31.0.3

J. 1331

SESSION DE 1994

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition de mathématiques appliquées

Durée : 6 heures

Tout document est interdit.

Calculatrice électronique — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Les candidats doivent obligatoirement traiter l'option qu'ils ont choisie au moment de leur inscription.

Ils composeront sur du papier de composition quadrillé 5 x 5.

Tournez la page S.V.P.

ANALYSE NUMÉRIQUE

On désigne par Λ l'intervalle ouvert $]-1,1[$. On note $L^2(\Lambda)$ l'espace des (classes de) fonctions à valeurs réelles de carré intégrable sur Λ. On le munit du produit scalaire

$$(u,v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\,dx,$$

et de la norme $\|.\|_{L^2(\Lambda)}$ associée à ce produit scalaire. On note $\mathscr{C}^\infty(\Lambda)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Λ, on *admettra* que $\mathscr{C}^\infty(\Lambda)$ est dense dans $L^2(\Lambda)$.

Le but de ce problème est d'étudier la discrétisation par des polynômes de haut degré du problème suivant: trouver une fonction u continue sur $\overline{\Lambda}$ vérifiant

$$-u'' + a\,u = f \quad \text{presque partout dans } \Lambda, \tag{1}$$

avec les conditions aux limites

$$u(-1) = u(1) = 0, \tag{2}$$

lorsque a est une fonction réelle continue ≥ 0 sur $\overline{\Lambda}$ et f une fonction donnée dans $L^2(\Lambda)$.

A. Le problème continu

1. Montrer que toute fonction v de $L^2(\Lambda)$ est intégrable sur Λ et vérifie

$$\int_{-1}^{1} |v(x)|\,dx \leq \sqrt{2}\,\|v\|_{L^2(\Lambda)}.$$

2. On désigne par $H^1(\Lambda)$ l'espace des (classes de) fonctions v de $L^2(\Lambda)$ pour lesquelles il existe un réel μ et une fonction w de $L^2(\Lambda)$ tels que

$$v(x) = \mu + \int_{-1}^{x} w(t)\,dt \quad \text{pour presque tout } x \in \Lambda.$$

Montrer que le couple (w,μ) associé à la fonction v est unique.

La fonction w est alors appelée dérivée première (au sens généralisé) de v et notée v'. On munit l'espace $H^1(\Lambda)$ de la norme

$$\|v\|_{H^1(\Lambda)} = \left(\|v\|^2_{L^2(\Lambda)} + \|v'\|^2_{L^2(\Lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Montrer que l'espace $H^1(\Lambda)$ est un espace de Hilbert. Vérifier également que l'espace $\mathscr{C}^\infty(\Lambda)$ est dense dans $H^1(\Lambda)$. À partir de la formule

$$v(x) = v(y) + \int_{y}^{x} v'(t)\,dt,$$

prouver que toute fonction v de $H^1(\Lambda)$ admet un représentant continu sur $\overline{\Lambda}$ vérifiant

$$\sup_{-1\leq x\leq 1} |v(x)| \leq 2\,\|v\|_{H^1(\Lambda)}. \tag{3}$$

4. On note $H_0^1(\Lambda)$ l'adhérence dans $H^1(\Lambda)$ de l'espace des fonctions de $\mathscr{C}^\infty(\Lambda)$ à support compact dans Λ. Montrer que toute fonction de $H_0^1(\Lambda)$ s'annule aux deux extrémités ± 1 de Λ. Vérifier que l'espace $H_0^1(\Lambda)$ est un espace de Hilbert. Montrer que la semi-norme

$$|v|_{H^1(\Lambda)} = \|v'\|_{L^2(\Lambda)},$$

est une norme sur l'espace $H_0^1(\Lambda)$, équivalente à la norme $\|.\|_{H^1(\Lambda)}$.

5. On définit la forme bilinéaire $\alpha(.,.)$ sur $H^1(\Lambda)\times H^1(\Lambda)$ par la formule

$$\alpha(u,v) = \int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)\,dx + \int_{-1}^{1} a(x)\,u(x)v(x)\,dx.$$

Montrer que la forme $\alpha(.,.)$ est continue sur $H^1(\Lambda)\times H^1(\Lambda)$ et que, pour toute fonction v de $H^1(\Lambda)$,

$$\alpha(v,v) \geq |v|^2_{H^1(\Lambda)}.$$

6. On *admettra* que $H_0^1(\Lambda)$ est exactement l'espace des fonctions de $H^1(\Lambda)$ qui s'annulent en ± 1. Montrer que toute fonction u deux fois continuement dérivable sur $\overline{\Lambda}$ est solution du problème (1)(2) si et seulement si elle est solution du problème: trouver u dans $H_0^1(\Lambda)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Lambda),\quad \alpha(u,v) = \int_{-1}^{1} f(x)v(x)\,dx. \tag{4}$$

On considérera désormais uniquement le problème (4).

7. On rappelle le théorème de Riesz: étant donné un espace de Hilbert H pour le produit scalaire $(.,.)_H$, pour toute forme linéaire ℓ continue sur H, il existe un élément u de H tel que

$$\forall v \in H,\quad \ell(v) = (u,v)_H.$$

Montrer en appliquant ce théorème que le problème (4) a une solution unique u dans $H_0^1(\Lambda)$.

B. Le premier problème discret

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ l'espace des restrictions à Λ des polynômes à une variable de degré $\leq n$. On note $\mathbb{P}_n^0(\Lambda)$ l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ qui s'annulent aux deux extrémités de Λ.

Soit N un entier ≥ 3 fixé. Le premier problème discret consiste à trouver u_N dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ tel que

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad \alpha(u_N, v_N) = \int_{-1}^{1} f(x) v_N(x)\, dx. \tag{5}$$

8. Indiquer la dimension des espaces $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. Montrer que le problème (5) admet une solution unique u_N dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$.

9. Pour un polynôme v_N quelconque de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$, calculer la quantité

$$\int_{-1}^{1} (u' - u_N')(x) v_N'(x)\, dx + \int_{-1}^{1} a(x)\, (u - u_N)(x) v_N(x)\, dx,$$

où u et u_N sont respectivement les solutions des problèmes (4) et (5). En déduire l'existence d'une constante c positive indépendante de N telle qu'on ait la relation suivante entre la solution u du problème (4) et la solution u_N du problème (5):

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)} \leq c \inf_{v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda)} \|u - v_N\|_{H^1(\Lambda)}.$$

On rappelle qu'il existe une unique famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes, appelés *polynômes de Legendre*, qui sont deux à deux orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$ pour le produit scalaire $(.,.)$ et tels que chaque polynôme L_n soit de degré n et vérifie $L_n(1) = 1$.

10. Montrer que l'équation différentielle suivante est satisfaite par tout polynôme L_n, $n \in \mathbb{N}$:

$$\big((1 - x^2)\, L_n'\big)'(x) + n(n+1)\, L_n(x) = 0 \tag{6}$$

(on pourra vérifier que $\big((1 - x^2)\, L_n'\big)'$ est orthogonal dans $L^2(\Lambda)$ à tous les polynômes de degré $\leq n-1$). Puis, pour tous entiers positifs m et n, calculer $\int_{-1}^{1} L_m'(x) L_n'(x)\, (1 - x^2)\, dx$ en fonction de $\|L_n\|_{L^2(\Lambda)}^2$.

11. Montrer que les polynômes L_n, $n \in \mathbb{N}$, forment une famille totale de $L^2(\Lambda)$. On note π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ pour le produit scalaire $(.,.)$. Étant donnée une fonction v de $L^2(\Lambda)$, écrire le développement de $\pi_N v$ dans la base $\{L_n,\ 0 \leq n \leq N\}$ en fonction de v.

