{1}{\sin(\theta)} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{\sin(\theta)} \arctan(u)$$
$$= \frac{1}{\sin(\theta)} \arctan\left(\frac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$$

et tenant compte de $f(0) = 0$ *:*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + \arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$$

pour $\theta \in \left]0, \pi\right[$ *et* $x \in \left]-1, 1\right[$.

5. *Pour* y *fixé, on définit* $\varphi(x) = \arctan\left(\dfrac{x + y}{1 - xy}\right) - \arctan(x)$ *pour* $xy < 1$. *Pour* $y = 0$ *c'est la fonction nulle définie sur* $\mathbb{R}$, *pour* $y > 0$, *elle est définie sur l'intervalle* $\left]-\infty, \dfrac{1}{y}\right[$ *et pour* $y < 0$, *elle est définie sur l'intervalle* $\left]\dfrac{1}{y}, +\infty\right[$. *Cette fonction est dérivable avec :*

$$\varphi'(x) = \frac{\dfrac{(1 - xy) + (x + y)y}{(1 - xy)^2}}{1 + \left(\dfrac{x + y}{1 - xy}\right)^2} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1 + y^2}{(1 - xy)^2 + (x + y)^2} - \frac{1}{1 + x^2}$$
$$= \frac{1 + y^2}{1 + x^2y^2 + x^2 + y^2} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{(1 + y^2)(1 + x^2) - (1 + x^2y^2 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2y^2 + x^2 + y^2)(1 + x^2)}$$
$$= 0.$$

Il en résulte que φ *est constante égale à* $\varphi(0) = \arctan(y)$ *(*0 *est toujours dans l'intervalle de définition de* φ*).*

6. *Constatant que :*
$$\frac{x-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{x\cos(\theta)-\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} < 1$$
(c'est équivalent à $x\cos(\theta)-\cos^2(\theta)<\sin^2(\theta)$, *soit à* $x\cos(\theta)<\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ *qui est vrai pour* $\theta\in\left]0,\pi\right[$ *et* $x\in\left]-1,1\right[$*), on déduit que :*
$$f(x)=\arctan\left(\frac{\frac{x-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}+\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}{1-\frac{x-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}\right)=\arctan\left(\frac{x\sin(\theta)}{\sin^2(\theta)-(x-\cos(\theta))\cos(\theta)}\right)$$
$$=\arctan\left(\frac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}\right)$$

7. *Utilisant le théorème d'Abel 14.13, on déduit de la convergence de* $\sum\frac{\sin(n\theta)}{n}$ *que :*
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}=\lim_{x\to1^-}\arctan\left(\frac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}\right)=\arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}\right)$$
avec :
$$\frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)}=\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
ce qui donne :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}=\arctan\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=\frac{\pi-\theta}{2}$$

Exercice 14.23 *Développer en série entière la fonction :*
$$f:x\mapsto\int_0^{\pi}\cos(x\cos(t))\,dt.$$

Solution 14.23 *Pour tout réels* x *et* t, *on a :*
$$\cos(x\cos(t))=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}\cos^{2n}(t)}{(2n)!}.$$
Notant respectivement $S_n(x,t)$ *et* $R_n(x,t)$ *la somme partielle et le reste d'indice* n *de cette série, on a pour tout réel* x *:*
$$f(x)=\int_0^{\pi}S_n(x,t)\,dt+\int_0^{\pi}R_n(x,t)\,dt$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\int_0^{\pi}\cos^{2k}(t)\,dt\right)\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\int_0^{\pi}R_n(x,t)\,dt$$
avec :
$$\left|\int_0^{\pi}R_n(x,t)\,dt\right|\leq\int_0^{\pi}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!}dt=\pi\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!}\underset{n\to+\infty}{\to}0$$

puisque la série $\sum \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ *est convergente. Il en résulte que :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

en notant $I_n = \int_0^{\pi} \cos^{2n}(t)\,dt$ *pour tout entier naturel* n.
En intégrant par parties, on obtient la relation de récurrence

$$2nI_n = (2n-1) I_{n-1},$$

avec $I_0 = \pi$, *ce qui donne* $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$ *et :*

$$f(x) = \pi \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

le rayon de convergence de cette série entière étant infini.

14.5 Séries entières et équations différentielles

Le théorème 14.10 peut être utilisé pour déterminer des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants développables en série entière.

Cette méthode est illustrée par les exercice qui suivent.

