7

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Les ensembles $\mathbb{Z}$ d'entiers relatifs et $\mathbb{Q}$ de nombres rationnels peuvent être construits à partir de problèmes analogues. Pour l'ensemble $\mathbb{Z}$ il s'agit des équations $x + a = 0$ qui n'ont pas de solution dans $\mathbb{N}$ pour a entier naturel non nul et pour l'ensemble $\mathbb{Q}$ il s'agit des équations $ax = 1$ qui n'ont pas de solution dans $\mathbb{Z}$ pour a entier relatif différent de $-1, 0$ et 1. Le passage de l'ensemble $\mathbb{Q}$ de nombres rationnels à l'ensemble $\mathbb{R}$ de nombres réels est plus délicat. Les problèmes sont de nature algébrique (par exemple l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$) mais aussi de nature topologique : l'existence de borne supérieure pour les ensembles non vides et majorés n'est pas assurée dans $\mathbb{Q}$ alors qu'elle l'est dans $\mathbb{R}$ (par exemple l'ensemble $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 \leq 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$). On consultera le cours d'analyse pour de plus amples détails sur la construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

La construction de l'ensemble des nombres complexes est motivée par le fait que certaines équations polynomiales telles que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'ont pas de solutions réelles.

Le but de ce chapitre est de construire un ensemble que nous noterons $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{R}$ et qui est muni d'opérations d'addition et de multiplication ayant les mêmes propriétés que leurs analogues sur $\mathbb{R}$, ce qui se traduira en disant que $\mathbb{C}$ est un corps commutatif. De plus dans cet ensemble $\mathbb{C}$ toute équation algébrique $P(x) = 0$, où P est un polynôme non constant, a des solutions, ce qui se traduira en disant que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Dans un premier temps, on se contentera de décrire les solutions des équations de degré 2, $x^2 + bx + c = 0$. Pour les équations de degré supérieur, on dispose du théorème de d'Alembert-Gauss dit théorème fondamental de l'algèbre dont la démonstration classique nécessite des outils d'analyse réelle tels que le fait qu'une fonction continue sur un compact de $\mathbb{C}$ est bornée et atteint ses bornes (voir le cours d'analyse et le problème du paragraphe 24). Nous verrons aussi que contrairement à $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ que nous aurons construit ne peut pas être muni d'une relation d'ordre compatible avec la multiplication, c'est-à-dire telle que si $x \leq y$ et $0 \leq z$, alors $x \cdot z \leq y \cdot z$.

7.1 Conditions nécessaires à la construction de $\mathbb{C}$

Supposons que nous ayons construit un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ muni d'opérations d'addition et multiplication qui prolongent celles que nous connaissons sur les réels avec les même propriétés (mises à part celle relatives à la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$) et tel que l'équation $x^2 + 1 = 0$ admette au moins une solution i dans $\mathbb{C}$.

Pour tous réels x, y, le nombre $z = x + iy$ sera alors dans $\mathbb{C}$ et l'égalité $z = 0$ est réalisée si, et seulement si, $x = y = 0$. En effet, si $y = 0$, alors $x = 0$ et si $y \neq 0$, alors $i = -\dfrac{x}{y}$ est réel, ce qui n'est pas possible puisque l'équation $x^2 + 1$ n'a pas de solution réelle. Il en résulte que pour x, x', y, y' réels l'égalité $x + iy = x' + iy'$ est réalisée si, et seulement si, $x = x'$ et $y = y'$.

De plus pour l'addition et la multiplication de deux éléments $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ de $\mathbb{C}$, on doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} z + z' = (x + x') + i\,(y + y') \\ zz' = (xx' - yy') + i\,(xy' + yx') \end{array} \right.$$

7.2 Construction de $\mathbb{C}$

Les considérations précédentes nous conduisent à définir sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels les opérations d'addition et de multiplication suivantes, où $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$ sont deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} z + z' = (x + x', y + y') \\ z \cdot z' = (xx' - yy', xy' + yx') \end{array} \right.$$

On notera $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux opérations (ou lois de composition interne) et on l'appelle ensemble des nombres complexes.

La multiplication de deux nombres complexes z et z' sera notée $z \cdot z'$ ou plus simplement zz'.

L'égalité de deux nombres complexes $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$ est réalisée si, et seulement si, on a les égalités $x = x'$ et $y = y'$ (c'est ce qui se passe dans tout produit cartésien $E \times F$).