12. On note A l'opérateur

$$Av = -\big((1 - x^2)\, v'\big)'.$$

Montrer que, pour toutes fonctions u et v deux fois continuement dérivables sur $\overline{\Lambda}$, on a

$$\int_{-1}^{1} (Au)(x) v(x)\, dx = \int_{-1}^{1} u(x)(Av)(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} (Au)(x) u(x)\, dx \geq 0.$$

13. À partir de l'espace $H^1(\Lambda)$, on définit les espaces $H^m(\Lambda)$ pour tout entier $m \geq 2$ par la formule de récurrence

$$H^m(\Lambda) = \{v \in H^{m-1}(\Lambda);\ v' \in H^{m-1}(\Lambda)\}.$$

On note aussi $H^0(\Lambda)$ l'espace $L^2(\Lambda)$. On introduit la notation d^m pour la dérivée (au sens généralisé) d'ordre m pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$:

$$d^0 v = v \quad \text{et} \quad d^m v = (d^{m-1} v)' \ \text{ si } m \geq 1.$$

On munit l'espace $H^m(\Lambda)$ de la norme

$$\|v\|_{H^m(\Lambda)} = \Big(\sum_{\ell=0}^{m} \|d^\ell v\|^2_{L^2(\Lambda)} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, l'opérateur A est continu de $H^{k+2}(\Lambda)$ dans $H^k(\Lambda)$.
On munit également l'espace $H^m(\Lambda)$ de la norme (A^0 désigne l'opérateur identité)

$$\|v\|_{D^m(\Lambda)} = \begin{cases} \Big(\|v\|^2_{L^2(\Lambda)} + \|A^k v\|^2_{L^2(\Lambda)} \Big)^{\frac{1}{2}} & \text{si } m \text{ est un entier pair égal à } 2k, \\ \Big(\|v\|^2_{L^2(\Lambda)} + \int_{-1}^{1} (A^k v)'^2(x)\,(1-x^2)\,dx \Big)^{\frac{1}{2}} & \\ & \text{si } m \text{ est un entier impair égal à } 2k+1. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$,

$$\|v\|_{D^m(\Lambda)} \leq c\, \|v\|_{H^m(\Lambda)}.$$

14. Démontrer la majoration suivante: pour tout entier $m \geq 1$ et pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$,

$$\|v - \pi_N v\|_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-m}\, \|v\|_{D^m(\Lambda)}.$$

On traitera séparément les cas où m est pair et impair:
– dans le cas où m est pair égal à $2k$, on calculera les coefficients de $A^k v$ dans la famille des L_n, $n \in \mathbb{N}$, en fonction de ceux de v, à partir de l'équation (6);
– dans le cas où m est impair égal à $2k+1$, on calculera les coefficients de $(A^k v)'$ dans la famille des L_n', $n \geq 1$, dont on montrera qu'elle est une base orthogonale de l'espace des (classes de) fonctions de carré intégrable pour la mesure $(1-x^2)\,dx$ sur Λ.

15. On définit l'opérateur π_N^1 sur les fonctions de $H_0^1(\Lambda)$ par la formule

$$(\pi_N^1 v)(x) = \int_{-1}^{x} (\pi_{N-1} v')(t)\,dt.$$

Démontrer que l'opérateur π_N^1 envoie $H_0^1(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. Établir la majoration suivante: pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive indépendante de N telle que, pour toute fonction v de $H_0^1(\Lambda) \cap H^m(\Lambda)$,

$$\|v - \pi_N^1 v\|_{H^1(\Lambda)} \leq c\, N^{1-m}\, \|v'\|_{D^{m-1}(\Lambda)}. \tag{7}$$

Tournez la page S.V.P.

16. Établir également la majoration suivante: pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive indépendante de N telle que, pour toute fonction v de $H_0^1(\Lambda) \cap H^m(\Lambda)$,

$$\|v - \pi_N^1 v\|_{L^2(\Lambda)} \leq c\, N^{-m}\, \|v'\|_{D^{m-1}(\Lambda)}. \tag{8}$$

On pourra introduire la fonction w de $H_0^1(\Lambda)$ dont la dérivée seconde est égale à $v - \pi_N^1 v$ et montrer que

$$\int_{-1}^{1} (v - \pi_N^1 v)^2(x)\, dx \leq \|v' - (\pi_N^1 v)'\|_{L^2(\Lambda)} \|w' - (\pi_N^1 w)'\|_{L^2(\Lambda)}.$$

17. Étant donnée une fonction v de $H^1(\Lambda)$, on pose

$$v_0(x) = v(x) - \frac{1-x}{2}\, v(-1) - \frac{1+x}{2}\, v(1),$$

et on étend l'opérateur π_N^1 à $H^1(\Lambda)$ par la formule

$$\pi_N^1 v = \pi_N^1 v_0 + \frac{1-x}{2}\, v(-1) + \frac{1+x}{2}\, v(1).$$

Montrer que, pour tout entier $m \geq 1$, l'application: $v \mapsto v_0$ est continue de $H^m(\Lambda)$ dans $H_0^1(\Lambda) \cap H^m(\Lambda)$. Démontrer un analogue des majorations (7) et (8) qui soit vrai pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$, $m \geq 1$.

18. On suppose la solution u du problème (4) dans $H^m(\Lambda)$, pour un entier $m \geq 1$ donné. Établir la majoration d'erreur suivante entre les solutions des problèmes (4) et (5): il existe une constante c positive indépendante de N telle que

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)} \leq c\, N^{1-m}\, \|u'\|_{D^{m-1}(\Lambda)}.$$

C. Le second problème discret

19. Montrer que le polynôme L_N a N zéros réels, distincts, dans Λ et que le polynôme L_N' a $N-1$ zéros réels, distincts, dans Λ. On note ξ_j, $0 \leq j \leq N$, les zéros du polynôme $(1-x^2)\, L_N'(x)$ rangés par ordre croissant. Prouver qu'il existe $N+1$ réels positifs ρ_j, $0 \leq j \leq N$, tels qu'on ait l'égalité

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^{1} \Phi(x)\, dx = \sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_j)\, \rho_j.$$

Cette formule est appelée *formule de Gauss–Lobatto*. On définit, pour toutes fonctions u et v continues sur $\overline{\Lambda}$, la forme bilinéaire

$$(u, v)_N = \sum_{j=0}^{N} u(\xi_j) v(\xi_j)\, \rho_j.$$

On désigne par i_N l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux nœuds ξ_j: pour toute fonction v continue sur $\overline{\Lambda}$, $i_N v$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et vérifie:

$$(i_N v)(\xi_j) = v(\xi_j), \quad 0 \leq j \leq N.$$

On suppose maintenant la fonction f continue sur $\overline{\Lambda}$. Le nouveau problème discret consiste à trouver un polynôme u_N de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ tel que

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad (u'_N, v'_N)_N + (a u_N, v_N)_N = (f, v_N)_N. \tag{9}$$

20. Montrer que le problème (9) admet une solution unique u_N dans $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. Vérifier que le problème (9) équivaut à trouver un polynôme u_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ vérifiant les équations dites *de collocation*:

$$\begin{aligned} &-u''_N(\xi_j) + a(\xi_j) u_N(\xi_j) = f(\xi_j), \quad 1 \leq j \leq N-1, \\ &u_N(-1) = u_N(1) = 0. \end{aligned}$$

21. Majorer le degré du polynôme $L_N^2(x) + \frac{1}{N^2}(1-x^2)L_N'^2(x)$. Calculer $(L_N, L_N)_N$ en fonction de $\|L_N\|^2_{L^2(\Lambda)}$ et en déduire les deux inégalités suivantes, pour tout polynôme v_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$:

$$\|v_N\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq (v_N, v_N)_N \leq 3\,\|v_N\|^2_{L^2(\Lambda)}.$$

22. Par homothétie et translation, on étend la définition de $H^1(\Lambda)$ à n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}$. En utilisant la majoration (3), montrer qu'il existe une constante c positive telle que, pour tout intervalle $]\alpha, \beta[$ borné de $\mathbb{R}$ et pour toute fonction χ de $H^1(\alpha, \beta)$, on ait l'inégalité

$$\sup_{\alpha \leq \theta \leq \beta} |\chi(\theta)| \leq c \left(\frac{1}{\beta - \alpha} \|\chi\|^2_{L^2(\alpha,\beta)} + (\beta - \alpha)\,\|\chi'\|^2_{L^2(\alpha,\beta)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

23. Étant donnée une fonction v de $\mathscr{C}^\infty(\Lambda)$ à support compact dans Λ, calculer la quantité

$$\int_{-1}^{1} \left(v'(x) + x v(x)\,(1-x^2)^{-1} \right)^2 dx,$$

et en déduire que, pour tout v dans $H_0^1(\Lambda)$,

$$\int_{-1}^{1} v^2(x)\,(1-x^2)^{-2}\,dx \leq \int_{-1}^{1} v'^2(x)\,dx.$$

24. On pose $\theta_j = \arccos \xi_j$, $0 \leq j \leq N$. On *admet* qu'il existe des intervalles ouverts K_j, $1 \leq j \leq N-1$, contenus dans $[0, \pi]$, de longueur $\frac{2\pi}{N}$, contenant θ_j, tels que l'intersection de chaque K_j avec K_i soit vide pour i différent de $j-1$, j, $j+1$. On *admet* également l'inégalité suivante: il existe une constante c positive indépendante de N telle que

$$\rho_j \leq c\,N^{-1}\,(1-\xi_j^2)^{\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq j \leq N-1.$$

