13

Intégrales généralisées

Pour ce chapitre, les fonctions considérées sont a priori définies sur un intervalle réel I non réduit à un point, à valeurs réelles ou complexes et continues par morceaux.

La définition et les propriétés de l'intégrale de Riemann sur un segment sont supposées acquises. Ces intégrales de Riemann sur un segment sont aussi appelées intégrales définies.

13.1 Définitions et exemples d'intégrales généralisées

Dans un premier temps, on se donne un intervalle réel $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ et une fonction $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue par morceaux.

On rappelle tout d'abord la définition d'une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I.

Définition 13.1 *On dit qu'une fonction f définie sur l'intervalle I est continue par morceaux sur cet intervalle s'il existe une subdivision*

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p < a_{p+1} = b$$

telle que la fonction f soit continue chacun des intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ ($0 \leq k \leq p$) et admette une limite à droite en a et des limites à droite et à gauche en chacun des points a_k ($1 \leq k \leq p$).

Avec les notations de cette définition, la restriction de la fonction f à l'intervalle $]a_p, b[$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_p, b[$ et pour tout entier k compris entre 0 et $p-1$, la restriction de la fonction f à l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_k, a_{k+1}]$.

Une fonction continue par morceaux sur I est donc en particulier localement intégrable sur cet intervalle, ce qui signifie qu'elle est intégrable sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset I$.

Si f est continue par morceaux sur I, on peut définir sa primitive F nulle en a, c'est-à-dire la fonction définie sur $[a, b[$ par :

$$\forall x \in [a, b[\,,\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Précisément, pour $x \in [a_0, a_1[$, on a :

$$F(x) = \int_{a_0}^x f(t)\,dt$$

et pour $x \in [a_k, a_{k+1}[$ avec k compris entre 1 et p, on a :

$$F(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t)\,dt + \int_{a_k}^{x} f(t)\,dt.$$

Définition 13.2 *Avec les notations qui précèdent on dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente, si la fonction F admet une limite finie quand x tend vers b dans I. Dans ce cas on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ cette limite.*
Le scalaire ainsi défini est appelé l'intégrale généralisée (ou impropre) de f sur $[a,b[$.
Dans le cas où F n'a pas de limite finie en b on dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est divergente.

On a donc, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Remarque 13.1 *Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une fonction continue par morceaux et si $c \in [a,b[$ alors l'intégrale de f est convergente sur $[a,b[$ si, et seulement si, l'intégrale de f est convergente sur $[c,b[$ (le problème de la convergence se pose en b) et dans ce cas, on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Cela résulte immédiatement de la relation de Chasles pour les intégrales définies :

$$\forall x \in \,]a,b[\,,\ \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt.$$

On définit de manière analogue l'intégrale d'une fonction f à valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle $]a,b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$ et continue par morceaux sur cet intervalle par :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,dt$$

quand cette dernière limite existe.

Dans le cas d'une fonction f définie sur un intervalle $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ (et toujours continue par morceaux), on dit que l'intégrale de f est convergente sur $]a,b[$ si pour tout c dans $]a,b[$ chacune des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ est convergente. Dans ce cas la somme de ces intégrales impropres ne dépend pas de c, ce qui permet de définir l'intégrale généralisée de f sur $]a,b[$ par :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \\ &= \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,dt + \lim_{y\to b} \int_a^y f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Le lemme qui suit justifie l'affirmation précédente et nous dit aussi qu'il suffit de vérifier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ pour une valeur de c.

Lemme 13.1 *Si, avec les notations qui précèdent, il existe un réel $c \in \left]a, b\right[$ tel que les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ soient convergentes, alors l'intégrale de f sur $\left]a, b\right[$ est convergente et pour tout réel $d \in \left]a, b\right[$, on a :*

$$\int_a^d f(t)\,dt + \int_d^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la relation de Chasles pour les intégrales définies. ■

Par abus de langage, l'expression « étudier la nature de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ », sans savoir si cette intégrale converge ou non est un raccourci pour « étudier la convergence de l'intégrale de f sur $\left]a, b\right[$ ».

Remarque 13.2 *Il faut bien noter que la divergence de l'une des deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ équivaut à la divergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.*

Remarque 13.3 *Dans le cas où $a = -\infty$ et $b = +\infty$ l'existence de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)\,dt$ ne prouve pas la convergence de l'intégrale de f sur $\left]-\infty, +\infty\right[$. Par exemple pour $f(t) = t$ on a $\displaystyle\int_{-x}^x f(t)\,dt = 0$ pour tout $x > 0$ et pourtant l'intégrale diverge. En effet $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = +\infty$. Pour prouver la convergence de l'intégrale de f sur $\left]-\infty, +\infty\right[$ on doit prouver indépendamment la convergence de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^0 f(t)\,dt$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt$.*

Exercice 13.1 *Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto e^{-t}$ est convergente sur $\left[0, +\infty\right[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.*

Solution 13.1 *Pour tout $x > 0$ on a :*

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} 1.$$

Exercice 13.2 *Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est convergente sur $\left[0, +\infty\right[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.*

Solution 13.2 *Pour tout $x > 0$ on a :*

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 13.3 *Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est convergente sur $\left]0, 1\right]$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.*

Solution 13.3 *Pour tout $x \in \left]0, 1\right]$ on a :*

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 - 2\sqrt{x} \underset{x\to0}{\to} 2.$$

Exercice 13.4 *Montrer que l'intégrale de* $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ *est divergente sur* $]0,1]$.

Solution 13.4 *Pour tout* $x \in]0,1]$ *on a :*

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} - 1 \underset{x \to 0^+}{\to} +\infty.$$

Exercice 13.5 *Montrer que l'intégrale de* $f : t \mapsto \sin(t)$ *est divergente sur* $[0,+\infty[$.

Solution 13.5 *Pour tout* $x > 0$ *on a :*

$$F(x) = \int_0^x \sin(t)\,dt = 1 - \cos(x)$$

et la fonction cos *n'a pas de limite à l'infini.*

Exercice 13.6 *Montrer que l'intégrale de* $f : t \mapsto \ln(t)$ *est convergente sur* $]0,1]$ *et* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt = -1$.

Solution 13.6 *On a :*

$$\int_x^1 \ln(t)\,dt = -1 - x\ln(t) + x \underset{x \to 0}{\to} -1.$$

Exercice 13.7 *Montrer que l'intégrale de* $f : t \mapsto \left(\dfrac{1}{1-e^{-t}} + \ln(t) - \dfrac{1}{t}\right)e^{-t}$ *est convergente sur* $]0,+\infty[$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.

Solution 13.7 *Une primitive de* $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \left(-e^{-t}\ln(t) + e^{-t}\dfrac{1}{t}\right)$ *est :*

$$F(t) = \ln\left(1-e^{-t}\right) - e^{-t}\ln(t) = \ln\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) + \ln(t)\left(1-e^{-t}\right)$$

et on a :

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = 0 \text{ et } \lim_{t \to 0} F(t) = 0$$

ce qui donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.

Exercice 13.8 *Montrer que l'intégrale de* $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ *est convergente sur* $]-1,1[$ *et* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \pi$.

Solution 13.8 *Pour tout* $x \in [0,1[$ *on a :*

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin(x) \underset{x \to 1}{\to} \frac{\pi}{2}$$

et par parité, pour $y \in]-1,0]$ *:*

$$G(y) = \int_y^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{-y} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \arcsin(-y) \underset{y \to -1}{\to} \frac{\pi}{2}$$

ce qui donne le résultat annoncé.

L'argument de parité utilisé avec l'exercice précédent est général. Précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 13.1 *Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie et continue par morceaux sur un intervalle $]-a,a[$ avec $0 < a \leq +\infty$. Si f est paire [resp. impaire], alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt$ est convergente si, et seulement si, $\int_{0}^{a} f(t)\,dt$ l'est. En cas de convergence, on a pour f paire :*

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt.$$

et pour f est impaire :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord f paire.

La condition nécessaire est une conséquence immédiate des définitions.

Si $\int_{0}^{a} f(t)\,dt$ converge, alors la fonction F définie sur $]0,a[$ par $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$ a une limite finie en a. Notons ℓ cette limite. Pour $y \in \,]-a,0[$, le changement de variable $u = -t$ donne :

$$G(y) = \int_{y}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{-y} f(u)\,dt = F(-y) \underset{y\to -a}{\to} \ell$$

et le résultat annoncé.

Pour f impaire, on a $G(y) = -F(-y) \underset{y\to -a}{\to} -\ell$ et $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$. ∎

Dans le cas où la fonction f, définie sur $[a,b[$ avec b fini, admet une limite finie ℓ en b, le problème de convergence de l'intégrale est un faux problème. En effet, en posant $f(b) = \ell$ la fonction f se prolonge par continuité en b et désignant par F la primitive nulle en a de la fonction continue par morceaux f sur $[a,b]$, la fonction F est continue en b et on a :

$$\lim_{x\to b} \int_{a}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(a) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

la dernière intégrale étant une intégrale de Riemann.

Exercice 13.9 *Soit λ un nombre complexe. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} e^{\lambda x}dx$ en précisant sa valeur en cas de convergence.*

Solution 13.9 *Soit F la primitive de f définie sur $]0,+\infty[$ par :*

$$F(x) = \int_{0}^{x} e^{\lambda t}dt = \begin{cases} x \text{ si } \lambda = 0 \\ \dfrac{e^{\lambda x}-1}{\lambda} \text{ si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Pour $\lambda = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ et l'intégrale diverge.

Pour $\Re(\lambda) > 0$, on a :

$$|F(x)| = \left|\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right| \left|1 - e^{-\lambda x}\right|$$

$$\geq \left|\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right| \left|1 - \left|e^{-\lambda x}\right|\right| = \frac{e^{\Re(\lambda)x}}{|\lambda|}\left(1 - e^{-\Re(\lambda)x}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$$

et l'intégrale diverge.
Pour $\Re(\lambda) < 0$*, on a :*

$$\left|\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right| = \frac{e^{\Re(\lambda)x}}{|\lambda|} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

et l'intégrale converge vers $-\dfrac{1}{\lambda}$.
Il reste à considérer le cas où $\Re(\lambda) = 0$*, soit le cas où* $\lambda = iy$ *avec* $y \in \mathbb{R}^*$ *(*$\lambda = 0$ *est déjà étudié). Dans ce cas l'intégrale diverge puisque la fonction* $\varphi : x \mapsto e^{iyx}$ *n'a pas de limite à l'infini (la suite* $\left(\varphi\left(\dfrac{n\pi}{y}\right)\right)_{n\geq 1} = \left(e^{in\pi}\right)_{n\geq 1} = \left((-1)^n\right)_{n\geq 1}$ *est divergente).*

Exercice 13.10 *Soit* $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *telle que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell'$.

1. *Existence et calcul de* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t))\,dt$.
2. *Calcul de* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))\,dt$.

Solution 13.10

1. *En notant* $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ *pour* $x > 0$ *et en utilisant le théorème des accroissements finis, on a :*

$$\begin{aligned}\int_0^x (f(t+1) - f(t))\,dt &= [F(t+1) - F(t)]_0^x \\ &= F(x+1) - F(x) - F(1) \\ &= f(c_x) - F(1)\end{aligned}$$

   où $c_x \in \,]x, x+1[$. *Et faisant tendre* x *vers* $+\infty$*, on en déduit que :*

$$\int_0^{+\infty} (f(t+1) - f(t))\,dt = \ell - F(1).$$

   De manière analogue, on vérifie que :

$$\int_{-\infty}^{0} (f(t+1) - f(t))\,dt = F(1) - \ell'$$

   et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t))\,dt = \ell - \ell'.$$

2. *Avec* $f(t) = \arctan(t) \underset{t\to\pm\infty}{\to} \pm\dfrac{\pi}{2}$*, on déduit que :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))\,dt = \pi.$$

13.2 Les intégrales de Riemann

Une famille importante d'intégrales généralisées est donnée par celle des intégrales de Riemann.

Théorème 13.2 *Soient α un réel et f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :*

$$f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}.$$

1. *L'intégrale de f sur $[1,+\infty[$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$ avec :*

$$\forall \alpha > 1, \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

2. *L'intégrale de f sur $]0,1]$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$ avec :*

$$\forall \alpha < 1, \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Démonstration.

1. Pour $x > 1$ on a :

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

et en conséquence :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

2. De même pour $0 < x < 1$ on a :

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1 - \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ -\ln(x) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

et :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

■

Remarque 13.4 *On pourra noter l'analogie entre les intégrales de Riemann sur $[1,+\infty[$ et les séries de Riemann.*

Remarque 13.5 *L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est divergente quel que soit le réel α.*

On peut montrer de manière analogue (ou en effectuant le changement de variable $u = b - t$ [resp. $u = t - a$]) que pour $a < b$ et α dans $\mathbb{R}$ l'intégrale de $f : t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ [resp. $f : t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$] sur $[a, b[$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$ avec :

$$\forall \alpha < 1, \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}.$$

Par exemple, pour $a = 0$, $b = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, on a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2.$$

13.3 Opérations sur les intégrales généralisées

On se place sur $I = [a, b[$ et se donne deux fonctions f et g continues par morceaux sur cet intervalle.

