**Agrégation Interne**

**Matrices compagnons, sous-espaces et endomorphismes cycliques**

Ce problème est l'occasion de revoir le cours sur les notions suivantes :

- l'anneau euclidien $\mathbb{K}[X]$ ;
- calcul matriciel ;
- matrices compagnons ;
- polynômes d'endomorphismes ;
- polynôme minimal et caractéristique, valeurs propres, vecteurs propres ;
- endomorphismes diagonalisables ;
- théorème de Cayley-Hamilton ;
- dualité ;
- décomposition de Jordan ;
- topologie de $\mathcal{L}(E)$ ;
- connexité.

## Notations

- $\mathbb{K}$ est un corps commutatif ;
- $\mathbb{K}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ;
- pour tout entier naturel $p$, $\mathbb{K}_p[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré au plus égal à $p$ (avec la convention $\deg(0) = -\infty$) ;
- pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on note :

$$(P) = P \cdot \mathbb{K}[X] = \{P \cdot Q \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

  l'idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par $P$ ;
- pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ ;
- $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ ;
- $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de $E$ ;
- $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est l'espace dual de $E$ ;
- $Id$ est l'endomorphisme identité ;
- le polynôme caractéristique unitaire de $u \in \mathcal{L}(E)$ est défini par :

$$P_u(X) = \det(XId - u)$$

- on dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'ordre $p \geq 1$ si on a $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

On rappelle que le transposé d'un endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ est l'endomorphisme ${}^t v \in \mathcal{L}(E^*)$ défini par :

$$\forall \varphi \in E^*, \quad {}^t v(\varphi) = \varphi \circ v$$

et que l'orthogonal dans $E$ d'une partie non vide $Y$ de $E^*$ est l'ensemble :

$$Y^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in Y,\ \varphi(x) = 0\}$$

Dans ce qui suit, $u$ est un endomorphisme de $E$.

## – I – Polynôme minimal

Si $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on rappelle que $P(u)$ est l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k$$

où :

$$\begin{cases} u^0 = Id \\ \forall k \in \mathbb{N},\ u^{k+1} = u^k \circ u \end{cases}$$

On note :

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

la sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par $u$.

Cette algèbre est commutative. Précisément on a :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2,\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (QP)(u)$$

1. Montrer que l'ensemble :

$$I_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$$

   est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit au polynôme nul et qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_u$ non constant tel que $I_u = (\pi_u)$.

   On dit que $I_u$ est **l'idéal annulateur** de $u$ et $\pi_u$ est le **polynôme minimal** de $u$.

   On définit de manière analogue l'idéal annulateur et le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. **Quelques exemples.**
   (a) Quels sont les endomorphismes de $E$ ayant un polynôme minimal de degré égal à 1 ?
   (b) Quels sont les valeurs possibles du polynôme minimal d'un projecteur ?
   (c) Calculer le polynôme minimal d'un endomorphisme nilpotent d'ordre $p \geq 1$.
   (d) Calculer le polynôme minimal d'un endomorphisme diagonalisable.
3. Montrer que si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$, le polynôme minimal de la restriction de $u$ à $F$ divise alors celui de $u$.
4. Montrer que les valeurs propres de $u$ sont les racines de son polynôme minimal.
5. Montrer que $u$ est inversible si, et seulement si, $\pi_u(0) \neq 0$ et que dans ce cas, le polynôme minimal de $u^{-1}$ est $\pi_{u^{-1}}(X) = \dfrac{1}{\pi_u(0)} X^p \pi_u\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
6. En notant $p$ le degré de $\pi_u$, montrer que $\mathbb{K}[u] = \mathbb{K}_{p-1}[u]$ et que c'est un espace vectoriel de dimension $p$ isomorphe à l'espace quotient $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{(\pi_u)}$.
7. Montrer que $u$ et ${}^t u \in \mathcal{L}(E^*)$ ont même idéal annulateur et même polynôme minimal.
8. Montrer que si $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ est premier avec $\pi_u$, alors $P(u)$ a même polynôme minimal que $u$.

## – II – Matrices compagnons

À tout polynôme unitaire $P(X) = X^p - \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ de degré $p \geq 1$, on associe sa **matrice compagnon** définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

Une telle matrice est dite de **Frobénius**.

Pour $p = 1$, $P(X) = X - a_0$ et $C_P = (a_0)$.

