L3 A, intégration : M363

– I – Exercices préliminaires

On présente ici quelques méthodes de raisonnement qui seront utilisées en théorie de la mesure.

Exercice 1 *Pour tout entier naturel non nul n, on définit les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_{n,k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, l'entier k étant compris entre 0 et n, par :*

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sigma_{n,k}(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 0 \\ \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k} \text{ si } k \in \{1, \cdots, n\} \end{cases}$$

Soit $P(X) = \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$ un polynôme scindé unitaire de degré $n \geq 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que l'on a $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}$ avec :

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\},\ a_k = (-1)^k \sigma_{n,k}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

Exercice 2 *Soit Ω un ensemble non vide.*
À toute partie A de Ω, on associe la fonction indicatrice (ou caractéristique) de A définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{1}_A : & \Omega & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω.

1. *Montrer que l'application qui associe à une partie A de Ω sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ réalise une bijection de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $\{0,1\}^\Omega$ (ensemble des applications de Ω dans $\{0,1\}$). Préciser son inverse.*
2. *Soient A, B deux parties de Ω. Exprimer $\mathbf{1}_{\Omega \setminus A}$, $\mathbf{1}_{A \cap B}$, $\mathbf{1}_{AUB}$, $\mathbf{1}_{B \setminus A}$, $\mathbf{1}_{A \Delta B}$, en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.*
3. *Plus généralement, pour toute suite finie $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ de parties de Ω, exprimer $\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k}$ et $\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_k}$.*
4. *Montrer qu'il n'existe pas de bijection de Ω sur $\mathcal{P}(\Omega)$ (théorème de Cantor).*
   On en déduit en particulier que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.
5. *Soient $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite finie de parties de Ω et A une partie de Ω. Montrer que :*

$$\left((A_k)_{1 \leq k \leq n} \text{ est une partition de } A\right) \Leftrightarrow \left(\mathbf{1}_A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}\right)$$

Exercice 3 *On dit qu'une série numérique (réelle ou complexe) $\sum u_n$ est commutativement convergente si, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.*
Montrer qu'une série $\sum u_n$ absolument convergente est commutativement convergente et que pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ (cela justifie l'écriture $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ dans le cas d'une série absolument convergente, ce qui est utilisé implicitement dans la définition d'une mesure).

Exercice 4

1. *Soit* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ *une suite de réels positifs ou nuls indexée par* (n,m) *dans* $\mathbb{N}^2$.
On suppose que :
– *pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *la série* $\sum\limits_m u_{n,m}$ *est convergente de somme* S_n ;
– *la série* $\sum\limits_n S_n$ *étant convergente de somme* S.
Montrer alors que dans ces conditions :
– *pour tout* $m\in\mathbb{N}$, *la série* $\sum\limits_n u_{n,m}$ *est convergente de somme* T_m ;
– *la série* $\sum\limits_m T_m$ *est convergente de somme* S, *soit :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$$
Dans le cas où l'une des sommes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ *ou* $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ *est finie, on dit que la série double* $\sum u_{n,m}$ *est convergente et on note* $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}u_{n,m}$ *la valeur commune de* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ *et* $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$.
Étant donnée une suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ *de nombres complexes, on dit que la série double* $\sum u_{n,m}$ *est absolument convergente (ou que la suite* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable) si la série double* $\sum|u_{n,m}|$ *est convergente.*

2. *Soit* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ *une suite double telle que la série double* $\sum u_{n,m}$ *soit absolument convergente.*
Montrer alors que dans ces conditions, pour tout $n\in\mathbb{N}$ *[resp. pour tout* $m\in\mathbb{N}$*], la série* $\sum\limits_m u_{n,m}$ *[resp.* $\sum\limits_n u_{n,m}$*] est absolument convergente et en notant* S_n *[resp.* T_m*] la somme de cette série, la série* $\sum S_n$ *[resp.* $\sum T_m$*] est absolument convergente et on a* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n=\sum\limits_{m=0}^{+\infty}T_m$, *soit :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)$$

3. *En justifiant la convergence, calculer la somme* $\sum\limits_{m=2}^{+\infty}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^m}$.

