

Séries de Fourier

18.1 Séries entières et séries de Fourier

Nous allons dans un premier temps introduire la notion de série de Fourier en partant des développements en séries entières.

Le théorème relatif aux projections orthogonales d'un espace préhilbertien sur un sous-espace de dimension finie nous donnera une autre présentation de cette notion de série de Fourier.

Si $\sum \alpha_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ éventuellement infini, on peut définir, en notant f la somme de cette série entière, pour tout réel $r \in]0, R[$ la fonction φ_r par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_r(x) = f(re^{ix}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n e^{inx}$$

La fonction f étant continue sur le disque ouvert $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$, on en déduit que, pour r fixé dans $]0, R[$, la fonction φ_r est continue sur tout \mathbb{R} .

Remarque 18.1 Avec $|\alpha_n r^n e^{inx}| = |\alpha_n| r^n$ pour tout réel x et $\sum |\alpha_n| r^n < +\infty$, on déduit que la série de fonctions $\sum \alpha_n r^n e^{inx}$ est normalement convergente sur \mathbb{R} , ce qui permet de retrouver la continuité de φ_r avec celle des fonctions $x \mapsto e^{inx}$ pour tout entier naturel n .

Remarque 18.2 Si p est un entier naturel non nul, on sait que la série dérivée :

$$\sum n(n-1) \cdots (n-p+1) \alpha_n z^{n-p}$$

a même rayon de convergence que $\sum \alpha_n z^n$, donc la série $\sum n^p |\alpha_n| r^n$ est convergente pour tout réel $r \in]0, R[$ (puisque $n^p |\alpha_n| r^n \underset{+\infty}{\sim} r^p n(n-1) \cdots (n-p+1) |\alpha_n| r^{n-p}$) et avec $|(in)^p \alpha_n r^n e^{inx}| = n^p |\alpha_n| r^n$ pour tout entier naturel n et tout réel x , on déduit que la série de fonctions $\sum (in)^p \alpha_n r^n e^{inx}$ est normalement convergente sur \mathbb{R} . Comme les fonctions $x \mapsto e^{inx}$ sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} pour tout entier naturel n , on en déduit que la fonction φ_r est aussi de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

De la 2π -périodicité des fonctions $x \mapsto e^{inx}$, on déduit que la fonction φ_r est périodique de période 2π , c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_r(x + 2\pi) = \varphi_r(x).$$

En utilisant les formules d'Euler :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

on peut écrire que :

$$\begin{aligned}\varphi_r(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \cos(nx) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \sin(nx) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \cos(nx) + i \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n r^n \sin(nx)\end{aligned}$$

chacune des séries de fonctions $\sum \alpha_n r^n \cos(nx)$ et $\sum \alpha_n r^n \sin(nx)$ étant normalement convergente sur \mathbb{R} (le terme général est majoré par $|\alpha_n| r^n$).

Un tel développement est appelé développement en série de Fourier de la fonction φ_r .

Nous allons étudier un peu plus loin, de façon plus générale, cette notion de série de Fourier.

Les coefficients α_n peuvent s'exprimer à l'aide de formules intégrales comme suit.

Théorème 18.1 (Cauchy) *Avec les notations qui précèdent, on a :*

$$\forall n \geq 0, \alpha_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt$$

Démonstration. Avec la convergence normale sur \mathbb{R} de la série de fonctions $\sum \alpha_n r^n e^{int}$, on peut écrire pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt \\ &= 2\pi \alpha_n r^n\end{aligned}$$

puisque :

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2\pi & \text{si } k = n \end{cases}$$

■

On a en particulier :

$$f(0) = \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) dt$$

Remarque 18.3 *Pour $n \geq 1$, on a :*

$$\int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{int} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k+n)t} dt = 0$$

et :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \cos(nt) dt &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) (e^{int} + e^{-int}) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt = \pi \alpha_n r^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \sin(nt) dt &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) (e^{int} - e^{-int}) dt \\ &= -\frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt = i\pi \alpha_n r^n\end{aligned}$$

Soit, pour $n \geq 1$:

$$\alpha_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \cos(nt) dt$$

et :

$$i\alpha_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \sin(nt) dt$$

Les coefficients

$$a_n = \alpha_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \cos(nt) dt \quad (n \geq 0)$$

$$b_n = i\alpha_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) \sin(nt) dt \quad (n \geq 1)$$

sont les coefficients de Fourier trigonométriques de φ_r et les coefficients :

$$c_n = \alpha_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

sont les coefficients de Fourier exponentiels de φ_r .

Nous utiliserons par la suite les coefficients trigonométriques un peu plus commodes pour les fonctions à valeurs réelles paires ou impaires.

Exercice 18.1 Montrer que les seules fonctions développables en série entière et bornées sur \mathbb{C} sont les fonctions constantes (théorème de Liouville).

Solution 18.1 On a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et il existe un réel $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

En utilisant les notations qui précèdent, on a pour tout réel $r > 0$ et tout entier $n \geq 1$:

$$|\alpha_n| = \frac{1}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\alpha_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $f = \alpha_0$.

Exercice 18.2 Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ une fonction développable en série entière sur \mathbb{C} . Que peut-on dire de f s'il existe une fonction polynomiale P telle que $|f(z)| \leq |P(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$?

Solution 18.2 Soit $P(z) = \sum_{j=0}^p p_j z^j$ un polynôme de degré p qui majore f . En utilisant les notations qui précèdent, on a pour tout réel $r > 0$ et tout entier $n \geq p+1$:

$$|\alpha_n| = \frac{1}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} \varphi_r(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |P(re^{it})| dt \leq \frac{1}{r^n} \sum_{j=0}^p |p_j| r^j \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\alpha_n = 0$ pour tout $n \geq p+1$ et f est une fonction polynomiale. Dans le cas où le polynôme majorant est constant, on retrouve le théorème de Liouville de l'exercice précédent.

L'utilisation du produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes permet de donner la version particulière qui suit du théorème de Parseval que nous retrouverons plus loin.

Théorème 18.2 (Parseval) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ une fonction développable en série entière sur $D(0, R)$ avec $0 < R \leq +\infty$.
Pour tout réel $r \in]0, R[$, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^2 r^{2n}$$

Démonstration. Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n e^{int}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\alpha_n} r^n e^{-int}$ étant absolument convergentes pour tout réel $t \in [0, 2\pi]$, leur produit de Cauchy est aussi une série absolument convergente et on a :

$$\begin{aligned} |f(re^{it})|^2 &= f(re^{it}) \overline{f(re^{it})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \alpha_k r^k e^{ikt} \overline{\alpha_{n-k}} r^{n-k} e^{-i(n-k)t} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \overline{\alpha_{n-k}} e^{-i(n-2k)t} \right) r^n \end{aligned}$$

Avec :

$$\left| \sum_{k=0}^n \alpha_k \overline{\alpha_{n-k}} e^{-i(n-2k)t} \right| r^n \leq \left(\sum_{k=0}^n |\alpha_k| |\alpha_{n-k}| \right) r^n$$

pour tout $t \in [0, 2\pi]$ et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n |\alpha_k| |\alpha_{n-k}| \right) r^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n |\alpha_k| r^k |\alpha_{n-k}| r^{n-k} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| r^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| r^n \right) < +\infty \end{aligned}$$

(encore un produit de Cauchy de séries absolument convergentes), on déduit que la série de fonctions de somme $|f(re^{it})|^2$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$ et on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \overline{\alpha_{n-k}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-2k)t} dt \right) r^n \\ &= 2\pi \sum_{p=0}^{+\infty} |\alpha_p|^2 r^{2p} \end{aligned}$$

puisque :

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(n-2k)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p + 1 \\ 0 & \text{si } n = 2p \text{ et } k \neq p \\ 2\pi & \text{si } n = 2p \text{ et } k = p \end{cases}$$

■

Exercice 18.3 Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ une fonction développable en série entière sur $D(0, R)$ avec $0 < R \leq +\infty$. Montrer que si $|f|$ admet un maximum local en 0, elle est alors constante (principe du maximum).

Solution 18.3 Si $|f|$ admet un maximum local en 0, il existe alors un réel $r_0 \in]0, R[$ tel que $|f(0)| = \sup_{|z| \leq r_0} |f(z)|$. On a alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |f(0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(r_0 e^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r_0 e^{it})| \cdot 1 dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(r_0 e^{it})|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{2\pi} |f(r_0 e^{it})|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{2\pi} |f(0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |f(0)| \end{aligned}$$

donc $|\alpha_0| = |f(0)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{2\pi} |f(r_0 e^{it})|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$, soit :

$$|\alpha_0|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r_0 e^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^2 r_0^{2n}$$

et α_n pour tout $n \geq 1$, ce qui signifie que f est constante.

18.2 L'espace préhilbertien \mathcal{D} de Dirichlet

Pour ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur \mathbb{R} et à valeurs réelles.

Définition 18.1 On dit qu'une fonction 2π -périodique, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est continue par morceaux s'il existe une subdivision de $[0, 2\pi]$:

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_p = 2\pi$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$, telle que f soit continue sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ ($0 \leq k \leq p-1$) et admette une limite à droite et à gauche en chaque point de discontinuité (s'il en existe).

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est continue par morceaux, on notera en tout point de discontinuité a de f (s'il en existe) :

$$f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ et } f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique est continue par morceaux, en utilisant les notations de la définition qui précède, on vérifie facilement que f se prolonge en fonction continue sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$. Et réciproquement, si pour une telle subdivision de $[0, 2\pi]$, la fonction f se prolonge en fonction continue sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, elle est alors continue par morceaux.

On rappelle qu'une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} est Riemann-intégrable sur tout segment $[a, b]$.

On désigne par \mathcal{D} l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont 2π -périodiques, continues par morceaux et telles qu'en tout point de discontinuité a de f , on ait :

$$f(a) = \frac{f(a^-) + f(a^+)}{2}.$$

On dit que \mathcal{D} est l'espace des fonctions de Dirichlet.

Il est facile de vérifier que \mathcal{D} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

On peut remarquer qu'une fonction de \mathcal{D} est bornée avec :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|$$

du fait de la 2π -périodicité.

Remarque 18.4 On peut aussi travailler avec des fonctions périodiques de période $T > 0$. Si f est une telle fonction, alors la fonction g définie par $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ est périodique de période 2π . La limitation à la période 2π n'est donc pas vraiment restrictive.

Exemple 18.1 Soient $[a, a + 2\pi]$ un intervalle de longueur 2π et f une fonction continue de $[a, a + 2\pi]$ dans \mathbb{R} telle que $f(a) = f(a + 2\pi)$. Montrer qu'il existe une unique fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et 2π -périodique qui coïncide avec f sur $[a, a + 2\pi]$.

