Agrégation Interne

Séries numériques et nombres premiers

On pourra consulter les ouvrages suivants.

– V. Beck, J. Malick, G. Peyre. *Objectif Agrégation.* H et K (2004).
– O. Bordelles. *Thèmes d'arithmétique.* Ellipses (2006).
– J. M. De Koninck, A. Mercier. *1001 problèmes en théorie classique des nombres.* Ellipses. (2003).
– S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. *Oraux X-ENS. Algèbre 1.* Cassini (2009).
– X. Gourdon. *Les Maths en tête. Algèbre.* Ellipses.
– D. Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses (1996).
– J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. L1, L2, L3.* Dunod. (2007).
– F. Moulin, J. P. Ramis, A. Warusfel. Cours de m*athématiques pures et appliquées. Algèbre et géométrie.* De Boeck. (2010).
– P. Tauvel. *Mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson (1993).
– G. Tenenbaum. *Introduction to analytic and probabilistic number theory.* Cambridge University Press. (1995).

1 Énoncé

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers et $\mathcal{P}$ l'ensemble de ces nombres premiers.

Pour tout entier naturel non nul n, on note :

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap [1, n]$$

l'ensemble des nombres premiers compris entre 1 et n et :

$$\pi(n) = \operatorname{card}(\mathcal{P}_n)$$

son cardinal.

Pour tout nombre premier p et tout entier naturel $n \geq 2$, on note $\nu_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers ($\nu_p(n) = 0$ si p ne figure pas dans cette décomposition), soit :

$$\nu_p(n) = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \text{ divise } n\right\}$$

On a :

$$\nu_p(n) \neq 0 \Leftrightarrow (p \text{ divise } n).$$

On dit que $\nu_p(n)$ est la valuation p-adique de n.

Par convention, on note $\nu_p(1) = 0$.

La décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$ peut donc s'écrire sous la forme :

$$n = \prod_{p\in\mathcal{P}_n} p^{\nu_p(n)}$$

– I – Inégalités de Tchebychev

Le théorème des nombres premiers (de démonstration délicate) nous dit que :

$$\pi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$$

Dans cette partie, on se propose de montrer que :

$$\forall n \geq 3,\ \ln(2)\frac{n}{\ln(n)} \leq \pi(n) \leq e\frac{n}{\ln(n)} \tag{1}$$

1. Pour tout entier $n \geq 2$, on note :

$$\mu_n = \operatorname{ppcm}(1, 2, \cdots, n)$$

et on se propose de montrer que :

$$\forall n \geq 7,\ \mu_n \geq 2^n$$

(théorème de Nair).

(a) Calculer μ_n pour n compris entre 2 et 8.

(b) Pour $1 \leq m \leq n$ entiers, on note :

$$I_{n,m} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m}\,dx$$

i. Montrer qu'il existe un entier $a_{n,m} \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$I_{n,m} = \frac{a_{n,m}}{\mu_n}$$

ii. En calculant la somme :

$$P_n(y) = \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} I_{n,m} y^{m-1}$$

pour tout réel $y \in]0,1[$, montrer que :

$$I_{n,m} = \frac{1}{m\binom{n}{m}}$$

iii. Montrer que, pour $1 \leq m \leq n$, $m\binom{n}{m}$ divise μ_n.

iv. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, μ_{2n+1} est multiple de $n(2n+1)\binom{2n}{n}$.

v. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\max_{0 \leq k \leq 2n} \binom{2n}{k} = \binom{2n}{n}$$

puis en déduire que $(2n+1)\binom{2n}{n} \geq 2^{2n}$.

vi. Déduire de ce qui précède que $\mu_{2n+1} \geq 2^{2n+1}$ pour tout $n \geq 2$, $\mu_{2n+2} \geq 2^{2n+2}$ pour tout $n \geq 4$, puis que $\mu_n \geq 2^n$ pour tout $n \geq 7$.

2. En utilisant la décomposition en facteurs premiers de μ_n, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \mu_n \leq n^{\pi(n)}$$

puis en déduire que :

$$\forall n \geq 3,\ \ln(2) \frac{n}{\ln(n)} \leq \pi(n)$$

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note :

$$P_n = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p$$

(a) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \pi(n)! \leq P_n$$

(b) Montrer que :

$$\forall n \geq 1,\ \frac{P_{2n+1}}{P_{n+1}} \leq \binom{2n+1}{n} \leq 2^{2n}$$

(c) En déduire que :

$$\forall n \geq 2,\ P_n \leq 2^{2n}$$

(d) Montrer que :

$$\forall n \geq 1,\ n(\ln(n) - 1) \leq \ln(n!)$$

(e) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \pi(n)(\ln(\pi(n)) - 1) \leq 2n\ln(2)$$

(f) En utilisant la fonction $\varphi : x \mapsto x(\ln(x) - 1)$, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ 2n\ln(2) \leq \varphi\left(e\frac{n}{\ln(n)}\right)$$

et en déduire que :

$$\forall n \geq 2,\ \pi(n) \leq e\frac{n}{\ln(n)}$$

– II – Quelques conséquences des inégalités de Tchebychev

Il résulte immédiatement de l'encadrement (1) que $\pi(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ (théorème de Legendre).

