

Suites réelles ou complexes

3.1 Prérequis

L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels est supposé construit avec les propriétés suivantes :

- c'est un corps commutatif totalement ordonné ;
- il contient l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels ;
- il est archimédien, c'est-à-dire que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+,*}, \forall b \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}^* \mid na > b.$$

Pour tout réel x , on note $E(x)$ la partie entière de x , c'est l'entier relatif défini par :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

L'existence de cette partie entière se déduit du caractère archimédien de \mathbb{R} .

La corps \mathbb{C} des nombres complexes est également supposée construit.

Les éléments de \mathbb{R} ou \mathbb{C} seront appelés scalaires.

Les résultats classiques sur les fonctions continues ou dérivables d'une variable réelle sont supposés connus de même que les fonctions usuelles \exp , \ln , \sin , \dots . Ces notions seront étudiées plus loin.

3.2 Généralités sur les suites réelles ou complexes

Les réels étant des complexes particuliers, les suites considérées sont a priori complexes.

On rappelle qu'une suite d'éléments de nombres complexes est une application définie sur \mathbb{N} (ou une partie de \mathbb{N}) à valeurs dans \mathbb{C} . On note usuellement $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ une telle suite.

Pour simplifier, on suppose que les suites sont définies sur \mathbb{N} et on note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de nombres complexes.

Dans l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit la somme des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et le produit de u par le scalaire λ par $\lambda u = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Muni de ces deux lois $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel sur \mathbb{C} .

On définit également le produit des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u \cdot v = (u_n \cdot v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui confère à $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une structure d'algèbre commutative sur \mathbb{C} .

Une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- constante si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n ;$$

- stationnaire (ou plus précisément stationnaire à partir d'un certain rang) si :

$$\exists p \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq p, u_{n+1} = u_n ;$$

- périodique s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n.$$

Définition 3.1 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{C} . On dit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite (ou une sous suite) de u s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Par exemple, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ sont extraites de u .

On peut vérifier par récurrence que si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n.$$

Cette propriété est souvent utilisée.

Définition 3.2 On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée [resp. minorée] si l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majorée [resp. minorée] dans \mathbb{R} , ce qui signifie qu'il existe un réel M [resp. m] tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M \text{ [resp. } m \leq u_n.]$$

Définition 3.3 On dit qu'une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans \mathbb{C} , ce qui signifie qu'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

Exercice 3.1 Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est bornée.

Solution 3.1 Avec $k! \geq 2^{k-1}$ pour tout entier $k \geq 1$, on déduit que pour tout $n > 1$, on a :

$$\begin{aligned} 0 < u_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Exercice 3.2 Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$ est bornée.

Solution 3.2 La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t}$ étant décroissante sur \mathbb{R}^{+*} , on a :

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

et donc pour $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

soit :

$$u_n + \frac{1}{n+1} - 1 + \ln(n) \leq \ln(n+1) \leq u_n + \ln(n)$$

ou encore :

$$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} + 1 < 1 + \ln(2).$$

Exercice 3.3 Montrer que, pour tout réel $\alpha > 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

est bornée.

Solution 3.3 Il est clair que u est minorée par 0.

La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur \mathbb{R}^{+*} , on a :

$$\forall k \geq 2, \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_{k-1}^k \frac{dt}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}$$

et donc pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Exercice 3.4 On désigne par $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ les suites définies par :

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \cos(t^2) dt, \quad v_n = \int_1^{\sqrt{n}} \cos(t^2) dt$$

et on se propose de montrer que ces deux suites sont bornées.

1. Montrer que pour tout réel $\alpha > 1$ et tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}.$$

2. Montrer que pour tout réel $\alpha > 1$ la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$w_n = \int_1^n \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$$

est bornée.

3. Montrer que :

$$v_n = \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

4. En utilisant une intégration par parties et le résultat de la question 2. pour une valeur particulière de α , montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est bornée.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

Solution 3.4

1. On a :

$$\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \leq \frac{1}{\alpha-1}.$$

2. On a :

$$|w_n| \leq \int_1^n \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} dx \leq \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}.$$

3. Le changement de variable $x = t^2$ donne $dx = 2t dt = 2\sqrt{x} dt$ et :

$$v_n = \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

4. Une intégration par parties donne en posant :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{x}}, & u' = -\frac{1}{2} \frac{1}{x\sqrt{x}} \\ v' = \cos(x), & v = \sin(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2v_n &= \left[\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \right]_1^n + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} - \sin(1) + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

avec $\left| \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$ et $\left(\int_1^n \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} dx \right)_{n \geq 1}$ borné. Il en résulte que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

5. Résulte de $u_n = \int_0^1 \cos(t^2) dt + v_n$.

3.3 Suites convergentes ou divergentes

De manière intuitive, on peut dire qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un scalaire ℓ si l'écart $|u_n - \ell|$ peut être rendu aussi petit que l'on souhaite dès que n est assez grand.

Définition 3.4 On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente s'il existe un scalaire ℓ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Dans l'assertion (3.1), les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges.

Il est parfois commode de se limiter à $\varepsilon \in]0, 1[$ sans que cela ne soit restrictif.

En utilisant l'inégalité triangulaire dans \mathbb{C} , on montre facilement que si une suite converge, alors sa limite ℓ est uniquement déterminée. En effet, s'il existe deux scalaires ℓ et ℓ' vérifiant (3.1), on peut alors trouver pour tout réel $\varepsilon > 0$ un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - u_n) + (u_n - \ell')| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon,$$

ce qui équivaut à $\ell - \ell' = 0$.

En cas de convergence, on écrira $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Exercice 3.5 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Solution 3.5 Pour $\varepsilon > 0$ donné il existe un entier $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (\mathbb{R} est archimédien), ce qui implique que pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. On a donc bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Le résultat suivant, qui est élémentaire, est souvent utile pour montrer la convergence d'une suite.

Théorème 3.1 Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes pour laquelle on peut trouver une suite $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ et $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$ à partir d'un certain rang, où ℓ est un nombre complexe donné, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon_n < \varepsilon.$$

■

De l'inégalité :

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

valable pour tous scalaires a, b , on déduit, en utilisant le théorème précédent, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (|u_n|) = |\ell|.$$

Exercice 3.6 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.

Solution 3.6 Se déduit de $\left| \frac{\cos(n)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 3.7 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Solution 3.7 Se déduit de :

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{n} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Exercice 3.8 Montrer que pour tout nombre complexe λ , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}} = 0$.

Solution 3.8 Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > |\lambda|$. Pour tout $n > n_0$, on a $n_0 + k > |\lambda|$ pour tout k compris entre 1 et $n - n_0 - 1$, et :

$$0 \leq \left| \frac{\lambda^n}{n!} \right| = \left| \frac{\lambda^{n_0}}{n_0!} \right| \frac{|\lambda|^{n-n_0}}{(n_0+1) \cdots n} \leq \left| \frac{\lambda^{n_0}}{n_0!} \right| \frac{|\lambda|^{n-n_0}}{|\lambda|^{n-n_0-1} n} = \left| \frac{\lambda^{n_0}}{n_0!} \right| \frac{|\lambda|}{n}$$

et en conséquence $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}} = 0$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on déduit le résultat suivant.

Théorème 3.2 Une suite convergente est bornée.

Démonstration. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n > n_0, |u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|$$

et en posant $M = \max\{|u_0|, \dots, |u_{n_0}|, 1 + |\ell|\}$, on a $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Le résultat qui suit se déduit immédiatement de la définition d'une suite convergente.

Théorème 3.3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$.

1. Si $\ell > 0$ [resp. $\ell < 0$] on a alors $u_n > 0$ [resp. $u_n < 0$] à partir d'un certain rang.
2. Si u_n est positif [resp. négatif] à partir d'un certain rang, on a alors $\ell \geq 0$ [resp. $\ell \leq 0$].

Démonstration.

1. Pour $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \frac{\ell}{2},$$

soit :

$$\forall n \geq n_0, -\frac{\ell}{2} + \ell < u_n < \frac{\ell}{2} + \ell$$

et donc :

$$\forall n \geq n_0, u_n > \frac{\ell}{2} > 0.$$

Pour $\ell < 0$, on travaille avec la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Se déduit facilement du premier point.

De manière générale, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell \neq 0$ dans \mathbb{C} , entraîne $|u_n| \neq 0$ (et même $|u_n| > \frac{|\ell|}{2}$, comme vu dans la démonstration du théorème précédent) à partir d'un certain rang et $u_n \neq 0$ à partir de ce même rang. ■

Le résultat suivant est souvent utilisé pour prouver la convergence de suites réelles.

Théorème 3.4 Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq w_n.$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$.

Démonstration. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un entier naturel n_0 vérifiant :

$$\forall n \geq n_0, \ell - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon,$$

donc

$$\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

La suite u est donc convergente vers ℓ . ■

Exercice 3.9 Étudier la suite $u = \left(\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \right)_{n \geq 1}$.

Solution 3.9 Pour tout entier $k \geq 1$, on a $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$, ce qui entraîne :

$$v_n = \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq w_n = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Avec $|v_n - 1| = \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{1}{n}$ et $|w_n - 1| = \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n}$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

L'exercice qui suit nous fournit une démonstration relativement simple de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

Exercice 3.10 Montrer que pour tout réel x , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$$

où $[\cdot]$ est la partie entière, converge vers $\frac{x}{2}$.

Solution 3.10 Pour tout entier k compris entre 1 et n , on a :

$$[kx] \leq kx < [kx] + 1$$

ou encore :

$$0 \leq kx - [kx] < 1$$

et :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n kx - \sum_{k=1}^n [kx] < n$$

soit :

$$0 \leq \frac{n(n+1)}{2}x - \sum_{k=1}^n [kx] < n$$

ce qui donne :

$$0 \leq \frac{n+1}{2n}x - u_n < \frac{1}{n}$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{x}{2}$.

Définition 3.5 Une suite non convergente est dite divergente.

La divergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut se traduire par :

$$\forall \ell \in \mathbb{C}, \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 \mid |u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

Une suite non bornée est donc divergente.

Exercice 3.11 En utilisant la définition, montrer que la suite $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Solution 3.11 Si cette suite converge vers un réel ℓ , la suite $|u| = (|(-1)^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est constante égale à 1 va converger vers $|\ell|$ et nécessairement $\ell = \pm 1$.

En écrivant que pour $\varepsilon = 1$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, |(-1)^n - \ell| < 1,$$

et en prenant $n \geq n_0$ de la parité contraire à celle de ℓ , on aboutit à $2 < 1$ qui est impossible. La suite u est donc divergente.

Le résultat précédent est un cas particulier du suivant.

Exercice 3.12 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{Z} . Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, elle est stationnaire.

Solution 3.12 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbb{Z} convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - \ell| + |\ell - u_{n_0}| < \frac{1}{2}$$

ce qui implique que :

$$\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$$

puisque les u_n sont entiers. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc stationnaire et $\ell \in \mathbb{Z}$. La réciproque est évidente.

Parmi les suites réelles divergentes, on traite à part celles qui tendent vers l'infini.

Définition 3.6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, u_n > M.$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, u_n < m.$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Une suite qui tend vers $+\infty$ est nécessairement positive à partir d'un certain rang.

On peut remarquer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si, et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$.

Si $u_n = \frac{1}{v_n}$ avec $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ si, et seulement si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Dans la définition ci-dessus, les inégalités peuvent être larges ou strictes et on peut se limiter à $M > 0$ et $m < 0$ sans que cela ne soit restrictif.

Une suite qui tend vers l'infini (i. e. vers $+\infty$ ou $-\infty$) est non bornée donc divergente.

Une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$ est divergente puisque non bornée.

Théorème 3.5 Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes pour laquelle on peut trouver une suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ et $|u_n| \geq v_n$ à partir d'un certain rang alors la suite u diverge.

