21

Espaces probabilisés

21.1 Introduction

De façon intuitive, une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat ne peut être annoncé avec certitude a priori, c'est-à-dire avant la réalisation de cette expérience.

Un schéma concret souvent utilisé, pour rendre intuitif le calcul des probabilités, est celui d'un dé dont les six faces sont identiques, c'est-à-dire qui ont la même probabilité (au sens intuitif, pour l'instant) de chute.

On dira qu'un lancé de dé est une expérience aléatoire (aléa est un mot latin signifiant jeu de dé).

Le résultat d'un tel lancé est une éventualité (on dit aussi une épreuve) et l'ensemble de toutes les éventualités est appelé l'espace fondamental (on dit aussi l'univers) de l'expérience et est souvent noté Ω. Un événement est une proposition logique susceptible de se produire ou non à l'issue de la réalisation d'une expérience aléatoire. Enfin à chaque événement on essayera d'associer un nombre $p \in [0, 1]$ qui devra mesurer la probabilité pour que cet événement se produise.

L'origine du calcul des probabilités se trouve dans les jeux de hasard (le mot « hasard », transmis par les espagnols, vient de l'arabe « az-zahr » qui signifie « dé à jouer »).

Pascal et Fermat ont été les premiers, au 17ème siècle, à mathématiser cette théorie. Puis, à partir du 18ème siècle, de nombreux mathématiciens se sont intéressés à ce calcul (Laplace, Poisson, Gauss, Poincaré, Borel, Frechet, Levy, Kolmogorov, Khintchine, ...).

C'est Kolmogorov qui est considéré comme le fondateur (en 1933) de la théorie axiomatique moderne des probabilités.

Le langage de la théorie des ensembles permet de modéliser de façon efficace la notion d'expérience aléatoire.

On pourra consulter le chapitre 1 du cours d'algèbre pour les notions de base sur les ensembles et le chapitre 2 pour l'analyse combinatoire.

21.2 Événements

On désigne par Ω un ensemble non vide dont les éléments représentent tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire donnée $\mathcal{E}$.

Les éléments de Ω sont appelés éventualités ou épreuves, les parties (ou sous-ensembles) de Ω sont appelés événements et Ω est appelé univers ou espace fondamental.

Remarque 21.1 *La notion d'éventualité dépend de ce qui intéresse l'expérimentateur.*
Pour le lancé d'un dé équilibré, si on s'intéresse au résultat de la face supérieure, on prendra

pour univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, *mais si on s'intéresse à la parité du numéro de cette face, on prendra* $\Omega = \{Pair, Impair\}$ *ou* $\Omega = \{0, 1\}$ *(*0 *pour pair et* 1 *pour impair).*

Remarque 21.2 *L'univers* Ω *n'est pas nécessairement dénombrable (fini ou infini).*
Si on considère l'exemple d'un lancé de fléchettes sur une cible, en admettant que le joueur lance la fléchette assez fort pour atteindre le plan de la cible, une éventualité est le point d'impact de la fléchette sur le plan de la cible et Ω *est une partie de* $\mathbb{R}^2$.
On peut aussi prendre pour éventualité la distance du centre de la cible au point d'impact de la cible et on prendra $\Omega = \mathbb{N}$ *si on fait les mesures à un centimètre près.*
On peut aussi prendre pour éventualité, le gain correspondant au point d'impact et dans ce cas $\Omega = \{0, 20, 50, 100\}$.

On dira qu'une expérience aléatoire est discrète si l'univers est dénombrable (fini ou infini) et on dira qu'elle est continue si l'espace fondamental est infini non dénombrable (par exemple, Ω peut être $\mathbb{R}^3$, un intervalle de $\mathbb{R}$,...).

Exemple 21.1 *Sachant que deux candidats* C_1, C_2 *à une élection ont obtenus respectivement* m *et* n *voix, avec* $m > n$, *quelle est la probabilité pour que, dans le dépouillement,* C_1 *ait constamment la majorité ?*
On est ici dans le cas discret fini et on peut montrer que la probabilité cherchée est : $p = \dfrac{m-n}{m+n}$.

Exemple 21.2 *Deux entiers positifs étant choisis au hasard, quelle est la probabilité pour qu'ils soient premiers entre eux ?*
On est ici dans le cas discret dénombrable infini (on peut prendre pour Ω *l'ensemble des* pgcd *de deux entiers) et on peut montrer que la probabilité cherchée est* $p = \dfrac{1}{\zeta(2)}$, *où* $\zeta(k) = \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^k}$ *est la fonction dzéta de Riemann. De manière plus générale, la probabilité pour que* r *nombres entiers positifs soient premiers entre eux est* $p = \dfrac{1}{\zeta(r)}$.

