Agrégation interne 2008, épreuve 1

1 Énoncé

Notations

On désigne par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On désigne par E^* l'espace vectoriel dual de E. On désigne par $\mathrm{End}\,(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E et par $\mathrm{GL}\,(E)$ le groupe des endomorphismes inversibles de E. On note 1_E l'application identique de E.

Si u est un endomorphisme de E, on note ${}^t u$ l'endomorphisme de E^* transposé de u ; si X est une partie de $\mathrm{End}\,(E)$, on note ${}^t X$ l'ensemble des transposés des éléments de X.

Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel E et soit x un vecteur de E. Pour alléger les notations, il nous arrivera d'écrire ux pour désigner l'image $u\,(x)$ du vecteur x par l'application u.

Soit n un entier ≥ 1 ; on désigne par $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées complexes à n lignes et n colonnes. On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la i-ème ligne et j-ème colonne qui est égal à 1. On note $\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles et 1_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{C})$.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathbb{C}$-algèbres possédant chacune un élément unité ; un *morphisme unitaire* d'algèbres de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire qui préserve les produits et les éléments unités.

Les deux premières parties sont indépendantes. La sixième partie est indépendante des précédentes.

Partie I

1. Soit W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $p_1, \cdots, p_n$ des endomorphismes de W. Pour $i = 1, \cdots, n$, on note W_i l'image de p_i. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   (i) L'espace vectoriel W est somme directe des sous-espaces W_i et, pour $i = 1, \cdots, n$, p_i est le projecteur d'image W_i parallèlement à la somme directe des W_j, $j \neq i$.

   (ii) Pour $i = 1, \cdots, n$, on a $p_i^2 = p_i$; pour $j \neq i$, on a $p_i p_j = 0$; et on a $p_1 + \cdots + p_n = 1_W$.

2. Soit toujours W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, soit n un entier ≥ 1 et soit $\rho : M_n\,(\mathbb{C}) \to \mathrm{End}\,(W)$ un morphisme unitaire d'algèbres.

   (a) Pour $i = 1, \cdots, n$, on note p_i l'endomorphisme $\rho\,(E_{i,i})$. Démontrer que les endomorphismes p_i satisfont à la condition (ii) de la question **I.1.**

   (b) Pour $i = 1, \cdots, n$, on note W_i l'image de p_i. Démontrer que la restriction de $\rho\,(E_{i,i})$ à W_j induit un isomorphisme de W_j sur W_i.

   (c) Dans la suite de cette question, ou fixe une base $(w_1, \cdots, w_r)$ de l'espace vectoriel W_1. On pose
   $$v_1 = w_1,\ v_2 = \rho\,(E_{2,1})\,w_1, \cdots,\ v_n = \rho\,(E_{n,1})\,w_1.$$
   Démontrer que la famille $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre et que, pour tous entiers s, t et k compris entre 1 et n, on a
   $$\rho\,(E_{s,t})\,v_k = \delta_{t,k} v_s,$$
   où le symbole de Kronecker $\delta_{t,k}$ vaut 1 lorsque $t = k$, et vaut 0 sinon.

   (d) Plus généralement, pour $1 \leq j \leq r$, on note V_j le sous-espace vectoriel de W engendré par les vecteurs $\rho\,(E_{k,1})\,w_j$, pour $k = 1, \cdots, n$. Démontrer que W est somme directe des sous-espaces V_j, $1 \leq j \leq r$.

(e) Démontrer qu'il existe une base de l'espace vectoriel W dans laquelle, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice de l'endomorphisme $\rho(M)$ est la matrice diagonale par blocs :

$$\operatorname{diag}(M, \cdots, M) = \begin{pmatrix} M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M \end{pmatrix}.$$

Partie II

Dans cette partie, on désigne par E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'une partie X de $\operatorname{End}(E)$ est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de X sont $\{0\}$ et E. On désigne par $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\operatorname{End}(E)$ qui contient 1_E, et on se propose de démontrer qu'elle est égale à $\operatorname{End}(E)$.

1. Soient u et v des éléments de $\operatorname{End}(E)$ qui commutent entre eux. Démontrer que tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.
2. Soit X une partie irréductible de $\operatorname{End}(E)$. Démontrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent à tous les éléments de X est l'ensemble des endomorphismes scalaires.
3. Rappelons que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\operatorname{End}(E)$ contenant 1_E. Démontrer que ${}^t\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\operatorname{End}(E^*)$.
4. Soit x un vecteur non nul de E. Préciser à quoi est égal le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}x$ de E.
5. Soit $u \in \operatorname{End}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Démontrer qu'il existe un vecteur y de E et une forme linéaire $\ell \in E^*$ tels que l'on ait $u(x) = \ell(x)\, y$ pour tout $x \in E$.
6. Démontrer que, si l'algèbre $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme de rang 1, alors elle les contient tous. En déduire que l'on a alors $\mathcal{A} = \operatorname{End}(E)$.
7. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme u dont le rang r est ≥ 2, et on se propose de démontrer qu'il existe un endomorphisme $u' \in \mathcal{A}$, non nul, dont le rang est strictement plus petit que r.
   (a) Démontrer qu'il existe x et y dans E et v dans $\mathcal{A}$ tels que le couple de vecteurs $(u(x), u(y))$ soit libre et que l'on ait $vu(x) = y$.
   (b) Démontrer qu'il existe alors $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que la restriction de l'endomorphisme $uv - \lambda 1_E$ à l'image $u(E)$ de u ne soit ni injective ni nulle.
   (c) Vérifier que l'endomorphisme $u' = uvu - \lambda u$ convient.
8. Démontrer finalement que $\mathcal{A} = \operatorname{End}(E)$.

Partie III

Soit n un entier ≥ 1. On appelle dérivation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ toute application linéaire d de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tous X et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on ait

$$d(XY) = d(X)\,Y + X d(Y).$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; démontrer que l'application d_A de $\mathcal{M}M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $d_A(X) = AX - XA$ est une dérivation.
2. Dans cette question, on se propose de démontrer que toute dérivation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de la forme ci-dessus.

