Chapitre 2

Espaces normés

Pour ce chapitre, E est un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie) sur le corps $\mathbb{K}$ des réels ou des complexes.

2.1 Semi-normes et normes

Définition 2.1. *Une semi-norme sur E est une application $p : E \to \mathbb{R}$ telle que pour tout scalaire λ et tous vecteurs x, y dans E, on ait :*

- $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$ *;*
- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *(inégalité triangulaire.).*

Le résultat qui suit nous dit qu'une semi-norme est nécessairement à valeurs positives ou nulles et nous donne une formulation équivalente de l'inégalité triangulaire souvent utile.

Lemme 2.1 *Soit p une semi-norme sur E.*

1. *Pour tout x dans E, on a $p(x) \geq 0$;*
2. *l'ensemble $p^{-1}\{0\} = \{x \in E \mid p(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E ;*
3. *pour tous x, y dans E, on a $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$.*

Preuve.

1. Pour tout $x \in E$, on a $p(0) = p(0 \cdot x) = 0 \cdot p(x) = 0$ et $0 = p(x-x) \leq 2p(x)$, donc $p(x) \geq 0$.
2. L'ensemble $p^{-1}\{0\}$ est non vide puisqu'il contient 0 et avec les propriétés d'une semi-norme, on déduit facilement que c'est un sous-espace vectoriel de E.
3. Cette inégalité se déduit de $p(x) = p(x-y+y) \leq p(x-y) + p(y)$ et de $p(y) = p(y-x+x) \leq p(x-y) + p(x)$.

$\square$

On vérifie facilement que l'inégalité 3. du théorème précédent est équivalente à l'inégalité triangulaire.

Le sous-espace vectoriel $p^{-1}\{0\}$ est le noyau de la semi-norme p.

Définition 2.2. *Une norme sur E est une semi-norme dont le noyau est réduit à $\{0\}$.*

Une norme sur E est notée $x \mapsto \|x\|$ et le couple $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé.

Exemples 2.1

1. *Sur $\mathbb{R}$, une norme est de la forme $N_\alpha : x \mapsto \alpha |x|$, où α est un réel strictement positif. En effet il est clair que chaque N_α est une norme. Si N est une norme sur $\mathbb{R}$, on a alors $\alpha = N(1) > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $N(x) = N(x \cdot 1) = |x| N(1) = \alpha |x|$.*
2. *Pour toute forme linéaire non nulle φ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, l'application $x \mapsto |\varphi(x)|$ définit une semi-norme sur E et c'est une norme si, et seulement si, $\ker(\varphi) = \{0\}$, ce qui équivaut à dire, en dimension finie, que E est de dimension 1.*
3. *Pour toute forme bilinéaire symétrique positive φ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, l'application p définie par $p(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$ pour tout $x \in E$ définit une semi-norme sur E et c'est une norme si, et seulement si, φ est définie positive (i. e. est un produit scalaire). Cela résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\varphi(x, y)| \leq p(x) p(y)$ pour tous x, y dans E (voir le paragraphe 3.1).*
4. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E. Les applications définies par :*

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

   pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, définissent des normes sur E (l'exercice 3.3).
5. *Pour toute partie non vide I d'un espace normé E, en notant $\mathcal{F}_b(I)$ l'espace des fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$ définit une norme sur $\mathcal{F}_b(I)$.*
6. *Sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ des applications continues de $[a, b]$ (pour $a < b$) dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les applications définies par :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|, \ \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, dt, \ \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(t) \, dt}$$

   pour tout $f \in E$, définissent des normes sur E.

On vérifie facilement qu'à partir d'une norme $\|\cdot\|$ sur E, on définit une distance en posant $d(x, y) = \|y - x\|$ pour tous x, y dans E.

Un espace vectoriel normé est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel topologique, ce qui signifie que l'on peut associer à une norme sur E une topologie (*i. e.* une famille d'ouverts) telle que les applications d'addition interne et de multiplication externe soient continues.

Nous rappelons brièvement ce que deviennent les notions étudiées dans le cadre des espaces métriques (chapitre 1), en désignant par $(E, \|\cdot\|)$ et $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ deux espaces vectoriels normés.

— Pour tout $a \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}^{+,*}$, $B(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$ [resp. $\overline{B}(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| \leq r\}$] désigne la boule ouverte [resp. la boule fermée] de centre a et de rayon r. En particulier, $\overline{B}(0,1)$ est la boule unité et $S(0,1) = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ est la sphère unité.

— Une partie non vide A de $(E, \|\cdot\|)$ est bornée s'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\|x\| \leq \lambda$ pour tout x dans A, ce qui revient à dire qu'elle est contenue dans une boule fermée centrée en 0.

— Un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de $(E, \|\cdot\|)$ est un ouvert s'il est vide ou s'il est non vide et pour tout a dans $\mathcal{O}$ il existe un réel $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a,r) \subset \mathcal{O}$.

— L'intérieur d'une partie A de $(E, \|\cdot\|)$ est le plus grand ouvert $\overset{\circ}{A}$ de E contenu dans A.

— Un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $(E, \|\cdot\|)$ est un fermé si son complémentaire dans E est un ouvert de E.

— L'adhérence d'une partie A de $(E, \|\cdot\|)$ est le plus petit fermé $\overline{A}$ de E contenant A.

— Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$ est convergente s'il existe un élément ℓ de E tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0$, un tel ℓ est unique. La convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ \|x_n - \ell\| < \varepsilon$$

De l'inégalité $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$ valable pour tous x, y dans E, on déduit que si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$ dans E, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\| = \|\ell\|$ dans $\mathbb{R}$.

— La divergence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$ peut se traduire par :

$$\forall \ell \in E,\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0 \mid \|u_n - \ell\| \geq \varepsilon$$

— Une partie A de $(E, \|\cdot\|)$ est dense dans E si $\overline{A} = E$, ce qui revient à dire que tout élément de E est limite d'une suite de points de A.

— Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$ est une suite de Cauchy si pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier n_0 tel que pour tous entiers n, m on a :

$$n \geq n_0,\ m \geq n_0,\ \Rightarrow\ \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Une suite de Cauchy est bornée. Une suite convergente est de Cauchy (donc bornée). Une suite non bornée est divergente.

— Une partie $\mathcal{F}$ de $(E, \|\cdot\|)$ est fermée si, et seulement si, pour toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ qui converge vers x dans E on a, $x \in \mathcal{F}$.

— Une partie non vide K de $(E, \|\cdot\|)$ est compacte si de toute suite de points de K on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de K, ce qui équivaut à dire que de tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous-recouvrement fini. Un compact est fermé et borné.

— Soient I une partie non vide de $(E, \|\cdot\|)$ et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\left(F, \|\cdot\|'\right)$. La fonction f est continue en $\alpha \in I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid (x \in I,\ \|x - \alpha\| \leq \eta) \Rightarrow \left(\|f(x) - f(\alpha)\|' \leq \varepsilon\right)$$

Elle est continue sur I si elle est continue en tout point de I, ce qui équivaut à dire que l'image réciproque par f de tout ouvert [resp. fermé] de F est un ouvert [resp. fermé] de I ou encore que toute suite de points convergente dans I est transformée par f en une suite convergente dans F.

— Si J est une partie non vide de F, on dit alors que $f : I \to J$ est est un homéomorphisme si elle est continue bijective d'inverse f^{-1} continue.

— Une fonction $f : I \to F$ est uniformément continue sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \left((x, y) \in I^2,\ \|x - y\| \leq \eta\right) \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(y)\|' \leq \varepsilon$$

ce qui équivaut à dire que pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f(x_n) - f(y_n)\|' = 0$.