4. *Soit* $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ *la suite double définie par :*
$$\forall\,(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ u_{n,m}=\begin{cases}0 \ si\ n=m\\ \dfrac{1}{n^2-m^2}\ si\ n\neq m\end{cases}$$
Montrer, en les calculant, que les sommes $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ *et* $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_{n,m}\right)$ *sont définies et différentes.*

Exercice 5 *Soient E un espace vectoriel normé complet et $a < b$ deux réels.*
Une fonction $f : [a, b] \to E$ est dite réglée si elle admet une limite à droite en tout point de $[a, b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a, b]$.
On notera $f(x^-)$ [resp. $f(x^+)$] la limite à gauche [resp. à droite] en $x \in]a, b]$ [resp. en $x \in [a, b[$].

1. *Montrer qu'une fonction réglée est bornée.*
2. *Montrer qu'une limite uniforme de fonctions réglées de $[a, b]$ dans E est réglée.*
3. *Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction réglée et $\varepsilon > 0$. On note :*

$$E_\varepsilon = \left\{ x \in]a, b] \mid \textit{il existe } \varphi \textit{ en escaliers sur } [a, x] \textit{ telle que } \sup_{t \in [a,x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon \right\}$$

   Montrer que $E_x \neq \emptyset$, puis que $b = \max(E_\varepsilon)$.
4. *Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to E$ est réglée si, et seulement si, elle est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escaliers.*
5. *Rappeler comment le résultat de la question précédente est utilisé pour définir l'intégrale de Riemann d'une fonction réglée $f : [a, b] \to E$.*
6. *Montrer qu'une fonction réglée $f : [a, b] \to E$ est continue sur $[a, b]$ privé d'un ensemble D dénombrable (éventuellement vide).*
7. *La fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ est-elle réglée ?*
8. *En désignant par $E(t)$ la partie entière d'un réel t, montrer que la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(nx)}{2^n}$$

   est réglée, puis calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ (il s'agit d'une intégrale de Riemann).

Exercice 6 *$[a, b]$ est un intervalle fermé borné fixé avec $a < b$ réels.*

1. *Montrer que les fonctions en escaliers positives sur $[a, b]$ sont exactement les fonctions du type :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

   où $n \in \mathbb{N}^*$, les a_k sont des réels positifs ou nuls et les I_k sont des intervalles contenus dans $[a, b]$.
2. *Montrer que si $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite finie de fonctions en escaliers sur $[a, b]$, alors la fonction $\varphi = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \varphi_k$ est aussi en escaliers.*
3. *Soit f une fonction réglée définie sur $[a, b]$ et à valeurs positives.*
   (a) *Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$ et telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, b],\ \varphi_n(x) \leq f(x)$$

   (b) *On désigne par $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[a, b]$ par $\psi_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:*

$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

   Monter que $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

(c) *Montrer qu'il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série* $\sum f_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$.

4. *Montrer que les fonctions réglées à valeurs positives sur* $[a,b]$ *sont exactement les fonctions de la forme :*

$$f=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$$

où les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de réels positifs ou nuls,* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'intervalles contenus dans* $[a,b]$ *et la série considérée converge uniformément sur* $[a,b]$.

5. *Avec les notations de la question précédente, justifier l'égalité :*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ell(I_n)$$

où $\ell(I_n)$ *est la longueur de l'intervalle* I_n.