En particulier, pour $y = y' = 0$, on a $(x, 0) = (x', 0)$ si, et seulement si $x = x'$, ce qui signifie que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (x, 0) \end{array}$$

est injective, ce qui permet de réaliser une bijection de $\mathbb{R}$ sur le sous ensemble $\mathbb{R}'$ de $\mathbb{C}$ formé des couples $(x, 0)$. Cette bijection permet d'identifier $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}'$, ce qui signifie qu'un nombre réel x est identifié à son image $(x, 0)$ dans $\mathbb{C}$. Cette identification $x = (x, 0)$ est bien compatible avec les opérations d'addition et de multiplication des réels dans le sens où :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + x' = (x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0) = x + x' \\ xx' = (x, 0)\,(x', 0) = (xx', 0) = xx' \end{array} \right.$$

L'opération d'addition vérifie les propriétés suivantes, déduites des propriétés analogues sur $\mathbb{R}$:

- elle est commutative, c'est-à-dire que pour tous nombres complexes $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$, on a :
$$z + z' = (x + x', y + y') = (x' + x, y' + y) = z' + z$$
- elle est associative, c'est-à-dire que pour tous nombres complexes $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ et $z'' = (x'', y'')$, on a :
$$\begin{aligned} z + (z' + z'') = (x, y) + (x' + x'', y' + y'') &= (x + x' + x'', y + y' + y'') \\ = ((x + x') + x'', (y + y') + y'') &= (x + x', y + y') + (x'', y'') \\ &= (z + z') + z'' \end{aligned}$$
- le réel $0 = (0, 0)$ est un élément neutre, c'est-à-dire que pour tout nombre complexe $z = (x, y)$, on a :
$$z + 0 = 0 + z = z$$

– tout nombre complexe $z = (x, y)$ admet un opposé donné par $z' = (-x, -y)$, ce qui signifie que :

$$z + z' = z' + z = 0$$

On note $-z$ cet opposé.

Tout cela se traduit en disant que $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif comme $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Z}, +)$.

La notion de groupe est étudiée plus en détails au chapitre suivant.

Comme pour n'importe quel groupe, on peut vérifier que :

– l'élément neutre est unique ;
– pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'opposé est unique ;
– tout élément de $\mathbb{C}$ est simplifiable (ou régulier) pour l'addition, c'est-à-dire que si $z + z' = z + z''$, alors $z' = z''$.

Pour ce qui est de l'autre opération de multiplication, on a les propriétés suivantes, encore déduites des propriétés analogues sur $\mathbb{R}$:

– elle est commutative, c'est-à-dire que pour tous nombres complexes $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$, on a :

$$zz' = (xx' - yy', xy' + yx') = (x'x - y'y, y'x + x'y) = z'z$$

– elle est associative, c'est-à-dire que pour tous nombres complexes $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ et $z'' = (x'', y'')$, on a $z(z'z'') = (zz')z''$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} z(z'z'') &= (x, y)(x'x'' - y'y'', x'y'' + y'x'') \\ &= (x(x'x'' - y'y'') - y(x'y'' + y'x''), x(x'y'' + y'x'') + y(x'x'' - y'y'')) \\ &= (xx'x'' - xy'y'' - yx'y'' - yy'x'', xx'y'' + xy'x'' + yx'x'' - yy'y'') \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (zz')z'' &= (xx' - yy', xy' + yx')(x'', y'') \\ &= ((xx' - yy')x'' - (xy' + yx')y'', (xx' - yy')y'' + (xy' + yx')x'') \\ &= (xx'x'' - xy'y'' - yx'y'' - yy'x'', xx'y'' + xy'x'' + yx'x'' - yy'y'') \\ &= z(z'z'') \end{aligned}$$

On peut remarquer que seule la commutativité de l'addition des réels a été utilisée ici.

– elle est distributive par rapport à l'addition, c'est-à-dire que pour tous nombres complexes z, z' et z'', on a $z(z' + z'') = zz' + zz''$, ce qui se vérifie encore sans problème.
– le réel $1 = (1, 0)$ est un élément neutre, c'est-à-dire que pour tout nombre complexe $z = (x, y)$, on a :

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$$

– tout nombre complexe $z = (x, y)$ différent de 0 admet un inverse donné par :

$$z' = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right),$$

ce qui signifie que $zz' = z'z = 1$. En effet l'égalité $zz' = 1$ équivaut à :

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ xy' + yx' = 0 \end{cases}$$

ce qui entraîne :

$$\left\{\begin{array}{l} x^2x' - xyy' = x \\ yxy' + y^2x' = 0 \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{l} yxx' - y^2y' = y \\ x^2y' + xyx' = 0 \end{array}\right.$$

et en additionnant les deux premières égalités [resp. en soustrayant les deux dernières], on obtient $(x^2 + y^2)\, x' = x$, $(x^2 + y^2)\, y' = -y$, ce qui donne compte tenu de $x^2 + y^2 \neq 0$ pour $z \neq 0$, $x' = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ et $y' = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$. Réciproquement, on vérifie facilement que cette solution convient. On note z^{-1} ou $\dfrac{1}{z}$ cet inverse.

