Sixième partie

Problèmes d'analyse

18

Une construction des fonctions logarithmes

18.1 Énoncé

Le but du problème est de montrer, avec un minimum de moyens, le résultat suivant :

Théorème 18.1 *Pour tout réel $a > 1$, il existe une unique fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que :*
- *f est strictement croissante ;*
- *$f(a) = 1$;*
- *pour tous x, y dans $]0, +\infty[$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.*

Un résultat analogue pour $0 < a < 1$ s'en déduira.

Les fonctions puissances rationnelles $x \mapsto x^r$, où $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in]0, +\infty[$ sont supposées construites.

1. Montrer que si f est une fonction vérifiant les conditions du théorème 18.1, alors :
   (a) $f(1) = 0$;
   (b) pour tout x dans $]0, +\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}$, $f(x^n) = nf(x)$;
   (c) pour tout x dans $]0, +\infty[$ et tout r dans $\mathbb{Q}$, $f(x^r) = rf(x)$;
   (d) pour tout r dans $\mathbb{Q}$, $f(a^r) = r$.
2. Montrer que pour tout x dans $]0, +\infty[$, il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a^m \leq x < a^{m+1}$.
3. Pour tout x dans $]0, +\infty[$, on désigne par E_x la partie de $\mathbb{Q}$ définie par :

$$E_x = \{r \in \mathbb{Q} \mid a^r \leq x\}.$$

   (a) Montrer que E_x n'est pas vide.
   (b) Montrer que E_x est majoré.
4. On désigne par g la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ g(x) = \sup(E_x) \tag{18.1}$$

   et f est une fonction qui vérifie les conditions du théorème 18.1, en supposant qu'une telle fonction existe.

   (a) Justifier la définition de la fonction g.

(b) Montrer que :
$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[,\ g(x) \leq f(x).$$

(c) Soit x un réel strictement positif.

i. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel r tel que :
$$f(x) < r < g(x) + \varepsilon.$$

ii. En déduire que $f(x) = g(x)$.

On a donc montré que si f est une fonction qui vérifie les conditions du théorème 18.1, c'est nécessairement la fonction g.

5. Il nous reste à montrer que, réciproquement la fonction g définie par (18.1) convient bien.

(a) Montrer que $g(a) = 1$.

(b) Montrer que si r, s sont deux nombres rationnels tels que $a^r \leq x \leq a^s$, alors $r \leq g(x) \leq s$.

(c) Soient x, y deux réels strictement positifs et n un entier naturel non nul. On désigne par p et q deux entiers relatifs tels que $a^p \leq x^n < a^{p+1}$ et $a^q \leq y^n < a^{q+1}$ (question 2).

i. Montrer que :
$$|g(xy) - g(x) - g(y)| \leq \frac{2}{n}.$$

ii. En déduire que $g(xy) = g(x) + g(y)$.

(d)

i. Montrer que $g(x) > 0$ pour tout réel $x > 1$.

ii. En déduire que la fonction g est strictement croissante.

La fonction g ainsi définie, pour $a > 1$, est appelée logarithme de base a et notée $\log_a$. On a donc :
$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[,\ \log_a(x) = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid a^r \leq x\}$$
et c'est l'unique fonction vérifiant les conditions du théorème 18.1.

6. Montrer que pour tout réel $a \in \left]0, 1\right[$, il existe une unique fonction $f : \left]0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ telle que :
– f est strictement décroissante ;
– $f(a) = 1$;
– pour tous x, y dans $\left]0, +\infty\right[$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.
On note encore $\log_a$ cette fonction.

7. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, la fonction $\log_a$ est continue sur $\left]0, +\infty\right[$.

8. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, la fonction $\log_a$ réalise un homéomorphisme de $\left]0, +\infty\right[$ sur $\mathbb{R}$.

9. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur $\left]0, +\infty\right[$ de dérivée $\log_a'(x) = \dfrac{\alpha}{x}$ où α est une constante réelle non nulle.

18.2 Solution

1.

   (a) De $f(1) = f(1 \cdot 1) = 2f(1)$, on déduit que $f(1) = 0$.

   (b) On procède par récurrence sur $n \geq 0$.
   Pour $n = 0$, on a $f(x^0) = f(1) = 0 \cdot f(x)$ et pour $n = 1$, c'est une trivialité.
   En supposant le résultat acquis au rang $n \geq 1$, on a pour $x > 0$:
$$f\left(x^{n+1}\right) = f(x^n \cdot x) = f(x^n) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1) f(x).$$

   (c) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$0 = f(1) = f\left(x^n x^{-n}\right) = f(x^n) + f\left(x^{-n}\right),$$
   de sorte que $f(x^{-n}) = -f(x^n) = -nf(x)$. On a donc $f(x^p) = pf(x)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
   En écrivant, pour $q \in \mathbb{N}^*$, que $f(x) = f\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q\right) = qf\left(x^{\frac{1}{q}}\right)$, on déduit que $f\left(x^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q} f(x)$ et pour tout $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a :
$$f(x^r) = f\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = pf\left(x^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{p}{q} f(x) = rf(x).$$

   (d) En prenant $x = a$ dans ce qui précède, on a $f(a^r) = rf(a) = r$.

2. Si $x \geq 1$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$ (on a $a > 1$), on peut trouver des entiers naturels n tels que $x < a^n$ et en désignant par $m + 1 \geq 1$ le plus petit de ces entiers, on a $a^m \leq x < a^{m+1}$.
   Si $0 < x < 1$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{a^n} = 0$, on peut trouver des entiers naturels n tels que $\frac{1}{a^n} \leq x$ et en désignant par $p + 1 \geq 1$ le plus petit de ces entiers, on a $\frac{1}{a^{p+1}} \leq x < \frac{1}{a^p}$, soit $a^m \leq x < a^{m+1}$ avec $m = -p - 1$.

3.

   (a) Si $m \in \mathbb{Z}$ est tel que $a^m \leq x < a^{m+1}$, alors $m \in E_x$.

   (b) Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a^m \leq x < a^{m+1}$. Pour tout $r = \frac{p}{q} \in E_x$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a $a^p \leq x^q < a^{q(m+1)}$ et $0 < a^{p-q(m+1)} < 1$, ce qui impose $p - q(m+1) < 1$ puisque $a > 1$. On a donc $r = \frac{p}{q} < m + 1$ pour tout $r \in E_x$ et $m + 1$ est un majorant de E_x.

4.

   (a) L'ensemble E_x est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, il admet donc une borne supérieure $g(x) \in \mathbb{R}$.

   (b) Il s'agit de montrer que $f(x)$ est un majorant de E_x.
   Pour tout $r \in E_x$, on a $a^r \leq x$ et avec la croissance de f, on déduit que $f(a^r) \leq f(x)$ qui, compte tenu de $f(a^r) = r$, donne $r \leq f(x)$. En conséquence $f(x)$ est un majorant de E_x et $f(x) \leq g(x)$ par définition de la borne supérieure.

   (c)

i. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel r tel que $g(x) < r < g(x) + \varepsilon$ et nécessairement $r \notin E_x$, c'est-à-dire que $a^r > x$ qui donne $r > f(x)$ compte tenu de la stricte croissance de f et de $f(a^r) = r$.
On a donc bien $f(x) < r < g(x) + \varepsilon$.

ii. On vient de voir que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $f(x) < g(x) + \varepsilon$, ce qui entraîne $f(x) \leq g(x)$ en faisant tendre ε vers 0. On a donc $f(x) = g(x)$.

5.

(a) On a :

$$E_a = \{r \in \mathbb{Q} \mid a^r \leq a\}_a = \left\{r \in \mathbb{Q} \mid a^{r-1} \leq 1\right\}$$

avec $a > 1$, ce qui équivaut à $E_a =]-\infty, 1] \cap \mathbb{Q}$ et alors $g(a) = \sup(E_a) = 1$.

(b) Si $a^r \leq x \leq a^s$, alors $r \in E_x$ et $r \leq g(x)$. De plus, pour tout $t \in E_x$, on a $a^t \leq x \leq a^s$, donc $a^{t-s} \leq 1$ et $t - s \leq 0$ puisque $a > 1$, c'est-à-dire que s majore E_x et $g(x) \leq s$ par définition de la borne supérieure.

(c)

i. En utilisant le résultat de la question précédentes, on déduit des inégalités $a^{\frac{p}{n}} \leq x < a^{\frac{p+1}{n}}$, $a^{\frac{q}{n}} \leq y < a^{\frac{q+1}{n}}$ et $a^{\frac{p+q}{n}} \leq xy < a^{\frac{p+q+2}{n}}$ que $\dfrac{p}{n} \leq g(x) \leq \dfrac{p+1}{n}$, $\dfrac{q}{n} \leq g(x) \leq \dfrac{q+1}{n}$ et $\dfrac{p+q}{n} \leq g(xy) \leq \dfrac{p+q+2}{n}$, ce qui entraîne :

$$-\frac{2}{n} \leq g(xy) - g(x) - g(y) \leq \frac{2}{n}.$$

ii. Comme $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque dans les inégalités précédentes, en le faisant tendre vers l'infini, on déduit que $g(xy) = g(x) + g(y)$.

(d)

i. Avec $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ (voir l'exercice 3.36 pour une démonstration qui n'utilise pas la fonction ln) et $x > 1$, on déduit qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $a^{\frac{1}{n}} < x$. Le nombre rationnel $\dfrac{1}{n}$ est donc dans E_x et $g(x) \geq \dfrac{1}{n} > 0$.

ii. Pour $0 < x < y$, on a $\dfrac{y}{x} > 1$, donc $g\left(\dfrac{y}{x}\right) > 0$ et :

$$g(y) = g\left(x\frac{y}{x}\right) = g(x) + g\left(\frac{y}{x}\right) > g(x).$$

6. Si f est une fonction qui vérifie ces conditions on a alors $f(1) = 0$ (même démonstration qu'en 1a). De $0 = f(1) = f\left(a\dfrac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\dfrac{1}{a}\right)$, on déduit que $f\left(\dfrac{1}{a}\right) = -f(a) = -1$ et la fonction $-f$ vérifie les conditions du théorème 18.1 avec $-f\left(\dfrac{1}{a}\right) = 1$, ce qui équivaut à dire que $-f = \log_{\frac{1}{a}}$. Réciproquement la fonction $-\log_{\frac{1}{a}}$ convient. L'unique solution de ce problème est donc $\log_a = -\log_{\frac{1}{a}}$.

7. Avec $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$ pour $x > 0$ et $y > 0$, il suffit de montrer la continuité en 1. En effet si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs qui converge vers x, alors la suite $\left(\frac{x_n}{x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et la continuité de $\log_a$ en 1 nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty}(\log_a(x_n) - \log_a(x)) = \lim_{n\to+\infty}\log_a\left(\frac{x_n}{x}\right) = \log_a(1) = 0.$$

Avec $\log_a = -\log_{\frac{1}{a}}$, il nous suffit de montrer ce résultat pour $a > 1$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ 1 - \varepsilon < x_n < 1 + \varepsilon.$$

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{m\to+\infty} a^{\frac{1}{m}} = 1$ avec $a^{\frac{1}{m}} > 1$ pour $a > 1$, il existe un entier m_0 tel que :

$$\forall m \geq m_0,\ 1 < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon,\ 1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{m}} < 1.$$

19

Une construction des fonctions exponentielles

19.1 Énoncé

Pour tout réel $a > 0$, la fonction $r \mapsto a^r = \sqrt[q]{a^p}$, où $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, est supposée construite. Cette fonction réalise un morphisme du groupe additif $(\mathbb{Q}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^{+,*}, \cdot)$ et elle constante égale à 1 pour $a = 1$, strictement croissante pour $a > 1$ et strictement décroissante pour $a < 1$.

