L3 A, M363, contrôle 2
Avril 2014

Exercice 1 *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que si f est Riemann-intégrable sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset]a,b[$, elle l'est alors sur $[a,b]$.*

Solution. Soit n_0 un entier tel que $\frac{1}{2n_0} < b - a$. La fonction f étant intégrable sur chaque segment $I_n = \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$ pour tout $n \geq n_0$, l'ensemble de ses points de discontinuité sur I_n est négligeable. En écrivant que $]a,b[= \bigcup_{n=n_0}^{+\infty} I_n$, on en déduit que l'ensemble de ses points de discontinuité sur $]a,b[$, donc aussi sur $[a,b]$ et f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
On peut aussi montrer ce résultat en utilisant la définition de base des fonctions Riemann-intégrables.
Si f est constante, c'est alors clair. On suppose donc f non constante.
Comme f est bornée, on peut définir les réels $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$.
Soient $\varepsilon > 0$ et $\alpha < \beta$ dans $]a,b[$ tels que $\alpha - a < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ et $b - \beta < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ (f n'est pas constante, donc $m < M$).
Comme f est intégrable sur $[\alpha, \beta]$, il existe deux fonctions en escaliers sur $[\alpha, \beta]$ telles que :

$$\varphi_1 \leq f \leq \psi_1 \text{ sur } [\alpha, \beta]$$

et :

$$0 \leq \int_\alpha^\beta (\psi_1(x) - \varphi_1(x))\, dx \leq \varepsilon$$

En désignant par φ et ψ les fonctions en escaliers définies par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} m \text{ si } x \in [a,\alpha] \cup [\beta, b] \\ \varphi_1(x) \text{ si } x \in [\alpha, \beta] \end{cases} \quad \psi'(x) = \begin{cases} M \text{ si } x \in [a,\alpha] \cup [\beta, b] \\ \psi_1(x) \text{ si } x \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

on a :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ sur } [a,b]$$

et :

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx &= (\alpha - a + b - \beta)(M - m) + \int_\alpha^\beta (\psi_1(x) - \varphi_1(x))\, dx \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Donc f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 2 *Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et par $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ est rationnel où p, q sont entiers naturels non nuls premiers entre eux.*

1. *Justifier le fait que f est Lebesgue-intégrable et calculer son intégrale de Lebesgue.*
2. *Justifier le fait que f est Riemann-intégrable et calculer son intégrale de Riemann.*

Solution.

1. On a $f = 0$ presque partout, donc f est Lebesgue-intégrable d'intégrale nulle.

2. On vérifie d'abord que f est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel de $]0,1[$.

   Un rationnel $r = \dfrac{p}{q} \in \left]0,1\right[\cap \mathbb{Q}$ est limite de la suite d'irrationnels $(x_n)_{n \geq n_0} = \left(r + \dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n \geq n_0}$, où n_0 est choisi assez grand pour que cette suite soit à valeurs dans $]0,1[$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = 0 \neq f(r) = \dfrac{1}{q}$.

   La fonction f n'est donc pas continue en ce point.

   Soit $\varepsilon > 0$. Si $a \in \left]0,1\right[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ et $\eta > 0$ est tel que $]a-\eta, a+\eta[\subset]0,1[$, on note :

$$E = \{x \in \left]a-\eta, a+\eta\right[\mid f(x) > \varepsilon\}$$

Un élément de E est nécessairement rationnel (sinon $f(x) = 0 < \varepsilon$), il s'écrit donc $r = \dfrac{p}{q}$ avec p, q premiers entre eux et $f(r) = \dfrac{1}{q} > \varepsilon$ entraîne que E est vide ou que $1 \leq q < \dfrac{1}{\varepsilon}$ et $1 \leq p < q < \dfrac{1}{\varepsilon}$ (r est strictement compris entre 0 et 1). L'ensemble E est donc vide ou fini. Pour $0 < \eta' < \eta$ assez petit on aura alors $E \cap \left]a-\eta', a+\eta'\right[= \emptyset$, ce qui signifie que $0 \leq f(x) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in \left]a-\eta', a+\eta'\right[$. On a donc ainsi montré que f est continue en α.
La fonction f étant continue presque partout est Riemann-intégrable et son intégrale de Riemann est celle de Lebesgue, à savoir 0.