On peut remarquer qu'on a utilisé ici la commutativité du produit des réels.

Tout cela se traduit en disant que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps commutatif comme $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

La notion de corps est étudiée plus en détails au chapitre suivant.

Là encore le neutre et l'inverse sont uniques et tout nombre complexe non nul est simplifiable pour le produit.

On note $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et ce qui précède nous dit que $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ est un groupe commutatif.

On peut remarquer que pour tout réel non nul x, on a bien :

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}, 0\right) = \frac{1}{(x, 0)}$$

Ces opérations d'addition et multiplication prolongent bien celles de $\mathbb{R}$.

L'associativité de la multiplication permet de définir les puissances n-ièmes d'un nombre complexe z par :

$$\left\{\begin{array}{l} z^0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ z^{n+1} = z^n \cdot z \end{array}\right.$$

Pour $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $z^n \neq 0$ et :

$$(z^n)^{-1} = \frac{1}{z^n} = \left(z^{-1}\right)^n$$

On note alors $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

Comme sur $\mathbb{R}$, on a $z^{p+q} = z^p z^q$ et $(z^p)^q = z^{pq}$ pour tous entiers relatifs p et q.

Comme sur $\mathbb{R}$, une égalité $zz' = 0$ équivaut à $z = 0$ ou $z' = 0$. En effet si $z \neq 0$, il admet un inverse et $0 = z^{-1} \cdot 0 = z^{-1}zz' = z'$.

En posant $i = (0, 1)$, on a :

$$i^2 = (0, 1)\,(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

De cette égalité, on déduit que $\dfrac{1}{i} = -i$.

Le nombre complexe $-i$ est aussi solution de l'équation $x^2+1 = 0$ et $i, -i$ sont les seules solutions de cette équation. En effet si $\alpha^2+1 = 0$, on a $\alpha^2 = -1 = i^2$ et $\alpha^2 - i^2 = (\alpha - i)\,(\alpha + i) = 0$ de sorte que $\alpha = i$ ou $\alpha = -i$.

Théorème 7.1 *Tout nombre complexe s'écrit de manière unique $z = x + iy$, où x et y sont deux réels.*

Démonstration. Un nombre complexe s'écrit de manière unique :

$$\begin{aligned} z &= (x, y) = (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0)\,(1, 0) + (y, 0)\,(0, 1) \\ &= x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy \end{aligned}$$

■

Définition 7.1 *Avec les notations du théorème qui précède, on dit que x est la partie réelle de z et y sa partie imaginaire, ce qui se note $x = \Re(z)$ et $y = \Im(z)$.*

Définition 7.2 *On dit qu'un nombre complexe est un imaginaire pur si sa partie réelle est nulle.*

En résumé un nombre complexe s'écrit $z = x + iy$ où $i^2 = -1$ et pour $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{cases} z = z' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y' \\ z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = \Im(z) = 0 \\ z + z' = (x + x') + i(y + y') \\ zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y) \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2} i \text{ si } z \neq 0 \end{cases}$$

Exercice 7.1 *Écrire sous la forme $x + iy$ les nombres complexes suivants :*

$$u = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}}\right)^{27}, \ \left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} + \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} - 1\right)^{111}, \ w = \frac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4}{(1 + i)^3}.$$

Solution 7.1 *On a* $\dfrac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3} - i}{i\left(\sqrt{3} - i\right)} = \dfrac{1}{i} = -i$ *et* $u = -i^{27} = -\left(i^4\right)^7 \dfrac{1}{i} = i$.
On a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} + \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} &= \frac{\left(\sqrt{3} + i\right)^2 + \left(\sqrt{3} - i\right)^2}{3 - i^2} \\ &= \frac{2\left(3 + i^2\right)}{3 - i^2} = 1 \end{aligned}$$

et $z = 0$.
On a :

$$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4 = -8\left(1 + i\sqrt{3}\right) \ \textit{et} \ (1 + i)^3 = -2(1 - i)$$

et :

$$w = 4\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} = 4\frac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = 2\left(1 - \sqrt{3}\right) + 2i\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

