- RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE PROBABILITÉS -

La loi forte des grands nombres et le théorème de la limite centrale enseignés dans les Maîtrises de Mathématiques sont établis pour des sommes de vecteurs aléatoires indépendants, identiquement distribués. Dans ce problème, on remplace les vecteurs aléatoires par des éléments aléatoires $X_n, n \geq 1$, du groupe G des déplacements du plan, l'addition par la loi de composition de G et l'on s'intéresse à la suite $(S_n)_{n\geq 1}$, $S_n = X_n \cdots X_1(0)$, des images de 0 par les composés à gauche successifs. Les quatre premières parties montrent que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ satisfait à la loi forte des grands nombres et au théorème de la limite centrale, dans la cinquième, on prouve une propriété de récurrence de $(S_n)_{n\geq 1}$.

Un intermédiaire commode pour l'étude de $(S_n)_{n\geq 1}$ est la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$, $Z_n = X_1 \cdots X_n(0)$, des images de 0 par les composés à droite, en effet les Z_n sont les sommes partielles associées à une suite de vecteurs aléatoires bi-dimensionnels, ces vecteurs ne sont ni indépendants, ni équidistribués mais leur dépendance s'exprime à l'aide d'une relation algébrique simple, de sorte que, si la théorie classique ne s'applique pas directement, il est possible d'en adapter les méthodes.

Ainsi, grâce à l'indépendance apparaissant en (C-2.a), la preuve de la loi forte des grands nombres (C) suit fidèlement les étapes de la démonstration usuelle basée sur une inégalité maximale, elle nécessite un calcul de moments du second ordre qui fait l'objet de la question (B-1).

La démonstration du théorème de la limite centrale (D) fait appel à une technique plus originale mise en oeuvre par B. Roynette (cf [*]). Sous l'hypothèse d'adaptation, la propriété d'équirépartition établie en (A-3), son corollaire (B-2) et l'inégalité (D-3.b) permettent de mettre en évidence un comportement semblable à celui d'une somme de vecteurs aléatoires indépendants à condition de regrouper les termes en blocs de taille suffisamment grande. Le résultat obtenu est remarquable par le fait que, à la différence du cas usuel, la convergence vers la loi normale ne nécessite, finalement, aucune hypothèse de centrage.

Le nombre de points de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ contenus dans un voisinage de 0 est une variable aléatoire, dans la dernière partie (E), suivant P. Crepel (cf [*]), on utilise le théorème de la limite centrale précédemment établi pour montrer que cette variable aléatoire à une espérance infinie (on peut en fait établir qu'elle est p.s. infinie).

Référence: [*] Y. Guivarc'h, M. Keane, B. Roynette. Marches áléatoires sur les groupes de Lie. Lecture Notes in Mathematics, no 624.

Comme signalé dans l'avertissement, les différentes parties du problème sont assez largement indépendantes et ne font appel, dans leurs premières questions, qu'à des connaissances et des techniques qui devraient être familières à un étudiant ayant suivi en Maîtrise un enseignement de Probabilités. On ne peut que déplorer que de nombreux candidats n'aient qu'une connaissance approximative des notions de base de la théorie telles que indépendance de variables aléatoires, conditionnement, conditions de régularité d'une fonction caractéristique. On trouvera ci-dessous un corrigé résumé accompagné de quelques commentaires concernant les erreurs le plus fréquemment commises.

Corrigé

- A -

1 - D'après le théorème de Stone-Weierstrass, pour $f \in \mathcal{C}$ et $\epsilon > 0$, il existe P, $P(s) = \sum_{\ell=-n}^{n} a_\ell e^{2i\pi\ell s}$, tel que $J(P-f) < \epsilon$ et l'on peut écrire

$$|\int f d\mu_n - \int f d\mu| \leq \int |f-P| d\mu_n + |\int P d\mu_n - \int P d\mu| + \int |f-P| d\mu$$
$$\leq 2\epsilon + |\int P d\mu_n - \int P d\mu|.$$

Si (a) est vérifié, il en résulte que $\limsup_n |\int f d\mu_n - \int f d\mu| \leq 2\epsilon$, de l'arbitraire de ϵ, on conclut que (a) implique (b). L'implication inverse est immédiate.

Commentaire : Une fonction continue ne peut en général s'écrire comme somme de sa série de Fourier. Pour une fonction ayant un développement en série de Fourier normalement convergeant, par exemple une fonction de classe $\mathcal{C}^1$*, l'implication (a)* $\Rightarrow$ *(b) n'est établie qu'au prix d'un passage à la limite dans une série qui doit être justifié.*

2 - Puisque $1 - \cos(2\pi rs) \geq 0$, on a $\int (1-\cos(2\pi rs)) d\mu(s) = 0$ si et seulement si $1 - \cos(2\pi rs) = 0$ μ *p.p.*, or $H_r = \{s : s \in T, 1 - \cos(2\pi sr) = 0\}$.

Commentaire : Cette question a suscité des développements longs et fort peu clairs avec des allers et retours entre les implications et leurs contraposées dans lesquels il était parfois fort difficile au correcteur de distinguer un argument convaincant.