Démonstration. On a :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, |u_n| \geq v_n > M,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$ est u est divergente. ■

Exercice 3.13 Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

Solution 3.13 Pour $M > 0$ donné, on a $n^\alpha > M$ si, et seulement si, $\alpha \ln(n) > \ln(M)$ ce qui est encore équivalent à $n > e^{\frac{\ln(M)}{\alpha}}$ (les fonctions \ln et \exp sont strictement croissantes). Il suffit donc de prendre $n_0 > e^{\frac{\ln(M)}{\alpha}}$.

Exercice 3.14 Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

Solution 3.14 Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$, on peut alors trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier n_0 tel que :

$$\forall n > n_0, |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n| < \varepsilon,$$

ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

Plus généralement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+p} - u_n) = 0$ pour tout entier $p \geq 1$.

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite $u = (\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Cette suite est divergente puisque non bornée et pour $n \geq 1$, on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On peut aussi considérer, plus généralement, la suite $u = (n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\alpha \in]0, 1[$. Cette suite est divergente puisque non bornée et pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} (n+1)^\alpha - n^\alpha &= [t^\alpha]_n^{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{\alpha}{t^{1-\alpha}} dt \\ &\leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

puisque $1 - \alpha > 0$.

On peut aussi utiliser le théorème des accroissements finis pour écrire que :

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha \xi_n^{\alpha-1}$$

avec ξ_n compris entre n et $n+1$, ce qui donne $\alpha \xi_n^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\xi_n^{1-\alpha}} \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$.

Ou encore écrire que :

$$0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right) \leq n^\alpha \left(1 + \frac{1}{n} - 1 \right) = \frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$

Exercice 3.15 Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$ alors, pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{\varphi(n)} - u_n) = 0$.

Solution 3.15 En utilisant l'inégalité $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$, on peut alors trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier n_0 tel que :

$$\forall n > n_0, |u_{\varphi(n)} - u_n| \leq |u_{\varphi(n)} - \ell| + |\ell - u_n| < \varepsilon,$$

ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{\varphi(n)} - u_n) = 0$.

Exercice 3.16 Montrer que les suites $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $w = (\ln(n))_{n \geq 1}$ sont divergentes.

Solution 3.16 Résulte de :

$$|u_{n+1} - u_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2,$$

$$|v_{2n} - v_n| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

et :

$$|w_{2n} - w_n| = \ln(2).$$

On peut remarquer que la deuxième suite est telle que pour tout entier $p \geq 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+p} - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{n+k} \right) = 0$$

(somme finie de suites convergentes vers 0 - voir le théorème 3.14, page 48 -).

Exercice 3.17 Montrer que la suite $u = (\ln(\ln(n)))_{n \geq 2}$ est telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} - u_n = 0$ et non convergente.

Solution 3.17 On a :

$$u_{2n} - u_n = \ln(\ln(2n)) - \ln(\ln(n)) = \ln \frac{\ln(n) + \ln(2)}{\ln(n)} = \ln\left(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)}\right)$$

et comme $\frac{\ln(2)}{\ln(n)}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il en est de même pour $u_{2n} - u_n =$

$$\ln\left(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)}\right).$$

Pourtant si l'on forme : $u_{n^2} - u_n$ on a :

$$u_{n^2} - u_n = \ln((\ln n^2)) - \ln(\ln(n)) = \ln\left(\frac{2 \ln(n)}{\ln(n)}\right) = \ln 2.$$

Pour étudier une suite, il est parfois commode de la comparer à une suite de référence. Les suites géométriques font parties de ces suites de référence.

Exercice 3.18 Étudier la suite géométrique $u = (a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $a \in \mathbb{C}$.

Solution 3.18 Si $a = 0$ alors u est stationnaire sur 0.

Pour $|a| > 1$, l'inégalité de Bernoulli (ou plus simplement la formule du binôme de Newton) nous dit que $|a|^n \geq 1 + n(|a| - 1)$ et comme $|a| - 1 > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n(|a| - 1)) = +\infty$, ce qui entraîne que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a|^n = +\infty$ et la suite u diverge.

Pour $0 < |a| < 1$, en écrivant que $|a|^n = \frac{1}{\frac{1}{|a|^n}}$ avec $\frac{1}{|a|} > 1$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$.

Pour $|a| = 1$, on a $a = e^{i\theta}$.

Si $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (soit $a = 1$), alors u est constante égale à 1.

Supposons que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{in\theta}) = \ell$. Avec :

$$|u_{n+1} - u_n|^2 = |e^{in\theta} (1 - e^{i\theta})|^2 = |1 - e^{i\theta}|^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right),$$

on déduit que $\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) = 0$ et $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui est contradictoire. La suite u est donc divergente.

On peut aussi dire que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{in\theta}) = \ell$ alors $|\ell| = \lim_{n \rightarrow +\infty} (|e^{in\theta}|) = 1$, donc $\ell \neq 0$ et

$$e^{i\theta} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = 1, \text{ ce qui contredit } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

Exercice 3.19 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

1. Montrer que s'il existe un réel $\lambda \in [0, 1[$ tel que $|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n|$ à partir d'un certain rang n_0 , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.
2. Montrer que s'il existe un indice n_0 tel que $u_{n_0} \neq 0$ et s'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que $|u_{n+1}| \geq \lambda |u_n|$ pour tout $n \geq n_0$, alors u diverge.
3. Montrer que si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0 , et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = \lambda \in [0, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.
4. Montrer que si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0 , et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = \lambda > 1$, alors u diverge.
5. Trouver $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
6. Trouver $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
7. Trouver $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10$.

Solution 3.19

1. Si $\lambda = 0$, alors u est stationnaire sur 0 à partir du rang $n_0 + 1$.

On suppose donc que $\lambda \in]0, 1[$.

Montrons par récurrence sur $n \geq n_0$ que $|u_n| \leq u_{n_0} \lambda^{n-n_0}$.

C'est vrai pour $n = n_0$.

Supposons que pour une valeur $n \geq n_0$ on ait $|u_n| \leq u_{n_0} \lambda^{n-n_0}$, comme $|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n|$, on a $|u_{n+1}| \leq u_{n_0} \lambda^{n+1-n_0}$ et la récurrence est établie.

Pour $\lambda \in]0, 1[$ la suite géométrique de terme général $\frac{u_{n_0}}{\lambda^{n_0}} \lambda^n$ converge vers 0, et comme cette suite majore la suite positive $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut affirmer que cette dernière converge aussi vers 0 et il en est de même de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Si $u_{n_0} \neq 0$, on vérifie par récurrence que $u_n \neq 0$ pour $n \geq n_0$. En appliquant le résultat précédent à la suite $\left(\frac{1}{|u_n|}\right)_{n \geq n_0}$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|u_n|}\right)$, ce qui équivaut à $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|u_n|) = +\infty$ et u diverge.

3. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lambda$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow \lambda - \varepsilon < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \lambda + \varepsilon.$$

Dans le cas où $\lambda \in [0, 1[$, on peut choisir ε assez petit pour que $\rho = \lambda + \varepsilon$ soit strictement inférieur à 1 et on a alors $|u_{n+1}| \leq \rho |u_n|$ pour tout $n \geq n_0$ avec $\rho \in]0, 1[$, ce qui implique $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.

4. Le résultat précédent appliqué à la suite v définie par $v_n = \frac{1}{|u_n|}$ pour n assez grand, nous dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|u_n|) = +\infty$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

5. On considère la suite de terme général $u_n = n + 1$.

6. Il suffit de prendre $u_n = \frac{1}{n+1}$.

7. On considère la suite de terme général $u_n = 10 + \frac{1}{n+1}$.

Exercice 3.20 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.

1. Montrer que s'il existe un réel $\lambda \in [0, 1[$ tel que $\sqrt[n]{|u_n|} \leq \lambda$ à partir d'un certain rang n_0 , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.

2. Montrer que s'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que $\sqrt[n]{|u_n|} \geq \lambda$ à partir d'un certain rang n_0 , alors u diverge.

3. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = \lambda \in [0, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.

4. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = \lambda > 1$, alors u diverge.

5. Trouver $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

6. Trouver $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

7. Trouver $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10$.

Solution 3.20

1. Résulte de $0 \leq |u_n| \leq \lambda^n$ pour $n \geq n_0$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda^n) = 0$ ($\lambda \in [0, 1[$).

2. Résulte de $|u_n| \geq \lambda^n$ pour $n \geq n_0$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda^n) = +\infty$ ($\lambda > 1$).

3. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = \lambda$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow \lambda - \varepsilon < \sqrt[n]{|u_n|} < \lambda + \varepsilon.$$

Dans le cas où $\lambda \in [0, 1[$, on peut choisir ε assez petit pour que $\rho = \lambda + \varepsilon$ soit strictement inférieur à 1 et on a alors $\sqrt[n]{|u_n|} \leq \rho$ pour tout $n \geq n_0$ avec $\rho \in [0, 1[$, ce qui implique $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.

4. Le résultat précédent appliqué à la suite v définie par $v_n = \frac{1}{|u_n|}$ pour n assez grand (pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $n \geq n_0$, on a $\sqrt[n]{|u_n|} > \lambda - \varepsilon > 0$ et $u_n \neq 0$) nous dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|u_n|) = +\infty$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
5. On considère la suite de terme général $u_n = n$.
6. Il suffit de prendre $u_n = \frac{1}{n+1}$.
7. On considère la suite définie par $u_n = \frac{10}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pour $n \geq 1$.

En utilisant le théorème de Césaro, on peut montrer le résultat suivant.

Théorème 3.6 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe telle que u_n soit non nul à partir d'un certain rang. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = \lambda$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|} \right) = \lambda$.

Démonstration. Voir l'exercice 3.74. ■

Remarque 3.1 La réciproque du théorème précédent est fausse (voir l'exercice 3.74.).

Exercice 3.21 Montrer que la suite $u = \left(\frac{n!}{n^n} \right)_{n \geq 1}$ est convergente vers 0.

Solution 3.21 Se déduit de $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right) = \frac{1}{e} < 1.$$

Exercice 3.22 Montrer, en utilisant le théorème précédent, que pour tout nombre complexe λ , la suite $u = \left(\frac{\lambda^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

Solution 3.22 Pour $\lambda = 0$ c'est clair et pour $\lambda \neq 0$ le résultat se déduit de :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{|\lambda|}{n+1} \right) = 0.$$

Exercice 3.23 Montrer que si $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ soit minorée par un réel $\lambda > 0$, alors la suite réelle $u = \left(\sum_{k=1}^n f(k) \right)_{n \geq 1}$ est divergente.

Solution 3.23 On a :

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^n f(n+k) \geq \lambda \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \geq \lambda \frac{n}{2n} = \frac{\lambda}{2} > 0$$

et la suite diverge.

Exercice 3.24 Montrer que pour tout $\alpha \leq 1$, la suite réelle de terme général $u = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \right)_{n \geq 1}$ est divergente.

Solution 3.24 Il suffit d'appliquer le résultat précédent à

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$$

avec $xf(x) = x^{1-\alpha} \geq 1$ pour $\alpha \leq 1$ et $x \geq 1$.

3.4 Valeurs d'adhérence

Définition 3.7 On dit qu'un scalaire a est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 3.1 On considère la suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+1} \right).$$

Les réels 1 et -1 sont valeurs d'adhérence de cette suite car la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 1 et la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ vers -1 .

Le résultat suivant est parfois utilisé par sa contraposée pour prouver la divergence d'une suite.

Théorème 3.7 Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence. Autrement dit : si une suite est convergente, alors toute suite extraite converge vers la même limite.

Démonstration. Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$. Pour tout réel ε strictement positif, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

et pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, on a :

$$\forall n \geq n_0, \varphi(n) \geq n \geq n_0$$

ce qui implique que :

$$\forall n \geq n_0, |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon.$$

La suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers ℓ . ■

L'exercice qui suit nous montre que la réciproque est fautive, c'est-à-dire qu'une suite qui n'a qu'une valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente.

Exercice 3.25 Montrer que la suite $u = (n^{(-1)^n})_{n \in \mathbb{N}}$ admet 0 comme unique valeur d'adhérence et est divergente.

Solution 3.25 De $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, on déduit que 0 est une valeur d'adhérence de u .