Théorème 13.3 *Si les intégrales de f et g sur I sont convergentes, il en est alors de même de l'intégrale des fonction $\overline{f}$ et $f + \lambda g$ pour tout nombre complexe λ et on a :*

$$\int_a^b \overline{f}(x)\, dx = \overline{\int_a^b f(x)\, dx}$$

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \lambda \int_a^b g(x)\, dx.$$

Si $\int_a^b f(x)\, dx$ converge et $\int_a^b g(x)\, dx$ diverge, alors $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx$ diverge.

Démonstration. Résulte immédiatement des résultats relatifs aux opérations sur les limites. ∎

Pour ce qui est de la somme de deux intégrales divergentes, on ne peut rien dire a priori comme le montre l'exemple des fonctions $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0, 1]$.

Pour ce qui est du produit des deux fonctions f et g d'intégrales convergentes, on ne peut rien dire a priori comme le montre l'exemple des fonctions $f(x) = 1$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, 1]$.

Corollaire 13.1 *Si f est à valeurs complexes, alors $\int_a^b f(x)\, dx$ est convergente si, et seulement si, les intégrales $\int_a^b \Re(f)(x)\, dx$ et $\int_a^b \Im(f)(x)\, dx$ sont convergentes et en cas de convergence, on a :*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \Re(f)(x)\, dx + i \int_a^b \Im(f)(x)\, dx.$$

Démonstration. Résulte de $f = \Re(f) + i\Im(f)$ et de $\Re(f) = \frac{f + \overline{f}}{2}$, $\Im(f) = \frac{f - \overline{f}}{2i}$. ∎

Exercice 13.11 *Soient a, b deux nombres réels. Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{at} \cos(bt)\, dt$ en précisant sa valeur en cas de convergence.*

Solution 13.11 *Pour $b = 0$, l'exercice 13.9 nous dit que cette intégrale converge si, et seulement si $a < 0$.*
Pour $b \neq 0$, le changement de variable $t = u - \frac{\pi}{2b}$ nous dit que cette intégrale converge si, et seulement l'intégrale $e^{-a\frac{\pi}{2b}} \int_{\frac{\pi}{2b}}^{+\infty} e^{a} \cos\left(bu - \frac{\pi}{2}\right) du$ converge, ce qui est encore équivalent à dire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{at} \sin(bt)\, dt$ converge.
En notant $\lambda = a + ib$, on a :

$$e^{at} \cos(bt) = \Re\left(e^{\lambda t}\right),\ e^{at} \sin(bt) = \Im\left(e^{\lambda t}\right)$$

et utilisant le résultat de l'exercice 13.9, on déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{at} \cos(bt)\, dt$ converge si, et seulement si $a < 0$.
Pour $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{at} \cos(bt)\, dt = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} dt\right) = \Re\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{a}{a^2 + b^2}.$$

L'utilisation du théorème d'intégration par parties ou du théorème de changement de variable pour les intégrales définies est parfois utile pour justifier la convergence d'une intégrale.

Théorème 13.4 (Intégration par parties) *Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si $\lim_{x \to b} f(x)\, g(x)$ existe, alors les intégrales $\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$ et $\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$ sont de même nature et en cas de convergence, on a :*

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = \lim_{x \to b} f(x)\, g(x) - f(a)\, g(a) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Démonstration. Le théorème usuel d'intégration par parties nous permet d'écrire pour tout $x \in I$:

$$\int_a^x f(t)\, g'(t)\, dt = f(x)\, g(x) - f(a)\, g(a) - \int_a^x f'(t)\, g(t)\, dt$$

et avec l'hypothèse $\lim_{x \to b} f(x)\, g(x) = \ell$, on déduit le résultat annoncé. ■

Dans la pratique il est préférable de reprendre la démonstration de ce théorème sur l'intégrale étudiée en effectuant une intégration parties sur $[a, x]$ puis en passant à la limite.

Exercice 13.12 *Montrer que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et calculer sa valeur I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Solution 13.12 *On a*

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

et une intégration par parties nous montre que $I_{n+1} = (n + 1)\, I_n$, ce qui donne $I_n = n!$.

Exercice 13.13 *Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1 + t)^2} dt$ converge et calculer sa valeur.*

Solution 13.13 *Une intégration par parties nous donne pour $x \in \left]0,1\right]$:*

$$F(x) = \int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt = \left[-\frac{\ln(t)}{1+t}\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{dt}{t(1+t)}$$
$$= \left[\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) - \frac{\ln(t)}{1+t}\right]_x^1$$
$$= -\ln(2) - \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{\ln(x)}{1+x} \underset{x\to 0}{\to} -\ln(2).$$

Exercice 13.14 *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t^2)}{t^2}dt$ *converge et calculer sa valeur.*

Solution 13.14 *Avec* $\displaystyle\lim_{1\to 0} \frac{\arctan(t^2)}{t^2} = 1$, *on prolonge par continuité en* 0 *la fonction à intégrer et le seul problème de convergence est à l'infini.*
Une intégration par parties nous donne pour $x > 0$:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t^2)}{t^2}dt = \left[-\frac{\arctan(t^2)}{t}\right]_0^x + 2\int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$$
$$= -\frac{\arctan(x^2)}{x} + 2\int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$$

(la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\arctan(t^2)}{t}$ *se prolonge aussi par continuité en* 0 *avec* $g(0) = 0$*) et la décomposition en éléments simples de* $\dfrac{1}{1+t^4} = \dfrac{1}{(1+t^2)^2 - 2t^2}$ *donne* $I = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\pi$ *(les détails sont laissés au lecteur).*

Théorème 13.5 (Changement de variable) *Soient φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant de $J = [\alpha, \beta[$ sur $I = [a, b[$ et f une application continue sur l'intervalle I à valeurs réelles ou complexes. Les intégrales* $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *sont de même nature et en cas de convergence, on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Démonstration. On désigne respectivement par F et G, la primitive de f sur I nulle en a et la primitive de $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ sur J nulle en α.

Avec $(F\circ\varphi)' = (f\circ\varphi)\cdot\varphi' = G'$ et $F\circ\varphi(\alpha) = F(a) = 0 = G(\alpha)$, on déduit que $G = F\circ\varphi$.

Dire que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge équivaut à dire que F a une limite finie en b et avec $\displaystyle\lim_{t\to\beta}\varphi(t) = b$, on déduit que :

$$G(t) = F\circ\varphi(t) = F(\varphi(t)) \underset{t\to\beta}{\to} \int_a^b f(x)\,dx$$

ce qui signifie que $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Réciproquement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ converge, alors G a une limite finie en β et avec $\displaystyle\lim_{x\to b}\varphi^{-1}(x) = \beta$ (φ est un homéomorphisme), on déduit que :

$$F(x) = G\circ\varphi^{-1}(x) = G\left(\varphi^{-1}(x)\right) \underset{x\to b}{\to} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

ce qui signifie que $\int_a^b f(x)\,dx$ converge vers $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$. ■

Dans la pratique, on effectue le changement de variable sur l'intégrale définie $\int_a^x f(t)\,dt$ et on passe à la limite ensuite.

Exercice 13.15 *Montrer que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t^2}dt$ *converge et calculer sa valeur.*

Solution 13.15 *Le changement de variable* $t = u^2$ *donne* $I = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$ *et une décomposition en éléments simples donne* $I = \frac{4}{9}\sqrt{3}\pi$.

Exercice 13.16 *Prouver la convergence et calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt$.

Solution 13.16 *Pour* $t > 0$, *on a :*

$$f(t) = \ln(\sin(t)) = \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \ln(t)$$

avec $\lim_{t\to 0^+} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \ln(1) = 0$, *donc* $t \mapsto \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)$ *se prolonge par continuité en* 0 *et comme* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t)\,dt$ *est convergente (exercice 13.6), on en déduit que* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt$ *est convergente. Notons* I *la valeur de cette intégrale.*
Le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ *nous donne pour* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *:*

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\cos(t))\,dt \underset{x\to 0^+}{\to} I$$

ce qui signifie que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt = I$.
On peut alors écrire que :

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,dt - \frac{\pi}{2}\ln(2). \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = 2t$ *nous dit que* $\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt$ *est convergente et :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt$$

De même, le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ *nous donne :*

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(2t))\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt = I.$$

On a donc en définitive :

$$2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt - \frac{\pi}{2}\ln(2) = I - \frac{\pi}{2}\ln(2)$$

et $I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

Exercice 13.17 *Soit* $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *continue telle que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ *converge. Pour* $0 < a < b$ *et* $0 < x < y$ *on pose :*

$$F(x,y) = \int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t}dt$$

1. *Montrer que :*

$$F(x,y) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t}dt$$

On note $G(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}dt$ *et* $H(y) = \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t}dt$.

2. *Montrer que* $\lim_{y\to+\infty} H(y) = 0$.
3. *Montrer que*

$$G(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t}dt + f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

4. *Montrer que* $\lim_{x\to 0} G(x) = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
5. *Montrer que :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}dt = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Solution 13.17

1. *Les changement de variables* $u = at$ *et* $v = bt$ *avec* $a > 0$ *et* $b > 0$ *donnent :*

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_x^y \frac{f(at)}{t}dt - \int_x^y \frac{f(bt)}{t}dt = \int_{ax}^{ay} \frac{f(u)}{u}du - \int_{bx}^{by} \frac{f(v)}{v}dv \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u}du + \int_{bx}^{ay} \frac{f(u)}{u}du - \int_{bx}^{ay} \frac{f(v)}{v}dv - \int_{ay}^{by} \frac{f(v)}{v}dv \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t}dt = G(x) - H(y) \end{aligned}$$

2. *Avec la convergence de* $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$, *on a :*

$$H(y) = \int_1^{by} \frac{f(t)}{t}dt - \int_1^{ay} \frac{f(t)}{t}dt \underset{y\to+\infty}{\to} I - I = 0.$$

3. *On a pour* $a > 0$, $b > 0$ *et* $x > 0$ *:*

$$\begin{aligned} G(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0) + f(0)}{t} dt \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt + f(0) [\ln(t)]_{ax}^{bx} \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt + f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

4. *Comme* f *est continue en* 0, *pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver un réel* $\eta > 0$ *tel que :*

$$(0 < t < \eta) \Rightarrow (|f(t) - f(0)| < \varepsilon)$$

et pour $0 < x < \dfrac{\eta}{b}$, *on a* $[ax, bx] \subset]0, \eta[$ *de sorte que :*

$$\left| \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt \right| \leq \int_{ax}^{bx} \frac{|f(t) - f(0)|}{t} dt \leq \varepsilon \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = \varepsilon \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to 0} G(x) = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

5. *Prenant* $x = 1$ *et* $y > 1$, *on a :*

$$F(1, y) = \int_1^y \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = G(1) - H(y) \underset{y\to+\infty}{\to} G(1)$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ *converge vers* $G(1)$.

Puis prenant $y = 1$ *et* $0 < x < 1$, *on a :*

$$F(1, y) = \int_x^1 \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = G(x) - H(1) \underset{x\to 0}{\to} f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) - H(1)$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ *converge vers* $f(0) \ln\left(\dfrac{b}{a}\right) - H(1)$.