– I – Résultats préliminaires

Les questions qui suivent doivent être résolues sans utiliser les fonctions ln ou exp.
Pour cette partie a désigne un réel strictement positif.

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{a}\right) = 1$.
2. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels convergente vers 0. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (a^{r_n}) = 1$.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction u_n par :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ u_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$$
   (a) Montrer que la fonction $v_n = u_n - u_{n+1}$ est strictement décroissante sur $]0, 1[$, strictement croissante sur $]1, \infty[$ avec $v_n(1) = 0$.
   (b) En déduire que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+,*} \setminus \{1\}$, la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
   (c) Montrer que la suite $\left(n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right)_{n \geq 1}$ converge vers un réel $\lambda(a)$ avec $\lambda(a) = 0$ pour $a = 1$, $\lambda(a) > 0$ pour $a > 1$ et $\lambda(a) < 0$ pour $0 < a < 1$.
4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et monotone. Montrer que f est continue en 0 si, et seulement si, $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$.

– II – L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ sur $\mathbb{R}$

On se donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et telle que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) f(y). \tag{19.1}$$
On peut remarquer que la fonction identiquement nulle vérifie bien cette équation fonctionnelle.

1. Montrer que si la fonction f s'annule en un point α, c'est alors la fonction identiquement nulle.

   On suppose à partir de cette question que f n'est pas la fonction nulle.
2. Calculer $f(0)$.
3. Montrer que f est à valeurs strictement positives.
4. Montrer que pour tout réel x, on a $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

   On note $a = f(1)$.
5. Montrer que, pour tout réel x et pour tout entier naturel n, on a $f(nx) = (f(x))^n$.
6. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$, puis que pour tout nombre rationnel r, on a $f(r) = a^r$.
7. Montrer que f est croissante [resp. strictement croissante] si, et seulement si, $f(x) \geq 1$ [resp. $f(x) > 1$] pour tout réel $x > 0$. De manière analogue, on vérifie que f est décroissante [resp. strictement décroissante] si, et seulement si, $f(x) \leq 1$ [resp. $f(x) < 1$] pour tout réel $x > 0$.
8. Que peut-on dire si $a = 1$ et $f(x) \geq 1$ [resp. $f(x) \leq 1$] pour tout réel $x > 0$?
9. Donner un exemple de fonction f vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ telle que $a = f(1) > 1$, la restriction de f à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante et la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est constante égale à 1.
10. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(f\left(-\dfrac{1}{n}\right)\right) = 1$.
11. On suppose que f est monotone.
    (a) Montrer que f est continue en 0.
    (b) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
    (c) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f' = \lambda(a) f$, où la constante réelle est celle définie en **I.3c**.
12. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est alors monotone. Les conditions : f monotone, f continue en 0, f continue sur $\mathbb{R}$ et f dérivable sur $\mathbb{R}$ sont donc équivalentes.
13. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, il existe au plus une fonction monotone f vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ et telle que $f(1) = a$.
14. On suppose toujours que f est monotone.

    Montrer que si $a > 1$ [resp. $0 < a < 1$] alors f est strictement croissante avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ [resp. strictement décroissante avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$].

    En déduire que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, sa fonction réciproque f^{-1} réalisant un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f^{-1}(1) = 0 \\ f^{-1}(a) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*}, \ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\lambda(a)} \dfrac{1}{x} \\ \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+,*})^2, \ f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y) \end{cases}$$

– III – Les fonctions exponentielles de base a

On se donne un réel $a > 0$ et on va construire une fonction monotone f qui vérifie l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ sur $\mathbb{R}$ avec $f(1) = a$. Si $a = 1$, on sait que $f = 1$ est la seule solution. On suppose donc $a \neq 1$.

1. Montrer que pour toute suite convergente $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels, la suite réelle $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Montrer que si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de nombres rationnels convergentes vers le même réel x, alors les suites réelles $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a^{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers le même réels.
3. On peut donc définir la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}$$

   où $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres rationnels qui converge vers x. Montrer que cette fonction vérifie bien l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) f(y)$ sur $\mathbb{R}$ avec $f(1) = a$.

On note alors $f_a(x) = a^x$ et on dit que la fonction f_a est la fonction exponentielle de base a.

Pour $a \neq 1$, sa fonction réciproque est la fonction logarithme de base a et elle est notée $\log_a$. Elle est définie par :

$$\begin{cases} \log_a(1) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ (\log_a)'(x) = \dfrac{1}{\lambda(a)} \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \log_a(x) = \frac{1}{\lambda(a)} \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Le logarithme népérien est la fonction ln définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\lambda(a)}$$

et la condition $\log_a(a) = 1$ donne $\lambda(a) = \ln(a)$.

Le nombre e est défini par $\ln(e) = 1$ (ou $\lambda(e) = 1$), de sorte que la fonction e^x est définie par $e^0 = 1$ et $(e^x)' = e^x$. On retrouve bien les définitions habituelles.

19.2 Solution

– I – Résultats préliminaires

1. Avec $\sqrt[n]{1} = 1$ et $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$, il suffit de montrer le résultat pour $a > 1$. On suppose donc que $a > 1$.
   En posant $u_n = \sqrt[n]{a} - 1$, on a $u_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et en utilisant la formule du binôme de Newton, on a :

$$a = (1 + u_n)^n > 1 + nu_n,$$

et :

$$0 < u_n < \frac{a-1}{n}$$

et en conséquence $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 0$ encore équivalent à $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{a}) = 1$.
On peut aussi procéder comme suit. La suite $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante ($\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}$ équivaut à $a < a^{\frac{n+1}{n}} = a\sqrt[n]{a}$ encore équivalent à $\sqrt[n]{a} > 1$) et minorée par 1, elle converge donc vers un réel $\ell \geq 1$. Si $\ell > 1$, pour $\lambda \in \left]1,\ell\right[$ il existe un entier n_0 tel que $\sqrt[n]{a} > \lambda$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne $a > \lambda^n$ pour tout $n \geq n_0$ qui est incompatible avec $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

2. Avec $1^{r_n} = 1$ et $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} = \frac{1}{a^{r_n}}$, il suffit de montrer le résultat pour $a > 1$. On suppose donc que $a > 1$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(r_n) = 0$, pour tout entier $k \geq 1$, il existe un entier n_k tel que :

$$\forall n \geq n_k,\ -\frac{1}{k} < r_n < \frac{1}{k}$$

et avec la stricte croissance de la fonction $r \mapsto a^r$ sur $\mathbb{Q}$, on déduit que :

$$\forall n \geq n_k,\ a^{-\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{a}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}$$

soit :

$$\forall n \geq n_k, -\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{a}}\right) < a^{r_n} - 1 < \sqrt[k]{a} - 1$$

et avec $\lim\limits_{k\to+\infty}(\sqrt[k]{a}) = 1$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $k_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall k \geq k_0,\ 0 < 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{a}} < \varepsilon \text{ et } 0 < \sqrt[k]{a} - 1 < \varepsilon,$$

ce qui donne :

$$\forall n \geq n_{k_0}, -\varepsilon < -\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k_0]{a}}\right) < a^{r_n} - 1 < \sqrt[k_0]{a} - 1 < \varepsilon$$

et signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^{r_n} - 1) = 0$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^{r_n}) = 1$.

3.

(a) La fonction v_n est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec, pour tout réel $x > 0$:

$$v_n'(x) = x^{\frac{1}{n}-1} - x^{\frac{1}{n+1}-1} = x^{-\frac{n-1}{n}} - x^{-\frac{n}{n+1}} = x^{-\frac{n}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right).$$

La fonction v_n est donc strictement décroissante sur $\left]0,1\right[$, strictement croissante sur $\left]1,\infty\right[$ avec $v_n(1) = 0$.

(b) Il en résulte que $v_n(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*} \setminus \{1\}$, ce qui équivaut à $u_n(x) < u_{n+1}(x)$ et la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. Pour $x = 1$, la suite $(u_n(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à 0.

(c) Avec $u_n(1) = 0$, $u_n\left(\dfrac{1}{a}\right) = n\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} - 1\right) = -\dfrac{n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)}{\sqrt[n]{a}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1$, il suffit de montrer le résultat pour $a > 1$. On suppose donc que $a > 1$.
Dans ce cas la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante minorée par 0, elle est convergente vers un réel $\lambda(a) \geq 0$. En fait, avec :

$$a - 1 = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n - 1 = \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1} + \cdots + \sqrt[n]{a} + 1\right)$$

et $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k < a$ pour $a > 1$, $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-1$ (c'est équivalent à $a^k < a^n$ ou à $a^k\left(a^{n-k} - 1\right) > 0$), on déduit que $a - 1 < n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) a$ et $u_n(a) > \dfrac{a-1}{a}$ qui donne $\lambda(a) \geq \dfrac{a-1}{a} > 0$.
Pour $0 < a = \dfrac{1}{b} < 1$ avec $b > 1$, on a :

$$u_n(a) = u_n\left(\frac{1}{b}\right) = -\frac{u_n(b)}{\sqrt[n]{b}} \underset{n\to+\infty}{\to} = -\lambda(b) < 0.$$

4. Supposons f croissante.
Si f est continue en 0 (et non nécessairement monotone), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(0)$ pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers 0. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$.
Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ -\varepsilon < f\left(-\frac{1}{n}\right) - f(0) \text{ et } f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) < \varepsilon.$$

Avec la croissance de f, on déduit que pour tout x dans $\left]-\dfrac{1}{n_0}, \dfrac{1}{n_0}\right[$, on a :

$$-\varepsilon < f\left(-\frac{1}{n_0}\right) - f(0) \leq f(x) - f(0) \leq f\left(\frac{1}{n_0}\right) - f(0) < \varepsilon$$

soit :

$$\left(|x| < \eta = \frac{1}{n_0}\right) \Rightarrow \left(|f(x) - f(0)| < \varepsilon\right).$$

La fonction f est donc continue en 0.

– II – L'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ sur $\mathbb{R}$

1. Si $f(\alpha) = 0$, on a alors pour tout réel x :

$$f(x) = f(x - \alpha + \alpha) = f(x - \alpha) f(\alpha) = 0$$

c'est-à-dire que $f = 0$.

2. On a $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$ avec $f(0)$ non nul puisque $f \neq 0$, ce qui équivaut à $f(0) = 1$.

3. Pour tout réel x, on a $f(x) \neq 0$ et :

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0.$$

4. Pour tout réel x, on a :

$$1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) f(-x)$$

ce qui entraîne $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

5. On procède par récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n = 0$, on a $f(0) = 1 = (f(x))^0$ et pour $n = 1$, le résultat est trivial. En supposant que $f(nx) = (f(x))^n$ pour $n \geq 1$, on a $f((n+1)x) = f(nx) f(x) = (f(x))^n f(x) = (f(x))^{n+1}$.

6. Avec $a = f(1) = f\left(n\dfrac{1}{n}\right) = \left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$ et $f\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on déduit que $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Si $r = \dfrac{p}{q}$ est un nombre rationnel positif avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a alors :

$$f(r) = f\left(p\frac{1}{q}\right)\left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}} = a^r.$$

Si $r = -s$ est un nombre rationnel négatif, on a alors :

$$f(r) = f(-s) = \frac{1}{f(s)} = \frac{1}{a^s} = a^{-s} = a^r.$$

Le résultat est donc valable pour tout nombre rationnel.

