Chapitre 15

Polynômes orthogonaux

Pour n, m entiers naturels, on note $\delta_{n,m}$ le symbole de Kronecker défini par $\delta_{n,n} = 1$ et $\delta_{n,m} = 0$ pour $n \neq m$.

$\mathbb{R}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré au plus égal à n avec la convention que le polynôme nul est de degré $-\infty$. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est identifié à la fonction polynomiale $P : x \in \mathbb{R} \mapsto P(x) \in \mathbb{R}$ qu'il définit.

Un polynôme est dit unitaire s'il est non nul de coefficient dominant égal à 1.

$(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, la famille $\left(X^k\right)_{0\leq k\leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

15.1 Polynômes orthogonaux associés à une forme linéaire définie positive sur $\mathbb{R}[X]$

Étant donnée une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}[X]$, on lui associe la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des moments définie par $\mu_n = \varphi(X^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des matrices de Hankel et la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des déterminants de Hankel respectivement définies par :

$$H_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \text{ et } D_n = \det(H_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On associe également à φ la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\langle P \mid Q \rangle = \varphi(PQ)$.

Une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ est uniquement déterminée par la suite de ses moments puisque pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mu_k$.

On se donne un intervalle ouvert $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Définition 15.1. *On dit qu'une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ est définie positive sur I, si pour tout $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, on a $\varphi(P) > 0$.*

Si φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ définie positive sur I, elle est alors définie positive sur tout intervalle ouvert J qui contient I. En effet, si $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ est tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in J$, on a alors en particulier $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ et $\varphi(P) > 0$.

Pour φ définie positive sur I, on a par linéarité $\varphi(Q) \geq \varphi(P)$ pour tous polynômes P, Q tels que $Q(x) \geq P(x)$ pour tout $x \in I$ et en conséquence, $|\varphi(P)| \leq \varphi(|P|)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ (résulte de $-|P| \leq P \leq |P|$ qui implique $-\varphi(|P|) \leq \varphi(P) \leq \varphi(|P|)$).

Exemples 15.1

1. *Soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée strictement croissante d'éléments de I et $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k < +\infty$. La forme linéaire φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k P(x_k)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est définie positive sur I (exercice 15.1).*
2. *Pour tout réel strictement positif a, la forme linéaire φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} P(k)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est définie positive sur $\mathbb{R}$ (exercice 15.2).*
3. *Soit $\pi : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux non identiquement nulle telle que $\int_a^b |t|^n \pi(t)\, dt < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (une fonction poids). La forme linéaire φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = \int_a^b P(t)\pi(t)\, dt$ est définie positive sur I (voir le paragraphe 15.2).*

Lemme 15.1 *Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ (i. e. $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) si, et seulement si, il existe deux polynômes A, B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.*

Preuve. La condition suffisante est évidente. Réciproquement soit $P \in \mathbb{R}[X]$ à valeurs positives sur $\mathbb{R}$. Si P est constant égal à α_0, on a alors $\alpha_0 \geq 0$ et $P = A^2 + B^2$ avec $A = \sqrt{\alpha_0}$, $B = 0$. Si P est de degré $n \geq 1$, son coefficient dominant α_n est alors strictement positif et dans $\mathbb{C}[X]$, on a la décomposition en facteurs irréductibles :

$$\frac{1}{\alpha_n} P = \prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{\alpha_k} \prod_{k=r+1}^{r+s} (X - z_k)^{\beta_k} (X - \overline{z_k})^{\beta_k}$$

où r, s sont deux entiers naturels, les x_k sont réels deux à deux distincts et les z_k complexes non réels deux à deux distincts (le cas $r = 0$ donne un produit égal à 1

et correspond au cas où P n'a pas de racines réelles et $s = 0$ correspond au cas où toutes les racines de P sont réelles). Si l'une des multiplicité α_k est impaire de la forme $2p_k + 1$, on a alors $P = \alpha_n (X - x_k)^{2p_k+1} Q$ avec $Q(x_k) \neq 0$, donc Q garde un signe constant dans un voisinage ouvert de x_k et P change de signe dans ce voisinage, ce qui contredit l'hypothèse $P(x) \geq 0$ pour tout réel x. Les α_k sont donc tous pairs de la forme $2p_k$ et $P = R\overline{R}$, où $R = \sqrt{\alpha_n} \prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{p_k} \prod_{k=r+1}^{r+s} (X - z_k)^{\beta_k}$.
En écrivant R sous la forme $R = A + iB$ avec A, B dans $\mathbb{R}[X]$, on obtient $P = (A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2$. □

Théorème 15.1.

Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *φ est définie positive sur $\mathbb{R}$;*
2. *$\varphi(P^2) > 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$;*
3. *l'application $(P, Q) \mapsto \langle P \mid Q \rangle = \varphi(PQ)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$;*
4. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice symétrique H_n est définie positive ;*
5. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $D_n > 0$;*
6. *il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n de coefficient dominant strictement positif et $\langle P_n \mid P_m \rangle = \delta_{n,m}$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.*

Preuve. L'application $(P, Q) \mapsto PQ$ étant bilinéaire symétrique, on déduit de la linéarité de φ que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P \mid Q \rangle = \varphi(PQ)$ est bilinéaire symétrique. De plus par linéarité de φ, on a $\varphi(0) = 0$.

(1) ⇔ (2) La condition nécessaire est évidente. La réciproque se déduit du fait que tout $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout réel x s'écrit $P = A^2 + B^2$ avec A, B dans $\mathbb{R}[X]$ non tous deux nuls (donc $\varphi(P) = \varphi(A^2) + \varphi(B^2) > 0$ puisque l'on a $\varphi(A^2) > 0$ ou $\varphi(B^2) > 0$).

(2) ⇔ (3) Si $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, on a alors $\varphi(P^2) = \|P\|^2 > 0$ pour tout P dans $\mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. Réciproquement, on suppose cette condition vérifiée. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, on a $\langle P \mid P \rangle = \varphi(P^2) > 0$, donc $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est définie positive. En conclusion, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(3) ⇔ (4) En remarquant que, pour i, j compris entre 0 et n, le coefficient d'indice (i, j) de la matrice H_n est $\mu_{i+j} = \varphi(X^i X^j) = \langle X^i \mid X^j \rangle$, on déduit que H_n est la matrice de la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ dans la base canonique $(X^k)_{0\leq k\leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Il en résulte que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si H_n est définie positive. Dans le cas où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, c'est aussi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et H_n est définie positive. Réciproquement, si toutes les matrices H_n sont définies positive, la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est alors un produit scalaire sur tous les $\mathbb{R}_n[X]$, donc sur $\mathbb{R}[X]$.

(4) $\Leftrightarrow$ (5) Si la matrice symétrique H_n est définie positive, son déterminant D_n est alors strictement positif. Si tous les D_n sont strictement positifs, tous les déterminants principaux D_k de H_n, pour k compris entre 0 et n, sont strictement positifs, ce qui revient à dire que H_n est définie positive.

(3) $\Rightarrow$ (6) On suppose que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Partant de la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$, le théorème de Gram-Schmidt nous dit qu'il existe un unique système orthonormé $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Vect}\{P_0, \cdots, P_n\} = \mathrm{Vect}\{1, X, \cdots, X^n\} = \mathbb{R}_n[X] \\ \langle P_n \mid X^n \rangle > 0 \end{array} \right.$$

Cette famille de polynômes étant définie par $P_n = \dfrac{1}{\|Q_n\|} Q_n$, où $Q_0 = 1$ et $Q_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle X^n \mid P_k \rangle P_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (théorème 3.7). Chaque polynôme P_n est de degré égal à n et de terme dominant strictement positif. Ce système étant étagé en degrés, il forme une base de $\mathbb{R}[X]$. Réciproquement si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une telle base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$, les conditions $\deg(P_n) = n$ pour tout entier naturel n entraînent que l'espace vectoriel engendré par $\{P_0, \cdots, P_n\}$ est égal à l'espace engendré par $\{1, X, \cdots, X^n\}$ et avec $P_n = \alpha_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} P_k$, on déduit $\langle P_n \mid X^n \rangle = \dfrac{1}{\alpha_n} > 0$ si le coefficient dominant de P_n est strictement positif, ce qui assure l'unicité d'une telle base.

(6) $\Rightarrow$ (2) Supposons qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes réels telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\langle P_n \mid P_m \rangle = \delta_{n,m}$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Une telle suite de polynômes étant étagée en degrés, elle forme une base de $\mathbb{R}[X]$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$ s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$, les α_k n'étant pas tous nuls, de sorte que :

$$\begin{aligned} \varphi\left(P^2\right) &= \varphi\left(\sum_{0\leq i,j\leq n} \alpha_i \alpha_j P_i P_j\right) = \sum_{0\leq i,j\leq n} \alpha_i \alpha_j \varphi(P_i P_j) \\ &= \sum_{0\leq i,j\leq n} \alpha_i \alpha_j \langle P_i \mid P_j \rangle = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2 > 0 \end{aligned}$$

$\square$

La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du point **6.** est une base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$ relativement au produit scalaire défini par φ, chaque sous-famille $(P_k)_{0\leq k\leq n}$, pour $n \in \mathbb{N}$, étant une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Avec l'exercice 15.3, on donne une expression des P_n qui utilise les déterminants de Hankel.

Si φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ définie positive sur un intervalle ouvert I, elle l'est alors sur $\mathbb{R}$ et on dispose ainsi d'une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux (point **6.** du théorème précédent).

Pour la suite de ce paragraphe, on se donne une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ qui est définie positive sur I ($I =]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire associé $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, la norme associée étant notée $\|\cdot\|$. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la famille de polynômes orthogonaux associée du théorème 15.1, on note pour $n \in \mathbb{N}$, α_n le coefficient dominant du polynôme P_n et pour $n \in \mathbb{N}^*$, β_n le coefficient de X^{n-1} de ce polynôme.

On peut remarquer que pour p, q dans $\mathbb{N}$ on a $\langle X^p \mid X^q \rangle = \varphi(X^{p+q}) = \mu_{p+q}$ et le déterminant de Gram du système $(X^k)_{0\leq k\leq n}$ s'écrit :

$$g(1, X, \cdots, X^n) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix} = D_n$$

(voir le paragraphe 3.6).

De la construction on déduit le résultat suivant qui nous sera souvent utile.

Théorème 15.2.

Pour tout entier naturel non nul n, on a $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp = \mathrm{Vect}\{P_k \mid k \geq n\}$ (où $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ est l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$). En particulier un polynôme de degré n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ si, et seulement si, il est proportionnel à P_n.

Preuve. De $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}\{P_0, \cdots, P_{n-1}\}$ et de l'orthogonalité de la base $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$, on déduit que :

$$\forall k \geq n, \ \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \ \langle P \mid P_k \rangle = 0$$

ce qui équivaut à $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp = \mathrm{Vect}\{P_k \mid k \geq n\}$. □

Les propriétés d'orthogonalité nous permettent d'obtenir des relations de récurrence sur les polynômes orthogonaux.

Théorème 15.3.

La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ XP_n = b_n P_{n+1} + a_n P_n + b_{n-1} P_{n-1} \tag{15.1}$$

avec les conditions initiales $P_{-1} = 0$ et $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varphi(1)}}$, où $b_{-1} = 0$, $b_n = \varphi(XP_nP_{n+1}) = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ est strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = \varphi(XP_0^2) = \dfrac{\varphi(X)}{\varphi(1)}$ et $a_n = \varphi(XP_n^2) = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} - \dfrac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt nous donne :

$$\varphi(1) = \|1\|^2 > 0, \ P_0 = \frac{1}{\sqrt{\varphi(1)}}$$

$$Q_1 = X - \langle X \mid P_0 \rangle P_0 = X - \varphi\left(XP_0^2\right) = X - a_0$$

avec :

$$\|Q_1\|^2 = \langle Q_1 \mid X \rangle = \varphi(XQ_1) = \sqrt{\varphi(1)}\,\|Q_1\|\,\varphi(XP_0P_1) = \sqrt{\varphi(1)}\,\|Q_1\|\,b_0$$

donc $\|Q_1\| = \sqrt{\varphi(1)}b_0$ et en conséquence, $P_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\varphi(1)}}\dfrac{X-a_0}{b_0} = P_0\dfrac{X-a_0}{b_0}$, soit $XP_0 = b_0P_1 + a_0P_0 + b_{-1}P_{-1}$ en convenant que $b_{-1} = 0$ et $P_{-1} = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $XP_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X] = \operatorname{Vect}\{P_0, \cdots, P_{n+1}\}$, donc $XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k P_k$, avec $\lambda_k = \langle XP_n \mid P_k \rangle = \langle P_n \mid XP_k \rangle = 0$ pour $k+1 < n$ (P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$). Il reste donc $XP_n = \lambda_{n+1}P_{n+1} + \lambda_n P_n + \lambda_{n-1}P_{n-1}$ avec :

$$\lambda_{n+1} = \langle XP_n \mid P_{n+1} \rangle = \varphi(XP_nP_{n+1}) = b_n$$

$$\lambda_n = \langle XP_n \mid P_n \rangle = \varphi\left(XP_n^2\right) = a_n$$

$$\lambda_{n-1} = \langle XP_n \mid P_{n-1} \rangle = \varphi(XP_nP_{n-1}) = b_{n-1}$$

En identifiant les coefficients de X^{n+1} dans l'égalité (15.1), on obtient $b_n = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ (rapport des coefficients dominants de P_n et P_{n+1}) et en particulier, le coefficient b_n est strictement positif. De même, en identifiant les coefficients de X^n, on obtient $a_n = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} - b_n\dfrac{\beta_{n+1}}{\alpha_n} = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} - \dfrac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}$. □

Dans le cas où les bornes a, b de l'intervalle I sont finis, on a les majorations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a \leq a_n \leq b,\ 0 < b_n \leq \max(|a|, |b|)$$

En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire que $a = a\|P_n\|^2 = \varphi\left(aP_n^2\right)$ et tenant compte de $aP_n^2(x) \leq xP_n^2(x) \leq bP_n^2(x)$ pour tout $x \in I$, on en déduit que :

$$a = \varphi\left(aP_n^2\right) \leq \varphi\left(XP_n^2\right) = a_n \leq \varphi\left(bP_n^2\right) = b$$

et en posant $c = \max(|a|, |b|)$, on a en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} 0 < b_n &= \varphi(XP_nP_{n+1}) = |\varphi(XP_nP_{n+1})| \leq \varphi(|XP_nP_{n+1}|) \\ &\leq c\varphi(|P_n|\,|P_{n+1}|) = c\,\langle |P_n| \mid |P_{n+1}| \rangle \leq c\,\|P_n\|\,\|P_{n+1}\| = c \end{aligned}$$

Le théorème 15.3 admet une réciproque qui peut s'exprimer comme suit.

Théorème 15.4. Favard

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes réels définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ XP_n = b_nP_{n+1} + a_nP_n + b_{n-1}P_{n-1} \tag{15.2}$$

avec les conditions initiales $P_{-1} = 0$ et $P_0 = \alpha_0$, où α_0 est un réel strictement positif donné, en convenant que $b_{-1} = 0$. Dans ces conditions, il *existe une unique forme linéaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ définie positive sur $\mathbb{R}$ telle que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit la suite de polynôme orthogonaux associée (point **6.** du théorème 15.3).*

Preuve. De la relation (15.2) et de la positivité des b_n, on déduit que chaque polynôme P_n est de degré n et de coefficient dominant strictement positif. En effet, on a $P_0 = \alpha_0$, avec $\alpha_0 > 0$, $P_1 = \dfrac{\alpha_0}{b_0}X - a_0\alpha_0$ avec $\dfrac{\alpha_0}{b_0} > 0$ et supposant le résulat acquis jusqu'au rang $n \geq 1$, on en notant α_k le coefficient dominant P_k, pour k compris entre 0 et n :

$$P_{n+1} = \frac{1}{b_n}XP_n - \frac{a_n}{b_n}P_n - \frac{b_{n-1}}{b_b}P_{n-1} = \frac{\alpha_n}{b_n}X^{n+1} + Q_n$$

avec $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Le polynôme P_{n+1} est donc de degré $n+1$ de coefficient dominant $\alpha_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{b_n} > 0$. Par récurrence, on vérifie que $\alpha_n = \dfrac{\alpha_0}{b_{n-1}\cdots b_0}$ pour tout $n \geq 1$ (on a $\alpha_1 = \dfrac{\alpha_0}{b_0}$ et supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a $\alpha_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{b_n} = \dfrac{\alpha_0}{b_nb_{n-1}\cdots b_0}$). Il en résulte que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$, ce qui permet de définir la forme linéaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P_0) = \dfrac{1}{\alpha_0}$ et $\varphi(P_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$. De la relation (15.2), on déduit que $\varphi(XP_n) = 0$ pour tout $n \geq 2$ et plus généralement, $\varphi\left(X^kP_n\right) = 0$ pour tout $k \geq 0$ et tout $n \geq k+1$. En effet, c'est vrai pour $k = 0$ et supposant le résultat acquis jusqu'au rang $k-1 \geq 0$, on a :

$$\varphi\left(X^kP_n\right) = b_n\varphi\left(X^{k-1}P_{n+1}\right) + a_n\varphi\left(X^{k-1}P_n\right) + b_{n-1}\varphi\left(X^{k-1}P_{n-1}\right) = 0$$

pour tout $n \geq k+1$. Il en résulte que $\varphi(P_nP_m) = 0$ pour tous $n \neq m$. On a aussi pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\varphi(X^nP_n) &= b_n\varphi\left(X^{n-1}P_{n+1}\right) + a_n\varphi\left(X^{n-1}P_n\right) + b_{n-1}\varphi\left(X^{n-1}P_{n-1}\right)\\ &= b_{n-1}\varphi\left(X^{n-1}P_{n-1}\right)\end{aligned}$$

et par récurrence, $\varphi(X^nP_n) = \dfrac{b_{n-1}\cdots b_0}{\alpha_0} = \dfrac{1}{\alpha_n} > 0$. Il en résulte que :

$$\varphi\left(P_n^2\right) = \alpha_n\varphi(X^nP_n) + \varphi(Q_nP_n) = \alpha_n\varphi(X^nP_n) = 1$$

(avec $Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$) pour $n \geq 1$ et $\varphi\left(P_0^2\right) = \alpha_0\varphi(P_0) = 1$. De tout cela, on déduit que φ est définie positive puisque pour tout $P = \sum\limits_{k=0}^{n}\gamma_kP_k \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\varphi\left(P^2\right) = \sum_{0\leq j,k\leq n}\gamma_j\gamma_k\varphi(P_jP_k) = \sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2\varphi\left(P_k^2\right) = \sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2 \geq 0$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, tous les γ_k, ce qui équivaut à $P = 0$. La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien celle définie par le point **6.** du théorème 15.3 par unicité dans le procédé de Gram-Schmit. Par construction, φ est unique. $\square$

Le résultat qui suit nous donne des conditions pour que les coefficients a_n soient tous nuls. Ces conditions sont réalisées dans le cas où la forme linéaire φ est définie par une fonction poids paire sur $I =]-b, b[$ (voir le paragraphe 15.2).

Définition 15.2. *Une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ définie positive sur I est dite symétrique si, tous ses moments d'ordre impair μ_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$, sont nuls.*

Théorème 15.5.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$\mu_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$;*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est de la parité de n ;*
3. *$a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Supposons que $\mu_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, en désignant par Q le polynôme défini par $Q(X) = P(-X)$, on a :

$$\varphi(Q) = \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} \gamma_k (-1)^k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k (-1)^k \mu_k = \sum_{0 \leq 2j \leq n} \gamma_{2j}\mu_{2j} = \varphi(P)$$

Notant $Q_n(X) = (-1)^n P_n(-X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit un polynôme de degré n de coefficient dominant strictement positif et pour tous n, m dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\langle Q_n \mid Q_m \rangle = \varphi(Q_n Q_m) = (-1)^{n+m} \varphi(P_n P_m) = (-1)^{n+m} \delta_{n,m} = \delta_{n,m}$$

c'est-à-dire que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les conditions du théorème de Gram-Schmidt, ce qui nous donne les égalités $(-1)^n P_n(-X) = P_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par unicité, ce qui signifie que P_n est de la parité de n. Réciproquement si chaque P_n est de la parité de n, on a alors pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{2p+1}\mu_{2p+1} = \varphi\left(\alpha_{2p+1}X^{2p+1}\right) &= \varphi\left(P_{2p+1} - \sum_{k=0}^{p-1} \gamma_{2k+1}X^{2k+1}\right) \\
&= -\sum_{k=0}^{p-1} \gamma_{2k+1}\varphi\left(X^{2k+1}\right) = -\sum_{k=0}^{p-1} \gamma_{2k+1}\mu_{2k+1}
\end{aligned}$$

($\varphi(P_{2p+1}) = \langle P_{2p+1} \mid 1 \rangle = 0$ et P_{2p+1} qui est impaire ne contient que des puissances impaires). Tenant compte de $\mu_1 = \varphi(X) = \dfrac{1}{\alpha_1}\varphi(P_1) = 0$, on en déduit par récurrence sur $p \geq 0$ que tous les μ_{2p+1} sont nuls.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Si chaque P_n est de la parité de n, on a alors :

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1} XP_n(X) &= -XP_n(-X) \\
&= b_n P_{n+1}(-X) + a_n P_n(-X) + b_{n-1}P_{n-1}(-X) \\
&= (-1)^{n+1}\left(b_n P_{n+1}(X) - a_n P_n(X) + b_{n-1}P_{n-1}(X)\right)
\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} b_n P_{n+1}(X) - a_n P_n(X) + b_{n-1} P_{n-1}(X) &= X P_n(X) \\ &= b_n P_{n+1}(X) + a_n P_n(X) + b_{n-1} P_{n-1}(X) \end{aligned}$$

et en conséquence $2a_n P_n = 0$, ce qui impose $a_n = 0$. Réciproquement, supposons tous les a_n nuls. Le polynôme $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varphi(1)}}$ est pair et $P_1 = \dfrac{1}{b_0\sqrt{\varphi(1)}} X$ est impair. Supposant le résultat acquis jusqu'au rang $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} b_n P_{n+1}(-X) &= -X P_n(-X) - b_{n-1} P_{n-1}(-X) \\ &= (-1)^{n+1} X P_n(X) - b_{n-1} (-1)^{n+1} P_{n-1}(X) \\ &= (-1)^{n+1} b_n P_{n+1}(X) \end{aligned}$$

soit $P_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1} P_{n+1}(X)$.