Il en résulte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ *converge vers :*

$$f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) + G(1) - H(1)$$

avec :

$$G(1) - H(1) = F(1, 1) = 0.$$

On a donc bien :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Par exemple pour $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ *qui est bien continue en* 0 *avec* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ *convergente, on a en prenant* $a = 1$ *et* $b = 2$ *:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\sin(t) - \sin(2t)}{2t^2} dt = \ln(2)$$

ou encore :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)(1 - \cos(t))}{t^2} dt = \ln(2)$$

Exercice 13.18 *Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = \alpha$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta$. En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que pour $0 < a < b$ on a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = (\alpha - \beta) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Solution 13.18 *Pour $0 < x < y$ on pose :*

$$F(x, y) = \int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$$

et on a :

$$F(x, y) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t} dt = G(x) - H(y)$$

Avec $\lim_{x\to 0} f(x) = \alpha$, on déduit que :

$$\lim_{x\to 0} G(x) = \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

et avec $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta$, on déduit que :

$$\lim_{y\to+\infty} H(y) = \beta \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Faisons le pour la deuxième limite : pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $M > 0$ tel que :

$$(t > M) \Rightarrow (|f(t) - \beta| < \varepsilon)$$

et pour $y > \frac{M}{a}$, on a $[ay, by] \subset]M, +\infty[$ de sorte que :

$$\left| \int_{ay}^{by} \frac{f(t) - \beta}{t} dt \right| \leq \int_{ay}^{by} \frac{|f(t) - \beta|}{t} dt \leq \varepsilon \int_{ay}^{by} \frac{dt}{t} = \varepsilon \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

ce qui prouve que $\lim_{y\to+\infty} \int_{ay}^{by} \frac{f(t) - \beta}{t} dt = 0$ et avec :

$$H(y) = \int_{ay}^{by} \frac{f(t) - \beta}{t} dt + \beta \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

on en déduit que $\lim_{y\to+\infty} H(y) = \beta \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
On conclut alors comme pour l'exercice précédent.
Prenant $f(t) = \arctan(t)$, $a = 1$, $b = 2$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2t) - \arctan(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \ln(2).$$

Exercice 13.19 *On considère pour $(r, s) \in \mathbb{R}^2$, l'intégrale :*

$$I_a(r, s) = \int_a^1 x^r \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx, \text{ où } a \in]0, 1[.$$

1. *Calculer la limite* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s$ *suivant les valeurs de* r *et* s.
2. *Montrer que l'intégrale* $\int_0^1 x^r\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx$ *si, et seulement si,* $r > -1$ *et* $s > -1$.
   On notera $I(r,s)$ *cette intégrale généralisée pour* $r > -1$ *et* $s > -1$.
3. *Si* $r > -1$ *et* $s > -1$, *montrer que :*
$$I(r,s) = \int_0^{+\infty} e^{-(r+1)x}x^s dx = \frac{1}{(r+1)^{s+1}} I(0,s).$$
4. *Montrer que pour* $s > 0$, $I(0,s) = sI(0,s-1)$.
5. *En déduire la valeur de* $I(r,n)$ *pour tout* $r > -1$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

Solution 13.19

1. *Le changement de variable* $x = \frac{1}{t}$ *nous donne :*
$$\lim_{x\to 0} x^r\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)^s}{t^r} = \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } r > 0 \text{ et } s \in \mathbb{R} \\ 0 \text{ si } r = 0 \text{ et } s < 0 \\ 1 \text{ si } r = s = 0 \\ +\infty \text{ si } r = 0 \text{ et } s > 0 \\ +\infty \text{ si } r < 0 \text{ et } s \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$
2. *L'intégrale*
$$\int_0^{\frac{1}{e}} x^r\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x^{-r}\left|\ln(x)\right|^{-s}}$$
   est une intégrale de Bertrand et on sait qu'elle converge si, et seulement si $-r < 1$ *et* $s \in \mathbb{R}$ *ou* $-r = 1$ *et* $-s > 1$.
   Le changement de variable $t = -\ln(x)$ *nous montre que l'intégrale* $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{dx}{x^{-r}\left|\ln(x)\right|^{-s}}$ *est de même nature que l'intégrale* $\int_0^1 \frac{dt}{e^{(r+1)t}t^{-s}}$, *cette dernière étant de même nature que l'intégrale de Riemann* $\int_0^1 \frac{dt}{t^{-s}}$, *donc convergente uniquement pour* $-s < 1$.
   En conclusion, l'intégrale $\int_0^1 x^r\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx$ *converge si, et seulement si,* $r > -1$ *et* $s > -1$.
3. *En effectuant le changement de variable* $t = -\ln(x)$, *on a, pour* $r > -1$ *et* $s > -1$ *:*
$$I(r,s) = \int_0^1 x^r\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^s dx = \int_0^{+\infty} e^{-(r+1)t}t^s dt$$
   et le changement de variable $u = (r+1)t$, *nous donne :*
$$I(r,s) = \int_0^{+\infty} e^{-u}\frac{u^s}{(r+1)^s}\frac{du}{r+1} = \frac{1}{(r+1)^{s+1}} I(0,s).$$
4. *Pour* $s > 0$, *une intégration par parties donne :*
$$I(0,s) = \left[-t^s e^{-t}\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt = sI(0,s-1)$$

5. *Avec* $I(0,n) = nI(0,n-1)$ *pour tout entier* $n \geq 1$, *on déduit par récurrence que* $I(0,n) = n!I(0,0) = n!$. *Il en résulte que :*

$$I(r,n) = \frac{1}{(r+1)^{n+1}} I(0,n) = \frac{n!}{(r+1)^{n+1}}$$

pour tout entier naturel n *et tout réel* $r > -1$.

13.4 Une condition nécessaire de convergence de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

On sait qu'une condition nécessaire de convergence d'une série numérique est que son terme général tende vers 0.

Dans le cas des fonctions continues, la convergence de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ n'implique pas nécessairement que f soit nulle à l'infini comme le montre l'exemple de l'exercice qui suit.

Exercice 13.20 *Soit* f *la fonction* f *affine par morceaux et continue sur* $[1,+\infty[$ *telle que :*

$$\forall n \geq 1,\ f\left(n + \frac{1}{2}\right) = n$$

et :

$$\forall n \geq 1,\ f(n) = f(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n2^n}) = f(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{n2^n}) = f(n+1) = 0.$$

Montrer que $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *est convergente et que* f *n'est pas nulle à l'infini.*

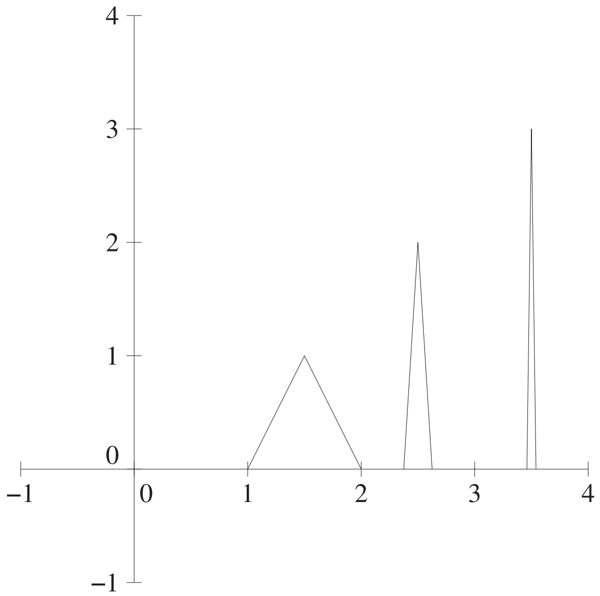

FIG. 13.1 – $y = f(x)$

Solution 13.20 *Pour tout réel* $x \geq 2$*, on a, en notant* $[x]$ *la partie entière de* x *:*

$$F(x) = \int_1^x f(x)\,dx \leq \int_1^{[x]+1} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{[x]} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{[x]}} \leq 1.$$

La fonction F *est donc croissante majoré sur* $\mathbb{R}^+$ *et en conséquence admet une limite finie en* $+\infty$*, ce qui signifie que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *est convergente.*

Comme $\lim_{n\to+\infty} f\left(n+\frac{1}{2}\right) = +\infty$*, la fonction* f *n'a pas de limite finie en* $+\infty$*.*

Avec l'exercice 13.30, on donne un autre exemple de telle situation.

Dans le cas où la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$, la condition $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ est une condition nécessaire de convergence de l'intégrale.

Théorème 13.6 *Soit* f *une fonction uniformément continue sur* $I = [a, +\infty[$*. Si l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge, on a alors* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$*.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas d'une fonction f à valeurs réelles.

Dire que f ne tend pas vers 0 à l'infini signifie qu'on peut trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall n \geq a,\ \exists x_n \geq n \mid |f(x_n)| \geq \varepsilon.$$

Si on suppose de plus que f est uniformément continue sur I, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\left((x,y) \in I^2 \text{ et } |x-y| \leq \eta\right) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, on a pour tout $n \geq a$:

$$t \in [x_n, x_n+\eta] \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} \leq f(t) - f(x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $f(x_n) > 0$ (comme $|f(x_n)| \geq \varepsilon$, $f(x_n)$ est non nul), on a :

$$t \in [x_n, x_n+\eta] \Rightarrow f(t) \geq f(x_n) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

et pour $f(x_n) < 0$, on a :

$$t \in [x_n, x_n+\eta] \Rightarrow f(t) \leq f(x_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq -\frac{\varepsilon}{2} < 0$$

soit $|f(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $t \in [x_n, x_n+\eta]$ avec f de signe constant sur $[x_n, x_n+\eta]$ dans tous les cas et :

$$\left|\int_{x_n}^{x_n+\eta} f(t)\,dt\right| = \int_{x_n}^{x_n+\eta} |f(t)|\,dt \geq \frac{\eta\varepsilon}{2}$$

de sorte que $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ ne peut avoir de limite finie à l'infini et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge. ■

13.5 Cas des fonctions à valeurs positives. Intégrales absolument convergentes

On se place sur $I = [a, b[$ (avec $-\infty < a < b \leq +\infty$) et se donne une fonction f continue par morceaux sur cet intervalle. On désigne toujours par $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ la primitive de f nulle en a.

Théorème 13.7 *Si f est à valeurs positives et si $\int_a^b f(x)\,dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Dans le cas où f est continue sur I, l'égalité $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ est réalisée si, et seulement si, f est identiquement nulle.*

Démonstration. Se déduit de la définition, des propriétés des limites et du résultat analogue sur les intégrales de Riemann des fonctions continues. ■

On rappelle que si F est une fonction croissante de $I = [a, b[$ dans $\mathbb{R}$, elle admet alors une limite finie en b si, et seulement si, elle est majorée. Dans le cas où elle est majorée, on a :

$$\lim_{x \to b} F(x) = \sup_{x \in [a,b[} F(x)$$

et dans le cas contraire, on a $\lim\limits_{x \to b} F(x) = +\infty$.

Comme conséquence de ce résultat, on a le suivant.

Théorème 13.8 *Si f est à valeurs positives, alors l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si, et seulement si, la fonction F est majorée.*

Démonstration. Comme f est positive, la primitive F est une fonction croissante et elle a une limite finie en b si, et seulement si, elle est majorée.

Si F n'est pas majorée, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$. ■

Pour f à valeurs positives : en cas de divergence on a $\int_a^b f(t)\,dt = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ et en cas de convergence, on notera naturellement $\int_a^b f(t)\,dt < +\infty$.

Le cas d'une fonction f à valeurs positives se ramène à celui d'une fonction positive en étudiant $g = -f$.

On déduit du résultat précédent un théorème de comparaison analogue à celui obtenu pour les séries numériques.

Théorème 13.9 *Soient f, g deux fonctions définies, continues par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs réelles positives et telles que :*

$$\forall t \in [a, b[\,,\ f(t) \leq g(t).$$

1. *La convergence de l'intégrale de g sur $[a, b[$ entraîne la convergence de l'intégrale de f sur $[a, b[$ avec :*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *La divergence de l'intégrale de f sur $[a, b[$ entraîne la divergence de l'intégrale de g sur $[a, b[$.*

Démonstration. En notant $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$ pour tout x dans $[a, b[$, on a $F(x) \leq G(x)$ pour tout x dans $[a, b[$.

Si l'intégrale de g sur $[a, b[$ est convergente la fonction G est alors bornée et il en est de même de la fonction F de sorte que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente.

Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ diverge alors $\lim_{x \to b} F(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to b} G(x) = +\infty$ de sorte que l'intégrale de g sur $[a, b[$ est aussi divergente. ∎

Exercice 13.21 *Étudier la nature de l'intégrale* $\int_1^2 \frac{1}{t^n - 1} dt.$

Solution 13.21 *Pour* $t \in]1, 2]$, *on a :*

$$t^n - 1 = (t-1) \sum_{k=0}^{n-1} t^k \leq (t-1) \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = (t-1)(2^n - 1)$$

donc $0 < \frac{1}{t^n - 1} \geq \frac{1}{2^n - 1} \frac{1}{t-1}$ *et l'intégrale diverge comme* $\int_1^2 \frac{1}{t-1} dt.$

Exercice 13.22 *Montrer que l'intégrale de* $f : x \mapsto e^{-x^2}$ *est convergente sur* $]-\infty, +\infty[$.

Solution 13.22 *La fonction étant paire, il suffit d'étudier la convergence en* $+\infty$.
Pour tout $t \geq 1$ *on a* $t^2 \geq t$ *et :*

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt \\ &\leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t} dt \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + 1. \end{aligned}$$

La fonction f étant positive, il en résulte que F est croissante et majorée, elle admet donc une limite en $+\infty$.
On montrera plus loin que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Définition 13.3 *On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ (à valeurs réelles ou complexes) est absolument convergente si* $\int_a^b |f(t)|\, dt < +\infty$.

Comme pour les séries numérique, on dispose du résultat suivant.

Théorème 13.10 *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ est absolument convergente elle est alors convergente et on a :*

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Démonstration. On considère tout d'abord le cas d'une fonction f à valeurs réelles d'intégrale absolument convergente.

De $-|f| \leq f \leq |f|$, on déduit que $0 \leq g = f + |f| \leq 2|f|$, ce qui implique la convergence de $\int_a^b g(t)\,dt$ et celle de $\int_a^b f(t)\,dt$ puisque $f = g - |f|$.