Exercice 3 *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.*
Pour tout réel $x \in [a,b]$ et tout réel $\eta > 0$, on note :

$$\mathcal{V}_{x,\eta} = \left]x-\eta, x+\eta\right[\cap [a,b]$$

et le diamètre de $f(\mathcal{V}_{x,\eta})$ est le réel :

$$\delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) = \sup_{(y,z) \in (\mathcal{V}_{x,\eta})^2} |f(y) - f(z)|$$

L'oscillation de f en $x \in [a,b]$ est le réel défini par :

$$\omega(x) = \inf_{\eta > 0} \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta}))$$

On note D l'ensemble des points de discontinuité de f et G l'ensemble des points de $]a,b]$ où f a une limite à gauche. On notera $f(x^-)$ la limite à gauche en un point x de $]a,b]$ quand cette dernière existe.

1. *Montrer que :*
$$D = \{x \in [a,b] \mid \omega(x) > 0\}$$
2. *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble :*
$$G_n = \left\{x \in G \mid \omega(x) > \frac{1}{n}\right\}$$
   est dénombrable.
3. *En déduire que $D \cap G$ est dénombrable.*
4. *Montrer que la fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si, et seulement si, l'ensemble $[a,b] \setminus G$ est négligeable (on suppose connu le fait que D est mesurable et le critère de Riemann-intégrabilité de Lebesgue : une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si, et seulement si, elle est presque partout continue).*

Solution.

1. La fonction f est continue en $x \in [a,b]$ si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall t \in \mathcal{V}_{x,\eta},\ |f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
Il en résulte que pour tous y, z dans $\mathcal{V}_{x,\eta}$, on a $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$, donc $\delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) \leq \varepsilon$ et $0 \leq \omega(x) \leq \varepsilon$. Faisant tendre ε vers 0^+, on en déduit que $\omega(x) = 0$.
Réciproquement la condition $\omega(x) = 0$ signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
$$0 \leq \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) < \varepsilon$$
ce qui nous donne pour tout réel $t \in \mathcal{V}_{x,\eta}$:
$$|f(t) - f(x)| \leq \delta(f(\mathcal{V}_{x,\eta})) < \varepsilon$$
et cela signifie que f est continue en x.
2. Si $x \in G_n$, elle est en particulier dans G et la fonction f admet une limite à gauche $f(x^-)$ en x et il existe un réel $\delta_n > 0$ tel que $]x - \delta_n, x[\subset]a,b]$ et :
$$\forall t \in]x - \delta_n, x[,\ \left|f(t) - f\left(x^-\right)\right| < \frac{1}{2n}$$
Il en résulte que pour tous y, z dans $]x - \delta_n, x[$, on a :
$$|f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}$$
ce qui entraîne que $\omega(t) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $t \in]x - \delta_n, x[$. En effet, pour $t \in]x - \delta_n, x[$, il existe $\eta > 0$ assez petit tel que $]t - \eta, t + \eta[\subset]x - \delta_n, x[$, donc $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}$ pour tous y, z dans $]t - \eta, t + \eta[$ et $\omega(t) \leq \delta(f(\mathcal{V}_{t,\eta})) \leq \frac{1}{n}$, ce qui signifie que $t \notin G_n$.
On a donc :
$$x \in G_n \text{ et }]x - \delta_n, x[\cap G_n = \emptyset$$
c'est-à-dire que tout point de G_n est la borne supérieure d'un intervalle ouvert qui ne contient aucun de G_n.
Ces intervalles $]x - \delta_n, x[$, pour $x \in G_n$, étant nécessairement disjoints, ils forment une famille dénombrable (il y a un rationnel dans chaque $]x - \delta_n, x[$).
Il en résulte que G_n est dénombrable.
3. Comme :
$$D \cap G = \{x \in G \mid \omega(x) > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{x \in G \mid \omega(x) > \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n \geq 1} G_n$$
cet ensemble est dénombrable.
4. On a la partition :
$$D = (D \cap G) \cup (D \cap ([a,b] \setminus G)) = (D \cap G) \cup ([a,b] \setminus G)$$
l'ensemble D étant mesurable et l'ensemble $D \cap G$ dénombrable, donc négligeable, ce qui nous donne :
$$\lambda(D) = \lambda([a,b] \setminus G)$$
et D négligeable équivaut à $[a,b] \setminus G$ négligeable.

