Chapitre 5

Suites et séries de fonctions

Pour ce chapitre, D est un ensemble non vide, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et on s'intéresse aux suites d'éléments de l'espace vectoriel E^D des fonctions de D dans E. Cette étude sera complétée dans le cas particulier où D est un intervelle réel en exploitant les propriétés liées à l'ordre sur $\mathbb{R}$ (voir le chapitres 6 et 7).

5.1 Suites de fonctions

Définition 5.1. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E^D *converge simplement* sur D vers une fonction $f \in E^D$, si pour tout $x \in D$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans E vers $f(x)$.

La convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur D se traduit par :

$$\forall x \in D,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*},\ \exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq n_{x,\varepsilon},\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

La limite simple d'une suite de fonctions bornées n'est pas nécessairement bornée. Par exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = \min(x, n)$ sur $\mathbb{R}^+$ converge simplement vers la fonction non bornée $f : x \mapsto x$, chaque fonction f_n étant bornée.

Des propriétés relatives aux suites d'éléments de E (voir le paragraphe 3.2), on déduit facilement les propriétés suivantes où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de fonctions dans E^D qui convergent simplement sur D vers f et g respectivement :

- la suite de fonctions $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers $\|f\|$;
- pour tous scalaires λ et μ, la suite de fonctions $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers $\lambda f + \mu g$;
- dans le cas où E est une algèbre normée (définition 3.6), la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers fg ;
- si F est un espace normé (ou un espace métrique) et $g : E \to F$ une fonction continue, alors la suite de fonctions $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers $g \circ f$.

Exemple 5.1 *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}^+$ *vers la fonction* f *définie par* $f(0) = 0$ *et* $f(x) = 1$ *pour* $x > 0$. *Pour* $\varepsilon \in]0,1[$ *et* $x > 0$ *donnés, on aura* $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{1+nx} < \varepsilon$ *dès que* $nx > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, *soit pour* $n \geq n_{x,\varepsilon} = \left[\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon x}\right] + 1$. *Supposons qu'il existe un entier* n_ε *indépendant de* $x \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *pour tout* $n \geq n_\varepsilon$. *Dans ce cas, on a* $\dfrac{1}{1+nx} < \varepsilon$ *pour tous* $x > 0$ *et* $n \geq n_\varepsilon$ *et faisant tendre* x *vers* 0 *pour* n *fixé, on aboutit à* $1 \leq \varepsilon$, *ce qui est contraire à notre hypothèse de départ sur* ε. *Il est donc impossible de trouver un tel entier* n_ε *valable pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$. *On dit dans ce cas, que la convergence n'est pas uniforme sur* $\mathbb{R}^+$.

L'exemple précédent nous conduit à la définition suivante.

Définition 5.2. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E^D *converge uniformément* sur D vers une fonction $f \in E^D$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*},\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in D,\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

Pour les fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles, la convergence uniforme se traduit graphiquement en disant que pour $n \geq n_\varepsilon$ le graphe de f_n est dans une bande de largeur 2ε symétrique par rapport au graphe de f (faire un dessin).

Le résultat qui suit nous donne un critère permettant de justifier une non convergence uniforme.

Théorème 5.1.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction* f *sur* D, *alors pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* D, *la suite* $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.

Démonstration Résulte des inégalités $\|f_n(x_n) - f(x_n)\| \leq \|f_n - f\|_\infty$ valables pour tout $n \geq n_1$, l'entier n_1 étant assez grand. ■

Pour montrer la non convergence uniforme, il suffit donc de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, en supposant bien sûr que la convergence simple vers f ait été prouvée.

Exemples 5.1

1. *En reprenant l'exemple de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$, *on a* $\left|f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) - f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| = \dfrac{1}{2} \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *donc la convergence de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* f *n'est pas uniforme sur* $\mathbb{R}^+$.
2. *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ *converge simplement vers la fonction* $f : x \mapsto e^x$ *(pour* $x = 0$, *c'est clair et pour* $x \neq 0$, *on*

a pour n *assez grand de sorte que* $1+\dfrac{x}{n}>0$, $\ln\left(f_n\left(x\right)\right)=n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\backsim}x$*)* *et la convergence n'est pas uniforme puisque :*

$$\left|f_n\left(n\right)-f\left(n\right)\right|=e^n-2^n=e^n\left(1-\left(\frac{2}{n}\right)^n\right)\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$$

Il est clair que la convergence uniforme implique la convergence simple. L'exemple 5.1 nous dit que la réciproque est fausse. Dans le cas particulier où D est un compact et la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue (définition 2.22), le théorème 2.38 nous dit que la convergence simple équivaut à la convergence uniforme.

Théorème 5.2.

Soient K *un compact d'un espace normé (ou métrique)* F *et* $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite équicontinue dans* $\mathcal{C}^0\left(K,E\right)$. *Cette suite converge uniformément sur* K *si, et seulement si, elle converge simplement.*

Démonstration Voir la démonstration du théorème 2.38. ■

Dans le cas d'une suite de fonctions définies sur un compact et à valeurs réelles, le théorème de Dini qui suit nous dit qu'avec de bonnes hypothèses, la convergence simple est équivalente à la convergence uniforme.

Théorème 5.3. Dini

Soient K *un compact d'un espace normé (ou métrique)* F, $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante dans* $\mathcal{C}^0\left(K,\mathbb{R}\right)$ *(*i. e. *pour tout* $x\in K$, *la suite réelle* $\left(f_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante) et* $f\in\mathcal{C}^0\left(K,\mathbb{R}\right)$. *Cette suite converge uniformément vers la fonction* f *sur* K *si, et seulement si, elle converge simplement vers* f.

Démonstration La condition nécessaire est acquise sans trop d'hypothèses.

Pour la condition suffisante, on peut donner trois démonstrations.

Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante dans $\mathcal{C}^0\left(K,\mathbb{R}\right)$ qui converge simplement vers une fonction continue $f:K\to\mathbb{R}$.

Démonstration utilisant la caractérisation de Borel-Lebesgue des compacts (téorème 2.18).

On se donne un réel $\varepsilon>0$. Les fonctions f_n et f étant continues sur K, les ensembles :

$$\mathcal{O}_{n,\varepsilon}=\left\{x\in K,\ \left|f\left(x\right)-f_n\left(x\right)\right|=f\left(x\right)-f_n\left(x\right)<\varepsilon\right\}$$

sont ouverts pour tout $n\in\mathbb{N}$ (chaque suite $\left(f_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant en croissant vers $f\left(x\right)$, on a $f\left(x\right)\geq f_n\left(x\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$). La suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on a $\mathcal{O}_{n,\varepsilon}\subset\mathcal{O}_{n+1,\varepsilon}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. La suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant simplement convergente vers f, on a $K=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_{n,\varepsilon}$ (pour tout $x\in K$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n\left(x\right)=f\left(x\right)$, donc il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\left|f\left(x\right)-f_n\left(x\right)\right|<\varepsilon$) et de ce recouvrement ouvert du compact K, on extrait un sous recouvrement fini $K = \bigcup_{k=1}^{r} \mathcal{O}_{n_k,\varepsilon} = \mathcal{O}_{n_r,\varepsilon}$ en choisissant la suite $(n_k)_{1\leq k\leq r}$ croissante, ce qui implique que pour tout entier $n \geq n_r$ et tout $x \in K$, on a $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{n_r}(x) < \varepsilon$, ce qui nous dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur K.

Démonstration utilisant la caractérisation de Bolzano-Weierstrass des compacts (définition 2.14).

Pour tout $x \in K$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers $f(x)$. On a donc $f(x) - f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in K$ et tout $n \in \mathbb{N}$. De la continuité des fonctions f_n sur le compact K, on déduit alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in K,\ \|f - f_n\|_\infty = f(x_n) - f_n(x_n)$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|f - f_{n+1}\|_\infty = f(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) \leq \|f - f_n\|_\infty$$

c'est-à-dire que la suite $(\|f - f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc convergente vers un réel $\ell \geq 0$. Il s'agit alors de vérifier que $\ell = 0$. Dans le compact K, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in K$. Soit p un entier positif. La fonction φ étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on peut trouver un entier n_p tel que $\varphi(n) \geq p$ pour tout $n \geq n_p$. On a alors pour tout $n \geq n_p$:

$$0 \leq \ell \leq \left\|f - f_{\varphi(n)}\right\|_\infty = f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_{\varphi(n)}\left(x_{\varphi(n)}\right) \leq f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f_p\left(x_{\varphi(n)}\right)$$

En faisant tendre n vers l'infini (à p fixé) et en utilisant la continuité de f, on déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell \leq f(x) - f_p(x)$$

puis en faisant tendre p vers l'infini et en utilisant la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f(x)$, on déduit que $\ell = 0$.

Démonstration utilisant le théorème 5.2 sur les suites équicontinues.