Exercice 7 *La longueur d'un intervalle réel* I *est définie par :*

$$\ell(I)=\sup(I)-\inf(I)\in[0,+\infty]=\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$$

1. *Soient* $I=[a,b]$ *un intervalle fermé, borné et* $(I_k)_{1\le k\le n}$ *une famille finie d'intervalles telle que :*

$$I\subset\bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

Montrer que :

$$\ell(I)\le\sum_{k=1}^{n}\ell(I_k)$$

2. *Soient* $I=[a,b]$ *un intervalle fermé, borné et* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles telle que :*

$$I\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I)\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n)$$

3. *Soient* I *un intervalle et* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles telle que :*

$$I\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Montrer que :

$$\ell(I)\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n)$$

4. *Soit* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles deux à deux disjoints inclus dans un intervalle* I. *Montrer que :*

$$\ell(I)\ge\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n)$$

Exercice 8 *Pour tous réels* $a<b$, *on désigne par* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

1. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *qui converge simplement vers une fonction* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
   Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,b]$ *(théorème de Dini). On donnera deux démonstrations de ce résultat, l'une utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass et l'autre utilisant celle de Borel-Lebesgue.*

2. *Le résultat précédent est-il encore vrai dans* $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ *si on ne suppose plus l'intervalle* I *compact ?*

3. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ *telle que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement vers une fonction* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
   Montrer que :
$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

4. *On désigne par* $\mathcal{A}$ *la famille des parties de* $\mathbb{R}^2$ *de la forme :*
$$A(f,g) = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$$
   où f, g *sont dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *telles que* $f \leq g$ *et on note :*
$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b (g(t) - f(t))\,dt$$
   Montrer que cette application μ *est* σ*-additive sur* $\mathcal{A}$*, c'est-à-dire que pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$ *deux à deux disjoints (i. e.* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *pour* $n \neq m$ *dans* $\mathbb{N}$*), on a :*
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

– II – Mesures et probabilités élémentaires

X est un ensemble non vide et $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X.

Définition : Une σ-algèbre (ou tribu) sur X est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ telle que :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;
- Si $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable).

Définition : Si $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre sur X, on dit alors que le couple $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

Définition : Une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est une application

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

telle que :

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (i. e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$), on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

  (σ-additivité de μ).

Avec ces conditions, on dit que le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Dans le cas où $\mu(X) = 1$, on dit que μ est une probabilité sur $(X, \mathcal{A})$ et que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace probabilisé.

Dans ce cas, on notera $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité μ, les éléments de X sont appelés éventualités, ceux de $\mathcal{A}$ sont appelés événements, les singletons sont les événements élémentaires et $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de A.

Deux événements disjoints sont dits incompatibles.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements, où I est un ensemble d'indices. On dit que ces événements sont mutuellement indépendants dans $\mathcal{A}$ si pour toute partie J non vide de I, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Définition : Si $\mathcal{A}$ est une famille de parties de X, on dit alors que l'intersection de toutes les σ-algèbres sur X qui contiennent $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$. C'est aussi la plus petite σ-algèbre sur X (pour l'ordre de l'inclusion sur $\mathcal{P}(X)$) qui contient $\mathcal{A}$.

On la note $\sigma(\mathcal{A})$ et on a :

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ tribu sur } X \\ \mathcal{A}\subset\mathcal{B}}} \mathcal{B}$$

Si $f : X \to X'$ est une application de X dans un ensemble X', alors pour toute tribu $\mathcal{A}'$ sur X', l'image réciproque :

$$f^{-1}(\mathcal{A}') = \left\{ f^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}' \right\}$$

est une tribu sur X.

Pour toute famille $\mathcal{A}'$ de parties de X', on a :

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{A}')\right) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$$

Définition : Si X est un espace topologique, la tribu de Borel sur X est la σ-algèbre engendrée par les ouverts de X.

On la note $\mathcal{B}(X)$ et ses éléments sont les boréliens de X.

Pour $X = \mathbb{R}^p$, on peut vérifier que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ est la tribu engendré par les pavés ouverts du type :

$$P = \prod_{k=1}^{p}]a_k, b_k[$$

les $a_k < b_k$, pour k compris entre 1 et p, étant tous rationnels.