Exercice 7.2 *Calculer i^n pour tout entier relatif n.*

Solution 7.2 *Pour $n = 0$, on a $i^0 = 1$.*
Tout entier relatif s'écrit $n = 4q + r$ avec $r = 0, 1, 2$ ou 3 et :

$$i^n = \left(i^4\right)^q i^r = i^r = \begin{cases} 1 \ \textit{si} \ r = 0 \\ i \ \textit{si} \ r = 1 \\ -1 \ \textit{si} \ r = 2 \\ -i \ \textit{si} \ r = 3 \end{cases}$$

Exercice 7.3 *Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ qui prolonge la relation $\leq$ de $\mathbb{R}$ et qui soit compatible avec la somme et le produit, c'est à dire telle que $a \leq b$ et $c \leq d$ entraîne $a + c \leq b + d$ et $a \leq b$ et $0 \leq c$ entraîne $ac \leq bc$.*

Solution 7.3 *Supposant qu'une telle relation existe. Si* $0 \leq i$ *[resp.* $0 \leq -i$*], alors* $0 \leq i^2 \leq -1$ *[resp.* $0 \leq (-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$*] dans* $\mathbb{R}$*, ce qui est incompatible avec la relation d'ordre sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 7.4 *Soit* $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$*. Calculer* j^2*,* j^3*,* $1 + j + j^2$ *et* j^n *pour tout entier relatif* n*.*

Solution 7.4 *On a* $j^0 = 1$*,* $j^1 = j$*,* $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$*,* $j^3 = 1$ *et* $1 + j + j^2 = 0$*. En écrivant* n *sous la forme* $n = 3q + r$ *avec* $r = 0, 1$ *ou* 2*, on a :*

$$j^n = j^r = \begin{cases} 1 \text{ si } r = 0 \\ j \text{ si } r = 1 \\ j^2 \text{ si } r = 2 \end{cases}$$

Exercice 7.5 *Calculer* $(1+i)^2$*,* $(1+i)^6$ *et* $(1+i)^7$*. En utilisant la formule du binôme de Newton, en déduire les valeurs de* $1 - C_7^2 + C_7^4 - C_7^6$ *et* $C_7^1 - C_7^3 + C_7^5 - 1$*.*

Solution 7.5 *On a :*

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$$

donc :

$$(1+i)^6 = (2i)^3 = -8i$$

et :

$$(1+i)^7 = -8i(1+i) = 8 - 8i.$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on a aussi :

$$(1+i)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k i^k = \left(1 - C_7^2 + C_7^4 - C_7^6\right) + \left(C_7^1 - C_7^3 + C_7^5 - 1\right) i$$

ce qui nous donne $1 - C_7^2 + C_7^4 - C_7^6 = 8$ *et* $C_7^1 - C_7^3 + C_7^5 - 1 = -8$*.*

Exercice 7.6 *Calculer* $(1+i)^n$ *pour tout entier naturel* n*. En déduire les valeurs des sommes* $\sum_{j=0}^{p} C_{2p}^{2j} (-1)^j$ *et* $\sum_{j=0}^{p-1} C_{2p}^{2j+1} (-1)^j$ *pour tout entier naturel non nul* p*.*

Solution 7.6 *On a* $(1+i)^2 = 2i$*, donc* $(1+i)^{2p} = 2^p i^p$ *pour tout* $p \geq 0$ *et on connaît les* i^p*. Pour les entiers impairs, on a :*

$$(1+i)^{2p+1} = 2^p (1+i) i^p = 2^p \left(i^p + i^{p+1}\right).$$

On a donc :

$$(1+i)^{2p} = 2^p i^p = \begin{cases} 2^p \text{ si } p = 4q \\ 2^p i \text{ si } p = 4q+1 \\ -2^p \text{ si } p = 4q+2 \\ -2^p i \text{ si } p = 4q+3 \end{cases}$$

et :

$$(1+i)^{2p+1} = 2^p \left(i^p + i^{p+1}\right) = \begin{cases} 2^p (1+i) \text{ si } p = 4q \\ 2^p (-1+i) \text{ si } p = 4q+1 \\ -2^p (1+i) \text{ si } p = 4q+2 \\ 2^p (1-i) \text{ si } p = 4q+3 \end{cases}$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on a :

$$
\begin{aligned}
(1+i)^{2p} &= \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^{k} i^{k} = \sum_{j=0}^{p} C_{2p}^{2j} i^{2j} + \sum_{j=0}^{p-1} C_{2p}^{2j+1} i^{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{p} C_{2p}^{2j} (-1)^{j} + i \sum_{j=0}^{p-1} C_{2p}^{2j+1} (-1)^{j}
\end{aligned}
$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on en déduit que :