(a) Soit $d : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une dérivation. Démontrer que l'application ρ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par :

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} X & d(X) \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

est un morphisme unitaire d'algèbres.

(b) Démontrer qu'il existe une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où A, B, C, D appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que l'on ait, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$P\rho(X) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} P.$$

(c) Conclure.

Partie IV

Soit n un entier ≥ 1. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de M, somme des coefficients diagonaux de M.

1.

(a) Démontrer que l'application ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\psi(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY),$$

est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

(b) Démontrer que, si $(X_1, \cdots, X_{n^2})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une autre base $\left(X'_1, \cdots, X'_{n^2}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tous entiers i et j compris entre 1 et n^2, on ait

$$\psi\left(X_i, X'_j\right) = \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker).}$$

2. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\sum_{1 \leq i \leq n^2} X_i A X'_i = \mathrm{Tr}(A)\ \mathbf{1}_n.$$

Partie V

On considère dans cette partie un sous-groupe G de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ayant la propriété suivante :

(P) il existe un entier $m \geq 1$ tel que l'on ait $g^m = \mathbf{1}_n$ pour tout $g \in G$.

On fixe l'entier m.

1. Démontrer que chaque élément g de G est diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?
2. Démontrer que l'ensemble $\{\mathrm{Tr}(g) \mid g \in G\}$ est fini.
3. On suppose, dans cette question, que l'ensemble G, considéré comme ensemble d'endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ (en identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$), est irréductible.

(a) Démontrer que l'ensemble G contient une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Démontrer que l'ensemble G est fini (on pourra utiliser les questions **IV.1.** et **V.2**.).

4. Dans cette question, on ne suppose plus que l'ensemble G soit irréductible.

   (a) Démontrer qu'il existe des entiers non nuls p et q, avec $p+q=n$, et une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ dans laquelle chaque élément g de G s'écrit par blocs :
   $$\begin{pmatrix} T(g) & U(g) \\ 0 & V(g) \end{pmatrix}$$
   où $T(g) \in M_p(\mathbb{C})$ et $V(g) \in M_q(\mathbb{C})$.

   (b) Posons $G_1 = \{g \in G \mid T(g) = \mathbf{1}_p\}$ et $G_2 = \{g \in G \mid V(g) = \mathbf{1}_q\}$. Démontrer que G_1 et G_2 sont des sous-groupes distingués de G. Déterminer $G_1 \cap G_2$.

   (c) Soient K un groupe et H un sous-groupe de K. L'indice de H dans K est le cardinal de l'ensemble quotient K/H. Etablir le résultat général suivant : Soient K un groupe, K_1 et K_2 des sous-groupes distingués de K, tous deux d'indice fini dans K ; alors l'indice de $K_1 \cap K_2$ dans K est fini.

   (d) Conclure.

Partie VI

Soient n et m des entiers ≥ 1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$; on définit la matrice $A * B \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$ par :
$$A * B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que l'application ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$ définie par $\phi(A,B) = A*B$ est bilinéaire et satisfait à :
   $$(A*B)(A'*B') = AA' * BB'$$
   pour toutes matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B, B' \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.

2. Démontrer que l'image de l'application ϕ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$.
   On suppose désormais $n = m$.

3. Posons
   $$P = \sum_{1 \leq i,j \leq n} E_{i,j} * E_{j,i}.$$

   (a) Démontrer que l'on a $P^2 = 1_{n^2}$.

   (b) Démontrer que, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :
   $$P(A*B)P = B*A.$$

4. Soient A et $B \in M_n(\mathbb{C})$.

   (a) Calculer la trace et le déterminant de la matrice $A*B$.

   (b) Déterminer les valeurs propres de $A*B$ en fonction de celles de A et de B.

2 Corrigé

Partie I

1. Supposons que $W = \bigoplus_{j=1}^{n} W_j$, chaque p_j étant le projecteur sur W_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} W_i$.

   Comme chaque p_j est un projecteur, on a $p_j^2 = p_j$.

   Tout $x \in W$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$ avec $x_j = p_j(x) \in W_j$, ce qui se traduit aussi par :
$$\forall x \in W,\ \mathbf{1}_W(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j(x)$$
   ou encore par $1_W = \sum_{j=1}^{n} p_j$.

   Pour $j \neq i$, on a :
$$\forall x \in W,\ (p_i \circ p_j)(x) = p_i(p_j(x)) = p_i(x_j) = 0$$
   par définition des projections p_i, ce qui se traduit par $p_i \circ p_j = 0$, ou encore par $W_j \subset \ker(p_i) = \bigoplus_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} W_k$.

   Réciproquement supposons les conditions (ii) vérifiées.

   La condition $p_j^2 = p_j$, pour j compris entre 1 et n, nous dit que p_j est un projecteur sur $W_j = \operatorname{Im}(p_j)$ et la condition $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$, nous dit que $W_j \subset \ker(p_i)$.

   De :
$$x = \mathbf{1}_W(x) = p_1(x) + \cdots + p_n(x)$$
   pour tout $x \in W$, on en déduit que $W = W_1 + \cdots + W_n$. Si $\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$, avec $x_j \in W_j$ pour j compris entre 1 et n, on a alors $p_i(x_j) = p_i \circ p_j(x_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $p_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} p_i(x_j) = p_i(x_i) = x_i = 0$ pour tout i compris entre 1 et n. La somme $W = \sum_{j=1}^{n} W_j$ est donc directe.

   Enfin avec $W_j \subset \ker(p_i)$ pour $j \neq i$, on déduit que $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} W_j \subset \ker(p_i)$ et avec :
$$\dim(\ker(p_i)) = \dim(W) - \dim(W_i) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \dim(W_j)$$
   on déduit que $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} W_j \subset \ker(p_i)$ et p_i est le projecteur sur W_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} W_j$.