7. Supposons que $f(x) \geq 1$ pour tout réel $x > 0$. Pour $x \geq y$, on a :

$$\frac{f(x)}{f(y)} = f(x) f(-y) = f(x - y) \geq 1$$

donc $f(x) \geq f(y)$ et f est croissante. Réciproquement si f est croissante alors $f(x) \geq f(0) = 1$ pour tout $x > 0$. Le cas des inégalités strictes se traite de manière analogue.

8. Si $a = f(1) = 1$ et $f(x) \geq 1$ pour tout réel $x > 0$, alors f est constante égale à 1. En effet, pour tout entier relatif n, on a $f(n) = a^n = 1$ et pour tout réel x de partie entière n, on a $n \leq x < n + 1$ et $1 = f(n) \leq f(x) \leq f(n+1) = 1$, soit $f(x) = 1$.

9. On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et on désigne $(e_i)_{i \in I}$ une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ (utilisation du lemme de Zorn). On définit sur $\mathbb{R}$ l'application $\mathbb{Q}$-linéaire g par $g(e_j) = 1$ et $g(e_i) = 0$ pour tout $i \in I \setminus \{j\}$ où j est fixé dans I, cette fonction g vérifie l'équation fonctionnelle $g(x + y) = g(x) + g(y)$, est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^{g(x)}$ vérifie l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) f(y)$ avec :

$$f(x) = f\left(\sum r_i e_i\right) = 2^{g(\sum r_i e_i)} = 2^{\sum r_i g(e_i)} = 2^{r_j}$$

les sommes considérées étant finies et les r_i rationnels. On a en particulier $f(e_j) = 2$ et $f(e_i) = 1$ pour $i \in I \setminus \{j\}$. Prenant $e_j = 1$ que l'on complète en une base, on a $a = f(1) = 2 > 1$, $f(r) = 2^r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

10. On a $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$ et en première partie, on a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{a}) = 1$.
    Avec $f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$, on déduit qu'on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(f\left(-\dfrac{1}{n}\right)\right) = 1$.
11.
    (a) La fonction f étant monotone sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = f(0)$, on déduit des résultats de la première partie qu'elle est continue en 0.

    (b) Pour tout réels x_0 et x, on a :

    $$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x - x_0 + x_0) - f(x_0)| = |f(x - x_0) f(x_0) - f(x_0)| \\ &= |f(x_0)| \, |f(x - x_0) - 1| \underset{x\to x_0}{\to} 0 \end{aligned}$$

    La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

    (c) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ est intégrable sur tout segment et pour tout réel x, on a :

    $$\int_0^1 f(x+y)\,dy = \int_0^1 f(x) f(y)\,dy = f(x) \int_0^1 f(y)\,dy$$

    et le changement de variable $t = x + y$, nous donne :

    $$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = f(x) \int_0^1 f(y)\,dy$$

    soit, en notant $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ la primitive de f nulle en 0 :

    $$f(x) = \frac{F(x+1) - F(x)}{F(1)}$$

    (on a $F(1) > 0$ car f est continue à valeurs strictement positives). La fonction F étant dérivable (de dérivée égale à f), on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
    En dérivant la relation (19.1) par rapport à y, à x fixé, on a $f'(x+y) = f(x) f'(y)$ et $y = 0$ donne $f'(x) = f'(0) f(x)$ avec

    $$f'(0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \lambda(a).$$

12. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, le raisonnement précédent nous dit que $f' = \lambda(a) f$ avec f à valeurs strictement positives, il en résulte que f est monotone (et même strictement monotone pour $a \neq 1$). On a donc montré que :
    f monotone $\Rightarrow$ f continue en 0 $\Rightarrow$ f continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f dérivable sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f dérivable sur $\mathbb{R}$.
    Ces conditions sont donc équivalentes.
13. On a vu qu'une telle fonction coïncide avec la fonction $r \mapsto a^r$ sur $\mathbb{Q}$ et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. Deux telles fonctions sont donc continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$, elles sont donc égales.

14. Si $a > 1$, on a alors $\lambda(a) > 0$ et f est strictement croissante. On a alors $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ et f n'est pas majorée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Avec $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$, on déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. On procède de même pour $0 < a < 1$.

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, elle réalise donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$, sa fonction réciproque f^{-1} étant de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur $\mathbb{R}$ et on a les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0 \\ f(1) = a \Leftrightarrow f^{-1}(a) = 1 \\ \forall x = f(y) \in \mathbb{R}^{+,*},\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{\lambda(a)}\dfrac{1}{f(y)} = \dfrac{1}{\lambda(a)}\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

et pour tous $x = f(u)$ et $y = f(v)$ dans $\mathbb{R}^{+,*}$ on a :

$$f^{-1}(xy) = f^{-1}(f(u)f(v)) = f^{-1}(f(u+v)) = u + v = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$$

– II – Les fonctions exponentielles de base a

1. On suppose que $a > 1$. Le cas où $a < 1$, se traite de manière analogue.

   (a) On montre que la suite réelle $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Pour tous n, m dans $\mathbb{N}$, on a :

   $$\left|a^{r_m} - a^{r_n}\right| = a^{r_n}\left|a^{r_m - r_n} - 1\right|.$$

   Pour tout entier $k \geq 1$, il existe un entier n_k tel que :

   $$\forall n \geq n_k,\ \forall m \geq n_k,\ -\frac{1}{k} < r_m - r_n < \frac{1}{k}$$

   et avec la stricte croissance de la fonction a^r sur $\mathbb{Q}$, on déduit que :

   $$\forall n \geq n_k,\ \forall m \geq n_k,\ a^{-\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{a}} < a^{r_m - r_n} < a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}$$

   soit :

   $$\forall n \geq n_k,\ \forall m \geq n_k,\ -\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{a}}\right) < a^{r_m - r_n} - 1 < \sqrt[k]{a} - 1$$

   et avec $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\sqrt[k]{a}\right) = 1$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $k_0 \geq 1$ tel que :

   $$\forall k \geq k_0,\ 0 < 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{a}} < \varepsilon \text{ et } 0 < \sqrt[k]{a} - 1 < \varepsilon.$$

   On a donc :

   $$\forall n \geq n_{k_0},\ \forall m \geq n_{k_0},\ -\varepsilon < -\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k_0]{a}}\right) < a^{r_m - r_n} - 1 < \sqrt[k_0]{a} - 1 < \varepsilon.$$

   La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est convergente est bornée, il existe donc un réel $M > 0$ tel que $0 < a^{r_n} \leq M$ pour tout entier n. On a donc :

   $$\forall n \geq n_{k_0},\ \forall m \geq n_{k_0},\ -M\varepsilon < a^{r_n}\left(a^{r_m - r_n} - 1\right) < M\varepsilon$$

   ce qui signifie que la suite $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

(b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = x$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (r_n - s_n) = 0$ et en première partie on a vu que cela entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^{r_n - s_n} - 1) = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^{r_n} - a^{s_n}) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} a^{s_n}$.

(c) La fonction f_a est bien définie puisque la limite existe et ne dépend pas du choix d'une suite de nombres rationnels qui converge vers x.
Pour $x = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$, où $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de nombres rationnels, on a $x + y = \lim\limits_{n\to+\infty} (r_n + s_n)$ et :

$$\begin{aligned} f_a(x+y) &= \lim_{n\to+\infty} a^{r_n+s_n} = \lim_{n\to+\infty} (a^{r_n} a^{s_n}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (a^{r_n}) \lim_{n\to+\infty} (a^{s_n}) = f_a(x)\, f_a(x). \end{aligned}$$

20

Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

20.1 Énoncé

Le but de ce problème est de calculer de deux façons la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie I

1. Rappeler, pour tout entier naturel non nul n, une expression complexe des racines n-èmes de l'unité.
2. Montrer que la fonction homographique $h : z \mapsto \dfrac{z+1}{z-1}$ réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sur lui même.
3. Soit $P : z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ une fonction polynomiale de degré $n \geq 1$ et $(z_k)_{1\leq k\leq n}$ toutes ses racines complexes distinctes ou confondues. Exprimer les quantités $\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} z_k$ et $\sigma_2 = \sum_{1\leq k<j\leq n} z_k z_j$ en fonction de certains des coefficients de P.
4. Montrer que pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\text{cotan}\,(x) < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin\,(x)}. \tag{20.1}$$

5.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, les racines complexes de l'équation :

$$(z+1)^{2n+1} = (z-1)^{2n+1} \tag{20.2}$$

   sont données par :

$$z_k = i\,\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \;\; (k \neq 0 \text{ et } -n \leq k \leq n)$$

(b) Montrer que l'équation (20.2) peut s'écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} z^{2n-2k} = 0 \tag{20.3}$$

c'est-à-dire que si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (20.2), alors $u = z^2$ est solution de :

$$P_n(u) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} u^{n-k} = 0 \tag{20.4}$$

(c) Montrer que :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

(d) En déduire que :

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

(e) En utilisant l'encadrement (20.1), déduire de ce qui précède que :

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{n(2n+2)}{3}.$$

(f) En déduire les sommes des séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Partie II

Pour cette partie, x est un réel dans $]0, \pi[$, n un entier naturel non nul et on note :

$$J_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx},\ C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx),\ S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx),$$

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cos(kx),\ F_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos(kx).$$

1. Montrer que :

$$J_n(x) = e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Montrer que :

$$C_n(x) = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},\ S_n(x) = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3. Montrer que :

$$2C_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1.$$

4. Montrer que :
$$T_n(x) = \frac{n+1}{2}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
5. Montrer que :
$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
Ce résultat est-il encore valable pour $x = 0$ et pour $x = \pi$?
6. Calculer $I_k = \int_0^\pi x\cos(kx)\,dx$ pour tout entier $k \geq 1$.
7. Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$.
8. On note $G_n = \int_0^\pi xF_n(x)\,dx$. Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ convergente vers 0 telle que :
$$G_n = \frac{\pi^2}{2} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k - 1}{k^2} + \alpha_n.$$
9. En utilisant **5.** montrer que $\lim_{n\to+\infty} G_n = 0$.
10. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

20.2 Solution

Partie I

1. Les racines n-èmes de l'unité sont données par :
$$\zeta_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \ (0 \leq k \leq n-1).$$
2. La fonction h est bien définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{C}\setminus\{1\}$ et pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :
$$h(z) = \frac{z+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow z+1 = z-1 \Leftrightarrow 1 = -1,$$
ce qui est impossible. La fonction h est donc à valeurs dans $\mathcal{D}$. De plus pour tout $Z \in \mathcal{D}$, l'équation $Z = \frac{z+1}{z-1}$ a pour unique solution $z = \frac{Z+1}{Z-1}$ dans $\mathcal{D}$, ce qui signifie que h réalise une bijection de $\mathcal{D}$ sur lui même.
3. On a :
$$P(z) = \sum_{k=0}^{n}a_k z^k = a_n\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$$
et en développant le produit, on obtient :
$$P(z) = a_n\left(z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} + \cdots + (-1)^n\sigma_n\right)$$

où $\sigma_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$. L'identification des coefficients de z^{n-1} et z^{n-2} nous donne alors :

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} z_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n},\ \sigma_2 = \sum_{1\leq k<j\leq n} z_k z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

(on $a_n \neq 0$ puisque P est de degré n).

4. En utilisant le théorème des accroissements finis, on a, pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{cases} 0 < \sin(x) = \sin(x) - \sin(0) = x\cos(c_x) < x \\ \tan(x) = \tan(x) - \tan(0) = x\left(1+\tan^2(d_x)\right) > x > 0 \end{cases}$$

avec $0 < c_x, d_x < x$, ce qui donne :

$$0 < \sin(x) < x < \tan(x)$$

ou encore :

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin(x)}.$$

5.