Exercice 4 *Soient f, g, h les fonctions définies sur $R =]0,1[^2$ par :*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } h(x,y) = \frac{x - y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1. *Montrer que f est intégrable sur R et calculer $\int_R f(x,y)\,dxdy$.*
2.
   (a) *Calculer, pour tout $y \in]0,1[$:*

$$\varphi(y) = \int_0^1 g(x,y)\,dx$$

   (b) *Calculer :*

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dx\right) dy \text{ et } \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dy\right) dx$$

   et conclure.
3. [1]
   (a) *Calculer, pour tout $y \in]0,1[$:*

$$\psi(y) = \int_0^1 h(x,y)\,dx$$

   (b) *Calculer :*

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 h(x,y)\,dx\right) dy \text{ et } \int_0^1 \left(\int_0^1 h(x,y)\,dy\right) dx$$

   et conclure.

Solution.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donc mesurable sur $R \setminus \{(0,0)\}$ et avec $|f(x,y)| \leq 1$, on déduit qu'elle est intégrable.
   Le changement de variable $(x,y) \mapsto (y,x)$ donne :

$$\int_R f(x,y)\,dxdy = \int_R f(y,x)\,dxdy = -\int_R f(x,y)\,dxdy$$

   donc $\int_R f(x,y)\,dxdy = 0$.
2.
   (a) Pour $y \in]0,1[$, on a :

$$\varphi(y) = \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \left[-\frac{x}{x^2 + y^2}\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{1 + y^2}$$

   (b) On a :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dx\right) dy = -\int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = -\frac{\pi}{4}$$

   Comme $g(x,y) = -g(y,x)$, on a :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dy\right) dx = -\int_0^1 \left(\int_0^1 g(y,x)\,dy\right) dx = \frac{\pi}{4}$$

   En conclusion, le théorème de Fubini n'est pas utilisable, ce qui signifie que g n'est pas intégrable sur R.

1. Calculs mis à part, sans intérêt ?

3.

(a) Pour $y \in \left]0,1\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
\psi(y) &= \int_0^1 \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \left[-\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{x=0}^{x=1} - y\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{y^2}\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{y}\int_0^{\frac{1}{y}} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{1+t^2-t^2dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}tdt \\
&= \int \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} + \left[t\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right] - \int \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\psi(y) &= \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{y}\frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}} \\
&= \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{y\sqrt{y^2+1}} \\
&= \frac{1}{y}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \\
&= \frac{1}{y}\frac{\sqrt{y^2+1}-1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}
\end{aligned}$$

cette fonction se prolongeant par continuité en 0 en posant $\psi(0) = -1$.

(b) On a :

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 h(x,y)\,dx\right)dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{y}\frac{\sqrt{y^2+1}-1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\right)dy$$

Le changement de variable $y = \operatorname{sh}(t)$, $dy = \operatorname{ch}(t)\,dt$ donne :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\operatorname{argsh}(1)} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(t)}\frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2(t)+1}-1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(t)+1}} - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(t)+1}}\right)\operatorname{ch}(t)\,dt \\
&= \int_0^{\operatorname{argsh}(1)} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(t)}\frac{\operatorname{ch}(t)-1}{\operatorname{ch}(t)} - \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}\right)\operatorname{ch}(t)\,dt \\
&= \int_0^{\operatorname{argsh}(1)} \left(\frac{\operatorname{ch}(t)-1}{\operatorname{sh}(t)} - 1\right)dt \\
&= \int_0^{\operatorname{argsh}(1)} \left(\frac{\operatorname{ch}^2(t)-1}{\operatorname{sh}(t)(\operatorname{ch}(t)+1)} - 1\right)dt \\
&= \int_0^{\operatorname{argsh}(1)} \left(\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)+1} - 1\right)dt \\
&= \left[\ln(\operatorname{ch}(t)+1) - t\right]_0^{\operatorname{argsh}(1)} = \ln(\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(1))+1) - \operatorname{argsh}(1) - \ln(2)
\end{aligned}$$

avec :