□

Les polynômes orthogonaux P_n peuvent aussi s'exprimer comme polynômes caractéristiques de matrices associée à la relation de récurrence (15.1). Précisément, en définissant la suite de matrices tridiagonales $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $A_1 = (a_0)$ et :

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

pour tout $n \geq 2$, où $a_n = \varphi\left(XP_n^2\right)$, $b_n = \varphi(XP_nP_{n+1})$ et en désignant par $\chi_n(X) = \det(XI_n - A_n)$ le polynôme caractéristique de la matrice A_n, on vérifie que $\chi_n = \dfrac{1}{\alpha_n} P_n$ (exercices 15.4 et 15.6). De ce résultat, on déduit le polynôme P_n admet n racines réelles simples, ce qui peut aussi se montrer en utilisant l'orthogonalité des P_n avec la précision supplémentaire que ces racines sont toutes dans l'intervalle I.

Théorème 15.6.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n admet n racines réelles simples dans l'intervalle I.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si le polynôme P_n garde un signe constant sur I, on a alors $\langle P_n \mid P_0\rangle = \varphi(P_n) \neq 0$, ce qui contredit l'orthogonalité de P_n et P_0 pour $n \geq 1$. Il existe donc au moins une racine de P_n dans I. Si $x_1 \in I$ est une racine de P_n de multiplicité $p \geq 2$, on peut alors écrire $P_n(X) = (X - x_1)^2 Q_{n-2}(X)$ avec $Q_{n-2} \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \setminus \{0\}$, ce qui entraîne que :

$$0 = \langle P_n \mid Q_{n-2}\rangle = \varphi\left((X - x_1)^2 Q_{n-2}^2\right) > 0$$

soit une impossibilité. Toutes les racines de P_n dans I sont donc simples. Notons $x_1, ..., x_p$ ces racines. Si $p < n$, on peut alors écrire $P_n(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - x_k) Q_{n-p}(X)$ avec $Q_{n-p} \in \mathbb{R}_{n-p}[X] \setminus \{0\}$ de signe constant sur I et on a :

$$0 = \left\langle P_n \mid \prod_{k=1}^{p} (x - x_k) \right\rangle = \varphi\left(\prod_{k=1}^{p} (X - x_k)^2 Q_{n-p} \right) \neq 0$$

soit encore une impossibilité. On a donc $p = n$, c'est-à-dire que toutes les racines de P_n sont dans I. $\square$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n}$ les n racines réelles du polynôme P_n dans I.

Dans le cas où φ est symétrique, chaque polynôme P_n est de la parité de n et on a $x_{n-k+1,n} = -x_{k,n}$ pour tout k compris entre 1 et n.

De la relation de récurrence (15.1) on déduit la relation de Darboux-Christoffel suivante.

Théorème 15.7. Darboux-Christoffel

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :

$$(X - Y) \sum_{k=0}^{n} P_k(X) P_k(Y) = b_n (P_{n+1}(X) P_n(Y) - P_n(X) P_{n+1}(Y)) \tag{15.3}$$

dans $\mathbb{R}[X, Y]$.

Preuve. Pour tout entier naturel k, on a :

$$X P_k(X) = b_k P_{k+1}(X) + a_k P_k(X) + b_{k-1} P_{k-1}(X)$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par $P_k(Y)$, il vient :

$$X P_k(X) P_k(Y) = b_k P_{k+1}(X) P_k(Y) + a_k P_k(X) P_k(Y) + b_{k-1} P_{k-1}(X) P_k(Y)$$

Ce qui peut aussi s'écrire en permutant les rôles de X et Y :

$$Y P_k(Y) P_k(X) = b_k P_{k+1}(Y) P_k(X) + a_k P_k(Y) P_k(X) + b_{k-1} P_{k-1}(Y) P_k(X)$$

Faisant la différence des deux égalités obtenues, on obtient :

$$\begin{aligned}(X - Y) P_k(X) P_k(Y) &= b_k (P_{k+1}(X) P_k(Y) - P_k(X) P_{k+1}(Y)) \\ &\quad - b_{k-1} (P_k(X) P_{k-1}(Y) - P_{k-1}(X) P_k(Y))\end{aligned}$$

puis la somme pour k allant de 0 à n donne :

$$\begin{aligned}(X - Y) \sum_{k=0}^{n} P_k(X) P_k(Y) &= b_n (P_{n+1}(X) P_n(Y) - P_n(X) P_{n+1}(Y)) \\ &\quad - b_{-1} (P_0(X) P_{-1}(Y) - P_{-1}(X) P_0(Y)) \\ &= b_n (P_{n+1}(X) P_n(Y) - P_n(X) P_{n+1}(Y))\end{aligned}$$

□

De cette relation, on peut déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les racines du polynôme P_{n+1} séparent celles de P_n.

Lemme 15.2 *Pour tout entier naturel n et pour tout réel x, on a :*

$$P_n(x) P'_{n+1}(x) - P'_n(x) P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^{n} P_k^2(x) > 0$$

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés, on désigne par φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_n(y) = P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)$. On a $\varphi_n(x) = 0$ et la formule de Darboux-Christoffel nous dit que $\dfrac{\varphi_n(y) - \varphi_n(x)}{x - y} = \dfrac{1}{b_n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_k(y)$ pour $y \neq x$, ce qui entraîne en faisant tendre y vers x :

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^{n} P_k^2(x) = -\varphi'_n(x) = -P_{n+1}(x) P'_n(x) + P_n(x) P'_{n+1}(x)$$

ce qui équivaut à l'égalité polynomiale $P_n P'_{n+1} - P'_n P_{n+1} = \dfrac{1}{b_n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k^2$, ce dernier polynôme étant à valeurs strictement positives. □

Théorème 15.8.

Pour tout entier naturel non nul n et tout entier k compris entre 1 et n, on a $x_{k,n+1} < x_{k,n} < x_{k+1,n+1}$, ce qui signifie qu'entre deux racines consécutives de P_{n+1} il y a une unique racine de P_n.

Preuve. Le polynôme P_{n+1} ayant $n+1$ racines réelles simples, on déduit du théorème des accroissements finis que P'_{n+1} a n racines réelles $\xi_{1,n+1} < \cdots < \xi_{n,n+1}$ avec $x_{k,n+1} < \xi_{k,n+1} < x_{k+1,n+1}$ pour tout k compris entre 1 et n. Il en résulte que :

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \ P'_{n+1}(x_{k,n+1}) P'_{n+1}(x_{k+1,n+1}) < 0$$

En effet ces produits ne sont jamais nuls puisque $\xi_{k,n+1}$ est l'unique racine de P'_{n+1} dans $[x_{k,n+1}, x_{k+1,n+1}]$ et si un tel produit est positif avec $P'_{n+1}(x_{k,n+1}) > 0$ par exemple, on a alors $P'_{n+1}(x) > 0$ pour tout $x \in [x_{k,n+1}, x_{k+1,n+1}] \setminus \{\xi_{k,n+1}\}$ et P_{n+1} est croissante sur $[x_{k,n+1}, x_{k+1,n+1}]$, ce qui entraîne :

$$0 = P_{n+1}(x_{k,n+1}) \leq P_{n+1}(\xi_{k,n+1}) \leq P_{n+1}(x_{k+1,n+1}) = 0$$

et $P_{n+1}(\xi_{k,n+1}) = 0$, ce qui est impossible. Avec :

$$P_n(x) P'_{n+1}(x) - P'_n(x) P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^{n} P_k^2(x) > 0$$

on déduit que si x est racine de P_{n+1}, on a alors $P_n(x) P'_{n+1}(x) > 0$ et $P_n(x)$ est de même signe que $P'_{n+1}(x)$. Il en résulte que $P_n(x_{k,n+1}) P_n(x_{k+1,n+1}) < 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que P_n a une racine dans $]x_{k,n+1}, x_{k+1,n+1}[$. On obtient ainsi n racines distinctes de P_n, c'est-à-dire toutes ses racines. □

Corollaire 15.1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(x_{k,n})_{n \geq k}$ est décroissante et la suite $(x_{n-k+1,n})_{n \geq k}$ est croissante. En particulier, pour a et b finis, les suites $(x_{1,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(x_{n,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes ($x_{1,n}$ est la plus petite racine de P_n dans $]a, b[$ et $x_{n,n}$ la plus grande).*

Preuve. De $x_{k,n+1} < x_{k,n}$ pour tout $n \geq k$, on déduit que $(x_{k,n})_{n \geq k}$ est décroissante et de $x_{n-k+1,n} < x_{n+1-k+1,n+1}$, on déduit que $(x_{n-k+1,n})_{n \geq k}$ est croissante. Pour a, b finis, ces suites sont majorées, donc convergentes. $\square$

En cas de convergence, l'intervalle $]\alpha, \beta[$, où $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} x_{1,n}$, $\beta = \lim\limits_{n \to +\infty} x_{n,n}$ est un « bon » intervalle d'étude des polynômes orthogonaux.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n peuvent être utilisées pour donner une expression de $\varphi(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Cela nous conduira aux formules de quadrature de Gauss dans le cas où φ est définie par une fonction poids.

Théorème 15.9.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels $\xi_{k,n}$ et $\lambda_{k,n}$ $(1 \leq k \leq n)$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \ \varphi(P) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} P(\xi_{k,n}) \tag{15.4}$$

si, et seulement si, les réels $\xi_{k,n}$ $(1 \leq k \leq n)$ sont les racines $x_{k,n}$ du polynôme P_n.

Preuve. Supposons qu'il existe des réels $\xi_{k,n}$ et $\lambda_{k,n}$ $(1 \leq k \leq n)$ tels que la condition (15.4) soit vérifiée. En notant $\omega_n(X) = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \xi_{k,n})$, on a pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\omega_n Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et :

$$\langle \omega_n | Q \rangle = \varphi(\omega_n Q) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} \omega_n(\xi_{k,n}) Q(\xi_{k,n}) = 0$$

donc $\omega_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$. Ce polynôme, de degré n, est donc proportionnel à P_n (théorème 15.2) et les $\xi_{k,n}$ $(1 \leq k \leq n)$ sont les racines de P_n.

Réciproquement, supposons que les $\xi_{k,n}$ $(1 \leq k \leq n)$ soient les racines $x_{k,n}$ de P_n. Par division euclidienne, tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ s'écrit sous la forme $P = QP_n + R$ avec Q, R dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on a :

$$\varphi(P) = \varphi(QP_n) + \varphi(R) = \langle P_n \mid Q \rangle + \varphi(R) = \varphi(R)$$

puisque $P_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$. En remarquant que $P(x_{k,n}) = R(x_{k,n})$ pour tout k compris entre 1 et n, on déduit qu'il nous suffit de montrer que (15.4) est vérifié sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, ce qui équivaut à prouver l'existence de coefficients $\lambda_{k,n}$ $(1 \leq k \leq n)$ solutions du système linéaire de n équations à n inconnues :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{i,n})^{k-1} \lambda_{i,n} = \varphi\left(X^{k-1}\right) = \mu_{k-1} \ \ (1 \leq k \leq n)$$

Le déterminant de ce système étant $\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_{i,n}-x_{j,n})\neq 0$ (déterminant de Vandermonde), on est assuré de l'existence et de l'unicité d'une solution $(\lambda_{k,n})_{1\leq k\leq n}$.
□

Les coefficients $\lambda_{k,n}$ $(1\leq k\leq n)$ définis par le théorème précédent sont appelés coefficients de Christoffel associés à la forme linéaire définie positive φ.

En notant, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $(L_{k,n})_{1\leq k\leq n}$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par :

$$\forall k\in\{1,\cdots,n\},\ \left\{\begin{array}{l} L_{k,n}\in\mathbb{R}_{n-1}[X] \\ L_{k,n}(x_{j,n})=\delta_{k,j}\ \ (1\leq j\leq n)\end{array}\right.$$

ce qui revient à dire que $L_{k,n}(X)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{X-x_{j,n}}{x_{k,n}-x_{j,n}}$, on a :

$$\varphi(L_{k,n})=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}L_{k,n}(x_{j,n})=\lambda_{k,n}$$

Prenant $P=L_{k,n}^2\in\mathbb{R}_{2n-2}[X]$, on constate que les coefficients $\lambda_{k,n}$ sont tous strictement positifs. En effet, on a :

$$0<\varphi\left(L_{k,n}^2\right)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,n}L_{k,n}^2(x_{j,n})=\lambda_{k,n}$$

Le résultat qui suit nous donne une formule explicite pour les coefficients de Christoffel.

Lemme 15.3 *Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout k compris entre 1 et n, on a :*

$$\lambda_{k,n}=\frac{1}{b_{n-1}}\frac{1}{P_n'(x_{k,n})P_{n-1}(x_{k,n})}$$

Preuve. Pour k compris entre 1 et n, on a :

$$L_{k,n}(X)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{X-x_{j,n}}{x_{k,n}-x_{j,n}}=\frac{1}{P_n'(x_{k,n})}\frac{P_n(X)}{X-x_{k,n}}$$

et $\lambda_{k,n}=\varphi(L_{k,n})=\frac{1}{P_n'(x_{k,n})}\varphi\left(\frac{P_n(X)}{X-x_{k,n}}\right)$. En utilisant l'identité de Darboux-Christoffel (théorème 15.7), on a :

$$(X-x_{k,n})\sum_{i=0}^{n}P_i(X)P_i(x_{k,n})=-b_nP_n(X)P_{n+1}(x_{k,n})$$

ce qui donne $\frac{P_n(X)}{X-x_{k,n}}=-\frac{1}{b_nP_{n+1}(x_{k,n})}\sum_{i=0}^{n}P_i(x_{k,n})P_i(X)$ et :

$$\lambda_{k,n}=-\frac{1}{b_nP_{n+1}(x_{k,n})P_n'(x_{k,n})}\sum_{i=0}^{n}P_i(x_{k,n})\langle P_i|1\rangle$$

Tenant compte de l'orthogonalité de la famille $(P_i)_{0\leq i\leq n}$, on en déduit que :

$$\lambda_{k,n} = -\frac{1}{b_n}\frac{1}{P_{n+1}(x_{k,n})P'_n(x_{k,n})}P_0(x_{k,n})\langle P_0|1\rangle = -\frac{1}{b_n}\frac{1}{P_{n+1}(x_{k,n})P'_n(x_{k,n})}$$

D'autre part, en utilisant la relation de récurrence (15.1) , on a :

$$b_nP_{n+1}(x_{k,n}) + b_{n-1}P_{n-1}(x_{k,n}) = 0$$

soit $b_n = -b_{n-1}\dfrac{P_{n-1}(x_{k,n})}{P_{n+1}(x_{k,n})}$ et $\lambda_{k,n} = \dfrac{1}{b_{n-1}}\dfrac{1}{P'_n(x_{k,n})P_{n-1}(x_{k,n})}$. □

Pour φ est symétrique, on a pour k compris entre 1 et n, $x_{n-k+1,n} = -x_{k,n}$ et :

$$\lambda_{n-k+1,n} = \frac{1}{b_{n-1}}\frac{1}{P'_n(-x_{n,k})P_{n-1}(-x_{n,k})} = \frac{1}{b_{n-1}}\frac{1}{P'_n(x_{n,k})P_{n-1}(x_{n,k})} = \lambda_{k,n}$$

puisque $P'_n(-x) = (-1)^{n-1}P'_n(x)$ et $P_{n-1}(-x) = (-1)^{n-1}P_{n-1}(x)$.

15.2 Polynômes orthogonaux associés à une fonction poids

On rappelle qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, où $I =]a,b[$ est un intervalle ouvert avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ est continue par morceaux, si elle est continue ou s'il existe une subdivision $a < a_1 < \cdots < a_p < b$ de I telle que f soit continue sur chacun des intervalles $]a,a_1[$, $]a_k,a_{k+1}[$ $(1 \leq k \leq p-1)$, $]a_p,b[$ et admette des limites à droite et à gauche en chacun des points a_k $(1 \leq k \leq p)$.

On se donne un intervalle ouvert $I =]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, une fonction continue par morceaux $\pi : I \to \mathbb{R}^+$ non identiquement nulle telle que $\displaystyle\int_a^b |t|^n \pi(t)\,dt < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (fonction poids) et on associe à cette fonction poids, la forme linéaire φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = \int_a^b P(t)\pi(t)\,dt$$

On note $a_1 < \cdots < a_p$ les éventuels points de discontinuités dans l'intervalle $]a_0,a_{p+1}[=]a,b[$ de la fonction π.

De la condition $\displaystyle\int_a^b |t|^n \pi(t)\,dt < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que pour tout polynôme P, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b P(t)\pi(t)\,dt$ est absolument convergente, ce qui justifie la définition de φ. De la linéarité de l'intégrale, on déduit que φ est une forme linéaire. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$, l'égalité :

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{p}\int_{a_k}^{a_{k+1}} P(t)\pi(t)\,dt = 0$$

avec $P\pi$ continue positive sur chaque intervalle ouvert $I_k =]a_k,a_{k+1}[$ équivaut à $P(t)\pi(t) = 0$ pour tout $t \in I_k$. Comme π est continue sur chaque intervalle I_k et positive non identiquement nulle, il existe un indice k et un intervalle $[\alpha, \beta] \subset I_k$ avec $\alpha < \beta$ tel que $\pi(t) > 0$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$ et de l'égalité $P(t)\pi(t) = 0$ sur $[\alpha, \beta]$, on déduit que $P(t) = 0$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, ce qui implique que P a une infinité de racines et revient à dire que $P = 0$. La forme linéaire φ est donc définie positive sur I et on peut lui associer une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux relativement au produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_a^b P(t) Q(t) \pi(t)\, dt$ sur $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n, de coefficient dominant strictement positif et $\|P_n\|^2 = \varphi\left(P_n^2\right) = 1$ (théorème 15.1).

La suite des moments associés à la fonction poids π sur l'intervalle I est la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_n = \int_a^b t^n \pi(t)\, dt$$

Exemple 15.1 *Pour $\pi = 1$ sur l'intervalle $]0, 1[$, on a $\mu_n = \int_0^1 t^n dt = \dfrac{1}{n+1}$ et les déterminants de Hankel sont donnés par $D_n = \dfrac{\left(\prod_{j=0}^{n} j!\right)^3}{\prod_{j=0}^{n} (n+j)!}$ (exemple 3.3).*

Cette suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi définie par $P_{-1} = 0$, $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\int_a^b \pi(t)\, dt}}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ XP_n = b_n P_{n+1} + a_n P_n + b_{n-1} P_{n-1}$$

où $b_{-1} = 0$ et $b_n = \int_a^b t P_n(t) P_{n+1}(t) \pi(t)\, dt = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ est strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = \dfrac{\int_a^b t\pi(t)\, dt}{\int_a^b \pi(t)\, dt}$ et $a_n = \int_a^b t P_n^2(t) \pi(t)\, dt = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} - \dfrac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en notant α_n le coefficient dominant de P_n et β_n le coefficient de X^{n-1} dans P_n.

Dans le cas où la fonction poids π est paire sur $]a, b[=]-b, b[$, la forme linéaire φ est symétrique, chaque polynôme P_n est de la parité de n et tous les coefficients a_n sont nuls.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n admet n racines réelles simples $x_{1,n} < \cdots < x_{n,n}$ dans l'intervalle $]a, b[$ et le théorème 15.9 s'exprime comme suit où les coefficients :

$$\lambda_{k,n} = \int_a^b L_{k,n}(t) \pi(t)\, dt = \frac{1}{b_{n-1}} \frac{1}{P_n'(x_{k,n}) P_{n-1}(x_{k,n})}$$

sont strictement positifs pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \int_a^b P(t) \pi(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} P(x_{k,n})$$

Ces formules conduisent aux formules de quadrature de Gauss, pour les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\pi(t)\,dt$ soit convergente :

$$\int_a^b f(t)\,\pi(t)\,dt \backsimeq \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} f(x_{k,n})$$

15.3 Polynômes orthogonaux classiques, formules de Rodrigues

Nous allons décrire une méthode de construction de polynômes orthogonaux associés à des fonctions poids particulières, comme vecteurs propres d'un opérateur différentiel de Sturm-Liouville.