Dans le cas d'une fonction f à valeurs complexes d'intégrale généralisée absolument convergente, on écrit que $f = u + iv$, où $u = \Re(f)$, $v = \Im(f)$ et avec $|u| \leq |f|$, $|v| \leq |f|$, on déduit que les intégrales de u et v sont absolument convergentes, donc convergentes et la convergence de $\int_a^b f(t)\,dt$ suit. ■

Ce résultat peut aussi se montrer en utilisant le critère de Cauchy pour les limites de fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Tout d'abord voyons comment le critère de Cauchy pour les fonctions nous fournit un critère de convergence des intégrales généralisées.

Théorème 13.11 *Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. L'intégrale de f est convergente sur $[a, b[$ si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :*

$$c < x < y < b \Rightarrow \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

Démonstration. Il s'agit simplement du critère de Cauchy pour la fonction F qui nous assure de l'existence de la limite en b. ■

Le théorème 13.10 peut alors se montrer comme suit.

Pour tous $x < y$ dans $[a, b[$ on a :

$$\left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt.$$

De la convergence de $\int_a^b |f(t)|\,dt$ on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un réel c_ε dans $[a, b[$ tel que pour $c_\varepsilon < x < y < b$ on ait $\int_x^y |f(t)|\,dt < \varepsilon$ ce qui entraîne $\left| \int_x^y f(t)\,dt \right| < \varepsilon$. Le critère de Cauchy permet alors de conclure.

Exercice 13.23 *Montrer que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{2t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)}$ convergent et calculer leur valeur.*

Solution 13.23 *Au voisinage de l'infini, on a $|f(t)| \leq \frac{2\ln(t)}{t^3} \leq \frac{2}{t^2}$, donc la première intégrale converge converge. Une intégration par parties nous donne pour $x > 1$:*

$$\begin{aligned} F(x) = \int_1^x \frac{2t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt &= \left[-\frac{\ln(t)}{1+t^2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{dt}{t(1+t^2)} \\ &= \left[-\frac{\ln(t)}{1+t^2}\right]_1^x + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt \\ &= \left[\ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) - \frac{\ln(t)}{1+t^2}\right]_1^x \end{aligned}$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\ln(2)}{2}.$$

Au voisinage de l'infini, on a $|f(t)| \leq \dfrac{2}{e^t}$, *donc la deuxième intégrale converge. Le changement de variable* $u = e^t$ *nous donne :*

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 13.24 *Montrer que pour tout réel* $\alpha > 1$ *les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha}dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ *sont absolument convergentes.*

Solution 13.24 *Résulte immédiatement de la convergence des intégrales de Riemann à l'infini pour* $\alpha > 1$ *et de :*

$$\forall t \geq 1,\ \left|\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha} \text{ et } \left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

Exercice 13.25 *Montrer que pour tout réel* $\alpha > 0$ *les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha}dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ *sont convergentes.*

Solution 13.25 *On traite le cas de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt.$
Une intégration par parties donne, pour tout réel $x > 1$ *:*

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} + \alpha\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}dt.$$

On conclut alors avec l'absolue convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}dt$ *et avec :*

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

(on a $\alpha + 1 > 1$*).*

Exercice 13.26 *Nature de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sqrt{t}}dt.$

Solution 13.26 *La fonction* f *est continue sur* $[0, +\infty[$.
Un développement limité nous donne pour $t \geq 1$ *:*

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{1+\dfrac{\cos(t)}{\sqrt{t}}}\right)$$

$$= \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\frac{\cos^2(t)}{t}(1+\varepsilon(t))\right)$$

avec $\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$. *Soit :*

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\frac{\sin(2t)}{t} + \frac{1}{2}\frac{\sin(t)\cos^2(t)}{t\sqrt{t}}(1+\varepsilon(t))$$

avec $\left|\frac{\sin(t)\cos^2(t)}{t\sqrt{t}}(1+\varepsilon(t))\right| \leq \frac{2}{t\sqrt{t}}$ *pour* t *assez grand. Il en résulte que* $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ *est convergente.*

Exercice 13.27 *Soit* f *une fonction continue sur* $[1,+\infty[$ *telle que la fonction* $F : x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ *soit bornée. Étudier la convergence de* $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$.

Solution 13.27 *On désigne par* M *est un majorant de* $|F|$.
Une intégration par parties donne pour tout réel $x > 0$ *:*

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt = \left[\frac{F(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}dt$$

avec :

$$\left|\frac{F(x)}{x}\right| \leq \frac{M}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

et $\left|\frac{F(t)}{t^2}\right| \leq \frac{M}{t^2}$, *ce qui entraîne la convergence absolue de* $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$ *et :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt - F(1).$$

Définition 13.4 *On dit que l'intégrale de* f *sur* $[a,b[$ *est semi-convergente si elle est convergente et non absolument convergente.*

Nous verrons plus loin (exercice 13.35) que pour $0 < \alpha \leq 1$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ est semi-convergente.

Exercice 13.28 *Montrer que les intégrales généralisées* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ *et* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$ *sont convergentes et que :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt.$$

Solution 13.28 *Comme* $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$, *il n'y a pas de problème de convergence en* 0 *et l'exercice précédent nous dit que* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ *est convergente.*
Avec $0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, *on déduit que* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$ *est convergente.*
Pour tous réel $x > \varepsilon > 0$, *une intégration par parties faite en posant :*

$$\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t},\ u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v'(t) = \sin(t),\ v(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

donne :

$$\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_{\varepsilon}^{x} + \int_{\varepsilon}^{x} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$$

et en utilisant la relation $1-\cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$*, on obtient :*

$$\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt = 2\left[\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\right]_{\varepsilon}^{x} + 2\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2} dt.$$

Le changement de variable $y = \frac{t}{2}$ *nous donne :*

$$\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin(t)}{t} dt = 2\left[\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\right]_{\varepsilon}^{x} + \int_{\varepsilon}^{x} \frac{\sin^2(y)}{y^2} dy$$

Enfin avec $\lim_{\varepsilon\to 0} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon} = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$*, on déduit que :*

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt.$$

L'exercice qui suit décrit une méthode de calcul de $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 13.29

1. *Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors* $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0$.
2. *Montrer que l'application f définie sur* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ *par* $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ *se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. *Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx$.
4. *On pose* $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx$*. Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.
5. *Déduire de ce qui précède que* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Solution 13.29

1. *Une intégration par parties nous donne pour tout $n \geq 1$:*

$$I_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = \left[-f(x)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_a^b + \int_a^b f'(x)\frac{\cos(nx)}{n} dx$$

et en posant $M_0 = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $M_1 = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ *(ces fonctions sont continues sur le segment $[a,b]$), on en déduit que :*

$$|I_n| \leq \frac{2M_0}{n} + \frac{(b-a)M_1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

2. *Un développement limité au voisinage de* 0 *nous donne :*

$$f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} = \frac{-\dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)}{x\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}$$
$$= \frac{-\dfrac{x}{3!} + o(x^2)}{1 - \dfrac{x^2}{3!} + o(x^2)} \underset{x\to 0}{\to} 0$$

ce qui permet de prolonger f *par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = 0$.
On a alors :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \frac{-\dfrac{1}{3!} + o(x)}{1 - \dfrac{x^2}{3!} + o(x^2)} \underset{x\to 0}{\to} -\frac{1}{3!}$$

ce qui prouve que f *est dérivable en* 0 *de dérivée* $f'(0) = -\dfrac{1}{6}$.
Par ailleurs f *est de classe* $\mathbb{C}^1$ *sur* $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *avec :*

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\cos(x) - \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$$
$$= \frac{x^2\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2}{x^2\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2}$$
$$= \frac{\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(1 - \dfrac{x^2}{3!} + o(x^3)\right)^2}{\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2}$$
$$= \frac{\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^3)\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^3)\right)}$$
$$= \frac{-\dfrac{x^2}{6} + o(x^3)}{x^2\left(1 - \dfrac{x^2}{3} + o(x^3)\right)} = \frac{-\dfrac{1}{6} + o(x)}{1 + o(x)} \underset{x\to 0}{\to} -\frac{1}{6}$$

ce qui prouve que f' *est continue en* 0.
En définitive, f *se prolonge en une fonction de classe* $\mathbb{C}^1$ *sur* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. *Avec :*

$$\sin((2n+1)x) = \sin(2nx)\cos(x) + \cos(2nx)\sin(x)$$

et :

$$\sin((2n+1)x) + \sin((2n-1)x) = 2\sin(2nx)\cos(x)$$

on déduit que pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} \cos(x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} \cos(x)\, dx \end{aligned}$$

et :

$$J_n + J_{n-1} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} \cos(x)\, dx = 2J_n$$

soit $J_n = J_{n-1}$ et par récurrence $J_n = J_0 = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \geq 0$.

4. *On sait déjà que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ (en utilisant une intégration par parties).* *Le changement de variable $t = (2n+1)x$ nous donne :*

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx \\ &= \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t} dt \underset{n \to +\infty}{\to} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \end{aligned}$$

5. *En remarquant que :*

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)x) \left(f(x) + \frac{1}{\sin(x)} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)x) f(x)\, dx + J_n \end{aligned}$$

*avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)x) f(x)\, dx$ (questions **2.** et **1.**) et $J_n = \frac{\pi}{2}$, on déduit que :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{n \to +\infty} K_n = \frac{\pi}{2}.$$

L'exercice qui suit nous donne un exemple de fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$ avec $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ convergente (voir le paragraphe 13.4).

Exercice 13.30 *On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par :*

$$\forall x \in [1, +\infty[\,,\ f(x) = x e^{ix^n}$$

où $n \geq 3$ est un entier.
Montrer que $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente avec $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$.

Solution 13.30 *Avec $|f(x)| = x$, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$.*
On peut écrire que $f = u'v$ avec $u(x) = \frac{1}{ni} e^{ix^n}$ et $v(x) = \frac{1}{x^{n-2}}$. Comme :

$$|u(x)\, v(x)| = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{n-2}} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

(on a $n \geq 3$), on déduit du théorème d'intégration par parties que les intégrales $\int_1^{+\infty} u'(x)\, v(x)\, dx = \int_1^{+\infty} x e^{ix^n} dx$ *et* $\int_1^{+\infty} u(x)\, v'(x)\, dx = \frac{2-n}{ni} \int_1^{+\infty} \frac{e^{ix^n}}{x^{n-1}} dx$ *sont de même nature.*
Comme $\left| \frac{e^{ix^n}}{x^{n-1}} \right| = \frac{1}{x^{n-1}}$ *avec* $n-1 \geq 2$*, l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{ix^n}}{x^{n-1}} dx$ *est absolument convergente et on en déduit alors que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} x e^{ix^n} dx$ *est convergente.*

Du théorème 13.9, on déduit un premier résultat sur la comparaison d'une intégrale généralisée à une intégrale de Riemann.

Théorème 13.12 *Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. S'il existe un réel $\alpha > 1$ et un réel positif λ tels que pour t assez grand, on ait $|f(t)| \leq \frac{\lambda}{t^\alpha}$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente.*

Démonstration. Du théorème 13.9, on déduit qu'il existe un réel $c > a$ tel que $\int_c^{+\infty} f(x)\, dx$ est absolument convergente, elle est donc convergente et aussi $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$. ■

De même si f définie sur $]0, b]$ avec $b > 0$ est telle que $|f(t)| \leq \frac{\lambda}{t^\alpha}$ pour $t > 0$ voisin de 0 avec $0 < \alpha < 1$, alors l'intégrale généralisée $\int_0^b f(x)\, dx$ est convergente.

Pratiquement, on peut utiliser les résultats suivant.

Théorème 13.13 *Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. S'il existe un réel $\alpha > 1$ tels que $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est absolument convergente.*

Démonstration. Si $\lim_{x \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, il existe un réel $c > a$ tel que $|f(t)| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ pour $t \geq c$ et la conclusion suit. ■

Exemple 13.1 *De $\lim_{x \to +\infty} x^2 P(x)\, e^{-x^2} = 0$ pour tout polynôme P, on déduit que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} P(x)\, e^{-x^2} dx$ est absolument convergente.*

Théorème 13.14 *Soit f une fonction à valeurs réels définie et continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tels que $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = \ell > 0$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est divergente.*

Démonstration. Si $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = \ell > 0$, il existe un réel $c > a$ tel que $f(t) \geq \frac{\ell}{2} \frac{1}{t^\alpha}$ pour $t \geq c$ et la conclusion suit. ■

De même si f définie sur $]0, b]$ avec $b > 0$ est telle que $\lim\limits_{t \to 0} t^{\alpha} f(t) = 0$ avec $\alpha < 1$ [resp. $\lim\limits_{t \to 0} t^{\alpha} f(t) = \ell > 0$ avec $\alpha \geq 1$] alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx$ est absolument convergente [resp. divergente].

