Agrégation Interne

La fonction gamma

[1]

Ce problème est en relation avec les leçons d'oral suivantes :

- 267 : La fonction Gamma ;
- 223 : Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications ;
- 221 : Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples ;
- 217 : Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications ;
- 212 : Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés. Exemples.

On pourra consulter les ouvrages suivants.

- E. Artin. *The Gamma function.* Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York (1964).
- M. Cottrell, V. Genon-Catalot, C. Duhamel, T. Meyre. *Exercices de probabilités.*Cassini (2011).
- X. Gourdon. *Les Maths en tête. Analyse.* Ellipses (1994).
- J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L2.* Dunod. (2007).
- A.W. Roberts, D.E. Varberg. *Convex functions.* Academic Press (1973).
- W. Rudin. *Principes d'analyse mathématique.* Edisciences (1995).
- J. E. Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle.* EDP Sciences (2004).

1 Énoncé

Pour tout nombre complexe z, $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z.

On rappelle que pour tout nombre complexe z, la fonction puissance $t \mapsto t^z$ est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+,*},\ t^z = e^{z\ln(t)}$$

On rappelle qu'une fonction continue par morceaux d'un intervalle réel dans $\mathbb{C}$ est intégrable si, et seulement si, l'intégrale impropre de f sur I est absolument convergente.

Rappelons quelques versions pratiques des théorèmes classiques sur :

- la continuité et la dérivation d'une fonction définie comme intégrale dépendant d'un paramètre ;
- l'intervertion d'une intégrale et d'une sommation infinie ;
- l'intégration d'une fonction de deux variables (théorème de Fubini) ;
- l'intégration par changement de variables.

Théorème 1 *Soient I une partie non vide d'un espace vectoriel normé E (pour nous $E = \mathbb{C}$), J un intervalle réel non réduit à un point, F un espace de Banach (pour nous $F = \mathbb{C}$), $f : I \times J \to F$ une fonction continue et $\varphi : J \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur J telle que :*

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ \|f(x,t)\| \leq \varphi(t)$$

Dans ces condition, pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J et la fonction $x \mapsto \int_J f(x,t)\,dt$ est continue sur I.

1. Le 17/09/2013

Théorème 2 *Soient I, J deux intervalles réels non réduits à un point, $f : I \times J \to \mathbb{C}$ une fonction continue admettant une dérivée partielle par rapport à x en tout point (x,t) de $I \times J$ telle que pour tout réel $x \in I$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J et la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.*
S'il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$

alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x,t)\,dt$ est dérivable sur I avec :

$$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Si de plus la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times J$ (ou si pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I), alors la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Théorème 3 (convergence dominée) *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux, à valeurs complexes et intégrables sur un intervalle I telle que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I, alors la fonction f est intégrable sur I si la série $\sum \int_I |f_n(x)|\,dx$ est convergente et dans ce cas, on a $\int_I f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,dx$.*

Théorème 4 (Fubini) *Soient I, J deux intervalles réels non réduits à un point et $f : I \times J \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que :*
- *pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J ;*
- *la fonction $x \mapsto \int_J |f(x,t)|\,dt$ est intégrable sur I.*

Dans ces condition, la fonction f est intégrable sur $I \times J$ et :

$$\iint_{I\times J} f(x,t)\,dtdx = \int_I \left(\int_J f(x,t)\,dt\right) dx$$

Dans le théorème de Fubini, on peut permuter les rôles de x et t. D'un point de vue pratique, pour $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue telle que les intégrales $\int_I \left(\int_J |f(x,t)|\,dt\right) dx$ et $\int_J \left(\int_I |f(x,t)|\,dx\right) dt$ aient un sens, on a :

$$\iint_{I\times J} f(x,t)\,dtdx = \int_I \left(\int_J f(x,t)\,dt\right) dx = \int_J \left(\int_I f(x,t)\,dx\right) dt$$

Théorème 5 (changement de variables) *Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : V \to U$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. En notant $J_\varphi : x \in V \mapsto \det(d\varphi(x))$ le déterminant jacobien de φ, une fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ est intégrable sur U si, et seulement si, la fonction $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ est intégrable sur V et dans ce cas, on a :*

$$\int_U f(y)\,dy = \int_V f(\varphi(x))\,|J_\varphi(x)|\,dx$$

– I – Résultats préliminaires

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t \in [0, n]$, on a :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n}$$

2. Montrer que :

$$\forall t \in [-1, 0], \ 0 \leq (1 + t) e^{-t} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$$

3. Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n \geq 1}$ est convergente. Sa limite est la constante d'Euler, notée γ.
4. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

– II – Généralités sur la fonction gamma

On désigne par $\mathcal{H}$ le demi plan complexe défini par :

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

2. Montrer que, pour tout nombre complexe z, la fonction $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est (absolument) intégrable sur $]1, +\infty[$.
3. Soit z un nombre complexe. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement si, $z \in \mathcal{H}$.

Définition : La fonction gamma d'Euler est la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H}, \ \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

4. Montrer que :

$$\Gamma(1) = 1 \text{ et } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

5. Montrer que la fonction gamma vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall z \in \mathcal{H}, \ \Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \tag{1}$$

6. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\Gamma(n + 1) = n! \text{ et } \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

7.

   (a) Soient z et α deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $(z, \alpha) \in \mathcal{H}^2$.

(b) Montrer que :

$$\forall (z, \alpha) \in \mathcal{H}^2,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}} dt = \Gamma(z+1)\, \zeta(z+1, \alpha)$$

où ζ est la fonction dzéta de Hurwitz définie par :

$$\forall (z, \alpha) \in \mathcal{H}^2,\ \zeta(z+1, \alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{z+1}}$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, on a :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{e^t - 1} dt = \Gamma(z+1)\, \zeta(z+1)$$

où ζ est la fonction dzéta de Riemann.

– III – Formules d'Euler, de Wallis, de Legendre et de Stirling

1. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on note :

$$I_n(z) = \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

(a) Montrer que :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = I_n(z)$$

(b) En déduire que :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

(formule d'Euler).

2. Montrer que :

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}$$

soit :

$$\binom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

(formule de Wallis).

3.

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on a :

$$I_{2n}(z) = 2^{z-1} \left(1 + \frac{z}{2n+1}\right) \frac{I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}$$

(b) Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

(formule de Legendre).

4. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R},\ f(x,u) = \begin{cases} 0 \text{ si } u \leq -\sqrt{x} \\ \left(1 + \dfrac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} \text{ si } u > -\sqrt{x} \end{cases}$$

   (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,du$$

   (b) Montrer que, pour tout réel u, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

   (c) Montrer que pour tout $(x,u) \in [1,+\infty[\times \mathbb{R}$, on a :

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u) = \begin{cases} e^{-\frac{u^2}{2}} \text{ si } u \leq 0 \\ (1+u)\,e^{-u} \text{ si } u > 0 \end{cases}$$

   (d) En déduire la formule de Stirling :

$$\Gamma(x+1) \underset{x \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

   Pour $x = n$ entier naturel non nul, on retrouve la formule usuelle :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

– IV – Continuité et dérivabilité de la fonction gamma

1. Montrer que la fonction gamma est continue sur $\mathcal{H}$.
2. Montrer que $\Gamma(z) \underset{z \in \mathcal{H},\, z \to 0}{\backsim} \dfrac{1}{z}$ et en particulier $\lim\limits_{x \to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.
3. Montrer que la fonction gamma est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec pour tout entier naturel non nul n et tout réel strictement positif x :

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n\, t^{x-1} e^{-t} dt$$

4. Montrer que la fonction Γ est strictement convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
5. Étudier les variations de la fonction Γ sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
6. Montrer que la fonction Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
   On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle I et à valeurs strictement positives est dite logarithmiquement convexe (ou plus simplement log-convexe) si la fonction $\ln(f)$ est convexe sur I.
7.

   (a) Montrer que :

$$\forall x > 0,\ \Gamma'(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \ln(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}-1}{x}dx\right)$$

(c) En déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma$, où $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} - \ln(n)\right)$ est la constante d'Euler (question **I.3**).

(d) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$$

(e) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\Gamma'(n+1) = n!\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \gamma\right)$$

– V – L'équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$

On s'intéresse ici aux fonctions $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^{+,*}$, $f(x+1) = xf(x)$;

(ii) $f(1) = 1$

(iii) f est logarithmiquement convexe.

Dans ce qui suit, on se donne une telle fonction f et on note $g = \ln(f)$.
La fonction g étant convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$, elle est continue et il en est de même de la fonction $f = e^g$.

1. Montrer que si $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ vérifie les conditions (i) et (ii), on a alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n+1) = n! \text{ et } g(n+1+x) - g(n+1) = \ln\left(\frac{f(x)}{n!}\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right)$$

2. Montrer que si $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ vérifie la condition (iii), on a alors pour tout réel $x \in]0,1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n) \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq \ln(n+1)$$

3. Montrer que si $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ vérifie les conditions (i), (ii) et (iii), on a alors pour tout réel $x \in]0,1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n^x \leq \frac{f(x)}{n!}\prod_{k=0}^{n}(x+k) \leq (n+1)^x$$

4. Montrer que la fonction $\Gamma : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ est l'unique fonction qui vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) (théorème de Bohr-Mollerup).

– VI – Prolongement de la fonction gamma

1. En utilisant l'équation fonctionnelle (1) , montrer que la fonction Γ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et que ce prolongement vérifie la même équation fonctionnelle. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, on notera encore $\Gamma(z)$ ce prolongement.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$\Gamma(z) \underset{z \to -n}{\backsim} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$
3. Montrer que :
$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$
et retrouver ainsi le fait que Γ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ telle que $\Gamma(z) \underset{z \to -n}{\backsim} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$.
4. Montrer que :
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-,\ \Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

– VII – La formule des compléments

On désigne par φ la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :
$$\forall z \in \mathcal{H},\ \varphi(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1+t} dt$$
et par $\mathcal{D}$ la bande ouverte du plan complexe définie par :
$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(z) < 1\}$$

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$
2. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$
3. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :
$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$$
4. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2}$$

5. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et tout réel $t \in [0, \pi]$, on a :

$$\cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \left(\frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} \cos(nt) \right)$$

6. Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

7. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

8.

   (a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :

$$\Gamma(z) \Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$$

   (b) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

– VIII – Fonction Béta

1. Soient u, v deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{u-1} (1-t)^{v-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement si, $(u, v) \in \mathcal{H}^2$.

   Définition : la fonction béta (ou fonction de Bessel de seconde espèce) est la fonction définie sur $\mathcal{H}^2$ par :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{H}^2,\ B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} \, dt$$

2. Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :

$$B(u, v) = B(v, u) \text{ et } B(u+1, v) = \frac{u}{u+v} B(u, v)$$

3. Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} n^u B(u, v+n+1) = \Gamma(u)$$

4. Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a $B(u, v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$.

5. Calculer $B(n+1, m+1)$, pour n, m entiers naturels.

– VIII – Calcul de certaines intégrales à l'aide de Γ

1. Calculer :
$$\int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{z-1} dx$$
pour tout $z \in \mathcal{H}$.
2. Calculer :
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^{\frac{1}{z}}} dx \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-x^z} dx$$
pour tout réel $z > 0$.
3. Calculer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{u-1}}{(1+x)^{u+v}} dx$$
pour tout $(u,v) \in \mathcal{H}^2$.
4. Calculer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx \text{ et } \int_0^{+\infty} \tan^{2z-1}(t)\, dt$$
pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \Re(z) < 1$.
5. Donner une expression des intégrales de Wallis :
$$W(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a(\theta) \sin^b(\theta)\, dt$$
où $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ sont tels que $\Re(a) > -1$ et $\Re(b) > -1$. Préciser le cas où $a = 0$ et $b = n \in \mathbb{N}$.

2 Solution

– I – Résultats préliminaires

1. Pour $t = 0$ ou $t = n$, les inégalités sont trivialement vérifiées.
Comme la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1,+\infty[$, son graphe est sous sa tangente en 0, soit :
$$\forall x \in\,]-1,+\infty[\,,\ \ln(1+x) \leq x$$
ce qui nous donne :
$$\forall t \in\,]0,n[\,,\ \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n} \text{ et } \ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$$
soit :
$$\forall t \in\,]0,n[\,,\ \ln\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq t \text{ et } \ln\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq -t$$
ou encore :
$$\forall t \in\,]0,n[\,,\ \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \text{ et } \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$
soit :
$$\forall t \in\,]0,n[\,,\ \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \leq \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \tag{2}$$
2. La fonction $f : t \mapsto (1+t)\, e^{\frac{t^2}{2}-t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(t) = e^{\frac{t^2}{2}-t}(1+(1+t)(t-1)) = t^2 e^{\frac{t^2}{2}-t} \geq 0$, donc f est croissante et $f(t) \leq f(0) = 1$ pour tout $t \leq 0$, soit $(1+t)\, e^{-t} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$ et $0 \leq (1+t)\, e^{-t} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$ pour tout $t \in [-1,0]$.

3. En notant $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$ pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \right) dt < 0$$

donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.
La fonction $t \to \dfrac{1}{t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall k \geq 1,\ \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

ce qui nous donne pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) > \ln(n)$$

soit $u_n > 0$.
En définitive, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante minorée, donc convergente.

4. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t}\right)$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ est continue telle que :
– pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la fonction $y \mapsto e^{-\left(x^2+y^2\right)} = e^{-x^2} e^{-y^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$;
– la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} |f(x, y)|\, dy = e^{-x^2} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-y^2} dy$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Le théorème de Fubini nous dit alors que f est intégrable sur $(\mathbb{R}^+)^2$ avec :

$$\begin{aligned}\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2\end{aligned}$$

L'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^{+,*} \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & (\mathbb{R}^{+,*})^2 \\ & (r, \theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array}$$

étant bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$J_\varphi(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r > 0$$

elle réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+,*} \times \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$ (passage en coordonnées polaires) et le théorème de changement de variables nous permet d'écrire que :

$$\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \iint_{(\mathbb{R}^{+,*})^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \iint_{\mathbb{R}^{+,*} \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[} e^{-r^2} r dr d\theta$$

En utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^{+,*} \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

donc :

$$\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \frac{\pi}{4} \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On peut aussi procéder comme suit.
On considère les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2, \ G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(t^2+1\right)}}{t^2+1} dt$$

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ avec :

$$F'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ et } G'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} dt$$

(la fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x^2\left(t^2+1\right)}}{t^2+1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et on intègre sur un segment).
Le changement de variable $y = xt$, pour $x > 0$, dans $G'(x)$ donne :

$$G'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-y^2} dy = -F'(x)$$

ce résultat étant encore valable pour $x = 0$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ F'(x) + G'(x) = 0$$

ce qui entraîne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{4}$$

Puis avec :

$$0 \leq G(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{4} e^{-x^2} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{4} - \lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \dfrac{\pi}{4}$, soit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On peut aussi utiliser les intégrales de Wallis.
De (2) on déduit que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\forall t \in \left]0, \sqrt{n}\right[, \ \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

et en conséquence :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

Les changements de variables $t = \sqrt{n} \sin(\theta)$ dans la première intégrale et $t = \sqrt{n} \tan(\theta)$ dans la quatrième nous donne :

$$\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta)\, d\theta \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \tan^2(\theta)\right)^{-(n-1)} d\theta = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)}(\theta)\, d\theta$$

Connaissant les intégrales de Wallis, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta)\,d\theta \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)}(\theta)\,d\theta \underset{n\to+\infty}{\backsim} \sqrt{\frac{\pi}{4(n-1)}} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ce qui nous donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

– II – Généralités sur la fonction gamma

1. La convergence résulte de $0 < t^n e^{-t} = \underset{t\to\infty}{o}\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$ et le calcul se fait par récurrence sur $n \geq 0$.
2. Pour tout nombre complexe z, la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   Avec $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\Re(z)-1}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ converge absolument pour tout nombre complexe z.
3. Avec $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\Re(z)-1}e^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{\Re(z)-1}$, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt$ converge absolument si, et seulement si, $\Re(z) > 0$.
4. On a :

   $$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$$

   En effectuant le changement de variable $t = x^2$, le calcul de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ se ramène au calcul de l'intégrale de Gauss :

   $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

5. Une intégration par parties donne pour $z \in \mathcal{H}$ et $0 < \varepsilon < R$:

   $$\int_\varepsilon^R t^z e^{-t}dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_\varepsilon^R + z\int_\varepsilon^R t^{z-1}e^{-t}dt$$

   et le passage à la limite quand (ε, R) tend vers $(0,+\infty)$ donne le résultat.
6. De l'équation fonctionnelle (1), on déduit facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$$

   et :

   $$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

7.

(a) Pour tous nombres complexes z et α, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Avec $\left|\dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}\right| = \dfrac{t^{\Re(z)} e^{-\Re(\alpha)t}}{1-e^{-t}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\Re(z)}}$, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}dt$ converge absolument si, et seulement si, $\Re(z) > 0$.

Pour $\Re(z) > 0$, on a $\left|\dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}\right| = \dfrac{t^{\Re(z)} e^{-\Re(\alpha)t}}{1-e^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{\Re(z)} e^{-\Re(\alpha)t}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}dt$ converge absolument si, et seulement si, $\Re(\alpha) > 0$ (pour $\Re(\alpha) > 0$, on a $t^{\Re(z)} e^{-\Re(\alpha)t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et pour $\Re(\alpha) \leq 0$, on a $t^{\Re(z)} e^{-\Re(\alpha)t} > 1$ pour t grand).

(b) Pour tout $(z,\alpha) \in \mathcal{H}^2$, et tout réel $t > 0$, on a $0 < e^{-t} < 1$ et :

$$\frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^z e^{-(n+\alpha)t}$$

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}$ et $t \mapsto t^z e^{-(n+\alpha)t}$, pour $n \geq 0$, sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left|t^z e^{-(n+\alpha)t}\right| dt &= \int_0^{+\infty} t^{\Re(z)} e^{-(n+\Re(\alpha))t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\Re(z)}}{(n+\Re(\alpha))^{\Re(z)}} e^{-x} \frac{dx}{n+\Re(\alpha)} \\ &= \frac{1}{(n+\Re(\alpha))^{\Re(z)+1}} \Gamma(\Re(z)+1)\end{aligned}$$

et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left|t^z e^{-nt}\right| dt = \Gamma(\Re(z)+1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\Re(\alpha))^{\Re(z)+1}} < +\infty$$

On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^z e^{-(n+\alpha)t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \Gamma(z+1) \frac{1}{(n+\alpha)^{z+1}} \\ &= \Gamma(z+1)\,\zeta(z+1,\alpha)\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$ et $z = 1$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \Gamma(2)\,\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

– III – Formules d'Euler, de Wallis, de Legendre et de Stirling

1.

(a) Pour $n \geq 1$ et $z \in \mathcal{H}$, le changement de variable $t = nx$ nous donne :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^1 (1-x)^n x^{z-1} n^z dx = n^z J_n(z)$$

Une intégration par parties nous donne :

$$J_{n+1}(z) = \int_0^1 (1-x)^{n+1} x^{z-1} dx = \frac{n+1}{z} \int_0^1 (1-x)^n x^z dx = \frac{n+1}{z} J_n(z+1)$$

et par récurrence, on déduit que :

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} J_0(z+n) \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 t^{z+n-1} dt \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)} \end{aligned}$$

On peut aussi écrire que :

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{t^{k+z-1}}{n^k} dt = n^z \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}(-1)^k}{k+z}$$

et constater que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $P_n(z) = \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)}$ s'écrit $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k+z}$, les coefficients α_k étant donnés par :

$$\alpha_k = \left((z+k)P_n(z)\right)_{|z=-k} = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{n!}$$

(b) On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \text{ si } t \in \left]0,n\right[\\ 0 \text{ si } t \geq n \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$ avec :

$$\forall t \in \left]0,+\infty\right[, \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}t^{z-1} \\ \forall n \geq 1,\ |f_n(t)| \leq e^{-t}t^{\Re(z)-1} = f(t) \end{cases}$$

(question I.1), la fonction f étant continue et intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1} dt = \Gamma(z)$$

soit :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} I_n(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

2. Pour $z = \frac{1}{2}$, on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n!\sqrt{n}}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2}\right)} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+1}\sqrt{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

et de la formule d'Euler, on déduit la formule de Wallis :

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} I_n\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}\sqrt{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Comme :

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{2^{2n+1}}{2n} = \frac{2^{2n}}{n}$$

on a aussi :

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}$$

soit :

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

3.