Étant donnée une fonction v de $H_0^1(\Lambda)$, majorer $\|i_N v\|^2_{L^2(\Lambda)}$ en fonction des ξ_j et des $v(\xi_j)$, $1 \leq j \leq N-1$. En effectuant le changement de variable $x = \cos\theta$ et en appliquant l'inégalité (10) sur chaque K_j, en déduire qu'il existe une constante positive c indépendante de N telle que, pour toute fonction v de $H_0^1(\Lambda)$, on ait la majoration

$$\|i_N v\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq c\big(\|v\|^2_{L^2(\Lambda)} + N^{-2}\,\|v'\|^2_{L^2(\Lambda)}\big).$$

25. Établir la majoration suivante: pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive indépendante de N telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda)$,

$$\|v - i_N v\|_{L^2(\Lambda)} \leq c\,N^{-m}\,\|v\|_{H^m(\Lambda)}$$

(on pourra appliquer la majoration précédente à la fonction $v - \pi_N^1 v$).

26. Démontrer l'existence d'une constante c positive telle que, pour toute fonction f continue sur $\overline{\Lambda}$ et pour tout polynôme v_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$,

$$|(f, v_N) - (f, v_N)_N| \leq c\big(\|f - \pi_{N-1} f\|_{L^2(\Lambda)} + \|f - i_N f\|_{L^2(\Lambda)}\big)\,\|v_N\|_{L^2(\Lambda)}.$$

27. On suppose la fonction f dans $H^r(\Lambda)$ et aussi la solution u du problème (4) dans $H^m(\Lambda)$, pour des entiers $r \geq 1$ et $m \geq 1$ donnés. Lorsque la fonction a est constante, établir la majoration d'erreur suivante entre les solutions des problèmes (4) et (9):

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Lambda)} \leq c\big(N^{1-m}\,\|u'\|_{D^{m-1}(\Lambda)} + N^{-r}\,\|f\|_{H^r(\Lambda)}\big).$$

28. On note M la partie entière de $\frac{N-1}{2}$. On ne suppose plus la fonction a constante, mais on la suppose suffisamment régulière pour qu'il existe un polynôme a_M dans $\mathbb{P}_M(\Lambda)$ tel que

$$\sup_{-1\leq x\leq 1} |a(x) - a_M(x)| \leq c\,M^{-s},$$

où s est un réel > 0. Calculer la quantité

$$\big(u_N' - (\pi_M^1 u)', u_N' - (\pi_M^1 u)'\big)_N + \big(a(u_N - \pi_M^1 u), u_N - \pi_M^1 u\big)_N.$$

Avec les mêmes hypothèses sur f et u que dans la question 27, établir une majoration d'erreur entre les solutions des problèmes (4) et (9) dans $H^1(\Lambda)$.

29. Quels sont les avantages numériques du problème (9) par rapport au problème (5)?

D. Application

Pour un temps $T > 0$ fixé, on considère maintenant le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g \quad \text{presque partout dans } \Lambda \times]0, T[, \tag{11}$$

avec les conditions aux limites

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{pour presque tout } t \in]0, T[, \tag{12}$$

et la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{pour presque tout } x \in \Lambda. \tag{13}$$

On veut discrétiser ce problème par une méthode spectrale par rapport à x et par un schéma d'Euler implicite par rapport à t.

On suppose la fonction g continue sur $\overline{\Lambda} \times [0, T]$ et la fonction u_0 dans $H_0^1(\Lambda)$. On *admet* que le problème (11)(12)(13) a une solution unique u, continue de $[0, T]$ à valeurs dans $L^2(\Lambda)$.

30. Soit h un réel positif fixé. Montrer qu'on peut définir de façon unique une suite de fonctions u^ℓ de $H_0^1(\Lambda)$, où ℓ est un entier tel que $0 \leq \ell h \leq T$, par les équations

$$\begin{aligned} &\frac{u^{\ell+1} - u^\ell}{h} - (u^{\ell+1})'' = g\big(., (\ell+1)h\big) \quad \text{presque partout dans } \Lambda, \\ &u^0 = u_0 \quad \text{presque partout dans } \Lambda. \end{aligned}$$

31. On pose: $e^{\ell+1} = u^{\ell+1} - u\big(., (\ell+1)h\big)$. Montrer que, lorsque la solution u du problème (11)(12)(13) est supposée suffisamment régulière, la suite de fonctions e^ℓ vérifie le même schéma que précédemment, préciser le second membre et la donnée initiale. En effectuant le produit scalaire dans $L^2(\Lambda)$ de cette équation par $e^{\ell+1}$, majorer la quantité

$$\|e^\ell\|^2_{L^2(\Lambda)} + h \sum_{k=1}^{\ell} |e^k|^2_{H^1(\Lambda)}$$

en fonction de la donnée g et de la solution u.

32. On suppose la fonction g continuement dérivable sur $[0, T]$, à valeurs dans $L^2(\Lambda)$, et la solution u continuement dérivable sur $[0, T]$, à valeurs dans $H^1(\Lambda)$. Démontrer la majoration d'erreur

$$\|u^\ell - u(., \ell h)\|_{L^2(\Lambda)} \leq c\sqrt{T}\, h \big(\sup_{0 \leq \tau \leq T} \|\frac{\partial g}{\partial t}(., \tau)\|_{L^2(\Lambda)} + \sup_{0 \leq \tau \leq T} \|\frac{\partial u}{\partial t}(., \tau)\|_{H^1(\Lambda)}\big).$$

Tournez la page S.V.P.

Le problème discret consiste à chercher une suite de polynômes (u_N^ℓ), $h \leq h\ell \leq T$, appartenant à $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ et vérifiant

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \quad \frac{1}{h}(u_N^{\ell+1} - u_N^\ell, v_N)_N + \big((u_N^{\ell+1})', v_N'\big)_N = \big(g(.,(\ell+1)h), v_N\big)_N. \tag{14}$$

On choisit u_N^0 égal à $i_N u_0$.

33. Montrer que l'équation (14) définit la suite (u_N^ℓ) de façon unique.

34. On suppose la fonction g continue de $[0,T]$ dans $H^r(\Lambda)$, pour un entier $r \geq 1$ fixé. On suppose aussi les fonctions u^ℓ, $0 \leq \ell h \leq T$, dans $H^m(\Lambda)$ pour un entier $m \geq 1$ fixé. En utilisant les résultats de la partie C, majorer $\|u^\ell - u_N^\ell\|_{L^2(\Lambda)}$ en fonction de N.

35. On suppose vraies les hypothèses des questions 32 et 34. Établir la majoration d'erreur

$$\|u(.,\ell h) - u_N^\ell\|_{L^2(\Lambda)} \leq C\,(h + N^{-\inf\{m,r\}}),$$

où la constante C dépend des u^ℓ, $0 \leq \ell h \leq T$, de u et de g, mais ni de N ni de h.

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

On désigne par $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Le commutateur de deux éléments A et B de $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$) est l'élément noté :

$$[A \ , \ B] = A \cdot B - B \cdot A.$$

On note Tr (A), la (trace de A) somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

On considère un système de n ($n \geqslant 2$) particules, toutes de même masse m ($m = 1$), sur une droite, dont les positions sont notées :

$$(x_1, \ldots, x_n)$$

décrit par l'énergie potentielle :

$$U = \frac{g^2}{2} \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

où g et λ sont deux constantes réelles ($g \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$).

I

1. *a.* Écrire le lagrangien du système.

   b. Donner le hamiltonien correspondant H et préciser le domaine $\mathscr{D}_H$ sur lequel il est défini.

   c. Écrire les équations de Hamilton du système. On note :

   $$t \longmapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t); y_1(t), \ldots, y_n(t))$$

   la solution des équations de Hamilton avec donnée initiale :

   $$(x_1(0), \ldots, x_n(0); y_1(0), \ldots, y_n(0)) \in \mathscr{D}_H.$$

   Montrer que :

   $$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{n} \frac{2\, g^2}{(x_i - x_j)^3} - \lambda^2 x_i \qquad (*)$$

   $$i = 1, \ldots, n.$$

2. *a.* Montrer qu'il n'y a pas de collisions possibles en utilisant le principe de conservation de l'énergie.

   b. En déduire que toute solution maximale des équations de Hamilton de H avec donnée initiale :

   $$(x_1(0), \ldots, x_n(0); y_1(0), \ldots, y_n(0)) \in \mathscr{D}_H$$

   est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Tournez la page S.V.P.