Pour cette partie, on se fixe un polynôme unitaire $P$ de degré $p \geq 1$, $C = C_P$ est sa matrice compagnon et $u$ est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ de matrice $C$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq p}$.

1.
   (a) Montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a :
   $$(Q(u) = 0 \text{ dans } \mathcal{L}(E)) \Leftrightarrow (Q(u)(e_1) = 0 \text{ dans } E)$$
   (b) Montrer que $P$ est le polynôme minimal de $u$.
   (c) Montrer que $P$ est le polynôme caractéristique de $u$, puis que $\det(u) = (-1)^{p+1} a_0$.
   (d) Montrer que $C$ est inversible si, et seulement si, $P(0) \neq 0$. Donner, dans ce cas, une expression de $C^{-1}$.
   (e) Quel est le rang de $C$ ?
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $u$ (s'il en existe). Montrer que l'espace propre associé est de dimension 1 et donner un générateur de cet espace propre en fonction des coefficients de $P$.
3. Montrer que $C$ est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme $P$ a $p$ racines distinctes.
   Dans ce cas, en notant $P(X) = \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$ où les scalaires $\lambda_k$ sont deux à deux distincts, en diagonalisant d'abord la matrice ${}^t C$, montrer que $W^{-1} C W = D$, où :
   $$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \text{ et } W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{p-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_p & \cdots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$$

Étudier le cas de $P(X) = X^p - 1$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4. On désigne ici par $E$ l'espace vectoriel quotient $\dfrac{\mathbb{K}[X]}{(P)}$, par $u$ l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$\forall \overline{Q} \in E,\ u\left(\overline{Q}\right) = \overline{XQ}$$

et par $(P_k)_{1\leq k\leq p}$ la famille de polynômes définie par :

$$P_k(X) = X^{p-k} - a_{p-1}X^{p-k-1} - \cdots - a_{k+1}X - a_k \ (1 \leq k \leq p-1)$$
$$P_p(X) = 1$$

(base de Horner).

   (a) Vérifier que $\mathcal{B}_0 = \left(\overline{X^{k-1}}\right)_{1\leq k\leq p}$ et $\mathcal{B}_1 = \left(\overline{P_k}\right)_{1\leq k\leq p}$ sont deux bases de $E$. Préciser la matrice de passage $P$ de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$.

   (b) Vérifier que $C$ est la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}_0$ et que sa transposée ${}^tC$ est la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}_1$. Il en résulte que $C$ est semblable à sa transposée. Précisément, on vérifiera qu'il existe une matrice symétrique inversible $U$ telle que ${}^tC = U^{-1}CU$.

   (c) On suppose que $P$ a $p$ racines distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$. Montrer que $u$ est diagonalisable et qu'une base de vecteurs propres est $\left(\overline{L_k}\right)_{1\leq k\leq p}$, où :

$$L_k(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} (X - \lambda_j)$$

   (base de Lagrange).

## – III – Sous-espaces cycliques

Pour tout vecteur $x \in E$, on note :

$$I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u)(x) = 0\}$$

et :

$$E_x = \mathrm{Vect}\left\{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\right\}$$

est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\left(u^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

On dit que $E_x$ est le **sous espace cyclique** (ou $u$-monogène) de $E$ engendré par $x$.

On dit qu'un **sous-espace cyclique** $E_x$, où $x \in E$, est **maximal** s'il n'existe pas de sous-espace cyclique de dimension strictement supérieure.

1. Préciser $I_x$ et $E_x$, pour $x = 0$.
2. Soit $x \in E \setminus \{0\}$.

   (a) Montrer que $I_x$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit au polynôme nul et qu'il existe un unique polynôme unitaire non constant $\pi_x \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $I_x = (\pi_x)$. Justifier le fait que $\pi_x$ divise $\pi_u$.
   On dit que $\pi_x$ est le **polynôme minimal de** $x$ **relativement à** $u$.
   On notera $p_x$ le degré de $\pi_x$.

   (b) Montrer que l'ensemble $\{\pi_x \mid x \in E \setminus \{0\}\}$ est fini et notant $\{\pi_{x_1}, \cdots, \pi_{x_m}\}$ cet ensemble, on a :

$$(\pi_u) = \bigcap_{x\in E\setminus\{0\}} (\pi_x) = \bigcap_{k=1}^{m} (\pi_{x_k})$$

   c'est-à-dire que :

$$\pi_u = \mathrm{ppcm}\{\pi_x \mid x \in E \setminus \{0\}\} = \mathrm{ppcm}(\pi_{x_1}, \cdots, \pi_{x_m})$$

(c) En désignant par $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ une base de $E$, montrer que $\pi_u = \text{ppcm}\,(\pi_{e_1}, \cdots, \pi_{e_n})$.