(a) On a :

$$\begin{aligned} I_{2n}(z) &= \frac{(2n)!2^z n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)(z+n+1)\cdots(z+2n)} \\ &= \frac{(2n)!2^z n^z}{z(z+2)\cdots(z+2n)(z+1)\cdots(z+1+2(n-1))} \\ &= \frac{(2n)!2^z n^z\left(\frac{z+1}{2}+n\right)}{2^{2n+1}\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right)\left(\frac{z+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+(n-1)\right)\left(\frac{z+1}{2}+n\right)} \end{aligned}$$

avec :

$$\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{2}+n\right) = \frac{n!n^{\frac{z}{2}}}{I_n\left(\frac{z}{2}\right)}$$

et :

$$\left(\frac{z+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{z+1}{2}+n\right) = \frac{n!n^{\frac{z+1}{2}}}{I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} I_{2n}(z) &= \frac{(2n)!2^z n^z\left(\frac{z+1}{2}+n\right)}{2^{2n+1}(n!)^2 n^{\frac{2z+1}{2}}} I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{2^z}{2^{2n+1}}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{z+1}{2}+n\right) I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right) \end{aligned}$$

et tenant compte de :

$$I_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{2n+1}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} I_{2n}(z) &= \frac{1}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{2^z}{2n+1}\left(\frac{z+1}{2}+n\right) I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right) \\ &= 2^{z-1}\left(1+\frac{z}{2n+1}\right)\frac{I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

(b) En faisant tendre n vers l'infini dans ce qui précède, on obtient :

$$\Gamma(z) = 2^{z-1}\frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

4.

(a) Pour $x > 0$ fixé, le changement de variable $t = x + u\sqrt{x}$ nous donne :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(x + u\sqrt{x}\right)^x e^{-\left(x+u\sqrt{x}\right)} \sqrt{x} du \\ &= \sqrt{x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} du \\ &= \sqrt{x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\, du\end{aligned}$$

(b) Pour $u = 0$ et $x > 0$, on a $u > -\sqrt{x}$ et :

$$f(x,u) = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} = 1 \underset{x\to+\infty}{\to} 1 = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

On se fixe un réel $u \neq 0$ et on désigne par x_u un réel strictement positif tel que $\sqrt{x_u} > -u$. Pour tout réel $x > x_u$, on a $u > -\sqrt{x_u} > -\sqrt{x}$ et :

$$f(x,u) = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\ln(f(x,u)) &= x\left(\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) - \frac{u}{\sqrt{x}}\right) \\ &= x\left(-\frac{u^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= -\frac{u^2}{2} + o(1) \underset{x\to+\infty}{\to} -\frac{u^2}{2}\end{aligned}$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(c) On se fixe $x \geq 1$.
Pour $u \leq -\sqrt{x}$, on a $f(x,u) = 0 \leq e^{-\frac{u^2}{2}}$.
Pour $u > -\sqrt{x}$, on a :

$$f(x,u) = \left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} = \left(\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) e^{-\frac{u}{\sqrt{x}}}\right)^x$$

Pour $-\sqrt{x} < u \leq 0$, on a $\dfrac{u}{\sqrt{x}} \in]-1, 0]$ et de **I.2** on déduit que :

$$0 \leq f(x,u) \leq e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(la fonction $t \mapsto t^x$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$ pour $x \geq 1$).
Pour $u > 0$, avec la décroissance sur $\mathbb{R}^+$ de l'application $t \mapsto (1+t)\, e^{-t}$, on déduit que :

$$\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) e^{-\frac{u}{\sqrt{x}}} \leq (1+u)\, e^{-u} \leq 1$$

et :

$$0 \leq f(x,u) \leq \left((1+u)\, e^{-u}\right)^x \leq (1+u)\, e^{-u}$$

On a donc pour tout réel $x \geq 1$ et tout réel u :

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u) = \begin{cases} e^{-\frac{u^2}{2}} \text{ si } u \leq 0 \\ (1+u)\, e^{-u} \text{ si } u > 0 \end{cases}$$

(d) Pour tout réel u, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

les fonctions $u \mapsto f(x,u)$ étant continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ pour tout réel $x \geq 1$, avec :

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u)$$

pour tout réel $x \geq 1$ et tout réel u, la fonction φ étant continue intégrable sur $\mathbb{R}$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,du &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

et :

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,du \underset{x\to+\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

– IV – Continuité et dérivabilité de la fonction gamma

1. La fonction $(z,t) \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*}$ et pour tous réels $0 < a < b$, tout nombre complexe $z \in \mathcal{H}$ tel que $a \leq \Re(z) \leq b$, tout réel $t > 0$, on a :

$$\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\Re(z)-1}e^{-t} \leq \varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} \text{ si } 0 < t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t} \text{ si } t > 1 \end{cases}$$

la fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (pour $a > 0$, la fonction t^{a-1} est intégrable sur $]0,1[$ et avec $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{b-1}e^{-\frac{t}{2}} = 0$, on déduit que $\varphi(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$ pour t assez grand, la fonction $e^{-\frac{t}{2}}$ étant intégrable sur $]1,+\infty[$). Il en résulte que la fonction Γ est continue sur toute bande fermée $\mathcal{H}_{a,b} = \{z \in \mathcal{H} \mid a \leq \Re(z) \leq b\}$, donc sur $\mathcal{H}$.
On peut aussi procéder comme suit.
Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $(z,t) \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathcal{H}_{a,b} \times \left[\frac{1}{n}, n\right]$, donc la fonction $\Gamma_n : z \mapsto \int_{\frac{1}{n}}^{n} t^{z-1}e^{-t}dt$ est continue sur $\mathcal{H}_{a,b}$ et avec :

$$\begin{aligned}|\Gamma(z) - \Gamma_n(z)| &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^{\Re(z)-1}e^{-t}dt + \int_n^{+\infty} t^{\Re(z)-1}e^{-t}dt \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^{a-1}e^{-t}dt + \int_n^{+\infty} t^{b-1}e^{-t}dt \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^{a-1}dt + e^{-n}\int_n^{+\infty} t^{b-1}dt = \frac{1}{a\cdot n^a} + \frac{n^b}{b\cdot e^n}\end{aligned}$$

on déduit que la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers Γ sur $\mathcal{H}_{a,b}$. Il en résulte que Γ est continue sur $\mathcal{H}_{a,b}$.

2. Pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$ avec $\lim\limits_{z\to 0} \Gamma(z+1) = \Gamma(1) = 1$ du fait de la continuité de Γ, donc $\Gamma(z) \underset{z\in\mathcal{H},\, z\to 0}{\backsim} \dfrac{1}{z}$.

