11

Formes bilinéaires et quadratiques réelles ou complexes

On se limite pour ce chapitre à l'étude des formes bilinéaires et quadratiques définies sur un espace vectoriel réel ou complexe.

On désigne pour ce chapitre par E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie ou non.

On notera $\mathbb{K}$ le corps de réels ou des complexes, en précisant quand cela sera nécessaire s'il s'agit de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par scalaire on entend réel ou complexe.

L'étude des formes quadratiques sur un corps quelconque de caractéristique différente de 2 sera reprise plus loin.

11.1 Formes linéaires

On rappelle la définition suivante déjà donnée au paragraphe 8.4.

Définition 11.1 *Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.*

Exemple 11.1 *Si E est un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de E, alors la j-ième projection :*

$$p_j : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto x_j$$

où j est un entier compris entre 1 et n, est une forme linéaire sur E.

Exemple 11.2 *Si E est un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de E et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ des scalaires, alors l'application :*

$$\ell : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

est une forme linéaire sur E.

En fait toutes les formes linéaires sur E de dimension n sont de la forme précédente. En effet, tout vecteur x de E s'écrit $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ et pour tout forme linéaire ℓ sur E, on a :

$$\ell(x) = \ell\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \ell(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$$

en notant $\alpha_j = \ell(e_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n.

La matrice ligne :

$$L = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\ell(e_1), \ell(e_2), \cdots, \ell(e_n))$$

est tout simplement la matrice de ℓ dans la base $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ de E et on a :

$$\forall x \in E,\ \ell(x) = L \cdot x = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

Ce résultat peut aussi s'exprimer sous la forme :

$$\forall x \in E,\ \ell(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j \right)(x)$$

où p_j désigne, pour j compris entre 1 et n, la projection $x \mapsto x_j$.

On peut donc écrire, une base $\mathcal{B}$ de E étant donnée, toute forme linéaire ℓ sur E sous la forme :

$$\ell = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j$$

où les $\alpha_j \in \mathbb{K}$ sont uniquement déterminés par $\alpha_j = \ell(e_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n.

Nous avons donc montré le résultat suivant.

Théorème 11.1 *Si E est un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de E, alors l'ensemble de toutes les formes linéaires sur E est un espace vectoriel de dimension n de base $(p_1, \cdots, p_n)$.*

On rappelle que si on dispose d'une base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E dire qu'une famille $(v_1, \cdots, v_p)$ d'éléments de E est libre (ou que ces éléments sont linéairement indépendants) équivaut à dire que les vecteurs colonnes $X_1, \cdots, X_p$ formés des composantes de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{K}^n$. On peut donc parler de formes linéaires linéairement indépendantes.

On rappelle également que pour montrer que le système $(X_1, \cdots, X_p)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$, il suffit d'extraire de la matrice $(X_1, \cdots, X_p)$ un déterminant d'ordre p non nul (ce qui impose bien sur que $p \leq n$).

Dire que le système $(X_1, \cdots, X_p)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$ équivaut aussi à dire que la matrice $(X_1, \cdots, X_p)$ est de rang p. Comme une matrice et sa transposée ont même rang, il revient au même de calculer le rang de la matrice transposée $\begin{pmatrix} {}^tX_1 \\ \vdots \\ {}^tX_p \end{pmatrix}$.

On retiendra que des formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_p$ définies sur E, de base $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$, par :

$$\forall x \in E,\ \ell_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j \ \ (1 \leq i \leq p)$$

sont linéairement indépendantes si, et seulement si la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

est de rang p (L_i est la matrice de ℓ_i dans la base $\mathcal{B}$ de E), ce qui revient à dire qu'on peut en extraire un déterminant d'ordre p non nul.

Exercice 11.1 *Montrer que les formes linéaires $(\ell_j)_{1\leq j\leq 3}$ définies sur $\mathbb{K}^5$ par :*

$$\begin{cases} \ell_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ \ell_2(x) = 3x_1 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 \\ \ell_3(x) = 3x_2 + x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

sont linéairement indépendantes.

Solution 11.1 *Il s'agit de vérifier que la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 3*, ce qui résulte de :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Remarque 11.1 *La somme de deux formes linéaires sur E est une forme linéaire, mais en général le produit de deux formes linéaires sur E n'est pas une forme linéaire.*

Exercice 11.2 *Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux formes linéaires sur E. Montrer que l'application $\ell_1\ell_2$ est une forme linéaire sur E si, et seulement si, l'une de ces deux formes est l'application nulle.*

Solution 11.2 *Il est clair que si l'une de ces deux formes est l'application nulle, alors $\ell_1\ell_2$ est une forme linéaire sur E.*
Réciproquement supposons que $\ell_1\ell_2$ soit linéaire. On a alors pour tout scalaire λ et tous vecteurs x, y dans E :

$$\begin{aligned} \ell_1(x)\ell_2(x) + \lambda\ell_1(y)\ell_2(y) &= (\ell_1\ell_2)(x) + \lambda(\ell_1\ell_2)(y) \\ &= (\ell_1\ell_2)(x+\lambda y) = \ell_1(x+\lambda y)\ell_2(x+\lambda y) \\ &= (\ell_1(x) + \lambda\ell_1(y))(\ell_2(x) + \lambda\ell_2(y)) \\ &= \ell_1(x)\ell_2(x) + \lambda(\ell_1(x)\ell_2(y) + \ell_1(y)\ell_2(x)) + \lambda^2\ell_1(y)\ell_2(y) \end{aligned}$$

et le polynôme :

$$\ell_1(y)\ell_2(y)\lambda^2 + (\ell_1(x)\ell_2(y) + \ell_1(y)\ell_2(x) - \ell_1(y)\ell_2(y))\lambda$$

est identiquement nul, ce qui équivaut à :

$$\ell_1(y)\ell_2(y) = 0 \text{ et } \ell_1(x)\ell_2(y) + \ell_1(y)\ell_2(x) - \ell_1(y)\ell_2(y) = 0$$

ou encore à :

$$\ell_1(y)\,\ell_2(y) = 0 \text{ et } \ell_1(x)\,\ell_2(y) + \ell_1(y)\,\ell_2(x) = 0$$

pour tous x, y dans E.
Si $\ell_1 \neq 0$, il existe alors $y \in E$ tel que $\ell_1(y) \neq 0$, donc $\ell_2(y) = 0$ et $\ell_1(y)\,\ell_2(x) = 0$ pour tout $x \in E$, ce qui équivaut à $\ell_2 = 0$.

Exercice 11.3 *Déterminer le noyau de la forme linéaire définie sur l'espace $\mathbb{K}^3$ par :*

$$\ell : v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x - y$$

Solution 11.3 *Ce noyau est :*

$$\begin{aligned} \ker(\ell) &= \left\{v \in \mathbb{K}^3 \mid x = y\right\} \\ &= \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = xv_1 + zv_2 \mid (x, y) \in \mathbb{K}^2 \right\} \end{aligned}$$

où on a noté $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs v_1 et v_2 étant linéairement indépendants, ce noyau est le plan vectoriel engendré par v_1 et v_2.

De manière plus générale, on donne la définition suivante.

Définition 11.2 *On appelle hyperplan de E, le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.*

Sur E, de base $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$, un hyperplan et donc l'ensemble des vecteurs $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ tels que :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

où les scalaires α_j ne sont pas tous nuls.
De plus une forme linéaire non nulle ℓ étant surjective (exercice 8.8), le théorème du rang nous dit que, pour pour E de dimension n, on a :

$$\dim(\ker(\ell)) = n - 1.$$

Réciproquement si H est un sous-espace de dimension $n-1$ dans E de dimension n, il admet une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ qui peut se compléter en une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E et H est le noyau de la n-ième projection :

$$p_n : x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mapsto x_n.$$

Nous avons donc montré le résultat suivant.

Théorème 11.2 *Sur un espace vectoriel E de dimension n un hyperplan est un sous-espace de E de dimension $n - 1$.*

Les supplémentaires d'un hyperplan dans E de dimension finie sont donc des droites. En fait ce résultat est général.

Théorème 11.3 *Si H est un hyperplan d'un espace vectoriel E, il existe alors une droite D telle que $E = H \oplus D$.*

Démonstration. On a $H = \ker(\ell)$ où ℓ est une forme linéaire non nulle sur E. Il existe donc un vecteur non nul a dans E tel que $\ell(a) = 0$. En désignant par $D = \mathbb{K}a$ la droite dirigée par a, on a alors $E = H \oplus D$. En effet, si $x \in H \cap D$, il existe un scalaire λ tel que $x = \lambda a$ et $\ell(x) = \lambda \ell(a) = 0$ nous donne $\lambda = 0$. On a donc $H \cap D = \{0\}$. De plus pour tout vecteur $x \in E$, le vecteur $y = x - \dfrac{\ell(x)}{\ell(a)} a$ est dans $H = \ker(\ell)$ et avec $x = y + \dfrac{\ell(x)}{\ell(a)} a$, on déduit que $x \in H + D$. On a donc $E = H + D$ et $E = H \oplus D$. ∎

Réciproquement un sous-espace vectoriel H de E supplémentaire d'une droite D est le noyau de la forme linéaire ℓ qui associe à tout vecteur x de E sa projection sur D, c'est donc un hyperplan.

On a donc le résultat suivant.

Théorème 11.4 *Un hyperplan de E est un sous-espace de E supplémentaire d'une droite.*

11.2 Formes bilinéaires

Définition 11.3 *Une forme bilinéaire sur E est une application :*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times E & \to & \mathbb{K} \\ & (x, y) & \mapsto & \varphi(x, y) \end{array}$$

telle que pour tout x dans E l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire et pour tout y dans E l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

Définition 11.4 *On dit qu'une forme bilinéaire φ sur E est symétrique si $\varphi(y, x) = \varphi(x, y)$ pour tous x, y dans E.*

Définition 11.5 *On dit qu'une forme bilinéaire φ sur E est anti-symétrique (ou alternée) si $\varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$ pour tous x, y dans E.*

Remarque 11.2 *Une application symétrique φ de E^2 dans $\mathbb{K}$ est bilinéaire si, et seulement si, l'une des deux applications $y \mapsto \varphi(x, y)$ (pour tout x dans E) ou $x \mapsto \varphi(x, y)$ (pour tout y dans E) est linéaire.*

Exemple 11.3 *Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires sur E, alors l'application :*

$$(x, y) \mapsto \ell_1(x) \ell_2(y)$$

est une forme bilinéaire sur E.

Exemple 11.4 *Si E est l'espace $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, alors l'application :*

$$\varphi : (f, g) \mapsto \int_a^b f(t) g(t) \, dt$$

est une forme bilinéaire.

Exemple 11.5 *Si $\ell_1, \cdots, \ell_p$ sont des formes linéaires sur E et $(\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ une famille de scalaires, alors l'application :*

$$(x, y) \mapsto \sum_{1\leq i,j\leq p} \alpha_{ij}\ell_i(x)\,\ell_j(y)$$

est une forme bilinéaire.

Nous verrons un peu plus loin que, sur un espace de dimension n, toutes les formes bilinéaires sont de la forme précédente.

On notera $Bil(E)$ l'ensemble de toutes les formes bilinéaires sur E.

On vérifie facilement que $Bil(E)$ est un espace vectoriel.

Exercice 11.4 *Montrer que toute forme bilinéaire φ sur E s'écrit de manière unique comme somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire alternée.*

Solution 11.4 *Soit φ une forme bilinéaire sur E. Les applications φ_1 et φ_2 définies sur E^2 par :*

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_1(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) + \varphi(y, x)) \\ \varphi_2(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) - \varphi(y, x))\end{array}\right.$$

sont bilinéaires, la forme φ_1 étant symétrique et φ_2 étant alternée. Et on a bien $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Réciproquement si $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ avec φ_1 bilinéaire symétrique et φ_2 bilinéaire alternée, on a alors :

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) \\ \varphi(y, x) = \varphi_1(y, x) + \varphi_2(y, x) = \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)\end{array}\right.$$

et $\varphi(x, y) + \varphi(y, x) = 2\varphi_1(x, y)$, $\varphi(x, y) - \varphi(y, x) = \varphi_2(x, y)$, ce qui prouve l'unicité de φ_1 et φ_2.

En désignant par $Bil_s(E)$ [resp. $Bil_a(E)$] le sous-ensemble de $Bil(E)$ constitué des formes bilinéaires symétriques [resp. alternées] sur E, on vérifie facilement que $Bil_s(E)$ et $Bil_a(E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $Bil(E)$ et l'exercice précédant nous dit que $Bil(E)$ est somme directe de $Bil_s(E)$ et $Bil_a(E)$, soit :

$$Bil(E) = Bil_s(E) \oplus Bil_a(E)$$

11.3 Expression matricielle des formes bilinéaires (en dimension finie)

Comme pour les applications linéaires, les matrices nous serviront à décrire une forme bilinéaire dans le cas des espaces de dimension finie.

Pour ce paragraphe E est un espace vectoriel de dimension n et on désigne par $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E.

Tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. On associe à un tel x le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^n$.

Plaçons nous tout d'abord sur $E = \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}^2$) muni de sa base canonique (e_1, e_2). Si φ est une forme bilinéaire sur E, on a alors pour tous vecteurs $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$ dans E :

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \varphi(x_1e_1 + x_2e_2, y)\\ &= x_1\varphi(e_1,y) + x_2\varphi(e_2,y)\\ &= x_1\varphi(e_1, y_1e_1 + y_2e_2) + x_2\varphi(e_2, y_1e_1 + y_2e_2)\\ &= x_1(y_1\varphi(e_1,e_1) + y_2\varphi(e_1,e_2)) + x_2(y_1\varphi(e_2,e_1) + y_2\varphi(e_2,e_2))\end{aligned}$$

En désignant par A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2)\\ \varphi(e_2,e_1) & \varphi(e_2,e_2)\end{pmatrix}$$

on remarque que :

$$\begin{aligned}AY &= \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2)\\ \varphi(e_2,e_1) & \varphi(e_2,e_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} y_1\varphi(e_1,e_1) + y_2\varphi(e_1,e_2)\\ y_1\varphi(e_2,e_1) + y_2\varphi(e_2,e_2)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}{}^tX(AY) &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} y_1\varphi(e_1,e_1) + y_2\varphi(e_1,e_2)\\ y_1\varphi(e_2,e_1) + y_2\varphi(e_2,e_2)\end{pmatrix}\\ &= \varphi(x,y).\end{aligned}$$

Le produit des matrices étant associatif, cela s'écrit :

$$\varphi(x,y) = {}^tXAY$$

Le cas d'une forme bilinéaire sur un espace de dimension n se traite de manière analogue.