3 - Soient μ et $\nu \in \mathcal{P}$, utilisant la propriété d'homomorphisme de l'exponentielle et le théorème de Fubini, il vient, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\widehat{\mu * \nu}(k) = \hat{\mu}(k)\hat{\nu}(k)$ d'où

$$\hat{\mu}_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} (\hat{\mu}(k))^\ell.$$

Pour tout k, $|\hat{\mu}(k)| \leq 1$; si, de plus, μ est adaptée, l'inégalité $|1 - \hat{\mu}(k)| \geq Re(1 - \hat{\mu}(k))$, montre que $\hat{\mu}(k) = 1$ si et seulement si $k = 0$. On a donc, pour $k \neq 0$,

$$|\hat{\mu}_n(k)| = \frac{1}{n} \left| \frac{1 - (\hat{\mu}(k))^n}{1 - \hat{\mu}(k)} \right| \leq \frac{2}{n|1 - \hat{\mu}(k)|}$$

de sorte que $\lim_n \hat{\mu}_n(k) = 0$, puisque, d'autre part, $\lim_n \hat{\mu}_n(0) = 1$, l'on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_n \hat{\mu}_n(k) = \hat{m}(k)$$

et l'on conclut, d'après 1.

Commentaire : On ne peut affirmer que, pour $k \neq 0$, $|\hat{\mu}(k)| < 1$, si, par exemple, μ est la probabilité portée par l'irrationnel α, on a, pour tout k, $\hat{\mu}(k) = e^{2i\pi k\alpha}$ et $|\hat{\mu}(k)| = 1$, cependant μ est adaptée, le résultat s'applique et l'on retrouve le théorème d'équirépartition de Weyl.

4 - Les v.a. $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ étant indépendantes de même loi μ, la loi de $\Theta_k \oplus \cdots \oplus \Theta_1$ est μ^{*k} et

$$\overline{Q}_n(x,y) = \frac{1}{n}\{Q(x,y) + \sum_{k=1}^{n-1} \int Q(\rho(s)x, \rho(s)y)d\mu^{*k}(s)\},$$

appliquant 3. à la fonction de $\mathcal{C}$ définie par $f(s) = Q(\rho(s)x, \rho(s)y)$, il vient

$$\lim_n \overline{Q}_n(x,y) = \int Q(\rho(s)x, \rho(s)y)dm(s) = \overline{Q}(x,y).$$

$\overline{Q}(x,y)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ telle que, pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $t \in T$,

$$\overline{Q}(\rho(t)x, \rho(t)x) = \int Q(\rho(s \oplus t)x, \rho(s \oplus t)x)dm(s) = \overline{Q}(x,x),$$

donc, pour $x \in \mathbb{R}^2$, $\overline{Q}(x,x) = \|x\|^2 \overline{Q}(e_1, e_1)$ avec

$$\overline{Q}(e_1,e_1) = \int (q_{11}\cos^2(2\pi s) + 2q_{12}\sin(2\pi s)\cos(2\pi s) + q_{22}\sin^2(2\pi s))dm(s) = \frac{1}{2}(q_{11}+q_{22}).$$

Finalement $\overline{Q}(x,y) = \frac{1}{2}(q_{11} + q_{22})\langle x, y\rangle$.

- B -

1.a - Soit $A \in \mathcal{F}_n$, il existe un borélien B de G^n tel que $A = [(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n) \in B]$, désignant par $P_{\tilde{X}_i}$ la loi de la v.a. $\tilde{X}_i$, on a, d'après l'indépendance des v.a. $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{n+1}$ et le théorème de Fubini

$$E[1_A f(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{n+1})] = E[1_B(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n) f(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{n+1})]$$

$$= \int 1_B(g_1, \ldots, g_n) dP_{\tilde{X}_1}(g_1) \cdots dP_{\tilde{X}_n}(g_n) \int f(g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}) dP_{\tilde{X}_{n+1}}(g_{n+1})$$

$$= \int 1_B(g_1, \ldots, g_n) E[f(g_1, \ldots, g_n, \tilde{X}_{n+1})] dP_{\tilde{X}_1}(g_1) \cdots dP_{\tilde{X}_n}(g_n) = E[1_A \phi(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)],$$

il suffit pour conclure de noter que $\phi(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Commentaire : Cette question a montré que les notions d'indépendance et de conditionnement sont mal maitrisées. Les correcteurs ont récompensé les candidats qui ont énoncé sans faute la définition de l'espérance conditionnelle. Pour arriver à leurs fins, certains candidats n'ont pas craint d'affirmer, contre toute vraisemblance, que $(\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_n)$ *et* $f(\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_{n+1})$ *sont des éléments aléatoires indépendants et que le composé de* $(\tilde{X}_1, \cdots, \tilde{X}_n)$ *et de* ϕ *est* $E[f(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{n+1})]$.

$\|\check{U}_{n-1}\tilde{Y}_n\| = \|\tilde{Y}_n\|$ donc $\check{U}_{n-1}\tilde{Y}_n$ est de carré intégrable et les expressions considérées en 1-b et 1-c ci-dessous sont définies.

1.b - Seul le cas $n \geq 2$ est à envisagé. On écrit

$$E[\langle \check{U}_{n-1}\tilde{Y}_n, e_i\rangle] = E[E[\langle \check{U}_{n-1}\tilde{Y}_n, e_i\rangle | \mathcal{F}_{n-1}]],$$

mais, d'après a.,

$$E[\langle \check{U}_{n-1}\tilde{Y}_n, e_i\rangle | \mathcal{F}_{n-1}] = \phi(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{n-1}) \quad p.s.$$

avec, pour $g = (u_i, y_i), i = 1, \ldots, n-1$ et $\check{u}_{n-1} = u_1 \cdots u_{n-1}$,

$$\phi(g_1, \ldots, g_{n-1}) = E[\langle \check{u}_{n-1}\tilde{Y}_n, e_i\rangle] = \langle E[\tilde{Y}_n], \check{u}^*_{n-1}e_i\rangle = 0.$$