$$\sum_{j=0}^{4q} C_{8q}^{2j} (-1)^{j} = 2^{4q} \ \ et \ \sum_{j=0}^{4q-1} C_{8q}^{2j+1} (-1)^{j} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{4q+1} C_{8q+2}^{2j} (-1)^{j} = 0 \ \ et \ \sum_{j=0}^{4q} C_{8q+2}^{2j+1} (-1)^{j} = 2^{4q+1}$$

$$\sum_{j=0}^{4q+2} C_{8q+4}^{2j} (-1)^{j} = -2^{4q+2} \ \ et \ \sum_{j=0}^{4q+1} C_{8q+4}^{2j+1} (-1)^{j} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{4q+3} C_{8q+6}^{2j} (-1)^{j} = 0 \ \ et \ \sum_{j=0}^{4q+2} C_{8q+6}^{2j+1} (-1)^{j} = -2^{4q+3}$$

Par exemple :

$$\sum_{j=0}^{4} C_{8}^{2j} (-1)^{j} = C_8^4 - C_8^2 - C_8^6 + C_8^8 + 1 = 2^4 = 16$$

et :

$$\sum_{j=0}^{3} C_{8}^{2j+1} (-1)^{j} = C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7 = 0$$

7.3 Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition 7.3 *Le conjugué du nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.*

On déduit immédiatement de cette définition les propriétés suivantes du conjugué.

Théorème 7.2 *Pour tous nombres complexes z et z', on a :*

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.
4. $z + \overline{z} = 2\Re(z)$.
5. $z - \overline{z} = 2i\Im(z)$.
6. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.
7. *z est imaginaire pur si, et seulement si, $\overline{z} = -z$.*
8. $z\overline{z} = (\Re(z))^2 + (\Im(z))^2 \in \mathbb{R}^+$.

Le dernier point du théorème précédent nous permet de donner la définition suivante.

Définition 7.4 *Le module du nombre complexe $z = x + iy$ est le réel :*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dans le cas où z est réel, $|z|$ est la valeur absolue de z.

On vérifie facilement les propriétés suivantes liées au module.

Théorème 7.3 *Pour tous nombres complexes z et z', on a :*

1. $|z| \geq 0$ *et* $|z| = 0$ *si, et seulement si,* $z = 0$ *;*
2. $|z| = |\overline{z}|$ *;*
3. $|zz'| = |z|\,|z'|$ *;*
4. *pour toute suite finie $z_1, \cdots, z_n$ de nombres complexes, on a :*

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$$

5. *si* $z \neq 0$, *alors* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$ *;*
6. *si* $z' \neq 0$, *alors* $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ *;*
7. $|z| = 1$ *si, et seulement si,* $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ *;*
8. $|\Re(z)| \leq |z|$ *et l'égalité est réalisée si, et seulement si, z est réel ;*
9. $|\Im(z)| \leq |z|$ *et l'égalité est réalisée si, et seulement si, z est imaginaire pur.*

Du point **4.** on déduit que pour tout nombre complexe z et tout entier naturel n, on a $|z^n| = |z|^n$. Cette égalité étant encore valable pour n entier relatif et z non nul.

Du point **8.** on déduira l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec son cas d'égalité.

Exercice 7.7 *Montrer que le produit de deux entiers naturels qui sont somme de deux carrés d'entiers est encore somme de deux carrés d'entiers.*

Solution 7.7 *Soient $n = a^2 + b^2$ et $m = c^2 + d^2$ où a, b, c, d sont des entiers relatifs. En écrivant que $n = |u|^2$ et $m = |v|^2$ où, $u = a + ib$ et $v = c + id$, on a :*

$$\begin{aligned} nm = |uv|^2 &= |(ac - bd) + (ad + bc)\, i|^2 \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \end{aligned}$$

(identité de Lagrange), c'est-à-dire que nm est somme de deux carrés d'entiers.

En utilisant la décomposition des entiers en facteurs premiers, le résultat de l'exercice précédent est utilisé pour caractériser les entiers qui sont sommes de deux carrés.

Comme pour la valeur absolue réelle, on dispose de l'inégalité triangulaire. Cette inégalité est conséquence des résultats suivants.