Définition 11.6 *La matrice d'une forme bilinéaire φ dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\le i\le n}$ de E est la matrice carrée d'ordre n :*

$$A = ((\varphi(e_i,e_j)))_{1\le i,j\le n}.$$

Théorème 11.5 *Soit φ une forme bilinéaire sur E et A la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$. Pour tous vecteurs x, y dans E, on a :*

$$\varphi(x,y) = {}^tXAY$$

Démonstration. En utilisant la bilinéarité de φ, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i, y\right) &= \sum_{i=1}^n x_i\varphi(e_i,y)\\ = \sum_{i=1}^n x_i\varphi\left(e_i, \sum_{j=1}^n y_je_j\right) &= \sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n y_j\varphi(e_i,e_j)\end{aligned}$$

et avec :

$$AY = \left(\sum_{j=1}^n y_j\varphi(e_i,e_j)\right)_{1\le i\le n}$$

$$^tXAY = {}^tX(AY) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(e_i, e_j)$$

on a le résultat annoncé. ∎

On retiendra que l'expression d'une forme bilinéaire φ dans une base est :

$$\varphi(x,y) = {}^tXAY = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} x_i y_j$$

où on a posé $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$ pour i, j compris entre 1 et n.

Réciproquement une telle fonction sur E^2 définit bien une forme bilinéaire sur E.

Ce résultat peut aussi s'exprimer comme suit.

Théorème 11.6 *Une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ est une forme bilinéaire sur E si, et seulement si, et seulement si, il existe une matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et des formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_n$ linéairement indépendantes telles que :*

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \varphi(x,y) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} \ell_i(x) \ell_j(x).$$

Démonstration. Si φ est bilinéaire, on a dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E, pour tous x, y dans E :

$$\varphi(x,y) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} \ell_i(x) \ell_j(x)$$

où $(\ell_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base duale de $\mathcal{B}$.

Et la réciproque est claire. ∎

L'application qui associe à une forme bilinéaire φ sur un espace vectoriel E de dimension n sa matrice dans une base donnée de E réalise un isomorphisme de $Bil(E)$ sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n. Cet espace étant de dimension n^2, on en déduit que :

$$\dim_{\mathbb{K}}(Bil(E)) = n^2.$$

Théorème 11.7 *Une forme bilinéaire φ sur E est symétrique [resp. alternée] si, et seulement si, sa matrice A dans une quelconque base $\mathcal{B}$ de E est symétrique [resp. alternée].*

Démonstration. Si φ est symétrique [resp. alternée], on a en particulier $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i)$ [resp. $\varphi(e_i, e_j) = -\varphi(e_j, e_i)$] pour tous i, j compris entre 1 et n, ce qui signifie que la matrice A de φ dans $\mathcal{B}$ est symétrique [resp. alternée].

Réciproquement si cette matrice est symétrique [resp. alternée], on a alors pour tous x, y dans E :

$$\varphi(y,x) = {}^tYAX = {}^t\left({}^tYAX\right) = {}^tX\,{}^tAY = {}^tXAY = \varphi(x,y)$$
$$\text{resp. } \varphi(y,x) = {}^tYAX = {}^t\left({}^tYAX\right) = {}^tX\,{}^tAY = -\,{}^tXAY = -\varphi(x,y)$$

(le produit matriciel $T = {}^tYAX$ étant un scalaire, on a bien ${}^tT = T$). ∎

Le sous-espace $Bil_s(E)$ de $Bil(E)$ formé des formes bilinéaires symétriques sur E est donc isomorphe au sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices symétriques, cet espace étant de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, il en résulte que :

$$\dim(Bil_s(E)) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Avec $Bil(E) = Bil_s(E) \oplus Bil_a(E)$, on déduit que :

$$\dim(Bil_a(E)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice 11.5 *Montrer que chacune des applications φ qui suivent est bilinéaire et calculer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

1. $n = 2$, $\varphi(x, y) = x_1 y_1 - 2x_2 y_2$.
2. $n = 3$, $\varphi(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - x_3 y_1 - 2x_3 y_3$.
3. $n = 3$, $\varphi(x, y) = 2x_1 y_1 - 3x_2 y_2 - x_3 y_3$.

Solution 11.5 *La bilinéarité de chacune de ces applications est évidente. Les matrices respectives dans les bases canoniques sont :*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La première et la troisième sont symétriques, mais pas la deuxième.

Exercice 11.6 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer la forme bilinéaire φ sur $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique.*

Solution 11.6 *On a :*

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = {}^t XAY &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 (y_1 + 2y_2 + 3y_3) + x_2 (2y_1 + 3y_2 + 4y_3) + x_3 (3y_1 + 4y_2 + 5y_3) \end{aligned}$$

Exercice 11.7 *Déterminer dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ la matrice de la forme bilinéaire symétrique φ telle que pour $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on ait :*

$$\begin{aligned} &\varphi(v_1, v_1) = 5,\ \varphi(v_1, v_2) = 0,\ \varphi(v_1, v_3) = -1, \\ &\varphi(v_2, v_2) = 1,\ \varphi(v_2, v_3) = 4,\ \varphi(v_3, v_3) = 0. \end{aligned}$$

Solution 11.7 *Comme :*

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
En désignant, pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{R}^3$, par $\left(x'_j\right)_{1 \leq j \leq 3}$ et $\left(y'_j\right)_{1 \leq j \leq 3}$ les coordonnées de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}'$, on a (en supposant que φ existe) :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi(x'_1 v_1 + x'_2 v_2 + x'_3 v_3, y'_1 v_1 + y'_2 v_2 + y'_3 v_3) \\ &= x'_1 y'_1 \varphi(v_1, v_1) + x'_2 y'_2 \varphi(v_2, v_2) + x'_3 y'_3 \varphi(v_3, v_3) \\ &+ (x'_1 y'_2 + x'_2 y'_1) \varphi(v_1, v_2) + (x'_1 y'_3 + x'_3 y'_1) \varphi(v_1, v_3) \\ &+ (x'_2 y'_3 + x'_3 y'_2) \varphi(v_2, v_3) \\ &= 5x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 - (x'_1 y'_3 + x'_3 y'_1) + 4(x'_2 y'_3 + x'_3 y'_2) \end{aligned}$$

Par ailleurs, avec :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ v_2 = -e_1 + 2e_2 \\ v_3 = e_1 + e_3 \end{cases}$$

on déduit que :

$$\begin{cases} e_1 = v_1 - v_2 - v_3 \\ e_2 = \frac{1}{2}(v_1 - v_3) \\ e_3 = -v_1 + v_2 + 2v_3 \end{cases}$$

et :

$$\varphi(e_1, e_1) = 16,\ \varphi(e_2, e_2) = \frac{7}{4},\ \varphi(e_3, e_3) = 26,$$
$$\varphi(e_1, e_2) = \frac{11}{2},\ \varphi(e_1, e_3) = -21,\ \varphi(e_2, e_3) = -6$$

ce qui permet de définir φ dans la base canonique et montre l'unicité d'une telle forme. Réciproquement, on vérifie que cette application bilinéaire convient.

L'exercice précédent peut se résoudre de façon plus efficace en utilisant la formule de changement de base donnée par le résultat qui suit.

Théorème 11.8 *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Si A_1 et A_2 sont les matrices d'une forme bilinéaire φ sur E dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement, on a alors :*

$$A_2 = {}^tPA_1P.$$

Démonstration. Pour $x \in E$, on note respectivement X_1 et X_2 les vecteurs colonnes formés des composantes de x dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement. Pour tous vecteurs x, y dans E, on a alors :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= {}^tX_1A_1Y_1 = {}^t(PX_2)A_1(PY_2) \\ &= {}^tX_2\left({}^tPA_1P\right)Y_2 \end{aligned}$$

ce qui signifie exactement que $A_2 = {}^tPA_1P$ du fait de l'unicité de la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_2$. ∎

Exercice 11.8 *Reprendre l'exercice 11.7 en utilisant le théorème précédent.*

Solution 11.8 *La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est :*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice de φ dans $\mathcal{B}'$:

$$A' = \begin{pmatrix} \varphi(v_1, v_1) & \varphi(v_1, v_2) & \varphi(v_1, v_3) \\ \varphi(v_1, v_2) & \varphi(v_2, v_2) & \varphi(v_2, v_3) \\ \varphi(v_1, v_3) & \varphi(v_2, v_3) & \varphi(v_3, v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = {}^tP^{-1}A'P^{-1}$$

avec :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & \frac{11}{2} & -21 \\ \frac{11}{2} & \frac{7}{4} & -6 \\ -21 & -6 & 26 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Définition 11.7 *Le discriminant dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E d'une forme bilinéaire φ est le déterminant de la matrice $A = ((\varphi(e_i, e_j)))_{1\leq i,j\leq n}$ de φ dans cette base. On le note $\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$.*

En utilisant le théorème 11.8, on déduit que si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, on a alors pour toute forme bilinéaire φ sur E :

$$\Delta_{\mathcal{B}_2}(\varphi) = (\det(P))^2 \Delta_{\mathcal{B}_1}(\varphi)$$

Exercice 11.9 *Soient E, F deux espaces vectoriels, u une application linéaire de E dans F et φ une forme bilinéaire sur F.*

1. *Montrer que l'application ψ définie sur E^2 par :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \psi(x, y) = \varphi(u(x), u(y))$$

   est bilinéaire.

2. *En supposant E et F de dimension finie et en désignant par $\mathcal{B}_1$ une base de E, $\mathcal{B}_2$ une base de F, A la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et par B la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_2$, déterminer la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}_1$.*

3. *On suppose ici que E est de dimension $n \geq 1$ et que φ est une forme bilinéaire sur E. On appelle matrice de Gram d'une famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ de vecteurs de E, la matrice :*

$$G(x_1, \cdots, x_n) = ((\varphi(x_i, x_j)))_{1\leq i,j\leq n}$$

   et le déterminant de cette matrice, noté $g(x_1, \cdots, x_n)$, est appelé déterminant de Gram de la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$.

   (a) *En désignant par $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E, montrer que :*

$$g(x_1, \cdots, x_n) = (\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n))^2 \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

   (b) *Montrer que pour tout endomorphisme u de E, on a :*

$$g(u(x_1), \cdots, u(x_n)) = (\det(u))^2 g(x_1, \cdots, x_n)$$

Solution 11.9

1. *Pour x [resp. y] fixé dans E, l'application $y \mapsto \varphi(u(x), u(y))$ [resp. $x \mapsto \varphi(u(x), u(y))$] est linéaire comme composée de deux applications linéaires. L'application ψ est donc bilinéaire sur E.*
2. *On note, pour tout vecteur x de E, X le vecteur colonne formé des composantes de x dans la base $\mathcal{B}_1$. Pour x, y dans E, on a :*

$$\varphi(u(x), u(y)) = {}^t(AX)\, B\,(AY) = {}^tX\left({}^tABA\right) Y$$

et en conséquence ${}^tABA$ est la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}_1$.

3.
   (a) *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(e_i) = x_i$ pour tout i compris entre 1 et n et ψ la forme bilinéaire définie sur E^2 par :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \psi(x, y) = \varphi(u(x), u(y))$$

On a :

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{B}}(\psi) &= \det\left(((\psi(e_i, e_j)))_{1\leq i,j\leq n}\right)\\ &= \det\left(((\varphi(u(e_i), u(e_j))))_{1\leq i,j\leq n}\right)\\ &= \det\left(((\varphi(x_i, x_j)))_{1\leq i,j\leq n}\right)\\ &= g(x_1, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

et avec la question 2. on a aussi :

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{B}}(\psi) &= \det\left({}^tABA\right) = (\det(A))^2 \det(B)\\ &= (\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n))^2\, \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)\end{aligned}$$

   (b) *On a :*

$$g(u(x_1), \cdots, u(x_n)) = (\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \cdots, u(x_n)))^2\, \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

avec :

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \cdots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}g(u(x_1), \cdots, u(x_n)) &= (\det(u))^2 (\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n))^2\, \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)\\ &= (\det(u))^2\, g(x_1, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

11.4 Formes quadratiques

Définition 11.8 *On appelle forme quadratique sur E une application q définie de E dans $\mathbb{K}$ par :*

$$\forall x \in E,\ q(x) = \varphi(x, x)$$

où φ est une forme bilinéaire.

Remarque 11.3 *Il est facile de vérifier que l'ensemble $Q(E)$ des formes quadratiques sur E est un espace vectoriel.*

Remarque 11.4 *A priori, il n'y a pas unicité des formes bilinéaires associées à une forme quadratique. Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, les formes bilinéaires φ et ψ définies par :*

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 \\ \psi(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 \end{cases}$$

définissent la même forme quadratique :

$$\begin{aligned} q(x) &= \varphi(x,x) = x_1^2 + x_2^2 \\ &= \psi(x,x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2x_1 + x_2^2 \end{aligned}$$

L'unicité de φ est assurée par le résultat suivant.

Théorème 11.9 *Si q est une forme quadratique sur E, il existe alors une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $q(x) = \varphi(x,x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. La forme quadratique q est définie par $q(x) = \varphi_0(x,x)$ pour tout $x \in E$, où φ_0 est une forme bilinéaire sur E. L'application φ définie sur $E \times E$ par :

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi_0(x,y) + \varphi_0(y,x))$$

est bilinéaire et symétrique avec $\varphi(x,x) = q(x)$ pour tout $x \in E$, ce qui prouve l'existence de φ.