3. A toute solution maximale des équations de Hamilton de H, on associe deux fonctions matricielles :

$$\mathrm{X} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{L} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

définies par :

$$\mathrm{X}_{ij}(t) = x_i(t)\,\delta_{ij}$$

$$\mathrm{L}_{ij}(t) = y_i(t)\,\delta_{ij} + \sqrt{-1}\,\frac{g}{(x_i - x_j)}\,(1 - \delta_{ij})$$

$$(\delta_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j, \qquad \delta_{ij} = 1 \quad \text{si} \quad i = j).$$

On veut montrer qu'il existe une fonction matricielle :

$$\mathrm{M} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

telle que :

$$\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{L} + [\mathrm{X}, \mathrm{M}].$$

a. Montrer que les coefficients non diagonaux de M notés $\mathrm{M}_{ij}\,(i \neq j)$ doivent satisfaire :

$$\mathrm{M}_{ij}(x_i - x_j) = \mathrm{L}_{ij}$$

et donc :

$$\mathrm{M}_{ij} = \frac{\mathrm{L}_{ij}}{(x_i - x_j)} = \sqrt{-1}\,\frac{g}{(x_i - x_j)^2}.$$

b. Vérifier que les termes diagonaux de $\dfrac{\mathrm{dX}}{\mathrm{d}t}$ et de $\mathrm{L} + [\mathrm{X}, \mathrm{M}]$ coïncident et conclure.

On veut maintenant montrer qu'on peut préciser le choix précédent de M en sorte qu'on ait en plus :

$$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{d}t} = [\mathrm{L}, \mathrm{M}] - \lambda^2 \mathrm{X}.$$

4. *a.* Montrer que les termes diagonaux de $\dfrac{\mathrm{dL}}{\mathrm{d}t}$ et ceux de $-\lambda^2\,\mathrm{X} + [\mathrm{L}, \mathrm{M}]$ coïncident.

b. Montrer enfin que l'on peut choisir les termes non diagonaux de M en sorte que :

$$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{d}t} = -\lambda^2\,\mathrm{X} + [\mathrm{L}, \mathrm{M}].$$

5. *a.* Montrer qu'il existe une fonction matricielle :

$$\mathrm{U} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

telle que :

$$\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{UM}.$$

b. Montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{UXU}^{-1}) = \mathrm{U}\,\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{U}^{-1} + [\mathrm{UMU}^{-1}, \mathrm{UXU}^{-1}].$$

6. On pose $\mathscr{X} = \mathrm{UXU}^{-1}$ et $\mathscr{L} = \mathrm{ULU}^{-1}$. Montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{X}}{\mathrm{d}t} = \mathscr{L}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}t} = -\lambda^2 \mathscr{X}.$$

En déduire l'expression de la fonction matricielle :

$$t \longmapsto \mathscr{X}(t) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \quad \text{vérifiant} \quad \mathscr{X}(0) = \mathrm{A}, \quad \mathscr{X}'(0) = \mathrm{B}$$

où A, B sont des éléments donnés de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

II

On suppose $\lambda \neq 0$.

1. Démontrer que les fonctions :

$$t \longmapsto \operatorname{Tr}(\mathrm{X}^k(t)) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

sont des fonctions périodiques de période $\dfrac{2\pi}{\lambda}$.

2. En déduire que les solutions de (*) telles que :

$$\left(x_1(0), \ldots, x_n(0); \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(0), \ldots, \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}(0)\right) \in \mathscr{D}_{\mathrm{H}}$$

sont périodiques de période $\dfrac{2\pi}{\lambda}$.

3. *a.* Démontrer que le système hamiltonien H a $n!$ positions d'équilibre qui sont des minima.

   b. Calculer la valeur de H en ces positions d'équilibre.

III

On suppose dans cette partie que $\lambda = 0$.

1. Montrer que les fonctions $t \longmapsto \operatorname{Tr}(\mathrm{L}^k(t))$ sont des constantes du mouvement du système hamiltonien H.

2. En déduire que les positions $x_i(t)$ des particules sont données par les valeurs propres d'une matrice qui dépend linéairement de t.

3. Démontrer que les positions $x_i(t)$ ont des expressions asymptotiques :

$$x_i(t) = y_i^+ \, t + x_i^+ + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t}\right) \qquad t \longrightarrow +\infty$$

$$x_i(t) = y_i^- \, t + x_i^- + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t}\right) \qquad t \longrightarrow -\infty .$$

4. Démontrer que pour tout $k = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i^+)^k = \sum_{i=1}^{n} (y_i^-)^k .$$

5. En déduire l'existence d'une permutation $s \in \mathfrak{S}_n$ telle que :

$$y_i^+ = y_{s(i)}^- .$$

6. Supposons que les particules sont rangées dans l'ordre suivant :

$$x_1(t) < x_2(t) < \ldots < x_n(t).$$

Montrer que :

$$y_1^- = y_n^+ , \qquad y_2^- = y_{n-1}^+ , \ldots, \qquad y_n^- = y_1^+ .$$

Tournez la page S.V.P.

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

Notations, Définitions, Rappels.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé.
1. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux sous-tribus de $\mathcal{F}$, on définit leur *coefficient de mélange* par

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \ .$$

2. Si f est une fonction décroissante sur l'intervalle I, on définit sa *pseudo-inverse* f^{-1} sur $]\inf(f(I)), \sup(f(I))[$ par $f^{-1}(s) = \inf\{x \in I : f(x) \leq s\}$.
3. Si X est une variable aléatoire, on note $\mathcal{F}(X)$ la tribu engendrée par X et H_X la fonction de queue de la distribution de X, définie sur $\mathbb{R}$ par $H_X(x) = P(X > x)$. On note Q_X la *fonction de quantile* de X, $Q_X = H_X^{-1}$. Lorsque X est intégrable ou positive, on note $E(X)$ l'espérance mathématique de X, $E(X) = \int X dP$.
4. Pour tout $p \in [1, \infty[$, $\mathbb{L}^p$ désigne l'espace des variables aléatoires X telles que $|X|^p$ soit intégrable, muni de sa semi-norme usuelle $\|X\|_p = (E|X|^p)^{1/p}$. $\mathbb{L}^\infty$ désigne l'espace des variables aléatoires X presque surement bornées, la semi-norme $\|X\|_\infty$ étant définie comme la borne supérieure essentielle de $|X|$, c'est à dire $\|X\|_\infty = \inf\{x \in \mathbb{R} : H_{|X|}(x) = 0\}$.
5. Soient X et Y deux variables aléatoires. Lorsque X, Y et XY sont intégrables, on définit la covariance entre X et Y par $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Lorsque X est de carré intégrable, on définit la variance de X par $\mathrm{var}(X) = \mathrm{cov}(X, X)$.
6. On rappelle le *critère de relative compacité en loi*:
pour une suite de lois de probabilité (ν_n) sur $\mathbb{R}$, les propriétés (i) et (ii) ci-dessous sont équivalentes,

(i) De toute sous suite de (ν_n) on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement vers une loi de probabilité.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$, tel que $\nu_n([-K, K]) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout n.

7. Un espace mesuré $(A, \mathcal{A}, \mu)$ est dit *σ-fini* si A s'exprime comme une réunion au plus dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie.
On rappelle l'énoncé du théorème de Fubini pour une fonction positive:
soit $(A_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)_{i=1,2}$ deux espaces mesurés σ-finis et f une application mesurable et positive, définie sur $(A_1 \times A_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, alors les applications

$$f_1 : x_1 \longrightarrow \int_{A_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \ , \ f_2 : x_2 \longrightarrow \int_{A_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$$

sont mesurables. De plus

$$\int_{A_1 \times A_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{A_1} f_1 d\mu_1 = \int_{A_2} f_2 d\mu_2 \ .$$

8. On rappelle le résultat de densité suivant:

Tournez la page S.V.P.

soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Soit B un élément de la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. Pour tout ε strictement positif, il existe une partie A élément de $\mathcal{A}$ telle que $\|\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B\|_1 \leq \varepsilon$.