Si $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}$ est une valeur d'adhérence non nulle de u , où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, on a alors $\ell > 0$ (puisque $u_n > 0$ pour tout n) et :

$$|\ln(\ell)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\ln(u_{\varphi(n)})| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |(-1)^{\varphi(n)} \varphi(n)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty,$$

ce qui est impossible. Donc 0 est l'unique valeur d'adhérence de u .

Et cette suite est divergente puisque non majorée ($u_{2n} = 2n$).

On peut aussi utiliser la suite définie par :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ n & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Comme conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass, on montrera le résultat suivant (théorème 3.20).

Théorème 3.8 Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Théorème 3.9 Une suite réelle est divergente, si et seulement si, elle vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- elle est non bornée ;
- elle est bornée et admet au moins deux valeurs d'adhérence.

Exercice 3.26 Montrer qu'une suite périodique convergente est nécessairement constante.

Solution 3.26 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite périodique convergente vers ℓ et périodique de période p où p est un entier strictement positif.

Pour tout entier naturel k , la suite extraite $(u_{pn+k})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante de valeur commune u_k et convergente vers ℓ . On a donc $u_k = \ell$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La réciproque est évidente.

Exercice 3.27 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes. À quelle condition la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Solution 3.27 En notant ℓ et ℓ' les limites respectives des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, montrons que u est convergente si, et seulement si, $\ell = \ell'$.

Si $\ell \neq \ell'$, alors u admet au moins deux valeurs d'adhérences distinctes et en conséquence ne peut converger.

Si $\ell = \ell'$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver des entiers n_1 et n_2 tels que :

$$\begin{cases} \forall n \geq n_1, |u_{2n} - \ell| < \varepsilon \\ \forall n \geq n_2, |u_{2n+1} - \ell'| < \varepsilon \end{cases}$$

et en notant $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$, on a :

$$\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Exercice 3.28 Montrer que si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite complexe telle que les trois suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes (pas nécessairement vers la même limite), alors u est convergente.

Solution 3.28 Notons ℓ , ℓ' et ℓ'' les limites respectives des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$.

La suite $(u_{6n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui est extraite de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ et ℓ'' , ce qui entraîne $\ell = \ell''$ du fait de l'unicité de la limite. De même en remarquant que $(u_{6n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$, on déduit que $\ell' = \ell''$ et $\ell = \ell'$, c'est-à-dire que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, ce qui équivaut à la convergence de u .

Le résultat qui suit est classique, même si démonstration n'est pas élémentaire.

Exercice 3.29 On se propose de montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u = (\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$.

On dit qu'un sous-groupe additif H de $(\mathbb{R}, +)$ est discret si pour tout compact K de \mathbb{R} , l'intersection $H \cap K$ est finie.

1. Montrer que les sous-groupes additifs de \mathbb{R} discrets sont de la forme :

$$\mathbb{Z}\alpha = \{p\alpha \mid p \in \mathbb{Z}\},$$

où α est un réel.

2. Montrer que les sous-groupes additifs de \mathbb{R} sont denses ou discrets.
3. Soient a, b deux réels non nuls. Montrer que le groupe additif $G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \{pa + qb \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est discret [resp. dense] si, et seulement si, $\frac{a}{b}$ est rationnel [resp. irrationnel].
4. On note $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le cercle unité dans le plan complexe.
- (a) Montrer que $\{e^{in} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans Γ .
- (b) Montrer que l'ensemble $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$, ce qui signifie que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u = (\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$.

Solution 3.29

1. Il est clair que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ de la forme $\mathbb{Z}\alpha$ est discret. En effet pour $\alpha = 0$ c'est clair et pour $\alpha \neq 0$ tout compact K de \mathbb{R} est contenu dans un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et il n'y a qu'un nombre fini d'entiers p vérifiant $a \leq p\alpha \leq b$. Réciproquement si H est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$, il existe alors un réel a dans $H \cap \mathbb{R}_+^*$ ($0 \neq a \in H \Rightarrow -a \in H$) et $]0, a] \cap H$ est fini non vide, il admet donc un plus petit élément $\alpha > 0$. De $\alpha \in H$ on déduit que $\mathbb{Z}\alpha \subset H$. De plus, pour tout $x \in H$ il existe un entier relatif k tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha \leq a$ ($k = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$) et avec $x - k\alpha \in H \cap \mathbb{R}_+$ on déduit du caractère minimal de α que $x - k\alpha = 0$, soit $x = k\alpha \in \mathbb{Z}\alpha$. On a donc en définitive $H = \mathbb{Z}\alpha$.
2. Si H un sous-groupe additif de \mathbb{R} non réduit à $\{0\}$ alors :

$$K = H \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$$

et cet ensemble est minoré par 0, il admet donc une borne inférieure α .

On distingue deux cas.

Si $\alpha > 0$, alors $\alpha \in K$. En effet dans le cas contraire, par définition de la borne inférieure, on peut trouver $x \in K$ tel que $\alpha < x < 2\alpha$ (on suppose que $\alpha \notin H$). Pour la même raison, on peut trouver $y \in K$ tel que $\alpha < y < x$. On a alors $0 < x - y < \alpha$ avec $x - y \in H \cap \mathbb{R}_+^*$, ce qui est contradictoire avec la définition de la borne inférieure α . Avec la structure de groupe additif de H , on déduit alors que $H = \mathbb{Z}\alpha$. En effet, $\mathbb{Z}\alpha \subset H$ du fait que α appartient au groupe H et pour tout x dans H , il existe k dans \mathbb{Z} tel que $0 \leq x - k\alpha < \alpha$, donc $x - k\alpha = 0$ et $x \in \mathbb{Z}\alpha$, c'est-à-dire que $H \subset \mathbb{Z}\alpha$.

Si $\alpha = 0$, alors H est dense dans \mathbb{R} . En effet pour $x < y$ dans \mathbb{R} , il existe z dans $H \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < z < y - x$ soit $1 < \frac{y}{z} - \frac{x}{z}$ et pour $n \in \left] \frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right[\cap \mathbb{Z}$, on a $x < nz < y$ avec $nz \in H$.

Si G est discret, alors $G = \mathbb{Z}\alpha$ et $a = p\alpha$, $b = q\alpha$ avec p et q non nuls dans \mathbb{Z} et en conséquence $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, supposons $\frac{a}{b}$ rationnel, on peut écrire $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux et on a :

$$G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \left(\mathbb{Z}\frac{p}{q} + \mathbb{Z} \right) b = (\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q) \frac{b}{q}.$$

Le théorème de Bézout nous dit que $\mathbb{Z}p + \mathbb{Z}q = \mathbb{Z}$ et donc $G = \mathbb{Z}\frac{b}{q}$, c'est-à-dire que G est discret.

3.

(a) Comme 2π est irrationnel, le groupe $H = \mathbb{Z}2\pi + \mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} . Avec la 2π -périodicité, la continuité et la surjectivité de l'application $f : x \mapsto e^{ix}$ de \mathbb{R} sur Γ , on déduit alors que l'ensemble :

$$f(H) = \{e^{(2\pi m+n)i} \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} = \{e^{in} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

est dense dans Γ .

(b) Avec la continuité et la surjectivité de la projection $p : z \mapsto \Re(z)$ de Γ sur $[-1, 1]$, on déduit que l'ensemble $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$, puis par parité que l'ensemble $\{\cos(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Moins classique sont les résultats suivants.

Exercice 3.30 Soit α un réel fixé dans $]0, 1[$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \cos(n^\alpha)$ pour $n \geq 0$.

On se donne un réel $x \in [-1, 1]$ et on note θ le réel de $[0, \pi]$ défini par $x = \cos(\theta)$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\varphi(n)$ l'entier défini par :

$$\varphi(n)^\alpha \leq \theta + 2n\pi < (\varphi(n) + 1)^\alpha$$

c'est-à-dire que $\varphi(n) = E\left((\theta + 2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ (E est la fonction partie entière).

1. Montrer que φ est une fonction strictement croissante de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* .
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\theta + 2n\pi - \varphi(n)^\alpha) = 0$.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{\varphi(n)}) = x$.
4. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u est $[-1, 1]$.

Solution 3.30

1. Résulte de la croissance de la fonction partie entière (précisément si $x - y > 1$ alors $E(x) > E(y)$), de la stricte croissance de la fonction $t^{\frac{1}{\alpha}}$ et du fait que $2\pi > 1$. En effet, en posant $v_n = (\theta + 2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}}$ et en utilisant le théorème des accroissements finis, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$v_{n+1} - v_n = 2\pi \frac{1}{\alpha} \xi_n^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

où ξ_n est un réel compris entre $\theta + 2n\pi$ et $\theta + 2(n+1)\pi$. Et comme $0 < \alpha < 1$, $\xi_n > 1$, on a $\frac{1}{\alpha} \xi_n^{\frac{1}{\alpha}-1} > 1$ et $v_{n+1} - v_n > 2\pi > 1$ de sorte que $\varphi(n+1) = E(v_{n+1}) > E(v_n) = \varphi(n)$.

2. Résulte de :

$$0 \leq \theta + 2n\pi - \varphi(n)^\alpha < (\varphi(n) + 1)^\alpha - \varphi(n)^\alpha$$

et de $\lim_{p \rightarrow +\infty} ((p+1)^\alpha - p^\alpha) = 0$ (exercice 3.14).

3. Pour $n \geq 1$, on a, en utilisant l'inégalité des accroissements finis pour la fonction \cos :

$$\begin{aligned} |u_{\varphi(n)} - x| &= |\cos(\varphi(n)^\alpha) - \cos(\theta)| = |\cos(\varphi(n)^\alpha) - \cos(\theta + 2n\pi)| \\ &\leq |\theta + 2n\pi - \varphi(n)^\alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

4. La suite u étant à valeurs dans $[-1, 1]$, ses valeurs d'adhérence sont dans $[-1, 1]$ et ce qui précède nous donne l'inclusion réciproque puisqu'on a montré que tout réel $x \in [-1, 1]$ est limite d'une suite extraite de u .

Exercice 3.31 Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \cos(\ln(n))$ pour $n \geq 1$.

On se donne un réel $x \in [-1, 1]$ et on note θ le réel de $[0, \pi]$ défini par $x = \cos(\theta)$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\varphi(n)$ l'entier défini par :

$$\ln(\varphi(n)) \leq \theta + 2n\pi < \ln(\varphi(n) + 1)$$

c'est-à-dire que $\varphi(n) = E(e^{\theta+2n\pi})$ (E est la fonction partie entière).

1. Montrer que φ est une fonction strictement croissante de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* .
2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\theta + 2n\pi - \ln(\varphi(n))) = 0$.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{\varphi(n)}) = x$.
4. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u est $[-1, 1]$.

Solution 3.31

1. Résulte de la croissance de la fonction partie entière (précisément si $x - y > 1$ alors $E(x) > E(y)$), de la stricte croissance de la fonction e^t et du fait que $e^{2\pi} > 2$. En effet, en posant $v_n = e^{\theta+2n\pi}$, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$v_{n+1} - v_n = e^{\theta+2n\pi} (e^{2\pi} - 1) > 1$$

de sorte que $\varphi(n+1) = E(v_{n+1}) > E(v_n) = \varphi(n)$.

2. Résulte de :

$$0 \leq \theta + 2n\pi - \ln(\varphi(n)) < \ln(\varphi(n) + 1) - \ln(\varphi(n)) = \ln\left(1 + \frac{1}{\varphi(n)}\right)$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\varphi(n)}\right) = 0$ (φ est strictement croissante de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$).

3. Pour $n \geq 1$, on a, en utilisant l'inégalité des accroissements finis pour la fonction \cos :

$$\begin{aligned} |u_{\varphi(n)} - x| &= |\cos(\ln(\varphi(n))) - \cos(\theta)| = |\cos(\ln(\varphi(n))) - \cos(\theta + 2n\pi)| \\ &\leq |\theta + 2n\pi - \ln(\varphi(n))| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

4. La suite u étant à valeurs dans $[-1, 1]$, ses valeurs d'adhérence sont dans $[-1, 1]$ et ce qui précède nous donne l'inclusion réciproque puisqu'on a montré que tout réel $x \in [-1, 1]$ est limite d'une suite extraite de u .