On vérifie que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue, soit que pour tout $x \in K$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in B(0,\eta)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon$. De la convergence en croissant de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f(x)$, on déduit qu'il existe un entier $n_{x,\varepsilon}$ tel que $0 \leq f(x) - f_{n_{x,\varepsilon}}(x) < \varepsilon$ et de la continuité des fonctions f et f_k pour $0 \leq k \leq n_{x,\varepsilon}$ qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ et $|f_k(y) - f_k(x)| < \varepsilon$ pour tout $y \in B(0,\eta)$ et tout k compris entre 0 et $n_{x,\varepsilon}$. En particulier, on a :

$$\begin{aligned} f(y) - f_{n_{x,\varepsilon}}(y) &= \left|f(y) - f_{n_{x,\varepsilon}}(y)\right| \\ &\leq |f(y) - f(x)| + \left|f(x) - f_{n_{x,\varepsilon}}(x)\right| + \left|f_{n_{x,\varepsilon}}(x) - f_{n_{x,\varepsilon}}(y)\right| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

ce qui nous donne pour tout $y \in B(0,\eta)$ et tout entier $n > n_{x,\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} |f_n(y) - f_n(x)| &\leq |f_n(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \\ &\leq f(y) - f_n(y) + \varepsilon + f(x) - f_n(x) \\ &\leq f(y) - f_{n_{x,\varepsilon}}(y) + \varepsilon + f(x) - f_{n_{x,\varepsilon}}(x) < 5\varepsilon \end{aligned}$$

Au final, on a $|f_n(y) - f_n(x)| < 5\varepsilon$ pour tout $y \in B(0,\eta)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue en tout point $x \in K$. Le théorème 5.2 nous dit alors que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur le compact K est uniforme. ■

Le résultat du théorème précédent n'est pas valable pour K non compact comme le montre l'exemple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $]0,1[$ par $f_n(x) = \dfrac{-1}{1+nx}$. Cette suite converge en croissant vers la fonction nulle et la convergence n'est pas uniforme sur $]0,1[$ puisque $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Dans le cadre des suites de fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles nous verrons une deuxième version du théorème de Dini (théorème 6.20).

Théorème 5.4.

*Une suite de fonctions bornées de D dans E converge uniformément vers une fonction $f \in E^D$ sur D si, et seulement si, la fonction f est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ (*i. e.* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $(\mathcal{F}_b(D,E), \|\cdot\|_\infty)$).*

Démonstration Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in E^D$ sur D, il existe alors un entier n_1 tel que $\|f_n(x) - f(x)\| < 1$ pour tout $n \geq n_1$ et tout $x \in D$, ce qui implique que :

$$\|f(x)\| \leq \|f_{n_1}(x) - f(x)\| + \|f_{n_1}(x)\| \leq 1 + \|f_{n_1}\|_\infty$$

pour tout $x \in D$ et nous dit que la fonction f est bornée. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_ε tel que $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et tout $x \in D$, donc $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Réciproquement, si $f \in \mathcal{F}_b(D,E)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, on peut alors trouver pour tout réel $\varepsilon > 0$ un entier n_ε tel que$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, ce qui implique que $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et tout $x \in D$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f sur D. ■

Exemple 5.2 *Reprenant l'exemple 5.1, on a $|f_n(x) - f(x)| = \varphi(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ où $\varphi(y) = \dfrac{1}{1+y}$ pour $y > 0$ avec $\sup\limits_{y>0} \varphi(y) = \varphi(0) = 1$, donc $\sup\limits_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = 1$ et la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et en conséquence elle n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Mais sur $J = [a,+\infty[$ avec $a > 0$, on a $\sup\limits_{x\geq a} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{1+na}$ et avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+na} = 0$, on en déduit que la convergence est uniforme sur J.*

On vérifie facilement que la somme de deux suites de fonctions uniformément convergentes sur D est uniformément convergente. Cela résulte des inégalités $\|f_n + g_n - (f+g)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty$ pour n assez grand. Mais ce résultat n'est pas valable pour le produit dans une algèbre normée. Par exemple, les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $]0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ et $g_n(x) = \dfrac{1}{x^2}$ convergent uniformément vers $f = 0$ (puisque $\sup\limits_{x\in]0,1]} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n}$) et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ respectivement, alors que la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0, la convergence n'étant pas uniforme car $\sup\limits_{x\in]0,1]} |f_n(x) g_n(x)| = \sup\limits_{x\in I} \dfrac{1}{nx} = +\infty$. Toutefois, on a le résultat suivant.

Théorème 5.5.

Soient E une algèbre normée et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions convergeant uniformément sur D vers les fonctions f et g respectivement. Dans le cas où ces fonctions f et g sont bornées sur D, la suite de fonctions $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers la fonction fg.

Démonstration Cela résulte des inégalités :

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_\infty &\leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \|g\|_\infty \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \|g\|_\infty\end{aligned}$$

pour n assez grand. ■

Pour ce qui est de la composition des applications, on a les résultats qui suivent.

Théorème 5.6.

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f sur D et $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ un espace vectoriel normé. Pour toute fonction uniformément continue $g : E \to F$, la suite de fonctions $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $g \circ f$ sur D.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $g : E \to F$ étant uniformément continue, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$(y,z) \in E^2 \text{ et } \|y - z\| < \eta \Rightarrow \|g(y) - g(z)\|' < \varepsilon$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers f sur D, il existe un entier n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in D,\ \|f_n(x) - f(x)\| < \eta$$

ce qui implique que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in D,\ \|g(f_n(x)) - g(f(x))\|' < \varepsilon$$

et nous dit que $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur D. ■

Le résultat précédent n'est plus assuré pour g non uniformément continu. Par exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$ converge uniformément vers $f : x \mapsto x$ et pour $g : x \mapsto x^2$, on a pour tout réel x :

$$g \circ f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \underset{n \to +\infty}{\to} g \circ f(x) = x^2$$

avec $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |g \circ f_n(x) - g \circ f(x)| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right| = +\infty$, donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5.7.

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f sur D et $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ un espace vectoriel normé. Si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dans F^E qui converge uniformément sur E vers une fonction uniformément continue $g : E \to F$, la suite de fonctions $(g_n \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors uniformément vers la fonction $g \circ f$ sur D.

Démonstration Pour tout $x \in D$, on a pour n assez grand :

$$\begin{aligned} \|g_n \circ f_n(x) - g \circ f(x)\|' &\leq \|g_n \circ f_n(x) - g \circ f_n(x)\|' + \|g \circ f_n(x) - g \circ f(x)\|' \\ &\leq \sup_{y \in E} \|g_n(y) - g(y)\|' + \sup_{x \in D} \|g \circ f_n(x) - g \circ f(x)\| \end{aligned}$$

ce qui entraîne la convergence uniforme de $(g_n \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $g \circ f$ sur D (le théorème précédent nous dit que $(g \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur D). ■

Le résultat précédent n'est plus assuré pour g non uniformément continu. Par exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ converge uniformément vers la fonction $f : x \mapsto x$ et la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$ converge uniformément vers la fonction $g : x \mapsto x^2$. Pour tout réel x, on a :

$$g_n \circ f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} g \circ f(x) = x^2$$

avec :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n \circ f_n(x) - g \circ f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right| = +\infty$$

donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Dans le cas où E est un espace de Banach, on dispose d'une condition nécessaire et suffisante de convergence uniforme d'une suite de fonctions donnée par le critère de Cauchy.

Théorème 5.8. Cauchy

Soit E un espace de Banach. Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E converge uniformément sur D si, et seulement si :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+,*},\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\ ;\ \forall n\geq n_\varepsilon,\ \forall m\geq n_\varepsilon,\ \forall x\in D,\ \left\|f_n(x)-f_m(x)\right\|<\varepsilon \tag{5.1}$$

Démonstration La condition nécessaire se déduit du fait que pour n et m assez grands, on a $\left\|f_n-f_m\right\|_\infty\leq\left\|f_n-f\right\|_\infty+\left\|f-f_m\right\|_\infty$ où f est la limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément de Cauchy sur D (*i. e.* vérifie la condition (5.1)). Pour x fixé dans D, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de Cauchy dans l'espace de de Banach E, donc convergente vers un élément $f(x)$ de E et en faisant tendre m vers l'infini dans (5.1) , on en déduit que :

$$\forall x\in D,\ \forall n\geq n_\varepsilon,\ \left\|f_n(x)-f(x)\right\|<\varepsilon$$

ce qui nous dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D. ■

La notion de convergence uniforme est intéressante relativement aux questions d'intervertion de limites et de continuité.

Théorème 5.9.

Soient D une partie non vide d'un espace normé $\left(F,\left\|\cdot\right\|'\right)$ (ou d'un espace métrique), α un point dans l'adhérence $\overline{D}$ de D et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans E^D qui converge uniformément vers une fonction f sur D et telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ la fonction f_n admet une limite $\ell_n\in E$ quand x tend vers α dans D.

1. *Si la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E vers une limite ℓ, la fonction f admet alors ℓ pour limite quand x tend vers α dans D.*
2. *Si la fonction f admet une limite $\ell\in E$ quand x tend vers α dans D, la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente dans E vers ℓ.*
   Cela se traduit dans chaque cas par :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to\alpha}f_n(x)\right)=\lim_{x\to\alpha}\left(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\right)$$

Démonstration

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ell_n=\ell$ et on se donne $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+,*}$. Avec de plus la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur D, on déduit qu'il existe un entier n_ε tel que l'on ait $\left\|\ell_n-\ell\right\|<\varepsilon$ et $\left\|f_n(x)-f(x)\right\|<\varepsilon$ pour tout $n\geq n_\varepsilon$, et tout $x\in D$, ce qui implique que :

$$\left\|f(x)-\ell\right\|\leq\left\|f(x)-f_n(x)\right\|+\left\|f_n(x)-\ell_n\right\|+\left\|\ell_n-\ell\right\|<\left\|f_n(x)-\ell_n\right\|+2\varepsilon$$

Pour $n=n_\varepsilon$, il existe un réel $\eta>0$ tel que l'on ait $\left\|f_{n_\varepsilon}(x)-\ell_{n_\varepsilon}\right\|<\varepsilon$ pour tout $x\in B(\alpha,\eta)\cap D\setminus\{\alpha\}$ ($B(\alpha,\eta)$ est la boule ouverte de centre α et de rayon η

dans F), ce qui implique que $\|f(x) - \ell\| < 3\varepsilon$ pour tout $x \in B(\alpha, \eta)$ et prouve que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell$.