(a) Si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (20.2), on a alors $z \neq 1$ et $Z = \frac{z+1}{z-1}$ est solution de $Z^{2n+1} = 1$, c'est donc une racine $(2n+1)$-ème de l'unité, c'est-à-dire qu'il existe un entier p compris entre 0 et $2n$ tel que :

$$Z = e^{i\frac{2p\pi}{2n+1}}.$$

En écrivant tout entier p compris entre $n+1$ et $2n$, sous la forme $p = 2n+1-k$ avec k compris entre 1 et n, on a :

$$e^{i\frac{2p\pi}{2n+1}} = e^{i\frac{2(2n+1-k)\pi}{2n+1}} = e^{2i\pi}e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}} = e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}}.$$

On a donc :

$$Z \in \left\{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} \mid 0 \leq k \leq n\right\} \cup \left\{e^{-i\frac{2k\pi}{2n+1}} \mid 1 \leq k \leq n\right\}$$

ou encore :

$$Z \in S_n = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} \mid -n \leq k \leq n\right\}.$$

En écrivant que :

$$\left(z \neq 1 \text{ et } Z = \frac{z+1}{z-1}\right) \Leftrightarrow \left(Z \neq 1 \text{ et } z = \frac{Z+1}{Z-1}\right)$$

(la fonction homographique $z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$ réalise une bijection de $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ sur lui même), on déduit que si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (20.2), alors $Z \in S_n \setminus \{1\}$ et il existe un entier k non nul compris entre $-n$ et n tel que :

$$z = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} + 1}{e^{i\frac{2k\pi}{2n+1}} - 1} = \frac{e^{i\frac{k\pi}{2n+1}} + e^{-i\frac{k\pi}{2n+1}}}{e^{i\frac{k\pi}{2n+1}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n+1}}} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$
$$= -i\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

La fonction cotan étant impaire, cela s'écrit aussi :

$$z = z_k = i \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \ (k \neq 0 \text{ et } -n \leq k \leq n)\,.$$

La fonction tan qui est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est injective et en conséquence $z_k \neq z_j$ pour $k \neq j$ dans $\{-n, \cdots, -1, 1, \cdots, n\}$ (les z_k sont bien dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$) c'est-à-dire qu'on a obtenu $2n$ racines distinctes de l'équation (20.2). Comme cette équation est exactement de degré $2n$ (en développant avec la formule du binôme cette équation s'écrit $2\,(2n+1)\,z^{2n} + \cdots = 0$), on a bien toutes les racines.

(b) En écrivant que :

$$\begin{cases} (z+1)^{2n+1} = \sum\limits_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{j} z^{2n+1-j} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} z^{2n+1-2k} + \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} z^{2n+1-(2k+1)} \\ (z-1)^{2n+1} = \sum\limits_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{j} (-1)^{j} z^{2n+1-j} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} z^{2n+1-2k} - \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} z^{2n+1-(2k+1)} \end{cases}$$

on déduit que :

$$Q_{2n}(z) = (z+1)^{2n+1} - (z-1)^{2n+1} = 2 \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} z^{2n-2k}$$

et l'équation (20.2) est bien équivalente à l'équation (20.3) (on détaillé les pointillés de la question précédente).

(c) Comme $Q_{2n}(z) = P_n(z^2)$, on déduit que les $u_k = z_k^2 = -\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, où k est compris entre 1 et n sont des racines de P_n. Comme P_n est de degré n et les u_k, pour k compris entre 1 et n, sont deux à deux distincts (la fonction cotan est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et à valeurs strictement positives), on a ainsi toutes les racines de P_n. La somme des racines du polynôme P_n est :

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} u_k = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{C_{2n+1}^{3}}{C_{2n+1}^{1}} = -\frac{n\,(2n-1)}{3}.$$

On a donc :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n\,(2n-1)}{3}.$$

Pour $n = 1$, on a bien $\operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

(d) En écrivant que, pour tout k compris entre 1 et n, on a :

$$\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{1-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} - 1,$$

on déduit que :

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = T_n + n = \frac{n\,(2n-1)}{3} + n = \frac{2n\,(n+1)}{3}$$

(e) En utilisant l'encadrement (20.1) , on a pour tout k compris entre 1 et n :

$$\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} < \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

et en sommant :

$$\frac{n(2n-1)}{3} = T_n < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < R_n = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

(f) L'inégalité précédente s'écrit :

$$\forall n \geq 1,\ \pi^2\frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \pi^2\frac{2n(n+1)}{3(2n+1)^2}$$

et faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Comme la série est à termes positifs, on peut écrire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

et :

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{3\pi^2}{24}.$$

Partie II

1. Comme $e^{ix} \neq 1$, on a :

$$J_n(x) = e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{ix}\right)^k = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{ix}\frac{e^{i\frac{n}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\frac{e^{-i\frac{n}{2}x}-e^{i\frac{n}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}$$
$$= e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. On a $C_n(x) = \Re(J_n(x))$ et $S_n(x) = \Im(J_n(x))$, ce qui donne :

$$C_n(x) = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},\ S_n(x) = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3. Avec :

$$2\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$(2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b))$, on a :

$$2C_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1.$$

4. On a :

$$T_n(x) = S'_n(x) = \frac{n+1}{2}\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
$$+\frac{n}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$
$$= \frac{n+1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right) + \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\right)$$
$$-\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

avec :

$$\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right) + \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$$

et :

$$\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)$$

ce qui donne :

$$T_n(x) = \frac{n+1}{2}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

5. On a :

$$F_n(x) = 1 + 2C_n(x) - \frac{2}{n+1}T_n(x)$$

avec :

$$2C_n(x) + 1 = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(question **3.**) et :

$$\frac{2}{n+1}T_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

ce qui donne :

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

6. Une intégration par parties donne :

$$I_k = \int_0^\pi x\cos(kx)\,dx = \left[\frac{x}{k}\sin(kx)\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kx)\,dx$$
$$= \frac{1}{k^2}\left[\cos(kx)\right]_0^\pi = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}.$$

7. En écrivant que, pour $k \geq 2$, on a :

$$k-1 \leq t \leq k \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{k} = \int_{k-1}^k \frac{dt}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t},$$

on déduit que :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n)$$

et $\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$.

8. La fonction F_n est en fait définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc G_n est bien définie.
   On a :

$$\begin{aligned} G_n &= \int_0^{\pi} x \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos(kx)\right) dx \\ &= \int_0^{\pi} x dx + 2\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \int_0^{\pi} x \cos(kx)\, dx \\ &= \frac{\pi^2}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right) \end{aligned}$$

   soit :

$$G_n = \frac{\pi^2}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} - \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k}$$

   avec :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k} \right| \leq 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 2 (\ln(n) + 1).$$

   On a donc :

$$G_n = \frac{\pi^2}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} + \alpha_n$$

   avec :

$$|\alpha_n| = \frac{2}{n+1} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k} \right| \leq 4 \frac{\ln(n) + 1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

9. En remarquant que :

$$\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{x \to 0}{\backsim} \frac{\left(\frac{n+1}{2}x\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = (n+1)^2$$

   on déduit que la fonction $h_n : x \mapsto \dfrac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ se prolonge par continuité en 0. Cette fonction est de plus définie en π. On peut donc écrire que :

$$G_n = \frac{1}{n+1} \int_0^{\pi} x \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx.$$

   Pour $0 \leq x \leq \pi$ on a $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \geq \dfrac{x}{\pi}$, donc :

$$0 \leq G_n \leq \frac{\pi^2}{n+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{x} dx = \frac{\pi^2}{n+1} \int_0^{\frac{n+1}{2}\pi} \frac{\sin^2(u)}{u} du$$

   avec :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{n+1}{2}\pi} \frac{\sin^2(u)}{u} du &= \int_0^1 \frac{\sin^2(u)}{u} du + \int_1^{\frac{n+1}{2}\pi} \frac{\sin^2(u)}{u} du \\ &\leq \int_0^1 du + \int_1^{\frac{n+1}{2}\pi} \frac{du}{u} = 1 + \ln\left(\frac{n+1}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

(sur $[0,1]$, on a $0 \leq \dfrac{\sin(u)}{u} \leq 1$), ce qui donne :

$$0 \leq G_n \leq \frac{\pi^2}{n+1}\left(1+\ln\left(\frac{n+1}{2}\pi\right)\right)$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n = 0$.

10. De **8.** et $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n = 0$, on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{4},$$

soit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{4}. \tag{20.5}$$

En notant $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$, on a :

$$S = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{S}{4}$$

soit $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{3}{4}S$ et :

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}S - \frac{3}{4}S = -\frac{1}{2}S.$$

L'égalité (20.5) donne alors $-\dfrac{1}{2}S - S = -\dfrac{\pi^2}{4}$, soit $S = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $T = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

21

Nombres de Bernoulli et fonction dzéta de Riemann

21.1 Énoncé

– I – Polynômes et nombre de Bernoulli

On dit qu'une suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ B'_{n+1} = B_n, \\ \forall n \geq 2,\ B_n(0) = B_n(1). \end{cases} \tag{21.1}$$

On vérifie facilement par récurrence que tous les B_n sont bien des fonctions polynomiales.

1. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de Bernoulli.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est un polynôme de degré n et calculer son coefficient dominant.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \geq 1,\ \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$$
   (c) Montrer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée.
   On dira que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des polynômes de Bernoulli.
2. Montrer que :
   $$\begin{cases} B_1(X) = X - \dfrac{1}{2} \\ B_2(X) = \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{12} \end{cases}$$
3. Calculer B_3 et B_4.
4. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X).$$
5. On définit la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de Bernoulli par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = B_n(0).$$

(a) Calculer b_0, b_1, b_2, b_3 et b_4.

(b) Montrer que $b_n = 0$ pour tout entier $n \geq 3$ qui est impair.

– II – Application au calcul de $\zeta(2k)$

Pour tout entier naturel non nul k, on définit la fonction g_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, 2\pi[\,,\ g_k(x) = B_{2k}\left(\dfrac{x}{2\pi}\right) \\ g_k \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \end{cases}$$

On désigne par $(\alpha_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n(k))_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites réelles définies par :

$$\begin{cases} \alpha_0(k) = \displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)\,dt \\ \forall n \geq 1,\ \alpha_n(k) = 2\displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi nt)\,dt, \\ \forall n \geq 1,\ \beta_n(k) = 2\displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)\sin(2\pi nt)\,dt \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_k est paire.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_k est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction g_1 est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et que pour tout entier relatif p, cette fonction se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2p\pi, 2(p+1)\pi]$ (elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$).
4. Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, la fonction g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que :
$$\forall n \geq 1,\ \forall k \geq 1,\ \beta_n(k) = 0.$$
6. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$ et tout réel x, on a :
$$g_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(k)\cos(nx)\,. \tag{21.2}$$
7. Calculer $\alpha_0(k)\,.$
8. Montrer que :
$$\forall n \geq 1,\ \alpha_n(1) = \frac{2}{(2\pi n)^2}.$$
9. Montrer que :
$$\forall n \geq 1,\ \forall k \geq 2,\ \alpha_n(k) = -\frac{1}{(2\pi n)^2}\alpha_n(k-1)\,.$$
10. En déduire la valeur de $\alpha_n(k)$ pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 2$.
11. Déterminer, pour tout $k \geq 1$, une relation entre $\zeta(2k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ et b_{2k}.
12. Calculer $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\zeta(4) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

– III – Application au calcul de $\sum_{k=1}^{n} k^p$

Pour tout entier naturel p, on désigne par Δ l'application qui associe à tout polynôme P de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ le polynôme $Q = \Delta(P)$ défini par :

$$Q(X) = P(X+1) - P(X)$$

et par E_{p+1} le sous-ensemble de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ formé des polynômes P de degré au plus égal à $p+1$ qui vérifient $\int_0^1 P(x)\,dx = 0$.