— Dans le cas où I est compact, toute fonction continue sur I est uniformément continue (théorème 1.19), $f(I)$ est un compact de $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ (théorème 1.20) et f, à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes (théorème 1.21).

La notion de convergence d'une suite dépend *a priori* de la norme choisie sur E. Considérons par exemple, dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n\left(1 - n^2 x\right) \text{ si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n^2}\right] \\ 0 \text{ si } x \in \left[\dfrac{1}{n^2}, 1\right] \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|f_n\|_1 = n \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n^2}} \left(1 - n^2 t\right) dt = \dfrac{1}{2n}$ et $\|f_n\|_\infty = n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_1 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty$, c'est-à-dire que cette suite converge vers la fonction nulle pour la norme $\|\cdot\|_1$ et diverge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

La notion de continuité dépend aussi du choix des normes sur E et F. Par exemple, la fonction $f \mapsto f(0)$ est continue de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, mais non continue sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1$. La continuité de cette application linéaire, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, résulte de l'inégalité $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$ vérifiée par toute fonction f dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} -nx + 1 \text{ si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 \text{ si } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

on vérifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_1 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$. L'application $f \mapsto f(0)$ n'est pas continue pour $\|\cdot\|_1$.

Définition 2.3. *On dit qu'un espace vectoriel normé* $(E, \|\cdot\|)$ *est complet, ou que c'est un espace de Banach, si toute suite de Cauchy dans* E *est convergente.*

On admet le résultat suivant, où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ ou le module sur $\mathbb{C}$.

Théorème 2.1.

L'espace $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *est complet.*

De ce résultat on déduit que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet (corollaire 2.5).

On rappelle qu'une partie $\mathcal{A}$ d'un espace vectoriel réel E est convexe, si pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathcal{A}$, le segment $[a, b] = \{(1-\lambda)\, a + \lambda b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ est contenu dans $\mathcal{A}$.

Théorème 2.2.

Un convexe dans un espace vectoriel normé est connexe.

Preuve. Si $\mathcal{A}$ est convexe dans E, pour a fixé dans $\mathcal{A}$, il s'écrit $\mathcal{A} = \bigcup_{b \in \mathcal{A}} [a, b]$, avec $[a, b]$ connexe, pour tout $b \in \mathcal{A}$, comme image du connexe $[0, 1]$ par l'application continue $t \mapsto (1-t)\, a + tb$ (lemme 1.1 et théorème 1.22). L'ensemble $\mathcal{A}$ est donc connexe comme réunion de connexes d'intersection non vide.

On peut aussi utiliser le corollaire 1.1. Si $f : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ est continue, pour tous $x \neq y$ dans $\mathcal{A}$ la fonction $\varphi : t \mapsto f((1-t)\, x + ty)$ est continue du connexe $[0, 1]$ dans $\{0, 1\}$, donc constante et $f(x) = \varphi(0) = \varphi(1) = f(y)$, donc f est constante et $\mathcal{A}$ est connexe. □

Corollaire 2.1. *Les connexes (et convexes) de* $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

Preuve. Soit I un connexe de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Si I n'est pas un intervalle, il alors existe $a < b$ dans I et $c \in \,]a, b[$ tel que $c \notin I$ et l'application f définie sur I par $f(x) = 1$ si $x < c$ dans I, $f(x) = 0$ si $x > c$ dans I est continue (l'image réciproque par f d'un ouvert de $\mathbb{R}$ est $]-\infty, c[\cap I$, $]c, +\infty[\cap I$ ou $\emptyset$) non constante, ce qui contredit la connexité de I. L'ensemble I est donc un intervalle, il est donc convexe. Si I est un intervalle, il est convexe, donc connexe. □

Les convexes sont des cas particuliers d'ensembles connexes par arcs.

Définition 2.4. *On dit qu'une partie* $\mathcal{A}$ *de* E *est connexe par arcs, si pour tout couple* (a, b) *d'éléments de* $\mathcal{A}$ *il existe une application continue* γ *de* $[0, 1]$ *dans* $\mathcal{A}$ *telle que* $\gamma(0) = a$ *et* $\gamma(1) = b$ *(deux points quelconques de* $\mathcal{A}$ *peuvent être joints par un arc continu dans* $\mathcal{A}$*).*

Théorème 2.3.

Un ensemble connexe par arcs dans E est connexe.

Preuve. Si $\mathcal{A}$ est connexe par arcs dans E, pour a fixé dans $\mathcal{A}$ en désignant pour tout $x \in \mathcal{A}$ par γ_x un arc continu joignant a et x dans $\mathcal{A}$, on a alors $\mathcal{A} = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \gamma_x([0,1])$, avec $\gamma_x([0,1])$ connexe pour tout $x \in \mathcal{A}$, comme image du connexe $[0,1]$ par l'application continue γ_x. L'ensemble $\mathcal{A}$ est donc connexe comme réunion de connexes ayant tous en commun le point $a = \gamma_x(0)$ (théorème 1.23). □

2.2 Applications linéaires continues

L'étude de la continuité est simplifiée dans le cas particulier des applications linéaires.

$(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|')$ sont des espaces vectoriels normés, $S(0,1)$ [resp. $\overline{B}(0,1)$] est la sphère unité [resp. la boule unité] de $(E, \|\cdot\|)$ et u est une application linéaire de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(F, \|\cdot\|')$.

Théorème 2.4.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *u est continue en 0 ;*
2. *u est uniformément continue sur E ;*
3. *u est continue sur E ;*
4. *u est bornée sur $S(0,1)$ [resp. sur $\overline{B}(0,1)$] ;*
5. *il existe une constante réelle positive λ telle que $\|u(x)\|' \leq \lambda \|x\|$ pour tout $x \in E$.*

Preuve. (1) ⇒ (2) Si u est continue en 0, il existe alors, pour tout $\varepsilon > 0$, un réel $\eta > 0$ tel que :

$$(x \in E,\ \|x\| \leq \eta) \Rightarrow \left(\|u(x)\|' \leq \varepsilon\right)$$

Utilisant la linéarité de u on déduit que pour x, y dans E tels que $\|x - y\| \leq \eta$ on a $\|u(x) - u(y)\|' \leq \varepsilon$, ce qui prouve l'uniforme continuité de f sur E.

(2) ⇒ (3) est évidente.

(3) ⇒ (4) Si u est continue sur E elle est en particulier continue en 0 et il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$(x \in E,\ \|x\| \leq \eta) \Rightarrow \left(\|u(x)\|' \leq 1\right)$$

Pour tout $x \in S(0,1)$ [resp. tout $x \in \overline{B}(0,1)$], on a $\|\eta x\| = \eta$ [resp. $\|\eta x\| \leq \eta$] et avec la linéarité de u on déduit que $\|u(x)\|' \leq \frac{1}{\eta}$, ce qui signifie que u est bornée sur $S(0,1)$ [resp. sur $\overline{B}(0,1)$].

(4) ⇒ (5) Si u est bornée sur $S(0,1)$ [resp. sur $\overline{B}(0,1)$], il existe alors un réel $\lambda > 0$ tel que $\|u(x)\|' \leq \lambda$ pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ [resp. $\|x\| \leq 1$]. En

remarquant que pour tout vecteur x non nul dans E le vecteur $\frac{1}{\|x\|}x$ est dans la sphère (et la boule) unité de $(E, \|\cdot\|)$ et en utilisant la linéarité de u on déduit que $\|u(x)\|' \leq \lambda \|x\|$, cette inégalité étant aussi vérifiée pour $x = 0$.

(5) $\Rightarrow$ (1) est évidente. $\square$

Une application linéaire continue est donc caractérisée par le fait d'être bornée sur la sphère unité. Pour cette raison une telle application est également appelée opérateur borné et la norme d'un tel opérateur borné est définie par $N(u) = \sup\limits_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|'$.