2. Faisons tout d'abord quelques remarques sur les matrices E_{ij}.

   En notant $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice E_{ij} est définie par :
$$\forall k \in \{1, \cdots, n\},\ E_{ij}e_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j, \\ e_i \text{ si } k = j. \end{cases}$$
   (la colonne $k \neq j$ de E_{ij} est nulle et la colonne j a tous ses termes nuls sauf celui en ligne i qui vaut 1), ou encore :
$$E_{ij} = (0, \cdots, 0, \underset{\underset{j}{\uparrow}}{e_i}, 0, \cdots, e_n)$$

le vecteur e_i étant placé en colonne j.
Pour i, j, p, q dans $\{1, \cdots, n\}$ on a :

$$E_{i,j} \cdot E_{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq p \\ E_{i,q} & \text{si } j = p \end{cases}$$

En effet, pour k compris entre 1 et n, on a :

$$\begin{aligned} E_{i,j} \cdot E_{p,q} e_k = E_{ij} \left(E_{pq} e_k \right) &= \begin{cases} E_{ij} \left(0 \right) = 0 \text{ si } k \neq q \\ E_{ij} \left(e_p \right) \text{ si } k = q \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq p \\ E_{i,q} \left(e_k \right) & \text{si } j = p \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Des égalités $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ pour tout i, $E_{i,i} \cdot E_{j,j} = 0$, pour $i \neq j$ et $1_n = \sum\limits_{j=1}^{n} E_{j,j}$, on déduit que $p_i^2 = p_i$, $p_i \circ p_j = 0$ et $1_W = p_1 + ... + p_n$. Donc les conditions (ii) et (i) sont vérifiées.

(b) Pour tout $x \in W$, on a :

$$\rho \left(E_{i,j} \right) (x) = \rho \left(E_{i,i} E_{i,j} \right) (x) = \rho \left(E_{i,i} \right) \left[\rho \left(E_{i,j} \right) (x) \right] \in \operatorname{Im} \rho \left(E_{i,i} \right) = W_i,$$

donc $\operatorname{Im} \rho \left(E_{i,j} \right) \subset W_i$ et la restriction $p_{i,j}$ de $\rho \left(E_{i,j} \right)$ à W_j est une application linéaire de W_j dans W_i. Avec :

$$\forall x \in W_j,\ p_{j,i} \circ p_{i,j} (x) = \rho \left(E_{j,i} E_{i,j} \right) (x) = \rho \left(E_{j,j} \right) (x) = p_j (x) = x$$

($p_j = \rho \left(E_{j,j} \right)$ est le projecteur sur W_j parallèlement à $\bigoplus\limits_{k \neq j} W_k$), on déduit que $p_{i,j}$ est injective et avec $p_{i,j} \circ p_{j,i} (x) = x$ pour tout $x \in W_i$, on déduit que $p_{i,j}$ est surjective. Donc $p_{i,j}$ est un isomorphisme de W_j sur W_i d'inverse $p_{j,i}$.

(c) On a $v_1 = w_1 \in W_1$ et pour j compris entre 2 et n, $v_j = \rho \left(E_{j,1} \right) w_1 \in W_j$.
Si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont des complexes tels que $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = 0$, on a alors $\lambda_j v_j = 0$ pour tout j puisque $W = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} W_j$. On a donc $\lambda_1 w_1 = 0$ avec $w_1 \neq 0$, donc $\lambda_1 = 0$ et pour j compris entre 2 et n, $\rho \left(E_{j,1} \right) \left(\lambda_j w_1 \right) = 0$, l'application linéaire $\rho \left(E_{j,1} \right)$ étant bijective de W_1 sur W_j, ce entraîne $\lambda_j w_1 = 0$ et $\lambda_j = 0$.
La famille $(v_1, \cdots, v_n)$ est donc libre.
Pour s, t et k compris entre 1 et n, on a :

$$\begin{aligned} \rho \left(E_{s,t} \right) v_k &= \rho \left(E_{s,t} \right) \rho \left(E_{k,1} \right) w_1 \\ &= \rho \left(E_{s,t} E_{k,1} \right) w_1 = \delta_{t,k} v_s, \end{aligned}$$

avec $E_{s,t} E_{k,1} = \delta_{t,k} E_{s,1}$, ce qui donne :

$$\rho \left(E_{s,t} \right) v_k = \delta_{t,k} \rho \left(E_{s,1} \right) w_1 = \delta_{t,k} v_s.$$

(d) On a $W = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} W_k$ et pour tout k compris entre 1 et n, $\left(\rho \left(E_{k,1} \right) w_j \right)_{1 \leq j \leq r}$ est une base de W_k puisque la restriction de $\rho \left(E_{k,1} \right)$ à W_1 réalise un isomorphisme de W_1 sur W_k. Donc tout $x \in W$ s'écrit de manière unique, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ avec $x_k \in W_k$ qui s'écrit de manière unique $x_k = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_{k,j} \rho \left(E_{k,1} \right) w_j$. Donc tout $x \in W$ s'écrit de manière unique :

$$x = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} \lambda_{k,j} \rho \left(E_{k,1} \right) w_j.$$

ce qui signifie que la famille

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \left(\rho\left(E_{k,1}\right)w_j\right)_{1\leq k\leq n, 1\leq j\leq r} \\ &= \left(\rho\left(E_{1,1}\right)w_1, \rho\left(E_{2,1}\right)w_1, \cdots, \rho\left(E_{n,1}\right)w_1, \cdots, \rho\left(E_{1,1}\right)w_r, \rho\left(E_{2,1}\right)w_r, \cdots, \rho\left(E_{n,1}\right)w_r\right) \\ &= \left(w_1, \rho\left(E_{2,1}\right)w_1, \cdots, \rho\left(E_{n,1}\right)w_1, \cdots, w_r, \rho\left(E_{2,1}\right)w_r, \cdots, \rho\left(E_{n,1}\right)w_r\right)\end{aligned}$$

($p_1 = \rho\left(E_{1,1}\right)$ est un projecteur sur W_1 de base $(w_1, \cdots, w_r)$) est une base de W. Et de :

$$V_j = \operatorname{Vect}\left\{\rho\left(E_{k,1}\right)w_j \mid k = 1, \cdots, n\right\}$$

on déduit que $W = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$ ($\mathcal{B}_j = \left(\rho\left(E_{k,1}\right)w_j\right)_{1\leq k\leq n}$ est une base de V_j et $\mathcal{B}$ est la réunion de ces bases).