1.c - Avec la convention $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$,

$$\tilde{C}(p,q,i,j) = E[E[\langle \check{U}_{p-1}\tilde{Y}_p, e_i\rangle\langle \check{U}_{q-1}\tilde{Y}_q, e_j\rangle | \mathcal{F}_{q-1}]].$$

Si $p < q$, $\langle \check{U}_{p-1}\tilde{Y}_p, e_i\rangle$ est $\mathcal{F}_{q-1}$-mesurable de sorte que

$$E[\langle \check{U}_{p-1}\tilde{Y}_p, e_i\rangle\langle \check{U}_{q-1}\tilde{Y}_q, e_j\rangle | \mathcal{F}_{q-1}] = \langle \check{U}_{p-1}\tilde{Y}_p, e_i\rangle E[\langle \check{U}_{q-1}\tilde{Y}_q, e_j\rangle | \mathcal{F}_{q-1}] \; p.s.,$$

comme il a été vu précédemment le second facteur est nul, d'où $\tilde{C}(p,q,i,j) = 0$. Lorsque $p = q$, le cas $p = 1$ est immédiat, pour $p \geq 2$,

$$E[\langle \check{U}_{p-1}\tilde{Y}_p, e_i\rangle\langle \check{U}_{p-1}\tilde{Y}_p, e_j\rangle | \mathcal{F}_{p-1}] = \phi(g_1, \ldots, g_{p-1})$$

où, avec les notations de 1.b.,

$$\phi(g_1, \ldots, g_{p-1}) = E[\langle \tilde{Y}_p, \check{u}^*_{p-1}e_i\rangle\langle \tilde{Y}_p, \check{u}^*_{p-1}e_j\rangle] = Q_p(\check{u}^*_{p-1}e_i, \check{u}^*_{p-1}e_j),$$

la formule annoncée en découle.

Commentaire : Peu de candidats ont su faire usage de la formule de conditionnement établie en 1-a pour le calcul des espérances en 1-b et 1-c. Remarquer que les vecteurs aléatoires $\check{U}_{p-1}\tilde{Y}_p$ *et* $\check{U}_{q-1}\tilde{Y}_q$ *ne sont pas indépendants.*

2 - Puisque Y_1 est de carré intégrable, les résultats de la question précédente s'appliquent avec $h_n(x) = x$, les formes quadratiques Q_p sont alors notées Q. D'après 2-b, $E[\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n] = 0$, la matrice de covariance de $\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n$ a donc pour terme générique

$$\frac{1}{n}E[\langle Z_n, e_i\rangle\langle Z_n, e_j\rangle] = \frac{1}{n}\sum_{p,q=1}^{n}\tilde{C}(p,q,i,j) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}E[Q(\check{U}_{p-1}^{*}e_i, \check{U}_{p-1}^{*}e_j)],$$

les v.a. $-\theta(U_i), i \geq 1$, sont, comme les v.a. $\theta(U_i), i \geq 1$, indépendantes et adaptées sur T et il vient, d'après A.4.,

$$\lim_n \overline{C}_n = \frac{1}{2}(E[\langle Y_1, e_1\rangle^2] + E[\langle Y_1, e_2\rangle^2])e = \frac{1}{2}E[\|Y_1\|^2]e.$$

3 - $Y_n^0 = Y_n + a - U_n a$ et $E[Y_n^0] = E[Y_1] + (e - E[U_1])a$, il sera possible de choisir a tel que $E[Y_n^0] = 0$ dès que la matrice $(e - E[U_1])$ sera inversible. Supposons l'existence d'un x tel que $\|x\| = 1$ et $x - E[U_1]x = 0$ alors

$$0 = \langle x - E[U_1]x, x\rangle = 1 - E[\langle U_1 x, x\rangle] = \int(1 - \cos(2\pi s))d\gamma(s),$$

puisque $1 - \cos(2\pi s) \geq 0$, ceci implique que γ est portée par $\{0\}$ ce qui est contraire à l'hypothèse, donc $e - E[U_1]$ est inversible.

Pour $n \geq 1, Z_n^0 = Z_n + a - U_1 \cdots U_n a$.

Commentaire : La relation de conjugaison $X_n^0 = \tau_a X_n \tau_{-a}$ a été l'objet de diverses interprétations erronnées.

- C -

1.a - La v.a. $\tilde{Z}_{p,q}$ est bornée donc de carré intégrable

$$\sigma_{p,q}^2 = \sum_{i=1}^{2}E[\langle\tilde{Z}_{p,q}, e_i\rangle^2] = \sum_{i=1}^{2}\sum_{m,n=p+1}^{q}\frac{1}{nm}E[\langle\check{U}_{n-1}\tilde{Y}_n, e_i\rangle\langle\check{U}_{m-1}\tilde{Y}_m, e_i\rangle],$$

d'après B-1.c, $\tilde{Y}_k$ étant centrée les termes de cette somme sont nuls si $m \neq n$, d'où

$$\sigma_{p,q}^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{n=p+1}^{q}\frac{1}{n^2}E[\langle\check{U}_{n-1}\tilde{Y}_n, e_i\rangle^2] = \sum_{n=p+1}^{q}\frac{1}{n^2}E[\|\check{U}_{n-1}\tilde{Y}_n\|^2] = \sum_{n=p+1}^{q}\frac{1}{n^2}E[\|\tilde{Y}_n\|^2].$$

1.b - Calculant dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ où les interversions de sommations sont licites, il vient

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}E[\|Y_1\|^2 1_{[\|Y_1\|\leq n]}] = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}E[\|Y_1\|^2 1_{[k-1<\|Y_1\|\leq k]}]$$

$$= \sum_{k\geq 1} E[\|Y_1\|^2 1_{[k-1<\|Y_1\|\leq k]}] \sum_{n\geq k} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{k\geq 1} \frac{2}{k} E[\|Y_1\|^2 1_{[k-1<\|Y_1\|\leq k]}]$$
$$\leq 2 \sum_{k\geq 1} E[\|Y_1\| 1_{[k-1<\|Y_1\|\leq k]}] = 2E[\|Y_1\|] < +\infty.$$

Commentaire : Les interversions de sommations doivent être justifiées.