Théorème 7.4 *Pour tous nombres complexes z et z', on a :*

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\Re\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$$

Démonstration. Il suffit d'écrire, pour $z = x + iy$, $z' = x + iy'$:

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (x + x')^2 + (y + y')^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2(xx' + yy') + x'^2 + y'^2 \\ &= |z|^2 + 2\Re\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 . \end{aligned}$$

■

Théorème 7.5 (inégalité de Cauchy-Schwarz) *Pour tous nombres complexes z et z', on a :*

$$\left|\Re\left(z\overline{z'}\right)\right| \leq |z|\,|z'|$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, z et z' sont liées sur $\mathbb{R}$ (i. e. $z' = 0$ ou $z \neq 0$ et $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}$), ce qui est encore équivalent à dire que $z\overline{z'}$ est réel.

Démonstration. On a :

$$\left|\Re\left(z\overline{z'}\right)\right| \leq \left|z\overline{z'}\right| = |z|\,|z'|$$

et l'égalité est réalisée si, et seulement si, $z\overline{z'}$ est réel. Pour $z' = 0$, c'est le cas et pour $z' \neq 0$, il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z = \lambda \dfrac{1}{\overline{z'}} = \dfrac{\lambda}{|z'|^2} z'$.

La réciproque est évidente. ■

Théorème 7.6 *Pour tous nombres complexes z et z', on a :*

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, z et z' sont positivement liées sur $\mathbb{R}$ (i. e. $z = 0$ ou $z \neq 0$ et $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}^+$), ce qui est encore équivalent à dire que $z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= |z|^2 + 2\Re\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z|\,|z'| + |z'|^2) = (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

ce qui équivaut à $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. L'égalité est réalisée si, et seulement si $\Re\left(z\overline{z'}\right) = |z|\,|z'|$, ce qui implique $\left|\Re\left(z\overline{z'}\right)\right| = |z|\,|z'|$ et z, z' sont liées sur $\mathbb{R}$. Pour $z' \neq 0$, on a $z = \lambda z'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\Re\left(z\overline{z'}\right) = \lambda |z'|^2 = |z|\,|z'|$ impose $\lambda \geq 0$.

La réciproque est évidente. ■

Corollaire 7.1 *Pour tous nombres complexes z et z', on a :*

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$$

Démonstration. Il suffit d'écrire que :

$$|z| \leq |z - z'| + |z'|$$

et :

$$|z'| \leq |z - z'| + |z|$$

■

Pour ce qui est du module d'une somme de nombres complexes, on a de manière plus générale le résultat suivant qui se montre facilement par récurrence.

Théorème 7.7 *Pour toute suite finie $z_1, \cdots, z_n$ de nombres complexes non nuls avec $n \geq 2$, on a :*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, il existe des réels $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tels que $z_k = \lambda_k z_1$ pour $k = 2, \cdots, n$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \geq 2$. Pour $n = 2$, c'est connu.

Supposons le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 2$.

Pour $z_1, \cdots, z_n$ dans $\mathbb{C}$ avec $n \geq 3$, en utilisant les résultats pour $n = 2$ et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|z_1 + \sum_{k=2}^{n} z_k\right| \leq |z_1| + \left|\sum_{k=2}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Si l'égalité $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$ est réalisée, en posant $Z_2 = \sum\limits_{k=2}^{n} z_k$, on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = |z_1 + Z_2| \leq |z_1| + |Z_2| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

et l'égalité $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$ nous dit que toutes les inégalités précédentes sont des égalités. On a donc $|z_1 + Z_2| = |z_1| + |Z_2|$ et $Z_2 = \lambda_1 z_1$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{R}^{+,*}$ ($Z_2 = 0$ entraîne $|z_1| = \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$, donc $\sum\limits_{k=2}^{n} |z_k| = 0$ et tous les z_k sont nuls, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ), puis de $|z_1| + |Z_2| = \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$, on déduit que $|Z_2| = \sum\limits_{k=2}^{n} |z_k|$ et avec l'hypothèse de récurrence qu'il existe des réels $\lambda_k > 0$ tels que $z_k = \lambda_k z_2$ pour $k = 3, \cdots, n$. On a alors :

$$Z_2 = \sum_{k=2}^{n} z_k = \left(1 + \sum_{k=3}^{n} \lambda_k\right) z_2 = \lambda_1 z_1$$

et $z_2 = \mu_2 z_1$, $z_k = \lambda_k z_2 = \mu_k z_1$ pour $k = 3, \cdots, n$, tous les μ_k étant strictement positifs. ∎

Exercice 7.8 *Montrer que si z est un nombre complexe de module égal à 1, alors $u = i\dfrac{1+z}{1-z}$ est réel.*

Solution 7.8 *Comme z est de module 1, on a $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ et :*

$$\overline{u} = -i\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} = -i\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = -i\frac{z+1}{z-1} = u,$$

ce qui prouve que u est réel.