On peut remarquer que $\dim(W) = \sum_{j=1}^{r} \dim(V_j) = r\cdot n$.

(e) Comme ρ est un morphisme d'algèbre et $\left(E_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il nous suffit de vérifier le résultat pour chaque $M = E_{i,j}$.
De :

$$\rho\left(E_{i,j}\right)\left(\rho\left(E_{k,1}\right)w_p\right) = \rho\left(E_{i,j}E_{k,1}\right)(w_p) = \delta_{j,k}\rho\left(E_{i,1}\right)w_p = \begin{cases} 0 \text{ si } k\neq j \\ \rho\left(E_{i,1}\right)w_p \text{ si } k = j\end{cases}$$

pour $1\leq k\leq n$ et $1\leq p\leq r$, on déduit que chaque espace V_p est stable par $\rho\left(E_{i,j}\right)$ (puisque $\mathcal{B}_p = \left(\rho\left(E_{k,1}\right)w_p\right)_{1\leq k\leq n}$ est une base de V_p) et la matrice de la restriction $\rho\left(E_{i,j}\right)$ à V_j dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$(0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k=j}}{e_i}, 0, \cdots, e_n) = E_{i,j}$$

Il en résulte que la matrice de $\rho\left(E_{i,j}\right)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\operatorname{diag}\left(E_{i,j}, \cdots, E_{i,j}\right)$.

Partie II

1. Pour tout $u\in \operatorname{End}(E)$ et toute valeur propre $\lambda\in\mathbb{C}$, on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre de u associé à λ.
On a alors, pour u, v dans $\operatorname{End}(E)$ qui commutent :
$$\forall x\in E_u(\lambda),\ u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$
ce qui signifie que $v(x)\in E_u(\lambda)$. On a donc $v(E_u(\lambda))\subset E_u(\lambda)$, ce qui prouve que tout sous-espace propre de u est stable par v. Comme u et v jouent des rôles symétriques, tout sous-espace propre de v est aussi stable par u.
2. Soient $u\in \operatorname{End}(E)$ commutant avec tous les éléments de X et λ une valeur propre complexe de u. La question précédente nous dit que l'espace propre $E_u(\lambda)$ est stable par tous les éléments de X. Comme $E_u(\lambda)\neq\{0\}$ et X est irréductible, on a nécessairement $E_u(\lambda) = E$ et u est l'homothétie de rapport λ.
Réciproquement si u est une homothétie, elle commute avec tout endomorphisme et en particulier avec tous les éléments de X.
3. On rappelle que pour tout $v\in \operatorname{End}(E)$, ${}^t u\in \operatorname{End}(E^*)$ est défini par ${}^t u(\ell)(x) = \ell\circ u(x)$, que pour toute partie X, $X^\perp$ est la partie de E^* formée des formes linéaires qui s'annule sur X (c'est un sous-espace vectoriel de E^*) et pour toute partie Y de E^*, Y° est l'ensemble des éléments de E annulés par les formes linéaires qui sont dans Y (c'est un sous-espace vectoriel de E).
Il est facile de vérifier que ${}^t\mathcal{A} = \{{}^t u \mid u\in\mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\operatorname{End}(E^*)$. En effet :

– ${}^t\mathcal{A} \neq \emptyset$ puisque ${}^t1_E = 1_{E^*} \in {}^t\mathcal{A}$;
– pour ${}^tu$, ${}^tv$ dans ${}^t\mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $u + \lambda v$ est dans $\mathcal{A}$ et ${}^tu + \lambda\, {}^tv = {}^t(u + \lambda v) \in {}^t\mathcal{A}$;
– pour ${}^tu$, ${}^tv$ dans ${}^t\mathcal{A}$, on a $v \circ u$ est dans $\mathcal{A}$ et ${}^tu \circ {}^tv = {}^t(v \circ u) \in {}^t\mathcal{A}$.

Il reste à montrer que ${}^t\mathcal{A}$ est irréductible.
Si G est un sous-espace de E^* stable par tous les éléments de ${}^t\mathcal{A}$, alors G^o est un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$. En effet pour $x \in G^o$ et $u \in \mathcal{A}$, pour tout $\ell \in G$, on a $\ell(u(x)) = {}^tu(\ell)(x) = 0$ puisque ${}^tu(\ell) \in G$, ce qui signifie que $u(x) \in G^o$. Comme $\mathcal{A}$ est irréductible, on a nécessairement $G^o = \{0\}$ ou $G^o = E$ et $G = (G^o)^\perp = \{0_E\}^\perp = E^*$ ou $G = (G^o)^\perp = E^\perp = \{0_{E^*}\}$.

4. $\mathcal{A}x = \{v(x) \mid v \in \mathcal{A}\}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par $\mathcal{A}$ non réduit à $\{0\}$ puisque $1_E \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}x \ni 1_E(x) = x \neq 0$. Il en résulte que $\mathcal{A}x = E$ puisque $\mathcal{A}$ est irréductible.

5. Dire que $u \in \mathrm{End}(E)$ est de rang 1 signifie que $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension 1. Il existe donc un vecteur non nul $y \in E$ tel que $\mathrm{Im}\, u = \mathbb{C}y$ et pour tout $x \in E$ il existe un unique scalaire $\ell(x)$ tel que $u(x) = \ell(x)\, y$. De la linéarité de u, on déduit facilement que ℓ est une forme linéaire. En effet, pour x, x' dans E et λ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$u(x + \lambda x') = \ell(x + \lambda x')\, y$$

et :

$$\begin{aligned} u(x + \lambda x') &= u(x) + \lambda u(x') \\ &= \ell(x)\, y + \lambda \ell(x')\, y = (\ell(x) + \lambda \ell(x'))\, y \end{aligned}$$

ce qui implique $\ell(x + \lambda x') = \ell(x) + \lambda \ell(x')$ puisque $y \neq 0$.