Corollaire 2.2. *Pour u surjective, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est un homéomorphisme ;*
2. *il existe des constantes réelles strictement positives α et β telles que :*
$$\forall x \in E,\ \alpha \|x\| \leq \|u(x)\|' \leq \beta \|x\|$$
3. *il existe des constantes réelles strictement positives α et β telles que :*
$$(x \in E,\ \|x\| = 1) \Rightarrow \left(\alpha \leq \|u(x)\|' \leq \beta\right)$$

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) Si u est un homéomorphisme de E sur F, les applications u et u^{-1} sont alors continues et il existe deux constantes $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ telles que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|' \leq \beta \|x\| \text{ et } \forall y \in F,\ \left\|u^{-1}(y)\right\| \leq \gamma \|y\|'$$

Comme tout vecteur x de E s'écrit de manière unique $x = u^{-1}(y)$ avec y dans F, on déduit des inégalités précédentes que :

$$\forall x \in E,\ \frac{1}{\gamma} \|x\| \leq \|u(x)\|' \leq \beta \|x\|$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Cette implication est évidente.

(3) $\Rightarrow$ (1) Les inégalités $\|u(x)\|' \leq \beta$ pour tout $x \in S(0,1)$ signifient que l'application linéaire u est continue. En remarquant que pour tout vecteur x non nul dans E le vecteur $\frac{1}{\|x\|}x$ est dans la sphère unité $S(0,1)$ et en utilisant la linéarité de u on déduit de l'assertion **3.** que :

$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ \alpha \|x\| \leq \|u(x)\|' \leq \beta \|x\|$$

ces encadrements étant encore valables pour $x = 0$. Si $u(x) = 0$ on a alors nécessairement $x = 0$, $(\alpha > 0)$, c'est-à-dire que l'application linéaire u est injective. Cette application étant supposée surjective, on déduit que c'est un isomorphisme de E sur F. Tout vecteur x de E s'écrivant de manière unique $x = u^{-1}(y)$ avec y dans F, les inégalités $\alpha \|x\| \leq \|u(x)\|'$ pour tout x dans E sont équivalentes à $\left\|u^{-1}(y)\right\| \leq \frac{1}{\alpha} \|y\|'$ pour tout y dans F, ce qui équivaut à la continuité de u^{-1}. $\square$

Le lemme qui suit nous est utile pour donner une caractérisation des formes linéaires continues sur $(E, \|\cdot\|)$.

Lemme 2.2 *Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, il existe alors un vecteur non nul a dans E tel que $E = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{K}a$.*

Preuve. La forme linéaire φ étant non nulle, il existe $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(a) \neq 0$. Pour tout vecteur $x \in E$, le vecteur $h = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$, est dans le noyau de φ et en écrivant que $x = h + \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$ on déduit que $E = \ker(\varphi) + \mathbb{K}a$. Si x est dans $\ker(\varphi) \cap \mathbb{K}a$, on a alors $x = \lambda a$ et $\lambda\varphi(a) = \varphi(x) = 0$ avec $\varphi(a) \neq 0$, ce qui entraîne $\lambda = 0$ et $x = 0$. On a donc $\ker(\varphi) \cap \mathbb{K}a = \{0\}$ et $E = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{K}a$. □

Théorème 2.5.

Une forme linéaire φ sur E est continue si, et seulement si, son noyau $\ker(\varphi)$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$.

Preuve. Le résultat étant évident pour $\varphi = 0$, on suppose que φ est non nulle.

Si φ est une forme linéaire continue sur E, son noyau $\ker(\varphi)$ est alors fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue φ. Supposons réciproquement que $\ker(\varphi)$ soit fermé dans $(E, \|\cdot\|)$. Dire que φ est non continue équivaut à dire qu'elle n'est pas bornée sur la sphère unité $S(0,1)$ de $(E, \|\cdot\|)$ (théorème 2.4). Dans ce cas on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $S(0,1)$ telle que $|\varphi(x_n)| \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant une décomposition $E = \ker(\varphi) \oplus \mathbb{K}a$ où $\varphi(a) \neq 0$, on écrit pour tout entier n, $x_n = y_n + \lambda_n a$ avec $y_n \in \ker(\varphi)$ et $\lambda_n = \dfrac{\varphi(x_n)}{\varphi(a)} \in \mathbb{K}$. Pour $n \geq 1$ on a $|\varphi(x_n)| \geq n > 0$ et $a = \dfrac{1}{\lambda_n} x_n + z_n$ avec $z_n = -\dfrac{1}{\lambda_n} y_n \in \ker(\varphi)$. Mais on a alors pour tout entier $n \geq 1$, $\|a - z_n\| = \dfrac{\|x_n\|}{|\lambda_n|} = \dfrac{1}{|\lambda_n|} = \dfrac{|\varphi(a)|}{|\varphi(x_n)|} \leq \dfrac{|\varphi(a)|}{n}$, ce qui implique que, a qui n'appartient pas à $\ker(\varphi)$, est limite d'une suite de points de $\ker(\varphi)$, soit une contradiction avec $\ker(\varphi)$ fermé. On a donc ainsi montré que si $\ker(\varphi)$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$, φ est alors continue. □

Le lemme qui suit nous est utile pour donner une caractérisation des application linéaires de rang fini de E dans F qui sont continues.

Lemme 2.3 *L'application linéaire $u : E \to F$ est de rang r si, et seulement si, il existe des formes linéaires sur E, $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ linéairement indépendantes et des vecteurs de F, $a_1, \cdots, a_r$ linéairement indépendants tels que :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x)\, a_i$$

Preuve. Si u est de rang r, son image $\operatorname{Im}(u)$ est alors un sous-espace vectoriel de F de dimension r et, désignant par $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de $\operatorname{Im}(u)$, on peut trouver pour tout x dans E, des scalaires uniquement déterminés $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_r(x)$ tels que $u(x) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x)\, a_i$. De la linéarité de u et de l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base on déduit que les applications φ_i sont linéaires. Supposons la famille

$(\varphi_i)_{1\leq i\leq r}$ liée dans le dual algébrique E^* de E avec, par exemple, $\varphi_1 = \sum_{i=2}^{r}\lambda_i\varphi_i$.
On a alors, pour tout x dans E :

$$u(x) = \left(\sum_{i=2}^{r}\lambda_i\varphi_i(x)\right)a_1 + \sum_{i=2}^{r}\varphi_i(x)\,a_i = \sum_{i=2}^{r}\varphi_i(x)(\lambda_i a_1 + a_i)$$

ce qui signifie que la famille de $r-1$ vecteurs $(\lambda_i a_1 + a_i)_{2\leq i\leq r}$ engendre $\mathrm{Im}(u)$, soit une contradiction avec $\dim(\mathrm{Im}(u)) = r$. La famille $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est donc libre. La réciproque est évidente. $\square$

Lemme 2.4 *Soit H un sous-espace vectoriel fermé de $(E, \|\cdot\|)$. Pour tout $a \in E$, l'espace $K = H + \mathbb{K}a$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$.*

Preuve. Pour $a \in H$, $K = H$ est fermé par hypothèse. Pour $a \notin H$, on a $K = H \oplus \mathbb{K}a$ et tout vecteur $x \in K$ s'écrit de manière unique $x = y + \varphi(x)\,a$ où $y \in H$ et $\varphi(x) \in \mathbb{K}$. De l'unicité d'une telle écriture on déduit que φ est une forme linéaire sur K. De plus $\ker(\varphi) = H$ qui est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$ est aussi fermé dans $(K, \|\cdot\|)$, donc φ est continue de K dans $\mathbb{K}$ (théorème 2.5). De cette continuité et de la complétude de $\mathbb{K}$ on va déduire que K est fermé. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de K qui converge vers $x \in E$. Tout vecteur x_n s'écrit $x_n = y_n + \varphi(x_n)\,a$ où $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de H. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente dans E, elle est de Cauchy et avec la continuité de φ on déduit que la suite $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Le corps $\mathbb{K}$ étant complet, la suite $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un scalaire λ. On en déduit alors que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y = x - \lambda a$. L'espace H étant fermé on a $y \in H$ et $x = y + \lambda a$ est dans K. On a donc ainsi montré que K est fermé. $\square$

Théorème 2.6.