Une mesure de Borel sur X est une mesure sur $\mathcal{B}(X)$.

Exercice 9 *Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Montrer que :*

1. *$X \in \mathcal{A}$;*
2. *si A, B sont dans $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \triangle B$ sont dans $\mathcal{A}$;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable).*

Exercice 10 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) < +\infty$.*
Montrer que :

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \mu_{k,n}$$

où on a noté pour $1 \leq k \leq n$:

$$\mu_{k,n} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$$

(formule de Poincaré).

Exercice 11 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles.*
Montrer que l'ensemble d'indice :

$$D = \{k \in I \mid \mathbb{P}(A_k) \in]0, 1]\}$$

est dénombrable (fini ou infini).

Exercice 12

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \delta_x : & \mathcal{P}(X) & \to & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \mathbf{1}_A(x) \end{array}$$

   est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$ (mesure de Dirac en x).

2. *On suppose que $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable.*

   Montrer que pour toute suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls tels que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P} : & \mathcal{P}(X) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) \end{array} \tag{1}$$

   est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

3. *Réciproquement, montrer que toute mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(X, \mathcal{P}(X))$ peut s'exprimer sous la forme* (1) .

Exercice 13 *Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ telle que :*

– $\emptyset \in \mathcal{A}$ *;*
– $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;*
– $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2,\ A \cap B \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par intersection finie) ;*

($\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole) et $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ une application telle que :

– $\mu(\emptyset) = 0$ *;*
– *μ est σ-additive (i. e. $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$).*

1. *Montrer que, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ et $A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$ (dans le cas où $n \geq 2$).*
2. *Montrer que μ est croissante.*
3. *Soient $A \in \mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que :*

$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

(inégalité de Boole).

Exercice 14 *On se propose de montrer qu'une tribu dénombrable sur X est nécessairement finie de cardinal égal à une puissance de 2.*
Ce qui revient aussi à dire qu'une tribu infinie est non dénombrable.
Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre dénombrable sur X.
Pour tout $x \in X$, on note :

$$A(x) = \bigcap_{\substack{A\in\mathcal{A} \\ x\in A}} A$$

(atome de x).

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, $A(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ qui contient x.*
2. *Soient x, y dans X. Montrer que si $y \in A(x)$, on a alors $A(x) = A(y)$.*
3. *Montrer que, pour tous x, y dans X, on a $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ ou $A(x) = A(y)$.*
4. *En désignant par $(x_i)_{i\in I}$ la famille des éléments de X telle que les $A(x_i)$ soient deux à deux disjoints, montrer que cette famille est dénombrable et que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a une partition $A = \bigcup_{j\in J} A(x_j)$, où J est une partie de I.*
5. *En déduire que $\mathcal{A}$ est finie, son cardinal étant une puissance de 2.*

Exercice 15 *Soit X un ensemble dénombrable.*
Montrer que la σ-algèbre engendrée par les singletons de X est $\mathcal{P}(X)$.

Exercice 16 *Soit X un ensemble non dénombrable.*

1. *Montrer que la famille $\mathcal{A}$ formée des parties A de X telles que A ou ou $X \setminus A$ est dénombrable est une σ-algèbre sur X.*
2. *Montrer que $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre engendrée par les singletons de X.*
3. *Montrer que l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \mathcal{A} & \to & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 \text{ si } X \setminus A \text{ est dénombrable} \end{array} \right. \end{array}$$

est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$.

Exercice 17 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Montrer que si A, B sont des éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A \subset B$ et $\mu(B) < +\infty$, on a alors :*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

2. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $\mu(A)$ (continuité croissante de μ).*
3. *Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En supposant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers $\mu(A)$ (continuité décroissante de μ).*

Exercice 18 *Soient μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mu([x, +\infty[)$$

1. *Montrer que F est décroissante avec, pour tout réel x :*

$$\lim_{\substack{t\to x \\ t<x}} F(t) = F(x),\ \lim_{\substack{t\to x \\ t>x}} F(t) = F(x) - \mu(\{x\})$$

et :

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \mu(\mathbb{R}),\ \lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$$

2. *Montrer que l'ensemble :*

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x\}) > 0\}$$

est dénombrable.

