# Quadrique

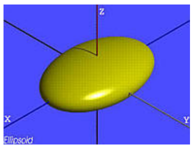
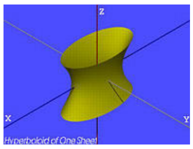
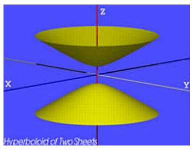
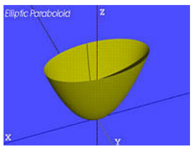
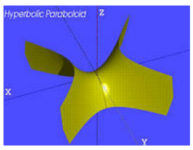
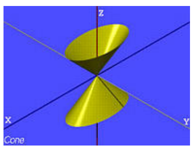
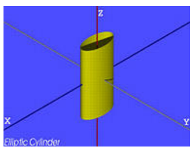
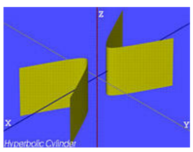
En géométrie euclidienne, une **quadrique**, ou **surface quadratique**, est une surface de l'espace euclidien de dimension 3, lieu des points vérifiant une équation cartésienne de degré 2

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

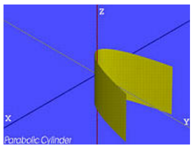
les coefficients *A* à *J* étant réels, avec *A,B,C,D,E,F* non tous nuls.

Plus généralement, on peut considérer les quadriques dans le cadre des espaces affines, de dimension 3 ou plus. Ce sont alors des hypersurfaces, lieu d'annulation d'un polynôme de degré 2. On peut également les étudier dans le cadre de la géométrie projective, qui simplifie et unifie complètement les résultats. On peut également prendre un autre corps de base que celui des réels.

Les quadriques de la géométrie euclidienne peuvent être classifiées : par un changement de repère cartésien, chaque quadrique peut voir son équation ramenée à une des **formes normalisées** ou **canoniques**. Il existe 17 formes normalisées, dont des formes dites *dégénérées*, qui donnent l'ensemble vide, une droite, un plan ou encore la réunion de deux plans sécants ou parallèles... Les plus intéressantes sont :

| | | |
|---|---|---|
| L'ellipsoïde | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ |  |
| L'hyperboloïde à une nappe (H1) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$ |  |
| L'hyperboloïde à deux nappes (H2) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$ |  |
| Le paraboloïde elliptique (PE) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z,$ |  |
| Le paraboloïde hyperbolique (PH) | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z,$ |  |
| Le cône à base elliptique | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$ |  |
| Le cylindre elliptique | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$ |  |
| Le cylindre hyperbolique | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$ |  |

Le cylindre parabolique $x^2 = 2py$.




La détermination des formes normalisées se fait par l'intermédiaire de l'étude et de la réduction de la forme quadratique

$$Q(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy$$

naturellement associée à l'équation.

## Classification en géométrie euclidienne

L' équation de la surface peut alors s'écrire :

$$Q(x, y, z) + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

En tant que forme quadratique, on peut associer $Q$ à la matrice symétrique suivante :

$$M_Q = \begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont toutes réelles puisque la matrice est symétrique ; ces valeurs propres permettent une classification aisée des quadriques - selon la nature des autres termes de l'équation descriptive. Dans un cas non dégénéré, au moins l'une de ses valeurs propres n'est pas identiquement nulle. Notons les $\lambda, \mu, \nu$. Il est alors possible de transformer l'équation de la surface afin d'obtenir la forme équivalente :

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

On note ici que si une des valeurs propres n'est pas nulle, on peut recentrer la coordonnée correspondante et faire ainsi disparaître le terme linéaire correspondant. Dans le cas contraire, cela signifie que la quadrique est un paraboloïde ou un cylindre à base parabolique.

Il est possible de classifier le type de surface en fonction des 7 paramètres précédents.

Cas 1. $\lambda$ , $\mu$ et $\nu$ non nuls

Dans ce cas l'équation précédente peut se simplifier par une translation en :

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + k = 0$$

On peut alors distinguer deux cas :

Sous-cas 1.1. $\lambda$ , $\mu$ et $\nu$ sont de même signes et positifs.

Dans ce cas, on obtient :

- un ellipsoïde si k<0,
- un point si k=0,
- l'ensemble vide si k>0.

Sous-cas 1.2. $\lambda$ et $\mu$ sont positifs et $\nu$ négatif.