Exercice 14.24 *Déterminer une solution développable en série entière de l'équation différentielle :*

$$2x(1+x)y'' + (5x+3)y' + y = 0.$$

Solution 14.24 *Supposons qu'il existe une solution* f *de cette équation qui soit non identiquement nulle et développable en série entière sur un intervalle* $]-R, R[$ *où* $R \in \overline{\mathbb{R}^+}$ *est à déterminer. Notons, pour tout* $x \in]-R, R[$ *:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Sur $]-R, R[$, *on a :*

$$\begin{cases} f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ f''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} \\ xf'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \\ xf''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n \\ x^2 f''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n \end{cases}$$

et :

$$a_0 + 3a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2n\,(n+1)\,a_{n+1} + 2n\,(n-1)\,a_n + 5na_n + 3\,(n+1)\,a_{n+1} + a_n\right) x^n = 0$$

soit :

$$a_0 + 3a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)\,(2n+3)\,a_{n+1} + (n+1)\,(2n+1)\,a_n\right) x^n = 0$$

encore équivalent à dire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est solution de l'équation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} a_0 + 3a_1 = 0, \\ \forall n \geq 1,\ (2n+3)\,a_{n+1} + (2n+1)\,a_n = 0. \end{cases}$$

(unicité du développement en série entière d'une fonction).
Par récurrence, on en déduit que :

$$\left\{ \forall n \geq 0,\ a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} a_0 \right.$$

soit :

$$f(x) = a_0 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1} = a_0 \frac{\arctan\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 14.25 *Déterminer, en précisant leur rayon de convergence, les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :*

$$xy'' + (x-2)\,y' - 2y = 0. \tag{14.2}$$

Solution 14.25 *Supposons qu'il existe une solution f de* (14.2) *non identiquement nulle et développable en série entière sur un intervalle* $]-R, R[$ *où* $R \in \overline{\mathbb{R}^+}$ *est à déterminer. Notons, pour tout* $x \in \left]-R, R\right[$ *:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

En utilisant le théorème 14.10, on peut écrire que, sur $\left]-R, R\right[$, *on a :*

$$\begin{cases} f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,a_{n+1} x^n \\ xf'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \\ xf''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,(n+1)\,a_{n+1} x^n \end{cases}$$

et f est solution de (14.2) *si, et seulement si :*

$$-2\,(a_0 + a_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\,(n+1)\,a_{n+1} + na_n - 2\,(n+1)\,a_{n+1} - 2a_n\right) x^n = 0.$$

encore équivalent à dire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est solution de l'équation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} a_1 + a_0 = 0, \\ \forall n \geq 1,\ (n-2)\,((n+1)\,a_{n+1} + a_n) = 0. \end{cases}$$

(unicité du développement en série entière d'une fonction). Cette équation est encore équivalente à :

$$\begin{cases} a_1 + a_0 = 0, \\ 2a_2 + a_1 = 0, \\ \forall n \geq 3,\ a_{n+1} = -\dfrac{1}{(n+1)} a_n. \end{cases}$$

Par récurrence, on en déduit que :

$$\begin{cases} a_1 = -a_0 \\ a_2 = \dfrac{a_0}{2} \\ \forall n \geq 3,\ a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!} 6a_3 \end{cases}$$

soit :

$$f(x) = a_0 \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - 6a_3 \left(\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right)$$

où a_0 et a_3 sont deux constantes réelles. Le rayon de convergence de cette série étant égal à $+\infty$. On peut aussi écrire ces solutions sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_0 + 6a_3) \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - 6a_3 e^{-x} \\ &= \alpha \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) + \beta e^{-x} \end{aligned}$$

où α et β sont deux constantes réelles.

Inversement, on peut trouver le développement en série entière d'une fonction en écrivant cette fonction comme solution d'une équation différentielle.

Exercice 14.26 *Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = (1+x)^\alpha$ où α est un réel non entier naturel.*

1. *Montrer que f est l'unique solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle avec condition initiale suivante :*

$$\begin{cases} (1+x) y' - \alpha y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. *Retrouver le développement en série entière de f ainsi que son rayon de convergence.*

Solution 14.26

1. *On a bien $f(0) = 1$ et pour tout $x \in]-1,1[$:*

$$(1+x) f'(x) - \alpha f(x) = (1+x) \alpha (1+x)^{\alpha-1} - \alpha (1+x)^\alpha = 0$$

   Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure de l'unicité de cette solution.