Exercice 19 *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.*
Montrer qu'une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si, et seulement si :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- *pour tous événements A, B incompatibles dans $\mathcal{A}$, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (on dit que l'application $\mathbb{P}$ est additive) ;*
- *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante dans $\mathcal{A}$, alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(continuité croissante).

Exercice 20 *Soit $n \geq 2$ un entier naturel.*
On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où $\Omega = \{1, \cdots, n\}$ et :

$$\forall k \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}$$

ce qui revient à considérer l'expérience aléatoire qui consiste à choisir de manière équiprobable un entier compris entre 1 et n.
Pour tout diviseur positif d de n, on désigne par A_d l'événement :≪ le nombre choisi est divisible par d ≫.

1. *Calculer $\mathbb{P}(A_d)$ pour tout diviseur positif d de n.*
2. *Montrer que si $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ sont tous les diviseurs premiers de n, les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_r}$ sont alors mutuellement indépendants.*
3. *Soient $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \cdots, A_n$, où $n \geq 2$, des événements mutuellement indépendants dans $\mathcal{B}$.*
   (a) *Montrer que $\Omega \setminus A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants.*
   (b) *En déduire que pour tout entier k compris entre 1 et n, les événements $\Omega \setminus A_1, \cdots, \Omega \setminus A_k, A_{k+1}, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants.*
4. *On désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler définie sur $\mathbb{N}^*$ par*
$$\varphi(n) = \operatorname{card}\{k \in \{1, \cdots, n\} \mid k \wedge n = 1\}$$
   Montrer que
$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$
5. *Soit d un diviseur positif d de n. Calculer la probabilité de l'événement B_d : ≪ le nombre a choisi est tel que $a \wedge n = d$ ≫.*
6. *En déduire que :*
$$n = \sum_{d/n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

Exercice 21 *On munit l'ensemble $\mathbb{N}^*$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.*
On rappelle que la fonction dzéta de Riemann est définie par :

$$\forall \alpha > 1,\ \zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

On note :

$$2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$$

la suite infinie des nombres premiers rangée dans l'ordre strictement croissant.

1. *Montrer que l'on définit une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ en posant :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \frac{1}{n^\alpha}$$
2. *Montrer que :*
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(p\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^\alpha}$$
   où on a noté $p\mathbb{N}^*$ l'ensemble de tous les multiples positifs de p.

3. *Montrer que :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\mathbb{N}^*\setminus p_n\mathbb{N}^*\right)\right)=\frac{1}{\zeta(\alpha)}$$

4. *En déduire que :*

$$\forall\alpha>1,\ \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^\alpha}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$

Montrer que $\lim\limits_{\alpha\to1^+}\zeta(\alpha)=+\infty$ *et déduire du résultat précédent que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{p_n}=+\infty$.

Exercice 22 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle strictement décroissante et de limite nulle. Déterminer un réel* λ *pour lequel il existe une probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *telle que :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(\mathbb{N}\cap[n,+\infty[)=\lambda u_n$$

Exercice 23 *Soit* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Pour tous* A,B *dans* $\mathcal{A}$, *on note :*

$$d(A,B)=\mathbb{P}(A\bigtriangleup B)$$

1. *Montrer que, pour tous* A,B,C *dans* $\mathcal{A}$, *on a :*

$$d(A,C)\leq d(A,B)+d(B,C)$$

2. *Montrer que, pour tous* A,B *dans* $\mathcal{A}$, *on a :*

$$|\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)|\leq\mathbb{P}(A\bigtriangleup B)$$

Exercice 24 *Soit* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Montrer que, pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'événements deux à deux incompatibles, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)=0$.