1. Montrer que E_{p+1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ et préciser sa dimension.
2. Montrer que l'application Δ est linéaire de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$ et déterminer son noyau.
3. Montrer que l'application Δ réalise un isomorphisme de E_{p+1} sur $\mathbb{R}_p[X]$.
4. Montrer que, pour tout entier naturel p, B_{p+1} est l'unique polynôme de E_{p+1} qui vérifie $\Delta(P) = \dfrac{X^p}{p!}$.
5. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier $n \geq 1$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} k^p = p!\left(B_{p+1}(n+1) - b_{p+1}\right).$$
6. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

21.2 Solution

– I – Polynômes et nombre de Bernoulli

1.

(a) On procède par récurrence sur $n \geq 0$.
Pour $n = 0$, B_0 est bien un polynôme de degré 0 de coefficient dominant $\alpha_{0,0} = 1$.
En supposant que, pour $n \geq 0$, B_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant $\alpha_{n,n} \neq 0$, soit $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} X^k$, on déduit de l'égalité $B'_{n+1} = B_n$, que :

$$B_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_{n,k}}{k+1} X^{k+1} + \alpha_{n+1,0} = \alpha_{n+1,0} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha_{n,j-1}}{j} X^j \qquad (21.3)$$

c'est-à-dire que B_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ de coefficient dominant $\alpha_{n+1,n+1} = \dfrac{\alpha_{n,n}}{n+1} \neq 0$. Cette dernière relation de récurrence nous dit que $\alpha_{n,n} = \dfrac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, le résultat est vrai pour $n = 0$ et en le supposant acquis au rang $n \geq 0$, on a $\alpha_{n+1,n+1} = \dfrac{\alpha_{n,n}}{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)\,n!} = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

(b) Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^1 B_n(t)\,dt = \int_0^1 B'_{n+1}(t)\,dt = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0 \tag{21.4}$$

puisque $B_m(0) = B_m(1)$ pour $m \geq 2$.

(c) Cette dernière identité combinée avec (21.3) permet de montrer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée. En effet, on a $B_0 = 1$ et supposant B_n construit, la relation (21.3) nous dit que les coefficients $\alpha_{n+1,j} = \dfrac{\alpha_{n,j-1}}{j}$ sont uniquement déterminés pour tout j compris entre 1 et $n+1$. Enfin avec :

$$0 = \int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt = \alpha_{n+1,0} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha_{n,j-1}}{j(j+1)}$$

on déduit que :

$$\alpha_{n+1,0} = -\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\alpha_{n,j-1}}{j(j+1)}.$$

On peut aussi remarque que $\varphi_{n+1}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_{n,k}}{k+1} X^{k+1}$ est la primitive de B_n nulle en 0 et $B_{n+1} = \varphi_{n+1} + \alpha_{n+1,0}$ avec $\alpha_{n+1,0} = -\displaystyle\int_0^1 \varphi_{n+1}(t)\,dt$, ce qui détermine de manière unique la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donne un algorithme de construction.

2. En utilisant les notations précédentes, on a :

$$\begin{cases} \varphi_1(X) = X, \\ \alpha_{1,0} = -\displaystyle\int_0^1 \varphi_1(t)\,dt = -\int_0^1 t dt = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

et :

$$B_1(X) = \varphi_1(X) + \alpha_{1,0} = X - \frac{1}{2}.$$

De même, on a :

$$\begin{cases} \varphi_2(X) = \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X, \\ \alpha_{2,0} = -\displaystyle\int_0^1 \varphi_2(t)\,dt = -\int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right) dt = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

et :

$$B_2(X) = \varphi_2(X) + \alpha_{2,0} = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}.$$

3. On a :

$$\begin{cases} \varphi_3(X) = \dfrac{1}{6}X^3 - \dfrac{1}{4}X^2 + \dfrac{1}{12}X, \\ \alpha_{3,0} = -\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12}\right) dt = 0 \end{cases}$$

et :

$$B_3(X) = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X.$$

De même :

$$\begin{cases} \varphi_4(X) = \dfrac{1}{24}X^4 - \dfrac{1}{12}X^3 + \dfrac{1}{24}X^2, \\ \alpha_{3,0} = -\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{24}\right) dt = -\frac{1}{720} \end{cases}$$

et :

$$B_4(X) = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{24}X^2 - \frac{1}{720}.$$

4. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X).$$

Pour montrer que cette suite est la suite des polynômes de Bernoulli, il suffit de prouver qu'elle vérifie les conditions (21.1) compte tenu de l'unicité prouvée en **I.1c**.
Pour $n = 0$, on a $C_0(X) = B_0(1-X) = 1$.
Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$C'_{n+1}(X) = (-1)^{n+1}\left(-B'_{n+1}(1-X)\right) = (-1)^n B_n(1-X) = C_n(X)$$

et pour $n \geq 2$:

$$C_n(0) = (-1)^n B_n(1) = (-1)^n B_n(0) = C_n(1).$$

Ce qui donne le résultat attendu.

5.

(a) Les calculs des questions **I.2.** et **I.3.** nous donne :

$$b_0 = 1,\ b_1 = -\frac{1}{2},\ b_2 = \frac{1}{12},\ b_3 = 0,\ b_4 = -\frac{1}{720}.$$

(b) De $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = B_n(0) = (-1)^n B_n(1)$$

et de $B_n(0) = B_n(1)$ pour $n \geq 2$, que :

$$\forall n \geq 2,\ b_n = (-1)^n b_n.$$

Il en résulte que $b_n = -b_n$ pour $n \geq 3$ qui est impair et $b_n = 0$ dans ce cas.

– II – Application au calcul de $\zeta(2k)$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [2p\pi, 2(p+1)\pi[$.
Si $x = 2p\pi$, comme g_k est 2π-périodique, on a $g_k(-x) = g_k(x) = g_k(0) = b_{2k}$.
Si $x \in]2p\pi, 2(p+1)\pi[$, il s'écrit $x = 2p\pi + h$ avec $h \in]0, 2\pi[$ et

$$g_k(x) = g_k(2p\pi + h) = g_k(h) = B_{2k}\left(\frac{h}{2\pi}\right)$$

et en écrivant que $-x = -2p\pi - h = -2(p+1)\pi + 2\pi - h$ avec $2\pi - h \in]0, 2\pi[$, on a :

$$\begin{aligned} g_k(-x) &= g_k(2\pi - h) = B_{2k}\left(\frac{2\pi - h}{2\pi}\right) \\ &= B_{2k}\left(1 - \frac{h}{2\pi}\right) = B_{2k}\left(\frac{h}{2\pi}\right) = g_k(x) \end{aligned}$$

en utilisant le résultat de la question **I.4**.

2. Pour tout $k \geq 1$, la fonction B_{2k} qui est polynomiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De la définition de g_k, il résulte alors que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
   Pour tout entier relatif p, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2p\pi^+} g_k(x) = \lim_{h \to 0^+} g_k(2p\pi + h) = \lim_{h \to 0^+} g_k(h) &= \lim_{h \to 0^+} B_{2k}\left(\frac{h}{2\pi}\right) \\ &= B_{2k}(0) = g_k(0) = g_k(2p\pi)\end{aligned}$$

   et en considérant que $2k \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2p\pi^-} g_k(x) = \lim_{h \to 2\pi^-} g_k(2(p-1)\pi + h) = \lim_{h \to 2\pi^-} g_k(h) &= \lim_{h \to 2\pi^-} B_{2k}\left(\frac{h}{2\pi}\right) \\ &= B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = g_k(0) = g_k(2p\pi).\end{aligned}$$

   On a donc ainsi montré que g_k est continue en tout point de $2\pi\mathbb{Z}$.
   En définitive, g_k est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On a déjà vu que la fonction g_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
   On rappelle que si f est une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle réel I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$, où a est un point de I et telle que $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$, elle se prolonge alors en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $f'(a) = \ell$ (c'est une conséquence immédiate du théorème des accroissements finis).
   On se donne dans un premier temps un entier $k \geq 1$.
   Pour $p \in \mathbb{Z}$, tout réel $x \in]2p\pi, 2(p+1)\pi[$ s'écrit $x = 2p\pi + h$ avec $h \in]0, 2\pi[$ et de :

$$g_k(x) = g_k(h) = B_{2k}\left(\frac{h}{2\pi}\right) = B_{2k}\left(\frac{x - 2p\pi}{2\pi}\right)$$

   on déduit que :

$$g_k'(x) = \frac{1}{2\pi} B_{2k}'\left(\frac{x - 2p\pi}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} B_{2k-1}\left(\frac{x - 2p\pi}{2\pi}\right)$$

   et :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2p\pi^+} g_k'(x) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{x \to 2p\pi^+} B_{2k-1}\left(\frac{x - 2p\pi}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} B_{2k-1}(0) \\ \lim_{x \to 2(p+1)\pi^-} g_k'(x) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{x \to 2(p+1)\pi^-} B_{2k-1}\left(\frac{x - 2p\pi}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} B_{2k-1}(1)\end{aligned}$$

   Pour $k = 1$, on a $B_{2k-1}(0) = B_1(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $B_{2k-1}(1) = B_1(1) = \dfrac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2p\pi^+} g_1'(x) &= -\frac{1}{4\pi} \\ \lim_{x \to 2(p+1)\pi^-} g_1'(x) &= \frac{1}{4\pi}\end{aligned}$$

   La fonction g_1 est donc dérivable à droite en $2p\pi$, à gauche en $2(p+1)\pi$ et sa fonction dérivée est continue sur $[2p\pi, 2(p+1)\pi]$.
4. Pour $k \geq 2$, on $2k - 1 \geq 3$, donc $B_{2k-1}(1) = B_{2k-1}(0) = b_{2k-1} = 0$ (question **I.5.b.**) et les calculs précédents nous disent que $\lim\limits_{x \to 2p\pi} g_k'(x) = 0$, donc g_k est dérivable en $2p\pi$ de dérivée $g_k'(2p\pi) = 0$ et g_k' est continue en $2p\pi$.
   En définitive, g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5. Le changement de variable $t = \dfrac{x}{2\pi}$ nous donne pour tout $k \geq 1$:
$$\begin{cases} \alpha_0(k) = \displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_k(x)\,dx \\ \forall n \geq 1,\ \alpha_n(k) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_k(x)\cos(nx)\,dx, \\ \forall n \geq 1,\ \beta_n(k) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_k(x)\sin(nx)\,dx \end{cases}$$
c'est-à-dire que les réels $\alpha_n(k)$ pour $n \geq 0$ et $\beta_n(k)$ pour $n \geq 1$ sont les coefficients de Fourier de la fonction g_k. Comme cette fonction est paire, on a nécessairement $\beta_n(k) = 0$ pour tout $n \geq 1$.
6. Pour $k \geq 1$ la fonction g_k étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour $k \geq 2$), le théorème de Dirichlet nous dit que sa série de Fourier converge normalement vers g_k sur $\mathbb{R}$, ce qui donne le résultat annoncé.
7. On a pour $k \geq 1$:
$$\alpha_0(k) = \int_0^1 B_{2k}(t)\,dt = \int_0^1 B'_{2k+1}(t)\,dt = B_{2k+1}(1) - B_{2k+1}(0) = 0.$$
8. Pour $k \geq 1$ et $n \geq 1$, une intégration par parties donne :
$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n(k)}{2} &= \int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi nt)\,dt \\ &= \left[B_{2k}(t)\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1 - \int_0^1 B'_{2k}(t)\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}dt \\ &= -\frac{1}{2\pi n}\int_0^1 B_{2k-1}(t)\sin(2\pi nt)\,dt \end{aligned}$$
et une deuxième intégration par parties donne :
$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n(k)}{2} &= -\frac{1}{2\pi n}\left(\left[-B_{2k-1}(t)\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1 + \int_0^1 B'_{2k-1}(t)\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}dt\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi n)^2}\left(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0) - \int_0^1 B_{2(k-1)}(t)\cos(2\pi nt)\,dt\right) \end{aligned}$$
Pour $k = 1$, cela donne :
$$\frac{\alpha_n(1)}{2} = \frac{1}{(2\pi n)^2}\left(B_1(1) - B_1(0) - \int_0^1 \cos(2\pi nt)\,dt\right) = \frac{1}{(2\pi n)^2}$$
soit $\alpha_n(1) = \dfrac{2}{(2\pi n)^2}$.
9. Pour $k \geq 2$, on a $B_{2k-1}(1) = B_{2k-1}(0)$ et le calcul précédent donne :
$$\alpha_n(k) = -\frac{1}{(2\pi n)^2}\alpha_n(k-1).$$