Comme φ est bilinéaire et symétrique, on a pour x, y dans E :

$$\begin{aligned} q(x+y) = \varphi(x+y, x+y) &= \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) \\ &= q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y) \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

ce qui prouve l'unicité de φ. ■

Définition 11.9 *Avec les notations du théorème qui précède, on dit que φ est la forme polaire de la forme quadratique q.*

On retiendra l'expression de cette forme polaire :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

En écrivant que :

$$\begin{cases} q(x+y) = q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y) \\ q(x-y) = q(x) - 2\varphi(x,y) + q(y) \end{cases}$$

on déduit que cette forme polaire est aussi définie par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$$

On notera aussi que pour tout scalaire λ et tout vecteur x, on a :

$$q(\lambda x) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x,x) = \lambda^2 q(x)$$

ce qui se traduit en disant que q est une fonction homogène de degré 2.

Remarque 11.5 *L'application qui associe à une forme quadratique q sa forme polaire φ réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels de $Q(E)$ sur l'espace $Bil_s(E)$ des formes bilinéaires symétriques sur E. Pour E de dimension n, $Q(E)$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.*

Remarque 11.6 *De cet isomorphisme, on déduit aussi que deux formes bilinéaires symétriques φ_1 et φ_2 sur E sont égales si, et seulement si, $\varphi_1(x,x) = \varphi_2(x,x)$ pour tout $x \in E$.*

Dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie on peut utiliser les matrices pour définir les formes quadratiques.

Définition 11.10 *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Si q est une forme quadratique sur E de forme polaire φ, on dit alors que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de q dans cette base.*

En reprenant les notations du paragraphe 11.3, une forme quadratique est définie sur E de base $\mathcal{B}$ par :

$$q(x) = \varphi(x,x) = {}^tXAX = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_ix_j$$

et comme $a_{ij} = a_{ji}$, cela peut s'écrire :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j$$

Réciproquement une fonction q ainsi définie est une forme quadratique sur E de matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Le choix d'une base de E permet donc de réaliser un isomorphisme d'espaces vectoriels de $Q(E)$ sur l'espace des polynômes homogènes de degré 2 à n variables.

Exercice 11.10 *Déterminer la matrice et la forme polaire de la forme quadratique q définie dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$ par :*

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Solution 11.10 *La matrice de q dans la base canonique est :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

et sa forme polaire est définie par :

$$\varphi(x,y) = {}^tXAY = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 3(x_1y_3 + y_1x_3) + x_2y_3 + x_3y_2$$

Exercice 11.11 *Soient ℓ_1, ℓ_2 deux formes linéaires indépendantes sur E.*

1. *Montrer que l'application q définie sur E par :*

$$\forall x \in E,\ q(x) = \ell_1(x)\,\ell_2(x)$$

est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire.

2. *Montrer que q peut s'écrire comme différence de deux carrés de formes linéaires indépendantes.*
3. *On suppose que $E = \mathbb{K}^n$. Donner la matrice de q dans la base canonique de E.*

Solution 11.11

1. *L'application φ définie sur E^2 par :*
$$\forall x \in E^2,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\ell_1(x)\,\ell_2(y) + \frac{1}{2}\ell_1(y)\,\ell_2(x)$$
est bilinéaire symétrique et $q(x) = \varphi(x,x)$ pour tout $x \in E$. Donc q est une forme quadratique de forme polaire φ.
2. *On a :*
$$q(x) = \frac{1}{4}(\ell_1(x) + \ell_2(x))^2 - \frac{1}{4}(\ell_1(x) - \ell_2(x))^2$$
les formes linéaires $\ell_1' = \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2)$ et $\ell_2' = \frac{1}{2}(\ell_1 - \ell_2)$ étant indépendantes puisque ℓ_1, ℓ_2 le sont. En effet si $\alpha\ell_1' + \beta\ell_2' = 0$, on a alors $(\alpha+\beta)\,\ell_1 + (\alpha-\beta)\,\ell_2 = 0$, donc $\alpha + \beta = \alpha - \beta = 0$ et $\alpha = \beta = 0$.
3. *Pour $E = \mathbb{K}^n$, notons dans la base canonique :*
$$\begin{cases} \ell_1(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \\ \ell_2(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j \end{cases}$$
On a alors :
$$\begin{aligned} q(x) &= \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j\right) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} \alpha_i\beta_j x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i)\,x_i x_j \end{aligned}$$
ce qui signifie que la matrice de q est :
$$A = \frac{1}{2}\left((\alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i)\right)_{1\leq i,j\leq n} = \frac{1}{2}\left({}^tL_1L_2 + {}^tL_2L_1\right)$$
où $L_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$ et $L_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$ sont les matrices de ℓ_1, ℓ_2 dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
On peut aussi écrire, en remarquant que ${}^t(\alpha) = (\alpha)$ pour α réel ou complexe, que :
$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \frac{1}{2}(\ell_1(x)\,\ell_2(y) + \ell_1(y)\,\ell_2(x)) \\ &= \frac{1}{2}((L_1X)(L_2Y) + (L_1Y)(L_2X)) \\ &= \frac{1}{2}\left({}^t(L_1X)(L_2Y) + {}^t(L_2X)(L_1Y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left({}^tX\,{}^tL_1\right)(L_2Y) + \left({}^tX\,{}^tL_2\right)(L_1Y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left({}^tX\left({}^tL_1L_2 + {}^tL_2L_1\right)Y\right) \end{aligned}$$

et la matrice A de φ, ou de q, est :

$$A = \frac{1}{2}\left({}^tL_1L_2 + {}^tL_2L_1\right).$$

Ou encore revenir à la définition de la matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ de q dans la base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq n}$:

$$\begin{aligned} a_{ij} = \varphi(e_i, e_j) &= \frac{1}{2}\left(\ell_1(e_i)\,\ell_2(e_j) + \ell_1(e_j)\,\ell_2(e_i)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i\right) \end{aligned}$$

Exercice 11.12 *Soit L une matrice ligne à n colonnes. Montrer que la matrice $A = {}^tLL$ est une matrice carrée symétrique et que la forme quadratique q de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est le carré d'une forme linéaire.*

Solution 11.12 *Si $L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$, on a alors :*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = ((\alpha_i\alpha_j))_{1\leq i,j\leq n}$$

ce qui défini bien une matrice symétrique d'ordre n.
La forme quadratique q de matrice A est alors définie par :

$$q(x) = {}^tXAX = {}^tX\left({}^tLL\right)X = {}^t(LX)(LX) = (LX)^2$$

avec $LX = \ell(x)$ où ℓ est la forme linéaire de matrice L dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a donc $q = \ell^2$.

Exercice 11.13 *Soient p un entier naturel non nul, $\ell_1, \cdots, \ell_p$ des formes linéaires sur E et $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ des scalaires. Montrer que l'application q définie sur E par :*

$$\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \ell_j^2(x)$$

est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire.

Solution 11.13 *L'application φ définie sur E^2 par :*

$$\forall x \in E^2,\ \varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \ell_j(x)\,\ell_j(y)$$

est bilinéaire symétrique et $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$.

Nous allons voir que sur un espace de dimension finie toute forme quadratique peut se mettre sous la forme indiquée par l'exercice précédent.

L'utilisation des dérivées partielles peut être intéressante pour déterminer rapidement la forme polaire d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 11.14 *Montrer que si q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, alors sa forme polaire φ est donnée par :*

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial q}{\partial x_j}(x)\,y_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial q}{\partial y_i}(y)\,x_i$$

Solution 11.14 *En notant $A = ((a_{ij}))_{1\le i,j\le n}$ la matrice de q dans la base canonique, on a :*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j$$

et la forme polaire de q est définie par :

$$\varphi(x,y) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_iy_j.$$

Pour tout entier k compris entre 1 et n, on a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial x_k}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_i\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_k\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j\right) + \sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_i\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + x_ka_{kk} + \sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n} x_ia_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i\\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{jk}x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i
\end{aligned}$$

(les égalités $a_{kj} = a_{jk}$ sont justifiées par la symétrie de la matrice A). On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_iy_j &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right)y_j\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial q}{\partial x_j}(x)\,y_j
\end{aligned}$$

Par symétrie, on a la deuxième formule.
Par exemple, la forme polaire de la forme quadratique q définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

est donnée par :

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \frac{1}{2}\left((2x_1+4x_2+6x_3)\,y_1 + (4x_1+6x_2+2x_3)\,y_2 + (10x_3+6x_1+2x_2)\,y_3\right)\\
&= (x_1+2x_2+3x_3)\,y_1 + (2x_1+3x_2+x_3)\,y_2 + (5x_3+3x_1+x_2)\,y_3
\end{aligned}$$

qui est bien le résultat obtenu à l'exercice 11.10.

11.5 Théorème de réduction de Gauss

11.5.1 Cas des espaces de dimension 2

On désigne par E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E et pour tout vecteur v de E, on note x, y les coordonnées de v dans cette base, soit $v = xe_1 + ye_2$.

Dans cette base, une forme quadratique q s'écrit sous la forme :

$$q(v) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

La matrice de cette forme quadratique dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

On suppose que $q \neq 0$, soit $(a, bc) \neq (0, 0, 0)$.

- Si $a \neq 0$, on a :

$$q(v) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{\delta}{a}y^2$$

où $\delta = ac - b^2$ est le déterminant de A. Il y a alors deux possibilités :

  - soit $\delta = 0$ et :

$$q(v) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 = a\ell_1^2(v)$$

  où $\ell_1 : v \mapsto x + \frac{b}{a}y$ est une forme linéaire non nulle

  - soit $\delta \neq 0$ et :

$$q(v) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{\delta}{a}y^2 = a\ell_1^2(v) + \frac{\delta}{a}\ell_2^2(v)$$

  où $\ell_1 : v \mapsto x + \frac{b}{a}y$ et $\ell_2 : v \mapsto y$ sont deux formes linéaires indépendantes puisque $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b}{a} & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

- Si $a = 0$ et $c \neq 0$, on a :

$$q(v) = 2bxy + cy^2 = c\left(y + \frac{b}{c}x\right)^2 + \frac{\delta}{c}x^2$$

où $\delta = -b^2$ est encore le déterminant de A et il y a deux possibilités :

  - soit $b = 0$ et :

$$q(v) = cy^2 = c\ell_1^2(v)$$

  où $\ell_1 : v \mapsto y$ est une forme linéaire non nulle

  - soit $b \neq 0$ et :

$$q(v) = c\left(y + \frac{b}{c}x\right)^2 + \frac{\delta}{c}x^2 = a\ell_1^2(v) + \frac{\delta}{a}\ell_2^2(v)$$

  où $\ell_1 : v \mapsto y + \frac{b}{c}x$ et $\ell_2 : v \mapsto x$ sont deux formes linéaires indépendantes.

– Si $a = 0$ et $c = 0$, on a alors $b \neq 0$ et :

$$q(x, y) = 2bxy = \frac{b}{2}\left((x+y)^2 - (x-y)^2\right) = \frac{b}{2}\ell_1^2(v) - \frac{b}{2}\ell_2^2(vy)$$

où $\ell_1 : v \mapsto x + y$ et $\ell_2 : v \mapsto x - y$ sont deux formes linéaires indépendantes puisque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

On a donc montré le résultat suivant.

Théorème 11.10 *Toute forme quadratique non nulle q sur $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 2 peut s'écrire sous la forme $q = \lambda_1\ell_1^2$ où λ_1 est un scalaire non nul et ℓ_1 une forme linéaire non nulle ou $q = \lambda_1\ell_1^2 + \lambda_2\ell_2^2$ où λ_1, λ_2 sont deux scalaires non nuls et ℓ_1, ℓ_2 deux formes linéaires indépendantes.*

Ce résultat se généralise dans le cas des espaces de dimension n comme on le verra au paragraphe suivant. Quand on a trouvé une telle décomposition, on dit qu'on a réduit la forme quadratique, sous-entendu sous forme de combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

Si q est une forme quadratique sur $E = \mathbb{R}^2$, on notera $q(x, y)$ pour $q(v)$, où $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 11.15 *Réduire les formes quadratiques définies sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$q_1(x, y) = x^2 - 6xy + 5y^2$$
$$q_2(x, y) = xy$$

Solution 11.15 *On a :*

$$q_1(x, y) = (x - 3y)^2 - 4y^2$$
$$q_2(x, y) = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

On peut remarquer qu'une telle décomposition n'est pas unique. Par exemple, pour q_2, on peut aussi écrire :

$$q_2(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right)^2$$

11.5.2 Cas des espaces de dimension $n \geq 1$

Commençons par un exemple.

Exercice 11.16 *En s'inspirant de la méthode exposée au paragraphe précédent, réduire la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par :*

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Solution 11.16 *On regroupe les termes contenant x_1 pour l'écrire comme le début d'un carré, soit :*

$$x_1^2 + 2x_1x_3 = (x_1 + x_3)^2 - x_3^2$$

ce qui donne :

$$q(x) = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3.$$

On utilise ensuite la méthode développée pour le cas $n = 2$ à la forme q' définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q'(x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_2x_3$, soit :

$$q'(x_2, x_3) = (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

ce qui donne :

$$q(x) = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 = \ell_1^2(x) + \ell_2^2(x) - \ell_2^2(x)$$

les formes ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 étant indépendantes puisque :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

La démonstration du théorème qui suit s'inspire de cette méthode.

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, on notera $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et pour tout vecteur x de E, $x_1, \cdots, x_n$ désignent les coordonnées de x dans cette base, soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On associe toujours à ce vecteur x de E le vecteur colonne $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $\mathbb{K}^n$.

Théorème 11.11 *Pour toute forme quadratique non nulle q sur E, il existe un entier p compris entre 1 et n, des scalaires non nuls $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ et des formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_p$ indépendantes dans E^* tels que :*

$$\forall x \in E, \ q(x) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x)$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer et pour $n = 2$ c'est fait.