Solution 18.4 En utilisant la partition :

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [a + 2k\pi, a + 2(k+1)\pi[$$

on définit la fonction \tilde{f} par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in [a + 2k\pi, a + 2(k+1)\pi[, \tilde{f}(x) = f(x - 2k\pi)$$

on a $\tilde{f}(x) = f(x)$, pour tout $x \in [a, a + 2\pi[$, $\tilde{f}(a + 2\pi) = f(a) = f(a + 2\pi)$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, tout $x \in [a + 2k\pi, a + 2(k+1)\pi[$, on a :

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = f(x + 2\pi - 2(k+1)\pi) = f(x - 2k\pi) = \tilde{f}(x)$$

Donc \tilde{f} coïncide avec f sur $[a, a + 2\pi]$ et est 2π -périodique.

La fonction \tilde{f} est comme f continue sur $]a, a + 2\pi[$ et par 2π -périodicité, on déduit qu'elle est continue sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]a + 2k\pi, a + 2(k+1)\pi[$. En effet, pour x, x_0 dans l'ouvert $]a + 2k\pi, a + 2(k+1)\pi[$, on a :

$$\tilde{f}(x) = f(x - 2k\pi) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0 - 2k\pi) = \tilde{f}(x_0).$$

Enfin pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $h \in]0, \pi[$, on a $a - h \in]a - 2\pi, a[$, $a + h \in]a, a + 2\pi[$ et :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(a + 2k\pi - h) &= \tilde{f}(a - h) = f(a - h + 2\pi) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a + 2\pi) = f(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(a + 2k\pi + h) &= \tilde{f}(a + h) = f(a + h) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f(a) = f(a) \end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow a+2k\pi} \tilde{f}(x) = f(a) = \tilde{f}(a) = \tilde{f}(a+2k\pi)$$

et \tilde{f} est continue en $a+2k\pi$.

L'unicité de f provient du fait qu'une fonction 2π -périodique est uniquement déterminée par ses valeurs sur un intervalle de longueur 2π .

Le lemme qui suit, de démonstration élémentaire, nous sera très utile.

Lemme 18.1 Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$ et tout réel a , on a :

$$\int_a^{a+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

Démonstration. En utilisant la relation de Chasles pour l'intégrale de Riemann, on a :

$$\int_a^{a+2\pi} f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^{2\pi} f(t) dt + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t) dt$$

et le changement de variable $t = 2\pi + u$ dans la troisième intégrale nous donne, compte tenu de la 2π -périodicité de f :

$$\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t) dt = \int_0^a f(2\pi + u) du = \int_0^a f(u) du = - \int_a^0 f(u) du$$

ce qui donne le résultat annoncé. ■

En particulier on a, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, en prenant $a = -\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

Ce résultat est intéressant dans le cas particulier où la fonction f est paire ou impaire.

Il sera aussi commode de noter que :

$$\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t) dt = \int_{a-\pi}^{(a-\pi)+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Théorème 18.3 L'application :

$$(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel \mathcal{D} .

Démonstration. Des propriétés de l'intégrale de Riemann sur un segment, on déduit que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique et positive.

Si $\langle f | f \rangle = 0$, en notant $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_p = 2\pi$ les éventuels points de discontinuité de f , on a :

$$0 = \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t))^2 dt$$

donc $\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t))^2 dt = 0$ pour tout k et f est nulle sur $]a_k, a_{k+1}[$ puisque f^2 est continue positive. On a alors :

$$f(a_k^-) = \lim_{\substack{x \rightarrow a_k \\ x < a_k}} f(x) = 0 \text{ et } f(a_k^+) = \lim_{\substack{x \rightarrow a_k \\ x > a_k}} f(x) = 0$$

et $f(a_k) = \frac{f(a_k^-) + f(a_k^+)}{2} = 0$. La fonction f est donc nulle sur $[0, 2\pi]$ et sur \mathbb{R} par 2π -périodicité.

L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc définie et c'est un produit scalaire sur \mathcal{D} . ■

Définition 18.2 Soit k un entier naturel.

On dit qu'une fonction 2π -périodique, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est de classe \mathcal{C}^k par morceaux s'il existe une subdivision de $[0, 2\pi]$:

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = 2\pi$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$, telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ se prolonge par continuité en une fonction de classe \mathcal{C}^k sur $[a_i, a_{i+1}]$ ($0 \leq i \leq p-1$).

Avec les notations de la définition qui précède, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, elle est alors de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 2\pi] \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ et en chacun des points a_k , la fonction f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche non nécessairement égales.

On notera respectivement :

$$f'_g(a_k) = \lim_{\substack{x \rightarrow a_k \\ x < a_k}} \frac{f(x) - f(a_k^-)}{x - a_k} \text{ et } f'_d(a_k) = \lim_{\substack{x \rightarrow a_k \\ x > a_k}} \frac{f(x) - f(a_k^+)}{x - a_k}$$

la dérivée à gauche et à droite en a_k .

Le théorème des accroissements finis nous dit que :

$$f'_g(a_k) = \lim_{\substack{x \rightarrow a_k \\ x < a_k}} f'(x) = f'(a_k^-) \text{ et } f'_d(a_k) = \lim_{\substack{x \rightarrow a_k \\ x > a_k}} f'(x) = f'(a_k^+)$$

La fonction f' sera considérée comme un élément de \mathcal{D} en posant, pour chaque a_k :

$$f'(a_k) = \frac{f'(a_k^-) + f'(a_k^+)}{2}$$

Par dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qui est 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux nous entendons ce prolongement.

De manière plus générale, pour $k \geq 1$, si f est de classe \mathcal{C}^k par morceaux, elle est alors de classe \mathcal{C}^k sur $[0, 2\pi]$ éventuellement privé d'un nombre fini de points $\{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ et sa dérivée est une fonction de classe \mathcal{C}^{k-1} par morceaux.

18.3 Polynômes trigonométriques et séries de Fourier sur \mathcal{D}

Pour tout entier naturel n , on note \mathcal{P}_n l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} la forme :

$$P : x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

où les coefficients a_k et b_k sont des réels.

On vérifie facilement que \mathcal{P}_n est un sous-espace vectoriel de \mathcal{D} de dimension $2n+1$ engendré par la famille $\{c_k \mid 0 \leq k \leq n\} \cup \{s_k \mid 1 \leq k \leq n\}$, où on a noté :

$$c_k : x \mapsto \cos(kx) \text{ pour } k \geq 0 \text{ et } s_k : x \mapsto \sin(kx) \text{ pour } k \geq 1$$

En effet, cette famille est génératrice, formée de fonctions non nulles et orthogonale pour le produit scalaire défini sur \mathcal{D} , elle est donc libre (voir le cours d'algèbre).

On note $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ l'espace de tous les polynômes trigonométriques.

C'est un sous-espace vectoriel de \mathcal{D} de base orthogonale :

$$\{c_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

Avec :

$$\|c_0\|^2 = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

et pour $n \geq 1$:

$$\|c_n\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2(nt) dt = \|s_n\|^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(nt) dt = \pi$$

(voir le cours d'algèbre) on déduit que la famille de fonctions :

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_0 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_n, \frac{1}{\sqrt{\pi}} s_m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$$

est une base orthonormée de \mathcal{P} et pour tout $n \geq 0$:

$$\mathcal{B}_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_0 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_k, \frac{1}{\sqrt{\pi}} s_k \mid 1 \leq k \leq n \right\}$$

est une base orthonormée de \mathcal{P}_n .

Exercice 18.4 Montrer que pour tout entier naturel n les fonctions :

$$t \mapsto (\cos(t))^n \text{ et } t \mapsto (\sin(t))^n$$

sont des polynômes trigonométriques.

Solution 18.5 Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est évident. En supposant le résultat acquis pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} (\cos(t))^{n+1} &= (\cos(t))^n \cos(t) \\ &= \left(a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right) \cos(t) \\ &= a_0 \cos(t) + \sum_{k=1}^m (a_k \cos(kt) \cos(t) + b_k \sin(kt) \cos(t)) \end{aligned}$$

avec :

$$\cos(kt) \cos(t) = \frac{\cos((k+1)t) + \cos((k-1)t)}{2} \in \mathcal{P}$$

et :

$$\sin(kt) \cos(t) = \frac{\sin((k+1)t) + \sin((k-1)t)}{2} \in \mathcal{P}$$

pour $k \geq 1$, ce qui entraîne $(\cos(t))^{n+1} \in \mathcal{P}$.

On procède de même pour $(\sin(t))^n$.

On peut aussi utiliser les exponentielles complexes et la formule du binôme pour écrire :

$$\begin{aligned} (\cos(t))^n &= \frac{(e^{it} + e^{-it})^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{ikt} e^{-i(n-k)t} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(2k-n)t} \end{aligned}$$

et :

$$(\cos(t))^n = \Re \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(2k-n)t} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{2^n} \cos((2k-n)t) \in \mathcal{P}_n$$

On rappelle que pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, la projection orthogonale de f sur \mathcal{P}_n , pour $n \geq 0$ fixé, est le polynôme trigonométrique $S_n(f)$ défini par :

$$\begin{cases} S_n(f) \in \mathcal{P}_n \\ f - S_n(f) \in \mathcal{P}_n^\perp \end{cases}$$

Son expression dans la base orthonormée \mathcal{B}_n est donnée par :

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \left\langle f \mid \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^n \left\langle f \mid \frac{c_k}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{c_k}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^n \left\langle f \mid \frac{s_k}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{s_k}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle f \mid c_0 \rangle c_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \langle f \mid c_k \rangle c_k + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \langle f \mid s_k \rangle s_k \end{aligned}$$

Soit, pour tout réel x :

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k(f) \sin(kx)$$

où on a noté, pour tout entier naturel k :

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \text{ et } b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad (18.1)$$

Définition 18.3 Avec les notations qui précèdent, on dit les réels $a_k(f)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $b_k(f)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, sont les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction f et la série de fonctions :

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx))$$

est la série de Fourier de la fonction f .

Remarque 18.5 Les applications a_n et b_n sont des formes linéaires sur \mathcal{D} .

De manière plus générale, on donne la définition suivante.

Définition 18.4 On appelle série trigonométrique toute série de fonctions de la forme :

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites réelles ou complexes.

Remarque 18.6 Dans le cas où f est un polynôme trigonométrique, on a $S_n(f) = f$ pour n assez grand et la série de Fourier de f converge vers f en tout point $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 18.7 De manière plus générale, on peut définir les coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est 2π -périodique et Riemann-intégrable sur tout segment par les formules (18.1).

Le résultat qui suit est élémentaire, mais utile pour le calcul des coefficients de Fourier des fonctions paires ou impaires.

Lemme 18.2 Si $f \in \mathcal{D}$ est paire, on a alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt$$

Si $f \in \mathcal{D}$ est impaire, on a alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt$$

Démonstration. Résulte immédiatement du lemme 18.1 et du fait que la fonction $t \mapsto f(t) \cos(nt)$ est paire [resp. impaire] et la fonction $t \mapsto f(t) \sin(nt)$ est impaire [resp. paire] pour f paire [resp. impaire]. ■

Nous verrons plus loin que la réciproque du résultat précédent est vraie, c'est-à-dire que si $f \in \mathcal{D}$ est telle que $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ [resp. $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$] alors f est paire [resp. impaire] (exercice 18.9).