Préliminaires

1. Soit X une variable aléatoire.

a. Prouver que la fonction H_X est continue à droite en tout point.

b. Montrer que pour tout $(x,s) \in \mathbb{R} \times]0,1[$, on a

$$x < Q_X(s) \text{ si et seulement si } s < H_X(x).$$

c. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. Prouver que $Q_X(U)$ a même loi que X.

d. Supposant que $X \in \mathbb{L}^p$, prouver que $Q^p_{|X|}$ est intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue) sur $]0,1[$ et que $E(|X|^p) = \int_0^1 Q^p_{|X|}(t)dt$.

2.

a. Prouver que, pour tout couple (X,Y) de variables aléatoires positives on a:

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} P(X > x, Y > y)dxdy.$$

En déduire que

$$E(XY) \leq \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} [\int_0^1 \mathbb{I}_{(s<H_X(x), s<H_Y(y))} ds]dxdy.$$

b. Démontrer que si (X,Y) est un couple de variables aléatoires tel que $Q_{|X|}Q_{|Y|}$ est intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue) sur $]0,1[$, alors XY est intégrable.

3. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$. Que signifie $\alpha(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0$? Montrer que $\alpha(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq 1/4$.

Première Partie

A

Soit X et Y deux variables intégrables telles que $Q_{|X|}Q_{|Y|}$ soit intégrable sur $]0,1[$. On note α le coefficient de mélange entre $\mathcal{F}(X)$ et $\mathcal{F}(Y)$. Le but de ce paragraphe est d'établir une majoration fine de la covariance entre X et Y.

1.

a. Prouver que XY est intégrable.

b. Montrer que

$$|P(X > x, Y > y) - P(X > x)P(Y > y)| \leq \int_0^\alpha \mathbb{I}_{(s<H_X(x), s<H_Y(y))} ds.$$

2. On suppose que X et Y sont positives. Etablir que

$$|\text{cov}(X,Y)| \leq \int_0^\alpha Q_X(s)Q_Y(s)ds.$$

3. Démontrer que

$$|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq 4\int_0^\alpha Q_{|X|}(s)Q_{|Y|}(s)ds.$$

4.

a. Soit $1 < p < +\infty, 1 < q < +\infty$ et $1 < r < +\infty$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = 1$. Prouver que si $X \in \mathbb{L}^p$ et $Y \in \mathbb{L}^q$ on a

$$|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq 4\alpha^{1/r}\|X\|_p\|Y\|_q.$$

b. Prouver que si $X \in \mathbb{L}^\infty$ et $Y \in \mathbb{L}^\infty$ on a

$$|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq 4\alpha\|X\|_\infty\|Y\|_\infty.$$

Dans toute la suite du problème, $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ est une suite *stationnaire* de variables aléatoires . Ce qui signifie que pour toute partie finie J de $\mathbb{Z}$ et tout entier m, les vecteurs aléatoires $(X_j, j \in J)$ et $(X_{j+m}, j \in J)$ ont même loi. Pour chaque entier j on note $\mathcal{M}_{-\infty}^j$ la tribu engendrée par $\{X_i, i \leq j\}$ et $\mathcal{M}_j^{+\infty}$ la tribu engendrée par $\{X_i, i \geq j\}$. On définit la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ des coefficients de mélange de $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ par $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_n = \alpha(\mathcal{M}_{-\infty}^0, \mathcal{M}_n^{+\infty})$ pour $n \geq 1$. . La *fonction de mélange* $\alpha(\cdot)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\alpha(t) = \alpha_{[t]}$, où $[t]$ désigne la partie entière de t. On note Q la fonction de quantile de $|X_0|$. Enfin, pour chaque entier $n \geq 1$ on note S_n la somme partielle $X_1 + \cdots + X_n$. On dit que la suite $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ est *mélangeante* si α_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
On suppose que X_0 est d'espérance nulle.

B

1.

a. Montrer que $\alpha(\cdot)$ est décroissante puis que le domaine de définition de la fonction pseudo-inverse α^{-1} est $]0,1[$ lorsque la suite $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ est mélangeante.

b. Prouver que $\alpha_n = \alpha(\mathcal{M}_{-\infty}^j, \mathcal{M}_{j+n}^{+\infty})$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

On considère la condition suivante:

(C) la suite $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ est mélangeante et $\alpha^{-1}Q^2$ est intégrable sur $]0,1[$.

2.

a. Lorsque $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées avec X_0 de carré intégrable, montrer que (C) est satisfaite. Que vaut alors $\int_0^1 \alpha^{-1}(s)Q^2(s)ds$?

b. Quand $X_0 \in \mathbb{L}^r$ pour un réel $r \in]2,\infty[$ et lorsque la série $\sum n^{\frac{2}{r-2}}\alpha_n$ est convergente, montrer que (C) est réalisée (indication: établir l'identité $\int_0^1(\alpha^{-1}(s))^{r/r-2}ds = \Sigma_{n\geq 0}(n+1)^{r/r-2}(\alpha_n - \alpha_{n+1})$).

c. Montrer qu'il en est de même lorsque la série $\sum \alpha_n$ est convergente et $X_0 \in \mathbb{L}^\infty$.

Tournez la page S.V.P.

On suppose jusqu'à la fin du problème que la condition (C) est réalisée et on pose

$$I = \int_0^1 \alpha^{-1}(s) Q^2(s) ds \, .$$

3.

a. Montrer que X_0 est de carré intégrable.

b. Soit h une fonction numérique de variable réelle. Etablir les identités

$$\text{(i)} \qquad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h(\operatorname{cov}(X_i, X_j)) = \sum_{k=-n}^{n} (1 - \frac{|k|}{n}) h(\operatorname{cov}(X_0, X_k))$$

$$\text{(ii)} \qquad I = \sum_{k \geq 0} \int_0^{\alpha_k} Q^2(t) dt$$

c. Montrer que la série $\sum \alpha_n$ est convergente dès lors que X_0 est presque surement non nulle.

4.

a. Démontrer que la série $\sum \operatorname{cov}(X_0, X_k)$ est absolument convergente.

b. Etablir l'inégalité

$$\operatorname{var}(S_n) \leq 4nI, \ \forall n \geq 1.$$

c. Montrer que $\frac{1}{n} \operatorname{var}(S_n)$ converge vers $\operatorname{var}(X_0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{cov}(X_0, X_k)$.

Deuxième Partie

On note désormais σ^2 la somme de la série $\operatorname{var}(X_0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{cov}(X_0, X_k)$.

L'objectif de cette partie est de démontrer un théorème central limite. Plus précisément on a en vue d'établir que $S_n/\sqrt{n}$ converge vers la loi normale centrée et de variance σ^2 lorsque σ^2 est supposé non nul.

A

1. Quel est le comportement de $S_n/\sqrt{n}$ lorsque $\sigma = 0$?

Jusqu'à la fin du problème on suppose que σ est non nul.

2. Soit (ν_n) une suite de lois de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que la suite $\int x^2 d\nu_n(x)$ soit bornée. On suppose en outre que $\int (i\lambda - x) \exp(i\lambda x) d\nu_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ pour tout réel λ. Il s'agit de démontrer que ν_n converge faiblement vers la loi normale centrée réduite.

a. Montrer qu'il en est ainsi si l'on suppose que la suite (ν_n) converge faiblement vers une loi de probabilité ν (indication: étudier la fonction caractéristique de ν).

b. Conclure.

B

On suppose pour tout ce paragraphe que $X_0 \in \mathbb{L}^{\infty}$. Soit (m_n) une suite d'entiers tendant vers $+\infty$, telle que $2m_n \leq n$, pour tout n. On pose

$$D_n = \{(l, j) \in [1, n] \times [1, n] : |j - l| \leq m_n\},$$

puis, pour tout $j \in [1, n]$,

$$D_n(j) = \{l \in [1, n] : |j - l| \leq m_n\}.$$

Soit $V_n = \sum_{(l,j) \in D_n} \operatorname{cov}(X_j, X_l)$.

1. Démontrer que $\frac{V_n}{n}$ converge vers σ^2 lorsque n tend vers $+\infty$.

Jusqu'à la fin de ce paragraphe **B**, on suppose n assez grand pour que V_n soit positif et on pose pour tout $l \in \mathbb{Z}$ $Y_{l,n} = X_l/\sqrt{V_n}$. On définit ensuite, pour tout $j \in [1, n]$, $T_n(j) = \sum_{l \in D_n(j)} Y_{l,n}$ et $T_n = \sum_{l=1}^{n} Y_{l,n}$. On fixe enfin un réel λ.