3. La fonction $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est indéfiniment dérivable sur $(\mathbb{R}^{+,*})^2$ avec pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+,*}$ (avec $a < b$) et $x \in [a,b]$:
$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln(t)|^n t^{x-1}e^{-t} \leq g_n(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^n t^{a-1} \text{ si } 0 < t \leq 1 \\ |\ln(t)|^n t^{b-1}e^{-t} \text{ si } t > 1 \end{cases}$$
la fonction g_n étant continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ (on a $\lim\limits_{t\to 0^+} |\ln(t)|^n t^{\frac{a}{2}} = 0$, donc pour $t > 0$ assez petit on a $|g_n(t)| \leq t^{\frac{a}{2}-1}$, la fonction $t^{\frac{a}{2}-1}$ étant intégrable sur $]0,1[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} |\ln(t)|^n t^{b-1}e^{-\frac{t}{2}} = 0$, donc $|g_n(t)| \leq e^{-\frac{t}{2}}$ pour t assez grand, la fonction $e^{-\frac{t}{2}}$ étant intégrable sur $]1,+\infty[$). On en déduit alors que la fonction Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et qu'on peut dériver sous le signe d'intégration.
4. Pour tout réel $x > 0$, on a $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1}e^{-t}dt > 0$, donc la fonction Γ est strictement convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
5. On a vu que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{+,*}$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et strictement convexe.
On a également vu que $\Gamma(x) \underset{x\to0^+}{\backsim} \dfrac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to0^+} \Gamma(x) = +\infty$.
Comme $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, le théorème de Rolle nous dit qu'il existe un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$. Avec la stricte convexité de Γ on déduit que $\Gamma'(x) < 0$ pour $0 < x < \alpha$ et $\Gamma'(x) > 0$ pour $x > \alpha$ (Γ' est strictement croissante), donc Γ décroît strictement de $+\infty$ à $\Gamma(\alpha) \in]0,1[$ sur $]0,\alpha[$ et croit strictement sur $]\alpha,+\infty[$.
Avec $\Gamma(n+1) = n!$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.
De $\dfrac{\Gamma(x)}{x} = \dfrac{x-1}{x}\Gamma(x-1)$ pour $x > 1$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$, c'est-à-dire que le graphe de Γ admet une branche parabolique à l'infini dans la direction de l'axe des ordonnées.
6. On a $(\ln(\Gamma))'' = \dfrac{\Gamma\Gamma'' - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout réel $x > 0$:
$$\begin{aligned}(\Gamma'(x))^2 &= \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)\, t^{x-1}e^{-t}dt\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \left(\ln(t)\, t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)\left(t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)dt\right)^2 \\ &< \int_0^{+\infty} \ln^2(t)\, t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \Gamma''(x)\Gamma(x)\end{aligned}$$
ce qui donne $(\ln(\Gamma))'' > 0$ et la stricte log-convexité de la fonction Γ.
La log-convexité de la fonction Γ peut aussi se montrer directement en utilisant l'inégalité de Hölder qui nous dit que si p,q sont deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et f,g deux fonctions continues par morceaux de $\mathbb{R}^{+,*}$ dans $\mathbb{C}$ telles que les fonctions $|f|^p$ et $|g|^q$ soient intégrables sur $\mathbb{R}^{+,*}$, alors la fonction $f\overline{g}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et on a :
$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt\right| \leq \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
Dire que Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$ signifie que pour tous réels x,y dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et tout réel λ dans $]0,1[$, on a :
$$\ln(\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq \lambda\ln(\Gamma(x)) + (1-\lambda)\ln(\Gamma(y))$$
ce qui revient à dire en posant $\lambda = \dfrac{1}{p}$ et $1-\lambda = \dfrac{1}{q}$ où, p,q sont strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, que l'on a :
$$\ln\left(\Gamma\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right)\right) \leq \frac{1}{p}\ln(\Gamma(x)) + \frac{1}{q}\ln(\Gamma(y)) = \ln\left((\Gamma(x))^{\frac{1}{p}}(\Gamma(y))^{\frac{1}{y}}\right)$$

soit :

$$\Gamma\left(\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y\right)\leq\left(\Gamma\left(x\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\Gamma\left(y\right)\right)^{\frac{1}{y}}$$

Pour ce faire il nous suffit d'écrire que :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y\right)&=\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{p}x+\frac{1}{q}y-1}e^{-t}dt\\&=\int_0^{+\infty}\left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{\frac{1}{p}}\left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{\frac{1}{q}}dt\\&\leq\left(\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}t^{y-1}e^{-t}dt\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\Gamma\left(x\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\Gamma\left(y\right)\right)^{\frac{1}{y}}\end{aligned}$$

7.

(a) On désigne par $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$g_n\left(t\right)=\left\{\begin{array}{l}\ln\left(t\right)\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\text{ si }t\in\left]0,n\right[\\ 0\text{ si }t\geq n\end{array}\right.$$

Chaque fonction g_n est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (au voisinage de 0, on a $g_n\left(t\right)\underset{t\to0^+}{\backsim}t^{x-1}\ln\left(t\right)$ qui est intégrable sur $]0,n[$ car $x>0$) avec :

$$\forall t\in\left]0,+\infty\right[,\ \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}g_n\left(t\right)=\ln\left(t\right)e^{-t}t^{x-1}\\ \forall n\geq1,\ \left|g_n\left(t\right)\right|\leq\ln\left(t\right)e^{-t}t^{x-1}\end{array}\right.$$

(question **I.1**), la fonction $t\mapsto\ln\left(t\right)e^{-t}t^{x-1}$ étant continue et intégrable sur $]0,+\infty[$. On déduit alors du théorème de la convergence dominée que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\ln\left(t\right)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt=\int_0^{+\infty}\ln\left(t\right)e^{-t}t^{x-1}dt=\Gamma'\left(x\right)$$

(b) Pour tout entier $n\geq1$, le changement de variable $t=nx$ nous donne :

$$\begin{aligned}\int_0^n\ln\left(t\right)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt&=n\int_0^1\ln\left(nx\right)\left(1-x\right)^n dx\\&=n\ln\left(n\right)\int_0^1\left(1-x\right)^n dx+n\int_0^1\ln\left(x\right)\left(1-x\right)^n dx\\&=\frac{n\ln\left(n\right)}{n+1}+n\int_0^1\ln\left(x\right)\left(1-x\right)^n dx\end{aligned}$$

puis une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln\left(x\right)\left(1-x\right)^n dx&=\left[-\ln\left(x\right)\frac{\left(1-x\right)^{n+1}-1}{n+1}\right]_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{\left(1-x\right)^{n+1}-1}{x}dx\\&=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{\left(1-x\right)^{n+1}-1}{x}dx\end{aligned}$$

(on a $\left(1-x\right)^{n+1}-1\underset{x\to0^+}{\backsim}-\left(n+1\right)x$ avec $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\left(x\right)=0$ et la fonction $x\mapsto\dfrac{\left(1-x\right)^{n+1}-1}{x}$ se prolonge en fonction continue sur $[0,1]$), donc :

$$\int_0^n\ln\left(t\right)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt=\frac{n}{n+1}\left(\ln\left(n\right)+\int_0^1\frac{\left(1-x\right)^{n+1}-1}{x}dx\right)$$

(c) Pour $x \in]0,1]$, on a :

$$\frac{(1-x)^{n+1}-1}{x} = -\sum_{k=0}^{n} (1-x)^k$$

donc :

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}-1}{x} dx = -\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (1-x)^k \, dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$$

et :

$$\int_0^n \ln(t) \left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{n+1} \left(\ln(n) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\right)$$

Avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln(n)\right) = \gamma$$

on déduit que :

$$\Gamma'(1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln(n) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\right) = -\gamma$$

(d) De $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on déduit que $\Gamma'(x+1) = x\Gamma'(x) + \Gamma(x)$ et :

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{x\Gamma'(x)+\Gamma(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$$

(e) Pour $n = 1$, on a :

$$\Gamma'(2) = \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + 1 = 1 - \gamma$$

et supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a :

$$\frac{\Gamma'(n+2)}{(n+1)!} = \frac{\Gamma'(n+2)}{\Gamma(n+2)} = \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} + \frac{1}{n+1} = \frac{\Gamma'(n+1)}{n!} + \frac{1}{n+1}$$

donc :

$$\begin{aligned}\Gamma'(n+2) &= (n+1)\,\Gamma'(n+1) + n! \\ &= (n+1)\,n! \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma\right) + n! \\ &= (n+1)! \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \gamma\right)\end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé.

