CALCUL DIFFÉRENTIEL DES FONCTIONS DE $\mathbb{R}^p$ DANS $\mathbb{R}^n$

1. Différentiabilité, dérivées partielles, classe C^1

1.1. Des classiques

Exercice 1.1. — *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continue et* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x, y) = \int_0^x \left(\int_0^y \varphi(u, v)\, dv \right) du.$$

1. *Montrer que* f *est de classe* C^1.
2. *Donner des conditions suffisantes portant sur l'existence et la continuité de certaines dérivées partielles de* φ *pour que* f *soit de clase* C^2; *de classe* C^3; *etc...*

Exercice 1.2. — *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \textit{si} \quad x \neq y \\ f'(x) & \textit{si} \quad x = y \end{cases}.$$

1. *Montrer que* g *est de classe* C^0 *sur* $\mathbb{R}^2$ *si* f *est de classe* C^1.
2. *Montrer que* g *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *si* f *est de classe* C^2.

Exercice 1.3. — *Soit* f *définie par :*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & \textit{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \textit{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Montrer que f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$

1.2. Calcul différentiel en géométrie

Exercice 1.4. — *On appelle inversion de pôle* O *et de rapport* $k \in \mathbb{R}^*$ *du plan euclidien* P, *l'application* F *qui à tout* $m \in P - \{O\}$ *associe le point* M *de la droite* Om *tel que* $\overline{Om}.\overline{OM} = k$.

1. *Montrer que* F *est différentiable sur* $P - \{O\}$ *et calculer sa différentielle.*
2. *En déduire que* F *est une application conforme.*

Exercice 1.5. — *Soit* E, F, G, H *des espaces vectoriels normés, les trois premiers étant de dimension finie,* B *une forme bilinéaire (continue) de* $F \times G$ *dans* H, f, g *deux applications d'un ouvert* $U \subset E$ *dans* F, G *respectivement.*

1. *On suppose que* f *et* g *sont différentiables en* $a \in U$ *; montrer que* $B(f, g)$ *est différentiable en* a *et déterminer sa différentielle.*
2. *Applications ?*

Exercice 1.6. — *Soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *et* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $F(x) = x \wedge f(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^3$. *Montrer que* F *est différentiable sur* $\mathbb{R}^3$ *et calculer sa différentielle.*

Exercice 1.7. — *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on considère, pour* $k \in \mathbb{R}^*$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n - \{O\} & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & k\frac{x}{\|x\|^2} \end{array}$$

où $\|.\|$ *désigne la norme euclidienne dans* $\mathbb{R}^n$.

1. *Montrer que* f *est différentiable sur* $\mathbb{R}^3 - \{O\}$ *et calculer sa différentielle. On procédera par composition.*
2. *Donner une interprétation géométrique de* $df_x = f'(x)$.

Exercice 1.8. — *Soit* N *une norme sur* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ *; montrer que* N *n'est pas différentiable en* $0_{\mathbb{R}^n}$.

Exercice 1.9. — *Soit* $(E, \|.\|_2)$ *un espace préhilbertien réel ou complexe ; montrer que* $\|.\|_2$ *est différentiable sur* $E - \{O_E\}$ *et calculer sa différentielle.*

1.3. Calcul différentiel en algèbre linéaire

Exercice 1.10. — *Soit* $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *l'application déterminant ;*

1. *Montrer que* $\det$ *est différentiable et même de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *Montrer qu'on a le formule :*
$$D_M(\det)(A) = d_A(\det)(M) = \operatorname{tr}\left(\tilde{A}.M\right) \quad \text{où} \quad \tilde{A} = {}^t\mathrm{Com}(A).$$
3. *Application : déterminer la dérivée de l'application* $\varphi_A : t \mapsto \det(A - t.I_n)$.

Exercice 1.11. — *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$

1. *Montrer que* $GL_n(\mathbb{R})$ *est un ouvert de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. *Montrer que l'application* $f : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X^{-1} \end{array}$ *est différentiable et calculer sa différentielle.*

Exercice 1.12. — *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X^2 \end{array}$.
Montrer que f *est différentiable et calculer sa différentielle.*
Généraliser à $X \mapsto X^k$.

