

PREMIER EXERCICE.

- a. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n+2}$ de sorte que $\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$.
 Il en découle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$. \square
- b. $\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{(k-1)!} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = 2e^2$. \square

SECOND EXERCICE.

Il est immédiat que f est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux donc, d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge normalement sur \mathbb{R} vers f .

- a. Avec les notations classiques, il vient que $b_n = 0$ puisque f est paire et
 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(nt) dt$. Donc $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$ et $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$ par deux intégrations par parties. Ainsi $f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$ pour tout réel t . \square

- b. En particulier pour $t = 0$ il vient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$. \square

$$\text{Or } \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} \quad (1).$$

En faisant tendre N vers l'infini (ce qui est licite vu la convergence des séries), il vient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. \square

En reprenant alors la première égalité de (1), on obtient de même $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. \square

- c. D'après le théorème de Parseval de convergence quadratique, on a $\|f\|_2^2 = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

$$\text{Or } \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{\pi^4}{5}. \text{ D'où } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad \square$$

PROBLÈME.**Découverte des fonctions tests.**

1. Si \overline{A} est compacte alors elle est bornée donc A également puisque $A \subset \overline{A}$. Réciproquement si A est bornée alors il existe $R > 0$ tel que $A \subset [-R, R]$ ce qui entraîne $\overline{A} \subset \overline{[-R, R]} = [-R, R]$ et donc \overline{A} est bornée donc compacte car fermée. \square

2. Il est immédiat que u est continue à support compact ($[-2, 2]$) mais n'est pas une fonction test car elle n'est pas dérivable en 2 ($u'_d(2) = 0$ et $u'_g(2) = -4$). \square

La fonction sinus n'est pas une fonction test car elle n'est pas à support compact (la suite $(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)_{n \in \mathbb{N}}$ est incluse dans le support qui de ce fait n'est pas borné). \square

3. Soit le prédicat $\mathcal{P}_k : "h^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)h(x) \text{ pour tout } x > 0 \text{ avec } P_k \text{ polynôme de degré } 2k"$. \mathcal{P}_0 est vrai et en

supposant que \mathcal{P}_k soit vrai pour $k \leq n$ il vient $h^{(n+1)}(x) = Q\left(\frac{1}{x}\right)h(x)$ pour $x > 0$ avec $Q(u) = u^2(P_n(u) - P'_n(u))$ qui est bien un polynôme de degré $2 + 2n = 2(n+1)$ puisque $P_n - P'_n$ est de degré $2n$. \square

Il en découle par croissances comparées que $\lim_{x \rightarrow 0^+} h^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par ailleurs h est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\infty, 0[$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} h^{(k)}(x) = 0$. Comme en outre h est continue sur \mathbb{R} , le théorème de prolongement \mathcal{C}^1 itéré prouve que h est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} (et $h^{(k)}(0) = 0$ pour tout entier k). \square

h n'est pas une fonction test car de support $[0, +\infty[$ non borné. Elle n'est pas non plus développable en série entière au voisinage de 0 car si elle l'était on aurait $h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$ au voisinage de 0 donc h serait identiquement nulle au voisinage de 0 ce qui n'est pas. \square

4. x appartient au support de φ si et seulement si $1 - x^2 \geq 0$ donc le support de φ est le segment $[-1, 1]$. Comme h est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} (question 3), par composition la fonction φ l'est également ce qui prouve que φ est une fonction test.

φ est paire, nulle pour $x \geq 1$ et comme $\varphi'(x) = -2xh'(1 - x^2)$ elle est décroissante sur $[0, 1]$. Allure du graphe immédiate. \square

Pour $-\infty < a < b < +\infty$ soit $\varphi_{a,b} : x \mapsto \varphi(\alpha x + \beta)$ avec $\alpha = 2/(b - a)$ et $\beta = -(a + b)/(b - a)$. Il est immédiat que $\varphi_{a,b}$ est une fonction test de support $[a, b]$ et que si $[a, b] \cap [c, d]$ est vide alors $\varphi_{a,b} + \varphi_{c,d}$ est une fonction test de support $[a, b] \cup [c, d]$. \square