3.5 Le critère de Cauchy

Définition 3.8 On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Comme pour la définition d'une suite convergente les inégalités peuvent être strictes ou larges et on peut se limiter à $\varepsilon \in]0, 1[$. De plus, comme m et n jouent des rôles symétriques, on peut se limiter à $m > n$.

Théorème 3.10 *Une suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe alors un entier naturel $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, |u_n - u_m| < 1$$

ce qui entraîne :

$$\forall n \geq n_0, |u_n| \leq |u_n - u_{n_0}| + |u_{n_0}| < 1 + |u_{n_0}|$$

et en posant :

$$M = \max \{|u_0|, \dots, |u_{n_0}|, 1 + |u_{n_0}|\}$$

on a $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. ■

Théorème 3.11 *Une suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers ℓ . Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier positif n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

et :

$$\forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, |u_n - u_m| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| < 2\varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. ■

On admet que la réciproque est vrai, c'est-à-dire le résultat fondamental suivant.

Théorème 3.12 *Une suite réelle ou complexe est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.*

Ce résultat se traduit en disant que l'espace métrique \mathbb{C} muni de la norme usuelle est complet.

Le résultat suivant est souvent utilisé pour montrer qu'une suite est de Cauchy.

Théorème 3.13 *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans \mathbb{C} telle qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq n_0}$ de réels positifs vérifiant :*

$$\begin{cases} \forall m > n \geq n_0, |u_m - u_n| \leq \varepsilon_n, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (\varepsilon_n) = 0, \end{cases}$$

alors cette suite est de Cauchy et en conséquence convergente.

Démonstration. De $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\varepsilon_n) = 0$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier n_0 tel que $\varepsilon_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne $|u_m - u_n| < \varepsilon$ pour $m > n \geq n_0$. ■

Exercice 3.32 *Montrer que, pour tout nombre complexe z , la suite $(u_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ est convergente. La limite de cette suite est l'exponentielle complexe de z notée $\exp(z)$.*

Solution 3.32 Pour $m > n > 2$, on a :

$$\begin{aligned} |u_m(z) - u_n(z)| &= \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{z^k}{k!} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \left| 1 + \frac{z}{n+2} + \cdots + \frac{z^{m-n-1}}{(n+2) \cdots (m-1)m} \right| \\ &\leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{|z|}{n+2} + \frac{|z|^2}{(n+2)^2} \cdots + \frac{|z|^{m-n-1}}{(n+2)^{m-n-1}} \right) \end{aligned}$$

et en désignant par $n_0 > 2$ un entier naturel tel que $n_0 + 2 > |z|$, on a pour $m > n \geq n_0$:

$$|u_m(z) - u_n(z)| \leq \varepsilon_n = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{|z|}{n+2}}$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\varepsilon_n) = 0$, ce qui implique que $(u_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

En écrivant $\varepsilon_n = \delta_n \frac{1}{1 - \frac{|z|}{n+2}}$, le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\varepsilon_n) = 0$ se déduit de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{|z|}{n+2} \right) = 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|}{n+2} = 0 \text{ qui entraîne } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\delta_n) = 0.$$

Exercice 3.33 Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, la suite $(u_n(z))_{n \geq 1}$ définie par $u_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k}$ est convergente (pour z réel, cette limite est $-\ln(1-z)$).

Solution 3.33 Pour $m > n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} |u_m(z) - u_n(z)| &= \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{z^k}{k} \right| \leq |z|^{n+1} \sum_{k=0}^{m-n-1} |z|^k \\ &\leq |z|^{n+1} \frac{1 - |z|^{m-n}}{1 - |z|} \leq |z|^{n+1} \frac{1}{1 - |z|} \end{aligned}$$

3.6 Opérations sur les suites convergentes

Théorème 3.14 Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \ell'$.

1. Les suites $u + v$ et $u \cdot v$ sont convergentes vers respectivement $\ell + \ell'$ et $\ell \cdot \ell'$.
2. Dans le cas où les suites u et v sont réelles, les suites $\min\{u, v\} = (\min\{u_n, v_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ et $\max\{u, v\} = (\max\{u_n, v_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes vers respectivement $\min\{\ell, \ell'\}$ et $\max\{\ell, \ell'\}$.
3. Si $\ell' \neq 0$, il existe alors un entier n_0 tel que la suite $\frac{u}{v} = \left(\frac{u_n}{v_n} \right)_{n \geq n_0}$ soit définie et cette suite converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.
4. Si $\ell > 0$, il existe un entier n_0 tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geq n_0$ et la suite $\sqrt{u} = (\sqrt{u_n})_{n \geq n_0}$ converge vers $\sqrt{\ell}$.

Démonstration.

1. Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |v_n - \ell'| < \varepsilon.$$

En posant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on a :

$$\forall n \geq n_0, |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < 2\varepsilon$$

ce qui signifie que la suite $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$.

Par ailleurs, comme la suite convergente v est bornée, il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$$

et pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell \ell'| &\leq |u_n v_n - \ell v_n| + |\ell v_n - \ell \ell'| \leq M |u_n - \ell| + |\ell| |v_n - \ell'| \\ &\leq (M + |\ell|) \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui signifie que la suite $u \cdot v$ est convergente vers $\ell \cdot \ell'$.

2. Se déduit de :

$$\begin{cases} \min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|), \\ \max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|). \end{cases}$$

3. Si $\ell' \neq 0$ alors à partir d'un certain rang n_0 , les éléments de la suite v sont non nuls et la suite $\frac{u}{v}$ est définie à partir de ce rang. On peut en fait trouver n_0 tel que $|v_n| > \frac{|\ell'|}{2}$ pour $n \geq n_0$ (voir la démonstration du théorème 3.3), ce qui entraîne que :

$$\forall n \geq n_0, \left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'} \right| = \left| \frac{\ell' - v_n}{\ell' v_n} \right| \leq \frac{2}{|\ell'|^2} |v_n - \ell'|$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{\ell'}$. Le résultat sur le produit nous donne alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{\ell}{\ell'}$.

4. Si $\ell > 0$, on peut en fait trouver un entier n_0 tel que $u_n \geq \frac{\ell}{4}$ pour tout $n \geq n_0$ et avec :

$$\left| \sqrt{u_n} - \sqrt{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{\sqrt{u_n} + \sqrt{\ell}} \leq \frac{2}{3\sqrt{\ell}} |u_n - \ell|$$

on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{u_n}) = \sqrt{\ell}$.

■

Exercice 3.34 Montrer que la suite $u = (\tan(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Solution 3.34 Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\tan(n)) = \ell$. Avec :

$$\tan(n+1) = \frac{\tan(n) + \tan(1)}{1 - \tan(n) \tan(1)},$$

on déduit que $\ell = \frac{\ell + \tan(1)}{1 - \ell \tan(1)}$ et $\tan(1)(1 + \ell^2) = 0$ qui est impossible.

Exercice 3.35 Montrer que les suites réelles $u = (\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont divergentes.

Solution 3.35 Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin(n)) = \ell$. Avec :

$$\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2 \sin(n) \cos(1),$$

on déduit que $2\ell = 2\ell \cos(1)$, ce qui impose $\ell = 0$ puisque $\cos(1) \neq 1$.

Avec :

$$\sin(n+1) = \cos(n) \sin(1) + \sin(n) \cos(1),$$

on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n) \sin(1)) = 0$, ce qui entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n)) = 0$ puisque $\sin(1) \neq 0$,

mais ce dernier résultat est incompatible avec $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$.

On procède de manière analogue pour la suite v .

Exercice 3.36 Étudier, de manière plus générale, les suites $u = (\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (\cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$, où θ est un réel fixé.

Solution 3.36 Si $\theta = k\pi$, où k est un entier relatif, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ et $v_n = (-1)^{nk}$. La suite u est donc convergente et la suite v est convergente pour k pair et divergente pour k impair.

On suppose maintenant que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin(n\theta)) = \ell$, avec :

$$\sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta) = 2 \sin(n\theta) \cos(\theta),$$

on déduit que $2\ell = 2\ell \cos(\theta)$, ce qui impose $\ell = 0$ puisque $\cos(\theta) \neq 1$ pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Puis avec :

$$\sin((n+1)\theta) = \cos(n\theta) \sin(\theta) + \sin(n\theta) \cos(\theta),$$

on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n\theta) \sin(\theta)) = 0$, ce qui entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n\theta)) = 0$ puisque $\sin(\theta) \neq 0$ pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Mais ce dernier résultat est incompatible avec $\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta) = 1$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n\theta)) = \ell$, avec :

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta),$$

on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n\theta) = \frac{\ell(\cos(\theta) - 1)}{\sin(\theta)}$, ce qui contredit la divergence de u .

Exercice 3.37 Étudier, sans utiliser la fonction \ln , la suite $u = \left(\sqrt[n]{\lambda}\right)_{n \geq 1}$ où λ est un nombre réel strictement positif (voir l'exercice 3.45 pour une autre solution).

Solution 3.37 On suppose d'abord que $\lambda \geq 1$. En posant $v_n = \sqrt[n]{\lambda} - 1$, on a $v_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et en utilisant l'inégalité de Bernoulli (ou plus simplement la formule du binôme de Newton) :

$$\lambda = (1 + v_n)^n \geq 1 + nv_n,$$

ce qui donne :

$$0 \leq v_n \leq \frac{\lambda - 1}{n}$$

et en conséquence $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = 0$ encore équivalent à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{\lambda}\right) = 1$.

Pour $0 < \lambda < 1$, de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{\lambda}}\right) = 1$, on déduit encore que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{\lambda}\right) = 1$.

Exercice 3.38 Étudier, sans utiliser la fonction \ln , la suite $u = (\sqrt[n]{n})_{n \geq 1}$.

Solution 3.38 En posant $v_n = \sqrt[n]{n} - 1$, on a $v_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et en utilisant la formule du binôme :

$$\forall n \geq 2, n = (1 + v_n)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k v_n^k \geq \frac{n(n-1)}{2} v_n^2,$$

ce qui donne :

$$0 \leq v_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

et en conséquence $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = 0$ encore équivalent à $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$.

Exercice 3.39 Étudier, pour tout nombre complexe λ et tout réel $b > 0$, la suite $u = \left(\frac{\lambda^n}{n^b}\right)_{n \geq 1}$.

Solution 3.39 Pour $\lambda = 0$, u est constante égale à 0.

On suppose donc que $\lambda \neq 0$.

Avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |\lambda|$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$ pour $|\lambda| < 1$ et que u diverge pour $|\lambda| > 1$.

Pour $|\lambda| = 1$, avec $|u_n| = \frac{1}{n^b}$, on déduit que u est convergente vers 0.

Théorème 3.15 Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \ell'$.

1. Si $\ell > \ell'$ on a alors $u_n > v_n$ à partir d'un certain rang.
2. Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ alors $\ell \leq \ell'$.
3. Si M est un majorant de la suite u , alors $\ell \leq M$.
4. Si m est un minorant de la suite u , alors $\ell \geq m$.

Démonstration. On applique le théorème 3.3 aux suites $v - u$, $M - u$ et $u - m$. ■

Exercice 3.40 Que dire de la somme et du produit de deux suites divergentes, d'une suite divergente et d'une suite convergente, de l'inverse d'une suite divergente.

Solution 3.40 ♠♠♠

Exercice 3.41 Soient $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs telle qu'il existe $\lambda \in [0, 1[$ avec

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq \lambda u_n + \varepsilon_n.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Solution 3.41 Par récurrence, on a pour tout entier $n \geq 0$:

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq \lambda^{n-n_0+1} u_{n_0} + \lambda^{n-n_0} \varepsilon_{n_0} + \lambda^{n-n_0-1} \varepsilon_{n_0+1} + \cdots + \lambda \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n.$$

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq \varepsilon_n < \varepsilon, 0 \leq \lambda^{n-n_0+1} < \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{n+1} &\leq \lambda^{n-n_0+1} u_{n_0} + (\lambda^{n-n_0} + \lambda^{n-n_0-1} + \cdots + \lambda + 1) \varepsilon = \varepsilon u_{n_0} + \frac{1 - \lambda^{n-n_0+1}}{1 - \lambda} \varepsilon \\ &\leq \left(u_{n_0} + \frac{1}{1 - \lambda} \right) \varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 3.42 Montrer que pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \cos(nt^2) dt = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(nt^2) dt = 0$ (on peut utiliser l'exercice 3.4).