2. Vérifier la validité de la décomposition suivante:

$$(i\lambda - T_n)e^{i\lambda T_n} = i\lambda e^{i\lambda T_n} A_n - e^{i\lambda T_n} B_n - C_n$$

où

$$A_n = (1 - \sum_{j=1}^{n} T_n(j) Y_{j,n}),\ B_n = \sum_{j=1}^{n} Y_{j,n}(1 - e^{-i\lambda T_n(j)} - i\lambda T_n(j))$$

$$C_n = \sum_{j=1}^{n} Y_{j,n} e^{i\lambda(T_n - T_n(j))}.$$

3.

a. Montrer que $|e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x| \leq \lambda^2 x^2/2$, pour tout réel x.

b. En déduire l'existence d'une constante positive K_1 telle que, pour tout n assez grand $E|B_n| \leq K_1 \frac{m_n}{\sqrt{n}}$.

c. Démontrer qu'il existe une constante positive K_2 telle que $|E(C_n)| \leq K_2 \sqrt{n} \alpha_{m_n}$, pour tout n assez grand.

4. Soit $m \in \mathbb{N}$, $(j, l, j', l') \in \mathbb{Z}^4$ tels que $|j - l| \leq m$ et $|j' - l'| \leq m$.

a. Si $|j - j'| \geq 2m$, montrer que:

$$|\operatorname{cov}(X_j X_l, X_{j'} X_{l'})| \leq 4 \|X_0\|_\infty^4 \alpha_{|j-j'|-2m}.$$

b. Posant $k = \min(|j - j'|, |j - l|, |j - l'|)$, prouver que:

$$|\operatorname{cov}(X_j X_l, X_{j'} X_{l'})| \leq 8 \|X_0\|_\infty^4 \alpha_k.$$

5. Montrer que A_n est d'espérance nulle puis qu'il existe une constante positive K_3 telle que $E(A_n^2) \leq K_3 m_n^2/n$ pour tout n assez grand.

6. a. Démontrer que $m\alpha_m$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. En déduire l'existence d'une suite d'entiers (m_n) telle que $\sqrt{n}\alpha_{m_n}$ et $m_n/\sqrt{n}$ tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

b. En conclure que $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers la loi normale centrée et réduite.

C

Le but de ce paragraphe est d'étendre le théorème central limite démontré en B du cas borné au cas général (c'est à dire sous la seule condition (C)).

Tournez la page S.V.P.

Soit K un réel positif. On introduit

$$\begin{aligned} f_K(x) &= x \text{ lorsque } |x| \leq K \\ &= 0 \text{ lorsque } |x| > K. \end{aligned}$$

On pose $Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j$, $Z'_n(K) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n [f_K(X_j) - E(f_K(X_j))]$ et $Z''_n(K) = Z_n - Z'_n(K)$.

1. Etablir la majoration

$$E({Z''_n}^2(K)) \leq \frac{4}{\sigma^2} \int_0^{H_{|X_0|}(K)} \alpha^{-1}(s) Q^2(s) ds.$$

2.

a. Prouver que la série $\sum \operatorname{cov}(f_K(X_0), f_K(X_k))$ est absolument convergente.

b. Soit $v_K = \operatorname{var}(f_K(X_0)) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{cov}(f_K(X_0), f_K(X_k))$. Montrer que v_K converge vers σ^2 lorsque K tend vers $+\infty$.

3. Conclure.

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

Le but de ce problème est de présenter une méthode permettant de tracer des droites sur un écran d'ordinateur.

I. Notations et définitions

Pour tout alphabet fini $\mathcal{A}$, on note $\mathcal{A}^* = \cup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{A}^k$ l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots infinis sur $\mathcal{A}$ (par convention, $\mathcal{A}^0$ est le singleton formé du mot vide noté e). On appelle langage toute partie de $\mathcal{A}^*$. On rappelle que $\mathcal{A}^*$ muni de l'opération de concaténation est un monoïde dont l'élément neutre est constitué par le mot vide e.

Si $M = m_0 \dots m_k$ est un élément de $\mathcal{A}^{k+1} \subset \mathcal{A}^*$ on note $|M| = k+1$ la longueur du mot M et, pour tout élément $\mathbf{a}$ de $\mathcal{A}$, $|M|_{\mathbf{a}}$ le nombre d'apparitions de la lettre $\mathbf{a}$ dans le mot M : $|M|_{\mathbf{a}} =$ Card $\{n \le k, m_n = \mathbf{a}\}$.

Définition. *Soit $u = u_0u_1 \dots u_n \dots$ un mot infini sur $\mathcal{A}$. On appelle facteur de u tout élément de $\mathcal{A}^*$ de la forme $u_k \dots u_{k+l}$, avec $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, ainsi que le mot vide e.*

Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, définie par :

$$[x] = \sup\{n \in \mathbb{Z},\ n \le x\}$$

et on note $\{x\}$ la partie fractionnaire de x, définie par $\{x\} = x - [x]$.

II. Algorithme de Christoffel

Soit α un nombre réel compris entre 0 et 1. L'algorithme de Christoffel consiste à approximer la droite $\mathcal{D}_\alpha$ d'origine 0 et de pente α par l'ensemble $\mathcal{C} = \{(n, [n\alpha]), n \in \mathbb{N}\}$. On code alors l'ensemble $\mathcal{C}$ par le mot infini $c = c_0c_1 \dots c_n \dots$ sur l'alphabet $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ défini par :

$$\begin{aligned} c_n &= \mathbf{a} \quad \text{si } [(n+1)\alpha] = [n\alpha] \\ c_n &= \mathbf{b} \quad \text{si } [(n+1)\alpha] = [n\alpha] + 1 \end{aligned}$$

On dit que c est le mot de Christoffel associé à la droite $\mathcal{D}_\alpha$.

1) Soient p et q deux nombres entiers strictement positifs, premiers entre eux, et tels que $p < q$. Montrer que le mot de Christoffel associé à la droite $\mathcal{D}_{\frac{p}{q}}$ est périodique, et donner sa plus petite période.

2) Montrer que, dans tout mot de Christoffel, l'un des deux mots $\mathbf{aa}$ ou $\mathbf{bb}$ n'apparaît jamais; est-il possible qu'aucun des deux n'apparaisse?

3) On considère la transformation R_α définie sur $[0,1[$ par $R_\alpha(x) = \{x + \alpha\}$. On pose $I_{\mathbf{a}} = [0, 1-\alpha[$ et $I_{\mathbf{b}} = [1-\alpha, 1[$. Montrer que $c_n = \mathbf{a}$ si et seulement si $R_\alpha^n(0) \in I_{\mathbf{a}}$, et $c_n = \mathbf{b}$ si et seulement si $R_\alpha^n(0) \in I_{\mathbf{b}}$.

4) Soient M et M' deux facteurs de longueur n de c. Montrer que $||M|_{\mathbf{a}} - |M'|_{\mathbf{a}}| \le 1$.

Tournez la page S.V.P.

III. Mots sturmiens

Soit $u = u_0 u_1 \dots u_n \dots$ un mot infini sur l'alphabet $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. On note $\mathcal{L}(u)$ le langage associé au mot infini u, c'est-à-dire l'ensemble des facteurs de u, et $\mathcal{L}_n(u)$ l'ensemble $\mathcal{L}(u) \cap \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^n$ des facteurs de u de longueur n.

Définition. *On appelle complexité du mot u la suite $(P_u(n))_{n\in\mathbb{N}} = (\mathrm{Card}\, \mathcal{L}_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$.*

1) Montrer que la suite $(P_u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2) Montrer que, pour tout couple d'entiers (n_1, n_2), on a $P_u(n_1 + n_2) \leq P_u(n_1)P_u(n_2)$.
3) Montrer que, s'il existe au moins un nombre entier n_0 tel que $P_u(n_0) < 2^{n_0}$, alors $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} P_u(n) = 0$.