1.c - Puisque $\langle \tilde{Y}_n, e_i\rangle = \langle Y'_n, e_i\rangle - E[\langle Y'_n, e_i\rangle]$, on a

$$E[\|Y'_n\|^2] = \sum_{i=1}^{2} E[\langle Y'_n, e_i\rangle^2] \geq \sum_{i=1}^{2} E[\langle \tilde{Y}_n, e_i\rangle^2] = E[\|\tilde{Y}_n\|^2],$$

les v.a. Y_n étant de même loi, la convergence établie en 1.b. implique celle de la série de terme général $\frac{1}{n^2}E[\|\tilde{Y}_n\|^2]$ et $\sigma_p^2 = \sum_{n\geq p+1} \frac{1}{n^2}E[\|\tilde{Y}_n\|^2]$ qui tend vers 0 en décroissant.

2.a - Pour $1 \leq p < k \leq q$, on a $\tilde{Z}_{p,q} = \tilde{Z}_{p,k} + \tilde{Z}_{k,q}$, utilisant l'inégalité triangulaire $\|\tilde{Z}_{p,q}\| \geq \|\tilde{Z}_{p,k}\| - \|\tilde{Z}_{k,q}\|$ il vient

$$[T = k] \cap [\|\tilde{Z}_{kq}\| < \epsilon] \subset [T = k] \cap [\|\tilde{Z}_{p,q}\| \geq \epsilon].$$

Avec des conventions naturelles, on a

$$\|\tilde{Z}_{k,q}\| = \|(U_1 \cdots U_k) \sum_{n=k+1}^{q} \frac{1}{n} U_{k+1} \cdots U_{n-1}\tilde{Y}_n\| = \| \sum_{n=k+1}^{q} \frac{1}{n} U_{k+1} \cdots U_{n-1}\tilde{Y}_n\|,$$

de sorte que la v.a. $\|\tilde{Z}_{k,p}\|$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $(X_{k+1}, \ldots, X_q)$, donc indépendante de l'évènement $[T = k]$ qui appartient à la tribu engendrée par $(X_p, \ldots, X_k)$. On a

$$P([T = k])P([\|\tilde{Z}_{k,q}\| < \epsilon]) = P([T = k] \cap [\|\tilde{Z}_{k,q}\| < \epsilon]) \leq P([T = k] \cap ([\|\tilde{Z}_{p,q}\| \geq \epsilon]),$$

puis, par sommation sur k,

$$\sum_{k=p+1}^{q} P([T = k])P([\|\tilde{Z}_{k,q}\| < \epsilon]) \leq P([T < +\infty] \cap [\|\tilde{Z}_{p,q}\| \geq \epsilon]) \leq P([\|\tilde{Z}_{p,q}\| \geq \epsilon]),$$

mais, pour $k = p, \ldots, q$, l'inégalité de Markov montre que

$$P([\|\tilde{Z}_{kq}\| \geq \epsilon]) \leq \frac{1}{\epsilon^2}E[\|\tilde{Z}_{kq}\|^2 \leq \frac{1}{\epsilon^2}\sigma_k^2 \leq \frac{1}{\epsilon^2}\sigma_p^2,$$

d'où $\left(\sum_{k=p+1}^{q} P([T = k])\right)\left(1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}\right) \leq \frac{\sigma_p^2}{\epsilon^2}$ soit

$$P[\max\{\|\tilde{Z}_{p,k}\| : p \leq k \leq q\} > 2\epsilon] = P[T < +\infty] \leq \frac{\sigma_p^2}{\epsilon^2 - \sigma_p^2}.$$

Commentaire : Le point clé est ici l'indépendance de $[T = k]$ et de $\|\tilde{Z}_{k,q}\|$, remarquer que $[T = k]$ et $\tilde{Z}_{k,q}$ ne sont pas indépendants.

2.b - Si (u_n) n'est pas de Cauchy, il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout p, il existe q, $q \geq p$, avec $\|u_p - u_q\| > \epsilon/2$, donc, si $(\epsilon_k)_{k\geq 1}$ est une suite de $\mathbb{R}_+$ tendant vers 0, le sous-ensemble N des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la série ne converge pas s'écrit $N = \bigcup_{k\geq 1} N_k$ où $N_k = \bigcap_p \bigcup_{q\geq p} [\|\tilde{Z}_{p,q}\| > \epsilon_k]$.

Par passage à la réunion croissante et 2.a.

$$P(\bigcup_{q\geq p}[\|\tilde{Z}_{p,q}\| > \epsilon_k]) = \lim_q P([\max\{\|\tilde{Z}_{p,q}\| : k = p+1, \ldots, q\} > \epsilon_k]) \leq \frac{4\sigma_p^2}{\epsilon_k^2 - 4\sigma_p^2},$$

il vient $P(N_k) \leq \inf_p P(\bigcup_{q\geq p}[\|\tilde{Z}_{p,q}\| > \epsilon_k]) = \lim_p \frac{4\sigma_p^2}{\epsilon_k^2 - 4\sigma_p^2} = 0$, d'où $P(N) = 0$.

Commentaire : Rappelons que la convergence en probabilité n'implique pas la convergence p.s.