Exemple 21.3 *Sur un plan, on trace des droites parallèles distantes de* d *et on jette une aiguille de longueur* $\ell < d$. *Quelle est la probabilité pour que cette aiguille rencontre l'une des droites ?*
On est ici dans le cas continu et on peut montrer que la probabilité cherchée est $p = \dfrac{2\ell}{\pi d}$ *(problème de l'aiguille de Buffon).*
En 1777 Buffon réalisa cette expérience avec 2048 *essais ce qui lui permit d'obtenir une estimation de* π *avec une décimale exacte.*

On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

Les opérations sur les ensembles s'interprètent, en termes d'événements, comme indiqué dans le tableau suivant :

Ensemble	**Événement**
L'ensemble vide $\emptyset$	Événement impossible
L'univers Ω	Événement certain
Un singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$	Un événement élémentaire
Un sous-sensemble A de Ω	Un événement
$\omega \in A$	Le résultat ω est une réalisation possible de A
$A \subset B$	si A est réalisé, alors B est réalisé
Le complémentaire $\Omega \setminus A$ de A dans Ω	Événement contraire de A
$A \cap B$	Réalisation simultanée de A et B
$A \cap B = \emptyset$	Les événements A et B sont incompatibles
$A \cup B$	Réalisation de A ou B
$(A_i)_{i\in I}$ une partition dénombrable de Ω	$(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements

21.3 Tribus d'événements, espaces probabilisables

On se donne un univers Ω.

Définition 21.1 *On appelle tribu (ou σ-algèbre d'événements, ou famille d'événements observables) sur Ω toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :*
- $\Omega \in \mathcal{B}$ *;*
- $\forall A \in \mathcal{B},\ \Omega \setminus A \in \mathcal{B}$ *($\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire) ;*
- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est stable par réunion dénombrable).*

Remarque 21.3 *Si on impose seulement la stabilité de $\mathcal{B}$ par réunion finie, on parle alors d'algèbre d'événements (ou d'algèbre de Boole). Le préfixe σ fait référence à la possibilité d'utiliser des réunions infinies dénombrables d'événements.*
Il est facile de vérifier qu'une σ-algèbre est une algèbre.

Définition 21.2 *Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur Ω, on dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{B})$ est un espace probabilisable (ou mesurable).*

Exemple 21.4 *$\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ (tribu triviale, c'est la plus petite) ; $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, \Omega \setminus A, \Omega\}$ où A est une partie non vide distincte de Ω ; $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ (tribu grossière, c'est la plus grande) sont des tribus sur Ω.*

On vérifie facilement le résultat suivant.

Théorème 21.1 *Si $(\Omega, \mathcal{B})$ est un espace probabilisable, on a alors :*
- $\emptyset \in \mathcal{B}$ *;*
- *si A, B sont dans $\mathcal{B}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \triangle B$ sont dans $\mathcal{B}$;*
- *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est stable par intersection dénombrable).*

Démonstration. On a :

- $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{B}$.
- $A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$ en posant $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$.
  $\Omega \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B) \in \mathcal{B}$, donc $A \cap B = \Omega \setminus (\Omega \setminus (A \cap B)) \in \mathcal{B}$.
  $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B) \in \mathcal{B}$ et $A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{B}$.
- Et :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega \setminus A_n \right) \in \mathcal{B}.$$

■

En considérant des suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telles que $A_n = \emptyset$ pour n assez grand, on voit qu'une tribu est stable par réunions et intersections finies.

Lemme 21.1 *Si $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ est une famille de tribus sur Ω, alors $\mathcal{B} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{B}_i$ est aussi une tribu sur Ω.*

Démonstration. On a $\Omega \in \mathcal{B}_i$ pour tout $i \in I$, donc $\Omega \in \mathcal{B}$.

Pour tout A dans $\mathcal{B}$, on a $A \in \mathcal{B}_i$ pour tout $i \in I$, donc $\Omega \setminus A \in \mathcal{B}_i$ pour tout $i \in I$ et $\Omega \setminus A \in \mathcal{B}$.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$, on a alors $A_n \in \mathcal{B}_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in I$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}_i$ pour tout $i \in I$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

On a donc ainsi montré que $\mathcal{B}$ est une tribu sur Ω. ■

Définition 21.3 *Si $\mathcal{X}$ est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, on dit alors que l'intersection de toutes les tribus sur Ω qui contiennent $\mathcal{X}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{X}$.*

Comme $\mathcal{P}(\Omega)$ est tribu sur Ω qui contient $\mathcal{X}$, il existe bien de telles tribus.