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

et :

$$2\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) = e^{\operatorname{argsh}(x)} + \frac{1}{e^{\operatorname{argsh}(x)}} = x + \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

donc :

$$\begin{aligned}\ln(\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(1)) + 1) &= \ln\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)+1\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{2}+1\right) = \operatorname{argsh}(1)\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 h(x,y)\,dx\right) dy = -\ln(2)$$

Comme $h(x,y) = -h(y,x)$, on a :

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 h(x,y)\,dy\right) dx = -\int_0^1 \left(\int_0^1 h(y,x)\,dy\right) dx = \ln(2)$$

En conclusion, le théorème de Fubini n'est pas utilisable, ce qui signifie que g n'est pas intégrable sur R.

Exercice 5 *$\mathbb{R}$ est muni de la mesure de Lebesgue λ et on se donne deux réels $a < b$.*

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f.*
   Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on définit la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de parties de $[a,b]$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ A_p = \{x \in [a,b] \mid \exists k \geq p\ ;\ |f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon\}$$

   (a) *Montrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_p est mesurable de mesure finie et que $\lim\limits_{p\to+\infty} \lambda(A_p) = 0$ (on pourra utiliser l'intersection $\bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}} A_p$).*

   (b) *Montrer qu'il existe une partie mesurable E_ε de $[a,b]$ telle que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f soit uniforme sur E_ε et $\lambda([a,b] \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ (théorème faible d'Egoroff).*

2.
   (a) *Soient $(A_j)_{1\leq j\leq p}$ une suite finie de parties mesurables de $[a,b]$ deux à deux disjointes telle que $[a,b] = \bigcup\limits_{j=1}^{p} A_j$, $(\alpha_j)_{1\leq j\leq p}$ une suite de réels et $f = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$.*
   Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact K_ε contenu dans $[a,b]$ tel que $\lambda([a,b] \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ et f soit continue sur K_ε.

   (b) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.*
   Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver une partie mesurable F_ε de $[a,b]$ tel que $\lambda([a,b] \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ et f soit continue sur F_ε (théorème de Lusin).

3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

(a) *En notant* $\alpha = f(1)$, *montrer que :*

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = \alpha \cdot r$$

(b) *Justifier l'existence d'un compact* $K \subset [0,1]$ *tel que* $\lambda(K) > \frac{2}{3}$ *et* f *soit continue sur* K.

(c) *En déduire que :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha \cdot x$$

Solution.

1. La fonction f est mesurable comme imite simple de fonctions mesurables.

   (a) Comme, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la fonction $|f - f_k|$ est mesurable, l'ensemble :

   $$E_k = \{x \in I \mid |f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon\} = |f - f_k|^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$$

   est mesurable et il en est de même de la réunion dénombrable $A_p = \bigcup_{k=p}^{+\infty} E_k$. Comme $A_p \subset [a,b]$, il est de mesure finie.
   La suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables de mesure finie étant décroissante, on a :

   $$\lambda\left(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p\right) = \lim_{p\to+\infty} \lambda(A_p)$$

   Dire que $x \in [a,b]$ est dans $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p$ revient à dire que :

   $$\forall p \in \mathbb{N},\ \exists k \geq p\ ;\ |f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon$$

   soit que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x)$, ce qui n'est pas.
   On a donc $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p = \emptyset$ et $\lim_{p\to+\infty} \lambda(A_p) = 0$.

   (b) Comme $\lim_{p\to+\infty} \lambda(A_p) = 0$, il existe un entier p (qui dépend de ε) tel que $\lambda(A_p) < \varepsilon$ et pour tout $x \in E_\varepsilon = [a,b] \setminus A_p$, on a :

   $$\forall k \geq p\ ;\ |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$$

   ce qui signifie que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur E_ε.

2.