6. Si $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme u de rang 1, il existe alors un vecteur $y \in E \setminus \{0\}$ et une forme linéaire $\ell \in E^* \setminus \{0\}$ tels que $u(x) = \ell(x)\, y$ pour tout $x \in E$.
Si $u' \in \mathrm{End}(E)$ est de rang 1, il s'écrit $u'(x) = \ell'(x)\, y'$ avec $y' \in E \setminus \{0\}$ et $\ell' \in E^* \setminus \{0\}$.
Comme $\mathcal{A}y = E$ (question **II.4.**), il existe $v \in \mathcal{A}$ tel que $y' = v(y)$ et comme ${}^t\mathcal{A}$ est une sous-algèbre unitaire de $\mathrm{End}(E^*)$ (question **II.3.**), on a aussi $E^* = {}^t\mathcal{A}\ell$ (question **II.4.** pour l'espace E^*) et il existe $w \in \mathcal{A}$ tel que ${}^tw(\ell) = \ell \circ w = \ell'$. On a alors pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \ell'(x)\, y' = \ell(w(x))\, v(y) = v(\ell(w(x))\, y) \\ &= v(u(w(x))) = v \circ u \circ w(x) \end{aligned}$$

et $u' = v \circ u \circ w \in \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ contient tous les endomorphismes de E de rang 1.
D'autre part, on a $\mathcal{A} \subset \mathrm{End}(E)$ et en remarquant que tout $u \in \mathrm{End}(E)$ est somme d'endomorphismes de rang 1 (en choisissant une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a $u(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, e_i = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$, les u_i étant de rang 1), on déduit que $\mathcal{A} = \mathrm{End}(E)$.

7.

(a) Comme $\mathrm{rg}(u) \geq 2$, il existe $x, y \in E$ tels que $(u(x), u(y))$ soit libre. On a nécessairement $u(x) \neq 0$ et **II.4.** nous dit que $\mathcal{A}u(x) = E$, ce qui entraîne l'existence de $v \in \mathcal{A}$ tel que $y = vu(x)$.

(b) Comme $uv(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(u)$, la restriction $uv|_{\mathrm{Im}\, u}$ de uv à $\mathrm{Im}(u)$ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(u)$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $uv|_{\mathrm{Im}\, u}$, l'endomorphisme $(uv - \lambda \mathbf{1}_E)|_{\mathrm{Im}\, u}$ n'est pas injectif et avec :

$$(uv - \lambda \mathbf{1}_E)|_{\mathrm{Im}\, u}(u(x)) = uvu(x) - \lambda u(x) = u(y) - \lambda u(x) \neq 0$$

(puisque $(u(x), u(y))$ est libre), on déduit que $(uv - \lambda \mathbf{1}_E)|_{\mathrm{Im}\, u}$ n'est pas l'application nulle.

(c) Comme $u'(x) = (uvu - \lambda u)(x) = u(y) - \lambda u(x) \neq 0$, on a $u' \neq 0$.
On a $\operatorname{Im}(u') = \operatorname{Im}((uv - \lambda \mathbf{1}_E) u) = \operatorname{Im}((uv - \lambda \mathbf{1}_E)|_{\operatorname{Im} u})$ avec $(uv - \lambda \mathbf{1}_E)|_{\operatorname{Im} u} : \operatorname{Im} u \to \operatorname{Im} u$ non injectif, donc

$$\operatorname{rg}(u') = \dim(\operatorname{Im}(uv - \lambda \mathbf{1}_E)|_{\operatorname{Im} u}) < \dim(\operatorname{Im} u) = \operatorname{rg}(u).$$

8. Comme $\mathcal{A}$ contient 1_E, on a $\mathcal{A} \neq \{0\}$. La question **II.7.** nous dit que $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme de rang 1 et **II.6.** nous dit alors que $\mathcal{A} = \operatorname{End}(E)$.

Partie III

1. Il est clair que $d_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est linéaire. En effet, pour X, Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} d_A(X + \lambda Y) &= A(X + \lambda Y) - (X + \lambda Y) A \\ &= (AX - XA) + \lambda (AY - YA) \\ &= d_A(X) + \lambda d_A(Y), \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} d_A(XY) &= AXY - XYA \\ &= (AX - XA) Y + X(AY - YA) \\ &= d_A(X) Y + X d_A(Y) \end{aligned}$$

pour tous X, Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. d_A est donc une dérivation.

2.

(a) La linéarité de ρ se déduit de celle de d.
De $d(\mathbf{1}_n) = d(\mathbf{1}_n \mathbf{1}_n) = 2d(\mathbf{1}_n)$, on déduit que $d(\mathbf{1}_n) = 0$ et $\rho(\mathbf{1}_n) = 1_{2n}$.
Pour X, Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \rho(X) \rho(Y) &= \begin{pmatrix} X & d(X) \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & d(Y) \\ 0 & Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} XY & X d(Y) + d(X) Y \\ 0 & XY \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} XY & d(XY) \\ 0 & XY \end{pmatrix} = \rho(XY) \end{aligned}$$

Donc ρ est un morphisme unitaire d'algèbres.

(b) La question **I.2.e.** nous dit qu'on peut trouver une base de $\mathbb{C}^{2n}$ dans laquelle, pour toute $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice de l'endomorphisme $\rho(X)$ est de la forme :

$$\operatorname{diag}(X, X) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}.$$

Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ (l'inverse de la matrice de changement de bases) telle que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \rho(X) = P^{-1} \operatorname{diag}(X, X) P,$$

soit $P\rho(X) = \operatorname{diag}(X, X) P$.