2. *Supposons qu'il existe une solution g de cette équation différentielle développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ où $R \in \overline{\mathbb{R}^+}$ est à déterminer. Notons, pour tout $x \in]-R,R[$:*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On a :

$$\begin{cases} g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ x g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \end{cases}$$

et g est solution de cette équation différentielle si, et seulement si :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1) a_{n+1} + n a_n - \alpha a_n \right) x^n = 0$$

encore équivalent à :

$$\forall n \geq 0,\ a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n$$

avec $a_0 = g(0) = 1$, ce qui donne par récurrence :

$$\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{\alpha (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!},$$

soit :

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n.$$

Le théorème de d'Alembert nous dit que le rayon de convergence de série entière est égal à 1. Enfin $f = g$ du fait de l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy. On retrouve ainsi le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ sur $]-1, 1[$.

Exercice 14.27 *Montrer que la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire le développement en série entière de cette fonction.*

Solution 14.27 *Les fonctions $x \mapsto \arcsin(x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ étant développable en série entière sur $]-1, 1[$, il en est de même du produit f. De la relation $\sqrt{1-x^2} f(x) = \arcsin(x)$, on déduit par dérivation (les fonctions considérées sont $\mathcal{C}^\infty$) que :*

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f(x) + \sqrt{1-x^2} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ce qui se traduit en disant que f est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} -xy + (1-x^2) y' = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En écrivant, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

on a :

$$\begin{cases} x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ x^2 f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n \end{cases}$$

et f est solution de cette équation différentielle si, et seulement si :

$$a_1 + (2a_2 - a_0)\,x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-a_{n-1} + (n+1)\,a_{n+1} - (n-1)\,a_{n-1}\right) x^n = 1$$

soit :

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)\,a_{n+1} - na_{n-1}\right) x^n = 1$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ (n+1)\,a_{n+1} - na_{n-1} = 0 \end{cases}$$

avec $a_0 = f(0) = 0$. On a donc :

$$\forall p \geq 1,\ 2pa_{2p} = (2p-1)\,a_{2(p-1)}$$

avec $a_0 = 0$, ce donne $a_{2p} = 0$ pour tout $p \geq 0$ (récurrence immédiate) et :

$$\forall n \geq 1,\ (2p+1)\,a_{2p+1} = 2pa_{2p-1}$$

qui donne par récurrence :

$$a_{2p+1} = \frac{(2p)\cdot(2p-2)\cdot\cdots\cdot 2}{(2p+1)\cdot(2p-1)\cdot\cdots\cdot 3} a_1$$

avec $a_1 = 1$, soit :

$$a_{2p+1} = \frac{\left((2p)\cdot(2p-2)\cdot\cdots\cdot 2\right)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p}\,(p!)^2}{(2p+1)!}$$

pour tout $p \geq 0$. Le développement en série entière de f sur $]-1,1[$ est donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Le fait que les coefficients a_{2n} sont tous nuls était prévisible puisque la fonction f est impaire.

Exercice 14.28 *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{ch}(x)\cos(x)$ est solution d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre à coefficients constants. En déduire le développement en série entière de cette fonction.*

Solution 14.28 *Les fonctions* ch *et* cos *étant développable en série entière sur $\mathbb{R}$, il en est de même du produit f. On peut écrire que :*

$$f(x) = \Re\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} e^{ix}\right) = \frac{1}{2}\Re\left(e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x}\right)$$

et la dérivée quatrième de f est donnée par :

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \frac{1}{2}\Re\left((1+i)^4 e^{(1+i)x} + (-1+i)^4 e^{(-1+i)x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Re\left((1+i)^4 e^{(1+i)x} + (1-i)^4 e^{(-1+i)x}\right) \end{aligned}$$

avec :

$$(1 \pm i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4e^{\pm i\pi} = -4$$

ce qui donne :

$$f^{(4)}(x) = -4\frac{1}{2}\Re\left(e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x}\right) = -4f(x)$$

ce qui se traduit en disant que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle avec conditions initiales :

$$\begin{cases} y^{(4)} + 4y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 0 \end{cases}$$

En écrivant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

on a $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geq 0$ puisque f est paire, donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$$

et :

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} (2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\, a_{2n} x^{2n-4} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)\, a_{2n+4} x^{2n} \end{aligned}$$

et f est solution de cette équation différentielle si, et seulement si :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)\, a_{2n+4} + 4a_{2n}\right) x^{2n} = 0$$

ce qui donne :

$$\forall n \geq 0,\ a_{2n+4} = -\frac{4}{(2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)} a_{2n} \tag{14.3}$$