Définition. *On dit que le mot infini u est périodique de période p si l'on a $u_{i+p} = u_i$ pour tout nombre entier i. On dit que le mot u est ultimement périodique de période p s'il existe un nombre entier i_0 tel que l'on ait $u_{i+p} = u_i$ pour tout nombre entier i supérieur ou égal à i_0.*

4) Montrer que si le mot u est ultimement périodique, alors la suite $(P_u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
5) Montrer que, s'il existe un nombre entier n_0 tel que $P_u(n_0) = P_u(n_0 + 1)$, alors le mot u est ultimement périodique de période inférieure ou égale à $P_u(n_0)$.
6) Montrer que si u est un mot non ultimement périodique, alors pour tout nombre entier n, $P_u(n) \geq n + 1$.

Définition. *On dit que le mot infini u est sturmien si, pour tout nombre entier n, $P_u(n) = n + 1$.*

7) Montrer que dans un mot sturmien, tout facteur qui apparaît, apparaît une infinité de fois.
8)Le but de cette question est de montrer que, si le mot u est un mot infini non ultimement périodique tel que tout couple (U, V) de facteurs de u de même longueur vérifie $||U|_\mathbf{a} - |V|_\mathbf{a}| \leq 1$, alors u est un mot sturmien.

Soit u un mot non ultimement périodique et non sturmien. Soit n_0 le plus petit nombre entier tel que $P_u(n_0 + 1) \geq n_0 + 3$. Montrer qu'il existe deux mots distincts U et V de longueur n_0 tels que $U\mathbf{a}$, $U\mathbf{b}$, $V\mathbf{a}$, $V\mathbf{b}$ appartiennent à $\mathcal{L}(u)$. En déduire que $\mathcal{L}(u)$ contient deux mots U' et V' tels que $|U'|_\mathbf{a} - |V'|_\mathbf{a} \geq 2$.
9) Le but de cette question est de montrer que si u est un mot sturmien, tout couple (U, V) de facteurs de u de même longueur vérifie $||U|_\mathbf{a} - |V|_\mathbf{a}| \leq 1$.

On suppose dans cette question que $\mathcal{L}(u)$ contient deux mots U et V de même longueur tels que $|U|_\mathbf{a} - |V|_\mathbf{a} \geq 2$.

a) montrer que $\mathcal{L}(u)$ contient deux mots U' et V' de même longueur qui vérifient $|U'|_\mathbf{a} - |V'|_\mathbf{a} = 2$.

b) Montrer que dans ce cas on peut supposer, quitte à prendre des mots plus courts, qu'il existe un mot W (éventuellement vide) tel que $U' = \mathbf{a}W\mathbf{a}$ et $V' = \mathbf{b}W\mathbf{b}$.

c) Soit W un mot de longueur minimale satisfaisant à la condition précédente. Montrer que W est un palindrome (c'est-à-dire que, si $W = w_0 w_1 \dots w_n \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}^{n+1}$, on a $w_i = w_{n-i}$, pour tout nombre entier i compris entre 0 et n).

d) En déduire que le mot u n'est pas sturmien.

On a montré :

Théorème. *Soit u un mot infini non ultimement périodique sur l'alphabet $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. u est sturmien si et seulement si tout couple (U, V) de facteurs de u de même longueur vérifie* $||U|_{\mathbf{a}} - |V|_{\mathbf{a}}| \leq 1$.

10) Montrer que pour tout nombre irrationnel α, le mot de Christoffel associé à la droite $\mathcal{D}_\alpha$ est sturmien.

IV. Suite de Fibonacci

On note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour tout nombre entier $n \geq 1$.

1) Calculer, pour tout nombre entier n, F_n en fonction de n.

2) Déterminer une progression arithmétique $\{an + b, n \in \mathbb{N}\}$ (avec $PGCD(a, b) = 1$) dont aucun terme n'appartient à la suite de Fibonacci.

3) Montrer que tout nombre entier n s'écrit de manière unique sous la forme $n = \sum_{i\geq 0} n_i F_i$ avec $n_i \in \{0, 1\}$ et $n_i n_{i+1} = 0$ pour tout nombre entier $i \geq 0$.

En posant $k = \sup\{i \in \mathbb{N}, n_i = 1\}$, on dit que $n_k n_{k-1} \dots n_0 \in \{0,1\}^{k+1}$ est l'écriture du nombre entier non nul n en base de Fibonacci, et on note $n_k n_{k-1} \dots n_0 = Fib(n)$. Par convention, on pose $0 = Fib(0)$.

4) Ecrire un programme Pascal donnant l'écriture de tout nombre entier en base de Fibonacci.

5) Le but de cette question est de caractériser l'ensemble des nombres entiers dont l'écriture en base de Fibonacci se termine par un 0.

a) On pose $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et on définit $E_0 = \{[n\phi]-1, n \in \mathbb{N}-\{0\}\}$ et $E_1 = \{[n\phi^2]-1, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$. Montrer que $E_0 \cap E_1$ est l'ensemble vide.

b) Montrer que E_0 (resp. E_1) est égal à l'ensemble des nombres entiers n tels que le mot $Fib(n)$ se termine par 0 (resp. 1).

6) Le but de cette question est d'estimer le nombre moyen de 1 dans l'écriture des nombres entiers en base de Fibonacci.

a) Pour tout nombre entier n, calculer $\sum_{k<F_n} |Fib(k)|_1$ en fonction de n.

b) Donner un équivalent de $\sum_{k<N} |Fib(k)|_1$ lorsque N tend vers l'infini.

V. Mot de Fibonacci

Soit $A = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, et $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeur dans A^* définie par $\Phi_0 = \mathbf{a}$, $\Phi_1 = \mathbf{ab}$, et $\Phi_{n+1} = \Phi_n\Phi_{n-1}$ pour tout nombre entier supérieur ou égal à 1.

1) Soit d l'application définie sur $A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}}$ par :

$$d(u, u') = e^{-\inf\{n\in\mathbb{N}, u_n \neq u'_n\}}$$

si $u \neq u'$ et $u = u_0u_1 \dots u_n \dots$, $u' = u'_0u'_1 \dots u'_n \dots$, et

$$d(u, u') = 0$$

si $u = u'$.

Tournez la page S.V.P.

Montrer que $(A^{\mathbb{N}}, d)$ est un espace métrique compact.
2) Soit σ le morphisme de A^* défini par :

$$\sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{ab} \qquad \sigma(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$$

$$\sigma(m) = \sigma(m_0)\sigma(m_1)\ldots\sigma(m_n) \qquad \text{pour tout mot } m = m_0m_1\ldots m_n \in A^*$$

On prolonge σ à $A^{\mathbb{N}}$ par concaténation en posant pour tout mot infini $u = u_0u_1\ldots u_n\ldots$ de $A^{\mathbb{N}}$, $\sigma(u) = \sigma(u_0)\sigma(u_1)\ldots\sigma(u_n)\ldots$.

Montrer que σ admet un unique point fixe sur $A^{\mathbb{N}}$, que l'on notera $\lambda = \lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_n\ldots$.
3) Montrer que la suite $(\Phi_n\mathbf{aa}\ldots\mathbf{a}\ldots)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(A^{\mathbb{N}}, d)$ vers λ.
4) Pour tout nombre entier n, on pose $f_{\mathbf{a}}(n) = \frac{1}{n+1}|\lambda_0\ldots\lambda_n|_{\mathbf{a}}$. Montrer que la suite $(f_{\mathbf{a}}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
5) Soit $\mathbb{N}_{\mathbf{a}} = \{n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbf{a}\}$. Montrer que $\mathbb{N}_{\mathbf{a}} = \left\{\left[n.\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] - 1, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$.

VI. Décomposition canonique des systèmes sturmiens

Dans toute la suite, on note S l'application (*décalage*) définie sur les mots infinis à valeur dans $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ par $S(u_0u_1\ldots u_n\ldots) = u_1u_2\ldots u_{n+1}\ldots$.

A) Mots biprolongeables d'un système sturmien.

1) Soit u un mot sturmien et soit Ω l'adhérence dans $A^{\mathbb{N}}$ de $\{S^n(u), n \in \mathbb{N}\}$ (pour la topologie définie par la métrique d, définie à la question V.1.); montrer que Ω est l'ensemble des mots infinis dont le langage est contenu dans $\mathcal{L}(u)$, et que c'est un ensemble fermé invariant par S.
2) Montrer que, pour tout $x \in \Omega$, il existe au moins un élément y de Ω tel que $Sy = x$.
3) Montrer qu'il existe exactement un élément $u \in \Omega$ tel que u soit l'image par décalage de deux éléments de Ω.
4) Montrer que, si u est l'unique élément de Ω prolongeable à gauche de deux façons, alors $\mathbf{ab}u$ et $\mathbf{ba}u$ sont dans Ω.