On suppose le résultat acquis au rang $n - 1$ et on se donne une forme quadratique non nulle q définie dans une base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 3$ par :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Supposons tout d'abord que cette expression contient au moins un terme carré, c'est-à-dire qu'il existe un indice i compris entre 1 et n tel que $a_{ii} \neq 0$. Quitte à effectuer une permutation sur les vecteurs de base, on peut supposer que $a_{11} \neq 0$. En regroupant les termes contenant x_1, on écrit que :

$$\begin{aligned} a_{11} x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_1 x_j &= a_{11} \left(x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right) \\ &= a_{11} \left(\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right)^2 - \left(\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right)^2 \right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{11} \left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right)^2 + q'(x') \\ &= a_{11} \ell_1^2(x) + q'(x') \end{aligned}$$

où $\ell_1(x) = x_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j$, q' est une forme quadratique définie sur le sous espace vectoriel H de E engendré par $e_2, \cdots, e_n$ et $x' = \sum\limits_{i=2}^{n} x_i e_i$ si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Si $q' = 0$, on a alors $q = a_{11}\ell_1^2$ avec a_{11} et ℓ_1 non nuls.

Si $q' \neq 0$, l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe un entier p compris entre 2 et n, des scalaires non nuls $\lambda_2, \cdots, \lambda_p$ et des formes linéaires indépendantes $\ell_2, \cdots, \ell_p$ définies sur H tels que :

$$\forall x' \in H,\ q'(x') = \sum_{j=2}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x')$$

et en prolongeant les formes linéaires $\ell_2, \cdots, \ell_n$ à E (en posant $\ell_j(x) = \ell_j(x')$), on a :

$$q(x) = a_{11}\ell_1^2(x) + \sum_{j=2}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x)$$

ce qui donne une décomposition de q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires.

Il reste à vérifier que les formes $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p$ sont linéairement indépendantes dans E^*.

L'égalité $\sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j$ équivaut à dire que $\sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j(x) = 0$ pour tout $x \in E$. Prenant $x = e_1$, on a $\ell_1(x) = 1$ et $\ell_j(x) = 0$ pour j compris entre 2 et p, ce qui donne $\lambda_1 = 0$ et $\sum\limits_{j=2}^{p} \lambda_j \ell_j(x') = 0$ pour tout $x' \in H$, ce qui équivaut à $\sum\limits_{j=2}^{p} \lambda_j \ell_j = 0$ et la nullité de tous les λ_j puisque le système $(\ell_2, \cdots, \ell_p)$ est libre dans H^*. On a donc le résultat annoncé.

Il reste enfin à traiter le cas où q est sans facteurs carrés, c'est-à-dire le cas où tous les coefficients a_{ii} sont nuls. Comme q est non nulle, il existe deux indices $i < j$ tels que $a_{ij} \neq 0$. Quitte à effectuer une permutation sur les vecteurs de base, on peut supposer que $a_{12} \neq 0$. On regroupe alors dans l'expression de q tous les termes contenant x_1 et x_2 que l'on fait apparaître comme fragment d'un produit de deux formes linéaires, soit :

$$\begin{aligned} Q &= a_{12}x_1x_2 + x_1 \sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j + x_2 \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j \\ &= \left(a_{12}x_1 + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j \right) \left(x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{12}} x_j \right) - \left(\sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j \right) \left(\sum_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{12}} x_j \right) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} q(x) &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j \\ &= 2Q + 2 \sum_{3 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j \\ &= 2L_1(x)\, L_2(x) + q'(x') \end{aligned}$$

où $L_1(x) = a_{12}x_1 + \sum\limits_{j=3}^{n} a_{2j}x_j$, $L_2(x) = x_2 + \sum\limits_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{12}} x_j$ et q' est une forme quadratique définie sur le sous espace vectoriel H de E engendré par $e_3, \cdots, e_n$ et $x' = \sum\limits_{i=3}^{n} x_i e_i$ si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.

En écrivant que :

$$\begin{aligned}2L_1(x)\,L_2(x) &= \frac{1}{2}\left(L_1(x)+L_2(x)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(L_1(x)+L_2(x)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\ell_1^2(x) - \frac{1}{2}\ell_2^2(x),\end{aligned}$$

on a :

$$q(x) = \frac{1}{2}\ell_1^2(x) - \frac{1}{2}\ell_2^2(x) + q'(x\prime)$$

Si $q' = 0$, on a alors $q = \frac{1}{2}\ell_1^2 - \frac{1}{2}\ell_2^2$, les formes linéaires ℓ_1 et ℓ_2 étant indépendantes puisque la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & 1 & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ a_{12} & -1 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \end{pmatrix}$$

est de rang 2 car le déterminant extrait $\begin{vmatrix} a_{12} & 1 \\ a_{12} & -1 \end{vmatrix} = -2a_{12}$ est non nul.

Si $q' \neq 0$, l'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe un entier p compris entre 3 et n, des scalaires non nuls $\lambda_3, \cdots, \lambda_p$ et des formes linéaires indépendantes $\ell_3, \cdots, \ell_p$ définies sur H tels que :

$$\forall x' \in H,\ q'(x') = \sum_{j=3}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x')$$

et en prolongeant les formes linéaires $\ell_3, \cdots, \ell_n$ à E, on a :

$$q(x) = \frac{1}{2}\ell_1^2(x) - \frac{1}{2}\ell_2^2(x) + \sum_{j=2}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x)$$

ce qui donne une décomposition de q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires.

Il reste à vérifier que les formes $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p$ sont linéairement indépendantes dans E^*.

L'égalité $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j$ équivaut à dire que $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j(x) = 0$ pour tout $x \in E$. Prenant $x = e_1$ et $x = e_2$, on obtient $\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{21} = 0$ et $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, ce qui équivaut à $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ puisque $a_{21} \neq 0$ et $\sum_{j=3}^{p} \lambda_j \ell_j(x') = 0$ pour tout $x' \in H$, ce qui équivaut à $\sum_{j=3}^{p} \lambda_j \ell_j = 0$ et la nullité de tous les λ_j puisque le système $(\ell_3, \cdots, \ell_p)$ est libre dans H^*. On a donc le résultat annoncé. ■

On peut remarquer que cette démonstration est constructive, c'est-à-dire qu'elle fournit un algorithme permettant d'obtenir une réduction en combinaison linéaire de carrés.

Une telle décomposition est appelée réduction de Gauss, ou plus simplement réduction, de la forme quadratique q.

Exercice 11.17 *Réduire la forme quadratique définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par :*

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Solution 11.17 *On a :*

$$\begin{aligned}q(x) &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 10x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - (x_2 + 5x_3)^2 + 21x_3^2\end{aligned}$$

Exercice 11.18 *Réduire la forme quadratique définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par :*

$$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$$

Solution 11.18 *On a :*

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4 \\ &= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - 2x_3^2 - 8x_4^2 - 8x_3x_4 \\ &= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - 2(x_3 + 2x_4)^2 \\ &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4)^2 - 2(x_3 + 2x_4)^2 \end{aligned}$$

Exercice 11.19 *Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j .$$

1. *Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Réduire q dans les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.*

Solution 11.19

1. *On a :*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

   (a) *Pour $n = 2$, on a :*

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2.$$

   (b) *Pour $n = 3$, on a :*

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2^2 + x_3^2\right) + \frac{1}{2}x_2x_3 \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2^2 + x_3^2 + \frac{2}{3}x_2x_3\right) \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{2}{3}x_3^2 \end{aligned}$$

   (c) *Pour $n = 4$, on a :*

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2^2 + x_3^2\right) + \frac{1}{2}x_2x_3 \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2^2 + x_3^2 + \frac{2}{3}x_2x_3\right) \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4\right)^2 \\ &\quad + \frac{2}{3}\left(x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)^2 + \frac{5}{8}x_4^2 \end{aligned}$$

Exercice 11.20 *On considère à nouveau la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^n$ par :*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

avec $n \geq 3$.

1. *Écrire q sous la forme :*
$$q(x) = \ell_1^2(x) + q_1(x')$$
où ℓ_1 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et q_1 une forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n-1}$ en notant $x' = (x_2, x_3, \cdots, x_n)$.
2. *Écrire q_1 sous la forme :*
$$q_1(x) = \frac{3}{4}\ell_2^2(x) + q_2(x'')$$
où ℓ_2 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{n-1}$ et q_2 une forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n-2}$ en notant $x'' = (x_3, \cdots, x_n)$.
3. *Montrer que pour tout p compris entre 1 et $n-1$, on peut écrire q sous la forme :*
$$q(x) = \ell_1^2(x) + \frac{3}{4}\ell_2^2(x) + \cdots + \frac{p+1}{2p}\ell_p^2(x) + \frac{p+2}{2p+2}q_{p+1}(x)$$
avec :
$$\left\{\begin{array}{c} \ell_1(x) = x_1 + \frac{1}{2}\sum\limits_{j=2}^{n} x_j \\ \ell_2(x) = x_2 + \frac{1}{3}\sum\limits_{j=3}^{n} x_j \\ \vdots \\ \ell_p(x) = x_p + \frac{1}{p+1}\sum\limits_{j=p+1}^{n} x_j \end{array}\right.$$
et :
$$q_{p+1}(x) = \sum_{i=p+1}^{n} x_i^2 + \frac{2}{p+2}\sum_{p+1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$
4. *Réduire q.*

Solution 11.20

1. On a :

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + x_1 \sum_{j=2}^{n} x_j + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq n} x_i x_j \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} x_j\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{j=2}^{n} x_j\right)^2 + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq n} x_i x_j \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} x_j\right)^2 + \frac{3}{4}\sum_{i=2}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{2 \leq i < j \leq n} x_i x_j \\ &= \ell_1^2(x) + q_1(x') \end{aligned}$$

avec :

$$\ell_1(x) = x_1 + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} x_j$$

et :

$$q_1(x') = \frac{3}{4}\sum_{i=2}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{2\leq i<j\leq n} x_i x_j$$

2. *On a :*

$$\begin{aligned} q_1(x') &= \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}x_2\sum_{j=3}^{n} x_j + \frac{3}{4}\sum_{i=3}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{3\leq i<j\leq n} x_i x_j \\ &= \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}\sum_{j=3}^{n} x_j\right)^2 - \frac{1}{12}\left(\sum_{j=3}^{n} x_j\right)^2 + \frac{3}{4}\sum_{i=3}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{3\leq i<j\leq n} x_i x_j \\ &= \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}\sum_{j=3}^{n} x_j\right)^2 + \frac{2}{3}\sum_{i=3}^{n} x_i^2 + \frac{1}{3}\sum_{3\leq i<j\leq n} x_i x_j \\ &= \frac{3}{4}\ell_2^2(x) + q_2(x'') \end{aligned}$$

avec :

$$\ell_2(x) = x_2 + \frac{1}{3}\sum_{j=3}^{n} x_j$$

et :

$$q_2(x'') = \frac{2}{3}\sum_{i=3}^{n} x_i^2 + \frac{1}{3}\sum_{3\leq i<j\leq n} x_i x_j$$

3. *Le résultat est vrai pour* $p = 1$*. Supposons le acquis pour* p *compris entre* 1 *et* $n-2$*. On a alors :*

$$\begin{aligned} q_{p+1}(x) &= \sum_{i=p+1}^{n} x_i^2 + \frac{2}{p+2}\sum_{p+1\leq i<j\leq n} x_i x_j \\ &= x_{p+1}^2 + \frac{2}{p+2}x_{p+1}\sum_{j=p+2}^{n} x_j + \sum_{i=p+2}^{n} x_i^2 + \frac{2}{p+2}\sum_{p+2\leq i<j\leq n} x_i x_j \\ &= \left(x_{p+1} + \frac{1}{p+2}\sum_{j=p+2}^{n} x_j\right)^2 - \frac{1}{(p+2)^2}\left(\sum_{j=p+2}^{n} x_j\right)^2 \\ &\quad + \sum_{i=p+2}^{n} x_i^2 + \frac{2}{p+2}\sum_{p+2\leq i<j\leq n} x_i x_j \\ &= \ell_{p+1}^2(x) + Q_{p+2}(x) \end{aligned}$$

avec :

$$\ell_{p+1}(x) = x_{p+1} + \frac{1}{p+2}\sum_{j=p+2}^{n} x_j$$

et :

$$\begin{aligned} Q_{p+2}(x) &= \left(1 - \frac{1}{(p+2)^2}\right) \sum_{i=p+2}^{n} x_i^2 + \frac{2}{p+2}\left(1 - \frac{1}{p+2}\right) \sum_{p+2 \le i<j \le n} x_i x_j \\ &= \frac{(p+1)(p+3)}{(p+2)^2} \sum_{i=p+2}^{n} x_i^2 + \frac{2(p+1)}{(p+2)^2} \sum_{p+2 \le i<j \le n} x_i x_j \\ &= \frac{(p+1)(p+3)}{(p+2)^2} \left(\sum_{i=p+2}^{n} x_i^2 + \frac{2}{p+3} \sum_{p+2 \le i<j \le n} x_i x_j\right) \\ &= \frac{(p+1)(p+3)}{(p+2)^2} q_{p+2}(x) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} q(x) &= \ell_1^2(x) + \frac{3}{4}\ell_2^2(x) + \cdots + \frac{p+1}{2p}\ell_p^2(x) + \frac{p+2}{2p+2}\ell_{p+1}^2(x) \\ &\quad + \frac{p+2}{2p+2} Q_{p+2}(x) \\ &= \ell_1^2(x) + \frac{3}{4}\ell_2^2(x) + \cdots + \frac{p+1}{2p}\ell_p^2(x) + \frac{p+2}{2p+2}\ell_{p+1}^2(x) \\ &\quad + \frac{p+2}{2p+2} \frac{(p+1)(p+3)}{(p+2)^2} q_{p+2}(x) \\ &= \ell_1^2(x) + \frac{3}{4}\ell_2^2(x) + \cdots + \frac{p+1}{2p}\ell_p^2(x) + \frac{p+2}{2p+2}\ell_{p+1}^2(x) \\ &\quad + \frac{p+3}{2p+4} q_{p+2}(x) \end{aligned}$$

soit le résultat au rang $p+1$.