Pour $n = 2p+1$, avec $p \geq 0$, on a :

$$a_{4p+6} = -\alpha_p a_{4p+2}$$

avec $a_2 = \dfrac{f''(0)}{2} = 0$, ce qui donne $a_{4p+2} = 0$ pour tout $p \geq 0$ par une récurrence immédiate. Sachant déjà que les a_{4p+1} et a_{4p+3}, sont tous nuls, il reste à déterminer les a_{4p} pour tout $p \geq 0$. Notant $b_p = a_{4p}$, on a en prenant $n = 2p$ dans (14.3) :

$$\forall p \geq 0,\ b_{p+1} = -\frac{4}{(4p+4)(4p+3)(4p+2)(4p+1)} b_p$$

avec $b_0 = a_0 = 1$, et par récurrence :

$$\forall p \geq 0,\ b_p = \frac{(-1)^p 4^p}{(4p)!}$$

Le développement en série entière de f sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(4n)!} x^{4n}$$

On peut aussi calculer les dérivées successives de f :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2} \Re \left((1+i)^n e^{(1+i)x} + (-1+i)^n e^{(-1+i)x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re \left((1+i)^n e^{(1+i)x} + (-1)^n (1-i)^n e^{(-1+i)x} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ avec :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \frac{1}{2} \Re \left((1+i)^n + (-1)^n (1-i)^n \right) \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{2} \Re \left(e^{in\frac{\pi}{4}} + (-1)^n e^{-in-i\frac{\pi}{4}} \right) \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{2} \left(1 + (-1)^n\right) \cos \left(n \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Pour $n = 2p+1$, on a bien $a_{2n+1} = 0$. Pour $n = 4p+2$, on a :

$$f^{(n)}(0) = 2^{2p+1} \cos \left((2p+1) \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

et pour $n = 4p$:

$$f^{(n)}(0) = 4^p \cos(p\pi) = 4^p (-1)^p .$$

Exercice 14.29 *On définit les fonctions f et g par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}, \\ g(x) = e^{f(x)}. \end{array} \right.$$

Montrer que g est développable en série entière sur un intervalle à préciser.

Solution 14.29 *Le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ est $R_1 = 1$ (règle de d'Alembert), la série étant absolument convergente pour $x = -1$ et $x = 1$ (série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$). Les fonctions f et g sont alors $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ avec $g' = f'e^f = f'g$. La fonction g est donc solution de l'équation différentielle $y' = f'y$ avec la condition initiale $g(0) = 1$. Supposons que cette équation différentielle avec condition initiale admette une solution h développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$, soit $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a alors pour $|x| < \min(R,1)$:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

ce qui donne :

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1}$$

avec $a_0 = 1$. *Par récurrence, on voit que* $0 < a_n \leq 1$, *ce qui entraîne* $R \geq 1$.
Les fonctions g *et* h *étant solutions de la même équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *avec condition initiale, on déduit que* $g = h$ *et* g *est développable en série entière sur* $]-1, 1[$. *Si le rayon de convergence de* g *est strictement supérieur à* 1, *la fonction* g *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur un voisinage ouvert de* 1, *mais* $g' = fg$ *avec* $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = e^{f(1)} = e^{\frac{\pi^2}{6}} > 0$ *donne* $g'' = f'g + fg' = (f' + f^2) g$ *et* $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{g''(x)}{g(x)} - f^2(x)\right)$ *avec* $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+1} = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ *qui n'a pas de limite quand* x *tend vers* 1. *On aboutit donc à une impossibilité. Le rayon de convergence de cette série est donc* $R = 1$.

14.6 Exercices supplémentaires

Exercice 14.30 *Le but de cet exercice est de calculer la somme de la série numérique :*

$$\sum \frac{1}{u_n} \text{ où } u_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ pour tout } n \geq 1$$

en utilisant la série entière $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{u_n}$. *La convergence de* $\sum \dfrac{1}{u_n}$ *est justifiée avec l'exercice 6.45, question 1.*

1. *Déterminer le rayon de convergence* R *de cette série entière.*
2. *Calculer la somme des séries entières* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ *et* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$ *sur leur domaine de convergence.* *On notera respectivement* $f_1(x)$ *et* $f_2(x)$ *ces sommes.*
3. *Calculer les primitives de* $\ln(1-x^2)$ *sur* $]-1, 1[$.
4. *Calculer les primitives de* $\dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ *sur* $]-1, 1[$.
5. *En déduire la somme* $f(x)$ *de la série entière* $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{u_n}$ *sur son domaine de convergence.*
6. *En déduire la somme de la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{u_n}$.