Solution 3.42 A revoir.

3.7 Comparaison des suites

Les suites considérées dans ce paragraphe sont à valeurs réelles.

Définition 3.9 Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que :

1. la suite u est dominée par la suite v , s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ et une suite bornée $(\varphi_n)_{n \geq n_0}$ tels que :

$$\forall n \geq n_0, u_n = \varphi_n v_n$$

2. la suite u est négligeable devant la suite v , s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq n_0}$ convergente vers 0 tels que :

$$\forall n \geq n_0, u_n = \varepsilon_n v_n$$

3. la suite u est équivalente à la suite v , s'il existe un entier $n_0 \geq 0$ et une suite $(\varphi_n)_{n \geq n_0}$ convergente vers 1 tels que :

$$\forall n \geq n_0, u_n = \varphi_n v_n$$

On notera $u_n = O(v_n)$ pour signifier que u est dominée par v , $u_n = o(v_n)$ pour signifier que u est négligeable devant v et $u_n \underset{+}{\sim} v_n$ pour signifier que u est équivalente à v .

Remarque 3.2 On vérifie facilement que la relation \sim définit une relation d'équivalence sur les suite réelles, c'est-à-dire $u \sim u$ (réflexivité), si $u \sim v$, alors $v \sim u$ (symétrie) et si $u \sim v$, $v \sim w$ alors $u \sim w$ (transitivité).

Remarque 3.3 Si la suite u converge vers un réel $\ell \neq 0$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$ (il suffit d'écrire $u_n = \frac{u_n}{\ell} \ell$). Mais attention ce résultat est faux pour $\ell = 0$. Dire que u est équivalente à 0 signifie que les u_n sont tous nuls à partir d'un certain rang et une suite peut avoir une limite nulle en étant à valeurs dans \mathbb{R}^* comme le montre l'exemple de $u_n = \frac{1}{n}$.

On montre facilement le résultat suivant.

Théorème 3.16 Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites réelles équivalentes, alors elles sont de même nature, c'est-à-dire que u converge si, et seulement si v converge. En cas de convergence de l'une des deux suites, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Démonstration. On a $u_n = \varphi_n v_n$ pour tout $n \geq n_0$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$. En utilisant le résultat relatif au produit de deux suites convergentes, on déduit que si u converge, il en est alors de même de v et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1$, on aura $\varphi_n \neq 0$ à partir d'un rang $n_1 \geq n_0$ et en écrivant que $v_n = \frac{1}{\varphi_n} u_n$ pour $n \geq n_1$, on déduit que si v converge, il en est alors de même de u et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Il en résulte que u diverge si, et seulement si v diverge. ■

3.8 Suites monotones

On rappelle que \mathbb{R} est un corps commutatif totalement ordonné qui vérifie la propriété de la borne supérieure.

Dire que $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure d'une partie non vide X de \mathbb{R} signifie que M est le plus petit des majorants de X , ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \forall x \in X, x \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X \mid M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

et on note $M = \sup(X)$.

Dans le cas où $M \in X$, on dit que M est le plus grand élément de X ou le maximum de X et il est souvent noté $M = \max(X)$.

Définition 3.10 On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

– croissante si :

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} \geq u_n,$$

– décroissante si :

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} \leq u_n,$$

– monotone si elle est croissante ou décroissante.

En remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes on parle de suites strictement monotones.

Pour étudier la monotonie d'une suite, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou, si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si, et seulement si, $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Il suffit donc de s'intéresser aux suites croissantes.

Exemple 3.2 Pour toute fonction monotone f définie sur \mathbb{R}^+ , la suite $u = (f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

Exemple 3.3 Si $f : I \mapsto I$ est une fonction croissante, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est monotone de monotonie dépendant du signe de $u_1 - u_0$.

Exercice 3.43 Que dire de la somme du produit ou du quotient (quand il est défini) de deux suites monotones.

Solution 3.43 ♠♠♠

Exercice 3.44 Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante, il en est de même de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des moyennes de Césaro définie par $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$.

Solution 3.44 On a :

$$v_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} v_n + \frac{u_{n+1}}{n+2}$$

et donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+2} (u_{n+1} - v_n) = \frac{1}{n+2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \right) \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left((n+1) u_{n+1} - \sum_{k=0}^n u_k \right) \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left(\sum_{k=0}^n (u_{n+1} - u_k) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Du théorème de la borne supérieure, on déduit immédiatement le résultat suivant.

Théorème 3.17 Une suite réelle croissante [resp. décroissante] $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est majorée [resp. minorée] et dans ce cas on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ [resp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$]. Sinon on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. [resp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$].

Démonstration. Considérons une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante. Si elle est majorée, alors l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ qui est non vide et majoré admet une borne supérieure M . Soit ε un réel strictement positif. Il existe un naturel n_0 tel que :

$$M - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq M.$$

La suite étant croissante et M étant un majorant de la suite, on a :

$$\forall n \geq n_0, M - \varepsilon \leq u_n \leq M,$$

soit :

$$\forall n \geq n_0, |u_n - M| \leq \varepsilon.$$

La suite u est donc convergente vers M .

Si elle n'est pas majorée, pour tout réel $M > 0$, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq M$ et avec la croissance de u , on déduit que $u_n \geq M$ pour tout $n \geq n_0$. La suite u est donc divergente vers $+\infty$.

On procède de même pour les suites décroissantes et minorées. ■

Exercice 3.45 Étudier, sans utiliser la fonction \ln et avec le théorème précédent, la suite $u = \left(\sqrt[n]{\lambda}\right)_{n \geq 1}$ où λ est un nombre réel strictement positif (voir l'exercice 3.37 pour une autre solution).

Solution 3.45 Avec $\sqrt[n]{1} = 1$ et $\sqrt[n]{\frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\lambda}}$, il suffit de montrer le résultat pour $\lambda > 1$. Dans ce cas la suite $\left(\sqrt[n]{\lambda}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante ($\sqrt[n+1]{\lambda} < \sqrt[n]{\lambda}$ équivaut à $\lambda < \lambda^{\frac{n+1}{n}} = \lambda \sqrt[n]{\lambda}$ encore équivalent à $\sqrt[n]{\lambda} > 1$) et minorée par 1, elle converge donc vers un réel $\ell \geq 1$. Si $\ell > 1$, pour $\gamma \in]1, \ell[$ il existe un entier n_0 tel que $\sqrt[n]{\lambda} > \gamma$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne $\lambda > \gamma^n$ pour tout $n \geq n_0$ qui est incompatible avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^n = +\infty$. On a donc $\ell = 1$.

Exercice 3.46 Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence, $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ est convergente vers le nombre d'or $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Solution 3.46 On vérifie facilement par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 1$. En effet, pour $n = 1$, on a $1 = u_1 < 2$ et en supposant acquis le résultat au rang $n \geq 1$, on a $1 < \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3} < 2$. Et avec $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} > 1$, on déduit que u est croissante majorée, donc convergente vers $\ell \in [1, 2]$. De $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$, on déduit que $\ell = \sqrt{\ell + 1}$, soit $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ avec $1 \leq \ell \leq 2$, ce qui équivaut à $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3.47 Soit x un réel dans $]0, 2[$. Montrer, sans utiliser la fonction \ln , que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

est convergente.

Solution 3.47 Pour $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n^2 + n(1+x)}{n^2 + n(1+x) + x}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n^2 + n(1+x) + x}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

avec $\frac{x}{n^2 + n(1+x) + x} < 1$ pour tout réel $x > 0$. On peut donc utiliser l'inégalité de Bernoulli pour écrire que :

$$\left(1 - \frac{x}{n^2 + n(1+x) + x}\right)^{n+1} > 1 - \frac{(n+1)x}{n^2 + n(1+x) + x} = 1 - \frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}$$

(on a $n^2 + n(1+x) + x = (n+1)(n+x)$) et donc :

$$u_{n+1} > \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = u_n,$$

ce qui signifie que, pour $x > 0$, $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

D'autre part, en utilisant la formule du binôme, on a pour $n \geq 2$:

$$u_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{x^k}{n^k} = 1 + x + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \frac{x^k}{n^k}$$

avec :

$$k! = \prod_{j=2}^k j \geq 2^{k-1} \text{ et } \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{n} \leq 1$$

pour tout k compris entre 2 et n , ce qui donne pour $x \in]0, 2[$:

$$\begin{aligned} u_n &\leq 1 + x + \sum_{k=2}^n \frac{x^k}{2^{k-1}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^{k-2}}{2^{k-2}} \\ &\leq 1 + x + \frac{x^2}{2} \frac{1 - \frac{x^{n-1}}{2^{n-1}}}{1 - \frac{x}{2}} \leq 1 + x + \frac{x^2}{2-x}. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc majorée et en conséquence convergente puisque croissante.

Sa limite est e^x et pour $x = 1$, la majoration précédente donne $e = e^1 \leq 3$.

Exercice 3.48 Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est convergente vers un nombre irrationnel e .

Solution 3.48 La suite u est croissante et pour $n > 2$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

puisque $k! \geq 2^{k-1}$ pour $k \geq 2$, ce qui implique que u est convergente.

On a vu avec l'exercice 1.5 que sa limite e est irrationnelle.

Exercice 3.49 Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$ est décroissante minorée. Sa limite est la constante d'Euler, notée γ .

Solution 3.49 Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \\ &= \int_n^{n+1} \frac{t - (n+1)}{(n+1)t} dt < 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que u est décroissante.

La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t}$ est décroissante sur \mathbb{R}^{+*} , donc :

$$\forall k \geq 1, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1),$$

soit $u_n \geq \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$.

Exercice 3.50 En utilisant l'exercice précédent, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2)$$

Solution 3.50 Avec les notations de l'exercice précédent, on a pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = u_{2n} + \ln(2n) - (u_n + \ln(n)) \\ &= u_{2n} - u_n + \ln(2) \end{aligned}$$

et la convergence de la suite u permet alors de conclure.

Le résultat de l'exercice 3.49 peut aussi être utilisé pour montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Exercice 3.51 On désigne par $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites respectivement définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n), \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

pour $n \geq 1$.

1. Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad v_{2n} = u_{2n} - u_n + \ln(2).$$

2. En déduire la limite de la suite v sachant que la suite u converge.

Solution 3.51

1. Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j-1} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j} \right) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= u_{2n} + \ln(2n) - (u_n + \ln(n)) = u_{2n} - u_n + \ln(2) \end{aligned}$$

2. Sachant que la suite u converge vers γ , on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n} = \ln(2)$ et avec $v_{2n+1} =$

$v_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{2n+1} = \ln(2)$ et en conséquence $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln(2)$ (exercice 3.27), soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Exercice 3.52 Montrer que, pour tout réel $\alpha > 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

est convergente.

Solution 3.52 La fonction $t \rightarrow \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur \mathbb{R}^{+*} , donc :

$$\forall k \geq 2, \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_{k-1}^k \frac{dt}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors croissante majorée et donc convergente.

Pour $\alpha = 2$, on peut utiliser les inégalités :

$$\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

pour déduire que :

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$$

L'exercice 3.49 est un cas particulier du suivant.

Exercice 3.53 Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante et F la primitive de f nulle en 1. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n f(k) - F(n)$ pour tout $n \geq 1$ est décroissante minorée et donc convergente.

Solution 3.53 La fonction F est définie par :

$$\forall x \geq 1, F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(n+1) - (F(n+1) - F(n)) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t) dt = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(t)) dt \end{aligned}$$

avec f continue et $f(n+1) \leq f(t)$ pour tout $t \in [n, n+1]$. On a donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et u est décroissante.