Pour ce faire, on se donne un intervalle $I =]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, deux polynômes $A(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$, $B(X) = b_0 + b_1X$, le polynôme A étant tel que $A(x) > 0$ pour tout $x \in I$ et on leur associe l'opérateur différentiel de Sturm-Liouville $\mathcal{L}_0$ défini sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables de I dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}),\ \mathcal{L}_0(f) = Af'' + Bf'$$

Lemme 15.4 *Il existe une fonction indéfiniment dérivable* $\pi : I \to \mathbb{R}^{+,*}$ *telle que* $(A\pi)' = B\pi$ *et pour tout* $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$, *on a* $\mathcal{L}_0(f) = \dfrac{1}{\pi}(\pi A f')'$.

Preuve. Il s'agit de résoudre l'équation différentielle $y' = \left(\dfrac{B - A'}{A}\right) y$ sur I. Les solutions de cette équation différentielles sont les fonctions y définies sur I par $y(x) = \alpha \exp\left(\displaystyle\int \frac{B(x) - A'(x)}{A(x)} dx\right) = \dfrac{\alpha}{A(x)} \exp\left(\displaystyle\int \frac{B(x)}{A(x)} dx\right)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ (comme A est à valeurs strictement positives sur I, on a $\displaystyle\int \frac{-A'(x)}{A(x)} dx = \ln\left(\frac{1}{A}\right)$, donc $\exp\left(-\displaystyle\int \frac{A'(x)}{A(x)} dx\right) = \dfrac{1}{A}$). Prenant $\alpha > 0$, on obtient une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{R}^{+,*}$. Il en résulte que, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$, on a :

$$\pi\mathcal{L}_0(f) = \pi A f'' + \pi B f' = \pi A f'' + (\pi A)' f' = (\pi A f')'$$

□

Du lemme précédent, on déduit que pour toutes fonctions f, g dans $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$, on a $\mathcal{L}_0(fg) = \mathcal{L}_0(f)\,g + 2Af'g' + \mathcal{L}_0(g)\,f$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\pi\mathcal{L}_0(fg) &= \left(\pi A (fg)'\right)' = ((\pi A f')\,g + (\pi A g')\,f)' = (\pi A f')'\,g + 2\pi A f'g' + (\pi A g')'\,f \\ &= \pi\mathcal{L}_0(f)\,g + 2\pi A f'g' + \pi\mathcal{L}_0(g)\,f\end{aligned}$$

donc $\mathcal{L}_0(fg) = \mathcal{L}_0(f)\,g + 2Af'g' + \mathcal{L}_0(g)\,f$.

Pour la suite de ce paragraphe, on se fixe une telle fonction π et on suppose qu'elle vérifie de plus les conditions suivantes :

— $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} A(x)\,\pi(x) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} A(x)\,\pi(x) = 0$;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_a^b |t|^n\,\pi(t)\,dt < +\infty$.

La deuxième condition nous dit que π est une fonction poids et que l'application $(P,Q) \mapsto \langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_a^b P(t)\,Q(t)\,\pi(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à la restriction $\mathcal{L}$ de l'opérateur $\mathcal{L}_0$ à $\mathbb{R}[X]$ (il est clair que cette restriction est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$).

Lemme 15.5 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} x^n A(x)\,\pi(x) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} x^n A(x)\,\pi(x) = 0$.*

Preuve. Pour a fini, on a $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} x^n A(x)\,\pi(x) = a^n \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} A(x)\,\pi(x) = 0$. On a le même résultat pour b fini. Dans le cas où $b = +\infty$, en se fixant c dans $]a,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \mathcal{L}\left(X^{n+1}\right)\pi(t)\,dt$ est convergente et on a :

$$\begin{aligned}\int_c^{+\infty} \mathcal{L}\left(X^{n+1}\right)\pi(t)\,dt &= (n+1)\int_c^{+\infty} \left(\pi(t)\,A(t)\,t^n\right)'\,dt\\ &= (n+1)\lim_{x\to+\infty}\left[t^n A(t)\,\pi(t)\right]_c^x\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n A(x)\,\pi(x)$ existe. Comme de plus, l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} t^n A(t)\,\pi(t)\,dt$ est convergente, cette limite est forcément nulle. On procède de même, dans le cas où $a = -\infty$. □

On déduit du lemme précédent que, pour tout $R \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} R(x)\,A(x)\,\pi(x) = \lim_{\substack{x\to b\\x<b}} R(x)\,A(x)\,\pi(x) = 0$$

Lemme 15.6 *Le noyau de $\mathcal{L}$ est le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes constants.*

Preuve. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $\mathcal{L}(P) = \dfrac{1}{\pi}\left(\pi A P'\right)' = 0$, la fonction $\pi A P'$ est alors constante sur I et comme $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} P'(x)\,A(x)\,\pi(x) = 0$, cette constante est nécessairement nulle, donc $P' = 0$ (puisque $\pi A > 0$ sur I), ce qui signifie que P est un polynôme constant. Réciproquement, il est clair que les polynômes constants sont dans $\ker(\mathcal{L})$. Le noyau de $\mathcal{L}$ est donc de dimension 1 engendré par le polynôme constant égal à 1. □

Lemme 15.7 *L'opérateur $\mathcal{L}$ est symétrique pour le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}[X]$ par la fonction poids π, ce qui signifie que :*

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ \langle \mathcal{L}(P) \mid Q\rangle = \langle P \mid \mathcal{L}(Q)\rangle$$

Preuve. Pour toutes fonctions polynomiales P et Q, une intégration par parties nous donne :

$$\langle \mathcal{L}(P) \mid Q\rangle = \int_a^b (\pi(t) A(t) P'(t))'(t) Q(t)\,dt = -\int_a^b A(t) P'(t) Q'(t) \pi(t)\,dx$$

L'expression obtenue étant une fonction symétrique de (P, Q), on en déduit que $\langle \mathcal{L}(P) \mid Q\rangle = \langle \mathcal{L}(Q) \mid P\rangle = \langle P \mid \mathcal{L}(Q)\rangle$. □

L'opérateur $\mathcal{L}$ laissant stable chaque sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$, sa restriction à chacun de ces espace définit un endomorphisme $\mathcal{L}_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$. La matrice de $\mathcal{L}_n$ dans la base canonique $\left(X^k\right)_{0\leq k\leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ étant triangulaire supérieure de termes diagonaux $\lambda_k = k((k-1)a_2 + b_1)$ où k est compris entre 0 et n, on déduit que ces réels λ_k sont les valeurs propres de l'endomorphisme $\mathcal{L}_n$. L'endomorphisme $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}[X]$ a donc pour valeurs propres les réels $\lambda_n = n((n-1)a_2 + b_1)$, où n décrit $\mathbb{N}$. Chaque espace propre $\ker(\mathcal{L} - \lambda_n Id)$ est formé des solutions polynomiales sur I de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2, $y'' = \dfrac{\lambda}{A}y + -\dfrac{B}{A}y'$ et on sait que l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est un espace vectoriel réel de dimension 2. Le noyau $\ker(\mathcal{L} - \lambda_n Id)$ est donc de dimension 1 ou 2.

Lemme 15.8 *L'opérateur $\mathcal{L}$ est diagonalisable si, et seulement si, $na_2 + b_1 \neq 0$ pour tout entier naturel n. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace propre associé à la valeur propre λ_n est de dimension égale à 1 engendré par un polynôme L_n de degré égal à n et la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire défini par la fonction poids π sur I.*

Preuve. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na_2 + b_1 = 0$, on a alors $\lambda_{n+1} = 0$, donc 0 est valeur propre de multiplicité au moins égale à 2 de $\mathcal{L}_{n+1}$ et cet endomorphisme n'est pas diagonalisable car l'espace propre $\ker(\mathcal{L})$ est de dimension 1.

L'égalité $\lambda_p = \lambda_q$ équivaut à $(p-q)((p+q-1)a_2 + b_1) = 0$. En supposant que $na_2 + b_1$ est non nul pour tout entier naturel n, l'égalité précédente équivaut à $p = q$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme $\mathcal{L}_n$ a $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ valeurs propres distinctes et en conséquence il est diagonalisable, chaque espace propre étant de dimension égale à 1. Si, pour k compris entre 0 et n, L_k est un vecteur propre non nul de $\mathcal{L}_n$ associé à la valeur propre λ_k, c'est aussi un vecteur propre de l'endomorphisme $\mathcal{L}_k$ de $\mathbb{R}_k[X]$ associé à λ_k ($\mathcal{L}_k$ est la restriction à $\mathbb{R}_k[X]$ de $\mathcal{L}_n$ et les espaces propres sont de dimension 1), ce qui implique que $L_k \in \mathbb{R}_k[X]$. Tenant compte du fait que $(L_j)_{0\leq j\leq k}$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$, on déduit que L_k est nécessairement de degré k.

Pour $n \neq m$ sont $\mathbb{N}$, on a $\lambda_n \neq \lambda_m$ et :

$$\lambda_n \langle L_n \mid L_m\rangle = \langle \mathcal{L}(L_n) \mid L_m\rangle = \langle L_n \mid \mathcal{L}(L_m)\rangle = \lambda_m \langle L_n \mid L_m\rangle$$

donc $\langle L_n \mid L_m\rangle = 0$. □

Pour ce qui suit, on suppose que $na_2 + b_1 \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qui implique en particulier que $b_1 \neq 0$, soit que B est non constant) et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg(L_n) = n$ et $\mathcal{L}(L_n) = \lambda_n L_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En désignant par $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes orthogonaux du théorème 15.1, on a donc $P_n = \dfrac{\varepsilon_n}{\|L_n\|}L_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ est le signe du coefficient dominant de L_n (unicité du point **6.** de ce théorème).

Du lemme précédent, on déduit que pour tout polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $\mathcal{L}(P)$ est aussi de degré n. En effet, dans la base $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$, on a $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k$ avec $\alpha_n \neq 0$ et $\mathcal{L}(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda_k L_k$ avec $\alpha_n \lambda_n \neq 0$, chaque L_k étant de degré k, donc $\mathcal{L}(P)$ est de degré n. On peut aussi écrire dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ que $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ avec $\alpha_n \neq 0$, ce qui donne :

$$\mathcal{L}(P) = n\alpha_n\left((n-1)a_2 + b_1\right)X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k X^k$$

avec $n\alpha_n\left((n-1)a_2 + b_1\right) \neq 0$ pour $n \geq 1$. Pour P constant, on a $\mathcal{L}(P) = 0$.

Lemme 15.9 *Pour tout polynôme R de degré $r \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $Q_n = \frac{1}{\pi}(\pi R A^n)^{(n)}$ est polynomiale de degré $n + r$.*

Preuve. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = \pi R A^n$. La fonction π étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, il en est de même de φ_n. Pour $n = 0$, on a $\varphi_0 = \pi R$ et $Q_0 = R$. Pour $n = 1$, on a en désignant par S une primitive de R, $Q_1 = \frac{1}{\pi}(\pi R A)' = \frac{1}{\pi}(\pi A S')' = \mathcal{L}(S)$ qui est bien polynomiale de degré $r + 1$. Supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
Q_{n+1} &= \frac{1}{\pi}\left(\left(R(\pi A)A^n\right)'\right)^{(n)} = \frac{1}{\pi}\left(R'(\pi A)A^n + R(\pi A)'A^n + nR(\pi A)A'A^{n-1}\right)^{(n)} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(R'(\pi A)A^n + R\pi B A^n + nR\pi A' A^n\right)^{(n)} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\pi\left(R'A + RB + nRA'\right)A^n\right)^{(n)} = \frac{1}{\pi}(\pi S A^n)^{(n)}
\end{aligned}$$

le polynôme $S = R'A + RB + nRA' \in \mathbb{R}_{r+1}[X]$ étant de degré $r + 1$ (en notant $\alpha_r \neq 0$ le coefficient dominant de R, celui de S est $\left((r + 2n)a_2 + b_1\right)\alpha_r \neq 0$), donc Q_{n+1} est polynomiale de degré $n + r + 1$. □

Lemme 15.10 *En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = \pi A^n$, on a :*

$$A\varphi_n^{(n+2)} + (2A' - B)\varphi_n^{(n+1)} = (n+1)\left(b_1 + (n-2)a_2\right)\varphi_n^{(n)}$$

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_n' &= (\pi' A + n\pi A')A^{n-1} = (\pi B - \pi A' + n\pi A')A^{n-1} \\
&= \pi\left(B + (n-1)A'\right)A^{n-1} = \pi B_1 A^{n-1}
\end{aligned}$$

où $B_1 = B + (n-1)A'$ est un polynôme de degré égal à 1 (le coefficient de X est $b_1 + (n-1)a_2 \neq 0$), ce qui nous donne $A\varphi_n' = \pi A^n B_1 = \varphi_n B_1$. Dérivant $n+1$ fois cette relation, la formule de dérivation de Leibniz nous donne :

$$A\varphi_n^{(n+2)} + (n+1)A'\varphi_n^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2}A''\varphi_n^{(n)} = B_1\varphi_n^{(n+1)} + (n+1)B_1'\varphi_n^{(n)}$$

soit $A\varphi_n^{(n+2)} + ((n+1)A' - B_1)\varphi_n^{(n+1)} = (n+1)\left(B_1' - \frac{n}{2}A''\right)\varphi_n^{(n)}$ avec :

$$(n+1)A' - B_1 = 2A' - B \text{ et } B_1' - \frac{n}{2}A'' = B' + \left(\frac{n}{2} - 1\right)A'' = b_1 + (n-2)a_2$$

On a donc $A\varphi_n^{(n+2)} + (2A' - B)\varphi_n^{(n+1)} = (n+1)(b_1 + (n-2)a_2)\varphi_n^{(n)}$. Pour $n = 0$, on a $\varphi_0 = \pi$, $A\varphi_0' = \pi A' = (B - A')\pi = \varphi_0(B - A')$ et en dérivant :

$$A\varphi_0'' + A'\varphi_0' = \varphi_0'(B - A') + \varphi_0(B' - A'')$$

soit $A\varphi_0'' + (2A' - B)\varphi_0' = \varphi_0(b_1 - 2a_2)$. □

Théorème 15.10. Formules de Rodrigues

Pour tout entier naturel n, il existe une constante non nulle γ_n telle que $P_n = \frac{\gamma_n}{\pi}(\pi A^n)^{(n)}$ ($(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite de polynômes orthogonaux du théorème 15.1).

Preuve. Le lemme 15.9 nous dit que chaque fonction $Q_n = \frac{1}{\pi}\varphi_n^{(n)}$, où $\varphi_n = \pi A^n$, est polynomiale de degré n. Il nous suffit alors de montrer que polynôme Q_n est vecteur propre de $\mathcal{L}$ pour la valeur propre λ_n. De $\pi Q_n = \varphi_n^{(n)}$, on déduit que $\pi' Q_n + \pi Q_n' = \varphi_n^{(n+1)}$, donc :

$$\pi A Q_n' = A\varphi_n^{(n+1)} - \pi' A Q_n = A\varphi_n^{(n+1)} - (B - A')\pi Q_n = A\varphi_n^{(n+1)} - (B - A')\varphi_n^{(n)}$$

et :

$$\begin{aligned}
\pi\mathcal{L}(Q_n) = (\pi A Q_n')' &= A\varphi_n^{(n+2)} + (2A' - B)\varphi_n^{(n+1)} - (B' - A'')\varphi_n^{(n)} \\
&= ((n+1)(b_1 + (n-2)a_2) - (b_1 - 2a_2))\varphi_n^{(n)} \\
&= n((n-1)a_2 + b_1)\pi Q_n = \lambda_n \pi Q_n
\end{aligned}$$

soit $\mathcal{L}(Q_n) = \lambda_n Q_n$. L'espace propre associé à λ_n étant de dimension 1 et Q_n non nul, il en résulte qu'il existe $\gamma_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $Q_n = \gamma_n L_n$. □

Le théorème précédent peut aussi se montrer en vérifiant que la suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\pi}(\pi A^n)^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale, chaque polynôme Q_n étant de degré n. Pour ce faire, on utilise les lemmes suivants.

Lemme 15.11 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier k compris entre 0 et $n-1$, il existe un polynôme R_k tel que $(\pi A^n)^{(k)} = \pi A^{n-k} R_k$.*

Preuve. Pour $k = 0$, on a $(\pi A^n)^{(0)} = \pi A^n$. Supposant le résultat acquis pour $0 \leq k-1 \leq n-2$, on a :

$$\begin{aligned}
(\pi A^n)^{(k)} &= \left((\pi A)A^{n-k}R_{k-1}\right)' \\
&= (\pi A)' A^{n-k} R_{k-1} + \pi A\left(A^{n-k}R_{k-1}' + (n-k)A'A^{n-k-1}R_{k-1}\right) \\
&= \pi A^{n-k}\left(BR_{k-1} + \left(AR_{k-1}' + (n-k)A'R_{k-1}\right)\right) = \pi A^{n-k} R_k
\end{aligned}$$

□

Lemme 15.12 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :*

$$\langle Q_n \mid P \rangle = (-1)^n \int_a^b P^{(n)}(t)\, A^n(t)\, \pi(t)\, dt$$

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a en utilisant le théorème d'intégration par parties itérée :

$$\begin{aligned}
\langle Q_n \mid P \rangle &= \int_a^b (\pi A^n)^{(n)}(t)\, P(t)\, dt \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} (\pi A^n)^{(n-k)} P^{(k-1)} \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b \pi(t)\, A^n(t)\, P^{(n)}(t)\, dt \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \pi A^k R_{n-k} P^{(k-1)} \right]_a^b + (-1)^n \int_a^b P^{(n)}(t)\, A^n(t)\, \pi(t)\, dt \\
&= (-1)^n \int_a^b P^{(n)}(t)\, A^n(t)\, \pi(t)\, dt
\end{aligned}$$

puisque $\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} R(t)\, A(t)\, \pi(t) = \lim\limits_{\substack{t \to b \\ t < b}} R(t)\, A(t)\, \pi(t) = 0$ pour tout $R \in \mathbb{R}[X]$. □

Du lemme précédent, on déduit que $\langle Q_n \mid P \rangle = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et étant de degré n, il est colinéaire à P_n (théorème 15.2).

Ce lemme nous permet également de calculer $\|Q_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on $Q_0 = 1$ et $\|Q_0\|^2 = \displaystyle\int_a^b \pi(x)\, dx$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\|Q_n\|^2 = \langle Q_n \mid Q_n \rangle &= (-1)^n \int_a^b Q_n^{(n)}(t)\, A^n(t)\, \pi(t)\, dt \\
&= (-1)^n\, n!\alpha_n \int_a^b A^n(t)\, \pi(t)\, dt
\end{aligned}$$

où α_n est le coefficient dominant de Q_n.

En définitive, on a les expressions suivantes des polynômes orthogonaux associés à une fonction poids vérifiant les conditions de ce paragraphe : $P_n = \dfrac{\varepsilon_n}{\|Q_n\|} Q_n$, où $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ est le signe du coefficient dominant de $Q_n = \dfrac{(\pi A^n)^{(n)}}{\pi}$.