On note $\sigma(\mathcal{X})$ la tribu engendrée par une partie $\mathcal{X}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ et on a :

$$\sigma(\mathcal{X}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \text{ tribu} \\ \mathcal{X} \subset \mathcal{B}}} \mathcal{B}$$

Remarque 21.4 *La tribu engendrée par $\mathcal{X}$ est aussi la plus petite tribu sur Ω (pour l'ordre de l'inclusion sur $\mathcal{P}(\Omega)$) qui contient $\mathcal{X}$.*

Exercice 21.1 *Soient $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ deux parties de $\mathcal{P}(\Omega)$.*

1. *Montrer que si $\mathcal{X} \subset \sigma(\mathcal{Y})$, on a alors $\sigma(\mathcal{X}) \subset \sigma(\mathcal{Y})$.*
2. *Montrer que si $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, on a alors $\sigma(\mathcal{X}) \subset \sigma(\mathcal{Y})$.*

Solution 21.1

1. *Résulte du fait que $\sigma(\mathcal{X})$ est la plus petite tribu sur Ω qui contient $\mathcal{X}$.*
2. *Résulte de $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y} \subset \sigma(\mathcal{Y})$.*

La définition qui suit nous sera utile pour définir les variables aléatoires réelles.

Définition 21.4 *La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par l'ensemble des intervalles réels (finis ou non).*
On la note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Théorème 21.2 *La tribu borélienne sur* $\mathbb{R}$ *est engendrée par la famille des intervalles de la forme* $]-\infty, x]$ *où* x *décrit* $\mathbb{R}$. *Elle est aussi engendrée par la famille des intervalles de la forme* $]x, y]$ *où* $x < y$ *dans* $\mathbb{R}$.
Cela signifie que :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathbb{R}} &= \sigma \{]-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \sigma \{]x, y] \mid x < y \text{ dans } \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Démonstration. Notons $\mathcal{X}$ l'ensemble de tous les intervalles réels, $\mathcal{X}_1 = \{]-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{X}_2 = \{]x, y] \mid x < y \text{ dans } \mathbb{R}\}$.

De $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{X}_2 \subset \mathcal{X}$, on déduit que $\sigma(\mathcal{X}_1) \subset \sigma(\mathcal{X}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et $\sigma(\mathcal{X}_2) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

L'inclusion réciproque $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{X}_1)$ se déduit de :
- $]-\infty, x[= \bigcup_{n \geq 1} \left]-\infty, x - \frac{1}{n}\right] \in \sigma(\mathcal{X}_1)$;
- $]x, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]-\infty, x] \in \sigma(\mathcal{X}_1)$;
- $[x, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]-\infty, x[\in \sigma(\mathcal{X}_1)$;
- $[x, y] = [x, +\infty[\cap]-\infty, y] \in \sigma(\mathcal{X}_1)$ pour $x \leq y$;
- $]x, y[=]x, +\infty[\cap]-\infty, y[\in \sigma(\mathcal{X}_1)$ pour $x \leq y$ (c'est $\emptyset$ pour $x = y$) ;
- $[x, y[= \{x\} \cup]x, y[$ pour $x \leq y$;
- $]x, y] =]x, y[\cup \{y\}$ pour $x \leq y$.

On procède de manière analogue pour l'inclusion $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{X}_2)$. Ou alors, on peut montrer directement que $\sigma(\mathcal{X}_1) = \sigma(\mathcal{X}_2)$. ■

Lemme 21.2 *Si* $\Omega = \{\omega_i \mid i \in I\}$ *est dénombrable avec* $I \subset \mathbb{N}$, *alors* $\mathcal{P}(\Omega)$ *est la tribu engendré par les événements élémentaires* $\{\omega_i\}$ *où* $i \in I$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ la tribu engendrée par les événements élémentaires. Toute partie A de Ω s'écrivant $A = \bigcup_{j \in J} \{\omega_j\}$ avec $J \subset I \subset \mathbb{N}$ et $\{\omega_j\} \subset \Omega$, elle est dans $\mathcal{B}$ comme réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}$. On a donc $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$. ■

Dans le cas où Ω est dénombrable, on prend usuellement $\mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu.

