Agrégation externe de Mathématiques

Composition d'Analyse, Année 1996

Sujet 6727

Corrigé par **Éric Van der Oord**, auteur du problème

Exemples d'extensions à un espace vectoriel normé E d'applications linéaires continues définies sur un sous-espace F. Majoration de la borne inférieure des projecteurs continus sur F en fonction de sa dimension et extremums de volumes d'ellipsoïdes inclus dans la boule unité (théorème de John).

Corrigé succinct de l'épreuve d'analyse par Éric Van der Oord, auteur du problème

Partie I

I.A.1 °) C'est du cours.

I.A.2 °) Application classique du théorème de Pythagore.

I.B.3 °) Soient $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ les coordonnées de l'image $y = u(x)$ d'un vecteur x de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tel que $\|x\|_\infty = 1$. Puisque $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ on a, pour chaque i, $|y_i| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j|$ avec égalité si, par exemple, $x_j = \mathrm{sign}(a_{ij})$ pour tout j. On en déduit la formule en considérant la ligne pour laquelle $\sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j|$ est maximum.

I.B.4 °a) On doit avoir ici $y_i = x_i - \lambda\alpha_i$, λ étant déterminé par la condition $\sum_{i=1}^3 y_i = 0$, d'où $\lambda = \sum_{i=1}^3 x_i$. On obtient donc la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & 1-\alpha_2 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & -\alpha_3 & 1-\alpha_3 \end{pmatrix}$$

d'où la valeur annoncée pour $p_{H,D}$.

I.B.4 °b) La fonction valeur absolue est convexe (par exemple comme sup des deux fonctions affines $t \mapsto t$ et $t \mapsto -t$). Donc $t \mapsto |1-t|$ est convexe et φ est somme de fonctions convexes, donc convexe. On en déduit :

$$\varphi\Big(\frac{1}{3}\Big) = \varphi\Big(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}\Big) \leqslant \frac{\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2)+\varphi(\alpha_3)}{3} \leqslant \|p_{H,D}\|.$$

avec égalité pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$.
Comme D décrit l'ensemble des droites supplémentaires de H, on a donc $\pi(H, l_3^\infty) = \frac{4}{3}$.

I.B.4 °c) La relation $s = 2p - \mathrm{Id}$ conduit à la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 1-2\alpha_1 & -2\alpha_1 & -2\alpha_1 \\ -2\alpha_2 & 1-2\alpha_2 & -2\alpha_2 \\ -2\alpha_3 & -2\alpha_3 & 1-2\alpha_3 \end{pmatrix}$$

et l'on considère la fonction convexe $\psi(x) = |1-2x| + 4|x|$, pour trouver $\sigma(H, l_3^\infty) = \frac{5}{3}$.

I.B.5 °). On trouve de même, avec $\varphi(x) = |1-x| + (n-1)|x|$ et $\psi(x) = |1-2x| + 2(n-1)x|$, que $\pi(H_n, l_n^\infty) = \frac{2n-2}{n}$ et $\sigma(H_n, l_n^\infty) = \frac{3n-4}{n}$. Notons pour la suite, cf. **(II.A.3°c)**, que ces quantités tendent respectivement vers 2 et 3 quand n tend vers l'infini.

Partie II

II.A.1 °a) En dimension finie, ψ est continue, et la boule unité est compacte.

II.A.1 °b) Le maximum est strictement positif, donc e est libre. Si $\|e_i\| < 1$, la valeur de ψ sur la suite $(e_j/\|e_j\|)$ serait strictement plus grande que $\psi(e)$, ce qui est absurde.
Comme $e_i^*(e_i) = 1$, il est clair que $\|e_i^*\| \geqslant 1$. D'autre part on a, par définition de e, pour tout $x \in B_E$, $e_i^*(x) = \left|\frac{1}{\psi(e)}\psi(e_1, \ldots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \ldots, e_n)\right| \leqslant 1$; par conséquent $\|e_i^*\| = 1$.