4. *Faisant* $p = n-1$, *on a :*

$$q(x) = \ell_1^2(x) + \frac{3}{4}\ell_2^2(x) + \cdots + \frac{n}{2(n-1)}\ell_{n-1}^2(x) + + \frac{n+1}{2n} q_n(x)$$

avec $q_n(x) = x_n^2 = \ell_n^2(x)$, *soit :*

$$q(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{p+1}{2p} \ell_p^2(x)$$

avec :

$$\ell_p(x) = x_p + \frac{1}{p+1} \sum_{j=p+1}^{n} x_j$$

pour p *compris entre* 1 *et* n *(pour* $p = n$, *la somme* $\sum_{j=p+1}^{n}$ *est nulle).*

Le théorème 11.11 nous fournit aussi une expression intéressante de la forme polaire de la forme quadratique q comme nous allons le voir avec le théorème qui suit.

Pour la suite de ce paragraphe, q désigne une forme quadratique non nulle sur E et $q = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j^2$ une réduction de Gauss de cette forme quadratique où p est un entier compris entre 1 et n, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont des scalaires non nuls et $\ell_1, \cdots, \ell_p$ des formes linéaires indépendantes.

On notera φ la forme polaire de q.

Théorème 11.12 *Avec les notations qui précèdent, la forme polaire φ de q est alors définie par :*

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j(x) \ell_j(y)$$

Démonstration. Il est clair que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E et pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x,x) = \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x) = q(x)$, ce qui signifie que φ est la forme polaire de q. ■

Les formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_p$ étant linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E, elles peuvent se compléter en une base de cet espace (qui on le sait est de dimension n), c'est-à-dire qu'il existe des formes linéaires $\ell_{p+1}, \cdots, \ell_n$ (dans le cas où $p \leq n-1$) telles que $(\ell_1, \cdots, \ell_n)$ soit une base de E^*.

La réduction de Gauss du théorème 11.11 peut alors s'écrire :

$$\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ell_j^2(x)$$

où on a posé $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ dans le cas où $p \leq n-1$.

Théorème 11.13 *Étant donnée une base $(\ell_i)_{1 \leq i \leq n}$ de l'espace vectoriel E^* des formes linéaires sur E, il existe une base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que :*

$$\ell_i(f_j) = \delta_{ij}\ \ (1 \leq i, j \leq n)$$

où les δ_{ij} sont définis par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ \textit{si}\ i = j \\ 0 \ \textit{si}\ i \neq j \end{cases}$$

(symboles de Kronecker).

Démonstration. En notant, pour tout entier i compris entre 1 et n et tout vecteur $x \in E$:

$$\ell_i(x) = \alpha_{i1} x_1 + \cdots + \alpha_{in} x_n$$

l'expression de ℓ_i dans la bas $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$, la matrice $Q = ((\alpha_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible puisque les ℓ_i forment une base de E^* (la ligne i de Q est la matrice de ℓ_i dans la base $\mathcal{B}$). En notant $F_1, \cdots, F_n$ les colonnes de la matrice Q^{-1}, l'égalité $QQ^{-1} = I_n$ s'écrit :

$$Q(F_1, \cdots, F_n) = (QF_1, \cdots, QF_n) = (E_1, \cdots, E_n)$$

où $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a donc, pour tout entier j compris entre 1 et n :

$$QF_j = E_j$$

En remarquant que pour tout $x \in E$, on a :

$$QX = \begin{pmatrix} \alpha_{11} x_1 + \cdots + \alpha_{1n} x_n \\ \vdots \\ \alpha_{n1} x_1 + \cdots + \alpha_{nn} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix}$$

et en désignant par f_j le vecteur de E de composantes F_j dans la base $\mathcal{B}$, les égalités $QF_j = E_j$ se traduisent par :

$$\begin{pmatrix} \ell_1(f_j) \\ \vdots \\ \ell_n(f_j) \end{pmatrix} = E_j = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix}$$

et on a bien $\ell_i(f_j) = \delta_{ij}$ pour tous i, j compris entre 1 et n. ■

Dans la situation du théorème précédent, on dit que $(\ell_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base duale de $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ ou que $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base anté-duale de $(\ell_i)_{1\leq i\leq n}$.

Le théorème de réduction de Gauss peut alors se traduire matriciellement comme suit.

Théorème 11.14 *Avec les notations qui précèdent, il existe une base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de E dans laquelle la matrice de q est diagonale de la forme :*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(les p premiers λ_i sont non nuls et les suivants sont nuls).

Démonstration. Partant de la réduction de Gauss $q = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j^2$ avec $1 \leq p \leq n$ et les λ_i tous non nuls, on complète $(\ell_1, \cdots, \ell_p)$ en une base $(\ell_i)_{1\leq i\leq n}$ de E^* et on construit une base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que $\ell_i(f_j) = \delta_{ij}$ pour tous i, j compris entre 1 et n.

En posant $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ dans le cas où $p \leq n-1$, la forme polaire φ de q est définie par $\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ell_k(x) \ell_k(y)$ et pour i, j compris entre 1 et n, on a :

$$\varphi(f_i, f_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ell_k(f_i) \ell_k(f_j) = \lambda_i \ell_i(f_j) = \begin{cases} \lambda_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

ce qui donne le résultat annoncé. ■

Une telle base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est dite orthogonale pour la forme quadratique q (cette définition sera précisée un peu plus loin).

Comme une matrice symétrique définit une unique forme quadratique dans la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$, on déduit de tout ce qui précède, en utilisant la formule de changement de base pour les formes quadratiques, le corollaire qui suit.

Corollaire 11.1 *Si A est une matrice symétrique d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe alors une matrice inversible P telle que la matrice ${}^tPAP$ soit diagonale.*

Démonstration. En gardant toujours les mêmes notations, la matrice $P = Q^{-1}$ de colonnes $f_1, \cdots, f_n$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ et la matrice D de q dans cette base est diagonale et s'écrit $D = {}^tPAP$. ■

Avec l'exercice qui suit nous résumons sur un exemple une première méthode permettant d'obtenir une base orthogonale pour q. Nous verrons un peu plus loin comment faire l'économie du calcul des formes linéaires complétant $(\ell_1, \cdots, \ell_p)$ en une base de E^*.

Exercice 11.21 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer la forme quadratique* q *sur* $\mathbb{R}^3$ *(ou* $\mathbb{C}^3$*) ayant pour matrice* A *dans la base canonique.*
2. *Déterminer deux formes linéaires indépendantes* ℓ_1 *et* ℓ_2 *telles que* $q = \ell_1^2 - \ell_2^2$.
3. *Déterminer une forme linéaire* ℓ_3 *(aussi simple que possible) telle que* (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) *soit une base* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.
4. *Déterminer une base* (f_1, f_2, f_3) *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que* $\ell_i(f_j) = \delta_{ij}$ *pour tous* i, j *compris entre* 1 *et* 3.
5. *Déterminer une base de* $\mathbb{R}^3$ *orthogonale pour* q *et une matrice inversible* P *telle que* $D = {}^tPAP$ *soit diagonale.*

Solution 11.21 *On note* x, y, z *les coordonnées d'un vecteur* v *de* $\mathbb{R}^3$ *et* $q(x, y, z)$ *pour* $q(v)$.

1. *La forme* q *est définie par :*
$$q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2(2xy + 3xz + 4yz).$$
2. *On a la réduction de Gauss* $q = \ell_1^2 - \ell_2^2$ *avec :*
$$\begin{cases} \ell_1(x, y, z) = x + 2y + 3z \\ \ell_2(x, y, z) = y + 2z \end{cases}$$
3. *On peut prendre* ℓ_3 *définie par :*
$$\ell_3(x, y, z) = z$$
(ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) *est bien une base* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ *puisque :*
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$
4. *Il s'agit d'inverser la matrice :*
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Pour ce faire on résout le système :
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = x' \\ y + 2z = y' \\ z = z' \end{cases}$$
ce qui donne :
$$\begin{cases} x = x' - 2y' + z' \\ y = y' - 2z' \\ z' = z \end{cases}$$
et f_1, f_2, f_3 *sont les colonnes de :*
$$P = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. *La base* (f_1, f_2, f_3) *est alors orthogonale pour* q*, ce qui signifie que la matrice de* q *dans cette base est diagonale. Précisément, on a :*

$$D = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui peut aussi se vérifier par le calcul :

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11.22 *Soit* q *la forme quadratique définie sur* $\mathbb{R}^n$ *par :*

$$q(x) = x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$$

avec $n \geq 3$.

1. *Donner la matrice de* q *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.
2. *Réduire* q *dans le cas* $n = 3$.
3. *Déterminer une base orthogonale pour* q *dans le cas* $n = 3$.
4. *Traiter le cas général.*

Solution 11.22

1. *On a :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Pour* $n = 3$*, on a :*

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 - x_3^2 \\ &= \ell_1^2(x) + \ell_2^2(x) - \ell_3^2(x) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} \ell_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 \\ \ell_2(x) = x_2 \\ \ell_2(x) = x_3 \end{cases}$$

formes linéaires indépendantes.

3. *On résout le système :*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{array}\right.$$

et :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour base q-orthogonale. La matrice de q dans cette base est :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Pour $n \geq 3$, on a :

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \left(\sum_{i=2}^{n} x_i\right)^2 + 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + 2\sum_{2\leq i<j\leq n} x_i x_j \\ &= \ell_1^2(x) + \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 - x_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i^2(x) - \ell_n^2(x) \end{aligned}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{l} \ell_1(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \ell_i(x) = x_i \ \ (2 \leq i \leq n) \end{array}\right.$$

formes linéaires indépendantes.
Pour trouver une base q-orthogonale, on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = y_1 \\ x_i = y_i \ \ (2 \leq i \leq n) \end{array}\right.$$

ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = y_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} y_i \\ x_i = y_i \ \ (2 \leq i \leq n) \end{array}\right.$$

et :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ à une base q-orthogonale $(f_i)_{1\leq i\leq n}$.
On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 = e_1 \\ f_i = e_i - e_1 \ \ (2 \leq i \leq n) \end{array}\right.$$

et la matrice de q dans la base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11.23 *Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :*

$$q(x) = x^2 + (1+a)\,y^2 + \left(1+a+a^2\right) z^2 + 2xy - 2ayz$$

1. *Donner la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Calculer le déterminant de A.*
3. *Pour quelles valeurs de A la forme q est-elle non dégénérée ?*
4. *Réduire q et donner son rang et sa signature en fonction de a.*
5. *Déterminer une base orthogonale pour q.*
6. *En déduire une matrice inversible P telle que $D = {}^tPAP$ soit diagonale.*

Solution 11.23

1. *La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & -a \\ 0 & -a & 1+a+a^2 \end{pmatrix}.$$

2. *On a :*

$$\det(A) = a\left(1+a^2\right)$$

3. *La forme q est dégénérée si, et seulement si, $a = 0$.*
4. *On a :*

$$q(x) = (x+y)^2 + a\,(y-z)^2 + \left(1+a^2\right) z^2$$

Pour $a = 0$, q est de rang 2 et de signature $(2,0)$.
Pour $a \neq 0$, q est de rang 3 et de signature $(3,0)$ pour $a > 0$ et $(2,1)$ pour $a < 0$.

5. *Dans tous les cas, il s'agit de résoudre le système :*

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ y - z = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$$

Ce système a pour solution :

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta - \gamma \\ y = \beta + \gamma \\ z = \gamma \end{cases}$$

ce qui donne pour base q-orthogonale :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. *La matrice de q dans la base (f_1, f_2, f_3) est :*

$$D = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.6 Orthogonalité, noyau et rang

Pour ce paragraphe, φ est une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E et q la forme quadratique associée.

Définition 11.11 *On dit que deux vecteurs x, y de E sont orthogonaux relativement à φ si $\varphi(x, y) = 0$.*

Exemple 11.6 *Sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ le produit scalaire usuel :*

$$(x, y) \mapsto x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 \text{ ou } (x, y) \mapsto x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

définit une forme bilinéaire symétrique et la définition de l'orthogonalité correspond bien à celle étudiée au Lycée.

Définition 11.12 *Si X est une partie non vide E, l'orthogonal de X relativement à φ est le sous-ensemble de E formé des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de X.*

L'orthogonal d'une partie non vide X de E est notée $X^\perp$ et on a :

$$X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X,\ \varphi(x, y) = 0\}.$$

Exemple 11.7 *Pour $X = \{0\}$, on a $X^\perp = E$.*

Les propriétés suivantes se déduisent immédiatement de la définition.

Théorème 11.15 *Soient X, Y deux parties non vide de E.*

1. *$X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *$X \subset \left(X^\perp\right)^\perp$.*
3. *Si $X \subset Y$, alors $Y^\perp \subset X^\perp$.*

Comme, pour toute partie non vide X de E, $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, l'inclusion $X \subset \left(X^\perp\right)^\perp$ sera stricte pour X non sous-espace vectoriel.

Pour le produit scalaire usuel sur $E = \mathbb{R}^2$, on a $E^\perp = \{0\}$. En effet si $y \in E^\perp$, il est en particulier orthogonal à lui même, donc $y \cdot y = y_1^2 + y_2^2 = 0$ et $y_1 = y_2 = 0$, soit $y = 0$.

Mais de manière général un vecteur peut être orthogonal à lui même sans être nécessairement nul.

Considérons par exemple la forme bilinéaire symétrique φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

Un vecteur x est orthogonal à lui même si, et seulement si, $x_1^2 - x_2^2 = 0$, ce qui équivaut à $x_2 = \pm x_1$.