(c) Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & d(X) \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} AX = XA \\ Ad(X) + BX = XB \\ CX = XC \\ Cd(X) + DX = XD. \end{cases}$$

La matrice A commute donc avec toutes les matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et en conséquence c'est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $A = aI_n$.(question **II.2.** appliquée à $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$). De même $C = cI_n$ avec $c \in \mathbb{C}$. Comme P est bijective, on a $A \neq 0$ ou $C \neq 0$. En supposant $A \neq 0$ (le cas $C \neq 0$ cas se traite de même), on a pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$d(X) = A^{-1}(XB - BX) = \frac{1}{a}(XB - BX) = HX - XH$$

où $H = -\frac{1}{a}B$, soit $d = d_H$.

Partie IV

1.

(a) De la bilinéarité du produit de matrice et la linéarité de la trace, on déduit que l'application ψ est bilinéaire et avec $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$ pour toutes matrices X, Y, on déduit que ψ est symétrique.
Si $X = ((x_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est telle que $\psi(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY) = 0$ pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a alors pour tous i, j compris entre 1 et n, $x_{ij} = \mathrm{Tr}(XE_{ji}) = 0$ et $X = 0$.
L'application ψ est donc non dégénérée.
On peut aussi dire, pour la non dégénérescence que $\mathrm{Tr}(XX^*) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |x_{ij}|^2 = 0$ ($X^* = {}^t\overline{X}$ est la matrice adjointe de X) et $X = 0$.

(b) Dire que ψ est non dégénérée équivaut à dire que l'application $\widetilde{\psi}$ qui associe à toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la forme linéaire $\widetilde{\psi}(X) : Y \mapsto \psi(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY)$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur son dual $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
En désignant par $(X_k^*)_{1 \leq k \leq n^2}$ la base duale de $(X_k)_{1 \leq k \leq n^2}$, la famille de matrices $(X'_k)_{1 \leq k \leq n^2}$ définie par $X'_k = \widetilde{\psi}^{-1}(X_k^*)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour i, j compris entre 1 et n^2, on a :

$$\delta_{ij} = X_j^*(X_i) = \widetilde{\psi}\left(X'_j\right)(X_i) = \psi\left(X'_j, X_i\right) = \psi\left(X_i, X'_j\right).$$

2. Soit $A' = \sum_{i=1}^{n^2} X_i A X'_i$. Nous allons d'abord montrer que A' est une matrice scalaire, en vérifiant qu'elle commute à toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Comme $(X'_k)_{1 \leq k \leq n^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit $X = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i X'_i$ et avec $\psi\left(X_i, X'_j\right) = \delta_{ij}$, on déduit que $\lambda_i = \psi(X, X_i)$ pour tout i, soit :

$$X = \sum_{i=1}^{n^2} \psi(X, X_i) X'_i = \sum_{i=1}^{n^2} \mathrm{Tr}(XX_i) X'_i.$$

Le même raisonnement avec la base $(X_k)_{1\leq k\leq n^2}$ nous donne aussi :

$$X=\sum_{i=1}^{n^2}\psi\left(X,X_i'\right)X_i=\sum_{i=1}^{n^2}\operatorname{Tr}\left(XX_i'\right)X_i.$$

On a alors :

$$A'X=\sum_{i=1}^{n^2}X_iAX_i'X$$

avec :

$$X_i'X=\sum_{j=1}^{n^2}\operatorname{Tr}\left(\left(X_i'X\right)X_j\right)X_j'$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
A'X&=\sum_{i=1}^{n^2}X_iA\left(\sum_{j=1}^{n^2}\operatorname{Tr}\left(\left(X_i'X\right)X_j\right)X_j'\right)\\
&=\sum_{1\leq i,j\leq n^2}X_iA\operatorname{Tr}\left(\left(X_i'X\right)X_j\right)X_j'=\sum_{1\leq i,j\leq n^2}\operatorname{Tr}\left(\left(X_i'X\right)X_j\right)X_iAX_j'\\
&=\sum_{j=1}^{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n^2}\operatorname{Tr}\left(X_i'XX_j\right)X_i\right)AX_j'
\end{aligned}$$

avec $\operatorname{Tr}\left(X_i'XX_j\right)=\operatorname{Tr}\left(XX_jX_i'\right)$ et donc :

$$\begin{aligned}
A'X&=\sum_{j=1}^{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n^2}\operatorname{Tr}\left(XX_jX_i'\right)X_i\right)AX_j'\\
&=\sum_{j=1}^{n^2}XX_jAX_j'=X\sum_{j=1}^{n^2}X_jAX_j'=XA'
\end{aligned}$$

(on a utilisé $XX_j=\sum\limits_{i=1}^{n^2}\operatorname{Tr}\left(XX_jX_i'\right)X_i$).
Il existe donc une constante λ_A telle que $A'=\lambda_AI_n$ et on a :

$$\begin{aligned}
n\lambda_A=\operatorname{Tr}\left(\lambda_AI_n\right)=\operatorname{Tr}\left(A'\right)&=\sum_{i=1}^{n^2}\operatorname{Tr}\left(X_iAX_i'\right)=\sum_{i=1}^{n^2}\operatorname{Tr}\left(X_i'X_iA\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n^2}\operatorname{Tr}\left(AX_i'X_i\right)=\operatorname{Tr}\left(A\sum_{i=1}^{n^2}X_i'X_i\right)\\
&=\operatorname{Tr}\left(AI_n'\right)=\operatorname{Tr}\left(A\lambda_{I_n}I_n\right)=\lambda_{I_n}\operatorname{Tr}\left(A\right)
\end{aligned}$$

soit $\lambda_A=\dfrac{\lambda_{I_n}}{n}\operatorname{Tr}\left(A\right)$ pour toute matrice A. Prenant $A=I_n$, on a :

$$n\lambda_{I_n}=\operatorname{Tr}\left(I_n'\right)=\sum_{i=1}^{n^2}\operatorname{Tr}\left(X_iX_i'\right)=n^2$$

(puisque $\operatorname{Tr}\left(X_iX_i'\right)=\psi\left(X_i,X_i'\right)=1$ pour tout i) et $\lambda_{I_n}=n$.