21.4 Espaces probabilisés

Étant donnée une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, on s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un événement A. Pour cela, une idée naturelle est de répéter un grand nombre de fois l'expérience dans les mêmes conditions. Si pour n expériences, on note $n(A)$ le nombre de fois où A est réalisé, la quantité $f(A) = \frac{n(A)}{n}$ est la fréquence statistique de réalisation de A sur n coups. Plus n sera grand, plus $f(A)$ se rapprochera d'une quantité qui sera la probabilité de réalisation de A.

Il est donc naturel de poser :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(A)}{n}$$

Mais en général cette quantité n'est pas directement calculable.

De plus, si on fait plusieurs séries d'expériences, on aura des évaluations différentes de cette limite (dont l'existence n'est pas toujours assurée). Un autre inconvénient de cette définition est qu'il faut faire des expériences pour avoir une idée de la probabilité de réalisation de A, alors que le but est justement d'avoir une idée de cette probabilité avant toute expérience. D'où la nécessité de donner des définitions axiomatiques à partir des résultats sur les fréquences statistiques.

Avec $0 \leq n(A) \leq n$, on déduit que $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$, en notant Ω l'univers associé à cette expérience, on a $n(\Omega) = n$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et pour A, B événements incompatibles, on a $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, donc $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Ces considérations nous conduisent à la définition suivante, où $(\Omega, \mathcal{B})$ est un espace probabilisable.

Définition 21.5 *On appelle probabilité (ou mesure de probabilité) sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{B} \to [0,1]$ telle que :*

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *;*
- *pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles dans $\mathcal{B}$ (i. e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ dans $\mathbb{N}$), la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est convergente et on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

(σ-additivité de $\mathbb{P}$).

Avec ces conditions, on dit que le triplet $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Dans ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Théorème 21.3 *On a les propriétés suivantes, où A, B, A_k désignent des événements dans $\mathcal{B}$:*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ *;*
2. *si A et B sont deux événements incompatibles, on a alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;*
3. *si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, on a alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

4. $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *;*
5. *si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ ($\mathbb{P}$ est croissante) ;*
6. *si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est un système complet d'événements, on a alors pour tout $A \in \mathcal{B}$:*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_k)$$

7. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *;*
8. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = 1.$$

9. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante dans $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(continuité croissante de $\mathbb{P}$) ;

10. *si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante dans* $\mathcal{B}$ *(c'est-à-dire que* $A_{n+1} \subset A_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*) alors :*
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$
(continuité décroissante de $\mathbb{P}$*) ;*
11. *si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'événements, alors :*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$
où $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ *peut valoir* $+\infty$ *(inégalité de Boole). Ce résultat se traduit en disant que* $\mathbb{P}$ *est sous-additive.*

Démonstration.

1. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est formée d'événements deux à deux incompatibles et avec :
$$0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\emptyset) \leq 1$$
on déduit $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. En utilisant la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée d'événements deux à deux incompatibles définie par $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour tout $n \geq 3$, on a :
$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \sum_{n\geq 3} \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$
3. Par récurrence, on en déduit que si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, on a alors :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$
4. Résulte de :
$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup (\Omega \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\Omega \setminus A).$$
5. Pour $A \subset B$, on a $B = A \cup (B \setminus A)$ et :
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$$
6. Si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est un système complet d'événements, on a alors, pour tout $A \in \mathcal{B}$:
$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} A \cap A_k$$
les événements $A \cap A_k$ étant deux à deux incompatibles, ce qui donne :
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A \cap A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_k)$$

7. Comme $(B, \Omega \setminus B)$ et $(A, \Omega \setminus A)$ sont deux systèmes complets d'événements, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap (\Omega \setminus B)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B)$$
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

et en utilisant la partition :

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A)\\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\end{aligned}$$

8. Résulte de $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et de $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
9. $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k,$
10. Comme la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite réelle $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante majorée par 1, donc convergente. En utilisant la partition :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{k+1} \setminus A_k)$$

on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n-1}).$$

avec :

$$\mathbb{P}(A_n \setminus A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})$$

(on a $A_{n-1} \subset A_n$ pour tout $n \geq 1$), ce qui donne :

$$\mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})) = \mathbb{P}(A_n)$$

et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(A_0) + \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

11. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors $(\Omega \setminus A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_n)\right) = 1 - \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\Omega \setminus A_n)\\ &= \lim_{n \to +\infty} (1 - \mathbb{P}(\Omega \setminus A_n)) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

12. De **7.** on déduit que, pour tous A, B dans $\mathcal{B}$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

et par récurrence on déduit que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

ce qui donne :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

(la suite $\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante).