2. On suppose que $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$ pour tout $x \in B(\alpha, \eta) \cap D \setminus \{\alpha\}$ et un entier n_ε tel que $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$, et tout $x \in D$, ce qui nous donne pour $n \geq n_\varepsilon$, et $x \in B(\alpha, \eta) \cap D \setminus \{\alpha\}$:

$$\|f_n(x) - \ell\| \leq \|f_n(x) - f(x)\| + \|f(x) - \ell\| < 2\varepsilon$$

Pour $n \geq n_\varepsilon$ fixé, faisant tendre x vers α dans $B(\alpha, \eta) \cap D \setminus \{\alpha\}$, on en déduit que $\|\ell_n - \ell\| = \lim\limits_{x \to b} \|f_n(x) - \ell\| \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell_n = \ell$. ∎

Avec des arguments analogues, on a le résultat suivant relatif à la continuité.

Théorème 5.10.

Soient D une partie non vide d'un espace normé $(F, \|\cdot\|')$ (ou d'un espace métrique) et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans E^D qui converge uniformément vers une fonction f sur D. Si chaque fonction f_n est continue en $\alpha \in D$, il en est alors de même de f.

Démonstration Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier un entier n tel que $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ pour tout $x \in D$. Avec la continuité de f_n en α, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que $\|f_n(x) - f_n(\alpha)\| < \varepsilon$ pour tout $x \in B(\alpha, \eta) \cap D$, ce qui implique que :

$$\|f(x) - f(\alpha)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(\alpha)\| + \|f_n(\alpha) - f(\alpha)\| < 3\varepsilon$$

et prouve la continuité de f en α. ∎

Du théorème précédent, on déduit que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur D est continue sur D. Ce résultat peut être utilisé pour justifier une non convergence uniforme. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction f non continue sur D, alors la convergence ne peut être uniforme.

Exemple 5.3 *La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^n$ qui converge simplement vers f définie par $f(x) = 0$ pour $0 \leq x < 1$ et $f(1) = 1$ ne peut converger uniformément vers cette fonction sur $[0, 1]$.*

L'uniforme continuité est également conservée par convergence uniforme.

Théorème 5.11.

Soit D une partie non vide d'un espace normé $(F, \|\cdot\|')$ (ou d'un espace métrique). Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite de fonctions uniformément continues qui converge uniformément vers une fonction f sur D, cette limite est alors uniformément continue sur D.

Démonstration Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier un entier n tel que $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ pour tout $x \in D$. Avec l'uniforme continuité de f_n sur D, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\left((x, y) \in D^2 \text{ et } \|x - y\|' < \eta\right) \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon$$

et en conséquence, pour $(x, y) \in D^2$ tel que $\|x - y\|' < \eta$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f(y)\| < 3\varepsilon$$

ce qui prouve l'uniforme continuité de f sur D. ■

Comme conséquence du théorème 2.20 de Baire, on a le résultat suivant qui nous dit que la limite simple d'une suite de fonctions continues d'un espace de Banach F dans E est continue sur une partie dense de F.

Théorème 5.12.

Soient $\left(F, \|\cdot\|'\right)$ un espace de Banach et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de F dans E. Si cette suite converge simplement sur F vers une fonction f, cette limite est alors continue sur une partie dense de F.

Démonstration Pour tout $x \in F$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ qui est convergente dans E est de Cauchy, donc il existe pour tout entier $r \geq 1$ un entier $n_{r,x} \geq 0$ tel que :

$$\forall n \geq n_{r,x},\ \left\|f_n(x) - f_{n_{r,x}}(x)\right\| \leq \frac{1}{r}$$

En notant $F_{r,n,m} = \left\{x \in F,\ \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \frac{1}{r}\right\}$ et $F_{r,m} = \bigcap_{n=m}^{+\infty} F_{r,n,m}$ pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on définit des fermés de F et les majorations précédentes se traduisent par :

$$\forall x \in F,\ \forall r \in \mathbb{N}^*,\ \exists n_{r,x} \in \mathbb{N},\ x \in F_{r,n_{r,x}}$$

ce qui nous dit que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a $F = \bigcup_{p=0}^{+\infty} F_{r,m}$. En se réferant à l'exercice 2.8, il en résulte que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ l'ouvert $\mathcal{O}_r = \bigcup_{m=0}^{+\infty} \overset{\circ}{F}_{r,m}$ est dense dans l'espace de Banach F et le théorème de Baire nous dit que $\mathcal{O} = \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{O}_r$ est dense dans F. On vérifie alors que la fonction $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est continue en tout point de cet ensemble dense $\mathcal{O}$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathcal{O}_r$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \overset{\circ}{F}_{r,m}$ et avec la continuité de f_m, on déduit qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in B'(x, \eta) \subset \overset{\circ}{F}_{r,m},\ \|f_m(t) - f_m(x)\| \leq \frac{1}{r}$$

où $B'(x,\eta)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon η dans F. On a aussi :

$$\forall t \in B'(x,\eta) \subset \overset{\circ}{F}_{r,m},\ \forall n \geq m,\ \|f_n(t) - f_m(t)\| \leq \frac{1}{r}$$

qui donne par passage à limite quand n tend vers l'infini (à t et m fixés) :

$$\forall t \in B'(x,\eta),\ \|f(t) - f_m(t)\| \leq \frac{1}{r}$$

Il en résulte que pour tout $t \in B'(x,\eta)$, on a :

$$\|f(t) - f(x)\| \leq \|f(t) - f_m(t)\| + \|f_m(t) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f(x)\| \leq \frac{3}{r}$$

Pour $x \in \mathcal{O}$ et $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $r \geq 1$ tel que $\frac{3}{r} < \varepsilon$ et tenant compte de $x \in \mathcal{O}_r$, on déduit de ce qui précède qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in B'(x,\eta),\ \|f(t) - f(x)\| \leq \frac{3}{r} < \varepsilon$$

ce qui exprime la continuité de f en x. ■

Exemple 5.4 *La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ qui est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ ne peut être la limite simple d'une suite de fonctions continues.*

Ces questions d'intervertions de limites seront appronfondies dans le cadre des fonctions d'une variable réelle avec le chapitre 6 (théorèmes 6.6, 6.6, 6.21, 6.20, 6.39, 6.40, corollaires 6.2 et 6.3) et le chapitre 7.

5.2 Séries de fonctions

Étant donnée une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E^D, étudier la *série de fonctions* de terme général f_n revient à étudier la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *sommes partielles* définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce qui suit, on se donne une telle série de fonctions $\sum f_n$ dans E^D.

Définition 5.3. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge :

- *simplement* sur D, si pour tout $x \in D$ la série $\sum f_n(x)$ est convergente dans E ;
- *uniformément* sur D, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est uniformément convergente sur D ;
- *normalement* sur D, si toutes les fonctions f_n sont bornées et la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement [resp. uniformément] sur D, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (S_n - S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors simplement [resp. uniformément] vers la fonction nulle sur D.

Dire que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur D équivaut à dire que les fonctions $S_n - f$ sont toutes bornées à partir d'un certain rang n_0 et que la suite numérique $(\|S_n - f\|_\infty)_{n\geq n_0}$ est convergente de limite nulle ou encore que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement et que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes de cette série converge uniformément vers 0 sur D.

Une série de fonctions uniformément convergente est simplement convergente (conséquence du résultat analogue sur les suites de fonctions), mais la réciproque est fausse.

Exemple 5.5 *La série de fonctions $\sum e^{-nx}$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}^{+,*}$ mais pas uniformément convergente. Pour $x > 0$ il s'agit d'une série géométrique de raison $e^{-x} \in \left]0,1\right[$ de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-e^{-x}}$. Comme le suite $\left(f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle et en conséquence la convergence de la série de fonctions $\sum e^{-nx}$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

En utilisant les sommes partielles, on vérifie facilement que si les séries de fonctions $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent simplement [resp. uniformément] sur D vers f et g respectivement, la série de fonctions $\sum (f_n + g_n)$ converge alors simplement [resp. uniformément] sur D vers $f + g$.

On vérifie aussi que si $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent normalement sur D vers f et g respectivement, $\sum (f_n + g_n)$ converge alors normalement sur D vers $f + g$.

Théorème 5.13.

La série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur D si, et seulement si, il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que la série $\sum \alpha_n$ soit convergente et $\|f_n\|_\infty \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration Pour la condition nécessaire, il suffit d'utiliser la suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$. La condition suffisante est évidente. ∎

Dans le cas où E est un espace de Banach, en utilisant le critère de Cauchy uniforme pour les suites de fonctions (théorème 5.8), on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.14. Cauchy

Soit E un espace de Banach. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur D si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+,*},\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ ;\ \forall m > n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in D,\ \left\| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \right\| < \varepsilon$$

Cette condition de Cauchy se traduit également par $\left\| \sum_{k=n}^{m} f_k \right\|_\infty < \varepsilon$ pour tous $m > n \geq n_\varepsilon$.

En utilisant le critère de Cauchy uniforme, on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.15.

Soit E un espace de Banach. Une série de fonctions normalement convergente sur D est uniformément convergente.

Démonstration Supposons que la série de fonctions $\sum f_n$ soit normalement convergente sur D. Pour tous $m > n$ dans $\mathbb{N}$ et x dans D, on a :

$$\begin{aligned} \|S_m(x) - S_n(x)\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k(x)\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_\infty \leq \varepsilon_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \end{aligned}$$

donc $\|S_m - S_n\|_\infty \leq \varepsilon_n$ avec $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n$. Il en résulte que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur D et en conséquence converge uniformément puisque E est complet, ce qui signifie que la série de fonctions $\sum f_n$ est uniformément convergente sur I. ■

Une série de fonctions uniformément convergente sur un espace de Banach n'est pas nécessairement normalement convergente.