3.a - D'après le résultat rappelé au début de cette partie, $\lim_n p.s.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\check{U}_{k-1}\check{Y}_k = 0$, mais $\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\check{U}_{k-1}E[Y_k']\| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|E[Y_k']\|$ et $\lim_k E[Y_k'] = \lim_k E[Y_1 1_{[\|Y_1\|\leq k]}] = E[Y_1] = 0$ montrent que $\lim_n p.s.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\check{U}_{k-1}E[Y_k'] = 0$, d'où $\lim_n p.s.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\check{U}_{k-1}Y_k' = 0$.

3.b - On a

$$P([Y_n' \neq Y_n]) = P([\|Y_n\| > n]) = P([\|Y_1\| > n]) = \sum_{k\geq n} P([k < \|Y_1\| \leq k+1]),$$

par sommation sur n dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

$$\sum_{n\geq 1} P([Y_n' \neq Y_n]) = \sum_{k\geq 1} kP([k < \|Y_1\| \leq k+1]) \leq E[\|Y_1\|] < +\infty,$$

d'où, d'après le lemme de Borel-Cantelli, $P(\liminf_n [Y_n' = Y_n]) = 1$.
Si $\omega \in \liminf_n [Y_n' = Y_n]$, les suites $(Y_n(\omega))_n$ et $(Y_n'(\omega))_n$ coïncident à partir d'un certain rang, par conséquent $\lim_n(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\check{U}_{k-1}Y_k'(\omega) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\check{U}_{k-1}Y_k(\omega)) = 0$, finalement $\lim_n p.s.\frac{1}{n}Z_n = 0$.

Commentaire : La condition $P(\liminf_n[Y'_n = Y_n]) = 1$ ne signifie pas qu'il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $Y'_n = Y_n$ p.s.

4 - Introduisons les v.a. X_n^0 définies en B.3.a, on a $Z_n = Z_n^0 + a_0 - U_1 \cdots U_n a_0$, comme $\|a_0 - U_1 \cdots U_n a_0\| \leq 2\|a_0\|$ et que $\lim_n p.s.\frac{1}{n} Z_n^0 = 0$, il vient $\lim_n p.s.\frac{1}{n} Z_n = 0$.

$$(U_n \cdots U_1)^* L_n x = (U_n \cdots U_1)^* (U_n \cdots U_1 x + S_n) = x + (U_n \cdots U_1)^* S_n,$$

$$(U_n \cdots U_1)^* S_n = U_1^* \cdots U_{n-1}^* (U_n^* Y_n) + U_1^* \cdots U_{n-2}^* (U_{n-1}^* Y_{n-1}) + \cdots + U_1^* Y_1,$$

il s'agit de la seconde composante Z_n^{00} du produit R_n^{00} associé à la suite de v.a. de G $X_n^{00} = (U_n^*, U_n^* Y_n)$, $n \geq 1$, ces v.a. satisfont aux mêmes hypothèses que les v.a. X_n, 3. montre que $\lim_n p.s.\|\frac{1}{n}(U_n \cdots U_1)^* L_n x\| = 0$ donc $\lim_n p.s.\frac{1}{n} L_n x = 0$.

- D -

1.a - $\frac{1}{\sqrt{k}} Z_k$ a un moment d'ordre 2, sa fonction caractéristique est donc de classe C^2 et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 en 0 sont données, pour $r, s = 1, 2$, par

$$D_r \phi_k(0) = iE[\langle \frac{1}{\sqrt{k}} Z_k, e_r \rangle] = 0, \ D_{rs}^2 \phi_k(0) = -E[\langle \frac{1}{\sqrt{k}} Z_k, e_r \rangle \langle \frac{1}{\sqrt{k}} Z_k, e_s \rangle] = -(\overline{C}_k)_{rs},$$

il suffit alors d'écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 en 0.

Commentaire : Relire le chapitre du cours concernant la dérivabilité d'une fonction caractéristique.

1.b - Puisque $\phi_k(0) = 1$, que ϕ_k est continue et que $\lim_m \lambda_m = 0$, on peut en désignant par log la détermination principale du logarithme complexe dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ écrire, pour x fixé et m assez grand, $\phi_k(\lambda_m x) = \exp \log \phi_k(\lambda_m x)$ et, en utilisant le développement limité à l'ordre 1 de $\log(1+z)$ au voisinage de 0,

$$(\phi_k(\lambda_m x))^{\ell_m} = \exp \ell_m \log \phi_k(\lambda_m x) = \exp \ell_m \{-\frac{1}{2} \overline{Q}_k(\lambda_m x) + \lambda_m^2 \|x\|^2 \epsilon_k^1(\lambda_m x)\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2} \ell_m \lambda_m^2 (\overline{Q}_k(x) - 2\|x\|^2 \epsilon_k^1(\lambda_m x))\} \quad \text{où} \quad \lim_{x \to 0} \epsilon_k^1(x) = 0,$$

on conclut que $\lim_m (\phi_k(\lambda_m x))^{\ell_m} = \exp(-\frac{1}{2} \overline{Q}_k(x))$.

Commentaire : Il s'agit, comme dans le théorème de la limite centrale standart, de l'étude d'une forme indéterminée 1^∞ à valeurs complexes, l'utilisation du logarithme requiert un minimum de précautions.