(d) Montrer que :
$$E_x = \{P\,(u)\,(x) \mid P \in \mathbb{K}\,[X]\} = \{P\,(u)\,(x) \mid P \in \mathbb{K}_{p_x-1}\,[X]\}$$
que cet espace est de dimension $p_x$ et que $\mathcal{B}_x = \left(u^k\,(x)\right)_{0\leq k\leq p_x-1}$ en est une base.

(e) Montrer que $E_x$ est isomorphe à l'espace quotient $\dfrac{\mathbb{K}\,[X]}{(\pi_x)}$.

(f) Montrer que $E_x$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ contenant $x$ et stable par $u$, puis en désignant par $u_x$ la restriction de $u$ à $E_x$, montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}\,[X]$, on a :
$$(P\,(u_x) = 0 \text{ dans } \mathcal{L}\,(E_x)) \Leftrightarrow (P\,(u)\,(x) = 0 \text{ dans } E)$$

(g) Vérifier que la matrice de $u_x$ dans la base $\mathcal{B}_x$ de $E_x$ est la matrice compagnon du polynôme $\pi_x$. Il en résulte que $\pi_x$est le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de $u_x$.

(h) Déterminer l'ensemble des vecteurs $y$ de $E$ tels que $E_y = E_x$.

3. En utilisant les sous espaces cyclique, montrer que $P_u\,(u) = 0$, où $P_u$ désigne le polynôme caractéristique de $u$ (théorème de Cayley-Hamilton).

4. Soient $r \geq 2$ et $x_1, \cdots, x_r$ dans $E \setminus \{0\}$ tels que les polynômes $\pi_{x_1}, \cdots, \pi_{x_r}$ soient deux à deux premiers entre eux. Montrer que :

(a) $x = \sum\limits_{k=1}^{r} x_k \neq 0$.

(b) $\pi_x = \text{ppcm}\,(\pi_{x_1}, \cdots, \pi_{x_r}) = \prod\limits_{k=1}^{r} \pi_{x_k}$.

(c) $E_x = \bigoplus\limits_{k=1}^{r} E_{x_k}$.

5. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On suppose qu'il existe un entier $r \geq 2$ et des polynômes unitaires non constants $\pi_1, \cdots, \pi_r$ deux à deux premiers entre eux tels que $\pi_x = \prod\limits_{k=1}^{r} \pi_k$. Montrer qu'il existe des vecteurs $x_1, \cdots, x_r$ dans $E \setminus \{0\}$ tels que $\pi_{x_k} = \pi_k$ pour tout $k$ compris entre 1 et $r$ et $E_x = \bigoplus\limits_{k=1}^{r} E_{x_k}$.

6. Réduction des matrices compagnons.

(a) Soient $P = X^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}\,[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ et $C_P$ sa matrice compagnon. En écrivant la décomposition de $P$ en facteurs irréductibles, $P = \prod\limits_{k=1}^{r} P_k^{\alpha_k}$, où les $P_k$ sont irréductibles deux à deux distincts dans $\mathbb{K}\,[X]$ et les $\alpha_k$ des entiers non nuls, montrer que la matrice $C_P$ est semblable à la matrice diagonale par blocs :
$$\begin{pmatrix} C_{P_1^{\alpha_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_{P_r^{\alpha_r}} \end{pmatrix}$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la matrice compagnon $C_{(X-\lambda)^\alpha}$ est semblable dans $\mathcal{M}_\alpha\,(\mathbb{K})$ à la matrice de Jordan :
$$J_{\lambda,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(c) On suppose $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ scindé sur $\mathbb{K}$, soit $P(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ où les $\lambda_k$ sont des scalaires deux à deux distincts et les $\alpha_k$ des entiers naturels non nuls.
Montrer que la matrice compagnon $C_P$ est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à la matrice de Jordan par blocs :

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_r,\alpha_r} \end{pmatrix}$$

7.
   (a) Soient $r \geq 2$ et $x_1, \cdots, x_r$ dans $E \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\pi_x = \operatorname{ppcm}(\pi_{x_1}, \cdots, \pi_{x_r})$.
   (b) En déduire qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$.
   (c) Montrer qu'un sous-espace cyclique $E_x$ est maximal si, et seulement si, $\pi_x = \pi_u$.