■

Exercice 21.2 *Soit* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Montrer que pour* $A \in \mathcal{B}$ *l'égalité* $\mathbb{P}(A) = 0$ *n'entraîne pas nécessairement que* A *est l'événement impossible.*

Solution 21.2 *On considère l'expérience aléatoire* $\mathcal{E}$ *qui consiste à lancer une infinité de fois une pièce équilibrée et l'événement :*

$$A = \text{« obtenir Pile à tous les lancés »}$$

On $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ *avec :*

$$A_n = \text{« obtenir Pile aux lancés } 1 \text{ à } n \text{ »}$$

Comme $A_{n+1} \subset A_n$*, on a :*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}$$

et $A \neq \emptyset$*. En prenant* $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$ *, on a* $A = \{(P, \cdots, P, \cdots)\}$ *.*

Théorème 21.4 (formule de Poincaré) *Si* $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ *est une suite d'événements dans* $\mathcal{B}$*, on a alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_{k,n}$$

où on a noté pour $1 \leq k \leq n$ *:*

$$p_{k,n} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, c'est clair et pour $n = 2$ c'est fait au **7.** du théorème précédent.
Supposons le résultat acquis pour $n \geq 2$ et soit $(A_k)_{1\leq k\leq n+1}$ une suite d'événements dans $\mathcal{B}$.
En notant $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, le cas $n = 2$, nous donne :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B)$$

et en utilisant l'hypothèse de récurrence, cela donne :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_{k,n} - \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B)$$

où $p_{k,n} = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{n+1} \cap B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap A_{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1})
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}(A_{n+1}) + p_{1,n} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} p_{k,n} - \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_{i_1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&- \sum_{i_1=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{n+1}) \\
&- \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_{i_1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k+1)-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k < n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&+ \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{j=2}^{n+1} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{j-1} < i_j = n+1} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})
\end{aligned}$$

■

Exercice 21.3 *Montrer qu'une application $\mathbb{P} : \mathcal{B} \to [0,1]$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B})$ si, et seulement si :*

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *;*
- *pour tous événements A, B incompatibles dans $\mathcal{B}$, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (on dit que l'application $\mathbb{P}$ est additive) ;*

– *si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante dans* $\mathcal{B}$, *alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Solution 21.3 *On sait déjà que la condition est nécessaire.*
Montrons qu'elle est suffisante.
Avec la deuxième condition, on vérifie facilement par récurrence que si $(B_k)_{0\leq k\leq n}$ *est une suite d'événements deux à deux incompatibles, on a alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k)$$

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements deux à deux incompatibles dans* $\mathcal{B}$. *La suite d'événements* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *est croissante et avec :*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

on déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)\end{aligned}$$

ce qui signifie que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ *est convergente avec :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Exercice 21.4 *Soit* $\mathcal{B} = \{A_1, \cdots, A_m\}$ *une tribu finie sur* Ω. *Montrer qu'une application* $\mathbb{P} : \mathcal{B} \to [0,1]$ *est une probabilité sur l'espace probabilisable* $(\Omega, \mathcal{B})$ *si, et seulement si :*
– $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *;*
– *pour tous événement* A, B *incompatibles, on a* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Solution 21.4 *On sait déjà que la condition est nécessaire.*
Montrons qu'elle est suffisante.
Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante d'événements dans* $\mathcal{B}$. *Comme la tribu* $\mathcal{B}$ *est finie, il existe un nombre fini d'événements* $B_{i_1}, \cdots, B_{i_k}$, *où* $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$, *tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, B_n *soit l'un des* B_{i_j} *et en notant* $p = \max_{1\leq j\leq k} i_j$, *on a :*

$$\forall n \geq p,\ B_p \subset B_n = B_{i_j} \subset B_p$$

donc $B_n = B_p$ *pour* $p \geq n$ *et :*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{j=1}^{p} B_j = B_p$$

ce qui donne :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mathbb{P}(B_p) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

et $\mathbb{P}$ *est une probabilité.*

21.5 Espaces probabilisés discrets

On suppose ici que $\Omega = \{\omega_i \mid i \in I\}$ est dénombrable avec $I \subset \mathbb{N}$ et on prend $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu d'événements.

Le théorème qui suit nous dit que, dans le cas où l'univers est dénombrable, une probabilité est uniquement déterminée par les probabilités élémentaires $\mathbb{P}(\{\omega\})$.