B) Codage d'un système sturmien.

On note $\sigma_{\mathbf{a}}$ (resp.$\sigma_{\mathbf{b}}$) le morphisme défini par $\sigma_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ et $\sigma_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \mathbf{ba}$ (resp. $\sigma_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \mathbf{ab}$ et $\sigma_{\mathbf{b}}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$).
5) Montrer que, si Ω est le système engendré par un mot sturmien u, et si $\mathbf{bb}$ n'appartient pas au langage associé $\mathcal{L}(u)$, alors tout élément de Ω peut s'écrire $\sigma_{\mathbf{a}}(y)$, où y est un mot infini sur l'alphabet $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.
6) Montrer que, si y est un mot infini tel que Sy ne soit pas sturmien, alors $\sigma_{\mathbf{a}}(y)$ n'est pas sturmien.
7) Montrer que, si le langage de $\sigma_{\mathbf{a}}(y)$ est inclus dans le langage de $\sigma_{\mathbf{a}}(y')$, alors le langage de Sy est inclus dans le langage de Sy'.
8) Montrer qu'à tout système Ω engendré par un mot sturmien, on peut faire correspondre un système Ω', engendré par un mot sturmien, et un morphisme σ égal à $\sigma_{\mathbf{a}}$ ou $\sigma_{\mathbf{b}}$, tels que pour tout $y \in \Omega$, il existe un unique y' tel que $\sigma(y') = y$ et $Sy' \in \Omega'$.
9) Montrer que, si u est l'unique élément biprolongeable à gauche de Ω, et si u' est l'unique élément biprolongeable à gauche de Ω', alors $\mathbf{ab}u = \sigma(\mathbf{ab}u')$ et $\mathbf{ba}u = \sigma(\mathbf{ba}u')$.

10) Montrer que, si u est ultimement périodique de période $p > 1$, alors u' est de période $p' < p$. Montrer qu'un mot sturmien ne peut pas contenir de plages arbitrairement longues de **a** ou de **b**. En déduire que u ne peut donc pas être périodique, et que son orbite est dense dans Ω.

11) Montrer qu'à tout système Ω engendré par un mot sturmien, on peut associer une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres entiers strictement positifs tels que $\sigma_{\mathbf{a}}^{a_1-1}\sigma_{\mathbf{b}}^{a_2}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_3}\dots\sigma_{\mathbf{b}}^{a_{2n}}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_{2n+1}}(a)$ est un préfixe de **ab**u, et $\sigma_{\mathbf{a}}^{a_1-1}\sigma_{\mathbf{b}}^{a_2}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_3}\dots\sigma_{\mathbf{b}}^{a_{2n}}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_{2n+1}}(b)$ est un préfixe de **ba**u.

VII. Mots sturmiens et rotations

Le but de cette partie est de montrer que tous les mots sturmiens sont obtenus par codage de l'orbite d'un point pour une rotation irrationnelle, de façon analogue aux mots de Christoffel.

A) Unicité de la rotation associée à un système sturmien.

Dans les questions qui suivent, on montre que si, dans un système sturmien, il existe un mot infini engendré (au sens donné ci-dessous) par une rotation R_α, alors tous les mots infinis de ce système sont engendrés par la même rotation.

Soit α un nombre irrationnel et R_α la rotation

$$R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad x \mapsto x + \alpha \mod \mathbb{Z}$$

On note comme dans la partie II $I_{\mathbf{a}} = [0, 1-\alpha[$ et $I_{\mathbf{b}} = [1-\alpha, 1[$ la partition du domaine fondamental $[0,1[$ de $\mathbb{R}$ modulo $\mathbb{Z}$. On note f^I l'application qui à x associe **a** si $x \in I_{\mathbf{a}}$, et **b** si $x \in I_{\mathbf{b}}$, et on note N^I l'application qui à x associe le mot infini $N^I(x) = f^I(x)f^I(R_\alpha(x))\dots f^I(R_\alpha^n(x))\dots$.

De même, on note $J_{\mathbf{a}} =]0, 1-\alpha]$ et $J_{\mathbf{b}} =]1-\alpha, 1]$ la partition du domaine fondamental $]0,1]$ de $\mathbb{R}$ modulo $\mathbb{Z}$. On note f^J l'application qui à x associe **a** si $x \in J_{\mathbf{a}}$, et **b** si $x \in J_{\mathbf{b}}$, et on note N^J l'application qui à x associe le mot infini $N^J(x) = f^J(x)f^J(R_\alpha(x))\dots f^J(R_\alpha^n(x))\dots$.

1) Déterminer l'ensemble des points x tels que $N^I(x) \neq N^J(x)$. Montrer que même si $N^I(x) \neq N^J(x)$, les langages associés aux deux mots infinis sont les mêmes.

2) Montrer que l'application N^I est continue à droite, et que l'application N^J est continue à gauche.

Définition. *On dit qu'un mot infini u est engendré par une rotation d'angle α si u est de la forme $N^I(x)$ ou $N^J(x)$, pour un certain nombre réel x.*

3) Soit u un mot sturmien, v un élément du système Ω associé. Montrer que si u est engendré par une rotation, alors v est engendré par la même rotation.

B) Existence de la rotation associée à un système sturmien.

4) On considère une rotation R_α, avec $\alpha > \frac{1}{2}$. Soit I' l'intervalle $[0, \alpha[$ et $R_{\alpha|I'}$ l'application de I' dans I' définie par $R_{\alpha|I'}(x) = R_\alpha^{n(x)}(x)$, où $n(x)$ est le plus petit nombre entier non nul n tel que $R_\alpha^n(x) \in I'$. On dit que $R_{\alpha|I'}$ est l'application *induite* de R_α sur l'intervalle I'.

Montrer qu'il existe une homothétie h telle que $h \circ R_{\alpha|I'} \circ h^{-1}$ soit une rotation sur l'intervalle $[0,1[$ dont on calculera l'angle en fonction de α.

Tournez la page S.V.P.

5) On pose $I'_{\mathbf{a}} = I_{\mathbf{a}} \cap I'$ et $I'_{\mathbf{b}} = I_{\mathbf{b}} \cap I'$. Avec des notations analogues à celles de la partie précédente, on définit l'application $f^{I'}$ sur I' par $f^{I'}(x) = \mathbf{a}$ (resp. $\mathbf{b}$) si $x \in I'_{\mathbf{a}}$ (resp. $I'_{\mathbf{b}}$), et l'application $N^{I'}$ qui associe le mot infini $f^{I'}(x)f^{I'}(R_{\alpha|I'}(x))\ldots f^{I'}(R^n_{\alpha|I'}(x))\ldots$ au point x de I'. Pour tout point x de I', exprimer $N^I(x)$ en fonction de $N^{I'}(x)$.
6) Que deviennent les résultats précédents lorsque $\alpha < \frac{1}{2}$? (indication : on pourra considérer l'intervalle $I'' = [\alpha, 1[$)
7) On rappelle que pour tout nombre α irrationnel de $[0,1[$ il existe une unique suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

On dit que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est le *développement en fraction continue* de α.

Montrer que $\sigma_{\mathbf{a}}^{a_1-1}\sigma_{\mathbf{b}}^{a_2}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_3}\ldots\sigma_{\mathbf{b}}^{a_{2n}}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_{2n+1}}(a)$ est un préfixe du mot infini $N^J(1-\alpha)$, et que $\sigma_{\mathbf{a}}^{a_1-1}\sigma_{\mathbf{b}}^{a_2}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_3}\ldots\sigma_{\mathbf{b}}^{a_{2n}}\sigma_{\mathbf{a}}^{a_{2n+1}}(b)$ est un préfixe du mot infini $N^I(1-\alpha)$.
8) On rappelle que, réciproquement, toute suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\geq 1}$, est le développement en fraction continue d'un unique nombre irrationnel α de $[0,1[$. Montrer que tout mot sturmien est engendré par une rotation.

On a montré :

Théorème. *Un mot infini u sur $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ est sturmien si et seulement si il est engendré par une rotation irrationnelle.*

C) Applications.

9) Donner un algorithme permettant de calculer les n premières lettres du mot infini $N^J(1-\alpha)$, et une majoration pour son temps de calcul.
10) On pose $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; calculer le développement en fraction continue de α, en déduire le mot infini $N^J(1-\alpha)$.
11) Quel est le rapport entre ce mot infini et le mot de Fibonacci étudié dans la partie V?