On rappelle qu'on dit que f est négligeable devant g [resp. dominée par g] au voisinage de b s'il existe une fonction ε définie sur un intervalle $[\alpha, b[\subset [a, b[$ telle que :

$$\lim_{x \to b} \varepsilon(x) = 0$$

[resp. une fonction ε définie et bornée au voisinage de b] et :

$$\forall x \in [\alpha, b[\,,\ f(x) = \varepsilon(x)\, g(x)\,,$$

On note alors $f = \underset{x \to b}{o}(g)$ [resp. $f = \underset{x \to b}{O}(g)$].

Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas au voisinage de b, un critère pratique pour montrer que $f = \underset{x \to b}{o}(g)$ est donné par $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Le résultat qui suit est analogue à celui obtenu pour les séries à termes positifs.

Théorème 13.15 *Soient f, g deux fonctions définies, continue par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs réelles positives et telles que $f = \underset{x \to b}{O}(g)$ [resp. $f = \underset{x \to b}{o}(g)$].*

1. *Si l'intégrale de g sur $[a, b[$ est convergente, il en est alors de même de celle de f et :*

$$\int_x^b f(t)\,dt = \underset{x \to b}{O}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$$

$$\text{[resp. } \int_x^b f(t)\,dt = \underset{x \to b}{o}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)\text{]}$$

2. *Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente, il en est alors de même de celle de g et :*

$$\int_a^x f(t)\,dt = \underset{x \to b}{O}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$$

$$\text{[resp. } \int_a^x f(t)\,dt = \underset{x \to b}{o}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)\text{]}$$

Démonstration. Si $f = \underset{x \to b}{O}(g)$, on peut alors trouver un réel $\alpha \in [a, b[$ et un réel $M > 0$ tels que :

$$\forall t \in [\alpha, b[\,,\ 0 \leq f(t) \leq M \cdot g(t)\,.$$

1. Si l'intégrale de g sur $[a, b[$ est convergente, il en est alors de même de $\displaystyle\int_x^b M \cdot g(t)\,dt$ et de $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ pour tout $x \in [\alpha, b[$, donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge. De plus, on a pour tout $x \in [\alpha, b[$:

$$\int_x^b f(t)\,dt \leq M \int_x^b g(t)\,dt$$

ce qui signifie que $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt = \underset{x \to b}{O}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$.

2. Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente, il en est alors de même de $\int_x^b f(t)\,dt$ et de $\int_x^b M \cdot g(t)\,dt$ pour tout $x \in [\alpha, b[$, donc $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge. De plus, on a pour tout $x \in [\alpha, b[$:

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^\alpha f(t)\,dt + \int_\alpha^x f(t)\,dt \leq \int_a^\alpha f(t)\,dt + M \int_\alpha^x g(t)\,dt$$

et comme $\lim\limits_{x \to b} \int_\alpha^x g(t)\,dt = +\infty$, on aura $\int_a^\alpha f(t)\,dt \leq \int_\alpha^x g(t)\,dt$ pour x voisin de b et :

$$\int_a^x f(t)\,dt \leq (M+1) \int_\alpha^x g(t)\,dt$$

ce qui signifie que $\int_a^x f(t)\,dt = \underset{x \to b}{o}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$.

Le cas où $f = \underset{x \to b}{o}(g)$ se traite de façon analogue.

■

On rappelle qu'on dit que les fonctions f et g, définies sur $[a, b[$, sont équivalentes quand x tend vers b s'il existe une fonction ε définie sur un intervalle $[\alpha, b[\subset [a, b[$ telle que :

$$\forall x \in [\alpha, b[,\ f(x) = (1 + \varepsilon(x))\, g(x),$$

$$\lim_{x \to b} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f \underset{x \to b}{\backsim} g$.

On peut remarque que $f \underset{x \to b}{\backsim} g$ est équivalent à dire que $f - g = \underset{x \to b}{o}(g)$.

Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas au voisinage de b, un critère pratique d'équivalence est donné par $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

L'utilisation de développements limités permet parfois d'obtenir des équivalents.

Théorème 13.16 *Soient f, g deux fonctions définies, continue par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs réelles positives et telles que $f \underset{t \to b}{\backsim} g$. Les intégrales de f et g sur $[a, b[$ sont de même nature, c'est-à-dire que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si, et seulement si, l'intégrale de g sur $[a, b[$ est convergente.*
En cas de convergence, on a :

$$\int_x^b f(t)\,dt \underset{x \to b}{\backsim} \int_x^b g(t)\,dt$$

et en cas de divergence :

$$\int_a^x f(t)\,dt \underset{x \to b}{\backsim} \int_a^x g(t)\,dt$$

Démonstration. Comme $f \underset{t \to b}{\backsim} g$ il existe une fonction ε définie sur un intervalle $[\alpha, b[\subset [a, b[$ telle que $\lim\limits_{t \to b} \varepsilon(t) = 0$ et $f(t) = (1 + \varepsilon(t))\, g(t)$ pour tout t dans $[\alpha, b[$. On peut alors trouver un réel β dans $[\alpha, b[$ tel que :

$$\forall t \in [\beta, b[,\ -\frac{1}{2} < \varepsilon(t) < \frac{1}{2}.$$

Il en résulte alors, puisque f et g sont à valeurs positives, que :

$$\forall t \in [\beta, b[\,,\ \frac{1}{2} g(t) < f(t) < \frac{3}{2} g(t)\,.$$

On conclut, pour ce qui est de la nature des intégrales, avec le théorème 13.9.

On peut aussi dire que si $f \underset{t\to b}{\backsim} g$, on a alors $f = \underset{x\to b}{O}(g)$ et $g = \underset{x\to b}{O}(f)$, ce qui permet de retrouver le fait que les intégrales sont de même nature. De plus avec $f - g = \underset{x\to b}{o}(g)$, on déduit que $|f-g| = \underset{x\to b}{o}(g)$ et en cas de convergence des intégrales :

$$\int_x^b |f-g|(t)\,dt = \underset{x\to b}{o}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$$

soit au voisinage de b :

$$\int_x^b |f-g|(t)\,dt = \varepsilon(t)\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$$

avec $\lim\limits_{t\to b} \varepsilon(t) = 0$. Puis avec :

$$0 \leq \left|\int_x^b (f-g)(t)\,dt\right| \leq \int_x^b |f-g|(t)\,dt$$

on déduit que $\displaystyle\int_x^b (f-g)(t)\,dt = \underset{x\to b}{o}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$, ce qui équivaut à $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b}{\backsim} \int_x^b g(t)\,dt$.

Le cas où les deux intégrales divergent se traite de manière analogue. ■

Remarque 13.6 *Si $f \underset{t\to b}{\backsim} g$ avec g de signe constant au voisinage de b (i. e. strictement positif ou strictement négatif), alors la fonction f est également de signe constant au voisinage de b, ce signe étant celui de g.*

Exemple 13.2 *Si $f = \dfrac{P}{Q}$, où P et Q sont des fonctions polynomiales non nulles, il existe un réel a tel que $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \geq a > 0$ et on a :*

$$\left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| \underset{x\to+\infty}{\backsim} \frac{|a_p|}{|b_q|}\frac{1}{x^{q-p}}$$

où p, q sont les degrés et a_p, b_q les coefficients dominants de P et Q respectivement. Il en résulte que la fonction f a un signe constant sur $[a, +\infty[$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si, et seulement si, $q \geq p+2$.

Exercice 13.31 *Étudier la nature des intégrales* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2}dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{-\frac{1}{t}} - \cos\left(\frac{1}{t}\right.\right.$

Solution 13.31 *On a* $\dfrac{\sin(t)}{t^2} > 0$ *pour* $t \in]0,1]$ *et* $\dfrac{\sin(t)}{t^2} \underset{t\to 0^+}{\backsim} \dfrac{1}{t}$, *donc l'intégrale diverge.*
On a $\arctan\left(\dfrac{1}{t}\right) > 0$ *pour* $t \geq 1$ *et* $\arctan\left(\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\backsim} \dfrac{1}{t}$, *donc l'intégrale diverge.*
Un développement limité nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\left(e^{-\frac{1}{t}} - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) &= \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) - 1 + o\left(\frac{1}{t}\right)\right)\\ &= \frac{1}{t^2}\left(-1 + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) \underset{t\to+\infty}{\backsim} -\frac{1}{t^2}\end{aligned}$$

donc l'intégrale converge.

Exercice 13.32 *Justifier la convergence puis calculer :*

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(t-1)\sqrt{t}} dt$$

Solution 13.32 *On a* $f(t) = \dfrac{1}{(t-1)\sqrt{t}} > 0$ *pour tout réel* $t \geq 2$ *et* $f(t) \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$*, d'où la convergence de* I*.*
Le changement de variable $t = u^2$ *donne :*

$$I = \lim_{x \to +\infty} \int_2^x \frac{1}{(t-1)\sqrt{t}} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{\sqrt{2}}^x \frac{2}{u^2-1} du$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\int_{\sqrt{2}}^x \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} du \right) = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln \left(\frac{u-1}{u+1} \right) \right]_{\sqrt{2}}^x = \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right).$$

On déduit du théorème précédent un critère supplémentaire de comparaison aux intégrales de Riemann.

Théorème 13.17 *Soit* f *une fonction définie et continue par morceaux sur* $[a, +\infty[$*. S'il existe un réel* α *et un réel non nul* λ *tels que* $f(x) \underset{x \to +\infty}{\backsim} \dfrac{\lambda}{x^\alpha}$*, alors l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *est convergente pour* $\alpha > 1$ *et divergente pour* $\alpha \leq 1$*.*

Démonstration. Supposons que $\lambda > 0$. On a alors $f(t) > 0$ pour t assez grand, disons $t \geq c > a$. Le théorème précédent nous dit alors que $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)\, dx$ est de même nature que $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, ce qui donne le résultat annoncé. ■

De même si f définie sur $]0, b]$ avec $b > 0$ est telle que $f(x) \underset{x \to +0}{\backsim} \dfrac{\lambda}{x^\alpha}$, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^b f(x)\, dx$ est convergente si, et seulement si $\alpha < 1$.

A titre d'application on peut considérer le cas des intégrales de Bertrand.

Exercice 13.33 *Soit* α *et* β *deux réel et* f *la fonction définie sur* $]0, +\infty[- \{1\}$ *par :*

$$f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}.$$

1. *Montrer que l'intégrale de* f *sur* $[e, +\infty[$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$*.*
2. *Montrer que l'intégrale de* f *sur* $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$ *est convergente si et seulement si* $\alpha < 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$*.*

Solution 13.33 *Pour* $\alpha > 1$ *on se donne une réel* $\gamma \in]1, \alpha[$ *et on écrit :*

$$f(t) = \frac{1}{t^\gamma} \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} (\ln(t))^\beta} = \frac{1}{t^\gamma} g(t)$$

avec $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$.*pour tout réel* β. *Donc pour* t *assez grand on aura* $f(t) < \frac{1}{t^\gamma}$ *et avec* $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma} < +\infty$ *on déduit la convergence de l'intégrale de* f *sur* $[e, +\infty[$.
Pour $\alpha > 1$ *on se donne une réel* $\gamma \in]\alpha, 1[$ *et on écrit :*

$$f(t) = \frac{1}{t^\gamma} \frac{t^{\gamma-\alpha}}{(\ln(t))^\beta} = \frac{1}{t^\gamma} h(t)$$

avec $\lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$.*pour tout réel* β. *Donc pour* t *assez grand on aura* $f(t) > \frac{1}{t^\gamma}$ *et avec* $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma} = +\infty$ *on déduit la divergence de l'intégrale de* f *sur* $[e, +\infty[$.
Pour $\alpha = 1$ *on fait le changement de variable* $u = \ln(t)$ *et pour* $x > e$ *on a :*

$$\int_e^x \frac{dt}{t(\ln(t))^\beta} = \int_1^{\ln(x)} \frac{du}{u^\beta}$$

et l'intégrale de f *sur* $[e, +\infty[$ *converge si et seulement si* $\beta > 1$.
Enfin le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ *donne pour* $0 < x < \frac{1}{e}$ *:*

$$\int_x^{\frac{1}{e}} \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta} = \int_e^{\frac{1}{x}} \frac{du}{u^{2-\alpha}(\ln(u))^\beta}$$

ce qui ramène au cas précédent.

L'étude de la fonction Γ d'Euler est aussi un exemple typique.

Exercice 13.34 *On s'intéresse ici au domaine de convergence de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, *où* x *est un nombre réel.*
On rappelle que pour $t > 0$, *on a* $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln(t)}$.

1. *Montrer que* $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ *est convergente pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Montrer que* $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ *est convergente si et seulement si* $x > 0$.
3. *En déduire le domaine de définition de la fonction :*

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

4. *Soit* $x > 0$ *fixé. On note, pour tout réel* $t > 0$, $f(t) = e^{-t}$, $g(t) = \frac{t^x}{x}$. *Montrer que :*

$$\lim_{t\to0^+} f(t) g(t) = 0 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} f(t) g(t) = 0.$$

5. *Montrer, par une intégration par parties, que pour tout réel* $x > 0$, *on a :*

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

6. *Montrer que* $\Gamma(1) = 1$, *puis que* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *pour tout entier* $n \geq 1$.