2 - Désignons par $\mathcal{F}_p$ la tribu engendrée par $(X_1, \cdots, X_p)$

$$Z_{p+q} - Z_p = (U_1 \cdots U_p)(Y_{p+1} + \cdots + U_{p+1} \cdots U_{p+q-1} Y_{p+q}) = (U_1 \cdots U_p) Z_{p,p+q},$$

où $Z_{p,p+q}$ est une v.a. indépendante de $\mathcal{F}_p$ de même loi que Z_q, en appliquant B.1, il vient

$$E[\exp i\langle x, Z_{p+q} - Z_p\rangle | \mathcal{F}_p] = E[\exp i\langle (U_1 \cdots U_p)^* x, Z_{p,p+q}\rangle | \mathcal{F}_p] = \phi_q(\sqrt{q}(U_1 \cdots U_p)^* x)$$

d'où

$$\phi_{p+q}(\sqrt{q+p}\ x) = E[E[\exp i\langle x, Z_{p+q}\rangle | \mathcal{F}_p]]$$

$$= E[\exp i\langle x, Z_p\rangle E[\exp i\langle x, Z_{p+q} - Z_p\rangle | \mathcal{F}_p]] = E[\exp i\langle x, Z_p\rangle \phi_q(\sqrt{q}(U_1 \cdots U_p)^*)].$$

Commentaire : Ici, comme en B-1-b et B-1-c, le conditionnement est un outil commode pour le calcul de l'espérance.

3.a - Pour $v \in SO(2)$ et $x \in \mathbb{R}^2$, $\|vx\| = \|x\|$ donc d'après 1.a.

$$\phi_k(x) - \phi_k(vx) = \frac{1}{2}[(\overline{Q}_k(vx) - \sigma^2\|vx\|^2) - (\overline{Q}_k(x) - \sigma^2\|x\|^2)] + \|x\|^2(\epsilon_k^1(x) - \epsilon_k^1(vx)),$$

utilisant l'inégalité de Schwarz, on a

$$|\overline{Q}_k(vx) - \sigma^2\|vx\|^2| = |\langle(\overline{c}_k - \sigma^2 e)vx, vx\rangle| \leq \rho_k\|x\|^2,$$

d'où

$$|\phi_k(x) - \phi_k(vx)| \leq (\rho_k + [|\epsilon_k^1(x)| + \sup\{|\epsilon_k^1(vx)| : v \in SO(2)\}])\ \|x\|^2,$$

le crochet définit une fonction ϵ_k ayant la propriété requise.

3.b - L'inégalité est immédiate pour $n = 1$. Supposons la correcte à l'ordre n et établissons la à l'ordre $n+1$.

Utilisant 2. avec $p = kn$, $q = k$ et en substituant $\frac{1}{\sqrt{k}}x$ à x, on a

$$\phi_{k(n+1)}(\sqrt{n+1}\ x) - (\phi_k(x))^{n+1} = E[\exp i\langle \frac{x}{\sqrt{k}}, Z_{nk}\rangle \phi_k(\sqrt{k}\ \check{U}_{kn}^* \frac{x}{\sqrt{k}})] - (\phi_k(x))^{n+1}$$

$$= E[\exp i\langle \frac{x}{\sqrt{k}}, Z_{nk}\rangle(\phi_k(\check{U}_{kn}^* x) - \phi_k(x))] + [\phi_{nk}(\sqrt{n}\ x) - (\phi_k(x))^n]\phi_k(x),$$

puisque les exponentielles sont de module 1, on en déduit

$$|\phi_{k(n+1)}(\sqrt{n+1}\ x) - (\phi_k(x))^{n+1}| \leq E[|\phi_k(\check{U}_{kn}^* x) - \phi_k(x)|] + |\phi_{nk}(\sqrt{n}\ x) - (\phi_k(x))^n|,$$

on conclut grâce à 3.a et à l'hypothèse de récurrence.

4 - Utilisant de nouveau 2. avec $p = kn$, $q = r$ et en substituant $\frac{1}{\sqrt{kn+r}}x$ à x, on a

$$\phi_{kn+r}(x) - \phi_{kn}(\sqrt{\frac{kn}{kn+r}}\, x) = \phi_{kn+r}(\sqrt{kn+r}\frac{x}{\sqrt{kn+r}}) - \phi_{kn}(\sqrt{kn}\frac{x}{\sqrt{kn+r}})$$

$$= E[\exp i\langle \frac{x}{\sqrt{kn+r}}, Z_{kn}\rangle \phi_r(\sqrt{r}\check{U}^*_{kn}\frac{x}{\sqrt{kn+r}})] - E[\exp i\langle \frac{x}{\sqrt{kn+r}}, Z_{kn}\rangle]$$

$$= E[\exp i\langle \frac{x}{\sqrt{kn+r}}, Z_{kn}\rangle (\phi_r(\sqrt{\frac{r}{kn+r}}\check{U}^*_{kn+r}x) - 1)],$$

d'où

$$|\phi_{kn+r}(x) - \phi_{kn}(\sqrt{\frac{kn}{kn+r}}x)| \leq \sup\{|\phi_r(\sqrt{\frac{r}{kn+r}}vx) - 1| : v \in SO(2)\}$$

mais, pour $v \in SO(2)$ et $r = 0, \ldots, k-1$, $\left\|\sqrt{\frac{r}{kn+r}}vx\right\| \leq \frac{\|x\|}{\sqrt{n}}$ et l'assertion résulte de la continuité à l'origine des fonctions ϕ_r, $r = 0, \ldots, k-1$.