Exercice 25 *Soit* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Montrer que, pour toute suite finie* $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ *d'événements, on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)\leq\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)+(n-1)$$

Exercice 26 *Soient* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements mutuellement indépendants.*
On note :

$$\limsup_{n\to+\infty}A_n=\bigcap_{p\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geq p}A_n \text{ et } \liminf_{n\to+\infty}A_n=\bigcup_{p\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq p}A_n$$

Montrer que :

1. *Si la série* $\sum\mathbb{P}(A_n)$ *converge, alors* $\mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n\to+\infty}A_n\right)=0$.

2. *Si la série* $\sum\mathbb{P}(A_n)$ *diverge, alors* $\mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n\to+\infty}A_n\right)=1$ *(loi du zéro-un de Kolmogorov).*

– III – Fonctions mesurables

Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est mesurable si, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Dans le cas où X, Y sont deux espaces topologiques et $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sont les tribus de Borel, une fonction mesurable de X dans Y est dite borélienne.

Une fonction continue est mesurable (i. e. borélienne).

Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si, et seulement si, $f^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}$.

La composée, la somme, le produit et une limite simple de fonctions mesurables est mesurable.

Les fonctions réglées de $[a, b]$ dans un espace de Banach sont mesurables (par exemples, les fonctions continues par morceaux et les fonctions monotones de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$).

Si $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}^+$ est mesurable, il existe alors une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs et une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties mesurables de X telles que $f = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ et :

$$\int_X f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mu(A_n) \leq +\infty$$

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est intégrable (ou sommable) si elle est mesurable et $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$.

Dans ce cas, on a :

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$.

L'ensemble des fonctions intégrables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel et l'application $f \mapsto \int_X f d\mu$ est une forme linéaire positive avec :

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu < +\infty$$

La mesure ℓ des intervalles réels se prolonge de manière unique en une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens, cette mesure étant invariante par translation. C'est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 27 *Nous allons vérifier que la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*
On désigne par $\mathcal{C}$ le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

1. *Vérifier que, pour toute classe d'équivalence $c \in \mathcal{C}$, on peut trouver un représentant x dans $[0, 1[$.*
   Pour tout $c \in \mathcal{C}$, on se fixe un représentant x_c de c dans $[0, 1[$ (axiome du choix) et on désigne par A l'ensemble de tous ces réels x_c.
2. *Montrer que les translatés $r + A$, où r décrit $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints et que :*
$$[0, 1] \subset \bigcup_{r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1, 2]$$
3. *En déduire que A n'est pas borélien et que ℓ ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*
4. *Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non mesurable ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu de Borel) telle que $|f|$ soit mesurable.*

Exercice 28 $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Montrer que* f *est mesurable si, et seulement si, la restriction de* f *à tout segment* $[a, b]$ *est mesurable.*

Exercice 29 *Soient* E *un espace vectoriel normé complet et* $a < b$ *deux réels.*
Montrer qu'une fonction réglée $f : [a, b] \to E$ *est borélienne.*

Exercice 30 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Montrer que sa dérivée* f' *est borélienne.*

Exercice 31

1. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *L'ensemble des réels* x *tels que la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *soit convergente est-il ouvert ? fermé ?*
2. *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$ *(*$\mathbb{R}$ *étant muni de la tribu borélienne).*
   Montrer que l'ensemble des éléments x *de* X *tels que la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *soit convergente est mesurable.*

Exercice 32 *Soient* $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ *deux espaces mesurables et* f *une application de* X *vers* Y.

1. *Montrer que la famille :*
$$\mathcal{C} = \left\{B \in \mathcal{B} \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$$
   est une σ*-algèbre.*
2. *On suppose que* $\mathcal{B}$ *est engendrée par une famille* $\mathcal{F}$ *de parties de* Y *(*$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$*).*
   Montrer que f *est mesurable si, et seulement si,* $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ *pour tout* $F \in \mathcal{F}$.