II.A.1 °c) Soient alors G et H des e.v.n. tels que $G \subset H$, et $u \in L(G, E)$. Chaque forme linéaire $e_i^* \circ u$ est de norme au plus $\|u\|$, et possède un prolongement φ_i à H, lui aussi de norme au plus $\|u\|$.
En posant $v(y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(y) e_i$, on définit un prolongement de u à H tel que $\|v\| \leqslant n\|u\|$.

II.A.2 °a) Si $x = 0$, x^* est arbitraire. Dans le cas contraire, on applique le théorème de Hahn-Banach pour étendre à E la forme linéaire $\lambda x \mapsto \lambda\|x\|$ définie sur la droite $\mathbb{R}x$.

II.A.2 °b) Classique.

II.A.2 °c) On a, en appliquant ce qui précède :

$$\|u\| = \sup_{(y^*,x) \in B_{F'} \times B_E} \langle y^*, u(x)\rangle = \sup_{(y^*,x) \in B_{F'} \times B_E} \langle {}^t u(y^*), x\rangle = \|{}^t u\|.$$

II.A.3 °a) Soit s une symétrie par rapport à E, parallèlement à E. Il est clair que ${}^t s$ est une symétrie de F'. Or E est l'image de $s + \mathrm{Id}_F$, donc son orthogonal est le noyau de ${}^t s + \mathrm{Id}_{F'}$. De même E_1 est l'image de $s - \mathrm{Id}_F$, et son orthogonal est le noyau de ${}^t s - \mathrm{Id}_{F'}$.
Par conséquent ${}^t s$ est la symétrie par rapport à $E_1^\perp$, parallèlement à $E^\perp$, et $-{}^t s$ est la symétrie par rapport à $E^\perp$, parallèlement à $E_1^\perp$. Enfin, lorsque E_1 varie, son orthogonal décrit l'ensemble des supplémentaires de $E^\perp$, d'où le résultat.

II.A.3 °b) On a donc $\delta(E, F) = \sigma(E^\perp, F')$. D'autre part la relation $s = 2p - \mathrm{Id}$ donne $\pi(E, F) \leqslant \frac{1}{2}\sigma(E, F) + \frac{1}{2}$ et $\sigma(E^\perp, F') \leqslant 2\,\pi(E^\perp, F') + 1$. On obtient la première inégalité. L'autre s'en déduit par bidualité, χ étant une isométrie bijective en dimension finie.

II.A.3 °c) Si E est un hyperplan, son orthogonal est une droite, donc $\pi(E^\perp, F') = 1$ et $\sigma(E^\perp, F') \leqslant 3$. On en déduit $\pi(E, F) \leqslant 2$ et $\sigma(E, F) \leqslant 3$. Le calcul du **I.B.5** montre que ces majorations, a priori pessimistes, ne peuvent pas être améliorées.

II.B.4 °) On applique la définition du type $\mathcal{P}_\lambda$ avec l'application identique de E dans lui-même.

II.B.5 °a) Il suffit d'appliquer le **b** *infra* avec $X = \{1, 2, \ldots, n\}$.

II.B.5 °b) Soient G et H des e.v.n. tels que $G \subset H$, u une application continue de G dans $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Pour chaque $x \in X$, la forme linéaire $\alpha_x : t \mapsto u(t)(x)$ se prolonge en une forme linéaire β_x sur H, telle que $\|\beta_x\| \leqslant \|\alpha_x\| \leqslant \|u\|$. L'application $v\ : t' \mapsto (x \mapsto \beta_x(t'))$ est un prolongement de u et vérifie bien $\|v\| \leqslant \|u\|$.

II.B.5 °c) On utilise le plongement canonique χ de E dans E'', en remarquant que la norme de E'' est la norme de la convergence uniforme sur $B_{E'}$ *i.e.* $E'' \subset \mathcal{B}(B_{E'}, \mathbb{R})$.