On a donc en définitive $\lambda_A=\operatorname{Tr}\left(A\right)$ et $A'=\sum\limits_{i=1}^{n^2}X_iAX_i'=\operatorname{Tr}\left(A\right)I_n$.

Partie V

1. Comme $g^m - \mathbf{1}_n = 0$, l'endomorphisme g est annulé par le polynôme $X^m - 1$ qui est scindé et à racines simples et il est en conséquence diagonalisable.
   Ses valeurs propres étant racines de $X^m - 1$, ce sont des racines m-èmes de l'unité.
2. Pour $g \in G$, $\mathrm{Tr}\,(g)$ est une somme de n racines m-èmes de l'unité, et comme il a m racines m-èmes de l'unité, l'ensemble $\{\mathrm{Tr}(g) \mid g \in G\}$ est fini de cardinal au plus égal à m^n.
3.
   (a) Le sous-espace vectoriel V_G engendré par G est une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{C})$ puisque G contient $\mathbf{1}_n$ et est stable pour le produit. Cette algèbre est irréductible puisque G l'est et on a $G = \mathcal{M}_n\,(\mathbb{C})$ (identifié à $\mathrm{End}\,(\mathbb{C}^n)$) d'après **II.8.**
   Donc G engendre $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{C})$ et on peut en extraire une base $(X_k)_{1\leq k\leq n^2}$.

   (b) Soit $(X'_k)_{1\leq k\leq n^2}$ la base de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{C})$ déduite de $(X_k)_{1\leq k\leq n^2}$ comme en **IV.1.b.** On alors pour tout $g \in G$:
   $$g = \sum_{i=1}^{n^2} \mathrm{Tr}\,(X_i g)\, X'_i$$
   (question **IV.2.**) et G est fini puisque les $\mathrm{Tr}\,(X_i g)$ sont dans $\{\mathrm{Tr}(h) \mid h \in G\}$ qui est fini.
4.
   (a) On suppose que G n'est pas irréductible. Il existe alors un sous-espace F de $\mathbb{C}^n$ de dimension $p \in \{1, \cdots, n-1\}$ stable par toutes les applications de G. On se donne une base $(\nu_k)_{1\leq k\leq p}$ de F que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (\nu_k)_{1\leq k\leq n}$ de $\mathbb{C}^n$ et dans cette base, la matrice de $g \in G$ est de la forme :
   $$\begin{pmatrix} T\,(g) & U\,(g) \\ 0 & V\,(g) \end{pmatrix}.$$
   avec $T\,(g) \in \mathcal{M}_p\,(\mathbb{C})$ et $V\,(g) \in \mathcal{M}_q\,(\mathbb{C})$, où $q = n - p$.

   (b) Comme $g \in G$ est inversible, on a $\det(T\,(g)) \times \det(V\,(g)) = \det(g) \neq 0$ et les matrices$T\,(g)$ et $V\,(g)$ sont inversibles. Pour g_1, g_2 dans G, on a le produit par blocs :
   $$\begin{aligned} g_1 g_2 &= \begin{pmatrix} T\,(g_1) & U\,(g_1) \\ 0 & V\,(g_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T\,(g_2) & U\,(g_2) \\ 0 & V\,(g_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T\,(g_1)\,T\,(g_2) & T\,(g_1)\,U\,(g_2) + U\,(g_1)\,V\,(g_2) \\ 0 & V\,(g_1)\,V\,(g_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   et donc :
   $$T\,(g_1)\,T\,(g_2) = T\,(g_1 g_2) \text{ et } V\,(g_1)\,V\,(g_2) = V\,(g_1 g_2)\,.$$
   ce qui signifie que les applications $T : G \to \mathrm{GL}\,(p, \mathbb{C})$ et $V : G \to \mathrm{GL}\,(q, \mathbb{C})$ sont des morphismes de groupes et G_1, G_2 qui sont les noyaux respectifs de ces morphismes sont des sous-groupes distingués de G.
   Pour $g \in G_1 \cap G_2$, on a $T\,(g) = 1_p$, $V\,(g) = 1_q$ et :
   $$g^m = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & mU\,(g) \\ 0 & \mathbf{1}_q \end{pmatrix} = \mathbf{1}_n,$$
   ce qui entraîne $U\,(g) = 0$. On a donc $G_1 \cap G_2 = \{\mathbf{1}_n\}$.

(c) L'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & K & \to & K/K_1 \times K/K_2 \\ & x & \mapsto & (\dot{x}, \overline{x}) \end{array}$$

est un morphisme de groupes de noyau $\operatorname{Ker}(\Phi) = K_1 \cap K_2$. Par décomposition canonique de Φ, on obtient un morphisme injectif de groupes :

$$\widetilde{\Phi} : K/K_1 \cap K_2 \to K/K_1 \times K/K_2.$$

Les groupes quotients K/K_1 et K/K_2 étant finis, il en est de même de $K/(K_1 \cap K_2)$ qui est isomorphe à un sous-groupe de $K/K_1 \times K/K_2$. L'indice dans K de $K_1 \cap K_2$ est donc fini.

(d) On déduit de ce qui précède que tout sous groupe G de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ qui vérifie la propriété (P) est fini. Pour ce faire, on raisonne par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, tout $g \in G \subset \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ est uniquement déterminée par $g(\overrightarrow{i}) = \lambda \overrightarrow{i}$ et comme $g^m = 1_1$, λ est une racine m-ème de l'unité et en conséquence ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Le groupe G est donc fini de cardinal au plus égal à m.
Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$ et soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ qui vérifiant la propriété (P).
Si G est irréductible, le résultat de la question **V.3.** nous dit que G est fini.
Sinon on construit des sous-groupes G_1 et G_2 comme en **V.4.b.** et en utilisant la décomposition canonique de $T : G \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$, on déduit que G/G_1 est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ qui vérifie la condition (P) avec $p < n$ et G/G_1 est un groupe fini. Donc G_1 est d'indice fini dans G.
De même G_2 est d'indice fini dans G, et avec **V.4.c.** on déduit que $G/(G_1 \cap G_2)$ est fini.
Enfin avec $G_1 \cap G_2 = \{\mathbf{1}_n\}$ (question **V.4.b.**), on déduit que G est fini.