Exemple 5.6 *La série de fonctions $\sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ est uniformément convergente sur $[0,1]$ mais pas normalement convergente (exercice 5.5).*

Théorème 5.16.

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur D, alors pour toute fonction bornée $\varphi : D \to \mathbb{K}$, la série de fonctions $\sum \varphi f_n$ est uniformément convergente vers φf sur D.

Démonstration La fonction φ étant bornée sur D, on a :

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \varphi f_k - \varphi f \right\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \left\| \sum_{k=0}^{n} f_k - f \right\|_\infty$$

et la convergence uniforme de $\sum \varphi f_n$ vers φf s'en suit. ■

Le résultat précédent est faux pour φ non bornée. Prenant chaque fonction f_n constante égale à $\alpha_n \in \mathbb{R}^{+,*}$ avec $\sum \alpha_n$ convergente vers un réel $\alpha > 0$, pour φ définie sur $]0,1]$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, la série de fonctions $\sum f_n$ est uniformément convergente et la série de fonctions $\sum \varphi f_n$ converge simplement sur I vers $\dfrac{\alpha}{x}$, la convergence n'étant pas uniforme puisque $\sup\limits_{x\in]0,1]} |\varphi(x) f_n(x)| = \sup\limits_{x\in]0,1]} \dfrac{\alpha_n}{x} = +\infty$.

Du théorème 4.22 des séries alternées pour les séries numériques, on déduit le suivant.

Théorème 5.17.

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D, à valeurs réelles positives, décroissante et uniformément convergente vers la fonction nulle sur D. Dans ces conditions, la série de fonctions $\sum (-1)^n \alpha_n$ est uniformément convergente sur D.

Démonstration Du théorème 4.22 des séries alternées, on déduit que pour tout $x \in D$ la série numérique $\sum (-1)^n \alpha_n(x)$ est convergente vers un réel $f(x)$ avec la majoration des restes :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \alpha_k(x) \right| \leq \alpha_{n+1}(x) \leq \|\alpha_{n+1}\|_\infty$$

et de la convergence uniforme vers la fonction nulle de la suite de fonctions $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que $\sum (-1)^n \alpha_n$ converge uniformément vers f sur D. ■

Du théorème 4.21 d'Abel, on déduit le « théorème d'Abel uniforme » suivant.

Théorème 5.18. Abel uniforme

Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans $\mathbb{R}^+$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D dans E telles que :

- *la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge uniformément vers la fonction nulle sur D ;*
- *il existe un réel $M > 0$ tel que $\left\| \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \right\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in D$, (la suite des sommes partielles de $\sum g_n$ est uniformément bornée).*

Dans ces conditions, la série de fonctions $\sum \alpha_n g_n$ est uniformément convergente sur D.

Démonstration Du théorème 4.21 d'Abel, on déduit que pour tout $x \in D$ la série $\sum f_n(x)$ est convergente vers un élément $f(x)$ de E avec la majoration des restes :

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right\| \leq 2M\alpha_{n+1}(x) \leq 2M \left\| \alpha_{n+1} \right\|_\infty$$

De la convergence uniforme vers la fonction nulle de la suite de fonctions $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que $\sum f_n$ converge uniformément sur I. ∎

En application du théorème d'Abel uniforme, le théorème 4.23 sur les séries trigonométriques peut être précisé comme suit.

Théorème 5.19.

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

1. *Si la série $\sum \alpha_n$ est convergente, la série de fonctions $\sum \alpha_n e^{inx}$ est alors normalement convergente sur $\mathbb{R}$.*
2. *Si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, la série de fonctions $\sum \alpha_n e^{inx}$ est alors simplement convergente sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la convergence étant uniforme sur tout segment $[a,b] \subset]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, où $k \in \mathbb{Z}$.*

Des théorème 5.9 et 5.10, on déduit les résultats suivants relatifs au passage à la limite et à la continuité.

Théorème 5.20.

Soient D une partie non vide d'un espace normé $(F, \|\cdot\|')$ (ou d'un espace métrique), α un point dans l'adhérence $\overline{D}$ de D et $\sum f_n$ une série de fonctions dans E^D qui converge uniformément vers une fonction f sur D et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n admet une limite $\ell_n \in E$ quand x tend vers α dans D.

1. *Si la série numérique $\sum \ell_n$ est convergente de somme ℓ, la fonction f admet alors ℓ pour limite quand x tend vers α dans D.*
2. *Si la fonction f admet une limite finie ℓ quand x tend vers α dans D, la série $\sum \ell_n$ est alors convergente de somme ℓ.*

   Ce qui peut se traduire dans chaque cas par :

$$\lim_{x\to\alpha} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to\alpha} f_n(x)$$

Le théorème précédent est valable pour $D =]a, +\infty[$ ou $D =]-\infty, a[$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha = +\infty$ ou $\alpha = -\infty$.

Théorème 5.21.

Soient D une partie non vide d'un espace normé $(F, \|\cdot\|')$ (ou d'un espace métrique) et $\sum f_n$ une série de fonctions dans E^D qui converge uniformément vers une fonction f sur D. Si chaque fonction f_n est continue en $\alpha \in D$ [resp. est uniformément continue sur D] il en est alors de même de la fonction f.

5.3 La fonction exponentielle sur une algèbre de Banach

Sur $\mathbb{R}$ la fonction exponentielle est classiquement définie comme fonction inverse de la fonction logarithme elle même définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ comme la primitive nulle en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. En exploitant l'équivalent $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$ pour tout réel non nul x, on vérifie que $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

On peut aussi vérifier directement que pour tout réel x, la suite $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel non nul et définir e^x comme limite de cette suite, cette construction se généralisant sur une algèbre de Banach. Cette fonction exponentielle peut également être définie comme somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ et bien entendu les deux définitions coïncident.

5.3.1 La fonction exponentielle réelle

Dans un premier temps, on se place dans le cadre réel où on étudie la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Chaque fonction u_n qui est polynomiale de degré n est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $u_n'(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}$ telle que $\left(1+\frac{x}{n}\right)u_n'(x) = u_n(x)$.

Pour $x = 0$, la suite $(u_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire sur 1.

Lemme 5.1 *Pour tout réel x, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)\,u_n(-x) = 1$, la convergence étant uniforme sur tout segment.*

Démonstration Pour tous $R \in \mathbb{R}^{+,*}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-R, R]$, on a :

$$1 - u_n(x)\,u_n(-x) = 1 - \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = \frac{x^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^k$$

avec $0 < 1 - \dfrac{x^2}{n^2} \leq 1$ pour tout entier $n > R$, de sorte que :

$$|1 - u_n(x) u_n(-x)| \leq \frac{x^2}{n^2} n = \frac{x^2}{n} \leq \frac{R^2}{n}$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{R^2}{n} = 0$, ce qui implique que la suite de fonctions $(u_n(x) u_n(-x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 1 sur $[-R, R]$. La convergence uniforme de cette suite de fonctions sur tout segment en résulte. ■

Il nous suffit donc d'étudier la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou la suite $(u_n(-x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour $x \in \mathbb{R}^{+,*}$.

Pour tout réel $x > 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right) = 1$, donc $1 - \dfrac{x}{n}$ sera strictement positif à partir d'un certain rang. Précisément, on aura $1 - \dfrac{x}{n} > 0$ pour tout entier $n \geq n_x$ où $n_x = [x] + 1 \in \mathbb{N}^*$ en notant $[x] \in \mathbb{N}$ la partie entière de x (de $0 \leq [x] \leq x < n_x = [x] + 1 \leq n$, il résulte que $1 - \dfrac{x}{n} \geq 1 - \dfrac{x}{[x] + 1} > 0$).

Lemme 5.2 *Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, la suite $(u_n(-x))_{n \geq n_x}$ est à valeurs strictement positives, strictement croissante, majorée et en conséquence convergente vers un réel $f(-x) > 0$.*

Démonstration Soient $x > 0$ et $n_x = [x] + 1 \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $n \geq n_x$, on a $0 < \dfrac{x}{n} \leq \dfrac{x}{n_x} < 1$, donc $0 < u_n(-x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n < 1$.

En écrivant pour tout $n \geq n_x$ que :

$$\begin{aligned} u_{n+1}(-x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{1 - \frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n + 1 - x}{n + 1 - x - \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n^2 + (1 - x) n - x}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{(n+1)(n-x)}\right)^{n+1} \\ &= u_n(-x) \left(1 - \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{x}{(n+1)(n-x)}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{(n+1)(n-x)}\right)^{n+1} &= 1 + \frac{x}{n-x} + \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{x}{(n+1)(n-x)}\right)^k \\ &> 1 + \frac{x}{n-x} \end{aligned}$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}(-x)}{u_n(-x)} &= \left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{(n+1)(n-x)}\right)^{n+1} \\ &> \left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n-x}\right) = \frac{n-x}{n}\frac{n}{n-x} = 1\end{aligned}$$

ce qui nous dit que la suite $(u_n(-x))_{n\geq n_x}$ est strictement croissante majorée par 1, donc convergente vers un réel $f(-x)$. De la stricte croissance de $(u_n(-x))_{n\geq n_x}$, on déduit que $f(-x) > u_{n_x}(-x) > 0$. ■

On peut également vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs strictement positives et strictement croissante. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1+\dfrac{x}{n} > 1$, donc $u_n(x) > 1$ et en écrivant que :

$$\begin{aligned}u_{n+1}(x) = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1+x}{n+1+x+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n^2+(1+x)n+x}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \\ &= u_n(x)\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

avec $\left(1+\dfrac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} > 1+\dfrac{x}{n+x}$, on en déduit que $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} > 1$.