La fonction f est continue décroissante sur $[1, +\infty[$, donc :

$$\forall k \geq 1, \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt = f(k)$$

et pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_1^{n+1} f(t) dt = F(n+1),$$

et $u_n \geq F(n+1) - F(n) = \int_n^{n+1} f(t) dt \geq 0$ puisque f est à valeurs positives.

Le choix de $f(t) = \frac{1}{t}$ nous permet de retrouver la constante γ d'Euler.

Plus généralement le choix de $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ nous permet de montrer les résultats classiques sur les séries de Riemann (théorème 6.4, page 123).

Exercice 3.54 Montrer que si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels positifs qui vérifie :

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n^2}$$

alors cette suite est convergente.

Solution 3.54 On a :

$$u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n^2} \leq u_n + \frac{1}{n(n-1)} = u_n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

soit :

$$0 < u_{n+1} + \frac{1}{n} \leq u_n + \frac{1}{n-1}$$

C'est-à-dire que la suite $\left(u_n + \frac{1}{n-1}\right)_{n \geq 2}$ est décroissante minorée. Elle est donc convergente.

Ce qui entraîne la convergence de $(u_n)_{n \geq 1}$.

Le théorème 3.17 associé au résultat qui suit nous donne une démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 3.18 De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone.

Démonstration. Soit A la partie de \mathbb{N} , éventuellement vide, définie par :

$$n \in A \Leftrightarrow \forall m > n, u_m \leq u_n.$$

Si A est finie, elle admet un majorant $n_0 \notin A$. Il existe alors un entier $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} > u_{n_0}$. Comme $n_1 \notin A$, il existe $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} > u_{n_1}$ et ainsi de suite, on construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n_{k+1}} > u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est alors extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et strictement croissante.

Si A est infinie, on peut ranger ces éléments dans l'ordre croissant, soit $A = \{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ avec $n_k < n_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par construction, on a $u_{n_{k+1}} \leq u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est alors extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et décroissante. ■

Théorème 3.19 (Bolzano-Weierstrass) De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration. Résulte immédiatement des deux théorèmes précédents. ■

Une conséquence importante de ce résultat est le suivant.

Théorème 3.20 Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Démonstration. On sait déjà qu'une suite convergente est bornée et qu'elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence (théorème 3.7).

Réciproquement, supposons que la suite bornée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admette ℓ pour seule valeur d'adhérence. Si cette suite ne converge pas vers ℓ , on peut alors trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier n , il existe $p > n$ avec $|u_p - \ell| \geq \varepsilon$. Par récurrence on peut alors construire une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $|u_{\varphi(n)} - \ell| \geq \varepsilon$ pour tout n . De la suite bornée $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ on peut extraire une sous suite $(u_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ' et par passage à la limite dans l'inégalité $|u_{\psi(n)} - \ell| \geq \varepsilon$ on déduit que $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon > 0$, c'est-à-dire que ℓ' est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ distincte de ℓ , ce qui contredit l'hypothèse de départ. ■

Exercice 3.55 Soit x un nombre irrationnel. Montrer que si $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres rationnels qui converge vers x , où pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n est un entier relatif et q_n un entier naturel non nul, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$, si $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = -\infty$, si $x < 0$.

Solution 3.55 Dire que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers l'infini signifie qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $k_n > n$ tel que $0 < q_{k_n} \leq \alpha$. On peut alors extraire de $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, \alpha]$ comme suit : pour $n = 0$ il existe $\varphi(0) > 0$ tel que $0 < q_{\varphi(0)} \leq \alpha$ et en supposant construits les entiers $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$ tels que $0 < q_{\varphi(k)} \leq \alpha$ pour tout k compris entre 0 et n , on peut trouver $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $0 < q_{\varphi(n+1)} \leq \alpha$. De cette suite bornée on peut alors extraire une sous-suite $(q_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un entier $q \geq 1$, mais alors avec $p_{\psi(n)} = \frac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}} q_{\psi(n)}$, on déduit que la suite $(p_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est également convergente et sa limite $p = xq$ est également un entier, ce qui est en contradiction avec x irrationnel. Avec $p_n = q_n \frac{p_n}{q_n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = x \neq 0$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \pm\infty$, le signe étant celui de x .

3.9 Suites adjacentes

Définition 3.11 Deux suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si la suite u est croissante, la suite v est décroissante et si la suite $v - u$ est convergente vers 0.

Exercice 3.56 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Montrer que pour tous n, m dans \mathbb{N} on a $u_n \leq v_m$.

Solution 3.56 Supposons qu'il existe deux indices n, m tels que $u_n > v_m$. Comme u est croissante, et v décroissante, on a alors pour tout $k \geq \max(n, m)$, $u_k \geq u_n$ et $v_k \leq v_m$, ce qui entraîne $u_k - v_k \geq u_n - v_m > 0$ et $0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u_k - v_k) \geq u_n - v_m > 0$, ce qui est impossible.

Théorème 3.21 Deux suites adjacentes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ , avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_m.$$

Démonstration. En utilisant la monotonie des suites u et v , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0,$$

c'est-à-dire que u est croissante majorée par v_0 et v décroissante et minorée par u_0 , ces deux suites sont donc convergentes avec :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Elles convergent donc vers la même limite :

$$\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} (u_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} (v_n).$$

■

On peut remarquer qu'une majoration de l'erreur d'approximation de ℓ par les u_n est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq v_n - u_n.$$

Exercice 3.57 Soit x un réel dans $[0, 1]$. Montrer, sans utiliser la fonction \ln , que les suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \geq 1, u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, v_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}$$

sont convergentes.

Solution 3.57 Pour $x = 0$, ces suites stationnent sur 1.

On a déjà vu avec l'exercice 3.47 que u est croissante pour $x > 0$ (et majorée pour $x \in]0, 2[$).

Pour $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{1 + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n^2 + n(1+x) + x}{n^2 + n(1+x)}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{x}{n^2 + n(1+x)}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de Bernoulli (ou plus simplement la formule du binôme de Newton) pour $x > 0$, on obtient :

$$\left(1 + \frac{x}{n^2 + n(1+x)}\right)^{n+1} > 1 + \frac{(n+1)x}{n^2 + n(1+x)} > 1 + \frac{x}{n+1}$$

(c'est équivalent à $(n+1)^2 x > x(n^2 + n(1+x))$ encore équivalent à $(n+1)^2 > n^2 + n(1+x)$ ou à $n(1-x) + 1 > 0$ qui est vérifié pour $x \leq 1$) et donc :

$$v_n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+2} = v_{n+1}$$

ce qui signifie que $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante pour $x \in]0, 1]$.

Enfin, pour $n \geq 1$, on a :

$$v_n - u_n = u_n \frac{x}{n} \geq 0$$

et donc $u_n \leq v_n \leq v_1$ (v est décroissante), ce qui donne $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{xv_1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Ces deux suites sont donc adjacentes et en conséquence convergentes.

Exercice 3.58 Montrer que les suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

convergent vers la même limite irrationnelle e .

Solution 3.58 Il est clair que u est croissante et pour $n \geq 1$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = -\frac{n-1}{(n+1)!} \leq 0$$

donc $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. De plus avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n!} \right) = 0$, on déduit que ces suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la limite.

On a vu avec l'exercice 1.5 que la limite e de u est irrationnelle.

Les encadrements $u_n \leq e \leq v_n$, nous permettent de donner des valeurs approchées de e par défaut et par excès. Par exemple, pour $n = m = 10$, on obtient :

$$u_{10} \approx 2.7183 \leq e \leq v_{10} \approx 2.7183$$

avec une majoration de l'erreur d'approximation donnée par :

$$0 \leq e - u_{10} \leq v_{10} - u_{10} = \frac{1}{10!} \approx 2.755 \cdot 10^{-7}.$$

On peut aussi utiliser la suite $v = (v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ (les suites u et v sont encore adjacentes) et on a en fait :

$$0 \leq e - u_{10} \leq v_{10} - u_{10} = \frac{1}{10 \cdot 10!} \approx 2.755 \cdot 10^{-8}.$$

Exercice 3.59 Montrer que les suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n), \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

convergent vers une même limite γ (la constante d'Euler).

Solution 3.59 Avec l'exercice 3.49, on a déjà vu que u est décroissante.

De manière analogue, pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \int_{n+1}^{n+2} \frac{t - (n+1)}{(n+1)t} dt > 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que v est croissante.

Et avec :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \right) = \ln(1) = 0,$$

on conclut que ces deux suites sont adjacentes.

Les encadrements $v_n \leq \gamma \leq u_n$, nous permettent de donner des valeurs approchées de γ . Par exemple, pour $n = m = 10$, on obtient :

$$v_{10} \approx 0.53107 \leq \gamma \leq u_{10} \approx 0.62638$$

Exercice 3.60 *Montrer que les suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}, \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

convergent vers une même limite.

Solution 3.60 *Pour $n \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2 \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} \right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})} = \frac{1}{\sqrt{n+1} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})^2} > 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que u est croissante.

De même :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2 \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = -\frac{1}{\sqrt{n+1} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2} < 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que v est décroissante.

Enfin avec :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) = 0,$$

on conclut que ces deux suites sont adjacentes et donc convergentes vers ℓ .

Les encadrements $u_n \leq \ell \leq v_n$, nous permettent de donner des valeurs approchées de ℓ . Par exemple, pour $n = m = 20$, on obtient :

$$u_{20} \approx -1.5699 \leq \ell \leq v_{20} \approx -1.349$$

En fait, les deux exercices qui précèdent ne sont que des cas particulier du résultat suivant qui complète l'exercice 3.53.

Exercice 3.61 *Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et F la primitive de f nulle en 1. Montrer que les suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par*

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} u_n = \sum_{k=1}^n f(k) - F(n+1) \\ v_n = \sum_{k=1}^n f(k) - F(n) \end{cases}$$

convergent vers une même limite.

Solution 3.61 Comme f tend vers 0 en décroissant à l'infini, elle est nécessairement à valeurs positives.

Avec l'exercice 3.53 on a vu que u est croissante et v décroissante.

Avec :

$$v_n - u_n = F(n+1) - F(n) = \int_n^{n+1} f(t) dt$$

et f positive décroissante, on déduit que :

$$0 \leq v_n - u_n \leq f(n)$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$.

Les suites adjacentes peuvent être utilisées pour étudier des suites construites à partir de moyennes, arithmétiques, géométriques ou harmoniques.

Exercice 3.62 Soient $0 < a < b$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} \text{ (moyenne harmonique)} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ (moyenne arithmétique)} \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont adjacentes de limite \sqrt{ab} (moyenne géométrique). Pour $b = 1$, on a des approximations de \sqrt{a} .

Solution 3.62 On vérifie facilement, par récurrence, que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$$

avec $u_0 - v_0 = a - b < 0$ et pour $n \geq 1$:

$$u_n - v_n = \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n-1}} - \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} = -\frac{(u_{n-1} - v_{n-1})^2}{2(u_{n-1} + v_{n-1})} \leq 0.$$

Il en résulte que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Avec :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n},$$

on déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Enfin avec $u_n > 0$ on a :

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$$

et par récurrence :

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite $\lambda \geq 0$.

D'autre part avec $u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n$, on déduit que $u_nv_n = u_0v_0$ pour tout n et $\lambda^2 = u_0v_0$. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \sqrt{u_0v_0} = \sqrt{ab}.$$

Exercice 3.63 Soient $0 < a < b$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ (moyenne géométrique)} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ (moyenne arithmétique)} \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont adjacentes de même limite. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b .

Solution 3.63 On vérifie facilement, par récurrence, que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On rappelle que pour tous réels u, v positifs, on a $\sqrt{uv} \leq \frac{u+v}{2}$ (conséquence de $(\sqrt{v} - \sqrt{u})^2 \geq 0$).