Soit H un sous-espace vectoriel fermé de $(E, \|\cdot\|)$. Pour tout sous-espace vectoriel G de dimension finie de E, le sous-espace vectoriel $H + G$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$.

Preuve. On procède par récurrence sur la dimension $p \geq 0$ de G. Pour $p = 0$, c'est clair et pour $p = 1$ c'est le lemme précédent. Supposons le résultat acquis pour tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension $p \geq 1$ et soit G de dimension $p + 1$. En notant $(a_i)_{1\leq i\leq p+1}$ une base de G on peut écrire :

$$H + G = \left(H + \bigoplus_{j=1}^{p}\mathbb{K}a_j\right) + \mathbb{K}a_{p+1}$$

et on conclut facilement avec l'hypothèse de récurrence et le lemme précédent. $\square$

Corollaire 2.3. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé dans E.*

Preuve. Il suffit de prendre $H = \{0\}$ dans le théorème précédent. $\square$

Théorème 2.7.

Une application linéaire de rang fini $u : E \to F$ est continue si, et seulement si, son noyau est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$.

Preuve. Si u est continue, $\ker(u)$ est alors fermé dans $(E, \|\cdot\|)$ comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ par l'application continue u. Réciproquement supposons que $\ker(u)$ soit fermé dans $(E, \|\cdot\|)$. L'application linéaire u étant de rang fini, il existe des formes linéaires $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$, linéairement indépendantes dans E^* et une famille libre $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ dans F tels que $u = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i a_i$ (lemme 2.3). On a alors $\ker(u) = \bigcap_{j=1}^{r} \ker(\varphi_j) \subset \ker(\varphi_j)$ pour tout j compris entre 1 et r. On peut écrire que $\ker(\varphi_j) = \ker(u) \oplus H_j$ et la restriction de u à H_j est injective ($u(x) = 0$ et $x \in H_j$ équivaut à $x \in \ker(u) \cap H_j$) de H_j dans $\operatorname{Im}(u)$ qui est de dimension finie. En définitive, pour tout j compris entre 1 et r le sous-espace vectoriel H_j est de dimension finie dans E et avec le théorème 2.6 on déduit que $\ker(\varphi_j) = \ker(u) \oplus H_j$ est fermé et donc que la forme linéaire φ_j est continue. La continuité de $u = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i a_i$ en résulte alors immédiatement. $\square$

Corollaire 2.4. *Pour E de dimension finie, toute application linéaire de $(E, \|\cdot\|)$ dans $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ est continue.*

Preuve. Pour E de dimension finie, toute application linéaire u de E dans F est de rang fini (théorème du rang). De plus $\ker(u)$ est de dimension finie comme E, donc fermé. En définitive, u est continue. $\square$

2.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Définition 2.5. *On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur E sont équivalentes si l'application identité est un homéomorphisme de $(E, \|\cdot\|)$ sur $\left(E, \|\cdot\|'\right)$.*

On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E. Du corollaire 2.2, on déduit le résultat suivant.

Théorème 2.8.

Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur E sont équivalentes si, et seulement si, il existe deux constantes réelles α et β strictement positives telles que :

$$\forall x \in E,\ \alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$$

De ce résultat on déduit que deux normes équivalentes sur E définissent la même topologie.

Exemples 2.2

1. *Les normes* $\|\cdot\|_{\infty}$, $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *sont équivalentes.*
2. *Les normes* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_{\infty}$ *sur* $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *ne sont pas équivalentes car nous avons trouvé un peu plus haut une suite de fonctions qui converge vers la fonction nulle pour la norme* $\|\cdot\|_1$ *et diverge pour la norme* $\|\cdot\|_{\infty}$.

Lemme 2.5 *Soient E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $\|\cdot\|_{\infty}$ la norme définie sur E par :*

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E,\ \|x\|_{\infty} = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

La boule unité B_{∞} et la sphère unité S_{∞} sont compactes dans $(E, \|\cdot\|_{\infty})$.

Preuve. Soit $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans B_{∞} [resp. S_{∞}] avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)} = \left(x_j^{(k)}\right)_{1\leq j\leq n}$. Pour tout j compris entre 1 et n on a $\left|x_j^{(k)}\right| \leq \left\|x^{(k)}\right\|_{\infty} \leq 1$. De la suite réelle bornée $\left(x_1^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $\left(x_1^{(\varphi_1(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un scalaire x_1 vérifiant $|x_1| \leq 1$ (Bolzano-Weierstrass). Puis de la suite réelle bornée $\left(x_2^{(\varphi_1(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $\left(x_2^{(\varphi_2(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un scalaire x_2 vérifiant $|x_2| \leq 1$. En continuant ainsi on extrait une suite $\left(x^{(\varphi(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall j \in \{1, 2, \cdots, n\},\ \lim_{k\to+\infty} x_j^{(\varphi(k))} = x_j$$

avec $|x_j| \leq 1$. On a alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\|x^{(\varphi(k))} - x\right\|_{\infty} = 0$ où $x = (x_j)_{1\leq j\leq n}$ est dans B_{∞} [resp. S_{∞}], c'est-à-dire que la suite $\left(x^{(\varphi(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans B_{∞} [resp. S_{∞}]. On a donc ainsi montré que B_{∞} [resp. S_{∞}] est compacte dans $(E, \|\cdot\|_{\infty})$. □

Lemme 2.6 *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et H un sous-espace vectoriel fermé de E distinct de E. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un vecteur x dans la sphère unité $S(0,1)$ de $(E, \|\cdot\|)$ tel que $d(x, H) \geq 1 - \varepsilon$.*

Preuve. Pour $\varepsilon \geq 1$ le résultat est évident. On suppose donc que $\varepsilon \in]0,1[$. Si H est fermé dans E, on a alors $d(y, H) > 0$ pour tout $y \in E \setminus H$ (théorème 1.3). Pour $\varepsilon \in]0,1[$ on a $\dfrac{1}{1-\varepsilon} > 1$ et pour $y \in E \setminus H$ on peut trouver $z \in H$ tel que :

$$0 < d(y, H) \leq \|y - z\| < \frac{d(y, H)}{1-\varepsilon}$$

Le vecteur $x = \dfrac{1}{\|y-z\|}(y - z)$ est alors dans la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$ et pour tout $t \in H$ on a $\|x - t\| = \dfrac{1}{\|y-z\|}\|y - (z + \|y - z\|\, t)\|$ avec $u = z + \|y - z\|\, t$

dans H, de sorte que $\|x-t\| = \dfrac{1}{\|y-z\|}\|y-u\| \geq \dfrac{d(y,H)}{\|y-z\|} > 1-\varepsilon$. On a donc $d(x,H) = \inf\limits_{t\in H}\|x-t\| \geq 1-\varepsilon$. □

Le théorème qui suit donne plusieurs caractérisations des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 2.9.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *E est de dimension finie ;*
2. *toutes les normes sur E sont équivalentes ;*
3. *quelle que soit la norme choisie sur E toute forme linéaire définie sur $(E, \|\cdot\|)$ est continue ;*
4. *quelle que soit la norme choisie sur E, la sphère [resp. boule] unité de $(E, \|\cdot\|)$ pour cette norme est compacte ;*
5. *quelle que soit la norme choisie sur E, les compacts de $(E, \|\cdot\|)$ sont les fermés bornés.*

Preuve. $(1) \Rightarrow (2)$ On suppose que E est de dimension finie et on se donne deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur E. L'application linéaire $Id : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|')$ [resp. $Id : (E, \|\cdot\|') \to (E, \|\cdot\|)$] est de rang fini à noyau fermé, elle est donc continue (théorème 2.7). L'application $Id : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|')$ est donc un homéomorphisme, c'est-à-dire que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes sur E.