Exercice 7.9 *Montrer que si z et z' sont deux nombres complexes de module égal à 1 tels que $zz' \neq -1$, alors $u = \dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.*

Solution 7.9 *Comme z et z' sont de module 1, on a :*

$$\overline{u} = \frac{\overline{z} + \overline{z'}}{1 + \overline{z}\overline{z'}} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}}{1 + \frac{1}{zz'}} = \frac{z + z'}{1 + zz'} = u,$$

ce qui prouve que u est réel.

Exercice 7.10 *Soient z, z' deux nombres complexes avec $z' \neq -1$. À quelle condition le nombre complexe $u = \dfrac{z + z'\overline{z}}{1 + z'}$ est-il réel ?*

Solution 7.10 *Dire que u est réel équivaut à dire que :*

$$\overline{u} = \frac{\overline{z} + \overline{z'}z}{1 + \overline{z'}} = \frac{z + z'\overline{z}}{1 + z'}$$

ce qui est encore équivalent à :

$$\left(\overline{z} + \overline{z'}z\right)(1 + z') = (z + z'\overline{z})\left(1 + \overline{z'}\right)$$

ou encore à :

$$\overline{z} + z'\overline{z'}z = z + z'\overline{z'}\overline{z}$$

soit à :

$$\overline{z}\left(1 - |z'|^2\right) = z\left(1 - |z'|^2\right).$$

En définitive, u est réel si, et seulement si, $|z'| = 1$ avec $z' \neq -1$ ou $z = \overline{z}$, ce qui signifie que z est réel.

Exercice 7.11 *Soient $z_1, \cdots, z_n$ des nombres complexes non nuls deux à deux distincts et tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k = 0$. Montrer qu'il existe deux indices $j \neq k$ compris entre 1 et n tels que $1 \leq \dfrac{|z_j|}{|z_k|} \leq 2$.*

Solution 7.11 *Quitte à réordonner, on peut supposer que :*

$$|z_1| \leq \cdots \leq |z_n|$$

En supposant que le résultat annoncé est faux, on a $\dfrac{|z_k|}{|z_{k-1}|} \notin [1, 2]$ pour tout k compris entre 2 et n et comme $\dfrac{|z_k|}{|z_{k-1}|} \geq 1$, on a nécessairement $\dfrac{|z_k|}{|z_{k-1}|} > 2$ pour tout k compris entre 2 et n et :

$$|z_n| > 2|z_{n-1}| > 2^2|z_{n-2}| > \cdots > 2^{n-1}|z_1|.$$

Mais l'hypothèse $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k = 0$ nous donne :

$$|z_n| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |z_k| < |z_n| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

soit :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} > 1$$

ce qui est impossible.

Exercice 7.12 *Déterminer tous les nombres complexes a et b, tels que la fonction $f : z \mapsto az + b\overline{z}$ soit involutive (i.e. telle que $f \circ f = Id_{\mathbb{C}}$).*

Solution 7.12 *Dire que f est involutive équivaut à dire que pour tout nombre complexe z, on a :*

$$a\left(az + b\overline{z}\right) + b\left(\overline{az} + \overline{b}z\right) = z$$

ce qui est encore équivalent à :

$$\left(a^2 + |b|^2 - 1\right) z + b\left(a + \overline{a}\right)\overline{z} = 0 \tag{7.1}$$

Prenant respectivement $z = 1$ et $z = i$, on aboutit à :

$$\begin{cases} \left(a^2 + |b|^2 - 1\right) + b\left(a + \overline{a}\right) = 0 \\ \left(a^2 + |b|^2 - 1\right) - b\left(a + \overline{a}\right) = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $a^2 + |b|^2 - 1 = 0$ par addition et $b\left(a + \overline{a}\right) = 0$ par soustraction.
Pour $b = 0$, on a $a^2 = 1$ et $a = \pm 1$.
Pour $b \neq 0$, on a $\overline{a} = -a$, ce qui signifie que a est imaginaire pur, soit $a = i\alpha$ avec α réel et $|b|^2 = 1 + \alpha^2 \geq 1$, ce qui impose $|b| \geq 1$ et $\alpha = \pm\sqrt{|b|^2 - 1}$.
Réciproquement si b est un nombre complexe de module supérieur ou égal à 1 et $a = \pm i\sqrt{|b|^2 - 1}$, on a alors $a^2 + |b|^2 = 1$ et $a + \overline{a} = 0$, ce qui entraîne (7.1) pour tout nombre complexe z.