Exercice 33 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application continue et bijective,* $\mathbb{R}$ *étant muni de la tribu de Borel* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que la famille :*
$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid f(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$
   est une σ*-algèbre qui contient tous les intervalles fermés bornés.*
2. *Montrer que l'image par* f *de tout borélien de* $\mathbb{R}$ *est un borélien.*

Exercice 34 *Soient* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable et* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille de mesures sur* X *telle que pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *la suite* $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

1. *Montrer que, pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *la suite* $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un élément* $\mu(A)$ *de* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
2. *Montrer que l'application :*
$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \\ A & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) \end{array}$$
   définit une mesure sur X.

Exercice 35 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré avec* $\mu \neq 0$ *et* $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel.*

1. *Montrer que si* f *est une fonction mesurable de* X *dans* $\mathbb{R}$, *la fonction* $|f|$ *est alors mesurable.*
2. *En supposant qu'il existe des parties non mesurables dans* X, *donner un exemple de fonction* $f : X \to \mathbb{R}$ *non mesurable telle que* $|f|$ *soit mesurable.*
3. *En supposant qu'il existe des parties non mesurables dans* X, *donner un exemple de fonctions* $f : X \to \mathbb{R}$ *et* $g : X \to \mathbb{R}$ *non mesurables telles que* $f + g$ *et* fg *soient mesurables.*

4. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure vers une fonction mesurable* $f : X \to \mathbb{R}$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mu\left\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\right\} = 0$$

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure vers les fonctions mesurables* $f : X \to \mathbb{R}$ *et* $g : X \to \mathbb{R}$.

   (a) *Montrer que :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mu\left\{x \in X \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon\right\} = 0$$

   (b) *Montrer que* $f = g$ *presque partout.*

Exercice 36 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré, la mesure* μ *étant finie, et* f *une fonction mesurable de* X *dans* $\mathbb{R}^+$ *(*$\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel). On définit les suites* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de parties mesurables de* X *par :*

$$A_n = f^{-1}\left([n, +\infty[\right),\ B_n = f^{-1}\left([n, n+1[\right)$$

et g *est la fonction définie sur* X *par :*

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{1}_{B_n}$$

1. *Montrer que, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(B_k)$$

2. *Montrer que* $g \leq f < g + 1$.
3. *Montrer que* f *est intégrable si, et seulement si, la série* $\sum_{n\geq 1} n\mu(B_n)$ *est convergente.*
4. *Montrer que, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} k\mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - n\mu(A_{n+1})$$

5. *Montrer que la suite* $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et converge vers* 0.
6. *Montrer que* f *est intégrable si, et seulement si, la série* $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ *est convergente.*
7. *Le résultat précédent est-il valable dan le cas où* $\mu(X) = +\infty$ *?*

– IV – Intégration

Exercice 37 *On se place sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \ \mu(A) = \mathrm{card}(A) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Calculer $\int_{\mathbb{N}} x d\mu$ *pour toute suite réelle positive* $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *à valeurs complexes soit sommable.*

Exercice 38 *On se place sur* $(X, \mathcal{P}(X))$ *muni d'une mesure de Dirac* $\mu = \delta_x$, *où* $x \in X$ *est fixé.*
Calculer $\int_X f d\mu$ *pour toute fonction* $f : X \to \mathbb{R}^+$.

Exercice 39 *Soient* X, Y *deux espaces métriques munis de leur tribu borélienne respective. Montrer qu'une fonction* $f : X \to Y$ *qui est continue sur* X *privé d'un ensemble* D *dénombrable est borélienne.*

Exercice 40 *On se place sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, *où* λ *est la mesure de Lebesgue.*