10. Par récurrence sur $k \geq 1$, on déduit que :

$$\alpha_n(k) = (-1)^{k+1} \frac{2}{(2\pi n)^{2k}}.$$

Pour $k = 1$, c'est vérifié et en supposant le résultat acquis au rang $k - 1 \geq 1$, on a :

$$\alpha_n(k) = -\frac{1}{(2\pi n)^2} (-1)^k \frac{2}{(2\pi n)^{2(k-1)}} = (-1)^{k+1} \frac{2}{(2\pi n)^{2k}}.$$

11. L'identité (21.2) pour $x = 0$ nous donne :

$$b_{2k} = B_{2k}(0) = g_k(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(k) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

soit :

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{b_{2k}(2\pi)^{2k}}{2}.$$

12. Pour $k = 1$ et $k = 2$, on a $b_2 = \frac{1}{12}$, $b_4 = -\frac{1}{720}$ et :

$$\zeta(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{12} \frac{4\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6},$$
$$\zeta(4) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{720} \frac{16\pi^4}{2} = \frac{\pi^4}{90}.$$

– III – Application au calcul de $\sum_{k=1}^{n} k^p$

1. L'application $\varphi : P \mapsto \int_0^1 P(x)\,dx$ est une forme linéaire non nul sur $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ et son noyau, qui n'est autre que E_{p+1}, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ de dimension $(p+2) - 1 = p + 1$.
2. On a $\Delta(1) = 0$ et pour tout entier $k \geq 1$:

$$\Delta\left(X^k\right) = (X+1)^k - X^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j X^j - X^k = \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j X^j$$

est un polynôme de degré $k - 1$. Il en résulte que Δ est une application de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ dans $\mathbb{R}_p[X]$. On vérifie facilement que Δ est linéaire, elle réalise donc un morphisme d'espaces vectoriels de E_{p+1} dans $\mathbb{R}_p[X]$. Dire que $P \in \mathbb{R}_{p+1}[X]$ est dans le noyau de Δ signifie que $P(X+1) = P(X)$. On a alors $P(1) = P(0)$ et par récurrence $P(n) = P(0)$ pour tout entier $n \geq 0$, ce qui entraîne que le polynôme $P(X) - P(0)$ a une infinité de racines et c'est nécessairement le polynôme nul. Le noyau de $\Delta : \mathbb{R}_{p+1}[X] \to \mathbb{R}_p[X]$ est donc formé des polynômes constants, soit $\ker(\Delta) = \mathbb{R}$, en identifiant l'ensemble des polynômes constants à $\mathbb{R}$.

3. Le noyau de la restriction de Δ à E_{p+1} est $E_{p+1} \cap \ker(\Delta) = \{0\}$ puisque $P = \lambda \in E_{p+1} \cap \ker(\Delta)$ entraîne $\lambda = \int_0^1 P(x)\,dx = 0$. L'application Δ est donc injective de E_{p+1} dans $\mathbb{R}_p[X]$ et c'est un isomorphisme puisque ces deux espaces sont de même dimension égale à $p+1$.
4. Comme Δ est bijective de E_{p+1} sur $\mathbb{R}_p[X]$, il existe un unique $P \in E_{p+1}$ tel que $\Delta(P) = \dfrac{X^p}{p!}$. Il suffit donc de montrer que B_{p+1} convient (on a déjà vu dans la première partie que B_{p+1} est de degré $p+1$ et que $\int_0^1 B_{p+1}(x)\,dx = 0$). Pour ce faire, on procède par récurrence sur $p \geq 0$.

   Pour $p = 0$, on a $B_1(X) = X - \dfrac{1}{2}$ et :
$$\Delta(B_1) = B_1(X+1) - B_1(X) = 1 = \frac{X^0}{0!}.$$
   En supposant le résultat acquis au rang $p \geq 0$, on peut écrire, pour tout réel x, que :
$$\begin{aligned}\Delta(B_{p+2})(x) &= \int_x^{x+1} B'_{p+2}(t)\,dt = \int_x^{x+1} B_{p+1}(t)\,dt \\ &= \int_0^{x+1} B_{p+1}(t)\,dt - \int_0^x B_{p+1}(t)\,dt\end{aligned}$$
   avec :
$$\begin{aligned}\int_0^{x+1} B_{p+1}(t)\,dt &= \int_0^1 B_{p+1}(t)\,dt + \int_1^{x+1} B_{p+1}(t)\,dt \\ &= \int_1^{x+1} B_{p+1}(t)\,dt = \int_0^x B_{p+1}(u+1)\,du\end{aligned}$$
   ce qui donne, en utilisant l'hypothèse de récurrence :
$$\Delta(B_{p+2})(x) = \int_0^x (B_{p+1}(t+1) - B_{p+1}(t))\,dt = \int_0^x \frac{t^p}{p!}dt = \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}.$$
   On a donc bien $\Delta(B_{p+2}) = \dfrac{X^{p+1}}{(p+1)!}$.
5. On a donc pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel x :
$$B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x) = \frac{x^p}{p!}.$$
   En prenant pour x les valeurs entières successives $k = 0, 1, \cdots, n-1, n$, où n est un entier naturel non nul, on a :
$$B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k) = \frac{k^p}{p!} \quad (0 \leq k \leq n)$$
   et en sommant toutes ces égalités, il vient :
$$B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0) = \sum_{k=1}^{n} (B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{p!}$$
   ou encore :
$$\sum_{k=1}^{n} k^p = p!\,(B_{p+1}(n+1) - b_{p+1}).$$

6. Pour $p = 1, 2, 3$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_2\left(n+1\right) - b_2 = \dfrac{\left(n+1\right)^2}{2} - \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{n\left(n+1\right)}{2} \\ B_3\left(n+1\right) - b_3 = \dfrac{\left(n+1\right)^3}{6} - \dfrac{\left(n+1\right)^2}{4} + \dfrac{n+1}{12} = \dfrac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{12} \\ B_4\left(n+1\right) - b_4 = \dfrac{\left(n+1\right)^4}{24} - \dfrac{\left(n+1\right)^3}{12} + \dfrac{\left(n+1\right)^2}{24} = \dfrac{n^2\left(n+1\right)^2}{24} \end{array} \right.$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n\left(n+1\right)}{2} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2\left(n+1\right)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \end{array} \right.$$

22

Une formule sommatoire d'Euler

22.1 Énoncé

L'évaluation asymptotique des sommes partielles de certaines séries numériques utilise souvent la comparaison à une intégrale impropre. La formule de sommation étudiée avec ce problème permet d'obtenir une expression exacte de l'erreur d'approximation.

Pour tout réel x, on désigne par $[x]$ la partie entière de x. On rappelle que c'est l'entier relatif défini par ;

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs réelles et définie sur un intervalle réel $[p, q+1]$, où p, q sont deux entiers naturels tels que $p < q$.

   (a) Montrer que :

   $$\sum_{k=p+1}^{q} f(k) = qf(q+1) - pf(p) - \int_p^{q+1} [t]\, f'(t)\, dt. \tag{22.1}$$

   (b) Montrer que :

   $$\int_p^{q+1} f(t)\, dt = (q+1) f(q+1) - pf(p) - \int_p^{q+1} tf'(t)\, dt. \tag{22.2}$$

   (c) Montrer que :

   $$\sum_{k=p+1}^{q+1} f(k) = \int_p^{q+1} f(t)\, dt + \int_p^{q+1} (t - [t])\, f'(t)\, dt. \tag{22.3}$$

2. Montrer que pour tout réel s strictement positif, l'intégrale :

   $$I(s) = \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt$$

   est convergente et que pour tout entier naturel non nul n, on a :

   $$\int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt \leq \frac{s}{n^s}.$$

3. Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right),$$
où γ est la constante d'Euler définie par :
$$\gamma=1-\int_{1}^{+\infty}\frac{t-[t]}{t^2}dt=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)$$
(on a $\gamma=0.577\,215\,664\,9...$).
4. Montrer que pour tout réel s strictement positif et différent de 1, on a :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}}+\gamma(s)+O\left(\frac{1}{n^s}\right),$$
où $\gamma(s)$ est la constante définie par :
$$\gamma(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_{1}^{+\infty}\frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}-\frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}}\right).$$

22.2 Solution

1.

(a) On a :
$$\int_{p}^{q+1}[t]\,f'(t)\,dt=\sum_{k=p}^{q}\int_{k}^{k+1}kf'(t)\,dt=\sum_{k=p}^{q}k\left(f(k+1)-f(k)\right)$$
$$=qf(q+1)-pf(p)-\sum_{k=p+1}^{q}f(k).$$

(b) Une intégration par parties donne :
$$\int_{p}^{q+1}f(t)\,dt=[tf(t)]_{p}^{q+1}-\int_{p}^{q+1}tf'(t)\,dt$$
$$=(q+1)\,f(q+1)-pf(p)-\int_{p}^{q+1}tf'(t)\,dt$$

(c) En faisant $(22.1)-(22.2)$, on obtient :
$$\sum_{k=p+1}^{q}f(k)=\int_{p}^{q+1}f(t)\,dt+\int_{p}^{q+1}(t-[t])\,f'(t)\,dt-f(q+1),$$
soit :
$$\sum_{k=p+1}^{q+1}f(k)=\int_{p}^{q+1}f(t)\,dt+\int_{p}^{q+1}(t-[t])\,f'(t)\,dt.$$

2. Pour tout réel $t > 1$, on a $0 \leq \frac{t - [t]}{t^{s+1}} \leq \frac{1}{t^{s+1}}$ et la convergence de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{s+1}} dt$ pour $s > 0$ entraîne celle de $\int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt$. De plus, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq \int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^{s+1}} dt = \frac{1}{s} \frac{1}{n^s}.$$

3. On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $f(t) = \frac{1}{t}$. La formule (22.3) appliquée à cette fonction f sur l'intervalle $[1, n]$ ($p = 1$, $q = n - 1$) donne :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{t - [t]}{t^2} dt$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + 1 - \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt + \int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt.$$

En notant $\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt$ cela s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt$$

et avec $\int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt \leq \frac{1}{n}$, on a bien :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et $\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$.