Exemples 15.2

Polynômes de Jacobi. *Ils correspondent au choix de $(A, B) = \left(1 - X^2, b_0 + b_1 X\right)$ sur $I =]-1, 1[$. De la décomposition en éléments simples :*

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \frac{b_0 + b_1 x}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{b_0 + b_1}{1 - x} + \frac{b_0 - b_1}{1 + x} \right)$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}\int \frac{B(x)}{A(x)}dx &= \frac{1}{2}\left(-(b_0+b_1)\ln(1-x)+(b_0-b_1)\ln(1+x)\right)\\ &= \ln\left((1-x)^{-\frac{b_0+b_1}{2}}(1+x)^{\frac{b_0-b_1}{2}}\right)\end{aligned}$$

ce qui nous donne pour solutions de l'équation différentielle $(Ay)' = By$ *sur* I*, les fonctions de la forme :*

$$y(x) = \frac{\alpha}{A(x)}\exp\left(\int \frac{B(x)}{A(x)}dx\right) = \alpha(1-x)^{-\frac{b_0+b_1}{2}-1}(1+x)^{\frac{b_0-b_1}{2}-1}$$

Le choix de $\alpha = 1$ *donne la fonction* π *définie sur* I *par* $\pi(x) = (1-x)^a(1+x)^b$, *où* $a = -\dfrac{b_0+b_1}{2} - 1$ *et* $b = \dfrac{b_0-b_1}{2} - 1$ *sont deux réels. Cette fonction est intégrable sur* $]-1,1[$ *si, et seulement si,* $a > -1$ *et* $b > -1$*, ce qui équivaut à* $b_0 + b_1 < 0$ *et* $b_0 > b_1$*. Sous ces hypothèses, on a :*

$$\lim_{x\to\pm1} A(x)\pi(x) = \lim_{x\to\pm1}(1-x)^{a+1}(1+x)^{b+1} = 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$na_2 + b_1 = b_1 - n = -a-b-2-n < -n \leq 0$$

$$\int_{-1}^{1}|t|^n\pi(t)\,dt \leq 2\int_0^1(1-t)^a(1+t)^b\,dt < +\infty$$

Les conditions imposées à la fonction π *sont donc satifaites pour* $a > -1$ *et* $b > -1$*. L'opérateur différentiel associé est défini par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \mathcal{L}(P) = \left(1-X^2\right)P'' + (b-a-(a+b+2)X)P'$$

et ses valeurs propres sont les $\lambda_n = -n(n+a+b+1)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$*. Les vecteurs propres correspondants sont les polynômes de Jacobi définis sur* I *par* $Q_n(x) = \dfrac{1}{(1-x)^a(1+x)^b}\left((1-x)^{n+a}(1+x)^{n+b}\right)^{(n)}$*. Chaque* Q_n *est la solution polynomiale (à une constante multiplicative près) de l'équation différentielle* $\left(1-x^2\right)y'' + (b-a-(a+b+2)x)y' + n(n+a+b+1)y = 0$*. Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, le coefficient dominant de* Q_n *est* $\alpha_n = (-1)^n\dfrac{\Gamma(a+b+2n+1)}{\Gamma(a+b+n+1)}$ *et sa norme est donnée par :*

$$\|Q_n\|^2 = \frac{n!2^{2n+a+b+1}}{2n+a+b+1}\frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(a+b+n+1)}$$

(exercice 15.11)

Polynômes ultrasphériques. *Les polynômes de Jacobi correspondants au cas où* $a = b > -1$*, soit à* $B(X) = -2(1+a)X$*, sont les polynômes ultrasphériques définis sur* $I =]-1,1[$ *par* $Q_n(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^a}\left(\left(1-x^2\right)^{n+a}\right)^{(n)}$*. Ils* *sont orthogonaux pour le produit scalaire associé à la fonction poids* π *définie sur* I *par* $\pi(x) = \left(1 - x^2\right)^a$. *L'opérateur différentiel associé est défini par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \ \mathcal{L}(P) = \left(1 - X^2\right) P'' - 2(1+a) XP'$$

et ses valeurs propres sont les $\lambda_n = -n(n+1+2a)$ *où* $n \in \mathbb{N}$. *Chaque polynôme* Q_n *est la solution polynomiale (à une constante multiplicative près) de* $\left(1 - x^2\right) y'' - 2(1+a) xy' + n(n+1+2a) y = 0$. *La fonction poids* π *étant paire sur* $]-1,1[$, *chaque polynôme* Q_n *est de la parité de* n. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *son coefficient dominant est* $\alpha_n = (-1)^n \dfrac{\Gamma(2(a+n)+1)}{\Gamma(2a+n+1)}$ *et sa norme est* $\|Q_n\| = \dfrac{2^{n+a}\sqrt{n!}\sqrt{2}}{\sqrt{2(n+a)+1}} \dfrac{\Gamma(a+n+1)}{\sqrt{\Gamma(2a+n+1)}}$. *Pour* $n = 0$, *on a* $Q_0 = 1$ *et* $\|Q_0\| = 2^a\sqrt{2}\dfrac{\Gamma(a+1)}{\sqrt{\Gamma(2(a+1))}}$. *Les polynômes ultrasphériques normalisés sont donc définis par* $P_0 = \dfrac{1}{2^a\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{\Gamma(2(a+1))}}{\Gamma(a+1)}$ *et :*

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{2(n+a)+1}}{2^{n+a}\sqrt{n!}\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\Gamma(2a+n+1)}}{\Gamma(a+n+1)} \left(1 - x^2\right)^{-a} \left(\left(1 - x^2\right)^{n+a}\right)^{(n)}$$

Ces polynômes sont aussi définis par la relation de récurrence (15.1) *où :*

$$b_n = \frac{\sqrt{(n+1)(2a+n+1)}}{\sqrt{(2(a+n)+1)(2(n+a)+3)}}$$

et $a_n = 0$, *soit :*

$$XP_n = \frac{\sqrt{(n+1)(2a+n+1)}}{\sqrt{(2(a+n)+1)(2(n+a)+3)}} P_{n+1} + \frac{\sqrt{n(2a+n)}}{\sqrt{(2(a+n)-1)(2(n+a)+1)}} P_{n-1}$$

avec les conditions $P_{-1} = 0$, $P_0 = \dfrac{1}{2^a\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{\Gamma(2(a+1))}}{\Gamma(a+1)}$.

Polynômes de Legendre. *Les polynômes ultrasphériques correspondants au cas où* $a = 0$ *sont les polynômes de Legendre définis sur l'intervalle* $I =]-1,1[$ *par* $Q_n(x) = \left(\left(1 - x^2\right)^n\right)^{(n)}$. *Ils sont orthogonaux pour le produit scalaire associé à la fonction poids* $\pi = 1$. *L'opérateur différentiel associé est défini par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \ \mathcal{L}(P) = \left(1 - X^2\right) P'' - 2XP'$$

et ses valeurs propres sont les $\lambda_n = -n(n+1)$ *où* $n \in \mathbb{N}$. *Chaque polynôme* Q_n *est la solution polynomiale (à une constante multiplicative près) de* $\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + n(n+1) y = 0$. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *son coefficient dominant est* $\alpha_n = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!}$ *et sa norme est* $\|Q_n\| = \dfrac{2^n n!\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}$, *d'où l'expression des polynômes de Legendre normalisés pour* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$P_n(X) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \left(\left(1 - X^2\right)^n\right)^{(n)} = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \left(\left(X^2 - 1\right)^n\right)^{(n)}$$

Ces polynômes sont aussi définis par la relation de récurrence :

$$\frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}P_{n+1}+\frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}P_{n-1} = XP_n \ \ (n \geq 0) \quad (15.5)$$

avec les conditions initiales $P_{-1} = 0,\ P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Polynômes de Tchebychev de première espèce. *Les polynômes ultrasphériques correspondants au cas où* $a = -\dfrac{1}{2}$ *sont les polynômes de Tchebychev de première espèce définis sur* $I =]-1,1[$ *par* $Q_n(x) = \sqrt{1-x^2}\left(\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\right)^{(n)}$. *Ils sont orthogonaux pour le produit scalaire associé à la fonction poids* π *définie sur* I *par* $\pi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. *L'opérateur différentiel associé est défini par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \mathcal{L}(P) = \left(1-X^2\right)P'' - XP'$$

et ses valeurs propres sont les $\lambda_n = -n^2$ *où* $n \in \mathbb{N}$. *Chaque polynôme* Q_n *est la solution polynomiale sur* I *(à une constante multiplicative près) de l'équation différentielle* $\left(1-x^2\right)y'' - xy' + n^2y = 0$. *Si* y *est solution de cette équation différentielle, la fonction* z *définie sur* $]0,\pi[$ *par* $z(t) = y(\cos(t))$ *est telle que* $z'(t) = -\sin(t)\,y'(\cos(t))$ *et :*

$$\begin{aligned} z''(t) &= -\cos(t)\,y'(\cos(t)) + \sin^2(t)\,y''(\cos(t)) \\ &= -\cos(t)\,y'(\cos(t)) + \left(1-\cos^2(t)\right)y''(\cos(t)) = -n^2y(\cos(t)) \\ &= -n^2z(t) \end{aligned}$$

ce qui donne $z(t) = \alpha_n\cos(nt)+\beta_n\sin(nt)$, *où* α_n *et* β_n *sont deux constantes réelles. L'application* $t \mapsto \cos(t)$ *réalisant un* $\mathcal{C}^\infty$*-difféomorphisme de* $]0,\pi[$ *sur* $]-1,1[$, *on déduit que* $Q_n(x) = \alpha_n\cos(n\arccos(x))+\beta_n\sin(n\arccos(x))$. *Comme la fonction poids* π *est paire,* Q_n *est de la parité de* n. *En particulier,* Q_n *est impaire pour* $n = 2p+1$, *donc :*

$$\begin{aligned} 0 = Q_{2p+1}(0) &= \alpha_{2p+1}\cos\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) + \beta_{2p+1}\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \beta_{2p+1}(-1)^p \end{aligned}$$

soit $\beta_{2p+1} = 0$. *Pour* $n = 2p \geq 2$, Q_n *est paire, donc* Q_n' *est impaire avec*

$$Q_n'(x) = \frac{n\left(\alpha_n\sin(n\arccos(x)) - \beta_n\cos(n\arccos(x))\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

ce qui nous donne :

$$0 = Q_{2p}'(0) = 2p\left(\alpha_{2p}\sin\left(2p\frac{\pi}{2}\right) - \beta_{2p}\cos\left(2p\frac{\pi}{2}\right)\right) = \beta_{2p}(-1)^{p+1}$$

soit $\beta_{2p} = 0$. *En définitive, on a* $Q_n(x) = \alpha_n\cos(n\arccos(x))$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Prenant* $\alpha_n = 1$, *on a :*

$$\|Q_n\|^2 = \int_{-1}^{1}\frac{\cos^2(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^\pi \cos^2(nt)\,dt = \begin{cases} \pi \text{ pour } n = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

ce qui nous donne l'expression suivante des polynômes de Tchebychev normalisés :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left]-1,1\right[,\ P_n(x) = \frac{Q_n(x)}{\|Q_n\|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos(x))$$

et $P_0 = \dfrac{Q_0}{\|Q_0\|} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$. *La relation de récurrence :*

$$\cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) = 2\cos(t)\cos(nt)$$

nous donne la relation $Q_{n+1} + Q_{n-1} = 2XQ_n$ *de laquelle on déduit que le coefficient dominant de* Q_n *est* 2^{n-1} *pour* $n \in \mathbb{N}^*$. *Les polynômes* P_n *vérifient la même relation de récurrence avec* $P_{-1} = 0$ *et* $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Polynômes de Laguerre. *Ils correspondent au choix de* $(A,B) = (X, b_0 + b_1X)$ *sur* $I = \mathbb{R}^{+,*}$. *Les solutions de l'équation différentielle* $(Ay)' = By$ *sur* I, *sont les fonctions de la forme :*

$$y(x) = \frac{\alpha}{A(x)} \exp\left(\int \frac{B(x)}{A(x)} dx\right) = \frac{\alpha}{x} \exp(b_0 \ln(x) + b_1 x) = \alpha x^{b_0 - 1} e^{b_1 x}$$

Chosissant $\alpha = 1$, *cela donne la fonction* π *définie sur* I *par* $\pi(x) = x^a e^{b_1 x}$, *où* $a = b_0 - 1$ *et* b_1 *sont deux réels. Cette fonction est intégrable sur* $\mathbb{R}^{+,*}$ *si, et seulement si,* $a > -1$ *et* $b_1 < 0$. *Sous ces hypothèses, on a :*

$$\lim_{x \to 0^+} A(x)\pi(x) = \lim_{x \to 0^+} x^{a+1} e^{b_1 x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} A(x)\pi(x) = \lim_{x \to +\infty} x^{a+1} e^{b_1 x} = 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$na_2 + b_1 = b_1 0 < 0$$

$$\int_0^{+\infty} |t|^n \pi(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t^{n+a} e^{b_1 t} dt < +\infty$$

Les conditions imposées à la fonction π *sont donc satifaites pour* $a > -1$ *et* $b_1 < 0$. *Prenant* $b_1 = -1$, *l'opérateur différentiel associé est défini par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \mathcal{L}(P) = XP'' + (a + 1 - X)P'$$

et ses valeurs propres sont les $\lambda_n = -n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$. *Les vecteurs propres correspondants sont les polynômes de Laguerre définis sur l'intervalle* I *par* $Q_n(x) = x^{-\alpha} e^x \left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right)^{(n)}$. *Chaque polynôme* Q_n *est la solution polynomiale (à une constante multiplicative près) de l'équation différentielle* $xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$. *La formule de dérivation de Leibniz nous donne pour tout* $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ *:*

$$Q_n(x) = (-1)^n x^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \prod_{i=0}^{k-1} (n + \alpha - i) x^{n-k}$$

donc le coefficient dominant de Q_n *est* $(-1)^n$ *et sa norme est donnée par :*

$$\|Q_n\|^2 = (-1)^n n!\alpha_n \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} dx = n!\Gamma(n+\alpha+1)$$

d'où l'expression des polynômes de Laguerre normalisés :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ P_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\Gamma(n+\alpha+1)}} x^{-\alpha} e^x \left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right)^{(n)}$$

Pour $n \geq 1$ *les coefficients de* X^n *et* X^{n-1} *dans* P_n *sont donnés par :*

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n!\Gamma(n+\alpha+1)}} \text{ et } \beta_n = \frac{-n(n+\alpha)}{\sqrt{n!\Gamma(n+\alpha+1)}} = -n(n+\alpha)\alpha_n$$

ce qui nous donne les coefficients $a_n = 2n+1+\alpha$ *et* $b_n = \sqrt{(n+1)(n+1+\alpha)}$ *pour la relation de récurrence* (15.1), *soit* $P_{-1} = 0,\ P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}}$ *et :*

$$\sqrt{(n+1)(n+1+\alpha)}P_{n+1} + (2n+1+\alpha)P_n + \sqrt{n(n+\alpha)}P_{n-1} = XP_n \ (n \geq 0)$$

Polynômes d'Hermite. *Ils correspondent au choix de* $(A, B) = (1, -2X)$ *sur* $I = \mathbb{R}$. *L'opérateur différentiel associé est défini par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \mathcal{L}(P) = P'' - 2XP'$$

et ses valeurs propres sont les $\lambda_n = -2n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$. *La fonction poids correspondante est solution sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle* $y' = -2xy$, *c'est donc la fonction* π *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\pi(x) = e^{-x^2}$ *à une constante multiplicative près. Les vecteurs propres correspondants sont les polynômes d'Hermite définis par* $H_n(x) = e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Chaque polynôme* H_n *est la solution polynomiale (à une constante multiplicative près) de l'équation différentielle* $y'' - 2xy' + 2ny = 0$. *En utilisant la relation* $H'_{n-1}(x) = 2xH_{n-1}(x) + H_n(x)$, *on déduit que les coefficients dominant de ces polynômes vérifient la relation* $\alpha_n = -2\alpha_{n-1}$ *pour* $n \geq 1$ *avec* $\alpha_0 = 1$, *ce qui donne* $\alpha_n = (-1)^n 2^n$. *La norme de* H_n, *pour* $n \in \mathbb{N}$, *est donnée par :*

$$\|Q_n\|^2 = (-1)^n \alpha_n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

d'où l'expression des polynômes d'Hermite normalisés :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \frac{(-1)^n}{\pi^{\frac{1}{4}}\sqrt{2^n n!}} e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$$

La fonction poids π *étant paire sur* $\mathbb{R}$, *chaque polynôme* P_n *est de la parité de* n. *Ces polynômes sont aussi définis par la relation de récurrence* (15.1) *où* $b_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{2}}$ *et* $a_n = 0$, *soit* $P_{-1} = 0,\ P_0 = \dfrac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}$ *et :*

$$\sqrt{n+1}P_{n+1} + \sqrt{n}P_{n-1} = \sqrt{2}XP_n \ (n \geq 0)$$

15.4 Les polynômes de Legendre

Dans ce paragraphe nous étudions plus en détails la suite des polynômes de Legendre sur $]-1,1[$. Ces polynômes ont été définis au paragraphe précédent par $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$. En utilisant la formule de Leibniz, on a :

$$\begin{aligned}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n)} &= \left((x-1)^n (x+1)^n\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!\,(x-1)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{n!\,(x+1)^k}{k!} \\ &= n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k\end{aligned}$$

et l'évaluation en 1 nous donne $P_n(1) = \frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}n!2^n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$.

Pour ce paragraphe, il sera commode d'utiliser la condition de normalisation $L_n(1) = 1$, ce qui nous conduit à utiliser les polynômes de Legendre définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ L_n(x) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n)}$$

La famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathcal{P}$ avec $\|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Chaque polynôme L_n étant de parité de n, on a $L_n(-1) = (-1)^n$. Cette condition de parité nous dit aussi que $L_{2p+1}(0) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ on a $L_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}L_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}x^{2k}\right)^{(n)} = \frac{1}{2^n n!}\sum_{\frac{n}{2}\leq k\leq n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}(2k)!}{(2k-n)!}x^{2k-n} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{\frac{n}{2}\leq k\leq n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{2k}{n}x^{2k-n}\end{aligned}$$

Cette expression nous permet de retrouver le coefficient dominant de L_n, soit $\alpha_n = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$. On en déduit aussi que $L_{2p}(0) = \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\binom{2p}{p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Des relations de récurrence vérifiées par les polynômes P_n, on déduit le résultat suivant, en posant $L_{-1} = 0$.

Théorème 15.11.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(n+1)L_{n+1}(X) + nL_{n-1}(X) = (2n+1)XL_n(X) \tag{15.6}$$

$$n(n+1)\left(L_{n+1}(X) - L_{n-1}(X)\right) = (2n+1)\left(X^2-1\right)L_n'(X) \tag{15.7}$$

$$\frac{X-Y}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)L_k(X)L_k(Y)=L_{n+1}(X)L_n(Y)-L_n(X)L_{n+1}(Y)$$

(formule de Darboux-Christoffel).

Preuve. La relation (15.5) devient pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{n+1}{\sqrt{2n+1}}L_{n+1}(X)+\frac{n}{\sqrt{2n+1}}L_{n-1}(X)=\sqrt{2n+1}XL_n(x)$$

c'est-à-dire (15.6). Cette relation étant encore valable pour $n=0$ en posant $L_{-1}=0$ (on a $L_0=1$ et $L_1(X)=X$).

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\left(X^2-1\right)L_n'\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$, donc $\left(X^2-1\right)L_n'=\sum_{k=0}^{n+1}\gamma_kL_k$ avec $\gamma_n\|L_n\|^2=\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)L_n'(x)L_n(x)\,dx=0$ par imparité et :

$$\gamma_k\|L_k\|^2=\left\langle\left(x^2-1\right)L_n'\mid L_k\right\rangle=\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)L_k(x)L_n'(x)\,dx$$

$$=\left[\left(x^2-1\right)L_k(x)L_n(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(\left(x^2-1\right)L_k'(x)+2xL_k(x)\right)L_n(x)\,dx$$

$$=-\left\langle L_n\mid\left(x^2-1\right)L_k'+2xL_k\right\rangle=0$$

pour $k+1<n$. Il reste donc $\left(X^2-1\right)L_n'=\gamma_{n+1}L_{n+1}+\gamma_{n-1}L_{n-1}$. L'évaluation en 1 donne $\gamma_{n-1}=-\gamma_{n+1}$ et l'identification des coefficients de X^{n+1} nous donne $\gamma_{n+1}=\frac{n\alpha_n}{\alpha_{n+1}}=n\frac{n+1}{2n+1}$. On a donc la relation de récurrence :

$$(2n+1)\left(X^2-1\right)L_n'=n(n+1)\left(L_{n+1}-L_{n-1}\right)$$

cette relation étant encore valable pour $n=0$.

La relation de Darboux-Christoffel devient :

$$(X-Y)\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2}L_k(X)L_k(Y)$$

$$=\frac{n+1}{\sqrt{4(n+1)^2-1}}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\sqrt{\frac{2n+3}{2}}\left(L_{n+1}(X)L_n(Y)-L_n(X)L_{n+1}(Y)\right)$$

soit :

$$(X-Y)\sum_{k=0}^{n}(2k+1)L_k(X)L_k(Y)=(n+1)\left(L_{n+1}(X)L_n(Y)-L_n(X)L_{n+1}(Y)\right)$$

□

Les polynômes de Legendre peuvent s'exprimer par des formules intégrales qui seront intéressantes pour obtenir certaines propriétés de ces polynômes.

Pour $(x,r)\in[-1,1]\times\mathbb{R}^{+,*}$, on note $\gamma_{x,r}$ le lacet défini par $\gamma_{x,r}(t)=x+re^{it}$ pour tout $t\in[0,2\pi]$ (cercle de centre x et de rayon r).

Théorème 15.12. Formules intégrales de Schläffi et de Laplace

Pour tout entier naturel n *et tout* $(x,r) \in [-1,1] \times \mathbb{R}^{+,*}$, *on a :*

$$L_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{x,r}} \frac{\left(z^2-1\right)^n}{(z-x)^{n+1}} \frac{dz}{2^n}$$

(formule intégrale de Schläffi) et :

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\sin(t)\right)^n dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right)^n dt \end{aligned}$$

(formule intégrale de Laplace).

Preuve. Pour toute fonction f holomorphe sur un voisinage du disque fermé $\overline{D}(x,r)$ de centre x et de rayon r, on a pour tout nombre complexe z_0 dans le disque ouvert $D(x,r)$ et tout entier naturel n, $\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\gamma_{r,x}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ (formule de Cauchy), ce qui nous donne pour $f(z) = \left(1-z^2\right)^n$ et $z_0 = x$:

$$\begin{aligned} 2^n L_n(x) &= \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r,x}} \frac{\left(z^2-1\right)^n}{(z-x)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(\left(x+re^{it}\right)^2 - 1\right)^n}{\left(re^{it}\right)^{n+1}} re^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2x + re^{it} - \frac{1-x^2}{re^{it}}\right)^n dt \end{aligned}$$

Pour $x \in \left]-1,1\right[$ et $r = \sqrt{1-x^2}$, cela donne :

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2x + \sqrt{1-x^2}e^{it} - \sqrt{1-x^2}e^{-it}\right)^n \frac{dt}{2^n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\sin(t)\right)^n dt \end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \theta + \dfrac{\pi}{2}$ nous donne compte tenu de la 2π-périodicité de la fonction intégrée :

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos(\theta)\right)^n d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos(\theta)\right)^n d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos(\theta)\right)^n d\theta \end{aligned}$$

Comme $L_n(x)$ est réel, on a aussi par conjugaison complexe :

$$L_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x - i\sqrt{1-x^2}\cos(\theta)\right)^n d\theta$$

La fonction $\varphi : (\theta, x) \mapsto \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos(\theta)\right)^n$ étant continue sur $[0,\pi]\times[-1,1]$ et l'intégration se faisant sur un segment, la fonction $x \mapsto \int_0^\pi \varphi(x,\theta)\,d\theta$ est continue sur $[-1,1]$ comme L_n, il s'en suit que l'égalité précédente est encore valable pour $x = \pm 1$ par continuité. □

Le théorème précédent peut aussi se montrer sans référence aux fonctions holomorphes (exercice 15.13).