Il sera parfois commode d'utiliser les coefficients de Fourier exponentiels de $f \in \mathcal{D}$ (ou plus généralement de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique et Riemann-intégrable sur tout segment) définis pour $n \in \mathbb{Z}$ par :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

On a alors $c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \\ c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} \\ a_n(f) = c_{-n}(f) + c_n(f) \\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned}
 S_n(f)(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k(f) \sin(kx) \\
 &= c_0(f) + \sum_{k=1}^n (c_{-k}(f) + c_k(f)) \cos(kx) + i \sum_{k=1}^n (c_k(f) - c_{-k}(f)) \sin(kx) \\
 &= c_0(f) + \sum_{k=1}^n c_k(f) e^{ikx} + \sum_{k=1}^n c_{-k}(f) e^{-ikx} \\
 &= \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}
 \end{aligned}$$

Remarque 18.8 Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est 2π -périodique et Riemann-intégrable sur tout segment, les suites $(a_n(f))_{n \geq 0}$, $(b_n(f))_{n \geq 1}$ et $(c_n(f))_{n \geq 0}$ sont bornées. En effet, la fonction $|f|$ est Riemann-intégrable sur $[0, 2\pi]$ et on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$|c_n(f)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$$

ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n(f)| \leq |c_{-n}(f)| + |c_n(f)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt$$

et pareil pour $b_n(f)$.

Exercice 18.5 Soit $f \in \mathcal{D}$ et $g \in \mathcal{D}$ définie par $g(x) = f(x+a)$ où a est un réel fixé. Exprimer les coefficients de Fourier de g en fonction de ceux de f .

Solution 18.6 Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
 c_n(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t+a) e^{-int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) e^{-in(x-a)} dx = e^{ina} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \\
 &= e^{ina} c_n(f)
 \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
 a_n(g) &= c_{-n}(g) + c_n(g) = e^{-ina} c_{-n}(f) + e^{ina} c_n(f) \\
 &= e^{-ina} \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} + e^{ina} \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \\
 &= \frac{e^{ina} + e^{-ina}}{2} a_n(f) + \frac{e^{ina} - e^{-ina}}{2i} b_n(f) \\
 &= \cos(na) a_n(f) + \sin(na) b_n(f)
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 b_n(g) &= i(c_n(g) - c_{-n}(g)) = i(e^{ina} c_n(f) - e^{-ina} c_{-n}(f)) \\
 &= i \left(e^{ina} \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} - e^{-ina} \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} \right) \\
 &= \frac{e^{ina} + e^{-ina}}{2} b_n(f) - \frac{e^{ina} - e^{-ina}}{2i} a_n(f) \\
 &= \cos(na) b_n(f) - \sin(na) a_n(f)
 \end{aligned}$$

Ce qui peut aussi se vérifier avec :

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t+a) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(n(x-a)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\cos(na) \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx + \sin(na) \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \right) \\ &= \cos(na) a_n(f) + \sin(na) b_n(f) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} b_n(g) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t+a) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(n(x-a)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\cos(na) \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx - \sin(na) \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \right) \\ &= \cos(na) b_n(f) - \sin(na) a_n(f) \end{aligned}$$

Exercice 18.6 Soit $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n(f) = \frac{c_n(f')}{in}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n} \text{ et } b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$$

Solution 18.7 Si $f \in \mathcal{D}$ est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, il existe alors une subdivision de $[0, 2\pi]$:

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_p = 2\pi$$

telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ se prolonge par continuité en fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a_k, a_{k+1}]$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) e^{-int} dt$$

et comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a_k, a_{k+1}]$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) e^{-int} dt &= \left[i \frac{f(t) e^{-int}}{n} \right]_{a_k}^{a_{k+1}} - \frac{i}{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t) e^{-int} dt \\ &= i \frac{f(a_{k+1}^-) e^{-ina_{k+1}} - f(a_k^+) e^{-ina_k}}{n} - \frac{i}{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t) e^{-int} dt \end{aligned}$$

Si on suppose de plus que f est continue sur \mathbb{R} , on a alors $f(a_k^-) = f(a_k^+) = f(a_k)$ pour tout k compris entre 0 et p et :

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) &= \frac{i}{n} \sum_{k=0}^{p-1} (f(a_{k+1}) e^{-ina_{k+1}} - f(a_k) e^{-ina_k}) - \frac{i}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t) e^{-int} dt \\ &= -\frac{i}{n} \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t) e^{-int} dt = \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt \end{aligned}$$

puisque f est 2π -périodique et $c_n(f) = \frac{c_n(f')}{in}$.

Il en résulte que :

$$\begin{cases} a_n(f) = c_{-n}(f) + c_n(f) = \frac{c_n(f') - c_{-n}(f')}{in} = -\frac{b_n(f')}{n} \\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{c_{-n}(f') + c_n(f')}{n} = \frac{a_n(f')}{n} \end{cases}$$

Remarque 18.9 Avec les notations et hypothèses de l'exercice précédent, on a :

$$c_0(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) dt = 0$$

puisque f est 2π -périodique. Donc la relation $c_n(f') = in c_n(f)$ est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

18.4 L'inégalité de Bessel

On rappelle que la projection orthogonale $S_n(f)$ de $f \in \mathcal{D}$ sur \mathcal{P}_n est aussi la meilleure approximation de f (pour la distance induite par le produit scalaire que nous avons défini sur \mathcal{D}) par un polynôme trigonométrique de degré au plus égal à n , c'est à dire que :

$$\|f - S_n(f)\| = \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|$$

Du théorème de Pythagore, on déduit que :

$$\|f\|^2 = \|(f - S_n(f)) + S_n(f)\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \|S_n(f)\|^2$$

ce qui donne l'inégalité de Bessel :

$$\|S_n(f)\|^2 \leq \|f\|^2$$

et en tenant compte de :

$$\begin{aligned} \|S_n(f)\|^2 &= \left\langle f \mid \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle^2 + \sum_{k=1}^n \left\langle f \mid \frac{ck}{\sqrt{\pi}} \right\rangle^2 + \sum_{k=1}^n \left\langle f \mid \frac{sk}{\sqrt{\pi}} \right\rangle^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle f \mid c_0 \rangle^2 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \langle f \mid ck \rangle^2 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \langle f \mid sk \rangle^2 \\ &= \pi \left(\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2(f) + b_k^2(f)) \right) \end{aligned}$$

cela s'écrit :

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2(f) + b_k^2(f)) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt$$

On en déduit alors le résultat suivant.

Théorème 18.4 (Bessel) Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, la série numérique $\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum (a_n^2(f) + b_n^2(f))$ est convergente et on a :

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(f) + b_n^2(f)) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt$$

Nous verrons un peu plus loin qu'on a en fait l'égalité (théorème de Parseval).

Avec :

$$|c_{\pm n}(f)|^2 \leq \left(\frac{|a_n(f)| + |b_n(f)|}{2} \right)^2 \leq \frac{|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2}{2}$$

on déduit que les séries $\sum |c_{\pm n}(f)|^2$ sont convergentes.

Remarque 18.10 *Du théorème de Bessel, on déduit que la suite $(\|f - S_n(f)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente avec :*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n(f)\|^2 &= \|f\|^2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f)\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \pi \left(\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(f) + b_n^2(f)) \right) \end{aligned}$$

Avec le théorème de Parseval, nous verrons que cette limite est nulle, ce qui signifie que la suite $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans l'espace normé $(\mathcal{D}, \|\cdot\|)$, mais cela ne signifie pas qu'il y a convergence simple de la série de Fourier.

Remarque 18.11 *On peut aussi remarquer que la suite $(\|f - S_n(f)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0, donc convergente. En effet, pour $n \geq 1$, on a $S_n(f) \in \mathcal{P}_{n+1}$ et considérant que $S_{n+1}(f)$ est la meilleure approximation de f dans \mathcal{P}_{n+1} , on a :*

$$\|f - S_{n+1}(f)\| \leq \|f - S_n(f)\|$$

De l'inégalité de Bessel, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 18.1 (Riemann-Lebesgue) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(f) = 0$$

et :

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$$

Démonstration. Les séries $\sum a_n^2(f)$ et $\sum b_n^2(f)$ étant convergentes, leur terme général tend vers 0 et avec :

$$|c_{\pm n}(f)| \leq \frac{|a_n(f)| + |b_n(f)|}{2}$$

on déduit que $\lim_{|n| \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$. ■

Exercice 18.7 *Montrer que la série trigonométrique $\sum \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est convergente sur \mathbb{R} , mais qu'elle ne peut être la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{D}$.*

Solution 18.8 *Le théorème d'Abel nous assure la convergence de la série trigonométrique pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (théorème 6.25) et pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ cette série est nulle.*

Si cette série est la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{D}$, cela signifie que $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$, $b_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$ et le théorème de Bessel nous dit que la série

$\sum (b_n(f))^2 = \sum \frac{1}{n}$ est convergente, ce qui n'est pas.

On peut en fait remplacer la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ par n'importe quelle suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 en décroissant et telle que $\sum u_n^2 = +\infty$.

Exercice 18.8 Soit $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Montrer que :

$$a_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } b_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Solution 18.9 Si $f \in \mathcal{D}$ est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, sa dérivée se prolonge en une fonction de \mathcal{D} . Le résultat se déduit alors de l'exercice 18.6 et du théorème de Riemann-Lebesgue.

De manière plus générale, on a le résultat suivant.

Théorème 18.5 Si $f \in \mathcal{D}$ est de classe \mathcal{C}^p et de classe \mathcal{C}^{p+1} par morceaux avec $p \geq 0$, on a alors :

$$a_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) \text{ et } b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

Démonstration. Avec l'exercice 18.6, on a vu que $c_n(f') = inc_n(f)$ pour $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et $n \in \mathbb{Z}$.

Par récurrence, on en déduit que pour $f \in \mathcal{D}$ de classe \mathcal{C}^p et de classe \mathcal{C}^{p+1} par morceaux, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$$

pour tout $k \in \{0, \dots, p+1\}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} |n^{p+1}a_n(f)| &\leq |n^{p+1}c_n(f)| + |n^{p+1}c_{-n}(f)| \\ &\leq |c_n(f^{(p+1)})| + |c_{-n}(f^{(p+1)})| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

et pareil pour $b_n(f)$. On a donc $a_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$ et $b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$. ■

Lemme 18.3 Si $f \in \mathcal{D}$ est de classe \mathcal{C}^p et de classe \mathcal{C}^{p+1} par morceaux avec $p \geq 0$, alors pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$ les séries $\sum n^k a_n(f)$ et $\sum n^k b_n(f)$ sont absolument convergentes.