5.a - Ecrivons $m = kn + r$, $0 \leq r < k$,

$$|\phi_m(x) - \exp(-\frac{1}{2}\overline{Q}_k(x))| \leq |\phi_m(x) - \phi_{kn}(\sqrt{\frac{kn}{kn+r}}x)|$$

$$+|\phi_{kn}(\sqrt{\frac{kn}{kn+r}}x) - (\phi_k(\sqrt{\frac{k}{kn+r}}x))^n| + |(\phi_k(\sqrt{\frac{k}{kn+r}}x))^n - \exp(-\frac{1}{2}\overline{Q}_k(x))|,$$

d'après 3.b le terme central du second membre est majoré par

$$(n-1)(\rho_k + \epsilon_k(\sqrt{\frac{k}{kn+r}}x))\frac{k}{kn+r}\|x\|^2;$$

lorsque $m \to +\infty$ les valeurs correspondantes de n et r sont notées $n(m)$ et $r(m)$, $n(m) \to +\infty$ tandis que $0 \leq r(m) < k$, utilisant 4 et 1.b avec $\ell_m = n(m)$ et $\lambda_m = \sqrt{\frac{k}{kn(m)+r(m)}}$, on conclut que $\limsup_m |\phi_m(x) - \exp(-\frac{1}{2}\overline{Q}_k(x))| \leq \rho_k\|x\|^2$.

5.b - On a successivement

$$|\phi_m(x) - \exp(-\frac{\sigma^2}{2}\|x\|^2)| \leq |\phi_m(x) - \exp(-\frac{1}{2}\overline{Q}_k(x))| + |\exp(-\frac{1}{2}\overline{Q}_k(x)) - \exp(-\frac{\sigma^2}{2}\|x\|^2)|,$$

$$\limsup_m |\phi_m(x) - \exp(-\frac{\sigma^2}{2}\|x\|^2)| \leq \rho_k\|x\|^2 + |\exp(-\frac{1}{2}\overline{Q}_k(x)) - \exp(-\frac{\sigma^2}{2}\|x\|^2)|,$$

puisque, d'après B.2, $\lim_k \rho_k = 0$ par passage à la limite en k, il vient

$$\lim_m \phi_m(x) = \exp(-\frac{\sigma^2}{2}\|x\|^2)$$

et $(\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a. N gaussienne centrée de $I\!R^2$ de matrice de covariance $\sigma^2 e$.

6 - Le résultat ci-dessus s'applique à la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n^0)_{n\geq 1}$ définie en B.3.b, mais, avec les notations de cette question, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n - \frac{1}{\sqrt{n}}Z_n^0 = \frac{1}{\sqrt{n}}(U_1\cdots U_n a_0 - a_0)$$

de l'inégalité $\|\frac{1}{\sqrt{n}}(U_1\cdots U_n a - a)\| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}\|a\|$, il résulte que le second membre converge vers 0 en probabilité et donc que les suites $(\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n)_{n\geq 1}$ et $(\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n^0)_{n\geq 1}$ ont même limite en loi.

Les v.a. S_n et Z_n ont même loi donc $(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers N ; puisque $(\frac{1}{\sqrt{n}}U_n\cdots U_1 x)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0, on conclut à l'aide de la relation

$$\frac{1}{\sqrt{n}}L_n x = \frac{1}{\sqrt{n}}U_n\cdots U_1 x + \frac{1}{\sqrt{n}}S_n$$

que $(\frac{1}{\sqrt{n}}L_n x)_{n\geq 1}$ converge en loi vers N.

- E -

1 - Un passage en coordonnées polaires permet d'écrire

$$\begin{aligned} P([\sqrt{\frac{k}{n}}N \in B_\epsilon]) &= \int_{\{x\,:\,\|x\|\leq\epsilon\sqrt{\frac{n}{k}}\}} \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}\|x\|^2)dx \\ &= \int_0^{\epsilon\sqrt{\frac{n}{k}}} \frac{1}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}r\,dr = 1-\exp(-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}\frac{n}{k}). \end{aligned}$$

La fonction positive $f_\epsilon(t) = \dfrac{1}{\epsilon^2}(1-\exp(-\dfrac{\epsilon^2}{2\sigma^2}\dfrac{1}{t}))$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité à 0, la suite de ses sommes de Rieman sur $[0,1]$ est donc convergente et

$$\lim_n \frac{1}{n\epsilon^2}\sum_{k=1}^n P([\sqrt{\frac{k}{n}}N \in B_\epsilon]) = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f_\epsilon(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f_\epsilon(t)dt = \alpha(\epsilon),$$

d'après le lemme de Fatou, $\liminf\limits_{\epsilon\to 0}\alpha(\epsilon) \geq \displaystyle\int_0^1 \liminf_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{2\sigma^2 t}dt = +\infty$.

Commentaire : Formes erronées de la densité gaussienne.

2.a Soit r tel que $g(x)=0$ pour $\|x\|\geq r$, si s et $t\in[c,1]$

$$\|g_s - g_t\|_\infty = \sup\{|g(\sqrt{s}\,x - g(\sqrt{t}\,x)| : x\in I\!R^2, \|x\|\leq \frac{r}{\sqrt{c}}\}$$

de sorte que, d'après la continuité uniforme de g, l'application $s \to g_s$ est continue du compact $[c,1]$ dans $CK(\mathbb{R}^2)$, K est donc compact.

2.b - Définissons les formes linéaires ψ_n sur $CK(\mathbb{R}^2)$ par

$$\psi_n(f) = E[f(\frac{1}{\sqrt{n}}Z_n)] - E[f(N)],$$

nous avons établi en - D - que ces formes linéaires convergent simplement vers 0, comme elles sont de normes ≤ 2 donc équicontinues, elles convergent uniformément sur le compact K.