Théorème 5.22.

Pour tout réel x, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $f(x) > 0$. De plus on a $f(0) = 1$ et $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ pour tout réel x.

Démonstration Pour $x = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(0) = 1$ et pour $x < 0$ on a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(-x) = f(-x) > 0$. En écrivant que pour tout réel $x > 0$ et tout entier $n \geq n_x$, on a $u_n(x) = \dfrac{u_n(x)\,u_n(-x)}{u_n(-x)}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)\,u_n(-x) = 1$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$. ■

L'inégalité $f(x) > u_1(x) = 1+x$ pour tout $x > 0$ nous dit aussi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0^+$.

Lemme 5.3 *Pour tout* $x \in \left]-1,1\right[$, *on a* $1+x \leq f(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$.

Démonstration Pour $x=0$, on $f(0)=0$ et l'encadrement est trivial.

On a déjà vu que pour tout réel $x>0$, on $f(x)>u_1(x)=1+x$.

Pour tout $x \in \left]0,1\right[$, on a $n_x=1$ et $f(-x)>u_1(-x)=1-x$, ce qui implique que $f(x)=\dfrac{1}{f(-x)} \leq \dfrac{1}{1-x}$.

On a donc $1+x \leq f(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$ pour tout $x \in \left]0,1\right[$, ce qui implique que pour tout $x \in \left]-1,0\right[$, on a $1+x \leq f(x)=\dfrac{1}{f(-x)} \leq \dfrac{1}{1-x}$. ■

Lemme 5.4 *La fonction* f *est dérivable en* 0 *avec* $f'(0)=1$.

Démonstration Du lemme précédent on déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$, ce qui signifie que f est continue en 0.

On a aussi $x \leq f(x)-1 \leq \dfrac{1}{1-x}-1=\dfrac{x}{1-x}$ pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, donc $1 \leq \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \leq \dfrac{1}{1-x}$ pour tout $x \in \left]-1,1\right[\setminus \{0\}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$, ce qui signifie que f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$. ■

Lemme 5.5 *Pour tout suite réelle* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *convergente vers un réel* x, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n)=f(x)$.

Démonstration On suppose dans un premier temps que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Dans ce cas, il existe un entier n_0 tel que $x_n \in \left]-1,1\right[$ pour tout entier $n \geq n_0$ et pour ces entiers, on a :

$$\begin{aligned}
|u_n(x_n)-1| &= \left|\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n-1\right| = \frac{|x_n|}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^k \\
&\leq \frac{|x_n|}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = |x_n|\,|u_n(1)-1|
\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1)=f(1)$, ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n)=1=f(0)$.

Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers x, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(x_n)\,u_n(-x)=\left(\left(1+\frac{x_n}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)^n=\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n=u_n(\varepsilon_n)$$

où la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}=\left(x_n-x-\dfrac{xx_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n)\,u_n(-x)=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(\varepsilon_n)=1$ et sachant que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(-x)=f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n)=f(x)$. ■

Théorème 5.23.

Pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ on a $f(x+y) = f(x) f(y)$.

Démonstration Pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n(x) u_n(y) = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = u_n(z_n)$$

où $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(x+y+\dfrac{xy}{n}\right) = x+y$, ce qui implique que :

$$f(x) f(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x) u_n(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(z_n) = f(x+y)$$

■

De l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ et de la continuité en 0 de f, on déduit la continuité de f en tout point.

Théorème 5.24.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration La continuité en 0 a été vue avec le lemme 5.4.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}$, on a $f(x+h) - f(x) = f(x)(f(h) - f(0))$ avec $\lim\limits_{h\to 0}(f(h) - f(0)) = 0$ (continuité en 0), donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ et f est continue en x. ■

En utilisant la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et le théorème 5.3 de Dini, on a le résultat suivant.

Théorème 5.25.

La convergence de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la fonction f est uniforme sur tout segment.

Démonstration Pour tout entier $n_0 \geq 1$ et tout réel $x \in [-n_0, n_0]$, la suite $(u_n(x))_{n\geq n_0}$ est croissante et la suite de fonctions continues $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge simplement sur $[-n_0, n_0]$ vers la fonction continue f, le théorème 5.3 de Dini nous dit alors que la convergence est uniforme sur $[-n_0, n_0]$. Tout segment $[a, b]$ étant contenu dans un segment du type $[-n_0, n_0]$, la convergence uniforme sur $[a, b]$ s'en déduit. ■

Corollaire 5.1. *La fonction f est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. Cette fonction est de plus indéfiniment dérivable.*

Démonstration On sait déjà que $f(0) = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0) = 1$, donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)$ et f est dérivable en x de nombre dérivé $f'(x) = f(x)$. Par récurrence, on en déduit que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)} = f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si y est une autre solution de notre problème de Cauchy, la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = y(x)f(-x)$ est telle que $z' = 0$ avec $z(0) = 1$, c'est donc la fonction constante égale à 1 et on a nécessairement $y(x) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$ pour tout réel x. ∎

De l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$, on déduit par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(nx) = (f(x))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis avec $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$, on déduit que cette relation est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a alors $f(rx) = f\left(p\dfrac{x}{q}\right) = \left(f\left(\dfrac{x}{q}\right)\right)^p$ et avec $f(x) = f\left(q\dfrac{x}{q}\right) = \left(f\left(\dfrac{x}{q}\right)\right)^q$, on déduit que $f\left(\dfrac{x}{q}\right) = (f(x))^{\frac{1}{q}}$ et $f(rx) = (f(x))^{\frac{p}{q}} = (f(x))^r$.

En notant $e = f(1)$, on a donc $f(r) = e^r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$, ce qui nous conduit à noter $f(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a $e^{rx} = (e^x)^r$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$. La fonction ainsi définie est appelée *fonction exponentielle réelle*. On note aussi $f(x) = \exp(x)$.

En résumé, on a les propriétés suivantes de la fonction exponentielle réelle.

- La fonction exp est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\exp^{(n)} = \exp$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Toutes les dérivées de la fonction exp sont à valeurs strictement positives, donc exp est strictement croissante et strictement convexe.
- La fonction exp est solution de l'équation fonctionnelle $e^{x+y} = e^x e^y$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- De l'égalité $e^x e^{-x} = 1$ pour tout réel x, on déduit que la fonction exp n'est pas polynomiale. En effet si exp est polynomiale de degré $n \geq 0$ (exp n'est pas nulle), la fonction $x \mapsto e^x e^{-x}$ est alors polynomiale de degré $2n$ et constante, ce qui impose que $n = 0$ et donc que exp est constante, ce qui est incompatible avec $\exp(x) > 1 + x$ pour $x > 0$ ($(u_n(x))_{n \geq n_x}$ est strictement croissante pour $x > 0$).
- Sachant que la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynomiales est polynomiale (exercice 5.4), on déduit du point précédent que la convergence de la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la fonction exp sur $\mathbb{R}$ ne peut pas être uniforme.
- De $\exp(x) > 1 + x$ pour $x > 0$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty$ et avec $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$, on déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$. La fonction exp réalise donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Son inverse est appelé fonction logarithme et noté ln (une définition possible de ln). Cette fonction

ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (dérivation de la fonction réciproque), c'est donc la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ nulle en 1.

- Avec $\dfrac{\exp(x)}{x^n} > \dfrac{u_{n+1}(x)}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \dfrac{x}{n+1}\right)$ pour tous $x > 0$ et $n \geq 1$, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$.

5.3.2 La fonction logarithme réel

En vue de définir la fonction logarithme comme réciproque de l'exponentielle à partir d'une suite de fonctions, on part de l'équation $y = u_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ où $y \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sont donnés. Une solution réelle de cette équation est $x = n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right)$. On est donc ainsi amené à considérer la suite de fonctions $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ v_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$$

où la fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ est la fonction réciproque sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de la fonction $x \mapsto x^n$. On note aussi $x^{\frac{1}{n}}$ pour $\sqrt[n]{\cdot}$ et par définition, on a $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $y = x^{\frac{1}{n}}$ si, et seulement si, $y \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $x = y^n$. Cette fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ est indéfiniment dérivable et strictement croissante de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$. Pour $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on définit la fonction puissance r-ième sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $x^r = \sqrt[q]{x^p}$ et on vérifie que $(x^r)^s = x^{rs}$ et $x^r x^s = x^{r+s}$ pour tous nombres rationnels r, s.

Lemme 5.6 *Pour tout réel $x > 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.*

Démonstration Avec $\sqrt[n]{1} = 1$ et $\sqrt[n]{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$, il suffit de montrer le résultat pour $x > 1$. Dans ce cas la suite $\left(\sqrt[n]{x}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante (on a $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n+1]{x}} = x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = x^{\frac{1}{n(n+1)}} > 1$ pour $x > 1$) et minorée par 1, donc convergente vers un réel $\ell \geq 1$. Si $\ell > 1$, pour $\lambda \in]1, \ell[$ il existe alors un entier n_0 tel que $\sqrt[n]{x} > \lambda$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne $x > \lambda^n$ pour tout $n \geq n_0$ qui est incompatible avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda^n = +\infty$. ■

Théorème 5.26.

Pour tout réel $x > 0$ la suite $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell(x)$ tel que $\ell(1) = 0$, $\ell(x) > 0$ pour $x > 1$ et $\ell(x) < 0$ pour $x \in]0,1[$.

Démonstration Pour $x = 1$, la suite $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire sur 0, donc convergente vers $\ell(1) = 0$.