Avec l'inégalité précédente, on déduit que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Avec $u \leq \sqrt{uv} \leq v$ et $u \leq \frac{u+v}{2} \leq v$ pour $u > 0$ et $v > 0$, on déduit que $u_n \leq u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$

et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

Enfin avec :

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2},$$

on déduit par récurrence sur $n \geq 0$ que $0 \leq v_n - u_n \leq \frac{b-a}{2^n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite $\ell > 0$.

On peut montrer que cette limite est $\ell = \frac{\pi}{2 \cdot E(a, b)}$, où $E(a, b)$ est l'intégrale elliptique définie par :

$$E(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$$

(voir l'épreuve 1 du Capes Externe 1995).

Exercice 3.64 Soient $0 < a < b$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$$

Montrer que ces suites sont adjacentes de limite $\ell = b \frac{\sin(\theta)}{\theta}$ où $\cos(\theta) = \frac{a}{b}$.

Solution 3.64 On vérifie par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n.$$

Pour $n = 0$, on a $0 < u_0 = a < b = v_0$ et :

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} > u_0 > 0$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{u_0 + v_0}{2} v_0} < \sqrt{v_0^2} = v_0$$

$$\begin{aligned}
v_1 - u_1 &= \sqrt{u_1}(\sqrt{v_0} - \sqrt{u_1}) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}}(v_0 - u_1) \\
&= \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}} \left(v_0 - \frac{u_0 + v_0}{2} \right) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0} + \sqrt{u_1}} \left(\frac{v_0 - v_0}{2} \right) > 0.
\end{aligned}$$

On a donc bien $0 < u_0 < u_1 < v_1 < v_0$.

En supposant le résultat acquis au rang $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} > u_{n+1} > 0 \\
v_{n+2} &= \sqrt{\frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} v_{n+1}} < \sqrt{v_{n+1}^2} = v_{n+1} > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{n+2} - u_{n+2} &= \sqrt{u_{n+2}}(\sqrt{v_{n+1}} - \sqrt{u_{n+2}}) = \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}}(v_{n+1} - u_{n+2}) \\
&= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}} \left(v_{n+1} - \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{u_{n+2}}} \left(\frac{v_{n+1} - v_{n+1}}{2} \right) > 0.
\end{aligned}$$

La suite u est donc croissante et la suite v décroissante.

La dernière égalité donne pour $n \geq 0$:

$$0 < v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}} \left(\frac{v_n - v_n}{2} \right) < \frac{v_n - v_n}{2}$$

et par récurrence $0 < v_n - u_n \leq \frac{b-a}{2^n}$, ce qui entraîne $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et en conséquence convergent vers une même limite $\ell > 0$.

Comme $0 < \frac{a}{b} < 1$, il existe un unique réel $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $a = b \cos(\theta)$.

On a donc $u_0 = b \cos(\theta)$ et $v_0 = b$.

Pour $n = 1$, on a :

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{b(1 + \cos(\theta))}{2} = b \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

et :

$$v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

De même pour $n = 2$, on a :

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{(1 + \cos(\frac{\theta}{2}))}{2} = b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

et :

$$v_2 = \sqrt{u_2 v_1} = b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

Par récurrence, on vérifie que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$u_n = b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

et :

$$v_n = b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

En effet, c'est vrai pour $n = 1$ et le supposant vrai pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \frac{(1 + \cos(\frac{\theta}{2^n}))}{2} \\ &= b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

et :

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

On a donc pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = b \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

En remarquant que :

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\theta) \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})} = \frac{\sin(\theta)}{2 \sin(\frac{\theta}{2})}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) &= \frac{\sin(\theta)}{2 \sin(\frac{\theta}{2})} \cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \\ &= \frac{\sin(\theta)}{2 \sin(\frac{\theta}{2})} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\cos(\frac{\theta}{2^2})}{2 \sin(\frac{\theta}{2^2}) \cos(\frac{\theta}{2^2})} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{2^2 \sin(\frac{\theta}{2^2})} \end{aligned}$$

on vérifie facilement par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$v_n = \frac{b \sin(\theta)}{2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})}.$$

Puis avec $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\theta}{2^n}$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{b \sin(\theta)}{\theta}$.

Pour $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = 1$, on a $\theta = \frac{\pi}{4}$ et les suites u et v donnent des approximations de $\frac{4}{\pi}$.

Le théorème des suites adjacentes est équivalent au théorème des segments emboîtés qui suit.

Théorème 3.22 Si $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de segments emboîtés (c'est-à-dire que $a_n < b_n$ et $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$, alors il existe un réel ℓ

tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$.

Démonstration. Il est facile de vérifier que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et :

$$\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n) = \lim_{n \in \mathbb{N}} (a_n) = \lim_{n \in \mathbb{N}} (b_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} (b_n).$$

■

Le théorème des suites adjacentes nous permet de retrouver le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 3.23 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. On utilise le principe de dichotomie.

Si $[a_0, b_0]$ est un intervalle réel qui contient tous les éléments de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on le coupe en deux parties égales et on garde une de ces parties qui contient des u_n pour une infinité d'indices n . En réitérant ce procédé on construit deux suites adjacentes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une application φ strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} telles que chaque intervalle $[a_n, b_n]$ contient un terme $u_{\varphi(n)}$. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est alors convergente. ■

Le théorème des suites adjacentes permet également de montrer que \mathbb{R} n'est pas dénombrable en utilisant le principe de trichotomie.

Théorème 3.24 *\mathbb{R} n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Il suffit pour cela de montrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.

Supposons qu'il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$. En coupant $I = [0, 1]$ en trois segments de même longueur, il en existe un que l'on note I_0 qui ne contient pas $f(0)$. On coupe ensuite I_0 en trois segments de même longueur en notant I_1 l'un de ces segments qui ne contient pas $f(1)$. Par récurrence, on construit ainsi une suite de segments emboîtés $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n ne contient pas $f(n)$ et I_n est de longueur $\frac{1}{3^n}$, on déduit alors du théorème des segments emboîtés que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$ avec $x \in [0, 1]$ et $x \neq f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit la définition de f . ■

Une autre application importante du théorème des segments emboîtés (ou des suites adjacentes) est le théorème des valeurs intermédiaires qui fournit de plus une méthode d'approximation d'une solution d'une équation $f(x) = 0$.

Théorème 3.25 *Si $I = [a, b]$ est un intervalle réel fermé borné et f une fonction continue de I dans \mathbb{R} telle que $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]a, b[$.*

Démonstration. Supposons que $f(a) < 0 < f(b)$ (en remplaçant au besoin f par $-f$ on se ramène toujours à ce cas).

On construit, par récurrence, une suite $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles emboîtés dans $[a, b]$ de la manière suivante :

- $[a_0, b_0] = [a, b]$;
- en supposant construit $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ pour $n \geq 0$, on pose :

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right] & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0, \\ \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ avec $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ pour tout $n \geq 0$, ce qui entraîne $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$ pour tout $n \geq 0$.

$([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite de segments emboîtés et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\alpha\}$ avec $\alpha \in [a, b]$.

De plus, par construction, on a $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ pour tout $n \geq 0$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$ et en supposant cet encadrement vérifié au rang $n \geq 0$, on a $f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq 0$ si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ avec et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $f(b_{n+1}) = f(b_n) \geq 0$ si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$ avec et $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Avec $a = \lim_{n \in \mathbb{N}} (a_n) = \lim_{n \in \mathbb{N}} (b_n)$ et la continuité de f , on déduit alors que :

$$f(\alpha) = \lim_{n \in \mathbb{N}} (f(a_n)) \leq 0 \leq \lim_{n \in \mathbb{N}} (f(b_n)) = f(\alpha),$$

ce qui équivaut à $f(\alpha) = 0$. Comme de plus on a supposé que $f(a)f(b) < 0$, α est différent de a et de b . ■

Remarque 3.4 Si f est strictement monotone, elle est alors injective et α est l'unique solution dans $[a, b]$ de l'équation $f(x) = 0$.

Remarque 3.5 La suite $\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers α .

Pour chacune des trois suites, on la majoration de l'erreur d'approximation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\alpha - x_n| \leq \frac{b - a}{2^n},$$

ce qui permet de déterminer un nombre suffisant d'itérations pour atteindre une précision $\varepsilon > 0$ donnée. On peut prendre $n_0 = \log_2 \left(\frac{b - a}{\varepsilon}\right)$.

En pratique on préfère utiliser le test d'arrêt $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

Exemple 3.4 Pour approximer $\sqrt{2}$, on utilise la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2$ sur $[0, 2]$ (on a $f(0) = -2 < 0 < f(2) = 2$), ce qui conduit aux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et :

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right] & \text{si } \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right)^2 > 2, \\ \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ permet d'approximer $\sqrt{2}$ avec pour majoration de l'erreur :

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^n}.$$

La programmation permettant le calcul des u_n est élémentaire.

3.10 Le théorème de Césaro

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique qui converge vers ℓ , les u_n seront proches de ℓ pour n assez grand et il semble naturel qu'il en est de même des moyennes $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. C'est ce que dit le théorème de Césaro. Un peu plus généralement, on a le résultat suivant.

Théorème 3.26 Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \right) = +\infty$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe convergente, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n).$$

Démonstration. Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ et, pour tout entier $n \geq 1$:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k, \quad v_n = \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k.$$

On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

et donc pour $n > n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &= \frac{1}{A_n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (u_k - \ell) \right| \\ &\leq \frac{1}{A_n} \left| \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} \alpha_k (u_k - \ell) \right| + \frac{1}{A_n} \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n-1} \alpha_k |u_k - \ell| \\ &\leq \frac{C_\varepsilon}{A_n} + \frac{\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n-1} \alpha_k}{A_n} \varepsilon \leq \frac{C_\varepsilon}{A_n} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Si de plus on $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n) = +\infty$, il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{C_\varepsilon}{A_n} \right) = 0$ (ε étant fixé) et on peut trouver un entier $n_1 > n_\varepsilon$ tel que :

$$\forall n \geq n_1, |v_n - \ell| \leq 2\varepsilon$$

D'où le résultat annoncé. ■

Remarque 3.6 Ce théorème est souvent utilisé en considérant les moyennes arithmétiques, c'est-à-dire avec la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stationnaire sur 1. Précisément, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \right) = \ell.$$

Définition 3.12 On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers un scalaire ℓ , si la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers ℓ .

Exercice 3.65 Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe convergente, on a alors pour tout réel $\alpha \geq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n k^\alpha u_k \right) = \frac{1}{\alpha+1} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n).$$

Solution 3.65 On désigne par $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\alpha_n = n^\alpha$. Comme $k^\alpha \geq 1$ pour tout $k \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^n \alpha_k \geq n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right) = +\infty$. Le théorème de Césaro nous dit alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\alpha} \sum_{k=1}^n k^\alpha u_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n).$$

Il s'agit alors de trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$. En utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto t^\alpha$ sur $[1, +\infty[$, on a pour tout entier $k \geq 1$:

$$\forall t \in [k, k+1], \quad k^\alpha \leq t^\alpha \leq (k+1)^\alpha$$

et :

$$k^\alpha \leq \int_k^{k+1} t^\alpha dt \leq (k+1)^\alpha$$

de sorte que :

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} t^\alpha dt \leq \sum_{k=1}^n (k+1)^\alpha$$

ou encore :

$$S_n \leq \int_1^{n+1} t^\alpha dt = \frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} \leq S_{n+1} - 1.$$

On a donc $S_n \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $\frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} \leq S_{n+1}$ ou encore $\frac{n^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} \leq S_n$, ce qui donne :

$$\frac{n^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

et :

$$\frac{1 - \frac{1}{n^{\alpha+1}}}{\alpha+1} \leq \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{\alpha+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\alpha+1}.$$

Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}$, ce qui signifie que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

En conséquence, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n k^\alpha u_k \right) = \frac{1}{\alpha+1} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.

Exercice 3.66 Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell$ (avec ℓ éventuellement infini pour une suite réelle), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$.

Solution 3.66 Il suffit d'écrire que :

$$\frac{u_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + \frac{u_0}{n}$$

et d'utiliser le théorème de Césaro.