Définition 11.13 *On dit qu'un vecteur x de E est isotrope relativement à φ s'il est orthogonal à lui même.*

Définition 11.14 *L'ensemble des vecteurs isotropes de E, relativement à φ, est le cône isotrope de φ.*

Le cône isotrope de φ est donc le sous-ensemble de E :

$$C_\varphi = \{x \in E \mid q(x) = \varphi(x,x) = 0\}.$$

On dit aussi que C_φ est le cône isotrope de la forme quadratique q et on le note alors C_q ou $q^{-1}\{0\}$.

Définition 11.15 *Le noyau de φ est l'orthogonal de E.*

En notant $\ker(\varphi)$ le noyau de φ, on a :

$$\ker(\varphi) = E^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in E,\ \varphi(x,y) = 0\}$$

et ce noyau est un sous-espace vectoriel de E.

On dit aussi que $\ker(\varphi)$ est le noyau de la forme quadratique q et on le note alors $\ker(q)$.

Lemme 11.1 *Le noyau de φ est contenu dans son cône isotrope, soit :*

$$\ker(\varphi) \subset C_\varphi.$$

Démonstration. Si $x \in \ker(\varphi)$, il est orthogonal à tout vecteur de E et en particulier à lui même, ce qui signifie qu'il est dans le cône isotrope de φ. ■

Exercice 11.24 *Déterminer le noyau et le cône isotrope de la forme bilinéaire symétrique φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par :*

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

Solution 11.24 *Dire que y est dans le noyau de φ signifie que $\varphi(x,y) = 0$ pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, ce qui équivaut à $\varphi(e_i,y) = 0$ pour chacun des vecteurs de base canonique e_1, e_2, e_3. Le noyau de φ est donc l'ensemble des solutions du système linéaire :*

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(e_1,y) = y_1 = 0 \\ \varphi(e_2,y) = y_2 = 0 \\ \varphi(e_3,y) = -y_3 = 0 \end{array}\right.$$

soit :

$$\ker(\varphi) = \{0\}.$$

Le cône isotrope de φ est formé des vecteurs x tels que $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, et on reconnaît là l'équation d'un cône de $\mathbb{R}^3$ (figure 11.1).

Exercice 11.25 *Déterminer le noyau et le cône isotrope de la forme bilinéaire symétrique φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par :*

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 - x_3y_3$$

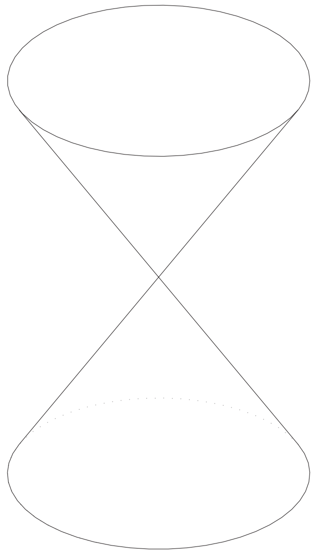

FIG. 11.1 – Cône : $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

Solution 11.25 *Dire que y est dans le noyau de φ signifie que $\varphi(x, y) = 0$ pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, ce qui équivaut à $\varphi(e_i, y) = 0$ pour chacun des vecteurs de base canonique e_1, e_2, e_3. Le noyau de φ est donc l'ensemble des solutions du système linéaire :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(e_1, y) = y_1 = 0 \\ \varphi(e_2, y) = 0 = 0 \\ \varphi(e_3, y) = -y_3 = 0 \end{array} \right.$$

soit :

$$\ker(\varphi) = \left\{ y = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

c'est donc la droite vectorielle dirigée par e_2.
Le cône isotrope de φ est formé des vecteurs x tels que $x_1^2 - x_3^2 = 0$, soit :

$$C_\varphi = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \cup \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

et il contient bien le noyau. Ce cône isotrope est la réunion de deux plans.

Exercice 11.26 *Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :*

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \text{ et } (F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$$

Solution 11.26 *Si $x \in (F+G)^{\perp}$, on a alors $\varphi(x, y+z) = 0$ pour tous vecteurs $y \in F$ et $z \in G$ et en particulier :*

$$\begin{cases} \forall y \in F, \ \varphi(x,y) = \varphi(x, y+0) = 0 \\ \forall z \in G, \ \varphi(x,z) = \varphi(x, 0+z) = 0 \end{cases}$$

ce qui nous dit que $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
Réciproquement si $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$, on a alors $\varphi(x,y) = \varphi(x,z) = 0$ pour tous vecteurs $y \in F$ et $z \in G$ et conséquence $\varphi(x, y+z) = 0$ pour ces vecteurs y, z, ce qui nous dit que $x \in (F+G)^{\perp}$.
Si $x = u + v \in F^{\perp} + G^{\perp}$ avec $u \in F^{\perp}$ et $v \in G^{\perp}$, on a alors pour tout $y \in F \cap G$:

$$\varphi(x,y) = \varphi(u,y) + \varphi(v,y) = 0$$

et $x \in (F \cap G)^{\perp}$.
L'égalité $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$ n'est pas assurée en général. Par exemple pour F, G supplémentaires dans E, on a $F \cap G = \{0\}$ et $(F \cap G)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E$ n'est en général pas égal à $F^{\perp} + G^{\perp}$.

Dans le cas où E est de dimension finie, en désignant par A la matrice de φ dans une base $\mathcal{B}$ et u l'endomorphisme de E ayant A pour matrice dans cette base, le noyau de φ est égal au noyau de u.

Théorème 11.16 *Soient E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E, A la matrice de la forme bilinéaire φ dans la base $\mathcal{B}$ et u l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$. On a alors :*

$$\ker(\varphi) = \ker(u).$$

Démonstration. Un vecteur x est dans le noyau de φ si, et seulement si, il est orthogonal à tout vecteur de E, ce qui équivaut à dire du fait de la linéarité à droite de φ que x est orthogonal à chacun des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, soit :

$$x \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \ \varphi(x, e_i) = 0)$$

ce qui revient à dire les coordonnées $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de x dans la base $\mathcal{B}$ sont solutions du système linéaire de n équations à n inconnues :

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j, e_i\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j, e_i) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) x_j = 0 \ \ (1 \leq i \leq n)$$

Ce système s'écrit $AX = 0$ où $A = ((\varphi(e_i, e_j)))_{1 \leq i,j \leq n}$ où A est la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ et X le vecteur colonne formé des composantes de x dans cette base. Ce système est encore équivalent à $u(x) = 0$, où u l'endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$, ce qui revient à dire que $x \in \ker(u)$.
■

On retiendra qu'en dimension finie, le noyau de φ se calcule en résolvant le système $AX = 0$, en utilisant les notations du théorème précédent.

Ce résultat peut aussi se montrer comme suit. Dire que $x \in \ker(\varphi)$ équivaut à dire que $\varphi(y, x) = 0$ pour tout $y \in E$, soit à ${}^tYAX = 0$ pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$ et prenant $Y = AX$, on a ${}^t(AX)AX = 0$. Mais pour $Z \in \mathbb{K}^n$, on a ${}^tZZ = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$ et ${}^tZZ = 0$ équivaut à $Z = 0$. Donc $AX = 0$ pour $x \in \ker(\varphi)$. La réciproque est évidente.

Définition 11.16 *On dit que la forme bilinéaire symétrique φ (ou de manière équivalente la forme quadratique q) est non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0\}$.*

Du théorème précédent, on déduit qu'en dimension finie, une forme bilinéaire symétrique est non dégénérée si, et seulement si, sa matrice dans une quelconque base de E est inversible, ce qui équivaut à dire que son déterminant est non nul.

Comme pour les applications linéaires, on peut définir le rang d'une forme quadratique à partir de la dimension de son noyau.

Définition 11.17 *Si E est de dimension finie égale à n, le rang de φ (ou de q) est l'entier :*

$$\operatorname{rg}(q) = n - \dim(\ker(q)).$$

Du théorème précédent, on déduit qu'en dimension finie le rang d'une forme quadratique est égal à celui de sa matrice dans une quelconque base.

Exercice 11.27 *On note $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on désigne par q la forme quadratique définie dans cette base par :*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j.$$

1. *Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$.*
2. *Déterminer le noyau et le rang de q.*
3. *On suppose que $n = 2$.*
   (a) *Effectuer la décomposition en carrés de Gauss de q.*
   (b) *En déduire une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^2$.*
   (c) *Écrire la matrice de q dans cette base.*
4. *On suppose que $n = 3$.*
   (a) *Effectuer la décomposition en carrés de Gauss de q.*
   (b) *En déduire une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^2$.*
   (c) *Écrire la matrice de q dans cette base.*
5. *On suppose que $n \geq 4$ et on note $f_1 = e_1$.*
   (a) *Déterminer l'orthogonal relativement à q de e_1. On notera H cet orthogonal.*
   (b) *Pour tout j compris entre 2 et n, on note $f_j = e_1 + \cdots + e_{j-1} - je_j$.*
   Montrer que $(f_j)_{2\leq j\leq n}$ est une base de H.
   (c) *Calculer Af_j pour tout j compris entre 2 et n.*
   (d) *Montrer que $\mathcal{B}' = (f_j)_{1\leq j\leq n}$ est une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^n$.*
   (e) *Écrire la matrice de q dans la base $\mathcal{B}'$.*
   (f) *En déduire une décomposition de q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.*

Solution 11.27

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

2. $x \in \ker(q) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x_1 + \cdots x_{j-1} + 2x_j + x_{j+1} + \cdots + x_n = 0$ *pour* $1 \leq j \leq n$. *En ajoutant toutes ces équations on obtient* $\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$ *qui retranchée à l'équation* j *donne* $x_j = 0$. *On a donc* $\ker(q) = \{0\}$ *et* $\operatorname{rang}(q) = n$.

3. *Pour* $n = 2$, *on a :*

   (a) $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2$.

   (b) *En résolvant le système* $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = a \\ x_2 = b \end{cases}$ *pour* $(a,b) = (1,0)$ *et* $(a,b) = (0,1)$, *on obtient la base q-orthogonale :* $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) *La matrice de q dans cette base est* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

4. *Pour* $n = 3$, *on a :*

   (a)

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2^2 + x_3^2 + \frac{2}{3}x_2x_3\right) \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{2}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

   (b) *En résolvant le système :*

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = a \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 = b \\ x_3 = c \end{cases}$$

   pour $(a,b) = (1,0,0)$, $(0,1,0)$ *et* $(0,0,1)$ *on obtient la base q-orthogonale :*

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (c) *La matrice de q dans cette base est* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

5.

(a) $x \in \{e_1\}^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(x, e_1) = 0 \Leftrightarrow {}^t x A e_1 = 0 \Leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$. *Une équation de* H *est donc :* $2x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

(b) *Les coordonnées de* f_j *dans* $\mathcal{B}$ *sont données par :*

$$x_1 = \cdots = x_{j-1} = 1,\ x_j = -j,\ x_{j+1} = \cdots = x_n = 0$$

et :

$$2x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2 + (j-2) - j = 0.$$

Les vecteurs f_j *sont bien dans* H *et ils sont libres, donc forment une base.*

(c) $$Af_j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -j-1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(d) *Pour* $2 \leq i < j$, *on a :*

$$\varphi(f_i, f_j) = \frac{1}{2}(1, \cdots, 1, -i, 0, \cdots, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -j-1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

et on sait déjà que f_1 *est* q*-orthogonal aux* f_j *pour* $j \geq 2$.

(e) *On a* $q(f_j) = \dfrac{j(j+1)}{2}$ *et la matrice de* q *dans* $\mathcal{B}'$ *est :*

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 6 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 12 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

(f) *L'expression de* q *dans* $\mathcal{B}'$ *est :*

$$q(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j(j+1) x_j'^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j(j+1) \ell_j^2(x)$$

avec $X' = P^{-1}X$ *où :*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$. *Pour* $n = 5$, *on a :*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

et pour $n \geq 4$, *la ligne* 1 *de* P^{-1} *est :*

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et la ligne $j \geq 2$ *est :*

$$\left(0, \cdots, 0, -\frac{1}{j}, -\frac{1}{j(j+1)}, \cdots, -\frac{1}{j(j+1)}\right).$$

On a donc :

$$\begin{cases} \ell_1(x) = x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + \cdots + \dfrac{1}{2}x_n \\ \ell_j(x) = \dfrac{1}{j}x_j + \dfrac{1}{j(j+1)}x_{j+1} + \cdots + \dfrac{1}{j(j+1)}x_n \\ \ell_n(x) = \dfrac{1}{n}x_n \end{cases}$$

ou encore :

$$q(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(j+1)} \left((j+1)x_j + x_{j+1} + \cdots + x_n\right)^2 + \frac{n+1}{2n}x_n^2.$$

En dimension finie la réduction de Gauss d'une forme quadratique nous permet d'obtenir son rang et son noyau.

Pour la suite de ce paragraphe, q désigne une forme quadratique non nulle sur un espace vectoriel E de dimension n et $q = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j^2$ la réduction de Gauss de cette forme quadratique où p est un entier compris entre 1 et n, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont des scalaires non nuls et $\ell_1, \cdots, \ell_p$ des formes linéaires indépendantes.

On a vu que la forme polaire de q est définie par :

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j(x) \ell_j(y).$$

Théorème 11.17 *Avec les notations qui précèdent, on a :*

$$\mathrm{rg}\,(q) = p$$

et :

$$\ker(q) = \{x \in E \mid \ell_1(x) = \ell_2(x) = \cdots = \ell_p(x) = 0\}$$

Démonstration. À la réduction de Gauss $q = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j^2$ est associée une base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de E dans laquelle la matrice de q est diagonale de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où les p premiers λ_i sont non nuls et les suivants nuls (théorème 11.14). Il en résulte que $\mathrm{rg}\,(q) = \mathrm{rg}\,(D) = p$ et $\ker(q)$ est de dimension $n - p$.