En utilisant la formule intégrale de Laplace, on retrouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$.

Cette formule nous permet également de calculer $\|L_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |L_n(x)|$. Pour ce faire, on remarque que pour tout $(t,x) \in [0,\pi]\times[-1,1]$:

$$\left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right|^2 = x^2 + \left(1-x^2\right)\cos^2(t) \leq x^2 + 1 - x^2 = 1$$

ce qui nous donne $|L_n(x)| \leq 1 = L_n(1)$ et en conséquence, $\|L_n\|_\infty = 1$.

Corollaire 15.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$, on a :*

$$|L_n(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n\left(1-x^2\right)}}$$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$|L_n(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right|^n dt = \frac{1}{\pi} I_n(x)$$

et le changement de variable $t \mapsto \pi - t$ dans l'intégrale sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ nous donne :

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right|^n dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right|^n dt \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right|^n dt \end{aligned}$$

Pour $(x,t) \in [-1,1]\times\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right|^2 = x^2 + \left(1-x^2\right)\cos^2(t)$ avec $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$ et $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$, ce qui nous donne :

$$\left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right|^2 \leq x^2 + \left(1-x^2\right)\left(1 - \frac{4}{\pi^2}t^2\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2}\left(1-x^2\right)t^2$$

puis en utilisant l'inégalité de convexité $1 - y < e^{-y}$ pour $y \geq 0$, on en déduit que :

$$\left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right|^2 \leq e^{-\frac{4}{\pi^2}\left(1-x^2\right)t^2}$$

Il en résulte que $I_n(x) \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2n}{\pi^2}(1-x^2)t^2}dt$ et en effectuant le changement de variable $\theta = \frac{\sqrt{2n(1-x^2)}}{\pi}t$, on obtient :

$$I_n(x) \leq 2\frac{\pi}{\sqrt{2n(1-x^2)}}\int_0^{+\infty} e^{-\theta^2}d\theta = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)}}$$

et en conséquence, $|L_n(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)}}$. □

On en déduit que, pour tout $\delta \in]0,1[$, on $\sup_{x\in[-\delta,\delta]} |L_n(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-\delta^2)}}$, ce qui entraîne la convergence uniforme de $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 sur $[-\delta,\delta]$.

Ce résultat peut aussi se montrer en utilisant le théorème de convergence dominée. Pour cela, on écrit que $L_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(x,t)\,dt$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$, où $f_n(x,t) = \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right)^n$. Pour $(t,x) \in [0,\pi]\times[-\delta,\delta]$, on a :

$$\begin{aligned}\left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right|^2 &= x^2 + \left(1-x^2\right)\cos^2(t) = x^2\sin^2(t) + \cos^2(t)\\ &\leq \delta^2\sin^2(t) + \cos^2(t) = g^2(t)\end{aligned}$$

donc $|L_n(x)| \leq \varepsilon_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g^n(t)\,dt$ avec $\lim_{n\to+\infty} g^n(t) = 0$ pour tout $t \in]0,\pi[$ (puisque $0 < g^2(t) < \sin^2(t) + \cos^2(t)) = 1$) et $0 \leq g(t)^n \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,\pi]$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, ce qui nous assure la convergence uniforme de $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 sur $[-\delta,\delta]$.

Les polynômes de Legendre L_n peuvent aussi être définis en utilisant une fonction génératrice.

Lemme 15.13 *Pour tout réel* α, *on a :*

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{1-i\alpha\cos(t)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\alpha^2\cos^2(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2+1}}$$

Preuve. Pour α réel, on a $1+\alpha^2\cos^2(t) \neq 0$ et $1-i\alpha\cos(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0,\pi]$, donc les deux intégrale sont bien définies. Le changement de variable $t = \pi - \theta$ nous donne :

$$\begin{aligned}I(\alpha) = \int_0^{\pi}\frac{dt}{1-i\alpha\cos(t)} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1-i\alpha\cos(t)} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dt}{1-i\alpha\cos(t)}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1-i\alpha\cos(t)} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+i\alpha\cos(t)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\alpha^2\cos^2(t)}\end{aligned}$$

puis effectuant le changement de variable $x = \tan(t)$ (invariance de $\dfrac{dt}{1+\alpha^2\cos^2(t)}$ par $t \mapsto \pi + t$), on obtient :

$$\begin{aligned}
I(\alpha) &= 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2+1+x^2} = \frac{2}{\alpha^2+1}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\frac{x^2}{\alpha^2+1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2+1}}
\end{aligned}$$

□

Théorème 15.13.

Pour tout $(x,y) \in [-1,1] \times]-1,1[$, *on a :*

$$\frac{1}{\sqrt{y^2-2xy+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)\,y^n \quad et \quad \frac{1}{y^2-2xy+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\,y^n$$

où $T_0(x) = 1$ *et* $T_n(x) = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(x - \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\right)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

Preuve. Notant $\varphi(x,t) = x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)$, on a pour $(t,x) \in]0,\pi[\times]-1,1[$:

$$|\varphi(x,t)|^2 = x^2 + \left(1-x^2\right)\cos^2(t) < x^2 + \left(1-x^2\right) = 1$$

ce qui nous donne pour tout $y \in]-1,1[$:

$$f(t,x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right)^n y^n = \frac{1}{1-xy-iy\sqrt{1-x^2}\cos(t)}$$

D'autre part, en notant $f_n(t,x,y) = \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right)^n y^n$ pour (t,x,y) dans $]0,\pi[\times]-1,1[^2$, on dispose d'une fonction continue telle que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}|f_n(t,x,y)|\,dt \leq \pi\sum_{n=0}^{+\infty}|y|^n < +\infty$$

ce qui nous permet d'écrire que :

$$\int_0^{\pi} f(t,x,y)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right)^n y^n dt = \pi\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)\,y^n$$

avec $1 - xy > 0$ et :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(t,x,y)\,dt &= \int_0^{\pi}\frac{dt}{1-xy-iy\sqrt{1-x^2}\cos(t)} = \frac{1}{1-xy} I\left(\frac{y\sqrt{1-x^2}}{1-xy}\right) \\
&= \frac{1}{1-xy}\frac{\pi}{\sqrt{\frac{y^2(1-x^2)}{(1-xy)^2}+1}} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2-2xy+1}}
\end{aligned}$$

ce qui nous donne $\dfrac{1}{\sqrt{y^2-2xy+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)\, y^n$, cette formule étant encore valable pour $x = \pm 1$ (puisque $L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$).

Pour x fixé dans $[-1,1]$, on a le produit de Cauchy des séries entières :

$$\frac{1}{y^2-2xy+1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)\, y^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\, y^n \tag{15.8}$$

pour $y \in \left]-1,1\right[$, avec $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)\, L_{n-k}(x) \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le coefficient de x^n dans T_n étant $\dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \in \mathbb{R}^{+,*}$, ce polynôme est de degré n. Chaque L_k étant de la parité de k, le polynôme T_n est de la parité de n.

La relation (15.8) s'écrit $\left(y^2-2xy+1\right) \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\, y^n = 1$, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\, y^{n+2} - 2x \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\, y^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\, y^n = 1$$

ce qui peut s'écrire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} T_{n-1}(x)\, y^{n+1} - 2x \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\, y^{n+1} + \sum_{n=-1}^{+\infty} T_{n+1}(x)\, y^{n+1} = 1$$

ou encore :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(T_{n-1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n+1}(x)\right) y^{n+1} + T_0(x) + \left(T_1(x) - 2xT_0(x)\right) y = 1$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que les polynômes T_n sont définis par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1,\ T_1(x) = 2xT_0(x) = 2x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \ \ (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

On en déduit que le coefficient dominant de T_n est 2^n, ce qui nous donne en prime l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 2^{2n}$.

On a $\sin(\theta)\, T_0(\cos(\theta)) = \sin(\theta)$, $\sin(\theta)\, T_1(\cos(\theta)) = \sin(2\theta)$ et par récurrence, on vérifie que $\sin(\theta)\, T_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta)$. C'est vrai pour $n \in \{0,1\}$ et supposant le résultat acquis jusqu'au rang $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sin(\theta)\, T_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta) \\ &= 2\cos(\theta)\left(\sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta)\right) - \sin(n\theta) \\ &= \left(2\cos^2(\theta) - 1\right)\sin(n\theta) + \cos(n\theta)\sin(2\theta) \\ &= \cos(2\theta)\sin(n\theta) + \cos(n\theta)\sin(2\theta) = \sin((n+2)\theta) \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$, on a $\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) = \sin(k\pi) = 0$, donc $\frac{k\pi}{n+1}$ est une racine de T_n, ce qui nous donne n racines distinctes de ce polynôme de degré n et en conséquence, $T_n(x) = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(x - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$. $\square$

Corollaire 15.3. *En désignant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $x_n = \max_{1\leq k\leq n} x_{n,k}$ la plus grande des racines de L_n, on a $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < x_n < 1$ et en conséquence, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.*

Preuve. Pour tout $x \geq x_n$, on a $L_k(x) > 0$ pour k compris entre 0 et $n-1$ (car $x_n > x_k$ et $L_0 = 1$) et $L_n(x) \geq 0$, donc $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) L_{n-k}(x) > 0$. Il en résulte que $y_n < x_n$ (si $y_n \geq x_n$, on a alors $0 = T_n(y_n) > 0$, ce qui est impossible). On a donc $y_n = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < x_n < 1$ et faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$. $\square$

La convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ peut aussi se montrer en vérifiant que cette suite est croissante (corollaire 15.1 ou exercice 15.12).

15.5 Développement en série de polynômes orthogonaux

On se donne un intervalle ouvert $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, une fonction continue $\pi : I \to \mathbb{R}^{+,*}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$ relativement à cette fonction poids π sur I avec, pour tout entier naturel n, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} x^k$, le coefficient dominant $\alpha_n^{(n)}$ étant strictement positif.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_a^b f^2(x)\pi(x)\,dx < +\infty$ et qu'en tout point $\alpha \in I$ où f est discontinue on ait $f(\alpha) = \frac{f(\alpha^-) + f(\alpha^+)}{2}$, où $f(\alpha^-)$ et $f(\alpha^+)$ désignent respectivement les limites à gauche et à droite de f en α. Cet ensemble $\mathcal{E}$ contient l'ensemble de toutes les fonctions polynomiales réelles.

Théorème 15.14.

L'ensemble $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ définie sur $\mathcal{E}^2$ par $\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \pi(x)\,dx$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

Preuve. On vérifie tout d'abord que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$. De l'inégalité $|fg| \leq \frac{1}{2}\left(f^2+g^2\right)$, on déduit que pour tous f, g dans $\mathcal{E}$, on a $\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,\pi(x)\,dx < +\infty$ et il en résulte que $\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))^2\,\pi(x)\,dx < +\infty$ pour tout réel λ, ce qui signifie que $f+\lambda g$ est dans $\mathcal{E}$.

Des propriétés de l'intégrale sur un segment, on déduit que l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique et positive sur $\mathcal{E}$. Si $f \in \mathcal{E}$ est telle que $\langle f \mid f \rangle = 0$, en notant $a_1 < \cdots < a_p$ ses éventuels points de discontinuités dans $]a_0, a_{p+1}[\, = \,]a, b[$, on a :

$$0 = \int_a^b (f(x))^2\,\pi(x)\,dx = \sum_{k=0}^{p} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x))^2\,\pi(x)\,dx$$

donc $\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x))^2\,\pi(x)\,dx = 0$ pour tout k compris entre 0 et p et f est nulle sur chaque intervalle $I_k = \,]a_k, a_{k+1}[$ puisque f^2 est continue positive sur I_k. On a alors $f\left(a_k^{\pm}\right) = \lim\limits_{x\to a_k^{\pm}} f(x) = 0$ et en conséquence, $f(a_k) = \dfrac{f\left(a_k^-\right)+f\left(a_k^+\right)}{2} = 0$. La fonction f est donc nulle sur I. En définitive, l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est définie et c'est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$. □

Muni de ce produit scalaire, l'espace préhilbertien $\mathcal{E}$ n'est pas un espace de Hilbert (exercice 15.15).

Définition 15.3. *Soit f une fonction dans $\mathcal{E}$. La suite de ses coefficients de Fourier relativement à la famille orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n(f) = \langle f \mid P_n \rangle = \int_a^b f(t)\,P_n(t)\,\pi(t)\,dt$$

Pour tout $f \in \mathcal{E}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\,P_k$ la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de la série de Fourier de f relativement à la famille orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour les exemples classiques des polynômes orthogonaux de Legendre, Tchebychev, Laguerre ou Hermite la série correspondante est appelée série de Fourier-Legendre,, Fourier-Tchebychev, Fourier-Laguerre ou Fourier-Hermite.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$, $S_n(f)$ est la meilleure approximation (ou la projection orthogonale) de f dans $\mathcal{P}_n$, c'est-à-dire que $\|f - S_n(f)\| = \inf\limits_{P\in\mathcal{P}_n} \|f-P\|$ et on a l'inégalité de Bessel, $\sum_{n=0}^{+\infty} (c_n(f))^2 \leq \|f\|^2$ qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n(f) = 0$ (théorèmes 3.8, 3.11 et 3.12).

Les opérateurs $S_n : \mathcal{E} \to \mathcal{P}_n$ sont des opérateurs à noyau comme les opérateurs de Fourier trigonométriques.

Théorème 15.15.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\forall x \in \left]a, b\right[, \ S_n(f)(x) = \int_a^b K_n(t, x) f(t) \pi(t) \, dt$$

où la fonction K_n est continue sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\begin{aligned} K_n(t, x) &= \sum_{k=0}^{n} P_k(t) P_k(x) \\ &= \begin{cases} b_n \dfrac{P_{n+1}(t) P_n(x) - P_n(t) P_{n+1}(x)}{t - x} & si \ t \neq x \\ b_n \left(P_n(x) P'_{n+1}(x) - P'_n(x) P_{n+1}(x)\right) & si \ t = x \end{cases} \end{aligned}$$

avec $b_n = \dfrac{\alpha_n^{(n)}}{\alpha_{n+1}^{(n+1)}}$.

Preuve. La fonction K_n qui est polynomiale, est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $x \in \left]a, b\right[$, on a :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^{n} c_k(f) P_k(x) = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} P_k(t) P_k(x)\right) f(t) \pi(t) \, dt \\ &= \int_a^b K_n(t, x) f(t) \pi(t) \, dt \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Darboux-Christoffel (théorème 15.7), on a pour $x \neq t$:

$$\begin{aligned} K_n(t, x) &= b_n \frac{P_{n+1}(t) P_n(x) - P_n(t) P_{n+1}(x)}{t - x} \\ &= b_n \left(\frac{P_{n+1}(t) - P_{n+1}(x)}{t - x} P_n(x) - \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x} P_{n+1}(x)\right) \end{aligned}$$

et en faisant tendre t vers x on obtient :

$$K_n(x, x) = b_n \left(P'_{n+1}(x) P_n(x) - P'_n(x) P_{n+1}(x)\right)$$

□

Corollaire 15.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left]a, b\right[$, on a* $\displaystyle\int_a^b K_n(t, x) \pi(t) \, dt = 1.$

Preuve. Pour $f = 1$ on a $c_k(1) = \langle 1 \mid P_k \rangle = 0$ pour $k \geq 1$, de sorte que :

$$S_n(1) = c_0(1) P_0 = \langle 1 \mid P_0 \rangle P_0 = \langle P_0 \mid P_0 \rangle = 1$$

et $\displaystyle\int_a^b K_n(t,x)\,\pi(t)\,dt = 1$ □

Dans le cas où l'intervalle I est borné (*i. e.* a et b sont finis) on déduit du théorème de Weierstrass (exercice 2.8) que l'égalité de Parseval est vérifiée pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$ qui est continue à droite en a et à gauche en b, ce qui équivaut à la convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier $\sum c_n(f)\,P_n$ vers f.

Dans le cas où I est borné, on note $\mathcal{E}'$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ constitué des fonctions continues par morceaux sur le segment $\overline{I} = [a,b]$.

Lemme 15.14 *Pour I borné, l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est dense dans $(\mathcal{E}', \|\cdot\|)$.*

Preuve. On note $a_0 = a$, $a_{p+1} = b$ et $a < a_1 < \cdots < a_p < b$ les points de discontinuités de $f \in \mathcal{E}'$. Pour tout réel δ strictement positif tel que $[a_k - \delta, a_k + \delta] \subset I$, on note f_δ la fonction définie sur $[a,b]$ par :

$$f_\delta(x) = \begin{cases} f(x) \ \text{ si } x \notin \bigcup\limits_{k=1}^{p} [a_k - \delta, a_k + \delta] \\ f(a_k - \delta)\dfrac{a_k + \delta - x}{2\delta} + f(a_k + \delta)\dfrac{x - (a_k - \delta)}{2\delta} \ \text{ si } x \in [a_k - \delta, a_k + \delta] \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$ (sur $[a_k - \delta, a_k + \delta]$ elle est affine et coïncide avec f en $a_k - \delta$ et $a_k + \delta$) et on a :

$$\|f - f_\delta\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \int_{a_k - \delta}^{a_k + \delta} (f(t) - f_\delta(t))^2\,\pi(t)\,dt$$

En notant M la borne supérieure de f sur $[a,b]$ et M' celle de π sur $[a_1 - \delta, a_p + \delta]$, on a $|f_\delta(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$ et :

$$\|f - f_\delta\|^2 \leq 4M^2 \sum_{k=1}^{p} \int_{a_k - \delta}^{a_k + \delta} \pi(t)\,dt \leq \left(8pM^2M'\right)\delta$$

Pour tout réel ε strictement positif, on peut choisir $\delta > 0$ tel que $\left(8pM^2M'\right)\delta < \varepsilon^2$ et la fonction f_δ dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est telle que $\|f - f_\delta\| < \varepsilon$. Ce qui prouve la densité de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ dans $(\mathcal{E}', \|\cdot\|)$. □

Théorème 15.16.

Pour I borné, la famille orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $(\mathcal{E}', \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$.

Preuve. Soient $f \in \mathcal{E}'$, $\varepsilon > 0$ et $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\| < \varepsilon$. Le théorème de Weierstrass nous dit qu'il existe une fonction polynomiale P telle que $\|g - P\|_\infty < \varepsilon$, donc $\|g - P\|^2 \leq \|g - P\|_\infty^2 \displaystyle\int_a^b \pi(t)\,dt < \varepsilon^2\|1\|^2$ et en conséquence, $\|f - P\| \leq \|f - g\| + \|g - P\| < (1 + \|1\|)\,\varepsilon$, ce qui prouve la densité de $\mathcal{P} = \operatorname{Vect}\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dans $(\mathcal{E}', \|\cdot\|)$, c'est-à-dire que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $(\mathcal{E}', \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$. □

Du théorème 3.13, on déduit alors le résultat suivant.

Corollaire 15.5. *Dans le cas où I est borné, on a pour toute fonction f dans $\mathcal{E}'$, $f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) P_n$ dans $(\mathcal{E}', \|\cdot\|)$ (convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier) et $\|f\|^2 = \int_a^b f^2(t)\pi(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (c_n(f))^2$ (égalité de Parseval).*

L'identité de Parseval nous dit aussi qu'une fonction $f \in \mathcal{E}'$ est uniquement déterminée par ses coefficients de Fourier.

Dans ce qui suit on suppose I borné et pour $f \in \mathcal{E}$, on s'intéresse à la convergence simple ou uniforme de la série de fonctions $\sum c_n(f) P_n$.

Théorème 15.17.

Dans le cas où l'intervalle I est borné, si $x \in \left]a,b\right[$ est tel que la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée et $f \in \mathcal{E}$ admet une dérivée à droite et à gauche en x, on a alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) P_n(x)$.

Preuve. Du théorème 15.15 et du corollaire 15.4, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left]a,b\right[$, on a :

$$S_n(f)(x) - f(x) = \int_a^b K_n(t,x)(f(t) - f(x))\pi(t)\,dt \tag{15.9}$$

avec $K_n(t,x)(f(t)-f(x)) = 0$ pour $t = x$ et :

$$K_n(t,x)(f(t)-f(x)) = b_n(P_n(x)P_{n+1}(t) - P_{n+1}(x)P_n(t))\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

pour $t \in \left]a,b\right[\setminus \{x\}$. Dans le cas où f est dérivable à droite et gauche en x, la fonction φ_x définie sur $\left]a,b\right[$ par :

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} \text{ si } t \neq x \\ \dfrac{f'_g(x) + f'_d(x)}{2} \text{ si } t = x \end{cases}$$

est un élément de $\mathcal{E}$ (comme $f \in \mathcal{E}$, la fonction φ_x est continue sur $\left]a,b\right[$ privé de x et des éventuels points de discontinuité de f et en tous ces points, φ_x admet des limites à droite et à gauche puisque $f \in \mathcal{E}$ et f est dérivable à droite et gauche en x). On a donc :

$$\begin{aligned} & S_n(f)(x) - f(x) \\ & = b_n\left(P_n(x)\int_a^b \varphi_x(t)P_{n+1}(t)\pi(t)\,dt - P_{n+1}(x)\int_a^b \varphi_x(t)P_n(t)\pi(t)\,dt\right) \\ & = b_n(P_n(x)c_{n+1}(\varphi_x) - P_{n+1}(x)c_n(\varphi_x)) \end{aligned}$$

avec $0 < b_n \leq c = \max(|a|, |b|)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (voir le paragraphe 15.2), ce qui nous donne la majoration :

$$|S_n(f)(x) - f(x)| \leq c(|P_n(x)| |c_{n+1}(\varphi_x)| + |P_{n+1}(x)| |c_n(\varphi_x)|)$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n(\varphi_x) = 0$. Dans le cas où la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(f)(x) = f(x)$, ce qui signifie que $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(f) P_n(x)$.