En notant $w_n(x) = v_n(x) - v_{n+1}(x)$, on définit une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*}$:

$$w_n'(x) = x^{\frac{1}{n}-1} - x^{\frac{1}{n+1}-1} = x^{\frac{1}{n+1}-1}\left(x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} - 1\right) = x^{\frac{1}{n+1}-1}\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)$$

donc la fonction w_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,\infty[$ avec $w_n(1)=0$, donc $w_n(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^{+,*}$, ce qui signifie que la suite $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. Pour $x>1$, elle est minorée par 0 et en conséquence convergente vers un réel $\ell(x)\geq 0$.

Pour $x\in\,]0,1[$, en écrivant que :

$$v_n(x)=n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)=n\sqrt[n]{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)=-\sqrt[n]{x}v_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

on déduit que $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell(x)=-\ell\left(\frac{1}{x}\right)\leq 0$. Dans ce ce cas, la suite $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant strictement décroissante, on a $\ell(x)<v_1(x)<0$. Il en résulte que pour $x>1$, on a $\ell(x)=-\ell\left(\frac{1}{x}\right)>0$. ■

On peut donc définir la fonction ℓ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $\ell(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$.

Théorème 5.27.

Pour tous x,y dans $\mathbb{R}^{+,*}$, on a $\ell(xy)=\ell(x)+\ell(y)$.

Démonstration Pour x,y dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$v_n(xy)=n\left(\sqrt[n]{xy}-1\right)=n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\sqrt[n]{y}+n\left(\sqrt[n]{y}-1\right)=v_n(x)\sqrt[n]{y}+v_n(y)$$

et en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on a le résultat annoncé. ■

Corollaire 5.2. *Pour tous $x\in\mathbb{R}^{+,*}$ et $r\in\mathbb{Q}$, on a $\ell(x^r)=r\ell(x)$.*

Démonstration De l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction ℓ, on déduit par récurrence que $\ell(x^p)=p\ell(x)$ pour tous $x\in\mathbb{R}^{+,*}$ et $p\in\mathbb{N}$. En écrivant, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, que $\ell(x)=\ell\left(\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)$, on déduit que $\ell\left(x^{\frac{1}{p}}\right)=\frac{1}{p}\ell(x)$ et il en résulte que pour tout rationnel positif $r=\frac{p}{q}$, avec $p\in\mathbb{N}$ et $q\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\ell(x^r)=\ell\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)=p\ell\left(x^{\frac{1}{q}}\right)=\frac{p}{q}\ell(x)=r\ell(x)$$

Enfin avec $\ell\left(\frac{1}{x}\right)=-\ell(x)$, on déduit que le résultat précédent est encore valable pour tout rationnel négatif. ■

Théorème 5.28.

La fonction ℓ est la primitive nulle en 1 de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$.

Démonstration Pour tout réel $x > 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} > 1$ et $x^{-\frac{1}{n}} < 1$, donc $x^{1-\frac{1}{n}} < x < x^{1+\frac{1}{n}}$ et :

$$-n\left(x^{-\frac{1}{n}} - 1\right) = \int_1^x \frac{dt}{t^{1+\frac{1}{n}}} < \int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x \frac{dt}{t^{1-\frac{1}{n}}} = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

soit $-v_n\left(\frac{1}{x}\right) < \int_1^x \frac{dt}{t} < v_n(x)$, ce qui implique en faisant tendre n vers l'infini que $-\ell\left(\frac{1}{x}\right) = \ell(x) \leq \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \ell(x)$, soit $\ell(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ qui est bien la primitive nulle en 1 de $x \mapsto \frac{1}{x}$. Pour $x \in \left]0, 1\right[$, on a :

$$\ell(x) = -\ell\left(\frac{1}{x}\right) = -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{d\theta}{\theta}$$

en effectuant le changement de variable $t = \frac{1}{\theta}$. ■

On note $\ell(x) = \ln(x)$ et on retrouve ainsi la définition classique du logarithme. Ses propriétés usuelles s'en déduisent.

Pour vérifier que la fonction ln est l'inverse de exp, on peut procéder comme suit en utilisant les formules de dérivation $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ et $(e^u)' = u'e^u$. En notant $f(x) = \ln(e^x)$ pour tout réel x, on a $f'(x) = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$, donc $f(x) = x + b$ avec $b = f(0) = 0$, ce qui nous donne $\ln \circ \exp = Id_{\mathbb{R}}$ et en notant $g(x) = e^{\ln(x)}$ pour tout réel $x > 0$, on a $\left(\frac{1}{x}g\right)'(x) = -\frac{1}{x^2}g(x) + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}g(x)\right) = 0$, donc $\frac{g(x)}{x} = \frac{g(1)}{1} = 1$, ce qui nous donne $\exp \circ \ln = Id_{\mathbb{R}^{+,*}}$.

La relation $\ln(x^r) = r\ln(x)$ pour tout $(r, x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^{+,*}$ est équivalente à $x^r = e^{r\ln(x)}$, ce qui nous conduit à définir la fonction $x \mapsto x^a$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ pour tout réel a par $x^a = e^{a\ln(x)}$ et on vérifie que l'on a $(x^a)^b = x^{ab}$ et $x^a x^b = x^{a+b}$ pour tous réels a, b.

5.3.3 La fonction exponentielle sur une algèbre de Banach

On se place maintenant sur une algèbre de Banach $(\mathbb{A}, \|\cdot\|)$ d'unité notée 1. On peut considérer par exemple $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ qui est une algèbre de Banach commutative ou $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ muni d'une quelconque norme multiplicative ou l'algèbre $(\mathcal{L}_c(E), N)$ des endomorphismes continus d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ où N est la norme induite sur $\mathcal{L}_c(E)$. Ces deux dernières algèbres ne sont pas commutative (sauf en dimension 1).

Pour tout $x \in \mathbb{A}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}x\right)^n$.

Pour tout $x \in \mathbb{A}$ et tous les entiers $m > n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\|u_m(x) - u_n(x)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{m}{k} \frac{1}{m^k} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) x^k - \sum_{k=n+1}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} x^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right| \|x\|^k + \sum_{k=n+1}^{m} \binom{m}{k} \frac{\|x\|^k}{m^k}\end{aligned}$$

(comme x et 1 commutent dans $\mathbb{A}$, on peut utiliser la formule du binôme). Pour tout entier k compris entre 2 et n, on a :

$$\begin{aligned}\binom{m}{k} \frac{1}{m^k} &= \frac{m(m-1)\dots(m-(k-1))}{k!m^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \\ &\geq \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}\end{aligned}$$

et pour $k \in \{0, 1\}$, ces deux quantités valent 1, donc :

$$\begin{aligned}\|u_m(x) - u_n(x)\| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{m}{k} \frac{1}{m^k} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) \|x\|^k + \sum_{k=n+1}^{m} \binom{m}{k} \frac{\|x\|^k}{m^k} \\ &\leq u_m(\|x\|) - u_n(\|x\|)\end{aligned}$$

et il en résulte que la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $\mathbb{A}$ (puisque la suite réelle $(u_n(\|x\|))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $e^{\|x\|}$). Cet espace étant complet, la suite y est convergente. On note e^x ou $\exp(x)$ sa limite dans $\mathbb{A}$.

En exploitant la convergence uniforme sur tout segment réel de la suite de fonctions $\left(\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (théorème 5.25), on déduit des inégalités précédentes que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur tout compact de $\mathbb{A}$ et en conséquence, elle converge uniformément vers la fonction exp sur tout compact de $\mathbb{A}$.

Lemme 5.7 *Pour tous x, y dans $\mathbb{A}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\|x^n - y^n\| \leq \|x - y\| \sum_{k=1}^{n} \|x\|^{n-k} \|y\|^{k-1}$$

Démonstration Dans le cas où x et y commutent, on peut utiliser l'identité $x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} y^{k-1}$ qui implique que :

$$\|x^n - y^n\| \leq \|x - y\| \left\| \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} y^{k-1} \right\| \leq \|x - y\| \sum_{k=1}^{n} \|x\|^{n-k} \|y\|^{k-1}$$

Mais dans le cas général cette commutativité n'est pas acquise (penser à $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$). On utilise alors l'identité :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}(x-y)\,y^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} x^{n-k+1}y^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}y^{k} - \sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k} = x^n - y^n\end{aligned}$$

qui implique que :

$$\|x^n - y^n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \left\| x^{n-k}(x-y)\,y^{k-1} \right\| \leq \|x-y\|\,\|x-y\| \sum_{k=1}^{n} \|x\|^{n-k}\,\|y\|^{k-1}$$

■

De ce lemme, on déduit que pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{A}$ et il en est de même des fonctions u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La continuité de la fonction exp sur $\mathbb{A}$ s'en déduit alors par convergence uniforme sur tout compact vers cette fonction de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{A}$ qui converge vers 0, des inégalités :

$$\|u_n(x_n) - 1\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} x_n^k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \|x_n\|^k = u_n(\|x_n\|) - 1$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(\|x_n\|) = 1$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = 1$ dans $\mathbb{A}$.

En écrivant que $u_n(x)\,u_n(-x) = \left(1 - \frac{1}{n^2}x^2\right)^n = u_n\left(-\frac{1}{n}x^2\right)$ (les polynômes en x commutent dans $\mathbb{A}$), on en déduit par passage à la limite que $e^x e^{-x} = e^0 = 1$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{A}$, e^x est inversible dans $\mathbb{A}$ d'inverse e^{-x}.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{A}$ qui converge vers x, chaque x_n commutant à x, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(x_n)\,u_n(-x) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}x_n\right)\left(1 - \frac{1}{n}x\right)\right)^n = \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n = u_n(\varepsilon_n)$$

où la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(x_n - x - \frac{x x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n)\,u_n(-x) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(\varepsilon_n) = 1$ et sachant que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n)\,e^x = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = e^x$ (continuité du produit dans une algèbre de Banach).

