

Algèbre et géométrie pour l'Agrégation de Mathématiques

Jean-Étienne ROMBALDI

26 août 2017

Sommaire

Avant-propos	xi
1 Quelques rappels sur les groupes	1
2 Groupe des permutations d'un ensemble fini	39
3 Groupes et géométrie	75
4 Nombres complexes et géométrie	101
5 Le groupe linéaire	125
6 Représentations d'un groupe fini	179
7 Idéaux d'un anneau commutatif unitaire	205
8 Anneaux principaux	231
9 Anneaux euclidiens	257
10 Les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$	277
11 Nombres premiers	301
12 Polynômes à une indéterminée	351
13 Corps finis	415
14 Formes linéaires, dualité	443
15 Formes quadratiques en dimension finie	463
16 Coniques dans un plan euclidien	497
17 Déterminants	535
18 Résultant et discriminant	571

19 Polynômes d'endomorphismes en dimension finie	593
20 Valeurs propres	633
21 Réduction des endomorphismes	667
22 Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien	697
23 Exponentielle de matrices	745
Bibliographie	767
Index	769

Table des matières

Avant-propos	xi
1 Quelques rappels sur les groupes	1
1.1 Sous-groupes distingués. Groupes quotients	1
1.2 Ordre d'un élément dans un groupe	6
1.3 Sous-groupe engendré par une partie	11
1.4 Groupes monogènes, groupes cycliques	13
1.5 Sous-groupes d'un groupe cyclique	16
1.6 Actions de groupes	19
1.7 Le théorème de Cauchy	24
1.8 Sous-groupes multiplicatifs d'un corps commutatif	26
1.9 Théorème de structure des groupes abéliens finis	27
1.10 Exercices	31
2 Groupe des permutations d'un ensemble fini	39
2.1 Permutations, cycles et transpositions	39
2.2 Les groupes symétriques \mathcal{S}_n	41
2.3 Support et orbites d'une permutation	42
2.4 Décomposition d'une permutation en produit de cycles	44
2.5 Systèmes de générateurs de $\mathcal{S}(E)$	46
2.6 Signature d'une permutation	48
2.7 Le groupe alterné	51
2.8 Quelques exemples d'utilisations du groupe symétrique	53
2.9 Exercices	59
3 Groupes et géométrie	75
3.1 Espace affine associé à un espace vectoriel	75
3.2 Le groupe affine $GA(\mathcal{E})$ en dimension finie	78
3.3 Orientation d'un espace affine réel	83
3.4 Isométries affines conservant une partie	84
3.5 Sous groupes finis de $Is^+(\mathcal{E})$ pour $\dim(E) = 2$ et $\dim(E) = 3$	93
3.6 Exercices	97

4	Nombres complexes et géométrie	101
4.1	Le plan affine euclidien	101
4.2	Le plan d'Argand-Cauchy	103
4.3	Module d'un nombre complexe	105
4.4	Droites et cercles dans le plan complexe	108
4.5	Caractérisation des triangles équilatéraux	110
4.6	Arguments d'un nombre complexe	112
4.7	Critère de cocyclicité	115
4.8	Inversions	120
4.9	Exercices	123
5	Le groupe linéaire	125
5.1	Premières propriétés	125
5.2	Sous-groupes de $GL(E)$ en dimension finie	127
5.3	Transvections et dilations	132
5.4	Générateurs de $SL(E)$ et $GL(E)$ en dimension finie	139
5.5	Groupes dérivés de $GL(E)$ et de $SL(E)$	141
5.6	Cas des corps finis	142
5.7	Topologie sur $GL(E)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)	151
5.8	Exercices	158
6	Représentations d'un groupe fini	179
6.1	Définitions et exemples	179
6.2	Représentations irréductibles	182
6.3	Caractères des groupes finis	186
6.4	Fonctions centrales	192
6.5	Caractères des groupes abéliens finis	197
6.6	Exercices	198
7	Idéaux d'un anneau commutatif unitaire	205
7.1	Rappels de quelques notions de base sur les anneaux	205
7.2	Généralités sur les idéaux de \mathbb{A}	207
7.3	Idéaux de $\mathcal{L}(E)$	209
7.4	Congruences, anneaux quotients	214
7.5	Idéal premier, idéal maximal	215
7.6	Anneaux factoriels	217
7.7	Exercices	220
8	Anneaux principaux	231
8.1	Définitions et exemples	231
8.2	Anneaux à pgcd	237
8.3	Le théorème chinois	243
8.4	Idéal annulateur et polynôme minimal	245
8.5	Exercices	249