Solution 13.34 *Soit* $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$ *pour* $t > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *fixé. On a* $f(t) > 0$ *pour tout* $t > 0$.

1. *Avec* $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$ *on déduit que* $0 < f(t) < \dfrac{1}{t^2}$ *pour t grand et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ *converge absolument pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Avec* $f(t) > 0$ *et* $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$, *on déduit que* $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ *est convergente si et seulement si* $x > 0$.
3. *Le domaine de définition de la fonction* Γ *est donc* $\mathbb{R}^{+,*}$.
4. *Comme* $x > 0$, *on a* $\lim\limits_{t\to0^+} f(t)\,g(t) = \lim\limits_{t\to0^+} e^{-t}\dfrac{t^x}{x} = 0$ *et comme l'exponentielle domine les puissances à l'infini, on a* $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\,g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}\dfrac{t^x}{x} = 0$.
5. *Une intégration par parties, la convergence de* $\Gamma(x)$ *et la question précédente donnent :*
$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{(u,v)\to(0,+\infty)}\left(\left[e^{-t}\frac{t^x}{x}\right]_u^v + \frac{1}{x}\int_u^v e^{-t}t^x dt\right)\\ &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).\end{aligned}$$
6. *On a* $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ *et la relation de récurrence* $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, *donc* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *par récurrence.*

13.6 Comparaison entre série et intégrale généralisée

Dans le chapitre sur les séries numériques nous avons déjà montré un résultat de comparaison entre série et intégrale généralisée, c'est le théorème 6.4 qui peut aussi se traduire comme suit.

Théorème 13.18 *Si* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ *est une fonction continue décroissante, alors la série* $\sum f(n)$ *est de même nature que l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.

L'exemple de $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ nous montre que les séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ et les intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ sont de même nature.

Le résultat qui suit peut être utilisé pour montrer la divergence d'une intégrale.

Théorème 13.19 *Soient* $-\infty < a < b \leq +\infty$ *et* f *une fonction continue par morceaux sur* $[a, b[$. *L'intégrale de* f *sur* $[a, b[$ *est convergente si, et seulement si, pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* $[a, b[$ *qui converge vers* b, *la série* $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ *est convergente.*

Démonstration. On note toujours $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

Dire que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge équivaut à dire que F a une limite finie ℓ en b, ce qui équivaut encore à dire que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a,b[$ qui converge vers b, la suite $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On conclut alors en écrivant que :

$$F(x_n)=\int_a^{x_n} f(t)\,dt=\int_a^{x_0} f(t)\,dt+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt.$$

■

Pour montrer la divergence de $\int_a^b f(t)\,dt$ il suffit alors de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a,b[$ qui converge vers b telle que la série $\sum\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ soit divergente.

On peut par exemple montrer ainsi la divergence de $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}dt$ pour $0<\alpha\leq 1$.

Exercice 13.35 *Montrer que pour $0<\alpha\leq 1$ l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ est semi-convergente.*

Solution 13.35 *On sait déjà que les intégrales $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt$ sont convergentes pour $\alpha>0$ (exercice 13.25).*
Comme pour $t\geq 1$ et $0<\alpha\leq 1$, on a $\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right|\geq\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$ (qui résulte de $t\geq t^\alpha$ ou encore $t^{1-\alpha}\geq 1$), il nous suffit de montrer que $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ est semi-convergente.
Pour ce faire, on utilise la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\geq 1,\ x_n=n\pi$$

Pour $n\geq 1$, le changement de variable $t=n\pi+u$ nous donne :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt=\int_0^\pi\frac{\sin(u)}{n\pi+u}du\geq\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\pi\sin(u)\,du=\frac{2}{(n+1)\pi}$$

et en conséquence $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt=+\infty$, ce qui entraîne la divergence de $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt$.

Remarque 13.7 *L'inégalité $\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right|\geq\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$ pour $t\geq 1$ étant encore valable pour $\alpha\leq 0$, on déduit que $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right|dt$ diverge aussi pour $\alpha\leq 0$.*

Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles positives, on a le résultat suivant qui permet parfois de justifier la convergence d'une intégrale en utilisant la série $\sum\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite particulière de points de $[a,b[$ qui converge vers b.

Théorème 13.20 *Soient $-\infty<a<b\leq+\infty$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ à valeurs réelles positives. L'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente si, et seulement si, il existe une suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a,b[$ qui converge vers b, telle que la série $\sum\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ soit convergente.*

Démonstration. Le théorème précédent nous dit que si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge alors $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ est convergente pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b[$ qui converge vers b.

Supposons qu'il existe une suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b[$ qui converge vers b, telle que la série $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ soit convergente vers un réel S.

On note $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_n} f(t)\,dt = F(x_n) \leq S$$

du fait que f est à valeurs positives (ce qui entraîne que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ et la fonction F sont croissantes). Comme pour tout réel $x \in [a, b[$, on peut trouver un entier n tel que $x_n \leq x < b$ (puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = b$), on en déduit que :

$$F(x) \leq F(x_n) \leq S$$

et la fonction F est croissante majorée, donc convergente, ce qui revient à dire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge. ■

Exercice 13.36 *On se donne un réel α et un réel $\beta > 0$.*

1. *Pour quelles valeurs de α l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t^\alpha}{1 + t^\beta \sin^2(t)} dt$ est-elle convergente ?*
2. *On suppose pour cette question que $\alpha = 0$.*
   (a) *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\beta \sin^2(t)}$ est divergente pour $0 < \beta \leq 2$.*
   (b) *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\beta \sin^2(t)}$ est convergente pour $\beta > 2$.*
3. *On suppose pour cette question que $\alpha > -1$.*
   (a) *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1 + t^\beta \sin^2(t)} dt$ est divergente pour $\beta - 2\alpha \leq 2$.*
   (b) *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1 + t^\beta \sin^2(t)} dt$ est convergente pour $\beta - 2\alpha > 2$.*

Solution 13.36 *Pour tout réel $t > 0$, on note $f(t) = \dfrac{t^\alpha}{1 + t^\beta \sin^2(t)}$ et on note que cette fonction est à valeurs positives.*

1. *Avec $f(t) \underset{t\to 0}{\backsim} \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,dt$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > -1$.*
2. *On note pour tout entier $n \geq 1$:*

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^\beta \sin^2(x)}.$$

(a) *Le changement de variable* $x = n\pi + t$ *nous donne :*

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi + t)^{\beta} \sin^2(t)}$$

et tenant compte de :

$$\forall t \in [0, \pi], \begin{cases} n\pi + t \leq (n+1)\pi \\ \sin^2(t) \leq t^2 \end{cases}$$

on obtient :

$$u_n \geq v_n = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + ((n+1)\pi)^{\beta} t^2} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + \lambda_n^2 t^2} = \frac{\arctan(\lambda_n \pi)}{\lambda_n},$$

où on a posé $\lambda_n = ((n+1)\pi)^{\frac{\beta}{2}}$. *Comme* $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(\lambda_n \pi) = \dfrac{\pi}{2}$ *et :*

$$v_n = \frac{\arctan(\lambda_n \pi)}{\lambda_n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{\gamma}{(n+1)^{\frac{\beta}{2}}}$$

de sorte que $\sum v_n$ *converge si, et seulement si,* $\beta > 2$. *En particulier* $\sum v_n$ *diverge pour* $0 < \beta \leq 2$ *et il en est de même de* $\sum u_n$.

(b) *On écrit que* $u_n = v_n + w_n$, *avec :*

$$v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (n\pi + t)^{\beta} \sin^2(t)}, \ w_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi + t)^{\beta} \sin^2(t)}.$$

En tenant compte de :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \begin{cases} n\pi + t \geq n\pi \\ \sin^2(t) \geq \left(\dfrac{2}{\pi} t\right)^2 \end{cases}$$

on obtient :

$$v_n \leq r_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (n\pi)^{\beta} \left(\frac{2}{\pi} t\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \mu_n^2 t^2} = \frac{\arctan\left(\mu_n \frac{\pi}{2}\right)}{\mu_n},$$

où on a posé $\mu_n = \dfrac{2}{\pi} (n\pi)^{\frac{\beta}{2}}$. *On a alors :*

$$r_n = \frac{\arctan\left(\mu_n \frac{\pi}{2}\right)}{\mu_n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\mu_n} = \frac{\delta}{n^{\frac{\beta}{2}}}$$

avec $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{\beta}{2}}} < +\infty$ *pour* $\beta > 2$, *ce qui entraîne la convergence de* $\sum r_n$ *et de* $\sum v_n$.
Pour ce qui est de w_n, *le changement de variable* $t = \pi - \theta$ *donne :*

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + (n\pi + \pi - \theta)^{\beta} \sin^2(\theta)}$$

ce qui nous ramène, à peu de chose près, à la situation précédente et donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$ *converge.*
En définitive $\sum u_n$ *converge pour* $\alpha = 0$ *et* $\beta > 2$.

3. *On note pour tout entier $n \geq 1$:*

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x^\alpha}{1 + x^\beta \sin^2(x)} dx.$$

(a) *On a :*

$$u_n = \int_0^\pi \frac{(n\pi + t)^\alpha}{1 + (n\pi + t)^\beta \sin^2(t)} dt.$$

et tenant compte de :

$$\forall t \in [0, \pi], \begin{cases} n\pi \leq n\pi + t \leq (n+1)\pi \\ \sin^2(t) \leq t^2 \end{cases}$$

on obtient pour $\alpha \geq 0$:

$$\begin{aligned} u_n \geq v_n = (n\pi)^\alpha \int_0^\pi \frac{1}{1 + ((n+1)\pi)^\beta t^2} dt &= (n\pi)^\alpha \int_0^\pi \frac{1}{1 + \lambda_n^2 t^2} dt \\ &\geq (n\pi)^\alpha \frac{\arctan(\lambda_n \pi)}{\lambda_n}, \end{aligned}$$

où on a posé $\lambda_n = ((n+1)\pi)^{\frac{\beta}{2}}$. On a alors :

$$v_n = (n\pi)^\alpha \frac{\arctan(\lambda_n \pi)}{\lambda_n} \underset{n \to +\infty}{\backsim} \frac{\pi}{2} \frac{(n\pi)^\alpha}{((n+1)\pi)^{\frac{\beta}{2}}} \underset{n \to +\infty}{\backsim} \frac{\gamma}{n^{\frac{\beta}{2} - \alpha}}$$

de sorte que $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\dfrac{\beta}{2} - \alpha > 1$. En particulier $\sum v_n$ diverge pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $\beta - 2\alpha \leq 2$ et il en est de même de $\sum u_n$.
Pour $-1 < \alpha < 0$, on a $(n\pi + t)^\alpha \geq ((n+1)\pi)^\alpha \underset{n \to +\infty}{\backsim} (n\pi)^\alpha$ et ce qui précède est encore valable.

(b) *On écrit que $u_n = v_n + w_n$, avec :*

$$v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(n\pi + t)^\alpha}{1 + (n\pi + t)^\beta \sin^2(t)} dt, \ w_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{(n\pi + t)^\alpha}{1 + (n\pi + t)^\beta \sin^2(t)} dt.$$

En tenant compte de :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \begin{cases} n\pi \leq n\pi + t \leq (n+1) \\ \sin^2(t) \geq \left(\dfrac{2}{\pi} t\right)^2 \end{cases}$$

on obtient pour $\alpha \geq 0$:

$$\begin{aligned} v_n \leq r_n &= ((n+1)\pi)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\beta \left(\frac{2}{\pi} t\right)^2} \\ \leq ((n+1)\pi)^\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \mu_n^2 t^2} &= ((n+1)\pi)^\alpha \frac{\arctan\left(\mu_n \frac{\pi}{2}\right)}{\mu_n}, \end{aligned}$$

où on a posé $\mu_n = \dfrac{2}{\pi} (n\pi)^{\frac{\beta}{2}}$. On a alors :

$$r_n = ((n+1)\pi)^\alpha \frac{\arctan\left(\mu_n \frac{\pi}{2}\right)}{\mu_n} \underset{n \to +\infty}{\backsim} \frac{\delta}{n^{\frac{\beta}{2} - \alpha}}$$

avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\beta}{2}-\alpha}} < +\infty$ *pour* $\frac{\beta}{2} - \alpha > 1$, *ce qui entraîne la convergence de* $\sum r_n$ *et de* $\sum v_n$.
Pour $-1 < \alpha < 0$, *on a* $(n\pi + t)^\alpha \leq (n\pi)^\alpha$ *et ce qui précède est encore valable.*
Pour ce qui est de w_n, *le changement de variable* $t = \pi - \theta$ *donne :*

$$w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(n\pi + \pi - \theta)^\alpha}{1 + (n\pi + \pi - \theta)^\beta \sin^2(\theta)} d\theta$$

ce qui nous ramène, à peu de chose près, à la situation précédente et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ *converge.*
En définitive $\sum u_n$ *converge pour* $\beta - 2\alpha > 2$.