II.B.6°) Supposons $\omega(E) = \mu$, et soit u un plongement de E dans un e.v.n. F. Il est clair que $\omega(u(E)) = \mu$, et le **II.B.4** montre que pour tout $\lambda > \mu$ on a $\pi(u(E), F) \leqslant \lambda$ donc, en passant à la borne inférieure, $\pi(u(E), F) \leqslant \mu$.
Réciproquement, supposons qu'il existe un plongement u de E dans un e.v.n. F de type $\mathcal{P}_1$, avec $\pi(u(E), F) = \mu$. Il est clair qu'on peut se ramener au cas où $u = \mathrm{Id}_E$. Soient alors G et H des e.v.n. tels que $G \subset H$, et $\alpha \in L(G, E)$. En particulier α est à valeurs dans F, donc il existe $\beta \in L(H, F)$ tel que $\|\beta\| \leqslant \|\alpha\|$ et que la restriction de β à G ait même graphe que α.
Pour tout $\lambda > \mu$ on peut trouver un projecteur π de F sur E tel que $\|\pi\| \leqslant \lambda$, et $\pi \circ \beta$ est un prolongement de α à H de norme au plus $\lambda\|\alpha\|$. On a donc $\omega(E) \leqslant \mu$, donc $\omega(E) = \mu$ en appliquant le **II.B.4**.

Partie III

III.B.1°a) La nécessité de la condition est évidente.
Si elle est vérifiée, on a $p \circ p = p \circ (q \circ p) = (p \circ q) \circ p = q \circ p = p$. L'application linéaire p est donc un projecteur, et il en est de même pour q. Comme les relations entraînent évidemment $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$, la condition est suffisante.

III.B.1°b) On applique ce qui précède à $p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_F + s)$ et $q = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_F + s') = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_F + s + v)$. La condition nécessaire et suffisante pour que s et $s' = s + v$ soient des symétries par rapport au même sous-espace vectoriel est donc

$$\begin{aligned} p \circ q = q \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\big(\mathrm{Id}_F + 2s + s^2 + v + s \circ v\big) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Id}_F + s + v\big), \\ q \circ p = p \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\big(\mathrm{Id}_F + 2s + s^2 + v + v \circ s\big) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Id}_F + s\big), \end{aligned}$$

soit encore $s^2 - \mathrm{Id}_F - v + s \circ v = s^2 - \mathrm{Id}_F + v + v \circ s = 0$, ce qui, sous l'hypothèse $s^2 = \mathrm{Id}_F$, équivaut aux conditions annoncées $s \circ v = v$ et $v \circ s = -v$.
Pour montrer que $\mathrm{tr}(v) = 0$, on peut remarquer que $v = s' - s$ et que s, s' ont les mêmes valeurs propres ± 1 avec les mêmes multiplicités, ou que $s \circ v$ et $v \circ s$ ont même trace, de sorte que $\mathrm{tr}(v) = -\mathrm{tr}(v)$ ...

III.B.2°a) Il est clair que $s^2 = \mathrm{Id}$ et que s est symétrique (${}^t s = s$). L'égalité demandée résulte du calcul du coefficient c_{ii} du produit $(s+v) \circ {}^t s = (s+v) \circ s = \mathrm{Id} - v$, de l'hypothèse $|s_{ij}| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et de l'inégalité $\sum_j |s_{ij} + v_{ij}| \leq \|s + v\|$ impliquée par la formule du **I.B.3**.

III.B.2°b) Comme $\sum_i v_{ii} = \mathrm{tr}(v) = 0$, on peut trouver i tel que $v_{ii} \leqslant 0$.

III.B.3°) Calcul par blocs facile.
La dimension de E_{A_0} est 1. Pour $k \geqslant 1$, la trace de A est nulle, donc la dimension de E_{A_k} est 2^{k-1}.

III.B.4°a) S'il existe un projecteur continu sur E, E est fermé comme sous-espace propre d'un endomorphisme continu.

III.B.4°b) F_k est isométrique à $l^\infty_{2^k}$ donc contient, d'après la question précédente, un sous-espace vectoriel E_k tel que $\pi(E_k, F_k) \geqslant \frac{2^{k/2}-1}{2} = a_k$.
S'il existait un projecteur continu p de l^∞ sur E, la restriction de p à F_k, composée avec le

projecteur canonique de l^∞ sur F_k, serait un projecteur sur E_k et devrait avoir une norme au moins égale à a_k. On aurait $a_k \leqslant \|p\|$ pour tout k, ce qui est absurde.
A fortiori $\omega(E) = \infty$.