Comme les formes linéaires $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p$ sont linéairement indépendantes, l'espace vectoriel :

$$F = \{x \in E \mid \ell_1(x) = \cdots = \ell_p(x) = 0\}$$

est de dimension $n - p$. De plus pour tout $x \in F$ et $y \in E$, on a :

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j(x)\, \ell_j(y) = 0$$

ce qui signifie que F est contenu dans le noyau de q.

Ces espaces étant de même dimension, on a l'égalité $F = \ker(q)$. ∎

Le résultat précédent nous permet de simplifier la recherche d'une base q-orthogonale $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de E en se passant de compléter le système libre $(\ell_i)_{1\leq i\leq n}$ en une base du dual de E.

Dans le cas où $p = n$, la forme q est non dégénérée et une telle base q-orthogonale se calcule en résolvant les n systèmes linéaires :

$$\ell_i(f_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

ce qui revient à inverser la matrice $Q = ((\alpha_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$, où les α_{ij} sont définis par :

$$\ell_i(x) = \alpha_{i1} x_1 + \cdots + \alpha_{in} x_n$$

(les ℓ_i étant exprimés dans une base canonique donnée de E).

Dans le cas où $1 \leq p \leq n - 1$, on détermine tout d'abord une base $(f_{p+1}, \cdots, f_n)$ du noyau de q en résolvant le système linéaire de p équations à n inconnues :

$$\ell_i(x) = 0 \ \ (1 \leq i \leq p)$$

Ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux puisque orthogonaux à tout vecteur de E.

Il suffit ensuite de résoudre les p systèmes linéaires :

$$\ell_i(f_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq p)$$

ce qui fournit une famille q-orthogonale $(f_1, \cdots, f_p)$ formée de vecteurs non nuls. Pour j fixé entre 1 et p, le système linéaire $\ell_i(f_j) = \delta_{ij}$ où i varie de 1 à p a des solutions puisque la matrice de ce système est de rang p et deux solutions de ce système diffèrent d'un élément du noyau de q.

La famille $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ est alors une base q-orthogonale de E (exercice : vérifier qu'on a bien une base).

Dans la pratique, on résout d'abord le système :

$$\begin{cases} \ell_1(x) = b_1 \\ \quad\vdots \\ \ell_p(x) = b_p \end{cases}$$

où $b = (b_1, \cdots, b_p)$ est un élément quelconque de $\mathbb{K}^p$. La valeur $b = 0$ nous donne une base du noyau de q, puis les valeurs successives $b = (1, 0, \cdots, 0)$, $b = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $b = (0, \cdots, 0, 1)$ nous permettent de déterminer des vecteurs $f_1, \cdots, f_p$.

Exercice 11.28 *Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :*

$$q(x) = x^2 + (1+a)y^2 + \left(1 + a + a^2\right)z^2 + 2xy - 2ayz$$

1. *Donner la matrice A de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Calculer le déterminant de A.*
3. *Pour quelles valeurs de A la forme q est-elle non dégénérée ?*
4. *Réduire q et donner son rang en fonction de a.*
5. *Déterminer une base orthogonale pour q.*
6. *En déduire une matrice inversible P telle que $D = {}^tPAP$ soit diagonale.*

Solution

1. La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & -a \\ 0 & -a & 1+a+a^2 \end{pmatrix}.$$

2. On a :

$$\det(A) = a\left(1 + a^2\right)$$

3. La forme q est dégénérée si, et seulement si, $a = 0$.
4. On a :

$$q(x) = (x+y)^2 + a(y-z)^2 + \left(1 + a^2\right)z^2$$

Pour $a = 0$, q est de rang 2.
Pour $a \neq 0$, q est de rang 3.

5. Dans tous les cas, il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ y - z = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$$

Ce système a pour solution :

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta - \gamma \\ y = \beta + \gamma \\ z = \gamma \end{cases}$$

ce qui donne pour base q-orthogonale :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. La matrice de q dans la base (f_1, f_2, f_3) est :

$$D = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.7 Signature d'une forme quadratique réelle en dimension finie

Pour ce paragraphe, q est une forme quadratique non nulle a priori sur un espace vectoriel réel E de dimension finie égale à $n \geq 1$ et on note φ sa forme polaire.

Théorème 11.18 *Il existe un unique couple (s, t) d'entiers naturels tel que pour toute base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E qui est orthogonale relativement à q, le nombre de vecteurs e_i tels que $q(e_i) > 0$ est égal à s et le nombre de vecteurs e_i tels que $q(e_i) < 0$ est égal à t. De plus, on a $s+t = \mathrm{rg}(q)$.*

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux bases q-orthogonales de E telles que :

$$\begin{cases} q(e_i) > 0 \;\; (1 \leq i \leq s) \\ q(e'_i) > 0 \;\; (1 \leq i \leq s') \\ q(e_i) < 0 \;\; (s+1 \leq i \leq s+t) \\ q(e'_i) < 0 \;\; (s'+1 \leq i \leq s'+t') \\ q(e_i) = 0 \;\; (s+t+1 \leq i \leq n) \\ q(e'_i) = 0 \;\; (s'+t'+1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

où s, t, s', t' sont des entiers compris entre 0 et n avec la convention que la condition correspondante sur le signe de $q(e_i)$ ou $q(e'_i)$ n'a pas lieu quand l'encadrement de l'indice i n'a pas de sens.

Considérant les matrices de q dans chacune de ces bases, on voit que nécessairement on a $s + t = s' + t' = \mathrm{rg}(q)$.

On désigne par F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{e_1, \cdots, e_s\}$ ($F = \{0\}$ pour $s = 0$) et par G' celui engendré par $\left\{e'_{s'+1}, \cdots, e'_n\right\}$ ($G' = \{0\}$ pour $s' = n$). En supposant que $s \geq 1$, on a alors :

$$\forall x \in F \setminus \{0\}, \; q(x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i^2 > 0$$

et :

$$\forall x \in G',\ q(x) = \sum_{i=s'+1}^{n} \lambda_i' x_i^2 \leq 0$$

et en conséquence $F \cap G' = \{0\}$. Ce dernier résultat étant encore valable pour $s = 0$. On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \dim(F \oplus G') &= \dim(F) + \dim(G') \\ &= s + n - s' \leq n \end{aligned}$$

et $s \leq s'$.

En permutant les rôles joués par s et s', on montre de même que $s' \leq s$. On a donc $s = s'$ et $t = t'$ puisque $s + t = s' + t' = \operatorname{rg}(q)$. ■

Définition 11.18 *Le couple* (s, t) *d'entiers naturels défini par le théorème précédent est appelé signature de* q *et on le note* $\operatorname{sgn}(q)$.

Une forme quadratique q est donc de signature (s, t) si, et seulement si, elle admet une réduction de Gauss de la forme :

$$q = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \ell_j^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} \lambda_j \ell_j^2$$

où les λ_j sont tous strictement positifs (pour $s = 0$ la première somme n'existe pas et $s = n$ c'est la deuxième qui n'existe pas). En définissant les formes linéaires L_j par $L_j(x) = \ell_j\left(\sqrt{\lambda_j} x\right)$, on a la décomposition :

$$q = \sum_{j=1}^{s} L_j^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} L_j^2$$

et à cette décomposition est associée une base q-orthogonale de E dans laquelle la matrice de q est :

$$D = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice identité d'ordre r. Les blocs diagonaux I_s, $-I_t$ ou 0 n'existent pas si $s = 0$, $s = n$ ou $s + t = n$.

Définition 11.19 *On dit que la forme bilinéaire symétrique* φ *(ou de manière équivalente la forme quadratique* q*) est positive [resp. définie positive] si* $q(x) \geq 0$ *[resp.* $q(x) > 0$*] pour tout* x *dans* E *[resp. dans* $E \setminus \{0\}$*].*

Une forme quadratique non nulle est donc positive [resp. définie positive] si, et seulement si, sa signature est $(s, 0)$ [resp. $(n, 0)$] où s est compris entre 1 et n.

On définit de manière analogue les formes quadratiques négative [resp. définie négative] et une forme quadratique non nulle est négative [resp. définie positive] si, et seulement si, sa signature est $(0, t)$ [resp. $(0, n)$] où t est compris entre 1 et n.

Exercice 11.29 *On dit qu'une forme quadratique* q *sur* E *est définie si* $q(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in E \setminus \{0\}$. *Montrer que si* q *est une forme quadratique définie (au sens de la définition qui vient d'être donnée) sur un espace vectoriel réel* E *de dimension finie, alors elle est positive ou négative.*

Solution 11.28 *Dans une base $q-$orthogonale $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$, la matrice de q est, a priori, de la forme $D = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $p = s + t < n$, on a alors $q(e_{p+1}) \neq 0$ avec $e_{p+1} \neq 0$, ce qui contredit le caractère définie de q. La forme q est donc de rang $p = n$.*
Supposons que $1 \leq s \leq n - 1$. On a alors $q(e_s) = 1$, $q(e_{s+1}) = -1$ et :

$$q(e_s + e_{s+1}) = q(e_s) + q(e_{s+1}) = 1 - 1 = 0$$

avec $e_s + e_{s+1} \neq 0$, ce qui contredit encore le caractère définie de q. On a donc $s = 0$ et q est définie négative ou $s = 0$ et q est définie positive.
On peut aussi dire que, pour $n \geq 2$, la fonction continue q de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ transforme le connexe $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en un connexe de $\mathbb{R}^*$ et en conséquence $q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ est contenu dans $\mathbb{R}^{-,*}$ ou $\mathbb{R}^{+,*}$.

À partir d'une réduction de Gauss, $q = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \ell_j^2$, on déduit que q est positive [resp. définie positive] si, et seulement si, tous les λ_j sont strictement positifs [resp. $p = n$ et tous les λ_j sont strictement positifs]. En effet, la condition suffisante est évidente et pour la condition nécessaire, en supposant $\lambda_1 < 0$ (on peut toujours s'y ramener) et en désignant par $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base q-orthogonale de E déduite de cette réduction de Gauss, on a $q(e_1) = \lambda_1 < 0$ et q n'est pas positive.

Exercice 11.30 *Soit q la forme quadratique positive définie sur $\mathbb{R}^3$ par :*

$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz.$$

1. *Calculer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Donner une expression réduite de cette forme et en déduire le rang et la signature de q.*

Solution 11.29

1. *On a :*
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. *On a :*
$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= 2\left(x^2 + xy - xz\right) + y^2 + z^2 \\ &= 2\left(\left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}yz\right) + y^2 + z^2 \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{1}{2}(y + z)^2. \end{aligned}$$
   q est de rang 2 et de signature $(2, 0)$.

Une définition équivalente de la signature qu'une forme quadratique est donnée par le théorème qui suit.
La démonstration de ce théorème nécessite les lemmes suivants.

Lemme 11.2 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. La restriction de q à F est non dégénérée si, et seulement si, $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.*

Démonstration. Dire que la restriction de q à F est non dégénérée équivaut à dire que :

$$\{x \in F \mid \forall y \in F,\ \varphi(x, y) = 0\} = \{0\}$$

et ce ensemble est justement $F \cap F^{\perp}$ (c'est aussi le noyau la restriction de q à F). ■

Lemme 11.3 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si la restriction de q à F est non dégénérée on a alors $E = F \oplus F^{\perp}$.*

Démonstration. Laissée au lecteur. ■

Théorème 11.19 *En désignant par $\mathcal{P}$ [resp. $\mathcal{N}$] l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels F de E tels que la restriction de q à F soit définie positive [resp. définie négative] ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{N}$ peut être vide), la signature (s, t) de q est donnée par :*

$$s = \begin{cases} 0 \ \textit{si}\ \mathcal{P} = \emptyset \\ \max\limits_{F \in \mathcal{P}} \dim(F) \ \ \textit{si}\ \mathcal{P} \neq \emptyset \end{cases}$$

et :

$$t = \begin{cases} 0 \ \textit{si}\ \mathcal{N} = \emptyset \\ \max\limits_{F \in \mathcal{N}} \dim(F) \ \ \textit{si}\ \mathcal{N} \neq \emptyset \end{cases}$$

Démonstration. Notons :

$$s' = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{P} = \emptyset \\ \max\limits_{F \in \mathcal{P}} \dim(F) \ \text{ si } \mathcal{P} \neq \emptyset \end{cases}$$

et :

$$t' = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{N} = \emptyset \\ \max\limits_{F \in \mathcal{N}} \dim(F) \ \text{ si } \mathcal{N} \neq \emptyset \end{cases}$$

Par définition de la signature de q, on a $s \leq s'$ et $t \leq t'$.

Si $\mathcal{P} = \emptyset$, on a alors $s = s' = 0$.

Si $\mathcal{P} \neq \emptyset$, on peut trouver $F \in \mathcal{P}$ tel que $\dim(F) = s'$ et on a nécessairement $\dim(F) \leq s$. En effet si $\dim(F) > s$, on désigne par $(e_1, \cdots, e_{s'})$ une base q-orthogonale de F et on peut compléter cette base en une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E qui est aussi q-orthogonale puisque la restriction de q à F est non dégénérée (elle est définie positive) et $E = F \oplus F^{\perp}$. Comme $F \in \mathcal{P}$ est de dimension maximale, la restriction de q à $F^{\perp}$ est négative et la signature de q est (s', t') avec $s' > s$, ce qui n'est pas possible. On a donc $s' \leq s$ et $s = s'$.

On montre de manière analogue que $t = t'$. ■

Si q est définie positive, on a donc une réduction de Gauss $q = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \ell_j^2$ où tous les λ_j sont strictement positifs et la matrice de q dans une base q-orthogonale adaptée à cette réduction est diagonale de termes diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. En notant D cette matrice, on a $\det(D) = \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k > 0$. La matrice de q dans une autre base de $\mathbb{R}^n$ s'écrivant $A = {}^tPDP$ avec P inversible, on a $\det(A) = (\det(P))^2 \det(D) > 0$.

L'utilisation des mineurs principaux de la matrice de q dans une quelconque base de $\mathbb{R}^n$ nous permet de savoir si une forme quadratique est définie positive ou non.