1. Des inégalités de Tchebychev, on peut déduire que :

$$\forall n \geq 2,\ \frac{1}{e}n\ln(n) \leq p_n \leq \frac{2}{\ln(2)}n\ln(n)$$

(a) Montrer que :

$$\forall n \geq 1,\ p_n > \frac{1}{e}n\ln(n)$$

(b) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \sqrt{p_n} \leq \frac{2}{\ln(2)}n\frac{\ln\left(\sqrt{p_n}\right)}{\sqrt{p_n}}$$

puis en déduire que :

$$\forall n \geq 7,\ p_n \leq n^2$$

et :

$$\forall n \geq 2,\ p_n \leq \frac{2}{\ln(2)}n\ln(n)$$

2.

(a) Étudier la série $\sum \frac{1}{p_n^\alpha}$, où α est un nombre réel.

(b) Étudier la série $\sum \frac{1}{p_n^\alpha(\ln(p_n))^\beta}$, où α, β sont deux nombres réels.

(c) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^{p_n}}{p_n}$.

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par :

$$S_n = \sum_{p\in\mathcal{P}_n}\frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{\pi(n)}\frac{1}{p_k}$$

la somme partielle d'indice $\pi(n)$ de la série $\sum \frac{1}{p_n}$.

(a) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ S_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{\pi(k) - \pi(k-1)}{k}$$

(b) En déduire que $S_n = \underset{n\to+\infty}{O}\ln(\ln(n))$.

(c) Déduire des inégalités de Tchebychev que $\ln(p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, puis en admettant le théorème des nombres premiers montrer que :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$$

et en déduire que :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

4. Pour tout réel x, on note $[x]$ la partie entière de x.
On se donne un entier $n \geq 2$, un nombre premier $p \geq 2$ et on se propose de montrer que :

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

(formule de Legendre).

(a) Montrer que, pour tout entier naturel k, le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont multiples de p^k est égal à $\left[\frac{n}{p^k}\right]$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel k, le nombre d'entiers compris entre 1 et n dont la valuation vaut k est égal à $\left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]$.

(c) En notant $q_{n,p} = \left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)}\right]$, montrer que :

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{q_{n,p}} \left[\frac{n}{p^k}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

(d) Déduire de ce qui précède que, pour $p \leq n$, on a :

$$0 \leq \frac{n}{p} - 1 < \nu_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

5. Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par :

$$T_n = \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \frac{\ln(p)}{p} = \sum_{k=1}^{\pi(n)} \frac{\ln(p_k)}{p_k}$$

la somme partielle d'indice $\pi(n)$ de la série $\sum \frac{\ln(p_n)}{p_n}$.

(a) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \ln(n!) = \sum_{k=1}^{\pi(n)} \nu_{p_k}(n!)\ln(p_k)$$

(b) Comme en **I.3**, on note $P_n = \prod_{p\in\mathcal{P}_n} p$ pour tout $n \geq 2$ et on rappelle que $P_n \leq 2^{2n}$.
Montrer qu'il existe un réel $S > 0$ tel que :

$$\forall n \geq 2,\ \frac{\ln(n!)}{n} - S \leq T_n \leq \frac{\ln(n!)}{n} + 2\ln(2)$$

(c) En déduire que $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ (théorème de Mertens).

– III – Produits de séries, produits eulériens

On rappelle que le produit de Cauchy (ou produit de convolution) de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est la série de terme général $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

1. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $\sum u_n$ une série réelle absolument convergente.
   Montrer que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
   Cela justifie l'écriture $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ dans le cas d'une série absolument convergente.

2.
   (a) Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels positifs ou nuls indexée par (n,m) dans $\mathbb{N}^2$. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} u_{n,m}$ est convergente de somme S_n et que la série $\sum S_n$ est convergente de somme S.
   Montrer que pour tout $m\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_{n,m}$ est convergente de somme T_m, que la série $\sum T_m$ est convergente et qu'on a :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

   (b) Calculer :

   $$\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^m}$$

3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs non identiquement nulles et $\sum w_n$ leur produit de Cauchy.
   (a) Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, il en est alors de même de $\sum w_n$, puis que :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

   (b) Montrer que si l'une des deux séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ est divergente, il en est alors de même de $\sum w_n$ (l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$ est encore vérifiée dans ce cas avec $+\infty$ pour valeur commune).

4. Plus généralement, montrer que le produit de Cauchy de $r \geq 2$ séries numériques à termes positifs $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_{k,n}$ convergentes est convergent et :

   $$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{1,n}\right)\cdots\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{r,n}\right) = \sum_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\in\mathbb{N}^r} u_{1,\alpha_1}\cdots u_{r,\alpha_r}$$

5. On se propose de montrer de manière élémentaire la divergence de la série $\sum \frac{1}{p_n}$.

   (a) Justifier le fait que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ est de même nature que la série $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$.