Exercice 1.13. — *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA.A \end{array}$.

1. *Montrer que* f *est différentiable et calculer sa différentielle.*
2. *Établir que le noyau de* df_A *est défini par :*
$$\ker df_A = \left\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,;\ {}^tA.H \text{ est antisymétrique}\right\}$$

Exercice 1.14. — *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *de classe* $\mathcal{C}^2$.

1. *On suppose que pour tout* $M \in \mathbb{R}^2$, $df_M \in SO(\mathbb{R}^2)$. *Montrer que* f *est une rotation affine du plan.*
2. *Et si pour tout* $M \in \mathbb{R}^2$, $df_M \in O(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 1.15. — *Soit* $(E,\langle .,.\rangle)$ *un espace euclidien. On dit que* $f : E \longrightarrow E,$ *de classe* C^k $k \geq 2,$ *est une isométrie infinitésimale de* $E,$ *si pour tout* $M \in E,$ $df_M \in O(E)$:

1. *Montrer que la condition précédente peut s'écrire :*

$$\forall M \in E, \quad \forall u,v \in E, \quad \langle D_u f(M), D_v f(M)\rangle = \langle u,v\rangle :$$

   En déduire que pour tout $u,v,w \in E$:

$$\left\langle D^2_{w,u} f(M), D_v f(M)\right\rangle - \left\langle D_u f(M), D^2_{w,v} f(M)\right\rangle = 0.$$

2. *Lemme des Tresses : soit* $\varphi : E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *trilinéaire, symétrique en* v,w *et antisymétrique en* $u,v.$ *Montrer que* $\varphi = 0.$
3. *Appliquer ce qui précède à* $(u,v,w) \longmapsto \left\langle D_u f(M), D^2_{w,v} f(M)\right\rangle$: *En déduire que,* df_M *étant injective, que pour tout* w,v $D^2_{w,u} f(M) = 0,$ *puis que* f *est affine et enfin que* f *est une isométrie affine de* $E.$

2. Laplacien et fonctions harmoniques

Définition 2.1. — *On appelle laplacien d'une application*

$$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \quad \textit{(resp.} \quad f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array} \textit{)}$$

de classe C^2 *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^2$ *(resp.* $\mathbb{R}^3$*); l'application notée* Δf *et définie par*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \textit{(respectivement } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\textit{).}$$

Dans ces conditions f *est dite harmonique si* $\Delta f = 0.$

Exercice 2.1. — *Exemples.*

1. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x,y) = \ln\left|e^{ze^{iz}}\right| \quad \textit{avec} \quad z = x + iy.$$

   Montrer que f *est harmonique sur* $\mathbb{R}^2.$

2. *Montrer que si* f *est harmonique et de classe* $C^3,$ *alors* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}$ *sont harmoniques sur* $\mathbb{R}^2.$
3. *Vérifier que* $f : (x,y,z) \longmapsto \arctan\frac{y}{x} + \arctan\frac{z}{y} + \arctan\frac{x}{z}$ *est harmonique sur* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*.$

Exercice 2.2. — *On considère* f *la composition :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{r} & \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2+z^2} & \longmapsto & f((x,y,z)) = (F \circ r)((x,y,z)) \end{array} :$$

On suppose que F *est de classe* $C^2.$

1. *Calculer* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ *en fonction de* $\frac{dF}{dr}$ *et* $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}.$
2. *Calculer* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ *en fonstions de* $\frac{d^2F}{dr^2}, \frac{dF}{dr}$ *et* $r.$

3. *Montrer que pour tout* $r \neq 0$ *et pour tout* $M(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ *on a :*

$$\Delta f = \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF}{dr}.$$

4. *En déduire toutes les fonctions* F *telles que* f *est harmonique sur* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.3. — *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *et*

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r;\theta) & \mapsto & (x;y) \end{array} \quad \textit{avec} \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & = r\cos\theta \\ y & = r\sin\theta \end{array} \right. .$$

Expliciter les dérivées partielles secondes de $F = f \circ \Phi$. *En déduire que :*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}$$

qu'on appelle l'expression du laplacien en coordonnées polaires.