4. On désigne, pour $s > 0$ et $s \neq 1$, par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*}$ par $f(t) = \frac{1}{t^s}$. La formule (22.3) appliquée à cette fonction f sur l'intervalle $[1, n]$ ($p = 1$, $q = n - 1$) donne :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} = \int_1^n \frac{dt}{t^s} - s \int_1^n \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{1 - s} \left(\frac{1}{n^{s-1}} - 1 \right) + 1 - s \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt + s \int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt.$$

En notant :

$$\gamma(s) = 1 - \frac{1}{1 - s} - s \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt = \frac{s}{s - 1} - s \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{s+1}} dt,$$

cela s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}}+\gamma(s)+s\int_n^{+\infty}\frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt$$

et avec $s\int_n^{+\infty}\frac{t-[t]}{t^{s+1}}dt\leq\frac{1}{n^s}$, on a bien :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}}+\gamma(s)+O\left(\frac{1}{n^s}\right)$$

et $\gamma(s)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}-\frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}}\right)$.

Pour $s>1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{s-1}}=0$ et :

$$\gamma(s)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}=\zeta(s),$$

où ζ désigne la fonction dzéta de Riemann. On a donc, pour $s>1$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{1-s}\frac{1}{n^{s-1}}+\zeta(s)+O\left(\frac{1}{n^s}\right).$$

Par exemple, pour $s=2$, on a $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ et :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

23

Un problème sur les séries

23.1 Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour toute série réelle convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n)$ est encore convergente.

On se propose de montrer qu'il existe alors un voisinage ouvert de 0 sur lequel f est linéaire.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. On suppose, pour cette question seulement, que la fonction f est paire. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]-\delta, \delta\right[, \; f(x) = 0,$$

   c'est-à-dire que sur un voisinage ouvert de 0, la fonction f est identiquement nulle.
4. On revient maintenant au cas général. Montrer qu'il existe un réel $\delta_1 > 0$ tel que f soit impaire sur $\left]-\delta_1, \delta_1\right[$.
5. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \left]-\delta, \delta\right[^2, \; f(x+y) = f(x) + f(y).$$

6. On se fixe un réel $\delta > 0$ comme dans la question précédente.
   (a) Montrer que si x est un réel et n un entier naturel tels que $2^n x$ soit dans $\left]-\delta, \delta\right[$, alors $f(2^n x) = 2^n f(x)$.
   (b) Montrer qu'on peut définir une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; g(x) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

   où, pour x donné dans $\mathbb{R}$, n est un entier naturel tel que $\frac{x}{2^n} \in \left]-\delta, \delta\right[$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel α tel que $g(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (d) En déduire que $f(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \left]-\delta, \delta\right[$.
7. Ce résultat est-il encore vrai pour f transformant toute série absolument convergente en série convergente.

23.2 Solution

1. En considérant la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 0, on déduit que la série $\sum f(0)$ est convergente et nécessairement $f(0) = 0$.
2. Dire que f n'est pas continue en 0 signifie, compte tenu de $f(0) = 0$, qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que :
$$\forall \eta > 0,\ \exists x \in \left]-\eta, \eta\right[\mid |f(x)| > \varepsilon.$$
Prenant pour η les valeurs successives $\eta = \frac{1}{n^2}$, on construit une suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que :
$$\forall n \geq 1,\ |u_n| \leq \frac{1}{n^2},\ |f(u_n)| > \varepsilon.$$
Mais dans ce cas on obtient alors une série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ absolument convergente telle que la série $\sum f(u_n)$ soit divergente (les inégalités $|f(u_n)| > \varepsilon$ nous disent que la suite $(f(u_n))_{n\geq 1}$ ne peut pas converger vers 0), ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.
3. Supposons le contraire, soit compte tenu de la parité de f avec $f(0) = 0$, que :
$$\forall \delta > 0,\ \exists x \in \left]0, \delta\right[,\ f(x) \neq 0.$$
Prenant pour η les valeurs successives $\eta = \frac{1}{n}$, on construit une suite réelle $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que :
$$\forall n \geq 1,\ 0 < x_n < \frac{1}{n},\ f(x_n) \neq 0.$$
On associe à cette suite une suite d'entiers naturels non nuls $(p_n)_{n\geq 1}$ telle que :
$$\forall n \geq 1,\ p_n |f(x_n)| \geq 1$$
(c'est possible puisque $\mathbb{R}$ est archimédien).
On définit alors la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ par :
$$u = (x_1, -x_1, \cdots, x_1, -x_1, x_2, -x_2, \cdots, x_2, -x_2, \cdots, x_k, -x_k, \cdots, x_k, -x_k, \cdots)$$
où, pour tout $k \geq 1$, le couple $(x_k, -x_k)$ est répété p_k fois.
En désignant par $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, on a alors :
$$S_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2r \\ x_{q_r} \text{ si } r = 2r + 1 \end{cases}$$
avec $\lim_{r\to+\infty} q_r = +\infty$, ce qui entraîne, compte tenu de $0 < x_{q_r} < \frac{1}{q_r}$ que $\lim_{r\to+\infty} x_{q_r} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$, c'est-à-dire que la série $\sum u_n$ est convergente.
Mais, pour ce qui est de la série $\sum f(u_n)$, compte tenu de la parité de f, en désignant par $(T_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de cette série, on a :
$$\left|T_{2(p_1+\cdots+p_{k+1})} - T_{2(p_1+\cdots+p_k)}\right| = 2p_{k+1} |f(x_{k+1})| \geq 2.$$
Mais la convergence de la série $\sum f(u_n)$ vers un réel T nous dit que la suite $\left(T_{\varphi(k)}\right)_{n\geq 1} = \left(T_{2(p_1+\cdots+p_k)}\right)_{k\geq 1}$ extraite de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ doit aussi converger vers T et la suite $\left(T_{\varphi(k+1)} - T_{\varphi(k)}\right)_{n\geq 1}$ doit alors converger vers 0, ce qui est incompatible avec les inégalités $\left|T_{\varphi(k+1)} - T_{\varphi(k)}\right| \geq 2$.
En définitive, f est identiquement nulle sur un voisinage ouvert de 0.

4. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$ est paire et vérifie las mêmes hypothèses que f, elle est donc identiquement nulle sur un voisinage ouvert $]-\delta_1, \delta_1[$ de 0 et sur ce voisinage, f est impaire.
5. Supposons le contraire. On construit alors deux suites réelles $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $]-\delta_1, \delta_1[$ et de limite nulle telles que :

$$\forall n \geq 1,\ \alpha_n = |f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n)| \neq 0.$$

On associe à ces suites une suite d'entiers naturels non nuls $(p_n)_{n\geq 1}$ telle que :

$$\forall n \geq 1,\ p_n \alpha_n \geq 1$$

et on définit la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ par :

$$\begin{aligned} u = (&x_1 + y_1, -x_1, -y_1, \cdots, x_1 + y_1, -x_1, -y_1, \\ &x_2 + y_2, -x_2, -y_2, \cdots, x_2 + y_2, -x_2, -y_2, \\ &\cdots, x_k + y_k, -x_k, -y_k, \cdots, x_k + y_k, -x_k, -y_k, \cdots) \end{aligned}$$

où, pour tout $k \geq 1$, le triplet $(x_k + y_k, -x_k, -y_k)$ est répété p_k fois.
En désignant par $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, on a alors :

$$S_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 3r \\ x_{q_r} + y_{q_r} \text{ si } r = 3r + 1 \\ y_{q_r} \text{ si } r = 3r + 2 \end{cases}$$

avec $\lim\limits_{r\to+\infty} q_r = +\infty$, ce qui entraîne, compte tenu de $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$, c'est-à-dire que la série $\sum u_n$ est convergente.
Mais, pour ce qui est de la série $\sum f(u_n)$, compte tenu de l'imparité de f, en désignant par $(T_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de cette série, on a :

$$\left|T_{3(p_1+\cdots+p_{k+1})} - T_{3(p_1+\cdots+p_k)}\right| = 3p_{k+1}\alpha_{k+1} \geq 3.$$

Mais la convergence de la série $\sum f(u_n)$ vers un réel T nous dit que la suite $\left(T_{\varphi(k)}\right)_{n\geq 1} = \left(T_{3(p_1+\cdots+p_k)}\right)_{k\geq 1}$ extraite de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ doit aussi converger vers T et la suite $\left(T_{\varphi(k+1)} - T_{\varphi(k)}\right)_{n\geq 1}$ doit alors converger vers 0, ce qui est incompatible avec les inégalités $\left|T_{\varphi(k+1)} - T_{\varphi(k)}\right| \geq 3$.
En définitive, on a le résultat souhaité avec $\delta \in]0, \delta_1[$.
6.
   (a) On procède par récurrence sur $n \geq 0$ à x fixé.
   Pour $n = 0$ c'est clair.
   En supposant le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 0$, si $2^n x \in]-\delta, \delta[$, alors $2^{n-1}x \in]-\delta, \delta[$ et :

$$f(2^n x) = f\left(2^{n-1}x + 2^{n-1}x\right) = 2f\left(2^{n-1}x\right) = 2^n f(x).$$

   (b) Si $m > n$ sont deux entiers naturels tel que $\dfrac{x}{2^n}$ et $\dfrac{x}{2^m}$ soient dans $]-\delta, \delta[$, alors :

$$2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2^n f\left(2^{m-n}\frac{x}{2^m}\right) = 2^n 2^{m-n} f\left(\frac{x}{2^m}\right) = 2^m f\left(\frac{x}{2^m}\right).$$

   La fonction g est donc bien définie (i. e. la définition de $g(x)$ ne dépend pas du choix de l'entier n tel que $\dfrac{x}{2^n} \in]-\delta, \delta[$).

(c) La fonction g coïncide avec f sur $]-\delta, \delta[$, elle est donc continue en 0 avec $g(0) = 0$.
Pour x, y dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$ tel que $\frac{x}{2^n}$ et $\frac{y}{2^n}$ soient dans $\left]-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right[$, les trois réels $\frac{x}{2^n}$, $\frac{y}{2^n}$ et $\frac{x+y}{2^n}$ sont dans $]-\delta, \delta[$ et :

$$g(x+y) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n} + \frac{y}{2^n}\right) = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) + 2^n f\left(\frac{y}{2^n}\right) = \\ = g(x) + g(y).$$

La fonction g est donc une fonction continue en un point (en 0) et vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy $g(x+y) = g(x) + g(y)$ sur $\mathbb{R}$, on sait alors que c'est nécessairement une fonction linéaire définie par $g(x) = \alpha x$.
Comme $f = g$ sur $]-\delta, \delta[$, on a bien le résultat souhaité.

7. La fonction f définie par $f(x) = x^2$ transforme toute série absolument convergente $\sum u_n$ en série convergente puisque $|u_n|^2 \leq |u_n|$ pour n assez grand. Le résultat n'est donc plus valable.

24

Limite supérieure et limite inférieure

24.1 Énoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \sup_{p\geq n} u_p,\ w_n = \inf_{p\geq n} u_p.$$

1. Justifier la définition des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante majorée. On en déduit que ces deux suites sont convergentes et on note

$$\begin{cases} \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n, \\ \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n, \end{cases}$$

ces limites étant respectivement appelées la limite supérieure et la limite inférieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On les note aussi parfois $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(u_n)$ et $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(u_n)$.