9 Anneaux euclidiens	257
9.1 Définitions et premières propriétés	257
9.2 pgcd dans un anneau euclidien	260
9.3 Éléments premiers entre eux dans un anneau euclidien	262
9.4 Exemples d'anneaux euclidiens	262
9.5 Un exemple d'anneau principal non euclidien	269
9.6 Anneaux euclidiens pour lesquels il y a unicité de la division	271
9.7 Exercices	275
10 Les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$	277
10.1 Congruences dans \mathbb{Z} , anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$	277
10.2 Le groupe multiplicatif $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^\times$, fonction indicatrice d'Euler . . .	280
10.3 Le théorème chinois	283
10.4 Systèmes d'équations diophantiennes	288
10.5 $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p^\alpha\mathbb{Z}}\right)^\times$ est cyclique pour $p \geq 3$ premier	290
10.6 Exercices	293
11 Nombres premiers	301
11.1 L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers	301
11.2 Décomposition en produit de facteurs premiers	303
11.3 Répartition des nombres premiers, inégalités de Tchebychev	306
11.4 Théorèmes de Legendre et de Bertrand	317
11.5 Quelques tests de primalité	324
11.6 Nombres de Carmichael	327
11.7 La fonction de Möbius	329
11.8 Un théorème de Cesàro	333
11.9 Exercices	336
12 Polynômes à une indéterminée	351
12.1 L'algèbre $\mathbb{K}[X]$. Degré, valuation, opérations sur les polynômes . .	351
12.2 Polynômes étagés ou échelonnés en degrés ou en valuation	354
12.3 Polynômes à coefficients dans un anneau commutatif unitaire . . .	355
12.4 Division euclidienne des polynômes	357
12.5 Fonctions polynomiales	358
12.6 Dérivation des polynômes. Formule de Taylor	362
12.7 Relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme scindé	365
12.8 Polynômes irréductibles	368
12.9 Idéaux de $\mathbb{K}[X]$. Anneaux quotients $\frac{\mathbb{K}[X]}{(P)}$	370
12.10 Polynômes d'interpolation de Lagrange	375
12.11 Polynômes à coefficients réels ou complexes	376
12.12 Idéaux et pgcd dans $\mathbb{K}[X]$	391
12.13 Polynômes premiers entre eux	395
12.14 Applications	397

12.15 Exercices	404
13 Corps finis	415
13.1 Caractéristique d'un anneau unitaire intègre	415
13.2 Résultats préliminaires sur les corps	416
13.3 Un théorème de Wedderburn	419
13.4 Construction de corps finis	422
13.5 Carrés dans un corps fini	426
13.6 Le symbole de Legendre	429
13.7 La loi de réciprocité quadratique	432
13.8 Exercices	436
14 Formes linéaires, dualité	443
14.1 L'espace dual E^*	443
14.2 Hyperplans	447
14.3 Orthogonalité	448
14.4 Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie	452
14.5 Transposition	453
14.6 Exercices	456
15 Formes quadratiques en dimension finie	463
15.1 Formes bilinéaires et formes quadratiques	463
15.2 Orthogonalité, noyau et rang	468
15.3 Théorème de réduction de Gauss	471
15.4 Signature d'une forme quadratique réelle	477
15.5 Formes quadratiques sur un espace euclidien	481
15.6 Formes quadratiques sur un corps fini	483
15.7 Exercices	485
16 Coniques dans un plan euclidien	497
16.1 Définition par directrice, foyer et excentricité	497
16.2 Équation cartésienne d'une conique	499
16.3 Équation polaire d'une conique	501
16.4 Les paraboles	503
16.5 Les coniques à centres, ellipses et hyperboles	509
16.6 Les théorèmes d'Appolonius	512
16.7 Construction des tangentes à une conique	513
16.8 Définition bifocale des coniques à centre	514
16.9 Lieu orthoptique d'une conique	518
16.10 Cocyclicité de 4 points sur une conique	521
16.11 Courbes de degré 2	525
16.12 Exercices	529
17 Déterminants	535
17.1 Formes multilinéaires alternées	535
17.2 Déterminants	537
17.3 Méthodes de calcul d'un déterminant	541
17.4 Exemples d'utilisation du déterminant	545