Partie IV

IV.A.1 °a) Soient u_q l'endomorphisme autoadjoint canoniquement associé à q, et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ le spectre de u_q. En calculant $I(q)$ dans une base orthonormée de vecteurs propres pour u_q, on trouve

$$I(q) = \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_k t^2}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{I_0}{\det(u_q)} & \text{si } q \in Q_+ \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $I_0 = \big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\big)^n = \pi^{n/2}$ est une constante ; cette formule sera utile par la suite.

IV.A.1 °b) La partie $C = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,,\ t \geqslant q(x)\}$ est fermée donc mesurable, et la fonction $(x,t) \mapsto e^{-t}$ est continue et positive. On peut donc appliquer le théorème de Fubini pour calculer

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{q(x)}^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}x = \iint_{t \geqslant q(x)} e^{-t}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \Big(\int_{x \in \mathbb{R}^n,\, q(x) \leqslant t}^{+\infty} \mathrm{d}x\Big) = \int_0^{+\infty} v\big(\sqrt{t}\mathcal{E}_q\big)\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = v(\mathcal{E}_q) \int_0^{+\infty} t^{n/2} e^{-t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

compte tenu du fait que $v(\lambda A) = \lambda^n v(A)$ pour toute partie mesurable A.

IV.A.1 °c) La formule $I(q) = \frac{I_0}{\sqrt{\det(u_q)}}$ montre que la fonction I est continue sur Q_+ et tend vers l'infini à la frontière de Q_+. La fonction I est donc aussi continue sur Q.

IV.A.2 °a) Il facile de vérifier que K est convexe, bornée et fermée. L'équivalence des normes en dimension finie montre que, pour tout élément q de Q_+, la relation $\varepsilon q \in K$ est vérifiée si ε est assez petit, donc $K \cap Q_+$ n'est pas vide.

IV.A.2 °b) La fonction continue I atteint sur le compact K un minimum. Comme I prend dans K des valeurs finies, ce minimum est fini.

IV.A.2 °c) L'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui s'écrit ici $\big(I\big(\frac{q+q_N}{2}\big)\big)^2 \leqslant I(q)I(q_N)$, est en fait une égalité, puisque $I\big(\frac{q+q_N}{2}\big) \geqslant I(q_N) = I(q)$. On en déduit que les fonctions continues e^{-q} et e^{-q_N} sont proportionnelles, donc égales, puisqu'elles prennent la même valeur en 0. En prenant les logarithmes, on voit finalement que $q = q_N$.

IV.A.3 °a) L'ellipsoïde $\{x \in \mathbb{R}^n\,,\ q_n(x) = 1\}$ est compact ; comme on est en dimension finie, la norme N est continue, donc atteint un maximum sur cet ellipsoïde.

IV.A.3 °b) φ, composée de la fonction convexe N, et d'une fonction affine, est convexe.
Par définition de a, on dispose, pour tout réel t, de l'inégalité :

$$N(a + ty) \leqslant N(a)\sqrt{q_N(a + ty)} = N(a)\sqrt{1 + t^2 q_N(y)}$$

(l'inégalité de gauche provient du fait que $a_t = (a+ty)/\sqrt{q_N(a+ty)}$ vérifie $q_N(a_t) = 1$ et donc $N(a_t) \leqslant N(a)$, et l'égalité de droite résulte du théorème de Pythagore, puisque $y \in H = a^\perp$).
L'inégalité $\varphi(t) \leqslant \varphi(0) + O(t^2)$ est donc vérifiée lorsque t tend vers 0, ce qui entraîne $\varphi'_d(0) \leqslant 0 \leqslant \varphi'_g(0)$. D'autre part, la convexité de φ impose l'inégalité $\varphi'_d(0) \geqslant \varphi'_g(0)$. Finalement $\varphi'(0) = 0$, et φ présente un minimum en 0.
On en déduit que l'inégalité $N(a) \leqslant N(a+y)$ est vraie pour tout y de H, ce qui montre que la norme (associée à N) de π_a est 1.

