SÉRIES ENTIÈRES, SÉRIES DE FOURIER

---

1. Séries entières

Exercice 1.1 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme. Déteerminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum_0^{+\infty} P(n)z^n$.

Exercice 1.2 Soit (a_n) une suite périodique de période $T \in \mathbb{N}^*$. Étudier le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

Simplifier $\sum_0^{nT-1} a_k z^k$ et en déduire que pour $x \in]-1,1[$, la somme $\sum a_k z^k$ est une fraction rationnelle en x.

Exercice 1.3 On note $\overline{\Delta}$ le disque unité *fermé*. Soit f une fonction continue sur B développable en série entière sur le disque ouvert Δ. Montrer qu'il existe une suite de polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ qui converge uniformément vers f sur $\overline{\Delta}$. (on pourra considérer pour r bien choisi, $g : z \mapsto f(rz)$).

Quelles sont les séries entières de rayon de convergence infini dont la somme est limite uniforme sur $\overline{\Delta}$ d'une suite de polynômes ?

Exercice 1.4 Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes de somme A et B respectivement. On note, pour tout entier n, $c_n = \sum a_k b_{n-k}$ et on suppose que la série $\sum c_n$ converge et a pour somme C. Montrer que $C = A \times B$

Exercice 1.5 Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de $\ln(x^2 - 5x + 6)$.

Même question pour $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx)dt$.

Exercice 1.6 Développer en série entière la fonction

$$f(x) = e^{-2x^2} \int_0^x e^{2t^2} dt.$$

Exercice 1.7 Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2[$ on a $\tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.

Montrer que la série de Taylor de tan en 0 converge sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Montrer que la somme de cette série est tan.

Montrer enfin que le rayon de convergence est égal à $\pi/2$.

Exercice 1.8 Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la série $\sum kA^k$ converge si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.

La somme $S = \sum kA^k$ est-elle inversible ?

Exercice 1.9 Soit $\sum_0^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note $f(x)$ sa somme sur $]-R, R[$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$. on note $g(x)$ la somme de cette série sur son intervalle ouvert de convergence.

Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$ on a

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} g(tx)\, dt.$$

On suppose que la suite (a_n) a une limite L quand n tend vers l'infini. Donner un équivalent de $g(x)$ au voisinage de plus l'infini.

2. Séries de Fourier

Exercice 2.10 Existe-t-il une fonction continue 2π-périodique dont la série de Fourier soit

$$\sum_1^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} ?$$

Exercice 2.11 Soit f une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ telle que pour tout entier n,

$$\int_0^{2\pi} t^n f(t) dt = 0.$$

On se propose de démontrer, sans utiliser le théorème de Weierstrass, que f est identiquement nulle.

(1) Démontrer que les coefficients de Fourier complexes de la fonction $\tilde{f}$ de période 2π égale à f sur $]0, 2\pi]$ sont tous nuls.

(2) Conclure en utilisant le théorème de Parseval.

Exercice 2.12

Formule sommatoire de Poisson

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $a > 1$ tel que $f(x) = O(1/|x|^a)$ et $f'(x) = O(1/|x|^a)$ lorsque $|x| \to \infty$, et on pose $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi)$.

Montrer que F est bien définie, $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique. En déduire la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Exercice 2.13 Montrer qu'il existe une unique suite (B_n) de polynômes telle que :

(1) $B_0 = 1$

(2) Pour tout entier non nul n , $B_n' = nB_{n-1}$.

(3) Pour tout entier n non nul, $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$.

Montrer que pour tout entier n, B_n est un polynôme unitaire de degré n.

Démontrer les propriétés suivantes :

(1) Pour tout entier $n > 1$ on a $B_n(1) = B_n(0)$.

(2) Pour tout entier n, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

(3) Pour tout entier p non nul, $B_{2p+1}(0) = B_{2p+1}(1) = 0$.

On note f_p la fonction 2π périodique définie par

$$f_p(x) = B_p\left(\frac{x}{2\pi}\right)$$

pour $x \in [0, 2\pi[$.

(1) Montrer que pour tout entier $p > 1$ la fonction f_p est continue.

(2) Montrer que f_p a la parité de p.

(3) Calculer les coefficients de Fourier complexes de f_1 puis, ceux de f_p pour $p > 1$.

(4) Pour tout entier n on note $b_n = B_n(0)$. Exprimer $\zeta(2p) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{2p}}$ en fonction de b_{2p}.

(5) Démontrer que pour tout entier p on a

$$b_{2p} = \sum_0^{2p} \binom{2p}{k} b_k$$

et en déduire que $\zeta(2p)$ est transcendant.

Exercice 2.14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique continue, f_n sa n-ème somme de Fourier et $g_n = \dfrac{f_0 + \cdots + f_n}{n+1}$.

(1) Exprimer g_n à l'aide d'un produit de convolution, $g_n = f * k_n$. où

$$k_n(x) = \frac{1 - \cos((n+1)x)}{(n+1)(1-\cos x)}.$$

(2) En déduire que la moyenne des sommes partielles de la série de Fourier de f converge uniformément vers f *pour toute* f *continue.*

Exercice 2.15 Montrer que l'équation : $y^{(4)} + y'' + y = |\sin x|$ admet une et une seule solution π-périodique.

Exercice 2.16 [Équirépartition modulo 1.] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ 1-périodique, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\dfrac{f(x) + f(x+\alpha) + \cdots + f(x+n\alpha)}{n+1}$ tend vers $\int_0^1 f(t)\,dt$ quand n tend vers l'infini.

Montrer que le résultat est encore vrai en supposant seulement f continue.

En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$.