5. Une telle fonction est nulle au voisinage de l'infini donc y admet des limites nulles. \square

6. φ est continue donc localement intégrable sur \mathbb{R} . Étant nulle au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$, elle est intégrable en $-\infty$ et $+\infty$ donc sur \mathbb{R} et $I = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = \int_{-1}^1 \varphi(t) dt > 0$ car φ est positive et en outre strictement positive et continue en 1. \square

Il en découle $\rho : x \mapsto \frac{1}{I}\varphi(t)$ est une fonction test de support $[-1, 1]$, positive et telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = 1$. \square

Il en résulte immédiatement que ρ_n est une fonction test positive de support $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t) dt = 1$ \square

| Il existe une suite régularisante c'est à dire une suite (ρ_n) de fonctions tests positives telles que :
 Supp(ρ_n) = $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t) dt = 1$. \square

Approximation uniforme sur \mathbb{R} par des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ ou par des fonctions tests.

7. Si la suite (P_n) converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction f alors elle satisfait le critère de Cauchy de convergence uniforme sur \mathbb{R} . En particulier pour $\varepsilon = 1$, il existe N tel que $\|P_p - P_q\|_\infty \leq 1$ pour $p, q \geq N$. En particulier $\|P_n - P_N\|_\infty \leq 1$ pour $n \geq N$. \square

Il en découle que $P_n - P_N$ est une constante C pour $n \geq N$ car sinon ce serait un polynôme de degré au moins 1 donc non borné sur \mathbb{R} .

En d'autres termes $P_n(x) = P_N(x) + C$ pour $n \geq N$ ce qui prouve que la suite (P_n) est stationnaire donc que $f = P_N + C$ et donc que f est un polynôme. \square

8. z_n est continue affine par morceaux, identiquement égale à 1 sur $[-n, n]$, nulle sur $]-\infty, -(n+1)] \cup [n+1, +\infty[$. Pour tout x_0 fixé quelconque dans \mathbb{R} on a $z_n(x_0) = 1$ pour $n \geq \text{Int}(x_0) + 1$ ce qui prouve que la suite (z_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction constante égale à 1.

La convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R} car $\|z_n - 1\|_\infty = 1$.

En traduisant le fait que g est nulle à l'infini avec $\varepsilon = 1$ il vient qu'il existe $A > 0$ tel que $|g(x)| \leq 1$ pour $|x| \geq A$. Par ailleurs g est bornée car continue sur le compact $[-A, A]$. Il en découle que g est bornée sur \mathbb{R} . \square

Naturellement la suite (α_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A_ε tel que $|g(x)| \leq \varepsilon$ pour $|x| \geq A_\varepsilon$ puisque g est nulle à l'infini. Donc $\alpha_n \leq \varepsilon$ pour $n \geq \text{Int}(A_\varepsilon) + 1$. Ce qui prouve que $\ell = 0$. \square

Pour $|x| \leq n$ on a $g_n(x) = g(x)$ donc $|g(x) - g_n(x)| = 0$.

Pour $|x| \geq n+1$ on a $g_n(x) = 0$ donc $|g(x) - g_n(x)| = |g(x)| \leq \alpha_n$.

Pour $n \leq |x| \leq n+1$ on a $g_n(x) = (n+1-|x|)g(x)$ donc $|g(x) - g_n(x)| = |(|x|-n)g(x)| = (|x|-n)|g(x)| \leq |g(x)| \leq \alpha_n$.

En conclusion : $\|g - g_n\|_\infty \leq \alpha_n$ pour tout n . \square

Comme la suite (α_n) tend vers 0, il en résulte que la suite (g_n) converge uniformément sur \mathbb{R} vers g .

| Ainsi une fonction continue sur \mathbb{R} nulle à l'infini est-elle limite uniforme sur \mathbb{R} d'une suite de fonctions continues à support compact. \square

9. Pour tout $x, t \mapsto g(t)f(x-t)$ est continue à support compact (inclus dans $\text{Supp}(g)$) donc intégrable sur \mathbb{R} .