Pour x, y dans $\mathbb{A}$ qui commutent, on a :

$$u_n(x)\,u_n(y) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}x\right)\left(1 + \frac{1}{n}y\right)\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}z_n\right)^n = u_n(z_n)$$

avec $z_n = x + y + \frac{1}{n}xy \underset{n\to+\infty}{\to} x + y$, les z_n commutant à $x+y$, ce qui implique que :

$$e^x e^y = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)\,u_n(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(z_n) = e^{x+y}$$

Cette dernière égalité n'est pas assurée si x et y ne commutent pas comme le montre l'exemple des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

En particulier pour $x \in \mathbb{A}$ et $y = -x$, on a $e^x e^{-x} = e^0 = 1$ et on retrouve ainsi le fait que e^x est inversible dans $\mathbb{A}$ d'inverse e^{-x}.

Après avoir étudié la dérivabilité, on prouvera le résultat suivant.

Théorème 5.29.

Deux éléments x et y de $\mathbb{A}$ commutent si, et seulement si, on a $e^{t(x+y)} = e^{tx}e^{ty}$ pour tout réel t.

Démonstration Voir l'exercice 6.11. ■

En utilisant le théorème 4.32 de convergence dominée pour les séries, on obtient le résultat suivant qui nous donne une deuxième définition plus classique de la fonction exp.

Théorème 5.30.

Pour tout $x \in \mathbb{A}$, on a $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$.

Démonstration Pour tous $x \in \mathbb{A}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}x\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}(x)$$

en notant pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_{n,k}(x) = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} x^k \text{ si } 0 \leq k \leq n \\ 0 \text{ si } k \geq n+1 \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et tout $n \geq k+1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n,k}(x) &= \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!n^k} x^k \\ &= \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) x^k \underset{n\to+\infty}{\to} u_k(x) = \frac{1}{k!} x^k \end{aligned}$$

avec $\|u_{n,k}(x)\| \leq \alpha_k(x) = \frac{\|x\|^k}{k!}$ pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k(x)$ étant convergente. On déduit alors du théorème 4.32 de convergence dominée pour les séries que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}x\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}u_{n,k}\left(x\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}u_{n,k}\left(x\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}u_k\left(x\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}x^k\end{aligned}$$

■

On peut aussi vérifier directement que la série de fonctions $\sum \frac{1}{n!}x^n$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{A}$ et que sa somme est continue. La convergence normale sur tout compact $K \subset B(0,R)$ se déduit de $\left\|\frac{1}{n!}x^n\right\| \leq \frac{\|x\|^n}{n!} \leq \frac{R^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum \frac{R^n}{n!}$ étant convergente (critère de d'Alembert). Avec la continuité des fonctions $x \mapsto x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on retrouve ainsi la continuité de $x \mapsto e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ sur $\mathbb{A}$.

Dans le cas où $\mathbb{A}$ est l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut vérifier que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice e^A est un polynôme en A dont les coefficients dépendent de A. Mais il n'est pas possible de trouver un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $e^A = P(A)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (exercice 5.7).

Partant de la fonction exponentielle, on peut définir les fonctions hyperboliques ch et sh sur $\mathbb{A}$ par :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}x\right)^n + \left(1-\frac{1}{n}x\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

et :

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}x\right)^n - \left(1-\frac{1}{n}x\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Pour tous x, y qui commutent dans $\mathbb{A}$ on a :

- $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$;
- $e^x = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)$, $e^{-x} = \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$;
- $(\operatorname{ch}(x))^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) + 1\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(2x) + 1)$;
- $(\operatorname{sh}(x))^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) - 1\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(2x) - 1)$;
- $(\operatorname{ch}(x))^2 - (\operatorname{sh}(x))^2 = 1$, $(\operatorname{ch}(x))^2 + (\operatorname{sh}(x))^2 = \operatorname{ch}(2x)$;
- $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$, $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$; la première formule se déduisant de :

$$\begin{aligned}2\operatorname{ch}(x+y) &= e^x e^y + e^{-x}e^{-y}\\ &= (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)) + (\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(y))\\ &= 2(\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y))\end{aligned}$$

et la deuxième des propriétés de parité de ch et sh ;

- $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$, $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$;
- $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)$.

5.4 Exercices

Exercice 5.1. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette suite de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Étudier la convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.*

Solution. Chaque fonction f_n est dérivable avec $f_n'(x) = n^\alpha e^{-nx}(1 - nx)$.

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle pour tout $\alpha > 0$. Avec $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$ pour $n \geq 1$, on déduit que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $\alpha \in]0, 1[$.
2. Pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n_a tel que $\frac{1}{n} < a$ pour tout $n \geq n_a$ et on a $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$. On en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 5.2. *Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^n f(x)$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$.*

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en 1 avec $f(1) = 0$, il existe un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in [\alpha, 1], \ |f(x)| < \varepsilon$$

Avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [0, \alpha], \ |f_n(x)| \leq \alpha^n \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$, on déduit qu'il existe un entier n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \ \forall x \in [0, \alpha], \ |f_n(x)| < \varepsilon$$

Il en résulte que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \ \forall x \in [0, 1], \ |f_n(x)| < \varepsilon$$

On a donc ainsi prouvé que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$.

Exercice 5.3. *On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = nx\sin(x)\,e^{-nx}$$

1. *Montrer que cette suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.*
2. *Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = te^{-t}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.*
3. *Montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 est uniforme sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$.*
4. *On se propose maintenant de montrer que la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 est encore uniforme sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.*
   (a) *Calculer, pour tout $n \geq 1$, la dérivée de la fonction f_n.*
   (b) *Montrer que :*
   $$\forall x \in \left]0, \frac{1}{n}\right],\ f_n'(x) > 0$$
   (c) *Montrer que, sur l'intervalle $\left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right]$, f_n' s'annule en un unique point $x_n \in \left]\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right[$.*
   (d) *En déduire les variations de f_n sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.*
   (e) *Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\mathbb{R}^+$.*

Solution.

1. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = f(0) = 0$. Pour $x > 0$, on a $|f_n(x)| \leq x\dfrac{n}{e^{nx}}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^{nx}} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = 0$.
2. La fonction φ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \geq 1$, on a $\varphi'(t) = e^{-t}(1-t) \leq 0$. Cette fonction est donc décroissante sur $[1, +\infty[$.
3. Pour tout $n \geq 1$ et $x \geq \dfrac{\pi}{2}$, on a $|f_n(x)| \leq nxe^{-nx} = \varphi(nx) \leq \varphi(n) = \dfrac{n}{e^n}$ puisque $nx \geq n \geq 1$ et φ est décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{e^n} = 0$, on en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$.
4.
   (a) On a :
   $$\begin{aligned} f_n'(x) &= ne^{-nx}\left(-nx\sin(x) + \sin(x) + x\cos(x)\right) \\ &= ne^{-nx}\left((1-nx)\sin(x) + x\cos(x)\right) \end{aligned}$$

(b) Pour $x \in \left]0, \dfrac{1}{n}\right]$, les quantités $(1-nx)$, $\sin(x)$, x, $\cos(x)$ et ne^{-nx} sont strictement positives, donc $f_n'(x) > 0$.

(c) Pour $x \in \left]\dfrac{1}{n}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $f_n'(x) = ne^{-nx}\cos(x)(1-nx)\left(\tan(x) - \dfrac{x}{nx-1}\right)$ et $ne^{-nx}\cos(x)(1-nx) < 0$, donc le signe de $f_n'(x)$ sur $\left]\dfrac{1}{n}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dépend de celui de $g_n(x) = \tan(x) - \dfrac{x}{nx-1}$. Avec $g_n'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} + \dfrac{1}{(nx-1)^2} > 0$, on déduit que g_n est strictement croissante et avec $\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^+} g_n(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g_n(x) = +\infty$, on déduit que, sur $\left]\dfrac{1}{n}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, g_n s'annule en un unique point x_n et on a $g_n(x) < 0$ pour $x \in \left]\dfrac{1}{n}, x_n\right[$, $g_n(x) > 0$ pour $x \in \left]x_n, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Donc sur $\left]\dfrac{1}{n}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, f_n' s'annule uniquement en x_n avec $f_n'(x) > 0$ pour $x \in \left]\dfrac{1}{n}, x_n\right[$ et $f_n'(x) < 0$ pour $x \in \left]x_n, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(d) De l'étude précédente, on déduit que f_n est strictement croissante sur $[0, x_n]$ et strictement décroissante sur $\left[x_n, \dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = n\dfrac{\pi}{2}e^{-n\frac{\pi}{2}} > 0$ et $f_n(0) = 0$, donc $\sup\limits_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |f_n(x)| = f_n(x_n)$.

(e) Avec $f_n'\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0$ et $f_n'\left(\dfrac{2}{n}\right) = -ne^{-2}\cos\left(\dfrac{2}{n}\right)\left(\tan\left(\dfrac{2}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right) < 0$ (on a $\tan(x) > x$ pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$), on déduit que $x_n \in \left]\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right[$ et

$$0 < f_n(x_n) \leq 2\sin\left(\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui implique la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Enfin avec $\sup\limits_{\mathbb{R}^+} |f_n| = \max\left(\sup\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |f_n|, \sup\limits_{\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[} |f_n|\right)$, on en déduit la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5.4. *Montrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynomiales, c'est alors une fonction polynomiale.*

Solution. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales, cette suite vérifie alors le critère de Cauchy uniforme, donc pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier naturel n_ε tel que :

$$\forall n > m \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |P_n(x) - P_m(x)| < \varepsilon$$

En particulier, on a $|P_n(x) - P_{n_\varepsilon}(x)| < \varepsilon$, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$ la fonction polynomiale $P_n - P_{n_\varepsilon}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, elle est donc constante. Il existe donc une suite de réels $(c_n)_{n \geq n_\varepsilon}$ telle que $P_n = P_{n_\varepsilon} + c_n$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. La suite $(P_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ étant convergente vers $f(0)$, on déduit que la suite $(c_n)_{n \geq n_\varepsilon}$ converge vers $f(0) - P_{n_\varepsilon}(0)$ et pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \geq n_\varepsilon}} P_n(x) = P_{n_0}(x) + \lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \geq n_\varepsilon}} c_n = P_{n_0}(x) + f(0) - P_{n_0}(0)$$

La fonction f est donc polynomiale.