$(2) \Rightarrow (3)$ On suppose que toutes les normes sur E sont équivalentes. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E et φ une forme linéaire sur E, l'application $N : x \mapsto \|x\| + |\varphi(x)|$ définit alors une norme sur E, donc équivalente à $\|\cdot\|$ et il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $N(x) \leq \alpha \|x\|$ pour tout $x \in E$. On a donc $|\varphi(x)| \leq (\alpha - 1)\|x\|$ pour tout $x \in E$, ce qui équivaut à la continuité de la forme linéaire φ.

$(3) \Rightarrow (1)$ On suppose que quelle que soit la norme choisie sur E toute forme linéaire sur E est continue. Si $(E, \|\cdot\|)$ est de dimension infinie on peut trouver un système libre infini dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En désignant par G un supplémentaire dans E de $H = \operatorname{Vect}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ on définit la forme linéaire φ sur E par $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in G$ et $\varphi(e_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'application linéaire ainsi définie n'est pas bornée sur la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$ et en conséquence n'est pas continue, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ. L'espace vectoriel E est donc de dimension finie.

On a donc ainsi montré que les assertions (1), (2) et (3) sont équivalentes. En particulier si (3) est vérifiée alors toutes les normes sur E sont équivalentes et la compacité de la sphère [resp. boule] unité de $(E, \|\cdot\|)$ résulte de la compacité de la sphère [resp. boule] unité de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ (lemme 2.5).

$(4) \Rightarrow (5)$ On suppose que quelle que soit la norme choisie sur E, la sphère [resp. boule] unité de E pour cette norme est compacte. On sait déjà que toute partie compacte d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est fermée et bornée (théorème 1.10). Réciproquement soit $\mathcal{C}$ une partie non vide fermée et bornée dans $(E, \|\cdot\|)$. Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\|x\| \leq \lambda$ pour tout x dans $\mathcal{C}$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{C}$, la suite $\left(\frac{1}{\lambda}x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans la boule unité de $(E,\|\cdot\|)$, cette boule étant compacte, on peut extraire une sous-suite $\left(\frac{1}{\lambda}x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $y\in E$. La suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $x=\lambda y$ et $x\in\mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est fermé. On a donc ainsi montré que $\mathcal{C}$ est compact dans $(E,\|\cdot\|)$.

(5) $\Rightarrow$ (1) On suppose que quelle que soit la norme choisie sur E, les compacts de $(E,\|\cdot\|)$ sont les fermés bornés. Si E est de dimension infinie on peut trouver un système libre infini dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier n, on désigne par E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $(e_k)_{1\leq k\leq n}$. On a alors $E_p \subsetneqq E_q$ pour $q>p$. De plus chaque E_n est de dimension finie dans E, donc fermé dans E et aussi dans E_{n+1}. En utilisant le lemme 2.6, on peut construire une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans la sphère unité de $(E,\|\cdot\|)$ telle que $x_n\in E_n$ et $d(x_n,E_{n-1})\geq \frac{1}{2}$ pour tout $n\geq 1$. Mais alors, on a $\|x_q-x_p\|\geq d(x_q,E_{q-1})\geq\frac{1}{2}$ pour $q>p$ et il est impossible d'extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite convergente, ce qui est en contradiction avec la compacité de la sphère unité (c'est un fermé borné) de $(E,\|\cdot\|)$. L'espace vectoriel E est donc nécessairement de dimension finie. □

L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (5) est le théorème de Riesz. De ce résultat et du théorème 1.11, on déduit que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une suite est convergente si, et seulement si, elle est bornée et a une unique valeur d'adhérence (une suite bornée est à valeur dans une boule fermée $\overline{B}(0,R)$ qui est compacte).

On peut donc conclure que sur un espace vectoriel de dimension finie on a une seule topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel.

Corollaire 2.5. *Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Preuve. En reprenant les notations précédentes il suffit de montrer que $(E,\|\cdot\|_\infty)$ est complet, ce qui se déduit immédiatement du fait que $\mathbb{K}$ est complet. □

2.4 Exercices

Exercice 2.1. *Soient p, q deux réels dans $\mathbb{R}^{+,*}$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.*

1. En utilisant la concavité de la fonction $\ln$, *montrer que :*

$$\forall\lambda\in[0,1],\ \forall u\in\mathbb{R}^+,\ \forall v\in\mathbb{R}^+,\ u^\lambda v^{1-\lambda}\leq\lambda u+(1-\lambda)v \tag{2.1}$$

2. *Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$. En utilisant (2.1) avec $\lambda = \frac{1}{p}$, $u_i = \frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}$ et $v_i = \frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q}$ pour x et y non nuls montrer l'inégalité de Hölder :*

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Pour $p = q = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz et cette inégalité est encore valable pour $p = 1$ et $q = +\infty$.

3. *Montrer que pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$ on a :*

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

4. *Montrer que, pour $p \geq 1$, l'application $x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.*
5. *L'application $x \mapsto \|x\|_p$ définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$ pour $p \in]0, 1[$?*

Solution.

1. Voir le lemme 8.1.
2. Pour x, y dans $\mathbb{R}^n$ on note $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $\|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Prenant $\lambda = \frac{1}{p}$ dans (2.1), on a $1 - \lambda = \frac{1}{q}$ et $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v$ pour u, v positifs ou nuls. Si x et y sont deux vecteurs non nuls dans $\mathbb{R}^n$, prenant pour i compris entre 1 et n, $u_i = \frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} = \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}$ et $v_i = \frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q} = \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$ dans l'inégalité précédente on obtient, $\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$. Faisant la somme de toutes ces inégalités on obtient, $\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$. Puis avec $\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} = \sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q} = 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on déduit que :

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

cette inégalité étant encore réalisée pour $x = 0$ ou $y = 0$.

3. Pour x, y dans $\mathbb{R}^n$ on a, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

soit avec $(p-1) q = p$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p} \right)^{\frac{1}{q}}$.

4. On vérifie facilement que $x \mapsto \|x\|_1$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$. On suppose donc que $p > 1$ et on note q le réel défini par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Pour x, y dans $\mathbb{R}^n$ on a :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} |y_i|$$

Ce qui donne avec la question précédente :

$$\left(\|x + y\|_p \right)^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \left(\|x + y\|_p \right)^{\frac{p}{q}}$$

soit avec $p - \dfrac{p}{q} = 1$, $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. On a donc l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$. Les autres propriétés d'une norme se vérifient facilement.

5. Pour $0 < p < 1$, l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée. Notant $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\|e_1 + e_2\|_p = 2^{\frac{1}{p}} > \|e_1\|_p + \|e_2\|_p = 2$.