8. On propose ici une autre preuve de l'existence de $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$.
Comme le polynôme minimal de $u$ est non constant, il peut s'écrire sous la forme $\pi_u = QP^m$, où $P$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, $m$ un entier naturel non nul et $Q$ un polynôme unitaire premier avec $P$.
   (a) Montrer que $\ker(P^m(u)) \neq \{0\}$ et qu'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\pi_x = P^m$.
   (b) En déduire qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$.

9. On suppose ici que le corps $\mathbb{K}$ est infini et on se propose de montrer d'une autre manière qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$.
   (a) Montrer que si $(F_k)_{1 \leq k \leq r}$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $E = \bigcup_{k=1}^{r} F_k$, il existe alors un indice $k$ tel que $E = F_k$ (c'est ici qu'intervient le fait que $\mathbb{K}$ est infini).
   (b) En déduire qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$.

10. Soient $\mathbb{L}$ un corps commutatif qui contient $\mathbb{K}$ (on dit que $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$) et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On notant $\pi_{A,\mathbb{K}}$ [resp. $\pi_{A,\mathbb{L}}$] le polynôme minimal de $A$ sur $\mathbb{K}$ [resp. sur $\mathbb{L}$], montrer que $\pi_{A,\mathbb{K}} = \pi_{A,\mathbb{L}}$.

## – IV – Endomorphismes cycliques

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique s'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = E_x$.
On note $\mathcal{C}(E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E)$ formé des endomorphismes cycliques.

1. Montrer que, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $u$ est cyclique ;
   (b) il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que la famille $\mathcal{B}_x = \left(u^k(x)\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ soit une base de $E$ ;
   (c) il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\deg(\pi_x) = n$ ;
   (d) il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ soit une matrice de Frobenius ;
   (e) le polynôme minimal de $u$ est égal à son polynôme caractéristique ;

2. Montrer qu'un endomorphisme diagonalisable est cyclique si, et seulement si, il a $n$ valeurs propres distinctes.

3. Montrer qu'un endomorphisme nilpotent est cyclique si, et seulement si, son indice de nilpotence vaut $n$.

4. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on se fixe une base $\mathcal{B}$ de $E$.
   On se fixe une norme $x \mapsto \|x\|$ sur $E$ et cette norme induit la norme $v \mapsto \|v\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|v(x)\|$ sur $\mathcal{L}(E)$.
   (a) Montrer que :
   $$\mathcal{C}(E) = \bigcup_{x \in E \setminus \{0\}} \left\{ u \in \mathcal{L}(E) \mid \det_{\mathcal{B}} \left( x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x) \right) \neq 0 \right\}$$
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(E)$ des endomorphismes cycliques de $E$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$.
   (c) Montrer que $\mathcal{C}(E)$ est connexe par arcs dans $\mathcal{L}(E)$.
5. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que pour $n \geq 2$, l'application $\pi : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto \pi_v \in \mathbb{C}[X]$ n'est pas continue.