On rappelle que si $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée d'ordre n, les mineurs principaux de A sont les déterminants des matrices extraites $A_k = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq k}$ où k est un entier compris entre 1 et n.

Théorème 11.20 *Soit q une forme quadratique non nulle sur un espace vectoriel réel E de dimension n de matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ dans une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$. La forme q est définie positive si, et seulement si, tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs.*

Démonstration. Supposons q définie positive sur E. Pour k compris entre 1 et n, la matrice $A_k = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq k}$ est la matrice de la forme quadratique q_k égale à la restriction de q au sous-espace vectoriel E_k de E engendré par les vecteurs $e_1, \cdots, e_k$. Cette forme q_k étant définie positive comme q, il en résulte que $\det(A_k) > 0$.

Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de E.

Pour $n = 1$, le résultat est évident puisque $E = \mathbb{R}e_1$ est une droite vectoriel et q s'écrit $q(x) = q(x_1e_1) = \lambda x_1^2$ avec $\lambda = q(e_1) = \det(A)$.

Supposons le résultat acquis pour tous les espaces de dimension au plus égal à n et soit q une forme quadratique sur un espace E de dimension $n+1$. On se donne une base $(e_i)_{1\leq i\leq n+1}$ de E et on suppose que tous les mineurs principaux de la matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n+1}$ de q dans cette base sont strictement positifs. En désignant par H le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $e_1, \cdots, e_n$, la matrice extraite $A_n = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice de la forme quadratique q_n égale à la restriction de q à H. Tous les mineurs principaux de A_n étant strictement positifs, cette forme q_1 est définie positive sur H.

La restriction de q à H étant définie positive et q non dégénérée ($\det(A) \neq 0$), la signature de q ne peut être que $(n, 1)$ ou $(n+1, 0)$ (par définition de la signature). Si cette signature est $(n, 1)$, cela signifie qu'on a une décomposition de Gauss de la forme $q = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \ell_j^2 - \lambda_{n+1}\ell_n^2$ où tous les λ_j sont strictement positifs et la matrice de q dans une base q-orthogonale adaptée à cette réduction est diagonale de termes diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, -\lambda_{n+1}$. En notant D cette matrice, on a $\det(D) = -\lambda_{n+1}\prod\limits_{k=1}^{n}\lambda_k < 0$, ce qui contredit $\det(D) = (\det(P))^2 \det(A) > 0$. La signature de q est donc $(n+1, 0)$ et q est définie positive. ■

11.8 Quadriques dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

Pour ce paragraphe, $\mathbb{K}$ désigne encore le corps de réels ou des complexes. (ou un corps commutatif de caractéristique différente de 2).

Pour $n \geq 2$, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ de sa base canonique et les coordonnées d'un vecteur X de $\mathbb{K}^n$ sont notées $x_1, \cdots, x_n$.

Pour $n = 2$ [resp. $n = 3$] et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ les coordonnées seront notées x, y [resp. x, y, z].

Définition 11.20 *On appelle quadrique dans $\mathbb{K}^n$ toute partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^n$ définie par :*

$$\mathcal{C} = \left\{ X \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0 \right\}$$

où c, les a_{ij} et les b_i sont des scalaires avec $(a_{11}, \cdots, a_{nn}) \neq 0$.

On dit aussi que $\mathcal{C}$ est la courbe d'équation :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0$$

dans la base canonique.

On notera aussi $\mathcal{C} = P^{-1}\{0\}$ où P est une fonction polynomiale de degré 2 sur $\mathbb{K}^n$.

Remarque 11.7 *Une telle courbe peut être vide comme le montre l'exemple de :*

$$P(X) = x^2 + y^2 + 1$$

dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 11.8 *Pour* $P(X) = x^2 + y^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}$ *est réduit à* $\{0\}$.
Pour $P(X) = x^2 + y^2 - 1$ *dans* $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}$ *est le cercle de centre* 0 *et de rayon* 1.
Pour $P(X) = x^2$ *dans* $\mathbb{K}^2$, $\mathcal{C}$ *est la droite d'équation* $x = 0$.
Pour $P(X) = xy$ *dans* $\mathbb{K}^2$, $\mathcal{C}$ *est la réunion des droites d'équations respectives* $x = 0$ *et* $y = 0$.

On peut remarquer que le polynôme P s'écrit $P = q + \ell + c$, où q est une forme quadratique, ℓ une forme linéaire et c une constante.

En désignant par A et L les matrices de q et ℓ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a :

$$P(X) = {}^tXAX + LX + c$$

Pour tout X_0 dans $\mathbb{K}^n$, on a pour tout X dans $\mathbb{K}^n$, en désignant par φ la forme polaire de q :

$$\begin{aligned} P(X + X_0) &= q(X + X_0) + \ell(X + X_0) + c \\ &= q(X) + 2\varphi(X, X_0) + \ell(X) + \ell(X_0) + q(X_0) + c \end{aligned}$$

l'application $X \mapsto \varphi(X, X_0)$ étant une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

Définition 11.21 *On dit que la quadrique* $\mathcal{C} = P^{-1}\{0\}$ *est à centre s'il existe un unique élément* X_0 *dans* $\mathbb{K}^n$ *tel que* $P(X + X_0) = q(X) + d$ *pour tout* X *dans* $\mathbb{K}^n$, *où* d *est une constante.*

Théorème 11.21 *La quadrique* $\mathcal{C} = P^{-1}\{0\}$ *est à centre si, et seulement si, la forme quadratique* q *est non dégénérée.*

Démonstration. Dire que $\mathcal{C}$ est à centre revient à dire qu'il existe un unique X_0 dans $\mathbb{K}^n$ tel que pour tout X dans $\mathbb{K}^n$, on ait $2\varphi(X, X_0) + \ell(X) = 0$, soit :

$$\forall X \in \mathbb{K}^n,\ 2\ {}^tX_0AX + LX = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall X \in \mathbb{K}^n, \left(2\ {}^tX_0A + L\right) X = 0$$

ce qui équivaut à $2\ {}^tX_0A + L = 0$ ou à $2\ {}^tAX_0 = 2AX_0 = -\ {}^tL$ (la matrice A de q est symétrique) X_0 étant unique.

En définitive, $\mathcal{C}$ est à centre si, et seulement si, l'équation $2AX_0 = -\ {}^tL$ a une unique solution, ce qui équivaut à dire que A est inversible. En effet, pour A inversible, la solution est $X_0 = -\frac{1}{2}A^{-1}\ {}^tL$ et pour A non inversible, l'ensemble des solutions de ce système est soit vide soit infini puisque pour toute solution X_0, l'ensemble $X_0 + \ker(A)$, avec $\dim(\ker(A)) \geq 1$, nous donne une infinité de solutions. Et A inversible signifie que q non dégénérée. ■

Remarque 11.8 *Si la quadrique $\mathcal{C}$ est à centre de centre X_0, en effectuant le changement de variable $X' = X - X_0$ (on ramène l'origine en X_0), on a :*

$$\begin{aligned} P(X) &= P((X - X_0) + X_0) = q(X - X_0) + d = q(X') + d \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} (x_i')^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i' x_j' + d \end{aligned}$$

Tenant compte du fait que pour tout $X' \in \mathbb{K}^n$ on a $q(X') = q(-X')$, on déduit que :

$$\begin{aligned} (X = X_0 + X' \in \mathcal{C}) &\Leftrightarrow P(X) = P(X' + X_0) = q(X') + d = 0 \\ &\Leftrightarrow q(-X') + d = P(-X' + X_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow (X_0 - X' \in \mathcal{C}) \end{aligned}$$

ce qui se traduit en disant que le centre X_0 est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.

Remarque 11.9 *Le système linéaire permettant de déterminer le centre, quand il est unique, est donné par :*

$$2 \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i = 0 \ \ (1 \leq i \leq n)$$

Dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} P(X) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} + b_k \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i + b_k \\ &= 2 \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + b_k \ \ (1 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

et notre système linéaire s'éccrit simplement :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} P(X) = 0 \ \ (1 \leq k \leq n)$$

Exemple 11.9 *Dans $\mathbb{R}^2$ la quadrique d'équation $y - x^2 = 0$ n'est pas à centre puisque la forme quadratique $q : (x, y) \mapsto -x^2$ est dégénérée. Cette quadrique du plan $\mathbb{R}^2$ est une parabole.*

Exemple 11.10 *Considérons dans $\mathbb{R}^2$ la quadrique d'équation :*

$$x^2 + y^2 - 2xy - 8(x + y) + 16 = 0$$

La forme quadratique q de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est dégénérée ($\det(A) = 0$) et donc n'est pas à centre. En effectuant le changement de variable $x' = x - y$, $y' = x + y$, cette équation s'écrit $(x')^2 - 8y' + 16 = 0$, soit $y' = \frac{1}{8}(x')^2 - 16$ et $\mathcal{C}$ est une parabole.

En définitive, si $\mathcal{C}$ est une quadrique à centre, en plaçant l'origine au centre, cette conique à une équation de la forme :

$$q(X) = \alpha$$

où q est une forme quadratique non dégénérée et α une constante.

Le théorème de réduction de Gauss nous permet d'écrire q comme combinaison linéaire de n carrés de formes linéaires, ce qui revient à dire qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle l'expression de q est $q(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, les scalaires λ_i étant non nuls et dans cette base (orthogonale pour q), une équation de $\mathcal{C}$ est :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \alpha.$$

11.9 Quadriques dans $\mathbb{R}^n$

Dans le cas des quadratiques à centre réelles, en désignant par (s, t) la signature de q avec $s + t = n$, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle une équation de $\mathcal{C}$ est :

$$\sum_{i=1}^{s} y_i^2 - \sum_{i=s+1}^{n} y_i^2 = \alpha.$$

avec la convention que $\sum_{i=1}^{s} = 0$ pour $s = 0$ et $\sum_{i=s+1}^{n} = 0$ pour $t = 0$.

En particulier dans le plan $\mathbb{R}^2$, on a les possibilités suivantes en désignant par x, y les coordonnées de X dans une base q-orthogonale, l'origine étant ramenée au centre de la quadrique :

- $x^2 + y^2 = \pm\alpha = \beta$ pour q de signature $(2, 0)$ ou $(0, 2)$ et $\mathcal{C}$ est vide pour $\beta < 0$, réduite à $\{(0, 0)\}$ pour $\beta = 0$ ou une ellipse pour $\beta > 0$;
- $x^2 - y^2 = \alpha$ pour q de signature $(1, 1)$ et $\mathcal{C}$ est une hyperbole.

Exemple 11.11 *Considérons dans $\mathbb{R}^2$ la quadrique d'équation :*

$$x^2 + y^2 + 4xy + 4(x + y) - 8 = 0.$$

La forme quadratique q est non dégénérée puisque sa matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant $\det(A) = -3 \neq 0$.
Son centre est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} P(X) = 2x + 4y + 4 = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} P(X) = 2y + 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$

ce qui donne $X_0 = -\dfrac{2}{3}(1,1)$.
Le changement de variables $X' = X - X_0$, *soit* $x' = x + \dfrac{2}{3}$, $y' = y + \dfrac{2}{3}$ *donne :*

$$\left(x' - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y' - \frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(x' - \frac{2}{3}\right)\left(y' - \frac{2}{3}\right) + 4\left(x' - \frac{2}{3} + y' - \frac{2}{3}\right) - 8 = 0$$

soit :

$$(x')^2 + (y')^2 + 4x'y' = \frac{32}{3}$$

comme prévu.
La réduction de Gauss donne :

$$(x' + 2y')^2 - 3(y')^2 = \frac{32}{3}$$

et $\mathcal{C}$ *est une hyperbole.*

En restant dans $\mathbb{R}^2$, une quadrique $\mathcal{C}$ a une équation de la forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Si la forme quadratique q est dégénérée et non nulle, elle est de rang 1, ce qui équivaut à dire que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est de rang 1 et il existe un réel non nul λ tel que $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et l'équation de $\mathcal{C}$ devient :

$$a\left(x^2 + 2\lambda xy + \lambda^2 y^2\right) + dx + ey + f = 0$$

soit :

$$a(x + \lambda y)^2 + dx + ey + f = 0$$

Si $a = 0$, on a l'équation :

$$dx + ey + f = 0$$

qui définit une droite si $(e,d) \neq (0,0)$, l'ensemble vide si $(e,d) = (0,0)$ et $f \neq 0$ ou $\mathbb{R}^2$ tout entier si $(e,d) = (0,0)$ et $f = 0$.

Pour $a \neq 0$, on distingue alors deux cas de figure.

Soit $e = \lambda d$ et notre équation devient :

$$(x + \lambda y)^2 + \frac{d}{a}(x + \lambda y) + \frac{f}{a} = 0$$

soit :

$$\left(x + \lambda y + \frac{d}{2a}\right)^2 = \frac{d^2 - 4af}{4a^2}$$

ce qui définit la réunion de deux droites si $d^2 - 4af > 0$ (les droites d'équations $x + \lambda y = \dfrac{\sqrt{d^2 - 4af} - d}{2a}$ et $x + \lambda y = -\dfrac{\sqrt{d^2 - 4af} + d}{2a}$), une droite si $d^2 - 4af = 0$ (la droite d'équation $x + \lambda y = -\dfrac{d}{2a}$) ou l'ensemble vide si $d^2 - 4af < 0$.

Soit $e \neq \lambda d$ et le changement de variable $x' = x + \lambda y$, $y' = dx + ey$ nous donne l'équation $a(x')^2 + y' + f = 0$, ce qui définit une parabole (le changement de variable est validé par $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ d & e \end{vmatrix} = e - \lambda d \neq 0$).

En définitive, dans une base adaptée, une quadrique de $\mathbb{R}^2$ a une équation de l'une des formes suivantes :

- $x^2 + y^2 = \beta\,;$
- $x^2 - y^2 = \alpha\,;$
- $dx + ey + f = 0\,;$
- $x^2 = \alpha\,;$
- $ax^2 + y + f = 0.$