Démonstration. Pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$ et $n \geq 1$, on :

$$\begin{aligned} n^k |c_{\pm n}(f)| &= \frac{1}{n} |n^{k+1} c_{\pm n}(f)| = \frac{1}{n} |c_{\pm n}(f^{(k+1)})| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |c_{\pm n}(f^{(k+1)})|^2 \right) \end{aligned}$$

ce qui entraîne la convergence de la série $\sum n^k |c_{\pm n}(f)|$ (inégalité de Bessel) et celles des séries $\sum n^k |a_n(f)|$ et $\sum n^k |b_n(f)|$. ■

18.5 Convergence ponctuelle des séries de Fourier sur \mathcal{D}

Nous allons tout d'abord montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{D}$ est uniquement déterminée par ses coefficients de Fourier, ce qui compte tenu de la linéarité des coefficients de Fourier revient à montrer le résultat suivant.

Théorème 18.6 Une fonction $f \in \mathcal{D}$ est telle que $a_n(f) = b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qui équivaut à $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$) si, et seulement si, elle est identiquement nulle.

Démonstration. Soit f non identiquement nulle dans \mathcal{D} ayant tout ses coefficients de Fourier nuls.

Dans ce cas, on a $\int_0^{2\pi} f(t) P(t) dt = 0$ pour tout polynôme trigonométrique P .

Supposons qu'il existe un réel a tel que $f(a) \neq 0$ et tel que f soit continue en a . Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f(a) > 0$ (avec la linéarité des coefficients de Fourier, on a $c_n(-f) = -c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$).

Avec la continuité de f en a , on peut trouver un réel $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que :

$$\forall t \in [a - \delta, a + \delta], |f(t) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

ce qui entraîne :

$$\forall t \in [a - \delta, a + \delta], f(t) > \frac{f(a)}{2}$$

On désigne par P le polynôme trigonométrique défini par :

$$P(t) = 1 + \cos(t - a) - \cos(\delta)$$

Pour $t \in [a - \delta, a + \delta]$, on a $t - a \in [-\delta, \delta] \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ce qui donne en tenant compte de la parité de \cos et sa décroissance sur $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$0 \leq \cos(\delta) \leq \cos(t - a) \leq 1$$

soit :

$$\forall t \in [a - \delta, a + \delta], P(t) \geq 1$$

Toujours avec les propriétés de la fonction \cos , on a :

$$\forall t \in \left[a - \frac{\delta}{2}, a + \frac{\delta}{2}\right], \cos(t - a) \geq \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

et :

$$\forall t \in \left[a - \frac{\delta}{2}, a + \frac{\delta}{2}\right], P(t) \geq 1 + \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - \cos(\delta) = 1 + \varepsilon$$

avec $\varepsilon = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - \cos(\delta) > 0$ (stricte décroissance de \cos sur $]0, \frac{\pi}{2}[$)

Enfin pour $\delta \leq |t - a| \leq \pi$, on a :

$$-1 \leq \cos(t - a) \leq \cos(\delta)$$

puisque \cos est décroissante sur $[0, \pi]$ et paire, ce qui donne :

$$P(t) = 1 + \cos(t - a) - \cos(\delta) \leq 1.$$

On définit alors la suite $(P)_{n \in \mathbb{N}}$ polynômes trigonométriques par :

$$P_n(t) = (P(t))^{2n}$$

et on écrit que :

$$0 = I_n = \int_0^{2\pi} f(t) P_n(t) dt = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t) P_n(t) dt = J_n + K_n + L_n$$

avec :

$$J_n = \int_{a-\frac{\delta}{2}}^{a+\frac{\delta}{2}} f(t) P_n(t) dt \geq \delta \frac{f(a)}{2} (1+\varepsilon)^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$K_n = \int_{\frac{\delta}{2} \leq |t-a| \leq \delta} f(t) P_n(t) dt \geq 0$$

car $f(t) > \frac{f(a)}{2} > 0$ pour $|t-a| \leq \delta$ et $P_n(t) \geq 0$ pour tout t et :

$$|L_n| \leq \int_{\delta \leq |t-a| \leq \pi} |f(t)| P_n(t) dt \leq \int_{\delta \leq |t-a| \leq \pi} |f(t)| dt \leq 2\pi \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = M$$

ce qui donne :

$$J_n + K_n + L_n \geq J_n - M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et est en contradiction avec $I_n = 0$.

On a donc ainsi montré que f est nulle en tout point de continuité.

En un point de discontinuité $a \in [0, 2\pi]$ (s'il en existe, il n'y en a alors qu'un nombre fini), on a :

$$f(a^-) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = 0, \quad f(a^+) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = 0$$

et :

$$f(a) = \frac{f(a^-) + f(a^+)}{2} = 0.$$

■

Théorème 18.7 Si f, g dans \mathcal{D} sont telles que $a_n(f) = a_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(f) = b_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (ce qui équivaut à $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$) on a alors $f = g$.

Démonstration. Avec la linéarité des applications c_n , on a $c_n(f - g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $f - g = 0$. ■

Exercice 18.9 Montrer que si $f \in \mathcal{D}$ est telle que $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ [resp. $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$] alors f est paire [resp. impaire].

Solution 18.10 Les fonctions g, h définies sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

sont respectivement paire et impaire et on a $f = g + h$ avec g et h dans \mathcal{D} .

Si $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $a_n(f) = a_n(g) + a_n(h) = a_n(g)$ ($a_n(h) = 0$ puisque h est impaire) pour tout $n \geq 0$ et $b_n(f) = b_n(g) = 0$ pour tout $n \geq 1$ ($b_n(g) = 0$ puisque g est paire), donc $f = g$ est paire.

Du théorème précédent, nous allons déduire un premier théorème de convergence de la série de Fourier.

Théorème 18.8 Si $f \in \mathcal{D}$ est telle que les séries $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ sont absolument convergentes, alors sa série de Fourier converge normalement (donc uniformément) sur \mathbb{R} vers f et la fonction f est continue sur \mathbb{R}

Démonstration. Si les séries $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ sont absolument convergentes, avec

$$|a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)| \leq |a_n(f)| + |b_n(f)|$$

pour tout $n \geq 1$, on déduit alors que la série de Fourier de f est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur \mathbb{R} et sa somme $g(x)$ est une fonction continue sur \mathbb{R} .

Avec la convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$ des séries :

$$\frac{a_0(f)}{2} \cos(mt) + \sum (a_n(f) \cos(nt) \cos(mt) + b_n(f) \sin(nt)) \cos(mt)$$

pour tout $m \geq 0$ et l'orthogonalité de $\{c_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, on déduit que les coefficients de Fourier de g sont donnés par :

$$\begin{aligned} \pi a_0(g) &= \int_0^{2\pi} g(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0(f)}{2} dt + \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)) \right) dt \\ &= \pi a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f) \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt + b_n(f) \int_0^{2\pi} \sin(nt) dt \right) \\ &= \pi a_0(f) \end{aligned}$$

et, pour $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} \pi a_m(g) &= \int_0^{2\pi} g(t) \cos(mt) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0(f)}{2} \cos(mt) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f) \int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt + b_n(f) \int_0^{2\pi} \sin(nt) \cos(mt) dt \right) \\ &= a_m(f) \int_0^{2\pi} \cos^2(mt) dt = \pi a_m(f) \end{aligned}$$

$$\pi b_m(g) = b_m(f) \int_0^{2\pi} \sin^2(mt) dt = \pi b_m(f)$$

Il en résulte que $f = g$ puisque ces deux fonctions sont dans \mathcal{D} avec les mêmes coefficients de Fourier. ■

Exercice 18.10 Étudier la série de Fourier de la fonction 2π -périodique, paire valant $x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$.

En déduire les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Solution 18.11 On a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ puisque f est paire et :

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t(\pi - t) dt = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t(\pi - t) \cos(nt) dt \\
 &= -\frac{2}{n^2} (1 + (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p + 1 \\ -\frac{1}{p^2} & \text{si } n = 2p \end{cases}
 \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$.

Avec $|a_n(f)| \leq \frac{4}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$, on déduit que la série $\sum a_n(f)$ est absolument convergente et la série de Fourier de f converge normalement vers f . On a donc, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2}$$

ce qui équivaut à :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2}$$

Les évaluations en $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ respectivement nous donnent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 18.11 Étudier la série de Fourier de la fonction 2π -périodique, valant $|x|$ sur $[-\pi, \pi]$.

En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Solution 18.12 On a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ puisque f est paire et :

$$\begin{aligned}
 a_0(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t dt = \pi \\
 a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ -\frac{4}{\pi (2p+1)^2} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$.

Avec $|a_n(f)| \leq \frac{4}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$, on déduit que la série $\sum a_n(f)$ est absolument convergente et la série de Fourier de f converge normalement vers f . On a donc :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

L'évaluation en $x = 0$ nous donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

En utilisant le lemme 18.3, on en déduit le résultat suivant qui est un cas particulier du théorème de Dirichlet.

Corollaire 18.2 Si $f \in \mathcal{D}$ est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement (donc uniformément) sur \mathbb{R} vers f .

Démonstration. Le lemme 18.3 nous dit que les séries $\sum a_n(f)$ et $\sum b_n(f)$ sont absolument convergentes, ce qui donne le résultat. ■

Exercice 18.12 Soit $f(x) = |\sin(x)|$.

1. Etudier sa série de Fourier.
2. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.
3. Développer f sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \sin^2(nx)$.

Solution 18.13

1. La fonction f étant 2π -périodique continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, est développable en série de Fourier, la convergence étant uniforme sur \mathbb{R} tout entier. Ces coefficients de Fourier trigonométriques sont donnés par $b_n = 0$ puisque la fonction f est paire et pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin((1+n)t) + \sin((1-n)t)) dt \\ &= \frac{2(-1)^{n+1} - 1}{\pi(n^2 - 1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p + 1 \\ -\frac{4}{\pi(4p^2 - 1)} & \text{si } n = 2p \end{cases} \end{aligned}$$

et pour $n = 1$:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2t) dt = 0$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$

2. En prenant respectivement $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Ce qui peut se montrer de manière élémentaire avec :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{2j-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} |\sin(x)| &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(2nx)}{4n^2 - 1} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2 - 1} \end{aligned}$$

Exercice 18.13 À tout réel $a \in]0, \pi[$ on associe la fonction f_a , 2π -périodique et impaire telle que :

$$\forall x \in [0, \pi], f_a(x) = \begin{cases} x(\pi - a) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ a(\pi - x) & \text{si } a \leq x \leq \pi \end{cases}$$

1. Étudier la série de Fourier de f_a .
2. En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx) \sin(na)}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2}$$

pour x, a dans $]0, \pi[$.