L'exercice précédent peut se généraliser comme suit.

Exercice 3.67 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante non majorée telle que $\gamma_0 > 0$. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\gamma_{n+1} - \gamma_n} \right) = \lambda$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{\gamma_n} \right) = \lambda.$$

Solution 3.67 On désigne par $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\alpha_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$. Comme $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante avec $\gamma_0 > 0$, les suites $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont à valeurs strictement positives. Si de plus $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non majorée, elle diverge vers $+\infty$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_0) = +\infty.$$

En écrivant que :

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \frac{u_{k+1} - u_k}{\gamma_{k+1} - \gamma_k} = \frac{1}{\gamma_n - \gamma_0} (u_n - u_0)$$

et en utilisant le théorème de Césaro, on déduit que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\gamma_{n+1} - \gamma_n} \right) = \lambda$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - u_0}{\gamma_n - \gamma_0} =$

λ , soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\gamma_n - \gamma_0} = \lambda$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = +\infty$. Enfin avec $\frac{u_n}{\gamma_n - \gamma_0} = \frac{u_n}{\gamma_n} \frac{1}{1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_n}}$, on déduit

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{\gamma_n} \right) = \lambda$.

Exercice 3.68 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites numériques convergentes respectivement vers ℓ et ℓ' . Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k v_{n-k}$$

converge vers $\ell\ell'$.

Solution 3.68 On a, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} w_n - \ell\ell' &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k v_{n-k} - \ell\ell') \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k (v_{n-k} - \ell') + \ell' (u_k - \ell)) \end{aligned}$$

et :

$$|w_n - \ell\ell'| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (v_{n-k} - \ell') + |\ell'| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell)$$

(la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée puisque convergente). On conclut alors avec le théorème de Césaro.

Exercice 3.69 Montrer que le théorème de Césaro est encore valable pour des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui diverge vers $-\infty$ ou $+\infty$.

Solution 3.69 Quitte à remplacer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut supposer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$.

On a donc :

$$\forall \lambda > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, u_n > \lambda$$

et, en gardant les notations utilisées dans la démonstration du théorème, on a pour tout $n > n_0$:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k \\ &= \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^{n_0} \alpha_k u_k + \frac{1}{A_n} \sum_{k=n_0+1}^{n-1} \alpha_k u_k \\ &> \frac{C_0}{A_n} + \frac{A_n - A_{n_0}}{A_n} \lambda = \lambda + \frac{C_0 - A_{n_0}}{A_n} \lambda \end{aligned}$$

Si de plus on $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n) = +\infty$, il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{C_0 - A_{n_0}}{A_n} \right) = 0$ (λ étant fixé) et on peut trouver un entier $n_1 > n_0$ tel que :

$$\forall n \geq n_1, \frac{C_0 - A_{n_0}}{A_n} > -\frac{1}{2}$$

ce qui donne :

$$\forall n \geq n_1, v_n > \frac{\lambda}{2}$$

et le résultat annoncé puisque λ est quelconque.

On a donc le résultat suivant.

Théorème 3.27 Une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente est convergente au sens de Césaro. Si de plus cette suite est réelle et diverge vers $-\infty$ ou $+\infty$, elle diverge aussi au sens de Césaro vers $-\infty$ ou $+\infty$.

Remarque 3.7 En considérant les suites définies par $\alpha_n = 1$ et $u_n = (-1)^n$, on voit que la réciproque est fausse. Toutefois, on a le résultat suivant.

Exercice 3.70 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique convergente au sens de Césaro vers ℓ . Si de plus on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_n - u_{n-1}) = 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Solution 3.70 On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(u_k - u_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=1}^n k u_{k-1} = \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) u_k \\ &= n u_n - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \end{aligned}$$

soit :

$$u_n - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(u_k - u_{k-1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

en appliquant le théorème de Césaro à la suite $(n(u_n - u_{n-1}))_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \ell.$$

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Hardy qui suit.

Exercice 3.71 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des moyennes de Césaro définie par :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

1. Montrer que :

$$\forall m > n, \quad u_m - v_m = \frac{n}{m-n} (v_m - v_n) + \frac{1}{m-n} \sum_{k=n}^{m-1} (u_m - u_k).$$

2. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers ℓ et que la suite $(n(u_n - u_{n-1}))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On désigne par M un majorant la suite $(n|u_n - u_{n-1}|)_{n \in \mathbb{N}}$.

(a) Montrer que :

$$\forall m > n, \quad |u_m - v_m| \leq \frac{n}{m-n} |v_m - v_n| + M \frac{m-n}{n+1}.$$

(b) Montrer que $\lim_{m \rightarrow +\infty} (u_m - v_m) = 0$ et donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Solution 3.71

1. Pour $m > n$, on a :

$$v_m = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} u_k + \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{m-1} u_k = \frac{n}{m} v_n + \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{m-1} u_k$$

et :

$$\begin{aligned} u_m - v_m &= u_m - \frac{n}{m} v_n - \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{m-1} u_k \\ &= u_m - \frac{n}{m} v_n - \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{m-1} (u_k - u_m) - \frac{m-n}{m} u_m \\ &= \frac{n}{m} (u_m - v_n) + \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{m-1} (u_m - u_k) \end{aligned}$$

soit :

$$u_m - v_m = \frac{n}{m} (u_m - v_m) + \frac{n}{m} (v_m - v_n) + \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{m-1} (u_m - u_k)$$

ou encore :

$$\frac{m-n}{m} (u_m - v_m) = \frac{n}{m} (v_m - v_n) + \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{m-1} (u_m - u_k)$$

c'est-à-dire :

$$u_m - v_m = \frac{n}{m-n} (v_m - v_n) + \frac{1}{m-n} \sum_{k=n}^{m-1} (u_m - u_k).$$

2.

(a) Pour $m > n$ et k compris entre n et $m-1$, on a :

$$|u_m - u_k| \leq \sum_{j=k+1}^m |u_j - u_{j-1}| \leq M \sum_{j=k+1}^m \frac{1}{j} \leq M \frac{m-k}{k+1} \leq M \frac{m-n}{n+1},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} |u_m - v_m| &\leq \frac{n}{m-n} |v_m - v_n| + \frac{M}{m-n} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{m-n}{n+1} \\ &\leq \frac{n}{m-n} |v_m - v_n| + M \frac{m-n}{n+1}. \end{aligned}$$

(b) D'autre part, la suite convergente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant de Cauchy, on peut trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (ce choix sera justifié plus loin) tel que :

$$\forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0, |v_m - v_n| < \varepsilon^2,$$

ce qui donne :

$$\forall m > n \geq n_0, |u_m - v_m| \leq \frac{n}{m-n} \varepsilon^2 + M \frac{m-n}{n+1}$$

Pour $m > n_0$ assez grand, on cherche un entier n compris entre n_0 et m tel que :

$$\frac{n}{m-n} < \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{m-n}{n+1} < \varepsilon$$

ou encore :

$$\frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} < n < \frac{m}{\varepsilon+1}.$$

Pour ce faire, il suffit de prendre n tel que :

$$n = E\left(\frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1}\right) + 1$$

où m est choisi tel que :

$$m > n_0 + \varepsilon(n_0 + 1).$$

En effet, on a :

$$n-1 \leq \frac{m-\varepsilon}{\varepsilon+1} < n$$

donc :

$$n \leq \frac{m - \varepsilon}{\varepsilon + 1} + 1 = \frac{m + 1}{\varepsilon + 1} < m$$

puisque $m > n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ et :

$$n > \frac{m - \varepsilon}{\varepsilon + 1} \geq n_0$$

si $m > \varepsilon(n_0 + 1) + n_0$.

On a donc pour $\varepsilon > 0$ donné et $m > n_0 + \varepsilon(n_0 + 1)$, en prenant $n = E\left(\frac{m - \varepsilon}{\varepsilon + 1}\right) + 1$:

$$|u_m - v_m| \leq \frac{n}{m - n} \varepsilon^2 + M \frac{m - n}{n + 1} < (M + 1) \varepsilon.$$

On a donc ainsi prouvé que $\lim_{m \rightarrow +\infty} (u_m - v_m) = 0$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} v_m = \ell$.

Exercice 3.72 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , alors la suite $\left(\left(\prod_{k=0}^{n-1} u_k \right)^{\frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des moyennes géométriques converge aussi vers ℓ .

Solution 3.72 Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \ell \geq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(u_n)) = \ln(\ell) \in [-\infty, +\infty[$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_k) \right) = \mu$ avec $\mu = \ln(\ell)$ pour ℓ réel et $\mu = -\infty$ pour $\ell = 0$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\left(\prod_{k=0}^{n-1} u_k \right)^{\frac{1}{n}} \right) \right) = \mu$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\prod_{k=0}^{n-1} u_k \right)^{\frac{1}{n}} \right) = e^\mu = \ell$.

Exercice 3.73 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , alors la suite $\left(\frac{n}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des moyennes harmoniques converge aussi vers ℓ .

Solution 3.73 On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell} \in [0, +\infty]$ et le théorème de Césaro nous dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{\ell}$, encore équivalent à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}} = \ell$.

Remarque 3.8 En utilisant l'encadrement $H_n(u) \leq G_n(u) \leq A_n(u)$, où $H_n(u)$, $G_n(u)$ et $A_n(u)$ désignent respectivement les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique de la suite u , la convergence de $(G_n(u))_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers ℓ se déduit de celle des suites $(H_n(u))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(A_n(u))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 3.74 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe telle que u_n soit non nul à partir d'un certain rang. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = \lambda$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|} \right) = \lambda$. La réciproque est-elle vraie ?

Solution 3.74 On peut supposer, quitte à réindexer la suite, que tous les u_n sont non nuls.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = \lambda \geq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = \mu$ avec $\mu = \ln(\lambda)$ pour λ réel et $\mu = -\infty$ pour $\lambda = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln |u_{n+1}| - \ln |u_n|) = \mu$ et en utilisant le théorème de Césaro :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\ln |u_{k+1}| - \ln |u_k|) \right) = \mu$$

soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} (\ln |u_n| - \ln |u_0|) \right) = \mu$$

encore équivalent à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\sqrt[n]{|u_n|} \right) \right) = \mu$ (c'est l'exercice précédent avec la suite $(\ln |u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$), ce qui donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|} \right) = e^\mu = \lambda$.

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \begin{cases} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

avec $0 < a < b$. On a :

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \left(a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{ab} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left(a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{ab} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2n}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{ab}$$

et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{a^{\frac{n+2}{2}} b^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}} = a & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}}{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}} = b & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

donc $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exercice 3.75 Déterminer les limites des suites :

$$\left(\sqrt[n]{C_{2n}^n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad \left(\sqrt[n]{\prod_{k=0}^n (n+k)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

Solution 3.75 Notons $v_n = \sqrt[n]{u_n}$ chacune de ces suites. Dans l'ordre d'apparition, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$;

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

$$v_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n^{2n}n!}} \text{ et :}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{27}{e^2},$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{27}{e^2}$.

Exercice 3.76 Soit $\alpha > -1$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite de réels définie par

$$u_0 > 0, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha} \quad (n \geq 0)$$

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $\beta > 0$ on a $u_{n+1}^\beta = u_n^\beta \left(1 + \frac{\beta}{u_n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)\right)$.
3. Donner un équivalent de u_n à l'infini.

Solution 3.76 1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante (par récurrence). Si elle était bornée, alors elle serait convergente de limite ℓ vérifiant $\ell = \ell + \frac{1}{\ell^\alpha}$, ce qui est impossible. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. Pour tout réel, on a

$$u_{n+1}^\beta = u_n^\beta \left(1 + \frac{\beta}{u_n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{u_n^{\alpha+1}}\right)\right).$$

3. Pour $\beta = \alpha + 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}^{\alpha+1} - u_n^{\alpha+1}) = \alpha + 1.$$

Le théorème de Césaro entraîne alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{\alpha+1}}{n} = \alpha + 1$$

c'est-à-dire que :

$$u_n \sim ((\alpha + 1)n)^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$