Théorème 21.5 *Une application* $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ *telle que :*

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *si, et seulement si :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Démonstration. Si $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, on a alors pour toute partie A de Ω :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

puisque la réunion est dénombrable et les événements élémentaires $\{\omega\}$ sont deux à deux disjoints.

Réciproquement, soit $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

$$\left(\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1\right) \text{ et } \left(\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})\right)$$

On a $\mathbb{P}(\Omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$ et pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles dans $\mathcal{B}$, on peut écrire (a priori dans $\overline{\mathbb{R}^+} = [0, +\infty]$) :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\omega \in A_n} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \in [0,1] \end{aligned}$$

et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. ■

Exemple 21.5 *Pour* $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ *fini, la probabilité uniforme est définie par :*

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega)}$$

ce qui signifie que pour toute partie A de Ω, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}$$

(c'est le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles).
Dans cette situation, on dit qu'on est dans le cadre de l'équiprobabilité et les outils de dénombrement nous seront utiles pour calculer des probabilités.

Exemple 21.6 *Pour $p \in \left]0,1\right[$ et $\Omega = \{0, \cdots, n\}$ fini, on définit une unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec :*

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\}, \ \mathbb{P}(\{k\}) = C_n^k p^k (1-k)^{n-k}$$

(loi binomiale de paramètres $p \in \left]0,1\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$).
En effet, on a $\mathbb{P}(\{k\}) \geq 0$ pour tout k compris entre 0 et n et :

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-k)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1.$$

Exemple 21.7 *Pour $\lambda > 0$ et $\Omega = \mathbb{N}$, on définit une unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

(loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$).
En effet, on a $\mathbb{P}(\{k\}) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et :

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = e^{-\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Exemple 21.8 *Pour $p \in \left]0,1\right[$ et $\Omega = \mathbb{N}$, on définit une unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ avec :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(\{k\}) = p(1-p)^k$$

(loi géométrique de paramètre $p \in \left]0,1\right[$).
En effet, on a $\mathbb{P}(\{k\}) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et :

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = p \sum_{k \in \mathbb{N}} (1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Exercice 21.5 *Soit l'univers $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Laquelle des fonctions $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ suivantes définit une probabilité sur Ω ?*

1. $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{1}{5}$.
2. $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{1}{8}$.

Solution 21.5

1. $\sum \mathbb{P}(\{\omega_j\}) \neq 1$, *donc ce n'est pas probabilité.*
2. *On a $\mathbb{P}(\{\omega_j\}) \geq 0$ et $\sum \mathbb{P}(\{\omega_j\}) = 1$, donc c'est une probabilité.*

Exercice 21.6 *Soit l'univers* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ *et* $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ *une mesure de probabilité.*

1. *Calculer* $\mathbb{P}(\{\omega_1\})$ *et* $\mathbb{P}(\{\omega_2\})$ *en supposant que :*

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 2\mathbb{P}(\{\omega_2\})$$
$$\mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}$$

2. *Calculer* $\mathbb{P}(\{\omega_1\})$ *en supposant que :*

$$\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(\{\omega_2, \omega_3\}) = \frac{2}{3}$$
$$\mathbb{P}(\{\omega_2, \omega_4\}) = \frac{1}{4}$$

Solution 21.6

1. $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{6}$ *et* $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{3}$.
2. $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{6}$.

Exercice 21.7 *On considère l'expérience aléatoire qui consiste à jeter* 3 *fois une pièce de monnaie équilibrée.*

1. *Donner un univers adapté à cette expérience.*
2. *Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois pile.*
3. *Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois pile.*

Solution 21.7 *Laissée au lecteur.*

Exercice 21.8 *On considère l'expérience aléatoire qui consiste à jeter* 10 *fois une pièce de monnaie équilibrée.*

1. *Calculer la probabilité d'obtenir* 10 *pile consécutifs.*
2. *On répète l'expérience* 4000 *fois. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois* 10 *pile consécutifs.*

Solution 21.8 *Laissée au lecteur.*

Exercice 21.9 *On considère une course de chevaux avec* 10 *partants numérotés de* 1 *à* 10 *et on s'intéresse à l'ordre d'arrivée. On suppose les concurrents de force égale et qu'il n'y a pas d'ex-aequo.*

1. *Donner un univers adapté à cette expérience.*
2. *Calculer la probabilité pour que le numéro* 4 *arrive le premier.*
3. *Calculer la probabilité pour que le numéro* 4 *arrive dans les* 3 *premiers.*