4. *En définitive,* $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1 + t^\beta \sin^2(t)} dt$ *est convergente pour* $\alpha > -1$, $\beta > 0$ *et* $\beta - 2\alpha > 2$.
Pour $\alpha \leq -1$ *et* $\beta > 0$, *elle est divergente.*
Pour $\alpha > -1$, $\beta > 0$, $\beta - 2\alpha \leq 2$, *elle est divergente.*

Exercice 13.37

1. *Montrer que pour tout réel* $\alpha > 1$, *les intégrales* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *sont absolument convergentes.*
2. *Pour tout réel* α, *on désigne par* f_α *et* g_α *les fonctions définies sur* $[1, +\infty[$ *par :*

$$\forall t \geq 1,\ f_\alpha(t) = \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} \text{ et } g_\alpha(t) = \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}.$$

   (a) *Calculer les dérivées des fonctions* $f_{\alpha-1}$ *et* $g_{\alpha-1}$ *sur* $[1, +\infty[$.
   (b) *Calculer* $\int_1^x \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *et* $\int_1^x \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *pour tout réel* $x > 1$.
   (c) *Montrer que, pour tout réel* $\alpha > 0$, *les fonctions* f_α *et* g_α *ont une limite finie en* $+\infty$ *et la calculer.*
   (d) *Montrer que, pour tout réel* $\alpha \leq 0$, *les fonctions* f_α *et* g_α *n'ont pas de limite en* $+\infty$.
   (e) *Calculer les intégrales* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *pour* $\alpha > 1$.
   (f) *Montrer que, pour tout réel* $\alpha \leq 1$, *les intégrales* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *sont divergentes.*
3. *Soit* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intervalle* $[1, +\infty[$ *à valeurs réelles ou complexes.*
On dira que la fonction f *vérifie l'hypothèse* $(\mathcal{H})$ *si l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f'(t)\, dt$ *est absolument convergente.*
On se donne une fonction f *qui vérifie l'hypothèse* $(\mathcal{H})$ *et on associe à cette fonction la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \int_n^{n+1} (n + 1 - t)\, f'(t)\, dt$$

   (a) *Montrer que la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*

(b) *Montrer que pour tout entier* $n \geq 1$ *et tout réel* $x \in \left]n, n+1\right]$, *on a :*

$$\int_n^x (x-t) f'(t)\, dt = \int_n^x f(t)\, dt - (x-n) f(n).$$

(c) *En déduire que :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \int_n^{n+1} f(t)\, dt - f(n).$$

(d) *Montrer que les séries* $\sum f(n)$ *et* $\sum \int_n^{n+1} f(t)\, dt$ *sont de même nature.*

(e) *Montrer que si l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ *converge, il en est alors de même de la série* $\sum f(n)$.

(f) *Montrer que si la série* $\sum f(n)$ *converge, il en est alors de même de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$.

En définitive la série $\sum f(n)$ *est de même nature que l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$.

4.

(a) *Montrer que, pour tout réel* $\alpha > 0$, *la fonction* f_α *vérifie l'hypothèse* $(\mathcal{H})$.

(b) *Étudier la série* $\dfrac{\cos(\ln(n))}{n^\alpha}$ *pour tout réel* $\alpha > 0$.

5. *Étudier la série* $\sum \dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n}$.

Solution 13.37

1. *Résulte de* $\left|\dfrac{\varphi(\ln(t))}{t^\alpha}\right| \leq \dfrac{1}{t^\alpha}$ *où* $\varphi \in \{\cos, \sin\}$ *avec* $\alpha > 1$.

2.

(a) *On a, pour tout réel* α *:*

$$\begin{aligned} f'_{\alpha-1}(t) &= \frac{d}{dt}\left(t^{1-\alpha}\cos(\ln(t))\right) = -\frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} + (1-\alpha)\frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} \\ &= -g_\alpha(t) + (1-\alpha) f_\alpha(t) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} g'_{\alpha-1}(t) &= \frac{d}{dt}\left(t^{1-\alpha}\sin(\ln(t))\right) = \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} + (1-\alpha)\frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} \\ &= f_\alpha(t) + (1-\alpha) g_\alpha(t) \end{aligned}$$

(b) *Il en résulte que :*

$$(1-\alpha) f'_{\alpha-1}(t) + g'_{\alpha-1}(t) = \left(1 + (1-\alpha)^2\right) f_\alpha(t)$$

et :

$$(1-\alpha) g'_{\alpha-1}(t) - f'_{\alpha-1}(t) = \left(1 + (1-\alpha)^2\right) g_\alpha(t)$$

On obtient alors par intégration :

$$\begin{aligned}\left(1+(1-\alpha)^2\right)\int_1^x f_\alpha(t)\,dt &= \int_1^x \left((1-\alpha)\,f'_{\alpha-1}(t)+g'_{\alpha-1}(t)\right)dt\\ &= (1-\alpha)\left(f_{\alpha-1}(x)-f_{\alpha-1}(1)\right)+g_{\alpha-1}(x)-g_{\alpha-1}(1)\\ &= (1-\alpha)\left(f_{\alpha-1}(x)-1\right)+g_{\alpha-1}(x)\end{aligned}$$

soit :

$$\int_1^x \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1+(1-\alpha)^2}\left(\frac{\sin(\ln(x))+(1-\alpha)\cos(\ln(x))}{x^{\alpha-1}}+\alpha-1\right)$$

et :

$$\begin{aligned}\left(1+(1-\alpha)^2\right)\int_1^x g_\alpha(t)\,dt &= \int_1^x \left((1-\alpha)\,g'_{\alpha-1}(t)-f'_{\alpha-1}(t)\right)dt\\ &= (1-\alpha)\left(g_{\alpha-1}(x)-g_{\alpha-1}(1)\right)-\left(f_{\alpha-1}(x)-f_{\alpha-1}(1)\right)\\ &= (1-\alpha)\,g_{\alpha-1}(x)+1-f_{\alpha-1}(x)\end{aligned}$$

soit :

$$\int_1^x \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1+(1-\alpha)^2}\left(1+\frac{(1-\alpha)\sin(\ln(x))-\cos(\ln(x))}{x^{\alpha-1}}\right)$$

(c) *Avec* $|f_\alpha(x)| \leq \dfrac{1}{x^\alpha}$ *et* $|g_\alpha(x)| \leq \dfrac{1}{x^\alpha}$, *on déduit que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g_\alpha(x) = 0$ *pour* $\alpha > 0$.

(d) *La suite* $\left(f_0\left(e^{n\pi}\right)\right)_{n\geq 0} = \left((-1)^n\right)_{n\geq 0}$ *étant divergente avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\pi} = +\infty$, *on en déduit que* f_0 *n'a pas de limite à l'infini.*
De même, pour $\alpha < 0$, *la divergence de la suite* $\left(f_\alpha\left(e^{2n\pi}\right)\right)_{n\geq 0} = \left(e^{-2\alpha n\pi}\right)_{n\geq 0}$ *nous dit que* f_α *n'a pas de limite à l'infini.*
Pour g_α, *on utilise le même argument avec les suites* $\left(e^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\right)_{n\geq 0}$ *pour* $\alpha = 0$ *et* $\left(e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right)_{n\geq 0}$ *pour* $\alpha < 0$.

(e) *Pour* $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha}dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}dt$ *sont absolument convergentes et :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha}dt = \frac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-2\alpha+2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1+(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha^2-2\alpha+2}$$

(f) *Pour* $\alpha \leq 1$, *la fonction*

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{\sin(\ln(x))+(1-\alpha)\cos(\ln(x))}{x^{\alpha-1}} = g_{\alpha-1}(x)+(1-\alpha)\,f_{\alpha-1}(x)$$

n'a pas de limite à l'infini puisque la suite $\left(\varphi\left(e^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\right)\right)_{n\geq 0} = \left((-1)^n e^{(1-\alpha)\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}\right)_{n\geq 0}$ *est divergente, donc l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha}dt$ *est divergente.*
On vérifie de manière analogue que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha}dt$ *est divergente.*

3.

(a) *Pour* $n \geq 1$, *on a :*

$$|u_n| \leq \int_n^{n+1} (n+1-t) |f'(t)| \, dt \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| \, dt$$

avec :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} |f'(t)| \, dt = \int_1^{n+1} |f'(t)| \, dt \underset{n \to +\infty}{\to} \int_1^{+\infty} |f'(t)| \, dt < +\infty.$$

Il en résulte que la série $\sum \int_n^{n+1} |f'(t)| \, dt$ *est convergente et la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente.*

(b) *Pour* $n \geq 1$ *et* $x \in \left]n, n+1\right]$, *une intégration par parties donne :*

$$\begin{aligned}\int_n^x (x-t) f'(t) \, dt &= [(x-t) f(t)]_n^x + \int_n^x f(t) \, dt \\ &= \int_n^x f(t) \, dt - (x-n) f(n)\end{aligned}$$

(c) *Il suffit de prendre* $x = n+1$.

(d) *Avec :*

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(t) \, dt - u_n$$

et la convergence de $\sum u_n$, *on déduit que les séries* $\sum f(n)$ *et* $\sum \int_n^{n+1} f(t) \, dt$ *sont de même nature.*

(e) *Si l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t) \, dt$ *converge, il en est alors de même de la série* $\sum \int_n^{n+1} f(t) \, dt$.
En effet, en posant $F(x) = \int_1^x f(t) \, dt$, *cela se déduit de :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t) \, dt = F(n+1).$$

Il en résulte que $\sum f(n)$ *converge.*

(f) *Supposons que* $\sum f(n)$ *converge.*
Pour $x > 2$ *et* $n = [x]$, *on a* $2 \leq n \leq x < n+1$ *et :*

$$\begin{aligned}F(x) = \int_1^x f(t) \, dt &= F(n) + \int_n^x f(t) \, dt \\ &= S_{n-1} + \int_n^x (x-t) f'(t) \, dt + (x-n) f(n)\end{aligned}$$

avec :

$$\left| \int_n^x (x-t) f'(t) \, dt \right| \leq \int_n^x (x-t) |f'(t)| \, dt \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| \, dt \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

($x \to +\infty$ entraîne $n = [x] \to +\infty$) puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f'(t)|\, dt$ *et* $\displaystyle\sum \int_n^{n+1} |f'(t)|\, dt$ *convergent (elles sont de même nature) et :*

$$|(x-n) f(n)| \leq |f(n)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

puisque $\sum f(n)$ *converge.*
La convergence de $\sum f(n)$ *nous assure celle de* $\displaystyle\sum \int_n^{n+1} f(t)\, dt$*, donc celle de la suite* $(S_n)_{n\geq 1}$ *et notant* S *la limite de cette suite, on déduit de ce qui précède que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = S$*, ce qui signifie que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ *converge.*

4.

(a) On a vu que pour tout réel α*, la fonction* f_α *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[1, +\infty[$ *avec :*

$$f'_\alpha = -g_{\alpha+1}(t) - \alpha f_{\alpha+1}(t)$$

et pour $\alpha > 0$*, la convergence absolue des intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{\alpha+1}(t)\, dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_{\alpha+1}(t)\, dt$ *entraîne celle de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f'_\alpha(t)\, dt$*.*

(b) Pour $\alpha > 0$*, les séries* $\displaystyle\sum \frac{\cos(\ln(n))}{n^\alpha}$ *et* $\displaystyle\sum \frac{\sin(\ln(n))}{n^\alpha}$ *sont de même nature que les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t^\alpha} dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\ln(t))}{t^\alpha} dt$*, c'est-à-dire divergentes pour* $0 < \alpha \leq 1$ *et convergentes pour* $\alpha > 1$ *(en fait pour* $\alpha > 1$*, on vérifie directement que ces séries sont absolument convergentes).*

5. On désigne par f *la fonction définie sur* $[1, +\infty[$ *par :*

$$\forall t \geq 1,\ f(t) = \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{t}.$$

On a :

$$\forall t \geq 1,\ |f'(t)| = \left| -\frac{\sin\left(\sqrt{t}\right)}{2t^{\frac{3}{2}}} - \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{t^2}$$

d'où la convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f'(t)\, dt$*.*

L'hypothèse $(\mathcal{H})$ *est donc vérifiée pour* f *et la série* $\displaystyle\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ *est de même nature que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{t} dt$*.*
Pour $x > 1$*, le changement de variable* $t = u^2$ *nous donne :*

$$F(x) = \int_1^x \frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{t} dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(u)}{u} du \underset{x\to+\infty}{\to} 2\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$$

(on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ *est semi-convergente), ce qui signifie que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ *converge. Il en résulte que* $\displaystyle\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n}$ *est convergente.*

13.7 Un théorème d'Abel

Le théorème de Cauchy pour les intégrales généralisées (théorème 13.11) et la deuxième formule de la moyenne pour les intégrales définies (théorème 11.22 et la remarque qui suit ce théorème) nous permettent de montrer les résultats suivants.