3. Équations aux dérivées partielles

Exercice 3.1. — *Soit* $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\}$; *existe-t-il* $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $\alpha \neq \beta$ *tel que le changement de variable :*

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (u;v) \end{array} \quad \textit{avec} \quad \left\{ \begin{array}{ll} u & = \alpha x + y \\ v & = \beta x + y \end{array} \right.$$

telle que :

$$(e) \quad a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} & = 0 \\ f & = F \circ \Phi \end{array} \right.$$

Résoudre (e) *dans ce cas ; envisager le cas particulier* $b^2 - ac = 0$.

Exercice 3.2. — *Résoudre les E D P suivantes, en utisant le changement de variable indiqué :*

1. $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$; *en passant en polaires.*
2. $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ *avec* $\left\{ \begin{array}{ll} x & = u \\ y & = uv \end{array} \right.$ $x > 0$.
3. $2\left(y^2 - x\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = y^2 - x$ *avec* $\left\{ \begin{array}{ll} x & = u^2 + v^2 \\ y & = u + v \end{array} \right.$.
4. $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ *avec* $\left\{ \begin{array}{ll} u & = \frac{x}{y} \\ v & = xy \end{array} \right.$ $x > 0; y > 0$.

4. Extremum

Exercice 4.1. — *Déterminer les extrema de la fonction :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x;y) & \mapsto & xy(1 - x - y) \end{array} .$$

Soit T *le compact défini par* $T = \{(x;y);\ x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$; *interpréter le résultat en termes de produit des distances du point de coordonnées* $(x;y)$ *aux côtés du triangle délimitant* T.

Exercice 4.2. — *On considère, dans un espace affine euclidien orienté de dimension* 3, *les droites non coplanaires :*

$$D_1 = D(A, \overrightarrow{u}) \quad et \quad D_2 = D(B, \overrightarrow{v}).$$

Pour $M = A + \lambda \overrightarrow{u}$ *et* $P = B + \mu \overrightarrow{v}$, *montrer que la fonction :*

$$F(\lambda, \mu) = \left\| \overrightarrow{MP} \right\|^2$$

atteint un minimum dont on précisera la valeur en fonction de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *pour un unique couple* $(M_1, P_1) \in D_1 \times D_2$ *tel que la droite* M_1P_1 *soit perpendiculaire commune aux deux droites* D_1 *et* D_2.

Exercice 4.3. — *Déterminer les extrema des fonctions* $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ *définies par les expressions suivantes:*

1: $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$	2: $x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$	3: $xy^2(1 - x - y))$
4: $x^3 + y^3 - 15xy$	5: $x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$	6: $x^2y^3\left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right)$.
7: $x^2y + \ln(1 + y^2)$	8: $x^2(1 + y)^3 + y^4$	9: $2x^4 - 3x^2y + y^2$

Exercice 4.4. — *Soit* $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ *définie par l'expression suivante:*

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz + y - z.$$

1. *Montrer que* f *n'admet qu'un seul point critique* $M_0 = (1, 1, -1)$.
2. *Établir que* f *n'admet pas d'extremum local sur* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.5. — *Vérifier que* $f(0, 0, 0)$ *est un minimum local pour*

$$f : x \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz.$$

Exercice 4.6. — *Déterminer les extrema de la fonction* $f : (x, y, z) \mapsto xye^z + yze^x + zxe^y$.

Exercice 4.7. — *Une boîte en forme de parallélépipède rectangle, sans couvercle, a une surface totale égale à* S. *Trouver, en fonction de* S, *les dimensions optimisant son volume (Rep :* $x = y = \sqrt{\frac{S}{3}}$ *et* $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}}$*).*

Exercice 4.8. — *Comment doit-on choisir un triangle* $A_1A_2A_3$ *(véritable !) pour que la somme des distances d'un point intérieur au triangle aux trois côtés de celui-ci soit constante ?*

Indication : $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}$ *désignant des vecteurs unitaires orthogonaux à des côtés bien choisis et convenablement orientés, on différentiera :*

$$f(M) = \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{n_2}.\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{n_3}.\overrightarrow{MA_3}$$

et on interprétera géométriquement la condition :

$$\overrightarrow{n_1} + \overrightarrow{n_2} + \overrightarrow{n_3} = \overrightarrow{0}.$$