– V – L'équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$

1. De (i), on déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$f(n+1+x) = f(x) \prod_{k=0}^{n} (x+k)$$

($x \in \mathbb{R}^{+,*}$ étant fixé).
En effet, pour $n = 0$, c'est la condition (i) et supposant le résultat acquis pour $n - 1 \geq 0$, on a :

$$f(n+1+x) = (n+x) f(n+x) = (n+x) f(x) \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) = f(x) \prod_{k=0}^{n} (x+k)$$

Prenant $x = 1$, on obtient $f(n+1) = f(1)\, n! = n!$ (condition (ii)).
Il en résulte que :

$$g(n+1+x) - g(n+1) = \ln\left(\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{f(x)}{n!}\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right)$$

2. On note, pour tous réels $x \neq y$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$, $p(x,y) = \dfrac{g(x) - g(y)}{x - y}$.
On remarque que $p(x,y) = p(y,x)$ pour tous réels $x \neq y$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$.
Dire que g est convexe sur $\mathbb{R}^{+,*}$ équivaut à dire que, pour tout $y \in \mathbb{R}^{+,*}$, la fonction $x \mapsto p(x,y) = p(y,x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+,*} - \{y\}$.
Il en résulte que, pour tout réel $x \in \left]0,1\right]$, on a :

$$p(n, n+1) \leq p(n+1, n+1+x) \leq p(n+1, n+2)$$

soit :

$$\ln\left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right) = \ln(n) \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq \ln\left(\frac{f(n+2)}{f(n+1)}\right) = \ln(n+1)$$

3. Des deux questions précédents, on déduit que :

$$\ln(n) \leq \frac{1}{x}\ln\left(\frac{f(x)}{n!}\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right) \leq \ln(n+1)$$

soit :

$$\ln(n^x) \leq \ln\left(\frac{f(x)}{n!}\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right) \leq \ln(n+1)^x$$

ou encore :

$$n^x \leq \frac{f(x)}{n!}\prod_{k=0}^{n}(x+k) \leq (n+1)^x$$

4. Des questions précédents, on déduit que si $f : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$ vérifie les conditions (i), (ii) et (iii), on a alors pour tout $x \in \left]0,1\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq f(x)\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x n!} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x$$

et faisant tendre n vers l'infini on déduit que :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x)$$

(relation d'Euler).
En utilisant l'équation fonctionnelle (i) vérifiée par les deux fonctions f et Γ, on déduit que $f(x) = \Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
En fait, on a démontré l'unicité de la fonction f et on a retrouvé la formule d'Euler :

$$\forall x \in \left]0,1\right],\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

– VI – Prolongement de la fonction gamma

1. On utilise le découpage :
$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^- = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n$$
où on a noté :
$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$$
et pour tout entier $n \geq 1$:
$$\mathcal{H}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid -n < \Re(z) \leq -(n-1)\} \setminus \{-(n-1)\}$$
On peut définir, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction Γ_n sur $\mathcal{H}_n$ par :
$$\forall z \in \mathcal{H}_n,\ \Gamma_n(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^{+\infty} t^{z+(n-1)} e^{-t} dt$$
($\Gamma(z+n)$ est bien défini puisque $\Re(z+n) = \Re(z) + n > 0$ et $z \notin \{-(n-1), \cdots, -1, 0\}$ valide la division par $z(z+1)\cdots(z+n-1)$).
Comme Γ est continue sur $\mathcal{H}$, chaque fonction Γ_n est continue sur $\mathcal{H}_n$, comme quotient de deux fonctions continues.
On peut donc prolonger la fonction Γ en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ en posant :
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-,\ \widetilde{\Gamma}(z) = \begin{cases} \Gamma(z) \text{ si } \Re(z) > 0 \\ \Gamma_n(z) \text{ si } -n < \Re(z) \leq -(n-1) \text{ et } z \neq -(n-1) \end{cases}$$
Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tel que $\Re(z) > 0$, on a $\Re(z+1) > 0$ et :
$$\widetilde{\Gamma}(z+1) = \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z\widetilde{\Gamma}(z)$$
et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tel que $-n < \Re(z) \leq -(n-1)$, on a $-(n-1) < \Re(z+1) \leq -(n-2)$ et :
$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}(z+1) = \Gamma_{n-1}(z+1) &= \frac{\Gamma(z+1+n-1)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+1+n-1)} = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \\ &= z\Gamma_n(z) = z\widetilde{\Gamma}(z)\end{aligned}$$

2. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tel que $-(n+1) < \Re(z) \leq -(n-1)$, on a :
$$\Gamma(z) = \Gamma_{n+1}(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)}$$
donc :
$$\begin{aligned}\lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) &= \lim_{z \to -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}\end{aligned}$$
soit :
$$\Gamma(z) \underset{z \to -n}{\backsim} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$
et on retrouve, en particulier :
$$\Gamma(z) \underset{z \to 0}{\backsim} \frac{1}{z}$$

3. En utilisant la relation de Chasles, on peut écrire que :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$$

On a déjà vu avec la question **II.2** que la fonction $\varphi_2 : z \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ est définie sur tout $\mathbb{C}$.
Comme la fonction $(z,t) \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{C} \times]1,+\infty[$ et pour tous réels $b > 0$, tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) \leq b$, tout réel $t > 1$, on a :

$$\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\Re(z)-1}e^{-t} \leq \varphi(t) = t^{b-1}e^{-t}$$

la fonction $t \mapsto t^{b-1}e^{-t}$ étant intégrable sur $]1,+\infty[$, on en déduit que la fonction φ_2 est continue sur toute demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \leq b\}$, donc sur $\mathbb{C}$.
En utilisant le développement en série entière la fonction exp, on a pour tout nombre complexe $z \in \mathcal{H}$ fixé et tout réel $t \in]0,1[$:

$$t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^{z+n-1}}{n!}$$

cette série de fonctions continues sur $]0,1[$ étant absolument convergente vers une fonction continue avec :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left|(-1)^n \frac{t^{z+n-1}}{n!}\right| dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 t^{\Re(z)+n-1}dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\Re(z)+n} \leq \frac{e}{\Re(z)} < +\infty\end{aligned}$$

On peut donc écrire que :

$$\varphi_1(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

Pour tout réel $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ tel que $|z+n| \geq \delta$ pour tout entier $n \geq 0$, on a $\left|\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}\right| \leq \frac{1}{\delta}\frac{1}{n!}$ avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} < +\infty$, donc la série de fonction continues sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, $\sum \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$, converge normalement sur $\mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} D(-n,\delta)$, où on a noté $D(-n,\delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+n| < \delta\}$. Il en résulte qu'elle définit une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.
On prolonge donc la fonction Γ en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-,\ \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \Psi(z)\end{aligned}$$

la fonction Ψ étant continue en $-n$, ce qui nous permet de retrouver le fait que :

$$\lim_{z\to -n} (z+n)\,\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

On peut aussi vérifier que l'équation fonctionnelle (1) est bien vérifiée sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.