Exercice 2.2. *$E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ $(a < b)$ dans $\mathbb{K}$. Pour tout réel $p \geq 1$ et toute fonction tout $f \in E$, on note $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p \, dx}$.*

1. *Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur E.*
2. *Calculer, pour toute fonction $f \in E$, $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p$.*
3. *On suppose que f est à valeurs positives ou nulles et on se donne une fonction continue $g : [a, b] \to \mathbb{R}^{+,*}$. Calculer $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \left\| f g^{\frac{1}{p}} \right\|_p$.*

Solution.

1. Pour $p = 1$, on sait déjà que $f \mapsto \|f\|_1$ définit une norme sur E. On suppose donc que $p > 1$ et on se donne deux fonctions f, g non identiquement nulles dans E. On applique l'inégalité de convexité $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \dfrac{1}{p} u + \dfrac{1}{q} v$ où q est tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, à $u = \dfrac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p}$, $v = \dfrac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q}$ pour tout t dans $[a, b]$, ce qui donne,

$\frac{|f(t)|}{\|f\|_p}\frac{|g(t)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q}$. En intégrant sur $[a,b]$ on obtient :

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q}\int_a^b |f(t)| |g(t)| \, dt \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

D'où l'inégalité de Hölder, $\left|\int_a^b f(t) g(t) \, dt\right| \leq \int_a^b |f(t)| |g(t)| \, dt \leq \|f\|_p \|g\|_q$, cette inégalité étant encore réalisée pour $f = 0$ ou $g = 0$. Pour f, g dans E on a, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\int_a^b |f(t)| |f(t) + g(t)|^{p-1} \, dt \leq \|f\|_p \left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q$$

soit avec $(p-1)q = p$, $\int_a^b |f(t)| |f(t) + g(t)|^{p-1} \, dt \leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$, cette inégalité étant encore valable en permutant les rôles de f et g. On en déduit que $\|f+g\|_p^p = \int_a^b |f(t) + g(t)|^p \, dt \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$, soit compte tenu de $p - \frac{p}{q} = 1$, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. On a donc l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$. Les autres propriétés d'une norme se vérifient facilement.

2. On suppose f non identiquement nulle. On a

$$0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty \Rightarrow 0 \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}$$

Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$ et, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\eta > 0$ tel que $0 \leq |f(x_0)| - |f(x)| < \varepsilon$ pour $x \in [0,1] \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. On a alors, en notant α la longueur de l'intervalle $[0,1] \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$:

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|^p \, dx &\geq \int_{[a,b]\cap[x_0-\eta,x_0+\eta]} |f(x)|^p \, dx \\ &\geq \int_{[a,b]\cap[x_0-\eta,x_0+\eta]} (|f(x_0)| - \varepsilon)^p \, dx \geq \alpha (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p\end{aligned}$$

Ce qui donne en définitive, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(\|f\|_\infty - \varepsilon) \alpha^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}}$$

Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \alpha^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty - \varepsilon$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty$, il existe un entier p_0 tel que $\|f\|_\infty - 2\varepsilon \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty + 2\varepsilon$ pour tout $p \geq p_0$. Donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\|f\|_p\right) = \|f\|_\infty$.

3. g étant continue et à valeurs strictement positives sur le compact $[a,b]$, on a $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} g(x) > 0$ et $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} g(x) > 0$. De plus, f étant à valeurs positives, on a $mf^p \leq gf^p \leq Mf^p$ et $m^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq \left\|g^{\frac{1}{p}} f\right\|_p \leq M^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$. On en déduit alors de la question précédente que $\lim\limits_{p\to+\infty} \left\|fg^{\frac{1}{p}}\right\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice 2.3. *L'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Les ensembles suivants sont-ils ouverts ou fermés ?*

1. *l'ensemble A des fonction de E nulles en un point t_0 fixé dans $[0,1]$;*
2. *l'ensemble B des fonctions croissantes ;*
3. *l'ensemble C des fonctions monotones ;*
4. *l'ensemble D des fonctions dérivables.*

Solution.

1. La forme linéaire $\varphi : f \in E \mapsto f(t_0)$ est telle que $|\varphi(f)| = |f(t_0)| \leq \|f\|_\infty$, donc continue. Il en résulte que $A = \varphi^{-1}\{0\}$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Cet ensemble n'est pas ouvert car la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t) = \dfrac{1}{n+1}$ est une suite d'éléments de $E \setminus A$ qui converge vers $f = 0 \notin E \setminus A$.
2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dans E toutes croissantes qui converge vers $f \in E$ pour $\|\cdot\|_\infty$, on a alors pour tous $x \leq y$ dans $[0,1]$:
$$f(y) - f(x) = \lim_{n\to+\infty} (f_n(y) - f_n(x)) \geq 0$$
donc $f \in B$. L'ensemble B est donc fermé. Cet ensemble n'est pas ouvert car la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t) = \dfrac{\sin(6t)}{n+1}$ est une suite d'éléments de $E \setminus B$ qui converge vers $f = 0 \notin E \setminus B$. De manière analogue, on vérifie que l'ensemble B' des fonctions décroissantes est fermé non ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dans E toutes monotones qui converge vers $f \in E$ pour $\|\cdot\|_\infty$. S'il n'y a qu'un nombre fini d'indices n pour lesquels f_n est croissante [resp. décroissante], il existe alors un entier n_0 tel que la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ soit à valeurs dans B' [resp. dans B] et $f = \lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} f_n \in B'$ [resp. $f = \lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} f_n \in B$], donc f est monotone. Dans le cas contraire, on peut extraire une suite $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans B et une suite $\left(f_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans B' et $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_{\psi(n)}$ est à la fois croissante et décroissante, donc constante et en particulier monotone. L'ensemble C est donc fermé. L'exemple de $f_n(t) = \dfrac{\sin(6t)}{n+1}$ nous montre que cet ensemble n'est pas ouvert.
4. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions dérivables définies par $f_n(t) = \sqrt{\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{n}}$ sur $[0,1]$ converge vers $f : t \mapsto \left|t - \dfrac{1}{2}\right|$ dans E, cette fonction n'étant pas dérivable en $\dfrac{1}{2}$ ($|f_n(t) - f(t)| = \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n}} + \left|t - \frac{1}{2}\right|} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$). Donc D n'est pas fermé. Cet ensemble n'est pas ouvert car la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

définie par $f_n(t) = \dfrac{\left|t - \frac{1}{2}\right|}{n+1}$ est une suite d'éléments de $E \setminus D$ qui converge vers $f = 0 \notin E \setminus D$.

Exercice 2.4. *Cet exercice a pour but de montrer l'existence d'une meilleure approximation polynomiale uniforme d'une fonction continue sur un segment. On note $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues sur l'intervalle $[a,b]$ $(a < b)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on munit cet espace de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Soient f une fonction appartenant à $E \setminus \{0\}$ et $\overline{B}(0, 2\|f\|_\infty)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon $2\|f\|_\infty$. Montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X] \cap \overline{B}(0, 2\|f\|_\infty)$ tel que $\|f - P\|_\infty = \inf\limits_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty$.*

Solution. L'ensemble $\mathcal{B}_{n,f} = \mathbb{R}_n[X] \cap \overline{B}(0, 2\|f\|_\infty)$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon $2\|f\|_\infty$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Cet espace vectoriel étant de dimension finie (égale à $n+1$), on sait que cette boule est compacte. L'application $Q \mapsto \|f - Q\|_\infty$ étant continue sur le compact $\mathcal{B}_{n,f}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est minorée et atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme P dans $\mathcal{B}_{n,f}$ tel que $\delta = \inf\limits_{Q \in \mathcal{B}_{n,f}} \|f - Q\|_\infty = \|f - P\|_\infty$. Pour tout polynôme Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ on a soit $Q \in \mathcal{B}_{n,f}$ et alors $\|f - Q\|_\infty \geq \delta$, soit $Q \notin \mathcal{B}_{n,f}$ et alors $\|f - Q\|_\infty \geq \|Q\|_\infty - \|f\|_\infty > 2\|f\|_\infty - \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$. Remarquant que $0 \in \mathcal{B}_{n,f}$, on déduit que $\|f\|_\infty = \|f - 0\|_\infty \geq \delta$. En définitive on a bien $\|f - Q\|_\infty \geq \delta$ pour tout Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc $\delta = \inf\limits_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty = \|f - P\|_\infty$.