Solution 18.14

1. La fonction f_a étant 2π -périodique continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, est développable en série de Fourier, la convergence étant uniforme sur \mathbb{R} tout entier. Ces coefficients de Fourier trigonométriques sont donnés par $a_n = 0$ puisque la fonction f est impaire et pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left((\pi - a) \int_0^a t \sin(nt) dt + a \int_a^\pi (\pi - t) \sin(nt) dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left((\pi - a) \left(\left[-t \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^a + \frac{1}{n} \int_0^a \cos(nt) dt \right) \right) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \left(a \left(\left[-(\pi - t) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_a^\pi - \frac{1}{n} \int_a^\pi \cos(nt) dt \right) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left((\pi - a) \left(-a \frac{\cos(na)}{n} + \frac{1}{n^2} \sin(na) \right) \right) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \left(a \left((\pi - a) \frac{\cos(na)}{n} + \frac{1}{n^2} \sin(na) \right) \right) \\ &= \frac{2}{n^2} \sin(na) \end{aligned}$$

2. Ce qui donne, pour tout réel $x \in]0, \pi[$:

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx) \sin(na)}{n^2} = f_a(x) = \begin{cases} x(\pi - a) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ a(\pi - x) & \text{si } a \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(pour $x = 0$ ou $x = \pi$ tout est nul) et $x = a \in]0, \pi[$ donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \frac{x(\pi - x)}{2}$$

En écrivant que $\cos(2nx) = 1 - 2\sin^2(nx)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - x(\pi - x) \end{aligned}$$

Prenant $x = \frac{\pi}{2}$, on retrouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 18.14 Soient $a \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2a \cos(x) + a^2}$$

et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$u_n = \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$$

1. Calculer $u_0 = \int_0^\pi f(x) dx$.
2. Calculer $u_1 = \int_0^\pi f(x) \cos(x) dx$.
3. Établir une relation de récurrence entre u_{n+1} , u_n et u_{n-1} pour $n \geq 1$.
4. Calculer les racines du polynôme $P(x) = x^2 - \frac{1+a^2}{a}x + 1$.
5. Expliciter u_n .
6. En déduire le développement de f en série de Fourier.
7. Exprimer, pour tout réel x :

$$\frac{1}{1 - ae^{-ix}} + \frac{1}{1 - ae^{ix}} - 1$$

en fonction de $f(x)$.

8. Retrouver le développement de Fourier de f en utilisant des développements en série entière.

Solution 18.15 Comme $0 < |a| < 1$, on a :

$$1 - 2a \cos(x) + a^2 = (a - \cos(x))^2 + \sin^2(x) > 0$$

pour tout réel x et la fonction f est bien définie sur \mathbb{R} .

1. En effectuant le changement de variable $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, pour $x \in]0, \pi[$, on a $du = \frac{1}{2}(1+u^2)dx$:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \\ &= \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-u^2}{1+u^2}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}u_0 &= \int_0^\pi f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-2a\frac{1-u^2}{1+u^2}+a^2} \frac{2du}{1+u^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{1-2a+a^2+(1+2a+a^2)u^2} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{(1-a)^2+(1+a)^2u^2} du \\ &= \frac{2}{(1-a)^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2u^2}\end{aligned}$$

puis le changement de variable $x = \frac{1+a}{1-a}u$ donne :

$$\begin{aligned}u_0 &= \frac{2}{(1-a)^2} \frac{1-a}{1+a} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{1-a^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{1-a^2}.\end{aligned}$$

2. En écrivant que :

$$(1-2a\cos(x)+a^2)f(x) = 1$$

on déduit que :

$$f(x)\cos(x) = \frac{(1+a^2)f(x)-1}{2a}$$

et :

$$\begin{aligned}u_1 &= \int_0^\pi f(x)\cos(x) dx = \frac{1+a^2}{2a} \int_0^\pi f(x) dx - \frac{\pi}{2a} \\ &= \frac{1+a^2}{2a} u_0 - \frac{\pi}{2a} = \frac{1+a^2}{2a} \frac{\pi}{1-a^2} - \frac{\pi}{2a} \\ &= \frac{\pi}{2a} \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} - 1 \right) = \frac{\pi a}{1-a^2}.\end{aligned}$$

3. Avec :

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(x)\cos(nx)$$

on déduit que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_{n-1} &= 2 \int_0^\pi f(x) \cos(x) \cos(nx) dx \\ &= 2 \int_0^\pi \frac{(1+a^2)f(x) - 1}{2a} \cos(nx) dx \\ &= \frac{1+a^2}{a} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx - \frac{1}{a} \int_0^\pi \cos(nx) dx \\ &= \frac{1+a^2}{a} u_n. \end{aligned}$$

4. On a :

$$aP(x) = ax^2 - (1+a^2)x + a = (ax-1)(x-a)$$

et le polynôme P a deux racines réelles, à savoir a et $\frac{1}{a}$.

5. On en déduit que $u_n = \lambda a^n + \frac{\mu}{a^n}$, les réels λ, μ étant déterminés par :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 = \frac{\pi}{1-a^2} \\ \lambda a + \frac{\mu}{a} = u_1 = \frac{\pi a}{1-a^2} = a(\lambda + \mu) \end{cases}$$

ce qui donne $\mu = 0$ ($a^2 \neq 1$) et $\lambda = \frac{\pi}{1-a^2}$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\pi}{1-a^2} a^n$$

6. La fonction f étant impaire, on a $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_n = \frac{2}{\pi} u_n = \frac{2}{1-a^2} a^n$ pour tout $n \geq 0$. Comme f est \mathcal{C}^∞ , sa série de Fourier converge normalement vers f et pour tout réel x , on a :

$$\frac{1}{1-2a \cos(x) + a^2} = \frac{1}{1-a^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(nx) \right).$$

7. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-ae^{-ix}} + \frac{1}{1-ae^{ix}} &= \frac{2(1-a \cos(x))}{(1-ae^{-ix})(1-ae^{ix})} = \frac{2-2a \cos(x)}{|e^{ix}-a|^2} \\ &= \frac{2-2a \cos(x)}{1-2a \cos(x) + a^2} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-ae^{-ix}} + \frac{1}{1-ae^{ix}} - 1 &= \frac{2-2a \cos(x)}{1-2a \cos(x) + a^2} - 1 \\ &= \frac{1-a^2}{1-2a \cos(x) + a^2} = (1-a^2) f(x) \end{aligned}$$

8. On en déduit que :

$$\begin{aligned}(1-a^2)f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-inx} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{inx} - 1 \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a^n (e^{inx} + e^{-inx}) \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(nx)\end{aligned}$$

Exercice 18.15 Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$ telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(0, R)$. Pour tout $r \in]0, R[$, on désigne par φ_r la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi_r(t) = \frac{1}{f(re^{it})}$.

1. Montrer que φ_r est développable en série de Fourier. On note $c_n(r)$ ses coefficients de Fourier exponentiels.
2. Montrer que la fonction h_n définie sur $]0, R[$ par $h_n(r) = \frac{c_n(r)}{r^n}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. Montrer que $c_n(r) = 0$ pour tout r dans $]0, R[$ et tout $n < 0$.
4. En déduire que $\frac{1}{f}$ est développable en série entière de rayon de convergence R .

Solution 18.16

1. La fonction φ_r est 2π -périodique et indéfiniment dérivable, sa série de Fourier est alors normalement convergente vers φ_r sur \mathbb{R} tout entier.
2. Pour tout $r \in]0, R[$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-int}}{f(re^{it})} dt, \quad c'_n(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} f'(re^{it})}{f^2(re^{it})} e^{-int} dt$$

(la fonction $(t, r) \mapsto \frac{e^{-int}}{f(re^{it})}$ est indéfiniment dérivable sur $[0, 2\pi] \times]0, R[$ et on intègre sur un intervalle fermé borné). On a alors :

$$\forall r \in]0, R[, \forall n \in \mathbb{Z}, h'_n(r) = -\frac{1}{2\pi r^{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} f'(re^{it}) + n f(re^{it})}{f^2(re^{it})} e^{-int} dt.$$

En remarquant que :

$$\frac{re^{it} f'(re^{it}) + n f(re^{it})}{f^2(re^{it})} e^{-int} = i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{-int}}{f(re^{it})} \right),$$

le résultat précédent donne, en tenant compte de la périodicité :

$$\forall r \in]0, R[, \forall n \in \mathbb{Z}, h'_n(r) = -\frac{i}{2\pi r^{n+1}} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{-int}}{f(re^{it})} \right) dt = 0.$$

On déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction h_n est constante sur $]0, R[$. En notant encore h_n cette constante on a alors :

$$\forall r \in]0, R[, \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(r) = h_n r^n.$$

De la continuité de chaque fonction $r \mapsto c_n(r)$ sur $[0, R[$, on déduit que $h_n = 0$ pour tout $n < 0$. Et toujours par continuité, on a $c_n(r) = h_n r^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in [0, R[$.

3. De ce qui précède, on déduit que pour tout $r \in [0, R[$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{f(re^{it})} = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n r^n e^{int},$$

c'est-à-dire $\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. C'est-à-dire que la fonction $\frac{1}{f}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence $R' \geq R$. En appliquant le raisonnement précédent à la fonction $\frac{1}{f}$, on déduit que $f = \left(\frac{1}{f}\right)^{-1}$ a un rayon de convergence $R \geq R'$. En définitive f et $\frac{1}{f}$ ont même rayon de convergence.

18.6 Approximation uniforme par des polynômes trigonométriques

Les lemmes techniques qui suivent nous seront utiles.

Lemme 18.4 Pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto (1 + \cos(t))^n$ est un polynôme trigonométrique.

Plus précisément, on a :

$$(1 + \cos(t))^n = \frac{1}{2^n} \left(C_{2n}^n + 2 \sum_{k=1}^n C_{2n}^{n-k} \cos(kt) \right).$$

Démonstration. On a déjà vu avec l'exercice 18.4 que les fonctions $\cos^k(t)$ sont des polynômes trigonométriques pour tout entier naturel k . Il en résulte que $(1 + \cos(t))^n$ est un polynôme trigonométrique.