1. *Montrer que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver un ouvert* $\mathcal{O}$ *dense dans* $\mathbb{R}$ *tel que* $\lambda(\mathcal{O}) < \varepsilon$.
2. *Montrer qu'une partie mesurable bornée de* $\mathbb{R}$ *est de mesure finie. La réciproque est-elle vraie ?*
3. *Montrer qu'une partie mesurable de* $\mathbb{R}$ *d'intérieur non vide est de mesure non nulle. La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Montrer qu'une partie mesurable* A *de* $[0,1]$ *de mesure égale à* 1 *est dense dans* $[0,1]$. *Réciproquement un ouvert dense de* $[0,1]$ *est-il de mesure égale à 1 ?*

Exercice 41 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré avec* $\mu \neq 0$, $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel et les fonctions considérées sont à valeurs réelles.*

1. *Montrer que si* f, g *sont deux fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$, *les fonctions* $f + g$ *et* fg *sont mesurables.*
2. *Montrer que la somme de deux fonctions intégrables est intégrable.*
3. *Le produit de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
4. *La composée de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
5. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable positive. Montrer que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe un réel* $\eta > 0$ *tel que :*
$$(A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < \eta) \Rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon$$
6. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Montrer que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe une partie mesurable* A *de* X *telle que* $\mu(A) > 0$ *et* $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ *pour tous* x, y *dans* A.
7. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable positive. Montrer que pour tout réel* $\alpha > 0$, *on a :*
$$\mu\left(f^{-1}([\alpha, +\infty[)\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu$$
8. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable positive. Montrer que* $\int_X f d\mu = 0$ *si, et seulement si,* f *est nulle presque partout.*
9. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable positive. Montrer que si* $\int_X f d\mu < +\infty$, *on a alors* $f(x) < +\infty$ *presque partout.*

10. *Soient* f, g *deux fonctions mesurables positives sur* X. *Montrer que si* $f = g$ *presque partout, alors* $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.
11. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une partie mesurable* A *de* X *telle que* $\mu(A) > 0$ *et* f *est bornée sur* A.
12. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable telle que* $f \neq 0$ *presque partout. Montrer qu'il existe une partie mesurable* A *de* X *telle que* $\mu(A) > 0$ *et* $|f|$ *est minorée sur* A *par une constante strictement positive.*
13. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable. Montrer que si* $\int_A f d\mu = 0$ *pour toute partie* A *mesurable dans* X, *alors la fonction* f *est nulle presque partout.*

Exercice 42 *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable.*

1. *Montrer que s'il existe une fonction intégrable* $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ *telle* $|f| \leq \varphi$ *presque partout, la fonction* f *est alors intégrable.*
2. *Montrer que si* f *est bornée presque partout et* $\mu(X)$ *est fini, la fonction* f *est alors intégrable. En particulier, une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *qui est mesurable et bornée presque partout est intégrable.*

Exercice 43

1. *Soient* I *un intervalle réel non réduit à un point et* $a \in I$.
   Pour tout $x \in I$, *on désigne par* $I_{a,x}$ *l'intervalle fermé d'extrémités* a *et* x.
   On se donne une fonction mesurable bornée, $f : I \to \mathbb{R}$ *et on désigne par* F *la fonction définie sur* I *par :*
   $$\forall x \in I,\ F(x) = \int_{I_{a,x}} f(t)\, dt$$
   soit :
   $$F(x) = \begin{cases} \int_a^x f(t)\, dt \text{ si } a \leq x \\ \int_x^a f(t)\, dt \text{ si } x \leq a \end{cases}$$
   Montrer que F *est lipschitzienne (donc uniformément continue) sur* I *et qu'elle est dérivable en tout point* $x_0 \in I$ *où la fonction* f *est continue avec* $F'(x_0) = f(x_0)$.
2. *Montrer que si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction dérivable de dérivée bornée, alors* f' *est intégrable sur* $[a, b]$ *et :*
   $$\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$$
3. *En considérant la fonction* f *définie sur* $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *par* $f(0) = 0$ *et :*
   $$f(x) = \frac{x}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
   pour $x \neq 0$, *vérifier que le résultat précédent n'est plus valable pour* f *dérivable de dérivée non bornée.*