De même pour $t \mapsto f(t)g(x-t)$ (support inclus dans $[-R+x, R+x]$).

Le changement de variable $t \mapsto u = x-t$, qui est bien un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R} prouve que $f * g = g * f$.

| Ainsi peut-on définir le produit de convolution d'une fonction continue et d'une fonction continue à support compact et cette opération est commutative. \square

10 Si $x > R + S$ on a, pour tout $t \in [-R, R]$, $x - t > (R + S) - R = S$ donc $f(x - t) = 0$.

Donc $(f * g)(x) = (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t) dt = \int_{-R}^R g(t)f(x-t) dt = 0$. De même si $x < -(R + S)$.

| Ainsi le produit de convolution de deux fonctions continues à support compact est-il à support compact. \square

11 Si $x \in [-a, a]$ et si $t > a + R$ alors $x - t < a - (a + R) = -R$ donc $g(x - t) = 0$. De même si $t < -a - R$.

$$\text{Ainsi } (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t) dt = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g(x - t) dt. \quad \square$$

Pour prouver que $f * g$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $I_a = [-a, a]$ et y est en outre dérivable sous le signe intégrale, il suffit de vérifier que (intégrale propre dépendant d'un paramètre) :

1/ $\forall x \in I_a, t \mapsto f(t)g(x - t)$ est continue par morceaux sur le segment $K_a = [-a - R, a + R]$.

2/ $h(x, t) = f(t)g(x - t)$ est partiellement dérivable par rapport à x et :

a/ $\forall x \in I_a, t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur K_a .

b/ $\forall t \in K_a, x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I_a .

Or 1/ est clair et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = f(t)g'(x - t)$ continue en (x, t) (car g est \mathcal{C}^1) ce qui rend clair les hypothèses /a et b/.

$$\text{Ainsi } f * g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [-a, a] \text{ et } (f * g)'(x) = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g'(x - t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g'(x - t) dt = (f * g')(x).$$

Comme cela est vrai pour tout $a > 0$, on en déduit que le résultat précédent est vrai sur \mathbb{R} . Par une itération évidente, on en déduit :

| Si f est continue sur \mathbb{R} et si g est à support compact et de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} alors $f * g$ est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} et $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$ pour tout $k \leq n$. \square

12 Comme $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t) dt = 1$ on a $f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\rho_n(t) dt$. Donc, pour tout réel x , on a :

$$(f * \rho_n)(x) - f(x) = (\rho_n * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)(f(x - t) - f(x)) dt = \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(t)(f(x - t) - f(x)) dt$$

d'où l'inégalité demandée (puisque ρ_n est positive). \square

Supposons désormais que f soit en outre uniformément continue sur \mathbb{R} et donnons nous $\varepsilon > 0$ quelconque. Il existe alors $N = N_\varepsilon$ tel que $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$ dès que $|u - v| \leq 1/N$. Il résulte alors de l'inégalité précédente que :

$$|(f * \rho_n)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(t) dt = \varepsilon \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ et tout } n \geq N \text{ ce qui prouve la convergence uniforme}$$

sur \mathbb{R} de la suite $(f * \rho_n)$ vers f . Or $f * \rho_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ d'après la question 11. Ainsi :

| Si f est uniformément continue sur \mathbb{R} et si (ρ_n) est une suite régularisante alors la suite $(f * \rho_n)$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f . En particulier f est uniformément approximable par une suite de fonction \mathcal{C}^∞ \square

Si f est continue sur \mathbb{R} et nulle à l'infini (ou plus généralement admet des limites finies à l'infini), il est classique (et facile à vérifier) que f est uniformément continue sur \mathbb{R} . En particulier si f est à support compact. Mais alors $f * \rho_n$ est à support compact (question 10) donc est une fonction test. Ainsi :

| Une fonction continue à support compact est limite uniforme d'une suite de fonctions tests.

Théorème de Whitney.