En posant, pour t réel, $z = e^{it}$, on a :

$$P_n(t) = (1 + \cos(t))^n = \left(\frac{z^2 + 2z + 1}{2z} \right)^n = \frac{(1+z)^{2n}}{2^n z^n}$$

et avec la formule du binôme de Newton :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n} \left(C_{2n}^n + \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k z^{-(n-k)} + \sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k z^{k-n} \right),$$

soit en posant $j = n - k$ dans la première somme et $j = k - n$ dans la deuxième :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n} \left(C_{2n}^n + \sum_{j=1}^n C_{2n}^{n-j} z^{-j} + \sum_{j=+1}^n C_{2n}^{n+j} z^j \right)$$

et avec $C_{2n}^{n+j} = C_{2n}^{n-j}$, on a :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n} \left(C_{2n}^n + \sum_{j=1}^n C_{2n}^{n-j} (z^j + z^{-j}) \right),$$

c'est-à-dire :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n} \left(C_{2n}^n + 2 \sum_{j=1}^n C_{2n}^{n-j} \cos(jt) \right).$$

On peut aussi écrire que :

$$\begin{aligned} P_n(t) &= (1 + \cos(t))^n = 2^n \cos^{2n} \left(\frac{t}{2} \right) \\ &= 2^n \frac{\left(e^{i\frac{t}{2}} + e^{-i\frac{t}{2}} \right)^{2n}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{ik\frac{t}{2}} e^{-i(2n-k)\frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(2k-2n)\frac{t}{2}} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(k-n)t} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \Re \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(k-n)t} \right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \cos((k-n)t) \\ &= \frac{1}{2^n} \left(C_{2n}^n + 2 \sum_{j=1}^n C_{2n}^{n-j} \cos(jt) \right) \in \mathcal{P}_n \end{aligned}$$

■

Exercice 18.16 Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(t))^n dt = \frac{\pi}{2^{n-1}} C_{2n}^n.$$

Solution 18.17 Résulte immédiatement du lemme précédent.

Remarque 18.12 On a aussi :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(t))^n dt &= 2^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \left(\frac{t}{2} \right) dt \\ &= 2^{n+1} \int_0^{\pi} \cos^{2n} \left(\frac{t}{2} \right) dt \\ &= 2^{n+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx \end{aligned}$$

et on reconnaît l'intégrale de Wallis :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \frac{\pi}{2}$$

Lemme 18.5 Pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^n dt \geq \frac{4}{n+1}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^n dt &= 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^n dt \\ &\geq 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^n \sin(t) dt = 2J_n \end{aligned}$$

et le changement de variable $x = \cos(t)$ nous donne :

$$J_n = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{2} \right)^n dx = \left[\frac{2}{n+1} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n+1} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{n+1}.$$

■

Lemme 18.6 En notant, pour tout réel $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$I_n(\delta) = \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^n dt$$

on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n(\delta)}{I_n} = 0$$

Démonstration. Par parité, on a :

$$I_n(\delta) = \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^n dt = 2 \int_{\delta}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^n dt.$$

Avec la décroissance de la fonction \cos sur $[0, \pi]$ et la positivité de la fonction $1 + \cos$, il vient :

$$0 < I_n(\delta) \leq 2(\pi - \delta) \left(\frac{1 + \cos(\delta)}{2} \right)^n \leq \pi \left(\frac{1 + \cos(\delta)}{2} \right)^n$$

soit en notant $\lambda = \frac{1 + \cos(\delta)}{2} \in]0, 1[$:

$$0 < \frac{I_n(\delta)}{I_n} \leq \frac{\pi}{I_n} \lambda^n \leq \frac{\pi}{4} (n+1) \lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

■

À toute fonction $f \in \mathcal{D}$, on associe la suite de fonctions $(P_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$P_n(f)(x) = \frac{1}{I_n} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^n f(x-t) dt$$

où $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^n dt$.

On peut remarquer que pour $f = 1$, on a $P_n(f) = 1$.

Lemme 18.7 Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$ et tout entier naturel n , la fonction $P_n(f)$ est un polynôme trigonométrique.

Démonstration. La fonction f étant fixée, on note P_n pour $P_n(f)$.

Le changement de variable $u = x - t$ nous donne :

$$I_n P_n(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} \left(\frac{1 + \cos(x-u)}{2} \right)^n f(u) du$$

ce qui s'écrit aussi, compte tenu de la 2π -périodicité de la fonction intégrée :

$$I_n P_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(x-u)}{2} \right)^n f(u) du$$

Il en résulte que :

$$I_n P_n(x) = \frac{1}{4^n} \left(C_{2n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + 2 \sum_{k=1}^n C_{2n}^{n-k} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(k(x-u)) du \right)$$

et en écrivant que :

$$\cos(k(x-u)) = \cos(kx) \cos(ku) + \sin(kx) \sin(ku)$$

on constate que chaque fonction $x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(k(x-u)) du$ est un polynôme trigonométrique, ce qui donne le résultat. ■

Lemme 18.8 Toute fonction continue $f \in \mathcal{D}$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

Démonstration. Toute fonction continue $f \in \mathcal{D}$ est uniformément continue sur le compact $J = [-\pi - 1, \pi + 1]$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\eta \in]0, 1[$ tel que :

$$(t, x) \in J^2, |t - x| \leq \eta \implies |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour $x \in [-\pi, \pi]$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $|t - x| \leq \eta$ on a nécessairement $t \in [-\pi - 1, \pi + 1]$ ($\eta \in]0, 1[$ et faire un dessin), donc $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Pour $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|t - x| \leq \eta$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 2n\pi \in [-\pi, \pi]$ ($n = E\left(\frac{x + \pi}{2\pi}\right)$) et on a $|(t - 2n\pi) - (x - 2n\pi)| \leq \eta$, ce qui entraîne :

$$|f(t) - f(x)| = |f(t - 2n\pi) - f(x - 2n\pi)| \leq \varepsilon.$$

On a donc ainsi prouvé que f est uniformément continue sur \mathbb{R} . ■

Théorème 18.9 Pour toute fonction continue $f \in \mathcal{D}$, la suite de polynômes trigonométriques $(P_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Démonstration. La fonction f étant fixée, on note P_n pour $P_n(f)$.

Comme $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^n dt$, on a pour tout réel x :

$$P_n(x) - f(x) = \frac{1}{I_n} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^n (f(x-t) - f(x)) dt$$

Comme f est uniformément continue sur \mathbb{R} , pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que :

$$((u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } |u - v| \leq \delta) \implies (|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon)$$

On a alors pour tout réel x et tout réel $t \in [-\delta, \delta]$:

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$$

et :

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{I_n} \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^n |f(x-t) - f(x)| dt \\ &\quad + \frac{1}{I_n} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \left(\frac{1 + \cos(t)}{2} \right)^n |f(x-t) - f(x)| dt \\ &\leq \varepsilon + 2M \frac{I_n(\delta)}{I_n} \end{aligned}$$

où on a posé $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Puis avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n(\delta)}{I_n} = 0$, on déduit qu'il existe un entier n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, 0 < \frac{I_n(\delta)}{I_n} \leq \varepsilon$$

ce qui donne :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - f(x)| \leq (1 + 2M) \varepsilon$$

On a donc ainsi prouvé la convergence uniforme sur \mathbb{R} de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f . ■

Le résultat précédent nous dit que toute fonction continue $f \in \mathcal{D}$ peut être approchée uniformément par une suite de polynômes trigonométriques, ce qui se traduit en disant que l'espace \mathcal{P} des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}^0$ des fonctions continues et 2π -périodiques muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ (norme de la convergence uniforme).

Ce résultat ne peut être vrai sur \mathcal{D} car il existe des fonctions non continues dans \mathcal{D} .

Mais nous allons en déduire que \mathcal{P} est dense dans l'espace \mathcal{D} muni de sa structure hilbertienne, ce qui permettra de montrer le théorème de Parseval et de retrouver l'unicité des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{D}$.

Lemme 18.9 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, il existe une suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ de fonctions continues dans \mathcal{D} telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$ (ce qui signifie que $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge vers f dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|)$).*

Démonstration. Si f est continue, le résultat est alors évident.

En supposant f non continue, on se donne un point de continuité a de f et on note :

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p < a_{p+1} = a + 2\pi$$

les points de discontinuité de f sur $[a, a + 2\pi]$.

On désigne par $n_0 \geq 1$ un entier tel que :

$$\frac{1}{n_0} \leq 2 \min_{0 \leq k \leq p} (a_{k+1} - a_k)$$

et pour tout entier $n \geq n_0$, par f_n la fonction continue et 2π -périodique définie par :

$$\forall x \in [a, a + 2\pi] \setminus \bigcup_{k=1}^p \left[a_k - \frac{1}{n}, a_k + \frac{1}{n} \right], f_n(x) = f(x)$$

f est affine sur $\left[a_k - \frac{1}{n}, a_k + \frac{1}{n}\right]$ pour $1 \leq k \leq p$

(la condition $\frac{1}{n_0} \leq 2 \min_{0 \leq k \leq p} (a_{k+1} - a_k)$ nous assure que ces intervalles sont disjoints).

On peut préciser l'expression de f_n sur chaque intervalle $\left[a_k - \frac{1}{n}, a_k + \frac{1}{n}\right]$, c'est :

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \left(\left(x - \left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right) f\left(a_k + \frac{1}{n}\right) + \left(\left(a_k + \frac{1}{n}\right) - x\right) f\left(a_k - \frac{1}{n}\right) \right).$$

En notant $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, on a pour tout k compris entre 1 et p et tout $x \in \left[a_k - \frac{1}{n}, a_k + \frac{1}{n}\right]$:

$$|f_n(x)| \leq \frac{n}{2} \left(\left(x - \left(a_k - \frac{1}{n}\right)\right) + \left(\left(a_k + \frac{1}{n}\right) - x\right) \right) \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

Les fonctions considérées étant continues par morceaux et 2π -périodiques, on a pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|^2 &= \int_a^{a+2\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \\ &= \sum_{k=1}^p \int_{a_k - \frac{1}{n}}^{a_k + \frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq 4p \|f\|_\infty^2 \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

■

Théorème 18.10 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, la suite de polynômes trigonométriques $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|)$.*

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver une fonction continue $g \in \mathcal{D}$ telle que $\|f - g\| < \varepsilon$ et avec la convergence uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(P_n(g))_{n \in \mathbb{N}}$ vers g , on déduit qu'il existe un polynôme trigonométrique $P = P_{n_0}(g)$ tel que $\|P - g\|_\infty < \varepsilon$, ce qui entraîne :

$$\|P - g\|^2 = \int_0^{2\pi} |P(x) - g(x)|^2 dx \leq 2\pi \|P - g\|_\infty^2 < 2\pi \varepsilon^2$$

et :

$$\|P - f\| \leq \|P - g\| + \|g - f\| < (\sqrt{2\pi} + 1) \varepsilon$$

En notant n_ε le degré de P , on a $P \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et :

$$\|S_n(f) - f\| \leq \|P - f\| < (\sqrt{2\pi} + 1) \varepsilon$$

ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f) - f\| = 0$, soit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = f$ dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|)$. ■

Ce résultat est en fait équivalent au théorème de Parseval qui suit.

Théorème 18.11 (Parseval) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, la série numérique*

$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum (a_n^2(f) + b_n^2(f))$ est convergente et on a :

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(f) + b_n^2(f)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt$$

Démonstration. Résulte de :

$$\|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n(f)\|^2$$

avec $\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} f^2(t) dt$ et :

$$\|S_n(f)\|^2 = \pi \left(\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2(f) + b_k^2(f)) \right)$$

■

Corollaire 18.3 Une fonction $f \in \mathcal{D}$ est telle que $a_n(f) = b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si, et seulement si, elle est identiquement nulle.