17.5 Exercices	562
18 Résultant et discriminant	571
18.1 Définition et propriétés du résultant	571
18.2 Quelques propriétés topologiques du résultant	580
18.3 L'anneau des entiers algébriques	581
18.4 Intersection de 2 courbes algébriques planes	584
18.5 Exercices	588
19 Polynômes d'endomorphismes en dimension finie	593
19.1 L'algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$	593
19.2 Polynômes annulateurs, polynôme minimal	594
19.3 Le théorème de Cayley-Hamilton	596
19.4 Le théorème de décomposition des noyaux	598
19.5 La décomposition de Dunford	601
19.6 Un algorithme pour obtenir la décomposition de Dunford	606
19.7 Endomorphismes semi-simples	610
19.8 Quelques applications	614
19.9 Exercices	625
20 Valeurs propres	633
20.1 Valeurs et vecteurs propres	633
20.2 Valeurs propres des endomorphismes nilpotents	638
20.3 Localisation des valeurs propres d'une matrice complexe	640
20.4 Rayon spectral des matrices complexes	644
20.5 Calcul approché des valeurs propres	650
20.6 Polynômes orthogonaux	651
20.7 Exercices	655
21 Réduction des endomorphismes	667
21.1 Endomorphismes trigonalisables	667
21.2 Trigonalisation simultanée	670
21.3 Réduction des endomorphismes nilpotents	671
21.4 Réduction de Jordan	674
21.5 Endomorphismes diagonalisables	675
21.6 Diagonalisation simultanée	677
21.7 Topologie de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	678
21.8 Diverses factorisation de matrices	680
21.9 Exercices	686
22 Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien	697
22.1 Espaces vectoriels euclidiens	697
22.2 Adjoint d'un endomorphismes	702
22.3 Le groupe orthogonal	704
22.4 Réduction des endomorphismes orthogonaux	711
22.5 Symétries orthogonales dans les espaces euclidiens	715
22.6 Endomorphismes symétriques	717
22.7 Réduction des endomorphismes symétriques	718

22.8	Endomorphismes symétriques positifs ou définis positifs	720
22.9	Quelques applications du théorème spectral	724
22.10	Endomorphismes normaux	728
22.11	Exercices	733
23	Exponentielle de matrices	745
23.1	Séries matricielles	745
23.2	L'exponentielle matricielle. Propriétés	747
23.3	Utilisation de la décomposition de Dunford	750
23.4	Surjectivité et injectivité de l'exponentielle matricielle	752
23.5	Exercices	758
	Bibliographie	767
	Index	769

Avant-propos

Cet ouvrage est dédié à un très cher ami, Richard André-Jeannin, décédé en 2011

Ce livre destiné aux candidats à l'agrégation interne et externe de Mathématiques complète le cours d'analyse et probabilités de Jean-François Dantzer dans la même collection publié par les éditions Vuibert en juin 2016.

Le niveau de connaissance suffisant pour la lecture de ce cours est celui du premier cycle universitaire.

Le but est de couvrir une grande partie des thèmes d'algèbre et géométrie proposés pour les épreuves orales et j'ai pris soin de faire suivre chaque théorème important d'une série d'applications.

Ce cours est aussi l'occasion de réviser des notions de base pour l'écrit et les nombreux exercices proposés, tous corrigés en détail, outre le fait qu'ils peuvent constituer un bon entraînement, peuvent être utilisés pour des développements dans les leçons d'oral de l'agrégation externe et interne ainsi que pour des leçons d'oral 2 de l'agrégation interne.

Les premiers chapitres sont consacrés à l'étude des groupes et leur utilisation en géométrie, en traitant en particulier des actions de groupe et du groupe symétrique. Le lien entre groupes et géométrie fait l'objet d'un chapitre particulier. On s'intéresse également à l'utilisation des nombres complexes en géométrie, au groupe linéaire et aux représentations de groupes finis.

L'arithmétique est étudiée dans un cadre général avec l'étude des anneaux principaux et euclidiens. L'arithmétique sur l'anneau \mathbb{Z} des entiers relatifs, l'étude des nombres premiers et des anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ est l'objet de chapitres particuliers, de même que l'étude des polynômes à coefficients dans un corps commutatif ou un anneau commutatif unitaire. Ces notions d'arithmétique sont approfondies avec l'étude des corps finis.

Pour ce qui est de l'algèbre linéaire et bilinéaire, on s'intéresse à la dualité, aux déterminants avec une attention particulière pour le résultant, aux formes quadratiques, aux coniques et à la réduction des endomorphismes. On s'intéresse aussi aux séries matricielles et à l'exponentielle de matrice.

La plupart des chapitres de ce livre correspondent à des leçons d'oral de l'agrégation interne et externe, mais il ne s'agit pas de modèles de leçons.

Je tiens à remercier Marie-Cécile Darracq et Gérard Vinel qui ont accepté la tâche ingrate de relire quelques chapitres. Leurs conseils me furent très utiles.