Exercice 5.5. *Montrer que la série de fonctions $\sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ est uniformément convergente sur $[0,1]$ mais pas normalement convergente.*

Solution. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k = \frac{1 + (-1)^n t^{(n+1)}}{1+t}$ et en intégrant sur $[0,x]$ pour $x \in [0,1]$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{(n+1)}}{1+t} dt$, ce qui nous donne :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right| = \int_0^x \frac{t^{(n+1)}}{1+t} dt \leq \int_0^x t^{(n+1)} dt = \frac{x^{n+2}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

Il en résulte que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. La série numérique $\sum \|f_n\|_\infty = \sum \frac{1}{n}$ étant divergente, la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur $[0,1]$.

Exercice 5.6. *On désigne par $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites de fonctions définies par :*

$$U_n(x) = \frac{x^n (1-x)^n}{n!}, \quad L_n(x) = U_n^{(n)}(x), \quad R_n(x) = \int_0^1 e^{xt} L_n(t)\, dt$$

pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que pour toute fonction f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on a :*
$$\int_0^1 f(t) L_n(t)\, dt = (-1)^n \int_0^1 f^{(n)}(t) U_n(t)\, dt \tag{5.2}$$
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, $R_n(x)$ est non nul.*
3. *Calculer $\int_0^1 e^{xt} t^k dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$.*

4. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique couple (P_n, Q_n) de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré égal à n tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ R_n(x) = \frac{Q_n(x)e^x - P_n(x)}{x^{n+1}}$$

5. *Montrer que pour tout réel x on a, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x^{n+1}R_n(x)\right) = 0$.*
6. *Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Z}^*$, le réel e^r est irrationnel, puis que pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$, le réel e^r est irrationnel.*

Solution.

1. Pour $n = 0$, on a $L_0(x) = U_0(x) = 1$ et l'égalité (5.2) est trivialement vérifiée. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en remarquant que 0 et 1 sont racines d'ordre n de la fonction polynomiale U_n, on a $U_n^{(k)}(0) = U_n^{(k)}(1) = 0$ pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$. Une première intégration parties donne pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)L_n(t)\,dt &= \left[f(t)U_n^{(n-1)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f'(t)U_n^{(n-1)}(t)\,dt \\ &= -\int_0^1 f'(t)U_n^{(n-1)}(t)\,dt\end{aligned}$$

puis par récurrence finie on vérifie que pour tout entier k compris entre 0 et n, on a $\displaystyle\int_0^1 f(t)L_n(t)\,dt = (-1)^k\int_0^1 f^{(k)}(t)U_n^{(n-k)}(t)\,dt$. C'est vrai pour $k = 0$ et supposant le résultat acquis pour $k \in \{0,\cdots,n-1\}$, une intégration parties nous donne :

$$\begin{aligned}(-1)^k\int_0^1 f(t)L_n(t)\,dt &= \int_0^1 f^{(k)}(t)U_n^{(n-k)}(t)\,dt \\ &= \left[f^{(k)}(t)U_n^{(n-(k+1))}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f^{(k+1)}(t)U_n^{(n-(k+1))}(t)\,dt \\ &= -\int_0^1 f^{(k+1)}(t)U_n^{(n-(k+1))}(t)\,dt\end{aligned}$$

soit le résultat au rang $k+1$. Pour $k = n$, on a le résultat annoncé.

2. Appliquant le résultat de la question précédente à la fonction $f_x : t \mapsto e^{xt}$ pour tout réel non nul x, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}R_n(x) &= \int_0^1 e^{xt}L_n(t)\,dt = (-1)^n x^n\int_0^1 e^{xt}U_n(t)\,dt \\ &= \frac{(-1)^n x^n}{n!}\int_0^1 e^{xt}t^n(1-t)^n\,dt \neq 0\end{aligned}$$

car $e^{xt}t^n(1-t)^n > 0$ pour tout $t \in \left]0,1\right[$, la fonction intégrée étant continue sur le segment $[0,1]$.

3. Pour $k = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi(x) = \int_0^1 e^{xt} dt = \frac{e^x - 1}{x}$$

La fonction $(x, t) \mapsto e^{xt}$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et l'intégration se faisant sur un segment, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ de dérivées d'ordre $k \geq 1$ données par :

$$\varphi^{(k)}(x) = \int_0^1 e^{xt} t^k dt = \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)^{(k)} = \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(-1)^j j!}{x^{j+1}}\right) e^x + \frac{(-1)^{k+1} k!}{x^{k+1}}$$
$$= \left(\left(\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j k!}{(k-j)!} x^{k-j}\right) e^x + (-1)^k k!\right) \frac{1}{x^{k+1}} = \frac{A_k(x) e^x + (-1)^{k+1} k!}{x^{k+1}}$$

où $A_k \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire de degré k. Cette formule est également valable pour $k = 0$ avec $A_0(x) = 1$.

4. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{n+k}\right)^{(n)} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n+k)!}{k!} x^k$$
$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} x^k$$

et :

$$x^{n+1} R_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} x^{n+1} \int_0^1 e^{xt} t^k dt$$
$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} \left(A_k(x) e^x + (-1)^{k+1} k!\right) x^{n-k}$$
$$= Q_n(x) e^x - P_n(x)$$

où $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} k! X^{n-k} \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire de degré n et :

$$Q_n(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} A_k(X) X^{n-k} \in \mathbb{Z}[X]$$

est de degré n de coefficient dominant :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n+k}{n} = L_n(1) = U_n^{(n)}(1) \neq 0$$

puisque 1 est racine d'ordre n de U_n. En remarquant que $U_n(1-x) = U_n(x)$, on déduit que $(-1)^n U_n^{(n)}(1-x) = U_n^{(n)}(x)$, soit $L_n(1-x) = (-1)^n L_n(x)$ et en particulier $L_n(1) = (-1)^n L_n(0) = (-1)^n$. L'unicité de tels polynômes P_n et Q_n résulte du fait que si $Q_n(x)e^x - P_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} Q_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P_n(x)}{e^x} = 0$, ce qui impose $Q_n = 0$ puisque Q_n est polynomiale et cela implique que $P_n = 0$.

5. Pour $x = 0$, on a $x^{n+1}R_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left|x^{n+1}R_n(x)\right| = \frac{|x|^{2n+1}}{n!}\int_0^1 e^{xt}t^n(1-t)^n\,dt \leq \frac{|x|^{2n+1}}{n!}\int_0^1 e^{xt}dt = \frac{|x|^{2n}}{n!}|e^x - 1|$$

ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x^{n+1}R_n(x)\right) = 0$.

6.

(a) Pour tout $r \in \mathbb{Z}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $r^{n+1}R_n(r) = Q_n(r)e^r - P_n(r)$ avec $p_n = P_n(r) \in \mathbb{Z}$, $q_n = Q_n(r) \in \mathbb{Z}$, $q_n e^r - p_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(q_n e^r - p_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(r^{n+1}R_n(r)\right) = 0$, donc e^r est irrationnel (corollaire 3.8).

(b) Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$. Si e^r est rationnel, il en est alors de même de $e^p = (e^r)^q$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$, ce qui est en contradiction avec ce qui précède. Donc e^r est irrationnel.

Exercice 5.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

1. *Montrer que la matrice e^A est un polynôme en A dont les coefficients dépendent de A.*
2. *Peut-on trouver un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $e^A = P(A)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?*
3. *On suppose que A est diagonalisable et on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ses valeurs propres complexes deux à deux distinctes où p est un entier compris entre 1 et n. En notant $L \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $L(\lambda_k) = e^{\lambda_k}$ pour tout entier k compris entre 1 et p, montrer que $e^A = L(A)$.*

Solution.

1. L'ensemble $\mathbb{C}[A]$ des polynômes en A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel en est un fermé. En particulier $\mathbb{C}[A]$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $e^A = \lim\limits_{k\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{k}A\right)^k$ est dans $\mathbb{C}[A]$.
2. Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $e^A = P(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout nombre réel λ, on a alors :

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{diag}(\lambda,0,\cdots,0)} &= \mathrm{diag}\left(e^\lambda, 1, \cdots, 1\right) = P(\mathrm{diag}(\lambda, 0, \cdots, 0)) \\ &= \mathrm{diag}(P(\lambda), P(0), \cdots, P(0)) \end{aligned}$$

qui entraîne que $e^{\lambda} = P(\lambda)$ pour tout réel λ, ce qui est incompatible avec $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{e^{\lambda}}{\lambda^m} = +\infty$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{|P(\lambda)|}{\lambda^m} = 0$ pour $m > \deg(P)$.

3. La matrice A étant diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale, de sorte que $L(A) = PL(D)P^{-1} = Pe^{D}P^{-1}$ et en utilisant la continuité du produit matriciel, on a :

$$e^{A} = \lim_{k \to +\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} A^j = \lim_{k \to +\infty} P \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D^j \right) P^{-1} = Pe^{D}P^{-1}$$

soit $e^{A} = L(A) = \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{e^{\lambda_k}}{\prod\limits_{1 \leq j \neq k \leq p} (\lambda_k - \lambda_j)} \prod\limits_{1 \leq j \neq k \leq p} (A - \lambda_j I_n)$.