On a donc :

$$\begin{cases} \ell_1 = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf\limits_{p\geq n} u_p\right), \\ \ell_2 = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup\limits_{p\geq n} u_p\right). \end{cases}$$

3. Montrer que ℓ_1 et ℓ_2 sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que pour toute valeur d'adhérence ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2.$$

C'est-à-dire que $\ell_2 = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ est plus grande valeur d'adhérence et $\ell_1 = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ la plus petite valeur d'adhérence de la suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.
6. On suppose pour cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs réelles positives. Montrer que si la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors la série $\sum u_n$ est divergente, sinon elle est convergente pour $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$ et divergente pour $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$ (théorème de Cauchy).

7. Déduire de la question précédente que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est :
$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$
avec $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ si la suite $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

24.2 Solution

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il en est de même des ensembles $E_n = \{u_p \mid p \geq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en conséquence E_n admet une borne supérieure v_n et une borne inférieure w_n et on a :
$$w_n = \inf(E_n) \leq v_n = \sup(E_n).$$
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, en notant $m = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ m \leq u_p \leq M,$$
c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, m est un minorant de E_n et M un majorant de E_n, ce qui entraîne :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq w_n = \inf(E_n) \leq v_n = \sup(E_n) \leq M$$
Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc bornées.
En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que :
$$E_{n+1} \subset E_n = \{u_n\} \cup E_{n+1},$$
on déduit que :
$$\begin{cases} w_n = \inf(E_n) \leq w_{n+1} = \inf(E_{n+1}) \\ v_{n+1} = \sup(E_{n+1}) \leq v_n = \sup(E_n) \end{cases}$$
c'est-à-dire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Comme ces suites sont bornées, elles sont alors convergentes.
3. De $\ell_1 = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (w_n)$ avec $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, on déduit que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_ε tel que :
$$\forall n \geq n_\varepsilon,\ \ell_1 - \varepsilon < w_n = \inf_{p\geq n} u_p \leq \ell_1$$
et par définition de la borne inférieure, pour tout $n \geq n_\varepsilon$, il existe un entier $p \geq n$ tel que :
$$w_n \leq u_p < w_n + \varepsilon \leq \ell_1 + \varepsilon.$$
On a donc montré que pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $p \geq n$ tel que :
$$\ell_1 - \varepsilon < u_p < \ell_1 + \varepsilon$$
(pour ε donné, on a soit $n \geq n_\varepsilon$ et on trouvé un tel entier $p \geq n$, soit $0 \leq n < n_\varepsilon$ et on prend alors p qui correspond à n_ε). On peut alors extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge vers ℓ_1 en procédant comme suit : prenant $\varepsilon = 1$ et $n = 0$, on a $p = \varphi(0) \geq 0$ tel que $\ell_1 - 1 < u_{\varphi(0)} < \ell_1 + 1$, puis pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $n = \varphi(0) + 1$ on a $p = \varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $\ell_1 - \frac{1}{2} < u_{\varphi(1)} < \ell_1 + \frac{1}{2}$ et continuant ainsi de suite on construit une suite strictement

croissante d'entiers naturels $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\ell_1 - \frac{1}{n+1} < u_{\varphi(n)} < \ell_1 + \frac{1}{n+1}$ (les entiers $\varphi(0) < \cdots < \varphi(k)$ étant construit en prenant $\varepsilon = \frac{1}{k+2}$ et $n = \varphi(k) + 1$ on obtient $\varphi(k+1)$). On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell_1$.

On montre de manière analogue que ℓ_2 est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}$ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels (l'existence de valeurs d'adhérence d'une suite bornée est assurée par le théorème de Bolzano-Weierstrass). En passant à la limite dans l'encadrement :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{\varphi(n)} \leq u_{\varphi(n)} \leq v_{\varphi(n)},$$
on obtient l'encadrement $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$.
Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, soit elle n'est pas majorée et $+\infty$ est valeur d'adhérence, soit elle n'est pas minorée et $-\infty$ est valeur d'adhérence. Donc une suite réelle a toujours des valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ et on peut définir sa limite supérieure [resp. inférieure] dans $\overline{\mathbb{R}}$ comme la plus grand [resp. petite] de ses valeurs d'adhérence.
5. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, sa limite ℓ est l'unique valeur d'adhérence et $\ell_1 = \ell_2$. Réciproquement, si $\ell_1 = \ell_2$, toute valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant comprise entre ℓ_1 et ℓ_2, il ne peut y en avoir qu'une et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, elle est nécessairement convergente (théorème 3.20).
6. Si $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, on aura alors $\sqrt[n]{u_n} > 1$ pour une infinité d'indices n, donc aussi $u_n > 1$ pour ces indices et la série $\sum u_n$ est divergente puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 0.
Si elle est majorée, elle est alors bornée puisque positive et on peut définir sa limite supérieure ℓ (en fait dans le cas où la suite n'est pas majorée sa limite supérieure est $+\infty$).
Supposons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geq n} \sqrt[p]{u_p}\right) < 1$. On peut alors trouver un entier λ tel que $\ell < \lambda < 1$ et un entier n_0 tel que :
$$\forall n \geq n_0,\ \ell \leq \sup_{p\geq n} \sqrt[p]{u_p} \leq \lambda$$
ce qui entraîne que :
$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$$
et revient à dire que :
$$\forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq \lambda^n.$$
Le corollaire 6.9 nous dit alors que la série $\sum u_n$ est convergente comme la série géométrique $\sum \lambda^n$.
Supposons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{p\geq n} \sqrt[p]{u_p}\right) > 1$. On peut alors trouver un entier λ tel que $1 < \lambda < \ell$ et un entier n_0 tel que :
$$\forall n \geq n_0,\ v_n = \sup_{p\geq n} \sqrt[p]{u_p} > \lambda.$$
Par définition de la borne supérieure, on peut trouver pour tout entier $n \geq n_0$ un entier $p_n \geq n$ tel que $1 < \lambda < \sqrt[p_n]{u_{p_n}} \leq v_n$ et on aura $u_{p_n} > 1$ pour cet entier $p_n \geq n$. Dans une telle situation la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 0 et la série $\sum u_n$ est divergente.

7. Si la suite $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, il en est de même de $\left(\sqrt[n]{|a_n z^n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et la série $\sum |a_n z^n|$ est divergente. On a donc $R = 0 = \dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ dans ce cas.
   Si $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, il en est de même de $\left(\sqrt[n]{|a_n z^n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente pour $\limsup\limits_{n\to+\infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ et divergente pour $\limsup\limits_{n\to+\infty} |z| \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, ce qui revient à dire que $\sum |a_n z^n|$ est convergente pour $|z| < \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ et divergente pour $|z| > \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. On a donc bien $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

25

Calculs du nombre π

25.1 Énoncé

On se propose de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right)\frac{1}{16^n}=\pi.$$

1. Justifier la convergence de cette série. On notera S sa somme.
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul q, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{8n+q}\frac{1}{16^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^q=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^{q-1}}{1-t^8}dt.$$

3. Montrer que :

$$S=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1+t^4}dt-8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^3}{(1-t^2)(1+t^4)}dt.$$

4. Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1+t^4}dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln(5)+\arctan(2)\right).$$

5. Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{t^3}{(1-t^2)(1+t^4)}dt=\frac{1}{8}\ln(2)-\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

6. Conclure.

25.2 Solution

1. La terme général est majoré en valeur absolue par $\frac{8}{16^n}$, la série géométrique $\sum\left(\frac{1}{16}\right)^n$ étant convergente.
2. On a :

$$\frac{t^{q-1}}{1-t^8}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^{8n+q-1}$$

la convergence étant uniforme sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^{q-1}}{1-t^8}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t^{8n+q-1}dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+q}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8n+q} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+q}\frac{1}{16^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{q}\end{aligned}$$

3. Prenons pour valeurs successives de q, 1, 4, 5 et 6, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+1}\frac{1}{16^n}\frac{1}{\sqrt{2}} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^8}dt$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+4}\frac{1}{16^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+4}\frac{1}{16^n} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^3}{1-t^8}dt \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+5}\frac{1}{16^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+5}\frac{1}{16^n} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^4}{1-t^8}dt \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+6}\frac{1}{16^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8n+6}\frac{1}{16^n} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^5}{1-t^8}dt\end{aligned}$$

et la série qui nous intéresse vaut $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(t)\,dt$ où on a posé :

$$\begin{aligned}f(t) &= \left(4\sqrt{2} - 8t^3 - 4\sqrt{2}t^4 - 8t^5\right)\frac{1}{1-t^8} \\ &= \frac{4\sqrt{2}\left(1-t^4\right) - 8t^3\left(1+t^2\right)}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)\left(1+t^4\right)} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{1+t^4} - \frac{8t^3}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^4\right)}\end{aligned}$$

4. On a :

$$1+t^4 = \left(1+t^2\right)^2 - 2t^2 = \left(1-\sqrt{2}t+t^2\right)\left(1+\sqrt{2}t+t^2\right)$$

et la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{at+b}{1-\sqrt{2}t+t^2} + \frac{ct+d}{1+\sqrt{2}t+t^2}.$$

Par parité et unicité de la décomposition, on a $c=-a$ et $d=b$. Prenant $t=0$, on a $1=2b$, soit $b=\frac{1}{2}$, puis $t=i$, donne $\frac{1}{2} = -\frac{ai+b}{\sqrt{2}i} + \frac{-ai+b}{\sqrt{2}i} = -\sqrt{2}a$ et $a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Ce qui donne :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+t^4}dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}t+t^2}dt - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}t+t^2}dt\right)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}t+t^2}dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2t+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}t+t^2}dt + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+\sqrt{2}t+t^2}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\sqrt{2}t+t^2\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\sqrt{2}t+t^2\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(\sqrt{2}t+1\right)^2+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\sqrt{2}t+t^2\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[\arctan\left(\sqrt{2}t+1\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \arctan(2) - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}t+t^2}dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2t-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}t+t^2}dt - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-\sqrt{2}t+t^2}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\sqrt{2}t+t^2\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\sqrt{2}t+t^2\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(\sqrt{2}t-1\right)^2+1}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\sqrt{2}t+t^2\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \left[\arctan\left(\sqrt{2}t-1\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

En définitive :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+t^4}dt &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \arctan(2) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln(5) + \arctan(2)\right)
\end{aligned}$$

5. Le changement de variable $x = t^2$ donne :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^3}{(1-t^2)(1+t^4)}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(1-x)(1+x^2)}dx$$

et la décomposition en éléments simples :

$$g(x) = \frac{x}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{a}{1-x} + \frac{cx+d}{1+x^2}$$

avec $a = \lim\limits_{x \to 1} (1 - x) g(x) = \dfrac{1}{2}$, $0 = \lim\limits_{x \to +\infty} x g(x) = -a + c$, donc $c = a$ et $x = 0$ donne $d = -a$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^3}{(1 - t^2)(1 + t^4)} dt &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - x} + \frac{x - 1}{1 + x^2} dx \\
&= \frac{1}{4} \left(\ln(2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right) \\
&= \frac{1}{8} \ln(5) - \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

6. En conclusion :

$$\begin{aligned}
S = 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \ln(5) + \arctan(2) \right) \right) - 8 \left(\frac{1}{8} \ln(5) - \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right) \\
= 2 \left(\arctan(2) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \right) = 2\frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

en utilisant l'égalité $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x > 0$.

7. Cette série converge très vite vers π, par exemple, $n = 20$ donne (avec Maple) :

$$\left\{ \begin{array}{l} S \backsimeq 3.1415926535897932384626433832\,51 \\ \pi \backsimeq 3.1415926535897932384626433832\,80 \end{array} \right.$$

soit 28 décimales exactes.