   (a) Comme, pour tout entier j compris entre 1 et p, l'ensemble A_j est mesurable de mesure finie, il existe un compact $K_j \subset A_j$ tel que $\lambda(A_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{p}$.
   L'ensemble $K_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{p} K_j \subset [a,b] = \bigcup_{j=1}^{p} A_j$ est alors compact et la restriction de f à chaque K_j est constante égale à α_j, les K_j pour j compris entre 1 et p étant deux à deux disjoints, on en déduit que la restriction de f à K_ε est continue. En effet si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points du compact K_ε qui converge vers $x \in K_\varepsilon$, il existe alors un unique indice j compris entre 1 et p tel que $x \in K_j$. Les compacts K_i étant deux à deux disjoints, on a $d(K_j, k_i) > 0$ pour tout $i \neq j$ et $\delta = \min_{1\leq i\neq j\leq p} d(K_j, k_i) > 0$. Désignant par n_0 un entier tel que $|x_n - x| < \delta$ pour tout $n \geq n_0$, on a nécessairement $x_n \in K_j$ pour tout $n \geq n_0$ (sinon $x_n \in K_i$ avec $i \neq j$ et $|x_n - x| \geq d(K_j, k_i) \geq \delta$), donc $f(x) = \alpha_j = f(x_n)$ pour tout $n \geq n_0$ et $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$, ce qui prouve la continuité de f sur K_ε.

(b) Comme $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est mesurable, elle est limite simple d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées (i. e. $f_n = \sum_{k=1}^{p_n} \alpha_{n,k} \mathbf{1}_{A_{n,k}}$ comme en **2.b.**).
En effet c'est vrai pour les fonctions mesurables à valeurs positives et dans le cas général, on écrit $f = f_+ - f_-$ où $f_+ = \max(f,0)$ et $f_- = \max(-f,0)$ sont mesurables positives.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un compact $K_{n,\varepsilon} \subset [a,b] = \bigcup_{j=1}^{p_n} A_{n,j}$ tel que $\lambda([a,b] \setminus K_{n,\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$ et f_n est continue sur $K_{n,\varepsilon}$.
Par ailleurs, on peut trouver un mesurable $E_\varepsilon \subset [a,b]$ tel que $\lambda([a,b] \setminus E_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ et la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur E_ε.
On pose :

$$F_\varepsilon = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_{n,\varepsilon} \right) \cap E_\varepsilon$$

L'ensemble $F_\varepsilon \subset [a,b]$ est mesurable, f est continue sur F_ε comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues et on a :

$$\begin{aligned} \lambda([a,b] \setminus F_\varepsilon) &= \lambda\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ([a,b] \setminus K_{n,\varepsilon}) \right) \cup ([a,b] \setminus E_\varepsilon) \right) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda([a,b] \setminus K_{n,\varepsilon}) + \lambda([a,b] \setminus E_\varepsilon) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

3.

(a) En prenant $(x,y) = (0,0)$ dans (1), on obtient $f(0) = 2f(0)$, ce qui équivaut à $f(0) = 0$.
En prenant $(x,y) = (x,-x)$ dans (1), on obtient $f(x) + f(-x) = 0$. On a donc $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que la fonction f est impaire.
De (1) on déduit par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \alpha \cdot n$$

En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, que $f(1) = f\left(n\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, on déduit que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Il en résulte que pour tout rationnel positif $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$f(r) = f\left(p\frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1) = \alpha \cdot r$$

Enfin avec l'imparité de f, on déduit que ce dernier résultat est encore vrai pour les rationnels négatifs.

(b) La restriction de f à $[0,1]$ étant mesurable, le théorème de Lusin nous dit qu'il existe une partie mesurable F de $[0,1]$ telle que $\lambda([0,1] \setminus F) < \frac{1}{6}$ et f soit continue sur F. On peut aussi trouver un compact $K \subset F$ tel que $\lambda(F \setminus K) < \frac{1}{6}$, ce qui nous donne :

$$1 - \lambda(K) = \lambda([0,1] \setminus K) = \lambda([0,1] \setminus F) + \lambda(F \setminus K) < \frac{1}{3}$$

soit $\lambda(K) > \frac{2}{3}$ et f est continue sur K.

(c) Comme K est compact non vide, f est continue en un point x_0 et on en déduit classiquement que f est continue sur $\mathbb{R}$ et linéaire.