13 Si f est continue, F est fermé dans \mathbb{R} en tant qu'image réciproque du singleton $\{0\}$ qui est un fermé. \square

14 Si $x \in Z(d_F)$ alors $d(x, F) = 0$ donc classiquement $x \in \overline{F}$ donc $x \in F$ puisque F est fermé. Ainsi $Z(d_F) \subset F$ et comme l'inclusion inverse est évidente, on a $Z(d_F) = F$.

Comme l'application d_F est continue (et même lipschitzienne de rapport 1, résultat classique de cours), cela prouve que tout fermé de \mathbb{R} est du type $Z(f)$ où f est continue.

Mais cela ne prouve pas le théorème de Whitney car d_F n'est pas forcément \mathcal{C}^∞ . En effet dans l'exemple proposé, d_F est la fonction paire telle que $d_F(x) = 1 - x$ pour $x \in [0, 1]$ et $d_F(x) = 0$ si $x \geq 1$ et cette fonction n'est pas dérivable en 1. \square

15 Si $-\infty < a < b < +\infty$ alors $F = Z(\varphi_{a,b})$ (Cf question 4).

Si $b = +\infty$ alors $\varphi_{a,+\infty} : x \mapsto h(x - a)$ est positive, de classe \mathcal{C}^∞ et $Z(\varphi_{a,+\infty}) = F$. Idem si $a = -\infty$.

Donc si F est le complémentaire d'un intervalle ouvert I , borné ou non, il existe une fonction φ_I positive et de classe \mathcal{C}^∞ telle que $Z(\varphi_I) = F$. \square

Si F est le complémentaire de la réunion $\bigcup_{n=1}^N I_n$ d'un nombre fini d'intervalle ouverts I_n deux à deux disjoints, alors

$$F = Z(\psi) \text{ avec } \psi = \sum_{n=1}^N \varphi_{I_n} \text{ positive et de classe } \mathcal{C}^\infty. \quad \square$$

16 Il reste à établir le résultat lorsque la réunion est dénombrable non finie donc indexable par $\mathbb{N} : \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ où les I_n sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints (avec éventuellement 1 ou 2 d'entre eux non borné). Ce cas est beaucoup plus délicat.

Notons $\varphi_n = \varphi_{I_n}$.

Si I_n est borné alors φ_n est une fonction test donc toutes ses dérivées sont à support compact donc, pour tout entier k , $\varphi_n^{(k)}$ est bornée sur \mathbb{R} . On note $M_{n,k} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(x)|$.

Si I_n n'est pas borné par exemple $I_n =]a, +\infty[$ alors $\varphi_n(x) = h(x - a)$. D'après la question 3.a, $h^{(k)}$ admet une limite nulle en 0 et une limite finie $P_k(0)$ en $+\infty$. Donc $h^{(k)}$ est bornée sur \mathbb{R}^+ donc sur \mathbb{R} car nulle sur \mathbb{R}^- . On peut donc encore considérer $M_{n,k}$ dans ce cas.

Soit α_n tel que $1/\alpha_n = n^2 \max \{M_{n,0}, \dots, M_{n,n}\}$. Alors on a $|\alpha_n \varphi_n^{(k)}(x)| \leq 1/n^2$ pour tout réel x , tout entier non nul n et tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$.

Soit alors $\psi = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \varphi_n$. Cette série converge normalement sur \mathbb{R} ainsi que toutes ses séries dérivées. En effet pour k entier quelconque fixé on a $|\alpha_n \varphi_n^{(k)}(x)| \leq 1/n^2$ dès que $n \geq k$ et cela pour tout réel x . Ce qui prouve que ψ est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

En outre comme $\alpha_n \varphi_n$ est positive, on a $\psi(x) = 0$ si et seulement si $\varphi_n(x) = 0$ pour tout n (car $\alpha_n > 0$) donc si et seulement si x appartient au complémentaire de la réunion des I_n c'est à dire à F .

Le théorème de Whitney est ainsi démontré : si F est un fermé de \mathbb{R} il existe une fonction ψ positive de classe \mathcal{C}^∞ telle que $F = Z(\psi)$. \square

_____ *FIN* _____