Partie VI

1. Pour i, j compris entre 1 et n, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{ij} : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times M_m(\mathbb{C}) & \to & M_m(\mathbb{C}) \\ & (A, B) & \mapsto & a_{ij} B \end{array}$$

étant bilinéaire, on en déduit la bilinéarité de ϕ.
En effectuant les produits de matrices par blocs, on a :

$$\begin{aligned} (A * B)(A' * B') &= \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{11}B' & \cdots & a'_{1n}B' \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{n1}B' & \cdots & a'_{nn}B' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}a'_{k1}\right) BB' & \cdots & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}a'_{kn}\right) BB' \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}a'_{k1}\right) BB' & \cdots & \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}a'_{kn}\right) BB' \end{pmatrix} = AA' * BB' \end{aligned}$$

2. On note respectivement $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $(E'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ et $(E''_{i,j})_{1 \leq i,j \leq nm}$ les bases canoniques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M_m(\mathbb{C})$ et $M_{nm}(\mathbb{C})$. La matrice :

$$\phi(E_{i,j}, E'_{k,\ell}) = E_{i,j} * E'_{k,\ell} = (\delta_{i,j} E'_{k,\ell})_{1 \leq i,j \leq n}$$

a tous ses coefficients nuls sauf celui qui est placé en $(m(i-1)+k)$-ème ligne et $(m(j-1)+\ell)$-ème colonne, ce qui signifie que :

$$E_{i,j} * E'_{k,\ell} = E''_{m(i-1)+k,m(j-1)+\ell}$$

et toutes les matrices $E''_{i,j}$ de la base canonique de $M_{nm}(\mathbb{C})$ appartiennent à l'image de ϕ (tout couple d'entiers (p,q) où $1 \leq p,q \leq nm$ peut s'écrire $(m(i-1)+k, m(j-1)+\ell)$). On a donc $\mathrm{Im}(\phi) = M_{nm}(\mathbb{C})$.

3.

(a) On a, en utilisant le résultat de **VI.1.** :

$$\begin{aligned} P^2 &= \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} E_{i,j} * E_{j,i}\right)\left(\sum_{1\leq k,\ell\leq n} E_{k,\ell} * E_{\ell,k}\right) \\ &= \sum_{i,j,k,\ell} E_{i,j}E_{k,\ell} * E_{j,i}E_{\ell,k} = \sum_{i,j,k,\ell} \delta_{j,k}E_{i,\ell} * \delta_{i,\ell} * E_{j,k} \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} E_{i,i} * E_{j,j} = \sum_{p=1}^{n^2} E''_{p,p} = \mathbf{1}_{n^2}. \end{aligned}$$

(b) Par bilinéarité, il suffit de montrer le résultat pour les matrices de base.
Pour $A = E_{p,q}$ et $B = E_{r,s}$, on a :

$$\begin{aligned} P(A*B) &= \sum_{1\leq i,j\leq n} (E_{i,j} * E_{j,i})(E_{p,q} * E_{r,s}) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} (E_{i,j}E_{p,q} * E_{j,i}E_{r,s}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} (\delta_{j,p}E_{i,q} * \delta_{i,r}E_{j,s}) \\ &= E_{r,q} * E_{p,s} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} P(A*B)P &= \sum_{1\leq i,j\leq n} (E_{r,q} * E_{p,s})(E_{i,j} * E_{j,i}) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} (E_{r,q}E_{i,j} * E_{p,s}E_{j,i}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} (\delta_{q,i}E_{r,j} * \delta_{s,j}E_{p,i}) \\ &= E_{r,s} * E_{p,q} = B * A. \end{aligned}$$

4.

(a) On a

$$\mathrm{Tr}(A*B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}(a_{ii}B) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$$

et

$$\det(A*B) = \det(A*\mathbf{1}_n)(\mathbf{1}_n * B) = \det(A*\mathbf{1}_n) \times \det(\mathbf{1}_n * B).$$

La matrice $1_n * B$ est carrée d'ordre n^2, diagonale par blocs avec n blocs égaux à B situés sur la diagonale principale, soit :

$$\mathbf{1}_n * B = \begin{pmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix}$$

donc $\det(\mathbf{1}_n * B) = (\det B)^n$. La question **VI.3.** nous dit qu'il existe une matrice involutive P telle que $P(A*B)P = B*A$, ce qui entraîne :

$$\det(A * \mathbf{1}_n) = \det P \times \det(\mathbf{1}_n * A) \times \det P = (\det A)^n$$

et $\det(A*B) = (\det A)^n (\det B)^n$.

(b) Une matrice carrée à coefficient dans $\mathbb{C}$ étant trigonalisable, il existe des matrices triangulaires supérieures :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} \mu_1 & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & s_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

et des matrices inversibles Q et R telles que $A = Q^{-1}TQ$ et $B = R^{-1}SR$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ celles de B. On a alors :

$$A * B = \left(Q^{-1}TQ\right) * \left(R^{-1}SR\right) = \left(Q^{-1} * R^{-1}\right)(T*S)(Q*R).$$

Avec :

$$\left(Q^{-1} * R^{-1}\right)(Q*R) = \left(Q^{-1}Q\right) * \left(R^{-1}R\right) = \mathbf{1}_n * \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_{n^2}$$

on déduit que $Q^{-1} * R^{-1} = (Q*R)^{-1}$ et :

$$A * B = (Q*R)^{-1}(T*S)(Q*R)$$

ce qui signifie que $A*B$ est semblable à $T*S$ et en conséquence ces valeurs propres sont celles de $T*S$. Enfin, comme $T*S$ est triangulaire supérieure de termes diagonaux $\lambda_i\mu_j$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on déduit que les valeurs propres de $A*B$ sont ces $\lambda_i\mu_j$.