   (b) En désignant par $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)}$$

   montrer que :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty\right)$$

   (c) En désignant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par E_n l'ensemble des entiers naturels non nuls qui ont tous leurs diviseurs premiers dans $\mathcal{P}_n = \{p_1, \cdots, p_n\}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \sum_{j\in E_n} \frac{1}{j}$$

   déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq \sum_{j=1}^{p_n} \frac{1}{j}$$

   et conclure.

6. Soit $\alpha > 1$ un réel.

   (a) Montrer que le produit infini $\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^\alpha}}$ est convergent.

   (b) Montrer que :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^\alpha}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

   (formule d'Euler).

7. Montrer que le produit de Cauchy $\sum w_n$ de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes est absolument convergent et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

8. Montrer que le produit de Cauchy de la série convergente $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ par elle même est divergent.

– IV – Un théorème de Cesàro

Pour tout entier $n \geq 2$, on note :

$$I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$$

et $\mathcal{D}_n$ l'ensemble de tous les diviseurs strictement positifs de n.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}^*$ et à valeurs réelles.

Le produit de convolution (de Dirichlet) de deux suites réelles u, v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ est la suite $u * v$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (u * v)(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} u(d)\, v\left(\frac{n}{d}\right)$$

En notant $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$ où $r \geq 1$, les p_i sont premiers deux à deux distincts et les α_i entiers naturels non nuls, on définit la fonction μ de Möbius par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mu(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ (-1)^r \text{ si } n = \prod_{i=1}^{r} p_i \text{ (i. e. } n \text{ est sans facteurs carrés)} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La fonction indicatrice d'Euler est la fonction qui associe à tout entier naturel non nul n, le nombre $\varphi(n)$ d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n (pour $n = 1$, on a $\varphi(1) = 1$).

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $d \in \mathcal{D}_n$, on note :

$$S_d = \{k \in \{1, \cdots, n\} \mid k \wedge n = d\}$$

   (a) Montrer que les S_d, pour d décrivant $\mathcal{D}_n$, forment une partition de I_n et que, pour tout $d \in \mathcal{D}_n$, on a $\operatorname{card}(S_d) = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \varphi(d)$$

   (formule de Möbius).

2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ des suites définies sur $\mathbb{N}^*$ et à valeurs réelles, muni des lois $+$ et $*$, est un anneau commutatif unitaire.
   On notera e l'élément unité.

3. Caractériser les éléments inversibles de l'anneau $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, +, *\right)$.

4.

   (a) En notant ω la suite constante égale à 1 (i. e. $\omega(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), montrer que $\mu * \omega = e$, c'est-à-dire que :

$$\forall n \geq 1,\ \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$$

   (b) Montrer que si u, v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ sont telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} v(d)$$

   on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d)\, u\left(\frac{n}{d}\right)$$

   (formule d'inversion de Möbius).

5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mu(d) \frac{n}{d}$$

6. Montrer que si u, v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ sont telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} v(d)$$
on a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u(k) = \sum_{d=1}^{n} \left[\frac{n}{d}\right] v(d)$$
7. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left[\frac{n}{d}\right] = 1$$
8. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \frac{1}{2}\left(\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left[\frac{n}{d}\right]^2 + 1\right)$$
9. Pour tout entier $n \geq 2$, on note r_n la probabilité pour que deux entiers a, b compris entre 1 et n soient premiers entre eux.
   Montrer que :
$$\forall n \geq 2,\ r_n = \frac{1}{n^2}\left(2\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) - 1\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left[\frac{n}{d}\right]^2$$
10. Pour u, v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, le produit de Dirichlet des deux séries numériques $\sum u(n)$ et $\sum v(n)$ est la série $\sum u * v(n)$.
    (a) On suppose que les suites u et v sont à valeurs réelles positives.
    Montrer que si les séries $\sum u(n)$ et $\sum v(n)$ sont convergentes, il en est alors de même de $\sum u * v(n)$ et on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u * v(n) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\right)$$
    (b) Montrer que si les séries $\sum u(n)$ et $\sum v(n)$ sont absolument convergentes, il en est alors de même de $\sum u * v(n)$ et on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u * v(n) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\right)$$
11. À toute suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ on associe la série de fonctions $\sum \frac{u(n)}{n^x}$. On dit que cette série de fonctions est la série de Dirichlet associée à u.
    (a) Soient u, v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Montrer que si les séries de Dirichlet respectivement associées à u et v convergent absolument en un point x, alors la série de Dirichlet associée à $u * v$ converge absolument en x et on a :
$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u(n)}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v(n)}{n^x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u * v(n)}{n^x}$$

(b) Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$$

(c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \dfrac{6}{\pi^2}$ (théorème de Cesàro).