Soit $c, 0 < c < 1$, notant $[nc]$ la partie entière de nc, on a

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{[nc]} + \sum_{k=[nc]+1}^{n})|\psi_n(g_{\frac{k}{n}})| \\ &\leq \frac{1}{n}[nc]\ 2\|g\|_\infty + \frac{1}{n}(n-[nc])\sup\{|\psi_n(g_t)| : t \in [c,1]\} \end{aligned}$$

d'où $\limsup_n d_n \leq 2c\|g\|_\infty$ de l'arbitraire de c, il vient $\limsup_n d_n = 0 = \lim_n d_n$.

3 - Soit $g \in CK(\mathbb{R}^2)$ telle que $1_{B_{\epsilon/2}} \leq g \leq 1_{B_\epsilon}$, on a

$$\frac{1}{n\epsilon^2}E[\sum_{k=1}^{n} 1_{B_\epsilon}(\frac{1}{\sqrt{n}}Z_k)] \geq \frac{1}{n\epsilon^2}\sum_{k=1}^{n} E[g_{k/n}(N)]$$

$$+\frac{1}{n\epsilon^2}\sum_{k=1}^{n}(E[g_{k/n}(\frac{1}{\sqrt{k}}Z_k)] - E[g_{k/n}(N)])$$

$$\geq \frac{1}{n\epsilon^2}\sum_{k=1}^{n} E[1_{B_{\epsilon/2}}(\sqrt{\frac{k}{n}}N)] - \frac{1}{\epsilon^2}d_n,$$

l'on conclut d'après 2.b. et 1.

4.a - Soit $\mathcal{F}_k$ la tribu engendrée par $(X_1,\ldots,X_k)$, en notant que $[T=k] \in \mathcal{F}_k$ et, en faisant usage de B.1, il vient, pour $n \geq k$

$$E[1_{[T=k]}1_A(gR_n)] = E[1_{[T=k]}E[1_A(gR_n)|\mathcal{F}_k]] = E[1_{[T=k]}\phi_n(X_1,\ldots,X_k)]$$

où ϕ_n est la fonction sur G^k définie par

$$\phi_n(g_1,\ldots,g_k) = E[1_A(gg_1\cdots g_kX_{k+1}\cdots X_n)] = E[1_A(gg_1\cdots g_kX_1\cdots X_{n-k})].$$

En utilisant les facilités de calcul dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on a

$$\sum_{n\geq k}\phi_n(g_1,\ldots,g_k) = V(gg_1\cdots g_k, A),$$

$$E[1_{[T=k]}\sum_{n\geq 1}1_A(gR_n)] = \sum_{n\geq k}E[1_{[T=k]}1_A(gR_n)]$$

$$= E[1_{[T=k]}\sum_{n\geq 1}\phi_n(X_1,\dots,X_k)] = E[1_{[T=k]}V(gR_k,A)].$$

$$V(g,A) = E[1_{[T<+\infty]}\sum_{n\geq 0}1_A(gR_n)] = \sum_{k\geq 0}E[1_{[T=k]}\sum_{n\geq 0}1_A(gR_n)]$$

$$= \sum_{k\geq 0}E[1_{[T=k]}V(gR_k,A)] \leq \sum_{k\geq 0}E[1_{[T=k]}\sup\{V(h,A) : h\in A\}]$$

$$= P([T<+\infty])\sup\{V(h,A) : h\in A\} \leq \sup\{V(h,A) : h\in A\}.$$

4.b - D'après a.

$$H(B(x,r)) = V((e,0),B'(x,r)) \leq \sup\{V(u,y),B'(x,r)) : (u,y)\in B'(x,r)\},$$

or, si $(u,y)\in B'(x,r)$ et si $g=(v,z)\in G$ est tel que $(u,y)(v,z)=(uv,y+uz)\in B'(x,r)$ on a $\|y-x\|\leq r$ et $\|y+uz-x\|\leq r$ donc $\|z\|\leq 2r$ et $g\in B'_{2r}$, de sorte que, pour $(u,y)\in B'(x,r)$, $P([(u,y)R_n\in B'(x,r)])\leq P([R_n\in B'_{2r}])$ d'où $H(B(x,r))\leq H(B_{2r})$.

Il existe $k\in I\!N, k<(2a+3)^2$, et $x_i\in I\!R^2, i=1,\dots,k$, tels que

$$B_{ar}\subset\bigcup_{i=1}^{k}B(x_i,r) \text{ d'où } H(B_{ar})\leq\sum_{i=1}^{k}H(B(x_i,r))\leq(2a+3)^2H(B_{2r})\leq 25a^2H(B_{2r}).$$

4.c -

$$E[\sum_{n\geq 0}1_{B_r}(L_n0)] = \sum_{n\geq 0}E[1_{B_r}(S_n)] = \sum_{n\geq 0}E[1_{B_r}(Z_n)] = H(B_r).$$

Or, pour ϵ et n tels que $a=\frac{2\epsilon\sqrt{n}}{r}>1$, on a successivement

$$H(B_r)\geq\frac{1}{25a^2}H(B_{ar/2})\geq\frac{1}{25a^2}E[\sum_{k=1}^{n}1_{B_{ar/2}}(Z_k)]$$

$$=\frac{1}{25a^2}E[\sum_{k=1}^{n}1_{B_{ar/2\sqrt{n}}}(\frac{1}{\sqrt{n}}Z_k)]=\frac{r^2}{100\epsilon^2 n}E[\sum_{k=1}^{n}1_{B_\epsilon}(\frac{1}{\sqrt{n}}Z_k)],$$

$$H(B_r)\geq\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n}\frac{r^2}{100\epsilon^2 n}E[\sum_{k=1}^{n}1_{B_\epsilon}(\frac{1}{\sqrt{n}}Z_k)]=+\infty.$$