Exercice 2.5. *On note $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour toute fonction $f \in E$, on note $\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$.*

1. *Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur l'espace E.*
2. *Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E ?*

Solution.

1. On a $\|f\| \geq 0$, $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ et $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous f, g dans E. L'égalité $\|f\| = 0$ équivaut à $f' = 0$ et $f(0) = 0$, donc à $f = f(0) = 0$.
2. Pour toute fonction $f \in E$, on a :
$$|f(x)| = \left| f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt \right| \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$$
donc $\|f\|_\infty \leq \|f\|$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n$. Comme $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\| = \|n f_{n-1}\|_\infty = n$, l'application $f \mapsto \|f\|$ n'est pas bornée sur la sphère unité de $(E, \|\cdot\|_\infty)$, donc les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 2.6. *On désigne par E_1 l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$ et on se donne une fonction continue a de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in E_1$, on note $N_1(f) = \|f'\|_\infty + \|af\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f' + af\|_\infty$.*

1. *Montrer que les applications N_1 et N_2 définissent des normes sur E.*
2. *Montrer que $\|f\|_\infty \leq N_1(f)$ pour toute fonction $f \in E$.*
3. *Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N_1 sont-elles équivalentes ?*
4. *Soient $f \in E_1$ et g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x)e^{A(x)}$, où A est la primitive nulle en 0 de a. Majorer $|g'|$ en fonction de $N_2(f)$, puis en déduire une majoration de $\|f\|_\infty$ en fonction de $N_2(f)$.*
5. *Montrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.*
6. *Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N_2 sont-elles équivalentes ?*

Solution.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, g dans E_1, on a clairement $N_k(\lambda f) = |\lambda| N_k(f)$ et $N_k(f+g) \leq N_k(f) + N_k(g)$ pour $k = 1$ et $k = 2$ (linéarité de $f \mapsto f'$ et $f \mapsto af$ ajoutée au fait que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme). L'égalité $N_1(f) = 0$ entraîne $f' = 0$, donc $f = f(0) = 0$. L'égalité $N_2(f) = 0$ équivaut à $f' + af = 0$, soit à $f(t) = \lambda e^{-A(t)}$, où A est la primitive nulle en 0 de a et $\lambda = f(0) = 0$, donc $f = 0$.
2. Il existe $\alpha \in [0,1]$ et $c \in [0,\alpha]$ tels $\|f\|_\infty = |f(\alpha)| = |f(\alpha) - f(0)| = \alpha |f'(c)| \leq \|f'\|_\infty \leq N_1(f)$ (théorème des accroissements finis).
3. En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(t) = t^n$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N_1(f_n) \geq \|f_n'\|_\infty = n$, il ne peut donc exister de constante $\beta > 0$ telle que $N_1 \leq \beta \|\cdot\|_\infty$. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N_1 ne sont donc pas équivalentes.
4. La fonction g est dans E_1 avec $g'(t) = e^{A(t)}(f'(t) + a(t)f(t))$ pour tout $t \in [0,1]$, donc $|g'(t)| \leq \left\|e^A\right\|_\infty \|f' + af\|_\infty = \left\|e^A\right\|_\infty N_2(f)$. En utilisant le théorème des accroissements finis, on en déduit que pour tout $x \in [0,1]$, il existe $c_x \in [0,x]$ tel que $|g(x)| = |g(x) - g(0)| = |g'(c_x)| \leq \left\|e^A\right\|_\infty N_2(f)$ et en conséquence, on a :

$$|f(x)| = \left|g(x)e^{-A(x)}\right| \leq \left\|e^{-A}\right\|_\infty |g(x)| \leq \left\|e^{-A}\right\|_\infty \left\|e^A\right\|_\infty N_2(f)$$

   donc $\|f\|_\infty \leq \left\|e^{-A}\right\|_\infty \left\|e^A\right\|_\infty N_2(f)$.
5. Pour tout $f \in E_1$, on a $N_2(f) = \|f' + af\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + \|af\|_\infty = N_1(f)$ et :

$$\begin{aligned} N_1(f) &= \|f'\|_\infty + \|af\|_\infty = \|f' + af - af\|_\infty + \|af\|_\infty \\ &\leq \|f' + af\|_\infty + 2\|a\|_\infty \|f\|_\infty \leq \left(1 + 2\|a\|_\infty \left\|e^{-A}\right\|_\infty \left\|e^A\right\|_\infty\right) N_2(f) \end{aligned}$$

   Les normes N_1 et N_2 sont donc équivalentes.
6. Si $\|\cdot\|_\infty$ est équivalente à N_2, elle est alors équivalente à N_1 d'après la question précédente, ce qui n'est pas d'après la question **3**.

Exercice 2.7. *Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme définie par :*

$$\forall f \in E,\ \|f\| = \|f\|_\infty + \|f\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

1. *Montrer que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, puis que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.*
2. *Montrer que l'ensemble $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(E, \|\cdot\|)$.*
3. *On désigne par f_1 la fonction constante égale à 1 sur $[0,1]$. Montrer que $\|f_1 - f\| > 1$ pour tout $f \in F$, que $d(f_1, F) = \inf_{f\in F} \|f_1 - f\| = 1$ et que cette distance n'est pas atteinte.*

Solution.

1. Avec $\|f\|_\infty \leq \|f\| \leq 2\|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$, on déduit que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. Sachant que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet, on en déduit que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.
2. Pour $f \in E$, on a $|f(0)| \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|$, donc la forme linéaire $\varphi : f \mapsto f(0)$ est continue et $F = \ker(\varphi) = \varphi^{-1}\{0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(E, \|\cdot\|)$.
3.
   (a) Pour toute fonction $f \in F$, on a $|f_1 - f| = |1 - f| \neq 0$ (puisque $f(0) = 0$) la fonction $|1 - f|$ étant continue, donc $\|f_1 - f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |1 - f(t)|\, dt > 0$ et :

   $$\|f_1 - f\| = \|1 - f\|_\infty + \|1 - f\|_1 > \sup_{t\in[0,1]} |1 - f(t)| \geq |1 - f(0)| = 1$$

   Il en résulte que $d(f_1, F) = \inf_{f\in F} \|f_1 - f\| \geq 1$.

   (b) Pour tout réel $\varepsilon \in \left]0, 1\right[$, on désigne par f_ε la fonction affine par morceaux et continue définie par :

   $$f_\varepsilon(0) = 0,\ f_\varepsilon \text{ est affine sur } [0, \varepsilon],\ f_\varepsilon(t) = 1 \text{ pour tout } t \in [\varepsilon, 1]$$

   Cette fonction est dans F et :

   $$\|f_1 - f_\varepsilon\| = 1 + \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} t\right) dt = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \geq d(f_1, F)$$

   Faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $d(f_1, F) \leq 1$ et $d(f_1, F) = 1$. Comme $\|f_1 - f\| > 1$ pour tout $f \in F$, cette distance n'est pas atteinte.