Solution 21.9 *Laissée au lecteur.*

Exercice 21.10 *On considère le jeu de loto où il s'agit de choisir* 6 *numéros distincts parmi les numéros* $\{1, \cdots, 49\}$, *les boules portant les* 49 *numéros étant parfaites.*

1. *Donner un univers adapté à cette expérience.*
2. *Calculer la probabilité de gagner le premier prix avec un bulletin.*

Solution 21.10 *Laissée au lecteur.*

Exercice 21.11 *On pipe un dé de sorte que la probabilité du résultat obtenu quand on jette ce dé soit proportionnelle au résultat (par exemple* 6 *a une probabilité deux fois plus grande que* 3 *de sortir).*

1. *Calculer* $\mathbb{P}(\{k\})$ *pour tout* k *compris entre* 1 *et* 6.
2. *Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.*
3. *Calculer la probabilité d'obtenir un nombre premier.*

Solution 21.11

1. $\mathbb{P}(\{1\}) = p$, $\mathbb{P}(\{k\}) = kp$ *et* $\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(\{k\}) = 1$ *donne* $\mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{k}{21}$.
2. $\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \dfrac{4}{7}$.
3. $\mathbb{P}(\{2,3,5\}) = \dfrac{10}{21}$.

Exercice 21.12 *Qu'elle est la probabilité pour qu'il y ait au moins deux personnes nées le même jour dans un groupe de* $n \geq 2$ *personnes (on fait abstraction des années bissextiles) ?*

Solution 21.12 *Un univers adapté à la situation est* $\Omega = F^E$, *où* E *est l'ensemble des* n *personnes et* F *l'ensemble des* 365 *jours d'une année non bissextile.*
On suppose qu'il y a équiprobabilté des anniversaires.
L'événement qui nous intéresse :

$$A = \text{« deux personnes ont le même jour anniverssaire »}$$

est identifié à l'ensemble :

$$\begin{aligned} A &= \{f \in \Omega \mid \exists n \neq m \text{ dans } E \text{ tel que } f(n) = f(m)\} \\ &= \{f \in \Omega \mid f \text{ est non injective}\} \end{aligned}$$

et la probabilité cherchée est :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)} = 1 - \frac{\operatorname{card}(\Omega \setminus A)}{\operatorname{card}(\Omega)} \\ &= 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n} = \begin{cases} 1 \text{ si } n > 365 \\ 1 - \dfrac{365!}{365^n \cdot (365-n)!} \text{ si } 2 \leq n \leq 365 \end{cases} \end{aligned}$$

Par exemple, pour $n = 23$, *on a :*

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365!}{365^{23} \cdot (365-23)!} \backsimeq 0.507$$

Exercice 21.13 *Formule d'inversion de Pascal*
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de réels ou de complexes telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g_k.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f_k.$$

Solution 21.13 *Laissée au lecteur.*

Exercice 21.14 *On appelle dérangement de l'ensemble* $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ *toute permutation* σ *de cet ensemble n'ayant aucun point fixe (i. e. telle que* $\sigma(i) \neq i$ *pour tout* $i \in I_n$*). Pour tout entier naturel non nul* p*, on note* δ_p *le nombre de dérangements de* I_p*. On a* $\delta_1 = 0$ *et, par convention, on pose* $\delta_0 = 1$*.*

1. *Montrer que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \delta_k.$$
2. *En déduire que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \delta_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
3. *On considère* n *couples qui se présentent à un concours de danse, chaque danseur choisissant une partenaire au hasard.*
   (a) *Quelle est la probabilité* p_n *pour que personne ne danse avec son conjoint ?*
   (b) *Calculer la limite de* p_n *quand* n *tend vers l'infini.*

Solution 21.14

1. $n!$ *qui est le nombre de permutations de* I_n *peut s'écrire* $n! = \sum_{k=0}^{n} \pi_{n,k}$*, où* $\pi_{n,k}$ *est le nombre de permutations de* I_n *ayant exactement* k *points fixes, soit* $\pi_{n,k} = C_n^k \delta_{n-k}$*, ce qui donne :*
$$n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \delta_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} \delta_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \delta_k.$$
2. *Avec la formule d'inversion de Pascal, on a :*
$$\delta_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
3.
   (a) *En supposant qu'on est dans le cadre de l'équiprobabilité, on a :*
$$p_n = \frac{\delta_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
   (b) $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{e}.$

21.6 Probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

On rappelle que la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$ est la tribu engendré par les intervalles. C'est aussi la tribu engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, x]$ ou par ceux de la forme $]x, y]$.