Solution 14.30

1. *Avec* $\left|\dfrac{x^{2n+1}}{u_n}\right| < \dfrac{1}{u_n}$ *pour* $|x| < 1$ *et la convergence de* $\sum \dfrac{1}{u_n}$, *on déduit que* $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{u_n}$ *converge absolument.*
   Pour $|x| > 1$, *on a* $\left|\dfrac{x^{2n+1}}{u_n}\right| > \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)^3} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ *et* $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{u_n}$ *diverge. Donc* $R = 1$.
2. *Le rayon de convergence de ces séries entières est* $R = 1$. *Par dérivation, on a :*
   $$f_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$
   et $f_1(x) = -\ln(1-x)$ *(on a* $f_1(0) = 0$*). Puis pour* $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$ *:*
   $$\begin{aligned} f_2(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} &= \frac{f_1(x) - x}{x} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - 1 \end{aligned}$$

le résultat étant encore valable en 0 *puisque* f_2 *est continue sur* $]-1,1[$ *(on a* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$*).*

3. *On a :*

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1-x^2\right)dx &= \int \ln(1-x)\,dx + \int \ln(1+x)\,dx \\ &= -(1-x)\ln(1-x) - x + (1+x)\ln(1+x) - x + c \\ &= (1+x)\ln(1+x) - (1-x)\ln(1-x) - 2x + c \\ &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x\ln\left(1-x^2\right) - 2x + c\end{aligned}$$

4. *Une intégration par parties avec :*

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) = \ln\left(1-x^2\right),\ u'(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x^2},\ v(x) = -\dfrac{1}{x}\end{array}\right.$$

et :

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}dx &= -\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x} - 2\int \frac{1}{1-x^2}dx \\ &= -\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x} - \int\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx \\ &= -\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x} - \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c\end{aligned}$$

5. *En utilisant* $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*, on a par dérivation :*

$$f'(x) = 6\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n(n+1)}$$

puis avec $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$*, on a :*

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n+1}\right) = 6\left(f_1\left(x^2\right) - f_2\left(x^2\right)\right) \\ &= 6\left(-\ln\left(1-x^2\right) + \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2} + 1\right)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}f(x) &= 6\left(-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x\ln\left(1-x^2\right) + 2x - \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x} - \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x\right) \\ &= -6\left(2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x\ln\left(1-x^2\right) + \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x} - 3x\right) \\ &= -6\left(\ln(1+x)\left(2+x+\frac{1}{x}\right) + \ln(1-x)\left(-2+x+\frac{1}{x}\right) - 3x\right) \\ &= -6\left(\frac{\ln(1+x)}{x}(x+1)^2 + \frac{\ln(1-x)}{x}(1-x)^2 - 3x\right)\end{aligned}$$

la fonction obtenue étant bien continue en 0*.*

6. *Comme la série entière converge pour $x = 1$, on a (théorème d'Abel) :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = 6(3 - 4\ln(2))$$

On peut aussi écrire, pour $x \in]0,1[$:

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} - f(x) \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{u_n}$$

avec :

$$0 \leq 1 - x^{2n+1} = (1-x) \sum_{k=0}^{2n} x^{2k} \leq (2n+1)(1-x)$$

et $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ce qui donne :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} - f(x) \right| \leq 6(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 (1-x) \underset{x \to 1}{\to} 0$$

Exercice 14.31 *Le but de cet exercice est d'étudier la série entière :*

$$\sum \frac{x^n}{u_n} \text{ où } u_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ pour tout } n \geq 1$$

On utilise les fonctions $f_1(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et $f_2(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ de l'exercice précédent.

1. *Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.*
2. *Calculer la somme $f_3(x)$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sur son domaine de convergence.*
3. *Calculer la somme $f_4(x)$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ sur son domaine de convergence.*
4. *Calculer la somme $f_5(x)$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ sur son domaine de convergence.*
5. *En déduire la somme $g(x)$ de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{u_n}$ sur son domaine de convergence.*
6. *En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$.*

Solution 14.31

1. *Avec $u_n > 0$ et $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{u_n}{u_n + (n+1)^2} = \dfrac{1}{1 + \frac{(n+1)^2}{u_n}} = \dfrac{1}{1 + \frac{6(n+1)}{n(2n+1)}} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$, on déduit que $R = 1$.*