Théorème 13.21 (Abel) *Soient* f, g *des fonctions continues par morceaux sur* $[a, b[$ *telles que :*

1. f *est décroissante à valeurs positives sur* $[a, b[$ *;*
2. *l'intégrale* $\int_a^b g(t)\,dt$ *est convergente.*

Dans ces condition, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ *est convergente.*

Démonstration. La seconde formule de la moyenne nous permet d'écrire pour $u < v$ dans $[a, b[$:

$$\int_u^v f(t)\,g(t)\,dt = f(u)\int_u^w g(t)\,dt$$

où $w \in [u, v]$. Comme f est décroissante positive, on en déduit que :

$$\left|\int_u^v f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq f(a)\left|\int_u^w g(t)\,dt\right|$$

et comme $\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $c \in [a, b[$ tel que :

$$(c < u < w < b) \Rightarrow \left|\int_u^w g(t)\,dt\right| \leq \varepsilon$$

ce qui entraîne :

$$\left|\int_u^v f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq \varepsilon$$

pour $c < u < v < b$ et la convergence de $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ d'après le théorème de Cauchy. ■

Théorème 13.22 (Abel) *Soient* f, g *des fonctions continues par morceaux sur* $[a, b[$ *telles que :*

1. f *est décroissante à valeurs positives sur* $[a, b[$ *avec* $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$ *;*
2. *il existe un réel* $M > 0$ *tel que :*

$$\forall x \in [a, b[,\ \left|\int_a^x g(t)\,dt\right| \leq M$$

Dans ces condition, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ *est convergente.*

Démonstration. La seconde formule de la moyenne nous permet d'écrire pour $u < v$ dans $[a, b[$:

$$\int_u^v f(t)\, g(t)\, dt = f(u) \int_u^w g(t)\, dt$$

où $w \in [u, v]$. Comme f est positive et $\lim_{x \to b} f(x) = 0$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $c \in [a, b[$ tel que :

$$(c < u < b) \Rightarrow 0 \leq f(u) \leq \varepsilon$$

ce qui entraîne pour $c < u < v < b$:

$$\left| \int_u^v f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq \varepsilon \left| \int_u^w g(t)\, dt \right|$$

avec :

$$\left| \int_u^w g(t)\, dt \right| = \left| \int_a^w g(t)\, dt - \int_a^u g(t)\, dt \right| \leq 2M.$$

On a donc $\left| \int_u^v f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq 2M\varepsilon$ pour $c < u < v < b$ et la convergence de $\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ s'en déduit du théorème de Cauchy. ■

Remarque 13.8 *En reprenant les notations de la démonstration du théorème d'Abel qui précède, on a pour tout $x \in [a, b[$:*

$$\left| \int_x^v f(t)\, g(t)\, dt \right| = f(x) \left| \int_x^w g(t)\, dt \right| \leq 2M f(x)$$

et faisant tendre v vers b, on en déduit que :

$$\forall x \in [a, b[, \ \left| \int_x^b f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq 2M f(x)$$

Exercice 13.38 *Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, décroissante et telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, alors pour tout réel λ non nul, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{i\lambda t} dt$ est convergente.*

Solution 13.38 *Pour tout réel $x > 0$, on a :*

$$\left| \int_0^x e^{i\lambda t} dt \right| = \frac{1}{|\lambda|} \left| e^{i\lambda x} - 1 \right| \leq \frac{2}{|\lambda|}$$

La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on déduit du théorème d'Abel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{i\lambda t} dt$ est convergente pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $\lambda \neq 0$.

Exercice 13.39 *Le but de l'exercice est de déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ suivant les valeurs des nombres réels α et λ.*

1. *Traiter le cas $\lambda = 0$.*
   On suppose, dans les questions suivantes, que $\lambda \neq 0$.
2. *Montrer que, si $\alpha > 1$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ est absolument convergente.*

3. *Montrer que, si* $0 < \alpha \leq 1$, *alors* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *est semi-convergente.*
4. *Montrer que, si* $\alpha \leq 0$, *alors* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *est divergente.*
5. *Montrer que, si* $0 < \alpha \leq 1$, *alors les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ *sont semi-convergentes.*
6. *Montrer que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} dt$ *est divergente.*
7. *Montrer que les deux fonctions* f *et* g *définies sur* $[1, +\infty[$ *par* $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ *et* $g(t) = \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}} + \dfrac{\sin^2(t)}{t}$ *sont équivalentes au voisinage de* $+\infty$. *À quelle propriété, cette question fournit-elle un contre-exemple ?*

Solution 13.39

1. *Pour* $\lambda = 0$, *l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ *converge si, et seulement si,* $\alpha > 1$. *Pour* $\alpha > 1$, *on a alors :*
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$
2. *Pour tout réel* $t \geq 1$, *on a* $\left|\dfrac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha}\right| = \dfrac{1}{t^\alpha}$, *donc* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *est absolument convergente pour* $\alpha > 1$.
3. *Pour tout réel* $x > 1$, *on a :*
$$\left|\int_1^x e^{i\lambda t} dt\right| = \frac{1}{|\lambda|} \left|e^{i\lambda x} - e^{i\lambda}\right| \leq \frac{2}{|\lambda|}$$
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ *étant décroissante sur* $[1, +\infty[$ *pour* $\alpha > 0$, *on déduit du théorème d'Abel que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *est convergente pour tout réel* $\alpha > 0$ *et tout réel* $\lambda \neq 0$.
Pour $0 < \alpha \leq 1$, *on a* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha}\right| dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty$, *donc l'intégrale est semi-convergente dans ce cas.*
4. *Par conjugaison complexe, on voit que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *est convergente si, et seulement si,* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *l'est. Il en résulte que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *est convergente si, et seulement si, les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ *le sont.*
Pour montrer la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^\alpha} dt$ *pour* $\alpha \leq 0$, *il suffit donc de montrer celle de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$. *Tenant compte de la parité de la fonction* cos, *on peut supposer que* $\lambda > 0$.

Soit donc $\alpha = -\beta$ *un réel négatif ou nul,* λ *un réel strictement positif et* F *la fonction définie sur* $[1, +\infty[$ *par :*

$$F(x) = \int_1^x \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt = \int_1^x t^\beta \cos(\lambda t)\, dt$$

En désignant par $(x_n)_{n\geq 1}$ *la suite définie par* $x_n = \dfrac{2n\pi}{\lambda}$*, on a :*

$$F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n) = \int_{x_n}^{x_n + \frac{\pi}{2\lambda}} t^\beta \cos(\lambda t)\, dt$$

et le changement de variable $t = x_n + u$*, nous donne :*

$$\begin{aligned} F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} (x_n + u)^\beta \cos(\lambda(x_n + u))\, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} (x_n + u)^\beta \cos(\lambda u)\, du \end{aligned}$$

Mais pour $0 \leq u \leq \dfrac{\pi}{2\lambda}$*, on a* $0 \leq \lambda u \leq \dfrac{\pi}{\lambda}$ *et* $\cos(\lambda u) \geq 0$*, de sorte que :*

$$F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n) \geq x_n^\beta \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \cos(\lambda u)\, du = \frac{x_n^\beta}{\lambda} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

et F *ne peut avoir de limite finie en* $+\infty$*, ce qui signifie que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$*. diverge.*

5. *On sait déjà que les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^\alpha} dt$ *sont convergentes pour tout réel* $\alpha > 0$ *et tout réel* λ*. Par parité, on peut supposer que* $\lambda > 0$*.*
On note F *la fonction définie sur* $[1, +\infty[$ *par :*

$$F(x) = \int_1^x \frac{|\cos(\lambda t)|}{t^\alpha} dt$$

et $(x_n)_{n\geq 1}$ *est la suite définie par* $x_n = \dfrac{2n\pi}{\lambda}$*. Pour* $\alpha > 0$*, on a :*

$$\begin{aligned} F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \frac{|\cos(\lambda(x_n + u))|}{(x_n + u)^\alpha} du = \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \frac{\cos(\lambda u)}{(x_n + u)^\alpha} du \\ &\geq \frac{1}{\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right)^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2\lambda}} \cos(\lambda u)\, du = \frac{1}{\lambda\left(\frac{2n\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{2\lambda}\right)^\alpha} \end{aligned}$$

Pour $0 < \alpha \leq 1$*, on a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n\pi + \frac{\pi}{2\lambda}\right)^\alpha} = +\infty$ *et donc :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(F\left(x_n + \frac{\pi}{2\lambda}\right) - F(x_n)\right) = +\infty$$

Avec :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(F\left(x_k+\frac{\pi}{2\lambda}\right)-F(x_k)\right)=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_k+\frac{\pi}{2\lambda}}\frac{|\cos(\lambda t)|}{t^\alpha}dt$$
$$\leq\int_{1}^{x_n+\frac{\pi}{2\lambda}}\frac{|\cos(\lambda t)|}{t^\alpha}dt=F\left(x_n+\frac{\pi}{2\lambda}\right)$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}F\left(x_n+\dfrac{\pi}{2\lambda}\right)=+\infty$ *et l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\cos(\lambda t)|}{t^\alpha}dt$ *est divergente pour* $0<\alpha\leq 1$.

On procède de manière analogue pour $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\cos(\lambda t)|}{t^\alpha}dt$.

6. *Pour tout réel* t, *on a :*
$$\frac{\sin^2 t}{t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{\cos(2t)}{t}\right).$$
Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2t}{t}dt$ *est convergente et* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ *est divergente, on en déduit que* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t}dt$ *est divergente.*

7. *Avec :*
$$g(t)=\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right)$$
et $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}=0$, *on déduit que* $f(t)\underset{+\infty}{\backsim}g(t)$. *Et on a ici* $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(t)\,dt$ *convergente et* $\displaystyle\int_1^{+\infty}g(t)\,dt$ *divergente.*

Exercice 13.40 *Soient* a *et* α *deux nombres réels strictement positifs et* f *une fonction continue,* α*-périodique. Posons* $I(\lambda)=\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\lambda-f(t)}{t}dt$ *lorsqu'elle existe. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un unique* λ *tel que* $I(\lambda)$ *est une intégrale convergente.*

1. *Montrer qu'il existe, au plus, un* λ *tel que* $I(\lambda)$ *converge.*
2. *À l'aide d'une intégration par parties, exprimer* $\displaystyle\int_a^{x}\frac{\lambda-f(t)}{t}dt$ *en fonction de* $G_\lambda(x)=\displaystyle\int_a^{x}(\lambda-f(t))dt$.
3. *Montrer que, si* G_λ *est borné, alors* $I(\lambda)$ *est convergente.*
4. *Pour tout nombre entier* n, *calculer* $G_\lambda(n\alpha+a)$ *en fonction de* $\displaystyle\int_0^{\alpha}f(t)\,dt$. *En déduire la valeur de* λ *pour laquelle* G_λ *est bornée.*
5. *Retrouver, à l'aide d'une transformation d'Abel, que, si* G_λ *est borné, alors* $I(\lambda)$ *est convergente.*

Solution 13.40 *Laissée au lecteur.*

13.8 Exercices supplémentaires

Exercice 13.41 *Soit a un réel strictement positif.*

1. *Justifier la convergence de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$.
2. *Exprimer* $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$ *en fonction de* $\displaystyle\int_0^{a} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$ *(on peut utiliser le changement de variable* $x = \dfrac{a^2}{t}$*).*
3. *En déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx$.

Solution 13.41

1. *Au voisinage de* 0*, on a* $\dfrac{\ln(t)}{a^2+t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{a^2} < 0$*, l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ *étant convergente, il en résulte que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt$ *converge.*
   Avec $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(t)}{a^2+t^2} = 0$ *et la positivité de la fonction pour* $t > 1$*, on déduit que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt$ *converge.*
2. *Le changement de variable* $x = \dfrac{a^2}{t}$ *donne :*
$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx = \int_a^0 \frac{\ln(a^2)-\ln(t)}{a^2+\frac{a^4}{t^2}}\left(-\frac{a^2}{t^2}\right)dt$$
$$= \int_0^a \frac{\ln(a^2)-\ln(t)}{t^2+a^2}dt = \ln\left(a^2\right)\int_0^a \frac{dt}{t^2+a^2} - \int_0^a \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$$
$$= \frac{\ln(a^2)}{a^2}\int_0^a \frac{dt}{1+\frac{t^2}{a^2}} - \int_0^a \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$$
$$= \frac{\ln(a^2)}{a}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^a \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt = \frac{\pi}{2}\frac{\ln(a)}{a} - \int_0^a \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$$
3. *On a :*
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx = \int_0^a \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx + \int_a^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}\frac{\ln(a)}{a}.$$