IV.A.3 °c) On vérifie facilement la relation $\det(u_q) = (1+\varepsilon)(1-\delta)^{n-1}\det(u_{q_N})$, qui entraîne la première relation demandée.
L'égalité $q(x) = (1-\delta)q_N(x) + (\varepsilon+\delta))q_N(\pi_a(x))$ est claire. Par hypothèse $q_N(x) \leqslant N^2(x)$. Enfin

$$q_N(\pi_a(x)) = \frac{N^2(\pi_a(x))}{N^2(a)} = \frac{N^2(x)}{N^2(a)}$$

d'après le b). On obtient donc bien l'inégalité voulue.

IV.A.3 °d) Supposons $N^2(a) > n$. Pour $\varepsilon = (N^2(a)-1)\delta$ on aura $q \in K$ d'après l'inégalité précédente, ainsi que le développement limité

$$\frac{I(q)}{I(q_N)} = 1 - \frac{(N^2(a)-1)-(n-1)}{2}\delta + O(\delta^2),$$

et ceci, avec un coefficient de δ strictement positif. Ce développement limité contredit, pour δ assez petit, la minimalité de q_N.

IV.A.4 °) Soient N la norme de F, N_1 une norme euclidienne sur F vérifiant les inégalités $N_1 \leqslant N \leqslant \sqrt{n}\,N_1$. Pour tout sous-espace vectoriel E de F, soit s la symétrie orthogonale (pour N_1) par rapport à E. Cette symétrie s vérifie

$$\forall x \in E, \quad N(s(x)) \leqslant \sqrt{n}\,N_1(s(x)) = \sqrt{n}\,N(x),$$

donc $\sigma(E,F) \leqslant \sqrt{n}$ et $\pi(E,F) \leqslant \frac{\sqrt{n}+1}{2}$. La partie III a montré que la majoration de σ était optimale, et celle de π optimale à 1 près (on peut montrer qu'elle est effectivement optimale dans certains cas).

IV.B.5 °) Lorsque $N = \|\ \|_\infty$, la forme quadratique q_N, étant unique, doit être invariante par le groupe des isométries du cube. Sa matrice dans la base canonique est nécessairement diagonale (symétries $x_i \mapsto -x_i$). On voit ensuite qu'elle est scalaire (permutations des vecteurs de base). L'ellipsoïde de John est une sphère, et $q_{\|\ \|_\infty}(x) = \frac{1}{n}\|x\|_2^2$. On voit que, dans ce cas, l'encadrement du théorème de John ne peut pas être amélioré.
Si $q \in Q_+$ et si $q \leqslant \|\ \|_\infty^2 \leqslant Cq$, alors

$$2^n \geqslant \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} q(\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \cdots + \varepsilon_n e_n) = 2^n\big(q(e_1) + q(e_2) + \ldots + q(e_n)\big) \leqslant 2^n \frac{n}{C},$$

donc $C \geqslant n$.

IV.B.6 °a) $|\det|(G)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$, compact, donc réduit à $\{1\}$. Les éléments de G conservent donc les volumes.

IV.B.6 °b) Enveloppe supérieure de normes, N est une semi-norme qui ne s'annule qu'en 0. Le groupe G étant compact, N est finie, c'est donc une norme.
N est invariante par G par construction, donc q_N également (l'image par G d'un ellipsoïde de volume minimum contenant la boule unité de N est un ellipsoïde de même volume contenant cette boule, donc le même ellipsoïde, par unicité).

IV.B.7 °) Pour cette question, l'initiative est laissée aux candidats. Il semble naturel de procéder par dualité, le produit scalaire canonique $(\cdot|\cdot)$ de $\mathbb{R}^n$ permettant d'associer à toute norme N une norme duale N^* définie par

$$N^*(y) = \sup_{N(x)\leqslant 1} (y|x).$$

La preuve devrait alors dégager les faits suivants :