La surface est :

- un hyperboloïde à une nappe si k<0,
- un hyperboloïde à deux nappes si k>0
- un cône si k=0

Cas 2. $\nu$ est nul.

L'équation se met sous la forme :

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + cz + d\,.$$

Suivant la valeur de c, on a :

Sous-cas 2.1

c=0

La surface est un cylindre.

Si $\lambda$ et $\mu$ sont de mêmes signes :

- un cylindre elliptique si d<0
- une droite si d=0
- l'ensemble vide si d>0.

Pour $\lambda$ et $\mu$ de signes opposés:

- un cylindre hyperbolique si d est non nul
- une réunion de deux plans si d=0

Sous-cas 2.2. c non nul

L'équation à une translation près est alors $\lambda x^2 = \mu y^2 = z$

- un paraboloïde elliptique si $\lambda$ et $\mu$ sont de même signes
- un paraboloïde hyperbolique si $\lambda$ et $\mu$ sont de signes contraires

Cas 3. $\mu$ et $\nu$ nuls

L'équation peut alors se réécrire après translation et rotation sous la forme :

$$\lambda x^2 + ly = 0.$$

On obtient donc :

- un cylindre parabolique si l est non nul.
- un plan si l=0

Cas 4. $\lambda$ , $\mu$ et $\nu$ nuls

On retombe dans le cas cas linéaire :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

La surface est donc soit :

- un plan
- l'ensemble vide
- l'ensemble de l'espace.

## Quadrique en dimension quelconque

Plus généralement, dans un espace de dimension D, si les coordonnées de l'espace sont $\{x_1, x_2, \ldots, x_D\}$ , la quadrique générale est une hypersurface définie par l'équation algébrique :

$$\sum_{i,j=1}^{D} Q_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^{D} P_i x_i + R = 0$$

pour un choix spécifique de Q, P et R.

L'équation normalisée pour une quadrique non dégénérée centrée à l'origine est de la forme :

$$\sum_{i=1}^{D} \pm \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$$

## Article connexe

- Conique

# Sources et contributeurs de l'article

**Quadrique** *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?oldid=48715159 *Contributeurs*: Aadri, Achernar, Alain r, Ambigraphe, Delaroyas, Dumontierc, Grimlock, Grum, Jaimie Ann Handson, Peps, Piccaf, Xmlizer, Xzapro4, 24 modifications anonymes

# Source des images, licences et contributeurs

**Image:Quadric_Ellipsoid.jpg** *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fichier:Quadric_Ellipsoid.jpg *Licence*: Public Domain *Contributeurs*: Newone, Pierreback, Salix alba, 1 modifications anonymes

**Image:Quadric_Hyperboloid_1.jpg** *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fichier:Quadric_Hyperboloid_1.jpg *Licence*: inconnu *Contributeurs*: Newone, Pierreback, Salix alba

**Image:Quadric_Hyperboloid_2.jpg** *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fichier:Quadric_Hyperboloid_2.jpg *Licence*: inconnu *Contributeurs*: Newone, Pierreback, Salix alba

**Image:Quadric_Elliptic_Paraboloid.jpg** *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fichier:Quadric_Elliptic_Paraboloid.jpg *Licence*: inconnu *Contributeurs*: Newone, Pierreback, Salix alba

**Image:Quadric_Hyperbolic_Paraboloid.jpg** *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fichier:Quadric_Hyperbolic_Paraboloid.jpg *Licence*: inconnu *Contributeurs*: Newone, Pierreback, Salix alba

**Image:Quadric_Cone.jpg** *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fichier:Quadric_Cone.jpg *Licence*: inconnu *Contributeurs*: Newone, Pierreback, Salix alba

**Image:Quadric_Elliptic_Cylinder.jpg** *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fichier:Quadric_Elliptic_Cylinder.jpg *Licence*: inconnu *Contributeurs*: Joe vom Titan, Newone, Pierreback, Salix alba

**Image:Quadric_Hyperbolic_Cylinder.jpg** *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fichier:Quadric_Hyperbolic_Cylinder.jpg *Licence*: Public Domain *Contributeurs*: GeorgHH, Lorentzo, Newone, Pierreback, Salix alba, Zscout370

**Image:Quadric_Parabolic_Cylinder.jpg** *Source*: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fichier:Quadric_Parabolic_Cylinder.jpg *Licence*: inconnu *Contributeurs*: Cdang, Newone, Pierreback, Salix alba

# Licence