Pour ce paragraphe, $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

Définition 21.6 *La fonction de répartition de la mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ *est l'application :*

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \mathbb{P}(]-\infty, x]) \end{array}$$

Théorème 21.6 *La fonction de répartition d'une mesure de probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ *est croissante, continue à droite en tout point de* $\mathbb{R}$ *et admet une limite à gauche en tout point* x *de* $\mathbb{R}$ *avec :*

$$F\left(x^-\right) = \lim_{t \to x^-} F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x[)$$

On a aussi :

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

et pour tous réels $x < y$, *on a :*

$$\mathbb{P}(\{x\}) = F(x) - F\left(x^-\right)$$

$$\mathbb{P}(]x, y]) = F(y) - F(x)$$

Démonstration. Pour $x \leq y$, on a $]-\infty, x] \subset]-\infty, y]$ et en conséquence $F(x) \leq F(y)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right)_{n \geq 1}$ étant décroissante dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a :

$$\begin{aligned} F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left]-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n \to +\infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

et comme F est croissante, on en déduit que $\lim\limits_{t \to x^+} F(x) = F(x)$, c'est-à-dire que continue à droite en x.

Avec les mêmes arguments, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(]-\infty, x[) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \left]-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right) &= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left]-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{t \to x^-} F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x[)$.

Comme $(]-\infty, -n])_{n \geq 1}$ est décroissante et $(]-\infty, n])_{n \geq 1}$ est croissante dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on a :

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{P}(\emptyset) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1}]-\infty, -n]\right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(]-\infty, -n]) = \lim_{n \to +\infty} F(-n) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} 1 = \mathbb{P}(\Omega) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} \left]-\infty, n\right]\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left]-\infty, n\right]\right) = \lim_{n\to+\infty} F(n) \end{aligned}$$

soit avec la croissance de F, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Enfin :

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}\left(\left]-\infty, x\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left]-\infty, x\right[\cup \{x\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left]-\infty, x\right[\right) + \mathbb{P}(\{x\}) = F\left(x^-\right) + \mathbb{P}(\{x\}). \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} F(y) &= \mathbb{P}\left(\left]-\infty, y\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left]-\infty, x\right] \cup \left]x, y\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left]-\infty, x\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left]x, y\right]\right) = F(x) + \mathbb{P}\left(\left]x, y\right]\right) \end{aligned}$$

■

Exercice 21.15 *Montrer que la fonction de répartition d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est continue en x_0 si, et seulement si, $\mathbb{P}(\{x_0\}) = 0$.*

Solution 21.15 *Comme F est continue à droite en tout point, elle est continue en x_0 si, et seulement si, $F\left(x_0^-\right) = F(x_0)$, ce qui équivaut à $\mathbb{P}(\{x_0\}) = 0$.*

On admet le résultat suivant, qui nous dit qu'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est caractérisée par sa fonction de répartition.

Théorème 21.7 *Si F est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est croissante, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que :*

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

il existe alors une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telle que F soit la fonction de répartition de $\mathbb{P}$.

Corollaire 21.1 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt =$ 1, il existe alors une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telle que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, , \ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

soit la fonction de répartition de $\mathbb{P}$.

Démonstration. La fonction F est croissante, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. ■

Définition 21.7 *Avec les hypothèses et notations du corollaire précédent, on dit que f est une densité de probabilité.*

Dans le cas où $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité de densité f, on a, pour tout réels $x \leq y$:

$$\mathbb{P}(\{x\}) = 0$$

$$\mathbb{P}(]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt,\ \mathbb{P}([x, +\infty[) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt$$

$$\mathbb{P}([x, y]) = \int_{x}^{y} f(t)\,dt$$

Exemple 21.9 *Pour* $\lambda > 0$ *donné, on définit la fonction* f *par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ ,\ f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \ si\ t \geq 0 \\ 0\ si\ \lambda < 0 \end{cases}$$

et la probabilité $\mathbb{P}$ *de densité* f *est dite loi exponentielle de paramètre* λ*. On a, pour tout réel* x *:*

$$F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]) = \begin{cases} \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} \ si\ t \geq 0 \\ 0\ si\ \lambda < 0 \end{cases}$$

Exemple 21.10 *Pour* $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ *donnés, on définit la fonction* f *par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

et la probabilité $\mathbb{P}$ *de densité* f *est dite loi normale (de Gauss) de paramètres* σ *et* μ*. On a, pour tout réel* x *:*

$$F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x]) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$