2. *Le rayon de convergence de ce série entière est* $R = 1$. *Par dérivation, on a :*

$$f_3'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) - 1$$

et

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) - x \\ &= \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) - x = \operatorname{argth}(x) - x \end{aligned}$$

(on a $f_3(0) = 0$*).*

3. *Le rayon de convergence de ce série entière est* $R = 1$. *Par dérivation, on a :*

$$f_4'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} - 1$$

et $f_4(x) = \arctan(x) - x$ *(on a* $f_3(0) = 0$*).*

4. *Le rayon de convergence de ce série entière est* $R = 1$.
On a $f_5(0) = 0$.
Pour $x \in \left]0, 1\right[$, *on a :*

$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} f_3(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}\right) - 1$$

Pour $x \in \left]-1, 0\right[$, *on a :*

$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{-x}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} f_4(\sqrt{-x}) = \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} - 1$$

la fonction f_5 *étant continue en* 0.

5. *On a pour* $x \in \left]-1, 1\right[$ *:*

$$\begin{aligned} g(x) &= 6\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}\right) \\ &= 6\left(f_1(x) + f_2(x) - 4f_5(x)\right) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} g(x) &= -6\left(\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)+x}{x} + 4\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}\right) - 1\right)\right) \\ &= -6\left(-3 + \ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\right) \end{aligned}$$

pour $x \in \left]0, 1\right[$ *et :*

$$\begin{aligned} g(x) &= -6\left(\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)+x}{x} + 4\left(\frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} - 1\right)\right) \\ &= -6\left(-3 + \ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + 4\frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}\right) \end{aligned}$$

pour $x \in \left]-1, 0\right[$. *Pour* $x = 0$, *on a* $f(0) = 0$.

6. *Comme la série entière converge pour $x = 1$, on a (théorème d'Abel) :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x)$$

En écrivant, pour $x \in]0, 1[$, que $g(x) = -6(-3 + h(x))$ avec :

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln(1-x) \frac{x+1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \ln\left(1 - \sqrt{x}\right) + \frac{2}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) \\ &= \ln\left(1 - \sqrt{x}\right) \frac{x+1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \ln\left(1 - \sqrt{x}\right) + \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) \frac{x+1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) \\ &= \ln\left(1 - \sqrt{x}\right) \left(\frac{x+1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) + \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) \frac{x+1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) \\ &= \ln\left(1 - \sqrt{x}\right) \frac{1}{x} \left(x + 1 - 2\sqrt{x}\right) + \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) \frac{x+1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) \\ &= \left(1 - \sqrt{x}\right)^2 \ln\left(1 - \sqrt{x}\right) \frac{1}{x} + \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) \frac{x+1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) \end{aligned}$$

on a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = 4\ln(2)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = 6(3 - 4\ln(2))$.
On peut aussi écrire, pour $x \in]0, 1[$:

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} - g(x) \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - x^n}{u_n}$$

avec :

$$0 \leq 1 - x^n = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} \leq n(1-x)$$

et $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} > n^3$, *ce qui donne :*

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n} - g(x) \right| \leq 6(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 (1-x) \underset{x \to 1}{\to} 0.$$

Exercice 14.32 *Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières* $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n!} z^n$ *et* $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n!} z^n$, *où θ est un réel fixé.*

Solution 14.32 *Considérons la série entière* $\sum a_n z^n$, *où* $a_n = \dfrac{e^{in\theta}}{n!}$ *pour $n \geq 0$. Avec* $\left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$, *on déduit que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$ pour tout réel θ.*
Puis avec $\cos(n\theta) = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$ *et* $\sin(n\theta) = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$, *on déduit que les séries entières* $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n!} z^n$ *et* $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n!} z^n$ *ont aussi un rayon de convergence infini.*
Pour tout nombre complexe z, on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(e^{i\theta} z\right)^n}{n!} = e^{e^{i\theta} z}$$

et :

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} z^n = \frac{e^{e^{i\theta}z} + e^{e^{-i\theta}z}}{2} \\ &= e^{z\cos(\theta)} \frac{e^{iz\sin(\theta)} + e^{-iz\sin(\theta)}}{2} = e^{z\cos(\theta)} \cos(z\sin(\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} z^n = \frac{e^{e^{i\theta}z} - e^{e^{-i\theta}z}}{2i} \\ &= e^{z\cos(\theta)} \frac{e^{iz\sin(\theta)} - e^{-iz\sin(\theta)}}{2i} = e^{z\cos(\theta)} \sin(z\sin(\theta)) \end{aligned}$$