## – V – Invariants de similitude

1. Soit $E_x$ un sous-espace cyclique maximal de dimension $p$. On se propose de montrer que $E_x$ admet un supplémentaire dans $E$ stable par $u$.
   (a) Montrer qu'il existe une forme linéaire $\ell_x \in E^*$ telle que :
   $$\ell_x \left( u^k(x) \right) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq k \leq p-2 \\ 1 \text{ si } k = p-1 \end{cases}$$
   (pour $p = 1$, on a seulement la condition $\ell_x(x) = 1$).
   (b) Montrer que le sous-espace vectoriel $F_x$ de $E^*$ engendré par la famille $\left( {}^t u^k(\ell_x) \right)_{0 \leq k \leq p-1}$ est de dimension $p$.
   (c) Montrer que $F_x$ est l'espace cyclique $E^*_{\ell_x}$ engendré par $\ell_x$ relativement à ${}^t u$ dans $E^*$ et qu'il est maximal.
   (d) Montrer que l'orthogonal $F_x^\circ$ dans $E$ de $F_x$ est stable par $u$ et que $E = E_x \oplus F_x^\circ$.
2.
   (a) Montrer qu'il existe un entier $r$ compris entre 1 et $n = \dim(E)$ et des sous espaces cycliques $E_{x_1}, \cdots, E_{x_r}$ tels que $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{r} E_{x_k}$, chaque sous espace $E_{x_k}$ étant cyclique maximal dans l'espace $\bigoplus\limits_{j=k}^{r} E_{x_k}$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $k$ compris entre 1 et $r-1$ (dans le cas où $r \geq 2$), le polynôme $\pi_{x_k}$ est multiple de $\pi_{x_{k+1}}$, puis que $\pi_{x_k}$ est le polynôme minimal de la restriction de $u$ à $\bigoplus\limits_{j=k}^{r} E_{x_j}$ (en particulier, on a $\pi_{x_1} = \pi_u$).
   (c) On a donc montré qu'il existe un entier $r$ compris entre 1 et $n$ et des sous espaces cycliques $E_{x_1}, \cdots, E_{x_r}$ dans $E$ tels que $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{r} E_{x_k}$, $\pi_{x_1} = \pi_u$, et pour tout $k$ compris entre 1 et $r-1$ (dans le cas où $r \geq 2$), le polynôme $\pi_{x_k}$ est multiple de $\pi_{x_{k+1}}$.
   Montrer que l'entier $r$ et la suite $(\pi_k)_{1 \leq k \leq r} = (\pi_{x_k})_{1 \leq k \leq r}$ sont uniquement déterminés par les conditions précédentes.
   On dit que cette suite $(\pi_k)_{1 \leq k \leq r}$ est la suite des invariants de similitude de $u$.

(d) Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale par blocs de la forme :

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & F_r \end{pmatrix}$$

où, pour tout $k$ compris entre 1 et $r$, $F_k$ est la matrice compagnon de $\pi_k$. Vérifier que le polynôme caractéristique de $u$ est $P_u = \prod_{k=1}^{r} \pi_k$ (on rappelle que $\pi_1$ est le polynôme minimal de $u$).

Cette diagonalisation par blocs, où $\pi_1 = \pi_u$ et $\pi_{k+1}$ divise $\pi_k$ pour tout $k$ compris entre 1 et $r-1$, le polynôme $\pi_k$ étant le polynôme minimal de sa matrice compagnon $F_k$, est la **réduction de Frobénius** de l'endomorphisme $u$.

3. **Quelques exemples.** Préciser les invariants de similitude de $u$ dans les cas suivants.

   (a) $u$ est une homothétie, c'est-à-dire que $u = \lambda Id$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

   (b) Le polynôme caractéristique de $u$ est scindé à racines simples.

   (c) $n = 3$, $P_u(X) = (X - \lambda_1)^2 (X - \lambda_2)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $u$ est diagonalisable.

   (d) $n = 3$, $P_u(X) = (X - \lambda_1)^2 (X - \lambda_2)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $u$ est non diagonalisable.

   (e) $n = 3$, $P_u(X) = (X - \lambda)^3$ avec $u$ non diagonalisable.

4. Soient $u, u'$ dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que ces endomorphismes ont la même suite d'invariants de similitude si, et seulement si, il existe $v \in GL(E)$ tel que $u' = v \circ u \circ v^{-1}$ (on dit alors que $u$ et $u'$ sont semblables). En définissant les invariants de similitude d'une matrice comme les invariants de similitude de l'endomorphisme qu'elle définit dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on déduit que deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles ont la même suite d'invariants de similitude.

5. On suppose que $\pi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
   Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est une matrice de Jordan par blocs du type :

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_m,\alpha_m} \end{pmatrix}$$

   où les $\lambda_k$ sont les valeurs propres, non nécessairement distinctes, de $u$.

6. 

   (a) Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée avec une matrice de passage symétrique, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible et symétrique $U$ telle que ${}^tA = U^{-1}AU$.

   (b) En déduire que toute matrice peut s'écrire comme produit de deux matrices symétriques.

7. Soient $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$ et $A, B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si $A, B$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$, elles sont alors semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

8. Le **commutant** de $u \in \mathcal{L}(E)$ est le sous ensemble de $\mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$$

   (a) Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathbb{K}[u]$.

   (b) Montrer que si $u$ est cyclique on a alors, $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.

   (c) Montrer que $n \leq \dim(\mathcal{C}(u)) \leq n^2$.

   (d) Montrer que $u$ est cyclique si, et seulement si, $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.