- Si $N_1 \leqslant N_2$ alors $N_1^* \geqslant N_2^*$;
- Si la norme $N(x) = \sqrt{q(x)}$ est euclidienne, alors il en est de même pour $N^*(x) = \sqrt{q^*(x)}$. En effet s'il existe un endomorphisme u (qu'on peut supposer autoadjoint) tel que $N(x) = \|u(x)\|_2$, alors

$$N^*(y) = \sup_{\|u(x)\|_2} (y|x) = \sup_{\|z\|_2} (y|u^{-1}(z)) = \sup_{\|z\|_2} (u^{-1}(y)|z) = \|u^{-1}(y)\|_2 \;;$$

- On a $v(\mathcal{E})_q)v(\mathcal{E}_{q^*}) = \text{Cste}$, ce qui permet de passer des ellipsoïdes contenants de volume minimum aux ellipsoïdes contenus de volume maximum.

— o — o — o —

Agrégation externe de Mathématiques

Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse (session 1996)

Généralités

Le problème proposait aux candidats l'étude de certains aspects de la géométrie des espaces de Banach.

Il est bien connu que toutes les normes qu'on peut définir sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. Ce résultat topologique rend triviale l'étude *qualitative* des normes en dimension finie. Il ne doit pas cacher, cependant, la grande richesse de l'étude *quantitative* de ces normes. Ainsi, par exemple, le diamètre de l'espace des normes sur $\mathbb{R}^n$ tend vers l'infini avec n, et ce résultat quantitatif annonce l'existence d'espaces de Banach de dimension infinie non isomorphes.

La géométrie de la boule unité a notamment des conséquences, importantes en théorie de l'approximation, sur la norme des projecteurs. C'est l'étude de cette dernière que le problème se donnait pour but ; et le thème de la comparaison entre le cas euclidien et le cas de l_n^∞, qui sont, en un certain sens, des cas extrêmes, revenait constamment.

La première partie introduisait progressivement, au moyen d'exemples simples, le sujet de la norme des projecteurs. La seconde partie, en revanche, était consacrée à des généralités plus abstraites. Dans la troisième partie ont revenait à des calculs élémentaires, pour obtenir des minorations (dues à SOBCZYK) dans le «pire» des cas. Enfin la dernière partie prenait résolument le point de vue géométrique, en proposant une démonstration simple (empruntée à une note inédite de Jean Saint-Raymond) du théorème de John. Ce dernier aurait pu ouvrir la voie au théorème de KADEC et SNOBAR (tout espace vectoriel normé de dimension finie n est de type $\mathcal{P}_{\sqrt{n}}$; il n'était cependant pas possible d'inclure ce dernier résultat dans l'énoncé tout en gardant à l'épreuve une longueur et une difficulté raisonnables.

Bibliographie :

[1] F. JOHN : *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions.* Courant anniversary volume. Interscience (1948). New York, pp 187-204.

[2] M. I. KADEC et M. G. SNOBAR : *Certain functionals on the Minkowski compactum*, Mat. Zametki, 10 (1971), 453-658 (en russe).

[3] G. PISIER: *Factorisation of linear operators and geometry of Banach spaces.* Conference board of the mathematical sciences (CBMS) 60, 1986.

[4] A. SOBCZYK : *Projections in Minkowski and Banach spaces*, Duke. Math. J. vol 8 (1941) pp. 78-106.

Remarques des correcteurs

Le sujet ne mettait en œuvre que le programme de base de la maîtrise. Malgré ce parti pris de simplicité – ou peut-être à cause de lui – une proportion importante de copies décevantes montre que les candidats ont été déconcertés par le point vue géométrique adopté.

Beaucoup n'ont pas compris que la plupart du temps *il ne faut pas* employer dans ce problème le théorème d'équivalence des normes, et cèdent à la tentation de faire comme si tous les espaces étaient euclidiens.

Pour en finir avec les considérations générales, l'enchaînement des questions n'a pas toujours été très bien compris.

Partie I

I.A.1°) Curieusement, cette question très élémentaire a reçu relativement peu de réponses correctes. Il s'agissait, bien entendu, de constater l'existence, dans un espace euclidien, de bases orthonormées. Beaucoup de candidats, ayant sans doute mal lu l'énoncé, se sont contentés d'invoquer l'équivalence des normes.