□

Exemples 15.3

1. *Polynômes de Tchébychev. On se place sur* $]-1, 1[$ *avec la fonction poids* π *définie par* $\pi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. *Les polynômes* P_n *sont définis par* $P_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ *et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [-1, 1], \ P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos(x))$$

et les coefficients b_n *sont donnés par* $b_{-1} = 0$, $b_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *et* $b_n = \dfrac{1}{2}$ *pour* $n \geq 1$.

Pour tout $x \in [-1, 1]$ *et tout entier naturel* n *on a la majoration* $|P_n(x)| \leq \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

On déduit alors que pour $f \in \mathcal{E}$ *et* $x \in]-1, 1[$ *où* f *admet une dérivée à droite et à gauche, on a :*

$$f(x) = \frac{c_0(f)}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f) \cos(n \arccos(x))$$

avec $c_0(f) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1 - t^2}} dt$ *et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ c_n(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{f(t) \cos(n \arccos(t))}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

En posant $x = \cos(\theta)$ *avec* θ *dans* $[0, \pi]$, *on obtient :*

$$f(\cos(\theta)) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(n\theta)$$

avec :

$$\forall n \geq 0, \ a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(\theta)) \cos(n\theta) \, d\theta$$

On retrouve ainsi le développement en série de Fourier trigonométrique de la fonction paire $\theta \mapsto f(\cos(\theta))$.

2. *Polynômes de Legendre. On se place sur* $]-1, 1[$ *avec la fonction poids* $\pi = 1$. *Les polynômes* P_n *sont définis par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \left((x^2 - 1)^n \right)^{(n)}$$

Pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la majoration $|P_n(x)| \leq \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x^2}}$ (corollaire 15.2). On déduit alors que pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$ et $x \in]-1,1[$ où f admet une dérivée à droite et à gauche, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) P_n(x)$, où $c_n(f) = \dfrac{1}{2^n n!}\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\left(\left(t^2-1\right)^n\right)^{(n)} dt$.

Théorème 15.18.

Si l'intervalle I est borné et si pour tout x dans I la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$ vérifiant une condition de Hölder de constante $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et d'exposant $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$ sur I, on a :

$$\forall x \in]a,b[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) P_n(x)$$

Preuve. On a :

$$\forall (t,x) \in I^2,\ |f(t) - f(x)| \leq \lambda |t-x|^{\alpha}.$$

En utilisant les notations de la démonstration du théorème précédent, on a pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in]a,b[$ et $t \in [x-\eta, x+\eta]$:

$$|K_n(t,x)(f(t)-f(x))| \leq \lambda b_n \frac{|P_{n+1}(t) P_n(x) - P_n(t) P_{n+1}(x)|}{|t-x|^{1-\alpha}},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}&\left|\int_{x-\eta}^{x+\eta} K_n(t,x)(f(t)-f(x))\pi(t)\,dt\right| \\ &\leq \lambda c M_x \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} |P_{n+1}(t)| \frac{\pi(t)\,dt}{|t-x|^{1-\alpha}} + \int_{x-\eta}^{x+\eta} |P_n(t)| \frac{\pi(t)\,dt}{|t-x|^{1-\alpha}}\right),\end{aligned}$$

les intégrales du membre de droite de cette inégalité étant convergents du fait que $1-\alpha < 1$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\int_{x-\eta}^{x+\eta} |P_n(t)| \frac{\pi(t)\,dt}{|t-x|^{1-\alpha}} \leq \sqrt{\int_{x-\eta}^{x+\eta} |P_n^2(t)|\,\pi(t)\,dt}\sqrt{\int_{x-\eta}^{x+\eta} \frac{\pi(t)\,dt}{|t-x|^{2(1-\alpha)}}}$$

(la dernière intégrale étant convergente du fait que $2(1-\alpha) < 1$ si $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$), puis avec :

$$\int_{x-\eta}^{x+\eta} \left|P_n^2(t)\right| \pi(t)\,dt \leq \int_a^b \left|P_n^2(t)\right| \pi(t)\,dt = \|P_n\|^2 = 1$$

on obtient :

$$\int_{x-\eta}^{x+\eta} |P_n(t)| \frac{\pi(t)\,dt}{|t-x|^{1-\alpha}} \leq \sqrt{\int_{x-\eta}^{x+\eta} \frac{\pi(t)\,dt}{|t-x|^{2(1-\alpha)}}}$$

avec $\lim\limits_{\eta\to 0} \displaystyle\int_{x-\eta}^{x+\eta} \frac{\pi(t)\,dt}{|t-x|^{2(1-\alpha)}} = 0$ pour $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut donc choisir, à x fixé dans $]a,b[$, un réel $\eta > 0$ assez petit de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{x-\eta}^{x+\eta} |P_n(t)| \frac{\pi(t)\,dt}{|t-x|^{1-\alpha}} < \varepsilon$$

On en déduit alors que la suite $(S_n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. □

15.6 Exercices

Exercice 15.1. *Soient $I =]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et strictement croissante d'éléments de I et $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_k < +\infty$. Montrer que la forme linéaire φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_k P(x_k)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est définie positive sur I.*

Solution. La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il existe un réel $R > 0$ tel que $|x_k| \leq R$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k P(x_k)| \leq \sup_{x\in[-R,R]} |P(x)| \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k < +\infty$$

ce qui justifie la définition de φ. Il est clair que φ est une forme linéaire. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, l'égalité $\varphi(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_k P(x_k) = 0$ équivaut à $P(x_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (on a $\alpha_k P(x_k) = 0$ avec $\alpha_k > 0$), donc P a une infinité de racines ($(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante), ce qui équivaut à dire que $P = 0$. On a donc $\varphi(P) > 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(x) \geq 0$, ce qui signifie que φ est définie positive sur I.

Exercice 15.2. *Montrer que pour tout réel strictement positif a, la forme linéaire φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} P(k)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est définie positive sur $\mathbb{R}$.*

Solution. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(k) \neq 0$ pour tout $k \geq k_0$ et avec $\lim\limits_{\substack{k \to +\infty \\ k \geq k_0}} \frac{|a|}{k+1} \frac{|P(k+1)|}{|P(k)|} = 0$, on déduit que la série numérique $\sum \frac{a^k}{k!} P(k)$ est absolument convergente, ce qui justifie la définition de φ. Il est clair que φ est une forme linéaire et pour $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $\varphi(P) = 0$ équivaut à $P(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et revient à dire que $P = 0$. On a donc $\varphi(P) > 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(x) \geq 0$, ce qui signifie que φ est définie positive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15.3. *Soient φ une forme linéaire définie positive sur $\mathbb{R}[X]$, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des moments et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes orthogonaux associés (théorème 15.1). On désigne par $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $R_0(X) = 1$ et :*

$$R_n(X) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^n \end{vmatrix}$$

pour $n \geq 1$.

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, R_n est un polynôme de degré n orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.*
2. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} R_n$ et que le coefficient dominant de P_n est $\alpha_n = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}$.*
3. *Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \gamma_k X^k$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\langle P_n \mid P \rangle = \frac{\gamma_n}{\alpha_n}$.*
4. *Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire et de degré n, on a $\|P\| \geq \frac{1}{\alpha_n}$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $P = \frac{1}{\alpha_n} P_n$.*

Solution. La matrice $\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^n \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}(X))$, où $\mathbb{R}(X)$ est le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{R}$. Cette remarque justifie les calculs matriciels qui suivent.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en développant le déterminant suivant la dernière ligne il apparaît que R_n est un polynôme de la forme :

$$R_n(X) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^n \end{vmatrix} = D_{n-1}X^n + \sum_{k=0}^{n-1} r_k X^k$$

avec $D_{n-1} > 0$ puisque φ est définie positive, c'est donc un polynôme de degré n de coefficient dominant strictement positif. Pour $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$R_n(X)\, X^k = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ X^k & X^{k+1} & \cdots & X^{k+n} \end{vmatrix}$$

et le développement de ce déterminant suivant la dernière ligne donne :

$$\begin{aligned} \varphi\left(R_n X^k\right) &= \varphi\left(\sum_{j=0}^{n} s_j X^{k+j}\right) = \sum_{j=0}^{n} s_j \varphi\left(X^{k+j}\right) = \sum_{j=0}^{n} s_j \mu_{k+j} \\ &= \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \cdots & \mu_{k+n} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

car la dernière ligne est égale à la ligne numéro k. Il en résulte que R_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Chaque polynôme R_n étant de degré n, on en déduit que la famille $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$. Le calcul précédent pour $k = n \in \mathbb{N}^*$ nous donne :

$$\varphi(R_n X^n) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix} = D_n$$

donc :

$$\|R_n\|^2 = \left\langle R_n \mid D_{n-1}X^n + \sum_{k=0}^{n-1} r_k X^k \right\rangle = D_{n-1}\langle R_n \mid X^n\rangle = D_{n-1}D_n$$

Pour $n = 0$, on a $\|R_0\|^2 = \varphi(1) = \mu_0 = D_0$. En conclusion, en notant $D_{-1} = 1$, la famille $\left(\dfrac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} R_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée, chaque polynôme

$\dfrac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}R_n$ étant de degré n à coefficient dominant strictement positif, c'est donc la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par unicité dans le théorème de Gram-Schmidt. On a donc en définitive, $P_n = \dfrac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}R_n$ et le coefficient dominant de P_n est $\alpha_n = \dfrac{D_{n-1}}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} = \sqrt{\dfrac{D_{n-1}}{D_n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \gamma_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle P_n \mid P\rangle &= \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \left\langle P_n \mid X^k\right\rangle = \gamma_n \langle P_n \mid X^n\rangle = \frac{\gamma_n}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} \langle R_n \mid X^n\rangle \\
&= \frac{\gamma_n D_n}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} = \gamma_n \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}} = \frac{\gamma_n}{\alpha_n}
\end{aligned}$$

4. Pour $n = 0$, on a $P = 1 = \dfrac{1}{\alpha_0}P_0$ et il n'y a rien à prouver. Pour $n \geq 1$, un polynôme unitaire de degré n s'écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \nu_k P_k$ avec $\nu_n = \dfrac{1}{\alpha_n} > 0$ et on a :

$$\|P\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \nu_k^2 \geq \nu_n^2 = \frac{1}{\alpha_n^2}$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, tous les ν_k pour k compris entre 0 et $n-1$ sont nuls, ce qui équivaut à $P = \nu_n P_n = \dfrac{1}{\alpha_n}P_n$.

Exercice 15.4. *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de matrices réelles tridiagonales définie par $A_1 = (a_0)$ et*
$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$
pour $n \geq 2$.

1. *Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A_n est de rang supérieur ou égal à $n-1$.*
2. *Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A_n est diagonalisable avec toutes ses valeurs propres réelles et simples.*
3. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\chi_n(X) = \det(XI_n - A_n)$ le polynôme caractéristique de A_n. En notant $\chi_{-1} = 0$ et $\chi_0 = 1$, montrer que la suite $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

est définie par la relation de récurrence :

$$X\chi_n = \chi_{n+1} + a_n\chi_n + b_{n-1}^2\chi_{n-1}$$

4. *Montrer que si tous les a_n sont nuls, chaque polynôme χ_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, est alors de la parité de n et pour toute valeur propre λ de A_n, on a $|\lambda| \leq 2 \max\limits_{0\leq k\leq n-2} |b_k|$ pour $n \geq 2$.*

Solution.

1. Pour $n = 1$, $A_1 = (a_0)$ est de rang 0 (si $a_0 = 0$) ou 1 (si $a_0 \neq 0$). Pour $n \geq 2$, on a :
$$\delta_{n-1} = \begin{vmatrix} b_0 & a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{n-3} & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-2} b_k \neq 0$$
donc $\operatorname{rang}(A_n) \geq n-1$.
2. Pour $n = 1$, c'est clair. Pour $n \geq 2$, la matrice symétrique réelle A_n a toutes ses valeurs propres réelles et est diagonalisable. Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A_n - \lambda I_n$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$ (on remplace a_n par $a_n - \lambda$ dans la question précédente) et de déterminant nul, donc ce rang vaut $n-1$, ce qui revient à dire que l'espace propre $\ker(A_n - \lambda I_n)$ est de dimension 1. Il en résulte que toutes les valeurs propres de A_n sont simples (A_n étant diagonalisable, la dimension de $\ker(A_n - \lambda A_n)$ est égale à la multiplicité de la valeur propre λ).
3. Pour $n = 1$, on a $\chi_1(X) = X - a_0$. Pour $n \geq 1$, le développement de $\chi_{n+1}(X)$ suivant la dernière colonne nous donne :
$$\chi_{n+1}(X) = (X - a_n)\chi_n(X) - b_{n-1}^2\chi_{n-1}(X)$$
4. Le polynôme $\chi_0 = 1$ est pair et le polynôme $\chi_1 = X$ est impair. Supposant le résultat acquis jusqu'au rang $n \geq 0$, on a :
$$\begin{aligned} \chi_{n+1}(-X) &= (-X - a_n)\chi_n(-X) - b_{n-1}^2\chi_{n-1}(-X) \\ &= (-1)^{n+1} X\chi_n(X) - b_{n-1}^2(-1)^{n+1}\chi_{n-1}(X) \\ &= (-1)^{n+1}\chi_{n+1}(X) \end{aligned}$$
Si pour $n \geq 2$, λ est valeur propre de A_n, le théorème de Gerschgörin-Hadamard (voir [22]) nous dit alors qu'il existe un indice k compris entre 0 et $n-2$ tel que $|\lambda| \leq 2|b_k| \leq 2 \max\limits_{0\leq k\leq n-2} |b_k|$.

Exercice 15.5. *On désigne par* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites de fonctions définies sur* $]-1,1[$ *par :*

$$T_n(x)=\cos(n\arccos(x)) \text{ et } U_n(x)=\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x)$$

1. *Montrer que chaque fonction* T_n *et chaque fonction* U_n *est polynomiale de degré* n*, de la parité de* n*, en précisant le coefficient dominant de chacun de ces polynômes.*
   Les T_n *sont les polynômes de Tchebychev de première espèce et les* U_n *les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce.*
2. *Calculer, pour* $n\in\mathbb{N}^*$*, les racines de* T_n *et celles de* U_n*.*
3. *En reprenant les notations de l'exercice 15.4, on suppose que tous les* a_n *sont nuls et que tous les* b_n *valent* $\frac{1}{2}$*. Calculer les valeurs propres de* A_n *pour* $n\in\mathbb{N}^*$ *et en déduire une expression de son polynôme caractéristique* χ_n*.*

Solution.

1. Pour tout $x\in[-1,1]$, on a $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$ et en écrivant tout réel x dans $[-1,1]$ sous la forme $x=\cos(\theta)$ avec $\theta\in[0,\pi]$, on a pour $n\geq 2$:

$$\begin{cases} T_{n+1}(x)=\cos((n+1)\theta)=\cos(n\theta)\cos(\theta)-\sin(n\theta)\sin(\theta)\\ T_{n-1}(x)=\cos((n-1)\theta)=\cos(n\theta)\cos(\theta)+\sin(n\theta)\sin(\theta)\end{cases}$$

   et $T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2xT_n(x)$, ce qui permet de montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction T_n est polynomiale de degré n avec pour coefficient dominant 1 si $n=0$ et 2^{n-1} si $n\geq 1$ (récurrence immédiate). Il en résulte que chaque fonction $U_n=\frac{1}{n+1}T'_{n+1}$ est polynomiale de degré n de coefficient dominant 2^n. Pour tout $x\in[-1,1]$, on a $\arccos(-x)=\pi-\arccos(x)$, ce qui nous donne $T_n(-x)=(-1)^n T_n(x)$ et l'égalité $T_n(-X)=(-1)^n T_n(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ (polynômes qui coïncident sur une infinité de valeurs). Le polynôme T_n est donc de la parité de n, ainsi que U_n par dérivation.
2. Avec les notations précédentes, on a $T_n(x)=0$ avec $x\in[-1,1]$ si, et seulement si, $\cos(n\theta)=0$ avec $\theta\in[0,\pi]$, ce qui équivaut à $n\theta=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec k compris entre 0 et $n-1$. Cela nous donne les n racines distinctes $\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right)$ (la fonction cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$) et en conséquence, on les a toutes. En écrivant que $U_n(x)=\frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ pour $x\in]-1,1[$, on a $U_n(x)=0$ si, et seulement si, $\sin((n+1)\theta)=0$ avec $\theta\in]0,\pi[$, ce qui équivaut à $(n+1)\theta=k\pi$ avec k compris entre 1 et n. Cela nous donne les n racines distinctes $\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ et en conséquence, on les a toutes.

3. On note $x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n}$ les valeurs propres de A_n. Pour $n = 1$, on a $\chi_1(X) = X$ et $x_{1,1} = 0$. Pour $n \geq 2$, on a $A_n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le théorème de Gerschgörin-Hadamard nous dit que toutes les valeurs propres de $2A_n$ sont dans $[-2, 2]$. Une telle valeur propre peut donc s'écrire $\lambda = 2\cos(\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$. Si $V = (v_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un vecteur propre non nul associé ses composantes sont alors solutions de l'équation de récurrence :

$$v_{k-1} - \lambda v_k + v_{k+1} = 0 \ \ (1 \leq k \leq n)$$

avec les conditions aux limites $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = 0$. Le polynôme caractéristique de cette récurrence est $P(r) = r^2 - 2\cos(\theta) r + 1 = \left(r - e^{i\theta}\right)\left(r - e^{-i\theta}\right)$, ce qui nous donne :

$$v_k = c_1 e^{ik\theta} + c_2 e^{-ik\theta} \ \ (0 \leq k \leq n+1)$$

De $v_0 = 0$, on déduit que $c_2 = -c_1$ et de $v_{n+1} = 0$ avec $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, on déduit que $\sin((n+1)\theta) = 0$, soit $\theta = \dfrac{j\pi}{n+1}$ avec $1 \leq j \leq n$. Les valeurs propres de A_n sont donc les $x_{n-k,n} = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ $(1 \leq k \leq n)$. L'espace propre associé à $x_{n-k,n}$ est la droite engendrée par le vecteur $V^{(k)}$ de composantes :

$$V_j^{(k)} = \sin\left(j\frac{k\pi}{n+1}\right) \ \ (1 \leq k, j \leq n)$$

Le polynôme unitaire χ_n ayant le même degré et les mêmes racines que U_n, on a $\chi_n = \dfrac{1}{2^n} U_n$, soit $\chi_n(x) = \dfrac{\sin((n+1)\arccos(x))}{2^n\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in \left]-1, 1\right[$.

Exercice 15.6. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A_1 = (a_0)$ et :*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

pour $n \geq 2$, où $a_n = \varphi\left(XP_n^2\right)$ et $b_n = \varphi(XP_nP_{n+1})$, en reprenant les notations du théorème 15.3.

1. *Montrer que le polynôme $\dfrac{1}{\alpha_n}P_n$ est le polynôme caractéristique de A_n.*
2. *En déduire que P_n admet n racines réelles simples.*

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, $v_n(x)$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par $v_1(x) = (P_0(x)) = (1)$ et $v_n(x) = (P_k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ pour $n \geq 2$. En calculant $A_n v_n(x)$, retrouver le fait que les racines de P_n sont les valeurs propres de A_n.

Solution.

1. En notant χ_n le polynôme caractéristique de A_n, on a vu avec l'exercice 15.4 que la suite $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence :

$$X\chi_n = \chi_{n+1} + a_n\chi_n + b_{n-1}^2\chi_{n-1}$$

pour $n \geq 1$ avec les conditions initiales $\chi_0 = 1$ et $\chi_1 = X - a_0$. De la récurrence vérifiée par les P_n, on déduit que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\alpha_n}P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation :

$$\begin{aligned} XQ_n &= \frac{1}{\alpha_n}XP_n = \frac{b_n}{\alpha_n}P_{n+1} + \frac{a_n}{\alpha_n}P_n + \frac{b_{n-1}}{\alpha_n}P_{n-1} \\ &= \frac{1}{\alpha_{n+1}}P_{n+1} + \frac{a_n}{\alpha_n}P_n + \frac{b_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}}P_{n-1} = Q_{n+1} + a_nQ_n + b_{n-1}^2Q_{n-1} \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$ (on a $b_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ et $b_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$) avec les conditions initiales $Q_0 = 1 = \chi_0$ et $Q_1 = \frac{1}{\alpha_1}\frac{X - a_0}{b_0} = X - a_0 = \chi_1$. Il en résulte que $\frac{1}{\alpha_n}P_n = \chi_n$.