Exercice 2.8. *L'espace vectoriel* $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ *des fonctions continues de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *est muni de la norme* $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout entier* k *compris entre* 0 *et* n, *on désigne par* $B_{n,k}$ *la fonction polynomiale définie par* $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ *pour tout réel* x *et à toute fonction* $f \in E$, *on associe la suite* $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de fonctions polynomiales de Bernstein définie par* $B_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Montrer que, pour toute fonction* $f \in E$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$B_n(xf) = \frac{x(1-x)}{n} (B_n(f))' + xB_n(f)$$

2. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on note* e_k *la fonction polynomiale définie par* $e_k(x) = x^k$ *pour tout réel* x.

   (a) *Calculer* $B_n(e_k)$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $k \in \{0,1,2\}$.

   (b) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right) B_{n,k}(x) = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

3.

   (a) *Montrer que pour tout réel* $\alpha > 0$ *et tout* $x \in [0,1]$, *on a :*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n}-x\right| \geq \alpha}}^{n} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}$$

   (la somme étant nulle quand l'ensemble des entiers k *compris entre* 0 *et* n *tels que* $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha$ *est vide).*

   (b) *Montrer que, pour toute fonction* $f \in E$, *la suite* $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniformément vers* f *sur* $[0,1]$.

4. *Montrer que toute fonction continue,* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *est limite uniforme sur* $[a,b]$ *d'une suite de polynômes (théorème de Weierstrass).*

5. *Montrer que si une fonction* f *est limite uniforme sur* $\mathbb{R}$ *d'une suite de fonctions polynomiales, c'est alors une fonction polynomiale (le théorème de Weierstrass n'est pas valable sur* $\mathbb{R}$*).*

6.

   (a) *Montrer qu'une fonction* $f \in E$ *est limite uniforme sur* $[0,1]$ *d'une suite de polynômes à coefficients entiers relatifs si, et seulement si,* $f(0)$ *et* $f(1)$ *sont entiers relatifs.*

(b) En déduire que, pour tout réel $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, *l'anneau* $\mathbb{Z}[x]$ *des fonctions polynomiales à coefficients entiers relatifs est dense dans* $\left(\mathcal{C}^0\left([\delta, 1-\delta]\right), \|\cdot\|_\infty\right)$.

Solution.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$, on a :

$$B'_{n,k}(x) = \begin{cases} -n(1-x)^{n-1} \text{ si } k = 0 \\ \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx) \text{ si } 1 \leq k \leq n-1 \\ nx^{n-1} \text{ si } k = n \end{cases}$$

donc $x(1-x) B'_{n,k}(x) = (k - nx) B_{n,k}(x)$. Il en résulte que pour $f \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{x(1-x)}{n}(B_n(f))' &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) - x \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) \\ &= B_n(xf) - xB_n(f) \end{aligned}$$

2.

(a) Pour tout réel x, on a :

$$B_n(e_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1$$

soit $B_n(e_0) = e_0$. Il en résulte que :

$$B_n(e_1)(x) = \frac{x(1-x)}{n}(B_n(e_0))'(x) + xB_n(e_0)(x) = x$$

soit $B_n(e_1) = e_1$ et :

$$B_n(e_2)(x) = \frac{x(1-x)}{n}(B_n(e_1))'(x) + xB_n(e_1)(x) = \frac{x(1-x)}{n} + x^2$$

soit $B_n(e_2) = \frac{1}{n}e_1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)e_2$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right) B_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} B_{n,k}(x) - x \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) \\ &= B_n(e_1)(x) - xB_n(e_0)(x) = x - x = 0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_{n,k}(x) &= B_n(e_2)(x) - 2xB_n(e_1)(x) + x^2 B_n(e_0)(x) \\ &= \frac{x(1-x)}{n} + x^2 - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

3.

(a) Pour $x \in [0,1]$ et $0 \leq k \leq n$ tel que $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| \geq \alpha$, on a $1 \leq \dfrac{1}{\alpha^2}\left(\dfrac{k}{n} - x\right)^2$, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k=0\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}}^{n} B_{n,k}(x) &\leq \frac{1}{\alpha^2}\sum_{\substack{k=0\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 B_{n,k}(x)\\ &\leq \frac{1}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{1}{\alpha^2}\frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}\end{aligned}$$

(la fonction $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $\dfrac{1}{2}$).

(b) En utilisant l'égalité $B_n(e_0) = 1$, on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)B_{n,k}(x)$$

La fonction f étant continue sur le compact $[0,1]$, elle y est uniformément continue, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\left((x,y) \in [0,1]^2 \text{ et } |x-y| < \alpha\right) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}&|B_n(f)(x) - f(x)|\\ &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|B_{n,k}(x) + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|B_{n,k}(x)\\ &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha} B_{n,k}(x) + \varepsilon \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\alpha} B_{n,k}(x)\\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{4\alpha^2 n} + \varepsilon\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n} + \varepsilon\end{aligned}$$

soit $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \dfrac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n} + \varepsilon$. Désignant par n_0 un entier non nul tel que $\dfrac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n} < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, on déduit que $\|B_n(f) - f\|_\infty < 2\varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, donc $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(t) = f(a + t(b-a))$ est continue, donc la suite de fonctions polynomiales $(B_n(g))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $[0,1]$ et la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $P_n(x) = B_n(g)\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ converge uniformément vers la fonction $x \mapsto g\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) = f(x)$ sur $[a,b]$.

5. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales, cette suite vérifie alors le critère de Cauchy uniforme, c'est-à-dire que pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier naturel n_0 tel que :
$$\forall n > m \geq n_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_m(x)| < \varepsilon$$
En particulier, on a $|P_n(x) - P_{n_0}(x)| < \varepsilon$, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq n_0$ la fonction polynomiale $P_n - P_{n_0}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, elle est donc constante. Il existe donc une suite de réels $(c_n)_{n\geq n_0}$ telle que $P_n = P_{n_0} + c_n$ pour tout $n \geq n_0$. La suite $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente vers $f(0)$, on déduit que la suite $(c_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $f(0) - P_{n_0}(0)$ et pour tout réel x, on a :
$$f(x) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} P_n(x) = P_{n_0}(x) + \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} c_n = P_{n_0}(x) + f(0) - P_{n_0}(0)$$
La fonction f est donc polynomiale.

6.

(a) S'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$ qui converge vers f (même simplement), on a alors $f(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(0)$, où $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'entiers relatifs. Comme $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, on a nécessairement $f(0) \in \mathbb{Z}$. De manière analogue, on voit que $f(1) \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, soit $f \in E$ telle que $f(0)$ et $f(1)$ soient entiers. En notant $[\cdot]$ la fonction partie entière, on associe à la fonction f la suite $(P_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \right] x^k (1-x)^{n-k}$$
Comme $f(0)$ et $f(1)$ sont entiers, on a, pour tout $x \in [0,1]$:
$$0 \leq B_n(f)(x) - P_n(f)(x) \leq \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k}$$
et avec $\displaystyle\binom{n}{k} = n \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n-j}{k-j+1} \geq n$ pour tout k compris entre 1 et $n-1$, on déduit que :
$$0 \leq B_n(f)(x) - P_n(f)(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n}$$
Puis avec :
$$\begin{aligned} \|f - P_n(f)\|_\infty &\leq \|f - B_n(f)\|_\infty + \|B_n(f) - P_n(f)\|_\infty \\ &\leq \|f - B_n(f)\|_\infty + \frac{1}{n} \end{aligned}$$
et la convergence uniforme de $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f, on déduit que la suite $(P_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

(b) Une fonction $f \in \mathcal{C}^0([\delta, 1-\delta])$ se prolongeant en une fonction $f \in E$ nulle en 0 et en 1, on en déduit que $\mathbb{Z}[x]$ est dense dans $\left(\mathcal{C}^0([\delta, 1-\delta]), \|\cdot\|_\infty\right)$.