

Table des matières

Avant-propos	v
I Topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	1
1 Introduction	3
1.1 Notations et définitions	3
1.2 Thèmes abordés dans cette partie	4
2 Résultats préliminaires	9
3 Normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	23
4 Densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Applications	35
5 Connexité	41
6 Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	49
7 Agrégation interne 1997, épreuve 1	57
8 Agrégation interne 1995, épreuve 1	73
II Systèmes différentiels	97
9 Introduction	99
9.1 Notations et définitions	99
9.2 Thèmes abordés dans cette partie	100

10 Résultats préliminaires	103
11 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	117
12 Systèmes différentiels linéaires à coefficients non constants	133
13 Agrégation interne 1991, épreuve 2	143
 III Polynômes orthogonaux et séries de Fourier	 159
14 Introduction	161
14.1 Notations et définitions	161
14.2 Thèmes abordés dans cette partie	162
15 Résultats préliminaires	165
16 Polynômes orthogonaux	177
17 Polynômes de Legendre	187
18 Problème de Sturm-Liouville	201
19 Problème de Sturm-Liouville et opérateur intégral de Fredholm	217
Bibliographie	231

Avant-propos

Ce recueil de problèmes corrigés destiné aux candidats à l'Agrégation interne et externe de Mathématiques sera également utile aux étudiants de licence et maîtrise de Mathématiques. Les enseignants y trouveront également une source d'inspiration.

La préparation aux concours d'Agrégation est essentiellement un travail de synthèse. C'est dans cette optique que l'ouvrage est agencé. Pour chacune des trois parties qui constituent ce volume, le plan de travail est identique.

Tout d'abord dans un chapitre d'introduction on rappelle les définitions essentielles et on annonce les thèmes abordés avec des applications. Dans une leçon d'oral le candidat ne peut pas se contenter d'énoncer seulement un théorème, il doit avoir réfléchi sur la nécessité des hypothèses et sur les applications. Ce chapitre sera, je l'espère, une aide à la conception d'un plan de leçon d'oral.

Le chapitre suivant regroupe sous forme de problème des résultats classiques et importants qui seront utilisés dans les problèmes qui suivent. Ce chapitre peut être utilisé pour réviser des notions de base.

Les chapitres suivants sont consacrés à quelques thèmes qui font souvent l'objet de problèmes de concours. On trouvera également des problèmes posés au concours d'Agrégation interne qui illustrent certaines notions introduites dans les problèmes précédents. Une façon efficace d'exploiter ces problèmes consiste évidemment à les rechercher et les rédiger de façon détaillée, puis à confronter les résultats aux solutions proposées.

La première partie est consacrée à l'étude de certaines propriétés algébriques et topologiques de l'algèbre des matrices carrées réelles ou complexes. Il peut servir à illustrer des leçons d'algèbre linéaire (utilisation de la réduction des endomorphismes) et de topologie (espaces vectoriels normés de dimension finie, problèmes de densité et de connexité).

La deuxième partie est consacrée à l'étude des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ou non. Cette partie est une application importante à l'analyse de l'étude des sous espaces caractéristiques et de la réduction des endomorphismes.

La troisième partie est consacrée à l'étude des polynômes orthogonaux. On y étudie tout d'abord les propriétés des espaces préhilbertiens (orthogonalisation de Gram-Schmidt, théorème de projection orthogonale, familles orthonormales totales et maximales). On s'intéresse ensuite aux polynômes orthogonaux avec des applications au calcul numérique de certaines intégrales (formules de quadrature de Gauss) et à la décomposition en séries de Fourier. On y étudie également les problèmes de Sturm-Liouville (opérateur de Fredholm et propriétés de compacité).

Je tiens enfin à remercier EDP Sciences et particulièrement Catherine Duval pour la confiance qu'ils m'accordent en publiant ce travail.