4. On a déjà vu que le résultat est valable sur $\mathcal{H}$ (question **II.1b**).
Si $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ est tel que $-p<\Re(z)\leq -(p-1)$ et $z\neq -(p-1)$, où $p\in\mathbb{N}^*$, on a alors :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+p)}{z(z+1)\cdots(z+p-1)}$$

avec :

$$\begin{aligned}\Gamma(z+p) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^{z+p}}{(z+p)(z+p+1)\cdots(z+p+n)} \\ &= z(z+1)\cdots(z+p-1)\lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^{z+p}}{z(z+1)\cdots(z+p+n)}\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^{z+p}}{z(z+1)\cdots(z+p+n)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{(z+n+1)\cdots(z+n+p)}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}\end{aligned}$$

puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{(z+n+1)\cdots(z+n+p)} = 1$$

– VII – La formule des compléments

1. La condition $0<\Re(z)<1$ nous assure la convergence absolue de l'intégrale considérée.
Le changement de variable $t=\dfrac{1}{\theta}$, nous donne :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{\theta^{-z}}{1+\theta}d\theta = \varphi(1-z)$$

et le résultat annoncé.

2. En utilisant le théorème de Fubini, on a pour tout $z\in\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) &= \int_0^{+\infty} u^{z-1}e^{-u}du \int_0^{+\infty} v^{-z}e^{-v}dv \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u^{z-1}e^{-u}v^{-z}e^{-v}du\right)dv\end{aligned}$$

et en faisant, pour tout $v > 0$ fixé, le changement de variable $u = vw$, $du = vdw$, on obtient, en utilisant encore le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^{+\infty} e^{-v}\left(\int_0^{+\infty} w^{z-1}e^{-vw}dw\right)dv \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-v}e^{-vw}dv\right)w^{z-1}dw \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(w+1)v}dv\right)w^{z-1}dw \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{w^{z-1}}{1+w}dw = \varphi(z)+\varphi(1-z)\end{aligned}$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$, tout $z \in \mathcal{H}$ et tout réel $t \in \left]0,1\right[$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{z+k-1} = t^{z-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = t^{z-1}\frac{1-(-t)^n}{1+t}$$

$$\begin{aligned}\frac{t^{z-1}}{1+t} &= t^{z-1}\frac{(1-(-t)^n)}{1+t} + \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{1+t} = t^{z-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k + \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{1+t} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{z+k-1} + \frac{(-1)^n t^{z+n-1}}{1+t}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^1 t^{z+k-1}dt + (-1)^n\int_0^1\frac{t^{z+n-1}}{1+t}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+z} + (-1)^n\int_0^1\frac{t^{z+n-1}}{1+t}dt\end{aligned}$$

avec :

$$0 \leqslant \left|\int_0^1\frac{t^{z+n-1}}{1+t}dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)+n-1}dt = \frac{1}{\mathrm{Re}(z)+n}\underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Ce qui nous donne :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+z}$$

4. Pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a $1-z \in \mathcal{D}$ et en utilisant la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \varphi(z)+\varphi(1-z) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+z} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-z} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+z} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-z} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n-z}\right) \\ &= \frac{1}{z} - 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-z^2}\end{aligned}$$

5. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ fixé, on désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui est 2π-périodique et telle que :
$$\forall t \in [-\pi, \pi]\,,\ f(t) = \cos(zt)$$
Cette fonction est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle est donc développable en série de Fourier, soit :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$$
Comme f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $n \geq 0$:
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(zt)\cos(nt)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos((z+n)\,t) + \cos((n-z)\,t))\,dt \\ &= \frac{(-1)^n \sin(z\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n-z} \right) \\ &= -2\frac{(-1)^n z \sin(z\pi)}{\pi} \frac{1}{n^2 - z^2} \end{aligned}$$
On a donc :
$$\forall t \in [0, \pi]\,,\ \cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \left(\frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} \cos(nt) \right)$$

6. Prenant $t = 0$ dans le développement en série de Fourier précédent, on a pour tout $z \in \mathcal{D}$:
$$1 = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \left(\frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} \right)$$
et :
$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

7. En désignant par θ la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ par :
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},\ \theta(z) = \Gamma(z)\,\Gamma(1-z)\sin(\pi z)$$
le résultat précédent nous dit que cette fonction est constante égale à π sur $\mathcal{D}$.
Comme, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a $z + 1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et :
$$\begin{aligned} \theta(z+1) &= \Gamma(z+1)\,\Gamma(-z)\sin(-\pi z) \\ &= z\Gamma(z) \frac{\Gamma(1-z)}{-z} (-\sin(\pi z)) = \theta(z) \end{aligned}$$
on déduit que θ est constante égale à π sur $\displaystyle\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_n$, en notant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:
$$\mathcal{D}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid n < \Re(z) < n+1\}$$
puis, par continuité, que θ est constante égale à π sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
On en déduit en particulier que $\Gamma(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ (pour $z \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n) = n! \neq 0$).
Prenant $z = \dfrac{1}{2}$, on retrouve les égalités $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

8.

(a) En écrivant que $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$, la formule des compléments s'écrit aussi :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},\ \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}$$

(b) Avec :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{1}{z}\lim_{n\to+\infty} \frac{n^z}{(1+z)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$

et :

$$\Gamma(-z) = -\frac{1}{z}\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-z}}{(1-z)\cdots\left(1-\frac{z}{n}\right)}$$

on déduit que :

$$-\frac{\pi}{z\sin(\pi z)} = \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1-z^2)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)}$$

et :

$$\begin{aligned}\sin(\pi z) &= \pi z \lim_{n\to+\infty} \left(1-z^2\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\\ &= \pi z \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

cette formule étant valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ (pour $z \in \mathbb{Z}$, tout est nul).