Démonstration. Les égalités $a_n(f) = b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont équivalentes à $\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} f^2(t) dt$, soit à $f = 0$. ■

Exercice 18.17 Étudier la série de Fourier de la fonction 2π -périodique valant x^2 sur $[-\pi, \pi]$.

En déduire les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Solution 18.18 On a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ puisque f est paire et :

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 dt = 2 \frac{\pi^2}{3}$$

$$\forall n \geq 1, a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt = 4 \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Avec $|a_n(f)| \leq \frac{4}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$, on déduit que la série $\sum a_n(f)$ est absolument convergente et la série de Fourier de f converge normalement vers f . On a donc, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

ce qui équivaut à :

$$\forall x \in [0, \pi], x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

Les évaluations en $x = 0$ et $x = \pi$ respectivement nous donnent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

La formule de Parseval nous donne :

$$2 \frac{\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^4 dt = 2 \frac{\pi^4}{5}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 18.18 Soit f la fonction paire et 2π -périodique, telle que $f(x) = \operatorname{sh}(x)$ sur $[0, \pi]$.

1. Tracer le graphe de f .
2. Calculer les coefficients de Fourier de f .
3. Étudier la série de Fourier de f .
4. En déduire les valeurs des sommes :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \text{ et } T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

5. Que déduire du théorème de Parseval ?

Solution 18.19

1. Le lecteur est invité à dessiner.
2. On a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ puisque f est paire et pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sh}(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \Re \left(\int_0^\pi \operatorname{sh}(t) e^{int} dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \Re \left(\int_0^\pi (e^t - e^{-t}) e^{int} dt \right) \end{aligned}$$

avec, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$:

$$I_n(\varepsilon) = \int_0^\pi e^{(\varepsilon + in)t} dt = \frac{(-1)^n e^{\varepsilon\pi} - 1}{\varepsilon + in} = \frac{((-1)^n e^{\varepsilon\pi} - 1)(\varepsilon - in)}{n^2 + 1}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{((-1)^n e^\pi - 1) + ((-1)^n e^{-\pi} - 1)}{\pi(n^2 + 1)} \\ &= \frac{(-1)^n (e^\pi + e^{-\pi}) - 2}{\pi(n^2 + 1)} = 2 \frac{(-1)^n \operatorname{ch}(\pi) - 1}{\pi(n^2 + 1)} \end{aligned}$$

Avec $|a_n(f)| \leq \frac{\lambda}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$, on déduit que la série $\sum a_n(f)$ est absolument convergente et la série de Fourier de f converge normalement vers f . On a donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) \\ &= \frac{\operatorname{ch}(\pi) - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch}(\pi) - 1}{n^2 + 1} \cos(nx) \end{aligned}$$

ce qui équivaut à :

$$\forall x \in [0, \pi], \operatorname{sh}(x) = \frac{\operatorname{ch}(\pi) - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch}(\pi) - 1}{n^2 + 1} \cos(nx)$$

3. Les évaluations en $x = 0$ et $x = \pi$, nous donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch}(\pi) - 1}{n^2 + 1} = \frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{2}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch}(\pi) - 1}{n^2 + 1} (-1)^n = \frac{\pi \operatorname{sh}(\pi) - \operatorname{ch}(\pi) + 1}{2}$$

soit le système linéaire :

$$\begin{cases} -S + \operatorname{ch}(\pi) T = \frac{1 - \operatorname{ch}(\pi)}{2} \\ \operatorname{ch}(\pi) S - T = \frac{\pi \operatorname{sh}(\pi) - \operatorname{ch}(\pi) + 1}{2} \end{cases}$$

de solution :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\operatorname{th}(\pi)} - 1 \right)$$

et :

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\operatorname{sh}(\pi)} - 1 \right)$$

4. Le théorème de Parseval nous donne :

$$\begin{aligned} 2 \frac{(\operatorname{ch}(\pi) - 1)^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n \operatorname{ch}(\pi) - 1)^2}{(n^2 + 1)^2} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sh}^2(t) dt \\ &= \frac{\operatorname{sh}(2\pi)}{2\pi} - 1 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n \operatorname{ch}(\pi) - 1)^2}{(n^2 + 1)^2} &= \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\operatorname{sh}(2\pi)}{2\pi} - 1 - 2 \frac{(\operatorname{ch}(\pi) - 1)^2}{\pi^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{8} \operatorname{sh}(2\pi) - \frac{\pi^2}{4} - \frac{(\operatorname{ch}(\pi) - 1)^2}{2} \end{aligned}$$

Exercice 18.19 Soit $f \in \mathcal{D}$ continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2(f) + b_n^2(f)} \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt}.$$

2. Montrer que pour tous réels a, b, t , on a :

$$|a \cos(t) + b \sin(t)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

3. Montrer que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt}.$$

Solution 18.20

1. Dans le cas où $f \in \mathcal{D}$ est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n} \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{n}a_n(f')$$

(exercice 18.6) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace des suites réelles de carré sommable nous dit que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2(f) + b_n^2(f)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sqrt{a_n^2(f') + b_n^2(f')} \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(f') + b_n^2(f')} \end{aligned}$$

ce qui donne, compte tenu de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et de l'égalité de Parseval appliquée à la fonction $f' \in \mathcal{D}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2(f) + b_n^2(f)} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt} = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt}.$$

(on rappelle que $a_0(f') = 0$).

2. Si $a^2 + b^2 = 0$, c'est évident, sinon il existe un réel θ tel que :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos(\theta) \text{ et } \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin(\theta)$$

(puisque $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$) et :

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(t) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(t) &= \cos(\theta) \cos(t) + \sin(\theta) \sin(t) \\ &= \cos(\theta - t) \in [-1, 1] \end{aligned}$$

On peut aussi écrire que :

$$\begin{aligned} a \cos(t) + b \sin(t) &= a \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} + b \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \\ &= \frac{a - ib}{2} e^{it} + \frac{a + ib}{2} e^{-it} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} |a \cos(t) + b \sin(t)| &\leq \left| \frac{a - ib}{2} \right| + \left| \frac{a + ib}{2} \right| \\ &\leq |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

3. Comme $f \in \mathcal{D}$ est continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, sa série de Fourier converge normalement vers f sur \mathbb{R} et on a pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{a_0(f)}{2} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2(f) + b_n^2(f)} \leq \sqrt{\frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt}$$

18.7 Le théorème de Dirichlet

Dans un premier temps nous allons donner une expression intégrale des sommes partielles d'une série de Fourier.

Lemme 18.10 Pour tout entier naturel p strictement positif, la fonction θ_p définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ par :

$$x \mapsto \frac{\sin(px)}{\sin(x)}$$

se prolonge en une fonction continue et périodique de période 2π sur \mathbb{R} .

Démonstration. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ est stable par la translation $x \mapsto x + 2\pi$ et la fonction θ_p est continue et périodique sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ comme quotient de deux fonctions continues et périodiques, le dénominateur ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$. Pour k entier relatif et $x = k\pi + t$ avec t voisin de 0 on a :

$$\theta_p(x) = (-1)^{(p-1)k} \frac{\sin(pt)}{\sin(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} (-1)^{(p-1)k} p.$$

On peut donc prolonger la fonction θ_p par continuité en tout point $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ en posant $\theta_p(k\pi) = (-1)^{(p-1)k} p$. La fonction obtenue est bien continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} . ■

Pour la suite, on note encore θ_p le prolongement à \mathbb{R} de la fonction θ_p .

Pour tout entier naturel n , on désigne par D_n la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)$$

Ces fonctions D_n sont appelées noyaux de Dirichlet.

Lemme 18.11 Pour tout entier naturel n et tout réel x on a :

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \theta_{2n+1} \left(\frac{x}{2} \right).$$

Démonstration. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(kx) = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right) \right),$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{2}\right) D_n(x) &= \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^n \left(\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{2k-1}{2}x\right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \end{aligned}$$

$$\text{et } D_n(x) = \frac{1}{2} \theta_{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right).$$

■

Théorème 18.12 Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, tout réel x et tout entier n , on a :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) \theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right) dt \end{aligned}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k(f) \sin(kx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=1}^n (\cos(kt) \cos(kx) + \sin(kt) \sin(kx)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=1}^n \cos(k(x-t)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(x-t)) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right) dt \end{aligned}$$

et le changement de variable $u = x - t$, nous donne :

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) \theta_{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right) du$$

la fonction :

$$u \mapsto \theta_{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

étant 2π -périodique, il en est de même de $u \mapsto f(x-u) \theta_{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right)$ et on a :

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \theta_{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right) du$$

En exploitant la parité de $u \mapsto \theta_{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right)$, le changement de variable $u = -t$ nous donne :

$$\int_{-\pi}^0 f(x-u) \theta_{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right) du = \int_0^{\pi} f(x+t) \theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

et :

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) \theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right) dt.$$

■

En remarquant que $S_n(1) = 1$ pour tout $n \geq 0$, on déduit que :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right) dt = 1.$$

En fait cette égalité peut aussi se démontrer directement avec :

$$\int_0^{\pi} \theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2 \int_0^{\pi} D_n(t) dt = 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)\right) dt = \pi.$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$ et tout réel x , on rappelle qu'on a noté :

$$f(x^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} f(t) \quad \text{et} \quad f(x^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} f(t)$$

les limites à gauche et à droite en x . Si la fonction f est continue en x , on a $f(x^-) = f(x^+) = f(x)$.

Lemme 18.12 Soient $f \in \mathcal{D}$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, x un réel fixé et φ_x la fonction définie sur $]0, \pi]$ par :

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x-t) - f(x^-) + f(x+t) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

La fonction φ_x se prolonge par continuité en 0 et est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur $]0, \pi]$.

Démonstration. Comme $f \in \mathcal{D}$ est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t} = f'_g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} = f'_d(x)$$

et comme $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin(u)} = 1$, on déduit que :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi_x(t) &= 2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x-t) - f(x^-) + f(x+t) - f(x^+)}{t} \frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= 2(f'_g(x) + f'_d(x)) \end{aligned}$$

et φ_x se prolonge par continuité en 0.

Comme f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , et $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , ne s'annulant pas sur $]0, \pi]$, on déduit que φ_x est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur $]0, \pi]$. ■

Remarque 18.13 La fonction φ_x n'est pas 2π -périodique car :

$$\varphi_x(t+2\pi) = \frac{f(x-t) - f(x^-) + f(x+t) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{t}{2} + \pi\right)} = -\varphi_x(t).$$

Nous aurons besoin de la version suivante du théorème de Riemann-Lebesgue.