2. La matrice symétrique A_n ayant n valeurs propres réelles simples pour $n \geq 1$ (exercice 15.4), on en déduit que P_n admet n racines réelles simples.

3. Pour $n = 1$, on a $A_1v_1(x) = a_0$. Pour $n \geq 2$, les composantes du vecteur $w = A_nv_n(x)$ sont données par :

$$\begin{cases} w_0 = a_0P_0(x) + b_0P_1(x) = xP_0(x) \\ w_k = b_{k-1}P_{k-1}(x) + a_kP_k(x) + b_kP_{k+1}(x) = xP_k(x) \ \ (1 \leq k \leq n-2) \\ w_{n-1} = b_{n-2}P_{n-2}(x) + a_{n-1}P_{n-1}(x) = xP_{n-1}(x) - b_{n-1}P_n(x) \end{cases}$$

ce qui signifie que $A_nv_n(x) = xv_n(x) - b_{n-1}P_n(x)e_n$ en notant $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $n = 1$, a_0 est racine de P_1 et valeur propre de A_1. Pour $n \geq 2$, si x est racine de P_n, on a alors $A_nv_n(x) = xv_n(x)$, ce qui signifie que x est valeur propre de A_n et $v_n(x)$ est un vecteur propre non nul associé (on a $P_0(x) \neq 0$).

Exercice 15.7. *Soit $\pi :]a, b[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux non identiquement nulle. Justifier l'équivalence des assertions :*

1. $\displaystyle\int_a^b P^2(x)\,\pi(x)\,dx < +\infty$ pour toute fonction polynomiale P ;

2. $\displaystyle\int_a^b |x|^n\,\pi(x)\,dx < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution. La deuxième assertion entraîne par linéarité et positivité de l'intégrale que $\int_a^b |P(x)| \pi(x)\, dx < +\infty$ pour toute fonction polynomiale P et en particulier, on aura $\int_a^b P^2(x) \pi(x)\, dx < +\infty$. Réciproquement, si la première assertion est vérifiée, on a alors $\int_a^b x^{2n} \pi(x)\, dx < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et avec $|x|^{2n+1} \leq \frac{x^{4n} + x^2}{2}$, on déduit que $\int_a^b |x|^{2n+1} \pi(x)\, dx < +\infty$.

Exercice 15.8. *Pour cet exercice,* $I =]-1, 1[$ *et* $\mathcal{L}_0$ *est l'opérateur de Legendre défini sur* $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ *par :*

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}), \ \mathcal{L}_0(f) = \left(1 - X^2\right) f'' - 2f'$$

On note $\mathcal{L}$ *la restriction de l'opérateur* $\mathcal{L}_0$ *à* $\mathbb{R}[X]$. *Sauf pour la question* ***6d****, les polynômes de Legendre, ne sont pas supposés connus.*

1. *Déterminer le noyau de* $\mathcal{L}_0$*, puis celui de* $\mathcal{L}$.
2. *Montrer que tout réel* λ *est valeur propre de* $\mathcal{L}_0$ *en précisant la dimension de l'espace propre associé.*
3. *En utilisant des développements en série entière, donner une base de chaque espace propre* $\ker(\mathcal{L}_0 - \lambda Id)$.
4. *Montrer que* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est valeur propre de* $\mathcal{L}$ *si, et seulement si, c'est un entier négatif de la forme* $\lambda_n = -n(n+1)$ *avec* $n \in \mathbb{N}$. *Dans ce cas, montrer que chaque espace propre* $\ker(\mathcal{L} - \lambda_n Id)$ *est de dimension* 1 *engendré par un polynôme* P_n *de degré* n.
5. *En désignant par* φ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *par* $\varphi(x, t) = \frac{1}{x - t}$*, montrer que :*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1 - x^2\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(1 - t^2\right) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t)\right)$$

6. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on note* $\lambda_n = -n(n+1)$ *et on désigne par* Q_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ *par* $Q_n(x) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{x - t} dt$*, où* P_n *est un polynôme de degré* n *générateur de* $\ker(\mathcal{L} - \lambda_n Id)$.
   (a) *Montrer que la fonction* Q_n *est indéfiniment dérivable et solution sur* $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ *de l'équation différentielle :*

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + n(n+1) y = 0$$

   (b) *Montrer que l'on a* $Q_n(x) = P_n(x) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - R_{n-1}(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$*, où* $R_{-1} = 0$ *et, pour* $n \geq 1$*,* R_{n-1} *est un polynôme de degré égal à* $n - 1$.

(c) *Montrer que P_n et Q_n sont deux solutions linéairement indépendantes sur $]-\infty,-1[$ [resp. sur $]1,+\infty[$] de l'équation différentielle $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n\left(n+1\right)y=0$.*

(d) *Sachant que les P_n sont des polynômes orthogonaux de Legendre, montrer que $Q_n\left(x\right)=\dfrac{1}{P_n\left(x\right)}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{P_n^2\left(t\right)}{x-t}dt$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left[-1,1\right]$.*

Solution.

1. Pour tout $f\in\mathcal{C}^\infty\left(I,\mathbb{R}\right)$, on a $\mathcal{L}_0\left(f\right)=\left(1-x^2\right)f''-2xf'=\left(\left(1-x^2\right)f'\right)'$, donc $f\in\ker\left(\mathcal{L}_0\right)$ si, et seulement si, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\left(1-x^2\right)f'\left(x\right)=\alpha$ pour tout $x\in I$, ce qui nous donne $f'\left(x\right)=\dfrac{\alpha}{1-x^2}=\dfrac{\alpha}{2}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$, soit $f\left(x\right)=\dfrac{\alpha}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)+\beta$, où β est une constante réelle. Donc $\ker\left(\mathcal{L}_0\right)$ est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les fonctions f_0 et g_0 définies sur I par $f_0\left(x\right)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ et $g_0\left(x\right)=1$. La fonction f_0 n'étant pas polynomiale (puisque $\lim\limits_{x\to1^-}f_0\left(x\right)=+\infty$), $\ker\left(\mathcal{L}\right)$ est de dimension 1 engendré par g_0, soit l'espace des polynômes constant.
2. Pour tout réel λ, l'ensemble $\ker\left(\mathcal{L}_0-\lambda Id\right)$ est l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2, $y''=\dfrac{2x}{1-x^2}y'+\dfrac{\lambda}{1-x^2}y$, c'est donc un espace vectoriel de dimension 2 (théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire). Une base de ce noyau est donnée par les solutions f_λ et g_λ vérifiant les conditions initiales $\left(f_\lambda\left(0\right),f'_\lambda\left(0\right)\right)=\left(1,0\right)$ et $\left(g_\lambda\left(0\right),g'_\lambda\left(0\right)\right)=\left(1,0\right)$ (le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire nous dit que l'application $y\mapsto\left(y\left(0\right),y'\left(0\right)\right)$ réalise un isomorphisme de $\ker\left(\mathcal{L}_0-\lambda Id\right)$ sur $\mathbb{R}^2$).
3. Pour déterminer une base de $\ker\left(\mathcal{L}_0-\lambda Id\right)$, on cherche les solutions développables en série entières sur I de notre équation différentielle (le corollaire 14.6 nous dit qu'il existe une unique solution développable en série entière sur I vérifiant les conditions initiales $y\left(0\right)=y_0$ et $y'\left(0\right)=y_1$). Si $y:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est une telle solution développable en série entières sur I, l'équation différentielle $\left(1-x^2\right)y''\left(x\right)-2xy'\left(x\right)-\lambda y\left(x\right)=0$ est équivalente à :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{+\infty}n\left(n-1\right)a_nx^n-2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n-\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0$$

soit à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(n+1\right)\left(n+2\right)a_{n+2}-\left(n\left(n+1\right)+\lambda\right)a_n\right)x^n=0$$

ce qui est encore équivalent à $a_{n+2} = \dfrac{n(n+1)+\lambda}{(n+1)(n+2)} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les conditions $a_0 = y(0) = 1$, $a_1 = y'(0) = 0$ nous donnent $a_{2p+1} = 0$ et :

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{(2p-2)(2p-1)+\lambda}{(2p-1)(2p)} \frac{(2p-4)(2p-3)+\lambda}{(2p-3)(2p-2)} \cdots \frac{2\cdot 3+\lambda}{3\cdot 4} \frac{\lambda}{2} \\ &= \frac{1}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (2k(2k+1)+\lambda) \end{aligned}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$ et les conditions $a_0 = y(0) = 0$, $a_1 = y'(0) = 1$ nous donnent $a_{2p} = 0$ et :

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= \frac{(2p-1)(2p)+\lambda}{(2p)(2p+1)} \frac{(2p-3)(2p-2)+\lambda}{(2p-2)(2p-1)} \cdots \frac{3\cdot 4+\lambda}{4\cdot 5} \frac{1\cdot 2+\lambda}{2\cdot 3} \\ &= \frac{1}{(2p+1)!} \prod_{k=1}^{p} (2k(2k-1)+\lambda) \end{aligned}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. En notant :

$$\beta_p = \frac{1}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (2k(2k+1)+\lambda), \ \gamma_p = \frac{1}{(2p+1)!} \prod_{k=1}^{p} (2k(2k-1)+\lambda),$$

les séries entières $\sum \beta_p x^{2p}$ et $\sum \gamma_p x^{2p+1}$ ont un rayon de convergence égal à 1 puisque :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{\beta_{p+1}}{\beta_p} = \lim_{p\to+\infty} \frac{2p(2p+1)+\lambda}{2(2p+1)(p+1)} = 1$$

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{\gamma_{p+1}}{\gamma_p} = \lim_{p\to+\infty} \frac{2(2p+1)(p+1)+\lambda}{2(p+1)(2p+3)} = 1$$

En conclusion, les fonctions f_λ et g_λ définies sur I par $f_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \beta_p x^{2p}$ et $g_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \gamma_p x^{2p+1}$ sont bien solutions de notre équation différentielle et nous donnent une base de l'espace des solutions.

4. Si λ n'est pas de la forme $\lambda_n = -n(n+1)$ avec $n \in \mathbb{N}$, les coefficients β_p et γ_p sont tous non nuls et le polynôme nul est la seule solution polynomiale de l'équation différentielle $\mathcal{L}_0(y) = \lambda y$. En effet, si P est une solution polynomiale, on a alors pour tout $x \in I$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \alpha f_\lambda(x) + \beta g_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha\beta_p x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \beta\gamma_p x^{2p+1}$$

ce qui implique que $\alpha\beta_p = \beta\gamma_p = 0$ pour p assez grand par unicité du développement en série entière, ce qui impose que $\alpha = \beta = 0$ puisque les β_p et γ_p sont tous non nuls. Si $\lambda = -n(n+1)$ avec $n = 2q \in \mathbb{N}$ pair [resp. $n = 2q+1 \in \mathbb{N}$

impair], on a alors $\beta_p = 0$ pour tout $p \geq q+1$, $\beta_q \neq 0$ et $\gamma_p \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ [resp. $\gamma_p = 0$ pour tout $p \geq q+1$, $\gamma_q \neq 0$ et $\beta_p \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$] (l'égalité $\lambda = -n(n+1) = -k(k+1)$ équivaut à $l = n$ car la fonction $x \mapsto x(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$), ce qui signifie que f_λ [resp. g_λ] est polynomiale de degré n et g_λ [resp. f_λ] non polynomiale (ses coefficients dans le développement en série entière sont tous non nuls). Il en résulte que $\ker(\mathcal{L} - \lambda_n Id)$ est de dimension 1 engendré par $P_n = f_\lambda$ [resp. par $P_n = g_\lambda$].

5. On a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{1}{(x-t)^2} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{2}{(x-t)^3} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x,t)$ et :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-x^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right) = \frac{2x}{(x-t)^2} + \frac{2\left(1-x^2\right)}{(x-t)^3} = \frac{2(1-xt)}{(x-t)^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(1-t^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\right) = -\frac{2t}{(x-t)^2} + \frac{2\left(1-t^2\right)}{(x-t)^3} = \frac{2(1-xt)}{(x-t)^3}$$

6.

(a) La fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{P_n(t)}{x-t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,-1[\times [-1,1]$ [resp. sur $]1,+\infty[\times [-1,1]]$ et l'intégration se fait sur un segment, donc Q_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,-1[$ [resp. sur $]1,+\infty[]$, ses dérivées s'obtenant par dérivation sous le signe d'intégration. Il en résulte que, pour tout x dans $]-\infty,-1[$ [resp. tout x dans $]1,+\infty[]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(1-x^2\right)Q_n''(x) - 2xQ_n'(x) &= \left(\left(1-x^2\right)Q_n'(x)\right)' \\
&= \left(\int_{-1}^{1} P_n(t)\left(1-x^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\,dt\right)' \\
&= \int_{-1}^{1} P_n(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-x^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right)dt \\
&= \int_{-1}^{1} P_n(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(1-t^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\right)dt
\end{aligned}$$

ce qui nous donne en effectuant deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
\left(1-x^2\right)Q_n''(x) - 2xQ_n'(x) &= -\int_{-1}^{1} P_n'(t)\left(1-t^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1}\left(P_n'(t)\left(1-t^2\right)\right)'\varphi(x,t)\,dt \\
&= \lambda_n\int_{-1}^{1} P_n(t)\,\varphi(x,t)\,dt = \lambda_n Q_n(x)
\end{aligned}$$

(b) Pour $n = 0$, on a $P_0(x) = \alpha_0$, où $\alpha_0 \in \mathbb{R}^*$ et, pour $x \in]-\infty,-1[$ [resp. $x \in]1,+\infty[]$:

$$Q_0(x) = -\alpha_0\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t-x} = -\alpha_0\ln\left(\frac{1-x}{-1-x}\right) = \alpha_0\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

[resp. $Q_0(x) = \alpha_0 \int_{-1}^{1} \frac{dt}{x-t} = -\alpha_0 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \alpha_0 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$]. Pour $n \geq 1$ et $x \in]-\infty, -1[$ [resp. $x \in]1, +\infty[$], on a :

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= P_n(x) \int_{-1}^{1} \frac{dt}{x-t} - \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} dt \\ &= P_n(x) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} dt \end{aligned}$$

avec :

$$\frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{x^k - t^k}{x-t} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{j=0}^{k-1} x^j t^{k-1-j}$$

ce qui nous donne :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} dt = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{j=0}^{k-1} x^j \int_{-1}^{1} t^{k-1-j} dt = R_{n-1}(x)$$

où R_{n-1} est un polynôme de degré égal à $n-1$ (le coefficient de x^{n-1} est $2\alpha_n \neq 0$). On a donc $Q_n(x) = P_n(x) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - R_{n-1}(x)$.

(c) La fonction polynomiale P_n qui est solution sur I de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ l'est aussi sur $\mathbb{R}$ puisqu'un polynôme est nul si, et seulement si, il est nul sur un intervalle non réduit à un point. La fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ étant non rationnelle sur $]-\infty, -1[$ [resp. sur $]1, +\infty[$] (si $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q polynomiales de degrés respectectifs p et q, on a alors $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \alpha x^{p-q}$ avec $\alpha \neq 0$, ce qui est incompatible avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$), on en déduit que P_n et Q_n sont linéairement indépendantes. En définitive, les solutions sur $]-\infty, -1[$ [resp. sur $]1, +\infty[$] de notre équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$f(x) = \alpha P_n(x) + \beta\left(P_n(x) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - R_{n-1}(x)\right)$$

où R_{n-1} est un polynôme de degré égal à $n-1$ ($R_{-1} = 0$) et α, β deux constantes réelles.

(d) Pour x fixé dans $\mathbb{R}\backslash[-1,1]$, la fonction $t \in]-1,1[\mapsto \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t}$ est polynomiale de degré $n-1$, donc $\int_{-1}^{1} \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} P_n(t)\, dt = 0$, ce qui nous donne $\int_{-1}^{1} \frac{P_n^2(t)}{x-t} dt = P_n(x) \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{x-t} dt$ et $Q_n(x) = \frac{1}{P_n(x)} \int_{-1}^{1} \frac{P_n^2(t)}{x-t} dt$.

Exercice 15.9. *On s'intéresse ici, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé à l'équation différentielle $\left(1-x^2\right) y'' - 2xy' + n\left(n+1\right) y = 0$ sur l'intervalle $I = \left]-1,1\right[$. En désignant par L_n le n-ième polynôme de Legendre normalisé par la condition $L_n\left(1\right) = 1$ (voir le paragraphe 15.4), on sait que L_n est une solution polynomiale sur I de cette équation différentielle. On se donne une deuxième solution f et on note $w = L_n f' - L_n' f$ le wronskien correspondant. On note $x_{n,1} < \cdots < x_{n,n}$ les n racines de L_n dans I.*

1. *Montrer qu'il existe une constante réelle α telle que $w\left(x\right) = \dfrac{\alpha}{1-x^2}$ pour tout $x \in I$. Que peut-on dire pour $\alpha = 0$?*
2. *Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que :*

$$f\left(x\right) = \alpha\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{x-x_{n,k}}\right) L_n\left(x\right) + \beta L_n\left(x\right)$$

pour tout $x \in I$, où $b_k = \dfrac{1}{\left(1-x_{n,k}^2\right)\left(L_n'\left(x_{n,k}\right)\right)^2}$ pour k compris entre 1 et n.

Solution. On note $\lambda_n = -n\left(n+1\right)$.

1. Du système d'équations :

$$\begin{cases} \left(1-x^2\right) f'' - 2xf' = \lambda_n f \\ \left(1-x^2\right) L_n'' - 2xL_n' = \lambda_n L_n \end{cases}$$

sur I, on déduit que $\left(1-x^2\right)\left(f''L_n - L_n''f\right) - 2x\left(f'L_n - L_n'f\right) = 0$, soit que $\left(1-x^2\right) w' - 2xw = 0$ ou encore $\left(\left(1-x^2\right) w\right)' = 0$, ce qui donne $w\left(x\right) = \dfrac{\alpha}{1-x^2}$ pour tout $x \in I$, où $\alpha = w_n\left(0\right) \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 0$, on a alors $w\left(x\right) = 0$ pour tout $x \in I$ et pour $\xi \in I$ tel que $L_n\left(\xi\right) \neq 0$, la fonction $y = f - \dfrac{f\left(\xi\right)}{L_n\left(\xi\right)} L_n$ est solution de l'équation différentielle $\left(1-x^2\right) y'' - 2xy' + n\left(n+1\right) y = 0$ avec les condition initiales $y\left(\xi\right) = 0$ et $y'\left(\xi\right) = \dfrac{L_n\left(\xi\right) f'\left(\xi\right) - L_n'\left(\xi\right) f\left(\xi\right)}{P_n\left(\xi\right)} = \dfrac{w\left(\xi\right)}{P_n\left(\xi\right)} = 0$, ce qui revient à dire que $y = 0$, soit que les fonctions f et L_n sont linéairement dépendantes. Réciproquement, pour f et L_n liées, on a $\alpha = 0$. De manière générale, il est bien connu que le wronskien d'un système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n ne s'annule jamais.

2. L'égalité $w\left(x\right) = \dfrac{\alpha}{1-x^2}$ sur I s'écrit aussi $\left(\dfrac{f}{L_n}\right)'\left(x\right) = \dfrac{\alpha}{\left(1-x^2\right) L_n^2\left(x\right)}$ pour tout $x \in I \setminus \left\{x_{n,1}, \cdots, x_{n,n}\right\}$. En utilisant la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{\left(1-x^2\right) L_n^2\left(x\right)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x-x_{n,k}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\left(x-x_{n,k}\right)^2}$$

où $a = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(1+x) L_n^2(x)} = \dfrac{1}{2}$, $b = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{(1-x) L_n^2(x)} = \dfrac{1}{2}$:

$$b_k = \lim_{x \to x_{n,k}} \frac{(x - x_{n,k})^2}{(1-x^2) L_n^2(x)} = \frac{1}{\left(1 - x_{n,k}^2\right) \left(L_n'(x_{n,k})\right)^2}$$

et, en notant $L_n(x) = (x - x_{n,k}) Q(x)$:

$$\begin{aligned} a_k &= \left(\frac{(x - x_{n,k})^2}{(1-x^2) L_n^2(x)} \right)'_{|x = x_{n,k}} = \left(\frac{1}{(1-x^2) Q^2(x)} \right)'_{|x = x_{n,k}} \\ &= -2 \frac{\left(1 - x_{n,k}^2\right) Q'(x_{n,k}) - x_{n,k} Q(x_{n,k})}{\left(1 - x_{n,k}^2\right)^2 Q^3(x_{n,k})} \end{aligned}$$

L'équation $\left(1 - x^2\right) L_n''(x) - 2x L_n'(x) = \lambda_n L_n(x)$ évaluée en $x_{n,k}$ nous donne $\left(1 - x_{n,k}^2\right) L_n''(x_{n,k}) - 2x_{n,k} L_n'(x_{n,k}) = 0$ avec les égalités $L_n'(x_{n,k}) = Q'(x_{n,k})$ et $L_n''(x_{n,k}) = 2Q'(x_{n,k})$, ce qui aboutit à $a_k = 0$. On a donc :

$$\left(\frac{f}{L_n} \right)'(x) = \alpha \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{(x - x_{n,k})^2} \right)$$

ce qui nous donne $\dfrac{f(x)}{L_n(x)} = \alpha \left(\dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1+x}{1-x} \right) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{b_k}{x - x_{n,k}} \right) + \beta$, soit :

$$f(x) = \alpha \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{x - x_{n,k}} \right) L_n(x) + \beta L_n(x)$$

sur $I \setminus \{x_{n,1}, \cdots, x_{n,n}\}$. Par continuité, ce résultat est en fait valable sur I.