– VIII – Fonction Béta

1. On a $\left|t^{u-1}(1-t)^{v-1}\right| \underset{t\to0^+}{\backsim} t^{\Re(u)-1}$ et $\int_0^1 t^{\Re(u)-1}dt < +\infty$ si, et seulement si, $\Re(u) > 0$. De manière analogue, on a $\left|t^{u-1}(1-t)^{v-1}\right| \underset{t\to1^-}{\backsim} (1-t)^{\Re(v)-1}$ et $\int_0^1 (1-t)^{\Re(v)-1}dt < +\infty$ si, et seulement si, $\Re(v) > 0$.
2. Le changement de variable $t = 1-x$ nous donne :

$$B(u,v) = \int_0^1 (1-x)^{u-1}x^{v-1}dx = B(v,u)$$

La deuxième identité est équivalente à :

$$vB(u+1,v) = u(B(u,v) - B(u+1,v))$$

soit à :

$$v\int_0^1 t^u(1-t)^{v-1}dt = u\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^v dt$$

Une intégration par parties nous donne, pour $[a,b] \subset]0,1[$:

$$v\int_a^b t^u(1-t)^{v-1}dt = \left[-t^u(1-t)^v\right]_a^b + u\int_a^b t^{u-1}(1-t)^v dt$$

et faisant tendre (a,b) vers $(0,1)$, on obtient le résultat annoncé.

3. Pour tout entier $n \geq 1$, le changement de variable $t = \dfrac{x}{n}$ nous donne :

$$B(u, v+n+1) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v+n} \, dt = \frac{1}{n^u} \int_0^n x^{u-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{v+n} dx$$

On désigne par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} x^{u-1} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{v+n} & \text{si } x \in \left]0, n\right[\\ 0 \text{ si } x \geq n \end{cases}$$

Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $\left]0, +\infty\right[$ avec :

$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[, \ \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = e^{-x} x^{u-1} \\ \forall n \geq 1, \ |f_n(x)| \leq e^{-x} x^{\Re(u)-1} = f(x) \end{cases}$$

(on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^v = 1$ et, pour $x \in \left]0, n\right[$, $\left|\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^v\right| = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{\Re(v)} \leq 1$) la fonction f étant continue et intégrable sur $\left]0, +\infty\right[$. On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{n \to +\infty} n^u B(u, v+n+1) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n x^{u-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{v+n} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{u-1} dx = \Gamma(u)$$

4. Pour u, v dans $\mathcal{H}$, en effectuant les changements de variables $t = x^2$ dans $\Gamma(u)$ et $t = y^2$ dans $\Gamma(v)$, puis en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(u)\Gamma(v) &= 4 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2u-1} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} y^{2v-1} dy \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} x^{2u-1} y^{2v-1} dx dy \end{aligned}$$

Le passage en coordonnées polaires nous donne :

$$\begin{aligned} \Gamma(u)\Gamma(v) &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2(u+v)-1} \cos^{2u-1}(\theta) \sin^{2v-1}(\theta) \, dr d\theta \\ &= 2\Gamma(u+v) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2u-1}(\theta) \sin^{2v-1}(\theta) \, d\theta \end{aligned}$$

puis en effectuant le changement de variable $t = \cos^2(\theta)$, on obtient :

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \Gamma(u+v) \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} \, dt = \Gamma(u+v) B(u, v)$$

La formule des compléments (question **VII.7**) nous assure que $\Gamma(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, ce qui nous donne :

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

On retrouve :

$$B(u+1, v) = \frac{\Gamma(u+1)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v+1)} = \frac{u\Gamma(u)\Gamma(v)}{(u+v)\Gamma(u+v)} = \frac{u}{u+v} B(u, v)$$

et :

$$\begin{aligned} B(u, v+n+1) &= \frac{\Gamma(u)\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(u+v+n+1)} \\ &= \Gamma(u)\frac{(v+n)(v+n-1)\cdots v\Gamma(v)}{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)\Gamma(u+v)} \end{aligned}$$

avec :

$$(v+n)(v+n-1)\cdots v\Gamma(v) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^v n!$$

et :

$$(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)\Gamma(u+v) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{u+v} n!$$

ce qui nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} n^u \frac{(v+n)(v+n-1)\cdots v\Gamma(v)}{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)\Gamma(u+v)} = 1$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^u B(u, v+n+1) = \Gamma(u)$.

On peut aussi montrer l'égalité $B(u,v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ à partir de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^u B(u, v+n+1) = \Gamma(u)$.

Pour ce faire, on écrit que :

$$B(u,v) = \frac{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)}{(v+n)(v+n-1)\cdots v} B(u, v+n+1)$$

avec :

$$\frac{(u+v+n)(u+v+n-1)\cdots(u+v)}{(v+n)(v+n-1)\cdots v} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{u+v}n!}{\Gamma(u+v)}\frac{\Gamma(v)}{n^v n!} = \frac{n^u\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

et faisant tendre n vers l'infini, on a le résultat attendu.

5. Pour n, m entiers naturels, on a :

$$\begin{aligned} B(n+1, m+1) &= \int_0^1 t^n (1-t)^m \, dt = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+2)} = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} \\ &= \frac{1}{n+m+1}\frac{1}{\binom{n+m}{n}} \end{aligned}$$

– VIII – Calcul de certaines intégrales à l'aide de Γ

1. Le changement de variable $x = e^{-t}$, nous donne pour tout $z \in \mathcal{H}$:

$$\int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{z-1} dx = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = \Gamma(z)$$

2. Le changement de variable $x = t^z$, nous donne pour tout réel $z > 0$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^{\frac{1}{z}}} dx = z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

et remplaçant z par $\dfrac{1}{z}$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^z} dx = \Gamma\left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

Prenant $z = 2$, on retrouve :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3. Pour tout $(u, v) \in \mathcal{H}^2$, le changement de variable $t = \dfrac{x}{1+x}$ nous donne :

$$\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^{u-1}}{(1+x)^{u+v}} dx$$

4. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \Re(z) < 1$, la formule des compléments nous donne :

$$\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z} dt = B(z, 1-z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

et le changement de variable $t = \dfrac{x}{1+x}$ nous donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Faisant $x = \tan^2(t)$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \tan^{2z-1}(t) dt = \frac{\pi}{2\sin(\pi z)}$$

5. En notant $a = 2u-1$, $b = 2v-1$, on a $(u,v) \in \mathcal{H}^2$ et :

$$\begin{aligned}
W(a,b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2u-1}(\theta)\sin^{2v-1}(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2(\theta)\right)^{u-1}\left(\sin^2(\theta)\right)^{v-1}\cos(\theta)\sin(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2(\theta)\right)^{u-1}\left(1-\cos^2(\theta)\right)^{v-1}\cos(\theta)\sin(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt = \frac{1}{2}B(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}
\end{aligned}$$

Pour $a = 0$ et $b = n \in \mathbb{N}$, on retrouve les intégrales de Wallis usuelles :

$$\begin{aligned}
W_n = W(0,n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta) dt = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Pour $n = 2p$, où n est un entier naturel non nul, on obtient :

$$W_{2p} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{2p\Gamma(p)} = \sqrt{\pi}\frac{\frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}}{2p!} = \frac{\pi}{2}\frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}$$

et pour $n = 2p+1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
W_{2p+1} &= \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(p+1)}{(2p+1)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi}\frac{p!}{(2p+1)\frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{2^{2p}}{(2p+1)\binom{2p}{p}}
\end{aligned}$$