Lemme 18.13 Si $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue en 0 et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur $]0, \pi]$, on a alors :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

Démonstration. Avec :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(\lambda t) dt &= \int_0^\pi (\varphi(t) - \varphi(0)) \sin(\lambda t) dt + \varphi(0) \int_0^\pi \sin(\lambda t) dt \\ &= \int_0^\pi (\varphi(t) - \varphi(0)) \sin(\lambda t) dt + \varphi(0) \frac{1 - \cos(\lambda\pi)}{\lambda} \end{aligned}$$

et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(\lambda\pi)}{\lambda} = 0$, on se ramène au cas où $\varphi(0) = 0$.

Comme φ est continue en 0, pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $\delta \in]0, \pi[$ tel que $|\varphi(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0, \delta]$ et on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \right| &\leq \int_0^\delta |\varphi(t)| dt + \left| \int_\delta^\pi \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \right| \\ &\leq \pi\varepsilon + \left| \int_\delta^\pi \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \right| \end{aligned}$$

Comme φ est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur $[\delta, \pi]$, il existe une subdivision $a_0 = \delta < a_1 < \dots < a_p = \pi$ telle que φ se prolonge par continuité en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ pour k compris entre 0 et $p-1$ et on écrit que :

$$\left| \int_\delta^\pi \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{p-1} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \right|$$

Une intégration par parties sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ nous donne pour $\lambda > 0$:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi(t) \sin(\lambda t) dt = \left[-\varphi(t) \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} \right]_{a_k}^{a_{k+1}} + \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi'(t) \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} dt$$

et :

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \right| &\leq \frac{2}{\lambda} \sup_{[0, \pi]} |\varphi(t)| + \frac{\pi}{\lambda} \sup_{[a_k, a_{k+1}]} |\varphi'(t)| \\ &\leq \frac{M_k}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Il existe donc un réel λ_ε tel que $\left| \int_\delta^\pi \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \right| < \varepsilon$ pour $\lambda > \lambda_\varepsilon$ et on a $\left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq (\pi + 1)\varepsilon$ pour tout $\lambda > \lambda_\varepsilon$.

On a donc ainsi prouvé que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(\lambda t) dt = 0$. ■

Théorème 18.13 (Dirichlet) Si $f \in \mathcal{D}$ est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , sa série de Fourier converge alors simplement vers f sur \mathbb{R} , c'est-à-dire que pour tout réel x , on a :

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx)$$

avec $f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ dans le cas où x est un point de discontinuité de f .

Démonstration. Les lemmes qui précèdent nous disent que, pour tout réel x et tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) \theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right) dt - f(x) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)) \theta_{2n+1}\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(x-t) - f(x^-) + f(x+t) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \end{aligned}$$

et le lemme de Riemann-Lebesgue nous permet de conclure à :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(f)(x) - f(x)) = 0.$$

■

Exercice 18.20 Étudier la série de Fourier de la fonction f , 2π -périodique telle que $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $[-\pi, \pi]$.

Solution 18.21 On a $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$ puisque f est paire et pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\pi \cos\left(\left(\frac{1}{2} - n\right)t\right) dt - \int_0^\pi \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)t\right) dt \right) \\ &= \frac{8(-1)^{n-1}n}{\pi(4n^2 - 1)} \end{aligned}$$

Comme f est continue par morceaux et \mathcal{C}^1 par morceaux, les points de discontinuité étant les $(2k+1)\pi$ ou k décrit \mathbb{Z} , on a, pour $x \in]-\pi, \pi]$:

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2 - 1} \sin(nx) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2}\right) & \text{si } x \in]-\pi, \pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

18.8 Séries de Fourier et équations aux dérivées partielles

On se contente ici d'étudier quelques exemples.

On s'intéresse tout d'abord à l'équation des ondes.

Le problème est de déterminer une fonction $u : [0, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que :

$$\begin{cases} \forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \\ \forall x \in [0, \pi], \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad (18.2)$$

où $c > 0$, f et g sont des fonctions données, les hypothèses sur ces fonctions seront précisées en cours d'étude.

Lemme 18.14 *Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Si on prolonge cette fonction en une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est 2π -périodique et impaire, alors \tilde{f} est continue sur \mathbb{R} .*

Démonstration. En utilisant l'exercice 18.1, il nous suffit de vérifier la continuité de \tilde{f} sur $[-\pi, \pi]$, ce qui est clair par imparité sur $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ et en 0, cela se déduit de :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

et :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{f}(x) = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{f}(-x) = - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0) = 0.$$

■

On suppose que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$ avec $f(0) = f(\pi) = 0$ et on la prolonge en une fonction impaire et 2π -périodique sur \mathbb{R} qu'on note encore f . Cette fonction f est continue, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} et le théorème de Dirichlet (plus précisément le corollaire 18.2) nous dit que sa série de Fourier converge normalement vers f sur \mathbb{R} .

Compte tenu du fait que les $a_n(f)$ sont tous nuls (f est impaire), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx)$$

On suppose maintenant que $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^3 avec $f(0) = f(\pi) = 0$, $f''(0) = f''(\pi) = 0$ et on la prolonge en une fonction impaire et 2π -périodique sur \mathbb{R} qu'on note encore f .

Lemme 18.15 *Avec nos hypothèses, le prolongement f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .*

Démonstration. On vient de voir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx)$$

la convergence étant normale sur \mathbb{R} .

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} b_n(f) &= \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt = \left[-f(t) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi f'(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{n} \left(\left[f'(t) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi f''(t) \sin(nt) dt \right) \\ &= -\frac{1}{n^2} \left(\left[-f''(t) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi f'''(t) \cos(nt) dt \right) \\ &= -\frac{1}{n^3} \int_0^\pi f'''(t) \cos(nt) dt \end{aligned}$$

soit $b_n(f) = -\frac{1}{n^3} a_n(g)$, où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est 2π -périodique, paire coïncidant avec f''' sur $[0, \pi]$. Cette fonction g est dans \mathcal{D} et avec :

$$|n^2 b_n(f)| = \frac{1}{n} |a_n(g)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |a_n(g)|^2 \right)$$

on déduit que les séries dérivées :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n b_n(f) \cos(nx) \quad \text{et} \quad -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n(f) \sin(nx)$$

sont uniformément convergentes sur \mathbb{R} puisque :

$$|n b_n(\tilde{f})| \leq |n^2 b_n(\tilde{f})| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |a_n(g)|^2 \right)$$

avec $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$ et $\sum |a_n(g)|^2 < +\infty$ (théorème de Bessel). Les fonctions $x \mapsto \sin(nx)$, étant indéfiniment dérivables, on en déduit que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . ■

Théorème 18.14 Avec nos hypothèses, les fonctions u_1 et u_2 définies par :

$$\forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u_1(x, t) = f(x - ct) \\ u_2(x, t) = f(x + ct) \end{cases}$$

sont solutions de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

avec la condition initiale :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad u(x, 0) = f(x)$$

et la fonction $u_3 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \\ \forall x \in [0, \pi], \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Démonstration. Le lemme précédent nous dit que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . Il en est donc de même des fonctions u_1 et u_2 et pour $k = 1, 2$, on a :

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}(x, t) = c^2 f''(x - ct) = c^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}(x, t)$$

$$u_k(x, 0) = f(x)$$

avec :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = -cf'(x) = -\frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0)$$

$$u_1(0, t) = f(-ct) = -f(ct) = -u_2(0, t)$$

$$u_1(\pi, t) = f(\pi - ct) = f(-\pi - ct) = -f(\pi + ct) = -u_2(\pi, t)$$

Il en résulte que la fonction $u_3 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ vérifie $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$, $u(x, 0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ et $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. ■

On suppose que la fonction g est de classe \mathcal{C}^3 sur $[0, \pi]$ avec $g(0) = g(\pi) = 0$, $g''(0) = g''(\pi) = 0$.

On prolonge g en une fonction impaire et 2π -périodique sur \mathbb{R} qu'on note encore g . Cette fonction g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

On désigne par G la primitive de g sur \mathbb{R} telle que $\int_0^\pi G(x) dx = 0$. Elle est définie par $G(x) = \int_0^x g(t) dt + \lambda$ pour $x \in [0, \pi]$ et la condition $\int_0^\pi G(x) dx = 0$, qui s'écrit $\int_0^\pi \left(\int_0^x g(t) dt \right) dx + \pi\lambda = 0$, détermine λ de manière unique. De plus G est de classe \mathcal{C}^3 sur \mathbb{R} .

Théorème 18.15 Avec nos hypothèses, les fonctions v_1 et v_2 définies par :

$$\forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}, \begin{cases} v_1(x, t) = G(x - ct) \\ v_2(x, t) = G(x + ct) \end{cases}$$

sont solutions de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

avec la condition initiale :

$$\forall x \in [0, \pi], u(x, 0) = f(x)$$

et la fonction $v_3 = \frac{1}{2c}(v_2 - v_1)$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \\ \forall x \in [0, \pi], u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \\ \forall t \in \mathbb{R}, u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Démonstration. La fonction G étant de classe \mathcal{C}^3 sur $[0, \pi]$ il en est de même de v_k , pour $k = 1, 2$ et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 G''(x - ct) = c^2 g'(x - ct) = c^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}(x, t) \\ v_k(x, 0) &= G(x)\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial t}(x, 0) &= -cG'(x) = -cg(x) = -\frac{\partial v_2}{\partial t}(x, 0) \\ v_1(0, t) &= G(-ct) = G(ct) = v_2(0, t) \\ v_1(\pi, t) &= G(\pi - ct) = G(-\pi - ct) = G(\pi + ct) = v_2(\pi, t)\end{aligned}$$

■

Théorème 18.16 Si les fonctions f et g sont de classe \mathcal{C}^3 sur $[0, \pi]$ avec $f(0) = f(\pi) = 0$, $f''(0) = f''(\pi) = 0$, $g(0) = g(\pi) = 0$ et $g''(0) = g''(\pi) = 0$, alors une solution du problème (18.2) est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(b_n(f) \cos(nct) + \frac{b_n(g)}{n} \sin(nct) \right) \sin(nx)$$

Démonstration. Le théorème de Dirichlet nous dit que G est développable en série de Fourier sur \mathbb{R} et avec $a_0(G) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi G(x) dx = 0$, $a_n(G) = \frac{b_n(g)}{n}$ pour tout $n \geq 0$, on déduit que, pour tout réel x , on a :

$$G(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(g)}{n} \cos(nx)$$

la convergence étant uniforme.

En utilisant les théorèmes 18.14 et 18.15, on voit que la fonction $u = u_3 + v_3$ est solution de (18.2) et elle s'écrit :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} (G(x + ct) - G(x - ct))$$

avec :

$$\begin{aligned}f(x + ct) + f(x - ct) &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) (\sin(nx + nct) + \sin(nx - nct)) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx) \cos(nct)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}G(x + ct) - G(x - ct) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(g)}{n} (\cos(nx - nct) - \cos(nx + nct)) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n(g)}{n} \sin(nx) \sin(nct)\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(b_n(f) \cos(nct) + \frac{b_n(g)}{n} \sin(nct) \right) \sin(nx)$$

■