Exercice 15.10. *En désignant par $\mathcal{L}_1$ l'opérateur de Legendre défini sur $\mathcal{C}^2([-1,1], \mathbb{R})$ par $\mathcal{L}_1(f) = \left(1 - x^2\right) f'' - 2xf'$, on note pour tout réel λ, $\mathcal{E}_\lambda = \ker(\mathcal{L}_1 - \lambda I_d)$. Ici on travaille sur le segment $[-1,1]$ et non sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$.*

1. *Déterminer l'ensemble Σ des réels λ tels que $\mathcal{E}_\lambda \neq \{0\}$.*
2. *Montrer que, pour tout $\lambda \in \Sigma$, l'espace $\mathcal{E}_\lambda$ est une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur.*
3. *Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation aux dérivées partielles :*
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \left(1 - x^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - 2x \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$
de la forme $u(t,x) = a(t) b(x)$ avec a de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et b de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$.

Solution. Pour cet exercice, les fonctions sont définies sur le segment $[-1,1]$ et par intégration par parties, on vérifie facilement que l'on a $\langle \mathcal{L}(f) \mid g\rangle = \langle f \mid \mathcal{L}(g)\rangle$ pour toutes fonctions f, g dans $\mathcal{C}^2([-1,1],\mathbb{R})$ (on a $\mathcal{L}_1(f) = \left(\left(1-x^2\right)f'\right)'$).

1. On sait déjà que Σ contient $\Sigma' = \{\lambda_n = -n(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (exemples 15.2) et il nous reste à vérifier que pour réel $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Sigma'$, on a $\mathcal{E}_\lambda = \{0\}$. Pour $f \in \mathcal{E}_\lambda$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda \langle f \mid L_n\rangle = \langle \mathcal{L}(f) \mid L_n\rangle = \langle f \mid \mathcal{L}(L_n)\rangle = -n(n+1)\langle f \mid L_n\rangle$ avec $\lambda \neq -n(n+1)$, donc $\langle f \mid L_n\rangle = 0$. Comme $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathcal{P}$, on en déduit $\langle f \mid Q\rangle = 0$ pour toute fonction polynomiale Q. Par ailleurs, le théorème de Weierstrass nous dit qu'il existe une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[-1,1]$ (f est continue sur ce segment), donc la suite $(fQ_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur $[-1,1]$ (puisque $\left\|fQ_n - f^2\right\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|Q_n - f\|_\infty$) et on a :
$$\|f\|^2 = \int_{-1}^1 f^2(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^1 f(x)\,Q_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\langle f \mid Q_n\rangle = 0$$
ce qui impose la nullité de f.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathcal{E}_{\lambda_n}$ contient L_n et c'est l'ensemble des solutions sur $[-1,1]$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :
$$\left(1-x^2\right)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)\,y(x) = 0$$
Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que l'ensemble $\mathcal{S}_{\lambda_n}$ des solution de cette équation différentielle sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ est de dimension 2. On dispose donc d'une base (L_n, f_n) de cet espace. Pour vérifier que l'espace $\mathcal{E}_{\lambda_n} \subset \mathcal{S}_{\lambda_n}$ qui nous intéresse est de dimension 1, il suffit de vérifier que la solution f_n n'est pas dans $\mathcal{E}_{\lambda_n}$, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas se prolonger en fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[-1,1]$. Pour ce faire, on utilise le wronskien $w_n = L_nf_n' - L_n'f_n$. Sur $]-1,1[$, on a :
$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)w_n' - 2xw_n &= \left(1-x^2\right)\left(L_nf_n'' - L_n''f_n\right) - 2x\left(L_nf_n' - L_n'f_n\right)\\ &= -n(n+1)\left(L_nf_n - f_nL_n\right) = 0\end{aligned}$$
soit $\left(\left(1-x^2\right)w_n(x)\right)' = 0$ et en conséquence, $w_n(x) = \dfrac{w_n(0)}{1-x^2}$ avec $w_n(0) \neq 0$ (le wronskien d'une base de solution est non nul). Il en résulte alors que :
$$\lim_{|x|\to1}|w_n(x)| = \lim_{|x|\to1}\left|L_n(x)\,f_n'(x) - f_n(x)\,L_n'(x)\right| = +\infty$$
et f_n n'est pas dans $\mathcal{E}_{\lambda_n}$. Donc $\mathcal{E}_{\lambda_n}$ est de dimension 1 engendré par L_n.
3. Pour $u(t,x) = a(t)\,b(x)$, notre équation aux dérivées partielles devient :
$$a''(t)\,b(x) = a(t)\left(\left(1-x^2\right)b''(x) - 2xb'(x)\right) = a(t)\,\mathcal{L}_1(b)(x)$$
Pour u non identiquement nulle, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $a(t_0) \neq 0$ et b est non identiquement nulle telle que $\mathcal{L}_1(b) = \lambda b$ avec $\lambda = -\dfrac{a''(t_0)}{a(t_0)}$, il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = -n(n+1)$ et $b = \alpha L_n$. Pour $x = 1$ et $t \in [-1,1]$, on a

$a''(t)\,L_n(1) = -2L_n'(1)\,a(t)$ avec $L_n(1) = 1$ et $2L_n'(1) = n(n+1)$ (qui résulte de $\left(1-x^2\right)L_n''(x) - 2xL_n'(x) = -n(n+1)\,L_n(x)$), soit $a''(t) = -n(n+1)\,a(t)$ et $a(t) = \beta + \gamma t$ pour $n = 0$, $a(t) = \beta\cos\left(\sqrt{n(n+1)}t\right) + \gamma\sin\left(\sqrt{n(n+1)}t\right)$ pour $n \geq 1$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme $u(t,x) = a + bt$ ou $u(t,x) = \left(a\cos\left(\sqrt{n(n+1)}t\right) + b\sin\left(\sqrt{n(n+1)}t\right)\right)L_n(x)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15.11. *On rappelle que la fonction Γ est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+,*}$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Pour tous réels x, y dans $]-1, +\infty[$ tels que $x - y > -1$, on note $\dbinom{x}{y} = \dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\,\Gamma(x-y+1)}$. On se donne deux réels $a > -1$ et $b > -1$.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\int_{-1}^{1} (1-t)^{n+a}(1+t)^{n+b}\,dt = \frac{2^{2n+a+b+1}}{(n+b+1)\binom{2n+a+b+1}{a+n}}$$

2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a+n}{k}\binom{b+n}{n-k} = \binom{a+b+2n}{n} \tag{15.10}$$

3. *On désigne par $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Jacobi définie sur $]-1, 1[$ par :*

$$Q_n(x) = \frac{1}{(1-x)^a(1+x)^b}\left((1-x)^{n+a}(1+x)^{n+b}\right)^{(n)}$$

   Préciser le coefficient dominant de Q_n.

4. *Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\|Q_n\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme correspondante au produit scalaire associé à la fonction poids $\pi : x \mapsto (1-x)^a(1+x)^b$ sur $]-1, 1[$.*

Solution. Pour $m \leq n$ entiers naturels, on a $\Gamma(n+1) = n!$ et $\dbinom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ est le coefficient binomial usuel.

1. En notant $W_n = \int_{-1}^{1} (1-t)^{n+a} (1+t)^{n+b} \, dt$ et en effectuant le changement de variable $t = 1 - 2x$, on a :

$$\begin{aligned} W_n &= 2^{2n+a+b+1} \int_0^1 x^{n+a} (1-x)^{n+b} \, dt \\ &= 2^{2n+a+b+1} B(n+a+1, n+b+1) = 2^{2n+a+b+1} \frac{\Gamma(n+a+1)\Gamma(n+b+1)}{\Gamma(2n+a+b+2)} \\ &= \frac{2^{2n+a+b+1}}{(n+b+1)\binom{2n+a+b+1}{a+n}} \end{aligned}$$

Pour $a = b = 0$, on a $W_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt = 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2. Pour tout réel $\beta > -1$, tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x \in]-1, 1[$, on a le développement limité à l'ordre n :

$$\begin{aligned} (1+x)^{\beta+n} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-(k-1))}{k!} x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\beta+n+1-k)} x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\beta+n}{k} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

ce qui nous donne en prenant $\beta = a + b + n$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{a+b+2n} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{a+b+2n}{k} x^k + o(x^n) \\ &= (1+x)^{a+n} (1+x)^{b+n} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{a+n}{k} \binom{b+n}{p-k} \right) x^p + o(x^n) \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de x^n dans ces développements limités, on obtient (15.10) .

3. Pour $n = 0$ on a $Q_0 = 1$. Pour $n \geq 1$, en utilisant la formule de Leibniz, on a :

$$\begin{aligned} &\left((1-x)^{n+a} (1+x)^{n+b} \right)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k \Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a+n-k+1)} (1-x)^{a+n-k} \frac{\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(b+k+1)} (1+x)^{b+k} \\ &= \Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)(1-x)^a (1+x)^b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k (1-x)^{n-k}}{\Gamma(a+n-k+1)} \frac{(1+x)^k}{\Gamma(b+k+1)} \\ &= n! (1-x)^a (1+x)^b \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{a+n}{k} \binom{b+n}{n-k} (1-x)^{n-k} (1+x)^k \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$Q_n(x) = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{a+n}{k} \binom{b+n}{n-k} (1-x)^{n-k} (1+x)^k$$

et le coefficient dominant de Q_n est donné par :

$$\begin{aligned}\alpha_n &= (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{a+n}{k} \binom{b+n}{n-k} = (-1)^n n! \binom{a+b+2n}{n} \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(a+b+2n+1)}{\Gamma(a+b+n+1)}\end{aligned}$$

Pour $a = b = 0$, on a $\alpha_n = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!}$.

4. Sa norme est donnée par :

$$\begin{aligned}\|Q_n\|^2 &= n! \frac{\Gamma(a+b+2n+1)}{\Gamma(a+b+n+1)} \int_{-1}^{1} (1-x)^a (1+x)^b \, dx \\ &= n! \frac{\Gamma(a+b+2n+1)}{\Gamma(a+b+n+1)} \frac{2^{2n+a+b+1}}{(n+b+1)\binom{2n+a+b+1}{a+n}} \\ &= \frac{n! 2^{2n+a+b+1}}{(n+b+1)} \frac{\Gamma(a+b+2n+1)}{\Gamma(a+b+n+1)} \frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+2)}{\Gamma(2n+a+b+2)} \\ &= \frac{n! 2^{2n+a+b+1}}{2n+a+b+1} \frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(a+b+n+1)}\end{aligned}$$

Exercice 15.12. *En notant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \max\limits_{1 \le k \le n} x_{n,k}$ la plus grande des racines de L_n, où $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des polynômes de Legendre normalisés par la condition $L_n(1) = 1$ (paragraphe 15.4), montrer (sans utiliser le théorème 15.8) que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et en conséquence, convergente (sa limite vaut 1 d'après le corollaire 15.3).*

Solution. On vérifie par récurrence que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. On a $L_1(x) = x$, $L_2(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$ et $L_3(x) = \dfrac{x}{2}(5x^2 - 3)$, donc $x_1 = 0 < x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} < x_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. Supposons que $0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ pour $n \ge 3$. Si $x_{n+1} = x_n$, la relation de récurrence (15.6) nous donne $L_{n-1}(x_n) = 0$ avec $x_n > x_{n-1} = \max\limits_{1\le k\le n-1} x_{n-1,k}$, ce qui n'est pas possible. Si $x_{n+1} < x_n$, on a alors $\alpha = \max(x_{n-1}, x_{n+1}) < x_n$ et pour tout $x > \alpha$:

$$(2n+1) x L_n(x) = (n+1) L_{n+1}(x) + n L_{n-1}(x) > 0$$

(puisque les coefficients dominants des L_k sont strictement positifs), ce qui est incompatible avec $x_n > \alpha$ et $L_n(x_n) = 0$. On a donc $x_n < x_{n+1}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante majorée par 1 (les x_n sont dans $]0, 1[$) et en conséquence convergente vers un réel $\ell \in]0, 1]$.

Exercice 15.13. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in [-1,1]$ et $r \in \mathbb{R}^{+,*}$.*

1. Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

$$\int_{\gamma_{r,x}} \frac{z^{2k}}{(z-x)^{n+1}} dz = 2i\pi \binom{2k}{n} x^{2k-n}$$

2. En déduire que $\displaystyle\int_{\gamma_{x,r}} \frac{\left(z^2-1\right)^n}{(z-x)^{n+1}} dz = 2i\pi 2^n L_n(x)$.

Solution.

1. Pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{r,x}} \frac{z^{2k}}{(z-x)^{n+1}} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{\left(x+re^{it}\right)^{2k}}{\left(re^{it}\right)^{n+1}} ire^{it} dt = \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} \left(x+re^{it}\right)^{2k} e^{-int} dt \\ &= \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} x^j r^{2k-j} e^{i(2k-j)t} e^{-int} dt \\ &= \frac{i}{r^n} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} x^j r^{2k-j} \int_0^{2\pi} e^{i(2k-j-n)t} dt\end{aligned}$$

avec $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{imt} dt = 0$ pour tout entier relatif non nul m. Pour $0 \leq k < \dfrac{n}{2}$, on a $2k-j-n<0$ pour tout $j \geq 0$ et pour $\dfrac{n}{2} \leq k \leq n$, il ne reste dans la somme ci-dessus que l'intégrale correspondante à $j = 2k-n$, ce qui nous donne :

$$\int_{\gamma_{r,x}} \frac{z^{2k}}{(z-x)^{n+1}} dz = \frac{i}{r^n} \binom{2k}{2k-n} x^{2k-n} r^n 2\pi = 2i\pi \binom{2k}{n} x^{2k-n}$$

2. Il en résulte que :

$$\int_{\gamma_{x,r}} \frac{\left(z^2-1\right)^n}{(z-x)^{n+1}} dz = 2i\pi \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} (-1)^{n-k} \binom{2k}{n} \binom{n}{k} x^{2k-n} = 2i\pi 2^n L_n(x)$$

Exercice 15.14. *On désigne par $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Legendre normalisés sur l'intervalle $I =]-1,1[$ et pour tout entier naturel n, on définit la fonction φ_n par :*

$$\forall x \in I,\ \varphi_n(x) = (P_n(x))^2 + \frac{\left(1-x^2\right)}{n(n+1)} \left(\left(P_n'(x)\right)^2\right)$$

1. Montrer que $\varphi_n'(x) = \dfrac{2x\left(P_n'(x)\right)^2}{n(n+1)}$.

2. En déduire que $\sup_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$.

Solution.

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi_n'(x) &= \frac{2P_n'(x)}{n(n+1)}\left(n(n+1)P_n(x) - xP_n'(x) + \left(1-x^2\right)P_n''(x)\right)\\ &= \frac{2x\left(P_n'(x)\right)^2}{n(n+1)}\end{aligned}$$

2. On en déduit que $\varphi_n'(x) \geq 0$ sur $[0,1]$ et la fonction φ_n est croissante sur l'intervalle $[0,1]$. Il en résulte que :

$$\forall x \in [0,1],\ 0 \leq (P_n(x))^2 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_n(1) = (P_n(1))^2$$

et $|P_n(x)| \leq |P_n(1)| = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$. Par parité ce résultat est encore valable sur $[-1,1]$. On peut donc conclure que $\sup_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$.

Exercice 15.15. *Soit* $I = [a,b]$ *un intervalle réel fermé borné avec* $a < b$. *Montrer que l'espace vectoriel* $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ *muni de la norme* $f \mapsto \|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}$ *n'est pas complet (ce n'est pas un espace de Hilbert).*

Solution. Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de fonctions définies sur I par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - x\right) \text{ si } \frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 \text{ si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(faire une figure). Pour $m > n > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|^2 &= (m-n)^2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} n^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - x\right)^2 dx\\ &= \frac{1}{3m}\left(1 - \frac{n}{m}\right)^2 + \frac{1}{3n}\left(1 - \frac{n}{m}\right)^3 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

ce qui entraîne que cette suite est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$. D'autre part la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement vers la fonction continue par morceaux

f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 1$ si $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = 0$ si $\dfrac{1}{2} < x \leq 1$. Si $(f_n)_{n\geq 2}$ converge dans $\left(\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}), \|\cdot\|\right)$ vers une fonction g, on peut alors écrire que $\|f-g\| \leq \|f-f_n\| + \|f_n - g\|$ avec $\|f-f_n\|^2 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} n^2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}-x\right)^2 dx = \dfrac{1}{3n}$ et en passant à la limite quand n tend vers l'infini on déduit que $\|f-g\| = 0$. Par continuité on déduit alors que $f = g$ sur $[0,1] \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ avec f discontinue en $\dfrac{1}{2}$ et g continue en ce point, ce qui est impossible. On a donc ainsi montré que $\left(\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}), \|\cdot\|\right)$ n'est pas complet.

Exercice 15.16. *$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des polynômes de Legendre normalisés par les conditions $L_n(1) = 1$ (paragraphe 15.4).*

1. *Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$XL_n' - L_{n-1}' = nL_n$$

$$L_{n+1}' = L_{n-1}' + (2n+1)L_n = XL_n' + (n+1)L_n$$

2. *Calculer les coefficients de Fourier-Legendre de la fonction f définie par :*

$$\forall x \in [-1,1], \ f(x) = \begin{cases} 0 \ \text{si } x \in [-1,\alpha[\\ \dfrac{1}{2} \ \text{si } x = \alpha \\ 1 \ \text{si } x \in]\alpha, 1] \end{cases}$$

où α est un réel strictement compris entre -1 et 1.

3. *Étudier la série de Fourier-Legendre correspondante.*

Solution.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $XL_n' - L_{n-1}' \in \mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}\{L_0, \cdots, L_n\}$, donc $XL_n' - L_{n-1}' = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k$ avec :

$$\begin{aligned}\alpha_k \|L_k\|^2 &= \left\langle XL_n' - L_{n-1}' \mid L_k\right\rangle = \left\langle L_n' \mid XL_k\right\rangle - \left\langle L_{n-1}' \mid L_k\right\rangle \\ &= [xL_n(x)L_k(x)]_{-1}^1 - \left\langle L_n \mid (XL_k)'\right\rangle - [L_{n-1}(x)L_k(x)]_{-1}^1 + \left\langle L_{n-1} \mid L_k'\right\rangle \\ &= 1 + (-1)^{n+k} - \left\langle L_n \mid (XL_k)'\right\rangle - \left(1 - (-1)^{n-1+k}\right) + \left\langle L_{n-1} \mid L_k'\right\rangle \\ &= \left\langle L_{n-1} \mid L_k'\right\rangle - \left\langle L_n \mid (XL_k)'\right\rangle \\ &= \left\langle L_{n-1} \mid L_k'\right\rangle - \left\langle L_n \mid L_k\right\rangle - \left\langle L_n \mid XL_k'\right\rangle = 0\end{aligned}$$

pour $k \leq n-1$ et $XL_n' - L_{n-1}' = \alpha_n L_n$. Les coeeficients de X^n dans cette égalité donnent $\alpha_n = n$. La relation (15.7) nous donne par dérivation :

$$n(n+1)\left(L_{n+1}' - L_{n-1}'\right) = (2n+1)\mathcal{L}(L_n) = (2n+1)n(n+1)L_n$$

soit $L'_{n+1} - L'_{n-1} = (2n+1) L_n$. De ces deux égalités, on déduit que :

$$L'_{n+1} = L'_{n-1} + (2n+1) L_n = XL'_n - nL_n + (2n+1) L_n = XL'_n + (n+1) L_n$$

2. Les coefficients de Fourier-Legendre de f sont les $c_n (f) = \int_\alpha^1 P_n (x)\, dx$. Pour $n = 0$, on a $c_0 (f) = \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}}$. Pour $n \geq 1$, l'égalité :

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+3}} P'_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{2n-1}} P'_{n-1} \right)$$

nous donne $c_n (f) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{P_{n+1}(1) - P_{n+1}(\alpha)}{\sqrt{2n+3}} - \frac{P_{n-1}(1) - P_{n-1}(\alpha)}{\sqrt{2n-1}} \right)$ avec $P_k (1) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}$, donc $\frac{1}{\sqrt{2n+3}} P_{n+1}(1) - \frac{1}{\sqrt{2n-1}} P_{n-1}(1) = 0$ et $c_n (f) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{P_{n-1}(\alpha)}{\sqrt{2n-1}} - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{\sqrt{2n+3}} \right)$.

3. La fonction f étant lipschitzienne, on a pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$:

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}} P_0 (x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{P_{n-1}(\alpha)}{\sqrt{2n-1}} - \frac{P_{n+1}(\alpha)}{\sqrt{2n+3}} \right) P_n (x)$$

En utilisant les polynômes $L_k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2k+1}} P_k$, cela s'écrit :

$$f(x) = \frac{1-\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(L_{n-1}(\alpha) - L_{n+1}(\alpha) \right) L_n (x)$$

Pour $x = \alpha$, on obtient, $\frac{1-\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(L_{n-1}(\alpha) - L_{n+1}(\alpha) \right) L_n (\alpha) = \frac{1}{2}$, ce qui peut se vérifier directement (somme télescopique).