I.A.2°) La nécessité de la condition $E \perp E_1$ n'a été établie que par une minorité de candidats. Signalons qu'un dessin montrant la décomposition d'un vecteur non nul de E selon E_1 et $E_1^\perp$, et commenté de manière claire, pouvait constituer, parmi d'autres, une preuve satisfaisante.

L'existence de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel n'est pas évidente pour tout le monde !

I.B.3°) La norme $\|u\|$ étant définie comme borne supérieure, il fallait démontrer que le majorant fourni par l'énoncé était le plus petit possible.

I.B.4°a) Plutôt que d'entrependre des calculs de changement de base assez laborieux, on pouvait remarquer, soit que si p est un projecteur sur un hyperplan, la détermination des coordonnées de l'image d'un vecteur se ramène à la résolution d'une équation linéaire à une inconnue, soit que $\mathrm{Id}_E - p$, étant de rang 1, est représenté par une matrice très simple.

I.B.4°b) Beaucoup de démonstrations erronées de la convexité de φ croyaient pouvoir se fonder sur la positivité (évidente) de la dérivée seconde. Malheureusement ce critère ne s'applique pas aux fonctions de classe C^2 par morceaux.

I.B.4°c) Bien fait en général par les candidats ayant fait la question précédente. Mais certains pensent que toutes les symétries sont isométriques.

Partie II

II.A.1°a) Souvent bien fait, ou complètement ignoré.

II.A.1°b) La partie difficile (norme de e_i^*) n'a reçu que fort peu de réponses correctes.

II.A.1°c) Le rapport avec ce qui précède est souvent mal vu.

II.A.2°a) Un candidat sur deux environ, parmi ceux ayant abordé cette question, donne une solution satisfaisante. Beaucoup croient que tout projecteur sur une droite est de norme 1.

II.A.3°a) Fait en général partiellement. Il fallait éviter de raisonner comme si l'ensemble des symétries était un sous-espace vectoriel de $L(F, F)$ et tenir compte du fait qu'une symétrie n'est pas déterminée par l'ensemble de ses points fixes.

II.A.3°b) N'a reçu que peu de réponses.

II.A.3°c) N'a reçu que très peu de réponses.

II.B.4°) Parfois bien fait.

II.B.5°a) Parfois bien fait.

II.B.5°b) Étrangement, cette question a paru aux candidats plus difficile que la précédente.

II.B.5°c) Malgré l'indication, cette question a déjoué les efforts d'un grand nombre de candidats ayant fait ce qui précède.

II.B.6°) Très rarement fait proprement et complètement.

Partie III

III.1°a) On oublie souvent de vérifier que les relations $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ entraînent $p^2 = p$ et $q^2 = q$. Par ailleurs d'assez nombreux candidats croient établir que $p = q$!

III.1°b) Le lien avec le a) n'est, la plupart du temps, pas vu, ce qui conduit à des vérifications laborieuses. A noter l'erreur curieusement fréquente $\mathrm{tr}(v^2) = (\mathrm{tr}(u))^2$.

III.2°a) s_{ji} devient parfois s_{ij} par magie.

III.3°) Souvent bien fait, sauf en ce qui concerne la dimension de E_{A_k} qui fait souvent l'objet d'estimations hasardeuses.

III.4°) Très rarement abordée.

Partie IV

Cette partie a été peu abordée, sinon par des candidats grapilleurs à la recherche de quelques points.

IV.A.1°a) On a lu souvent que la fonction 1 était intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

IV.A.1°b) Parfois bien traitée.

IV.A.1°c) Trop souvent mal traitée.

IV.A.2°a) Halte fréquente des glaneurs.

IV.A.2°b) Le lien avec la compacité est vu, mais les valeurs infinies et la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ ignorées.

La fin du problème a été en général bien traitée par les – bons – candidats qui l'ont abordée, à l'exception du **IV.A.3.b**.

Citons enfin deux confusions, heureusement très rares, mais surprenantes au niveau de l'Agrégation, et qui ont donné lieu à des développements fantaisistes : celle entre les espaces euclidiens et les anneaux euclidiens ; et celle entre les formes n-linéaires alternées et les séries alternées.

— **o** — **o** — **o** —