Exercice 7.13 *Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $u = (z - 1)(\overline{z} - i)$ soit réel [resp. imaginaire pur].*

Solution 7.13 *En écrivant $z = x + iy$, on a*

$$\begin{aligned} u &= (x - 1 + iy)(x - i(y + 1)) \\ &= x^2 + y^2 + y - x + i(1 + y - x) \end{aligned}$$

et u est réel [resp. imaginaire pur] si, et seulement si, (x, y) appartient à la droite d'équation $y = x - 1$ [resp. au cercle d'équation $x^2 + y^2 + y - x = 0$].

Exercice 7.14 *Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z - i| = |z - iz| = |z - 1|$.*

Solution 7.14 *On note $z = x + iy$ un nombre complexe.*
L'égalité $|z - i| = |z - iz|$ équivaut à $x^2 + (y - 1)^2 = (x + y)^2 + (y - x)^2$, ou encore à :

$$x^2 - 2y + y^2 + 1 = 2x^2 + 2y^2$$

soit à :

$$x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0. \tag{7.2}$$

L'égalité $|z - i| = |z - 1|$ équivaut à $x^2 + (y - 1)^2 = (x - 1)^2 + y^2$, encore équivalent à $x = y$. L'équation (7.2) nous dit alors que x est nécessairement solution de :

$$2x^2 + 2x - 1 = 0$$

ce qui donne deux solutions possibles :

$$z_1 = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i) \text{ et } z_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 + i)$$

Réciproquement, on vérifie que ces solutions conviennent bien.
Géométriquement, l'ensemble des points cherché est l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ d'équation (19.15) et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ (figure 7.1).

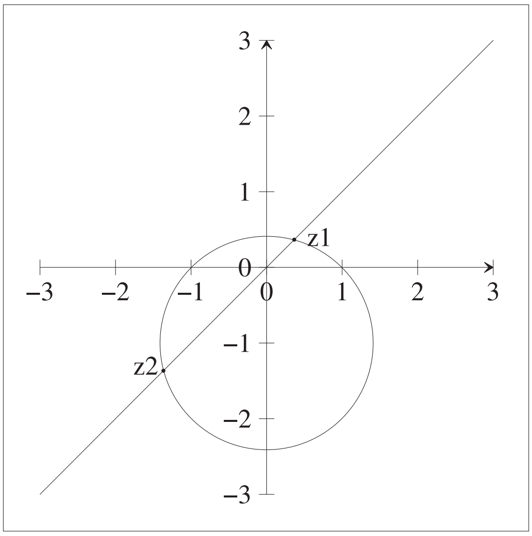

FIG. 7.1 – $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$

7.4 Les équations de degré 2

On s'intéresse ici aux équations algébriques de degré 2 à coefficients complexes, c'est-à-dire aux équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$.

Si on se place dans le cadre réel (i. e. les coefficients a, b, c sont réels et on cherche des solutions réelles), on sait qu'une telle équation n'a pas nécessairement de solution (c'est l'exemple de $x^2 + 1 = 0$ qui nous a conduit aux nombres complexes).

En divisant par a, on se ramène au cas où $a = 1$.

On remarque tout d'abord qu'une telle équation a au plus deux solutions complexes. En effet, si $z_1 \in \mathbb{C}$ est solution de $x^2 + bx + c = 0$, en désignant par z une autre solution, on a le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} z^2 + bz + c = 0 \\ z_1^2 + zx_1 + c = 0 \end{array} \right.$$

et par soustraction on aboutit à :

$$(z - z_1)(z + z_1 + b) = 0$$

qui donne $z = x_1$ ou $z = -z_1 - b$.

Il suffit donc de trouver une solution (s'il en existe) de cette équation pour avoir les deux.

Nous allons voir que sur $\mathbb{C}$ une équation de degré 2 a toujours deux solutions, distinctes ou confondues.

Connaissant $i \in \mathbb{C}$ solution de $x^2 + 1 = 0$, on déduit que pour tout réel a non nul l'équation $x^2 + a = 0$ a exactement deux solutions distinctes. En effet si a est négatif, cette équation équivaut à $x^2 = -a$ avec $-a > 0$, et dans l'ensemble des réels, on sait que cela équivaut à dire que $x = \pm\sqrt{-a}$, ce qui fourni deux solutions réelles distinctes. Si a est positif, cette équation équivaut à $x^2 = -a = i^2 \left(\sqrt{a}\right)^2$, soit à $x^2 - \left(i\sqrt{a}\right)^2 = 0$ ce qui équivaut à $x = \pm i\sqrt{a}$.

On a donc le résultat suivant.

Théorème 7.8 *Pour tout nombre réel non nul a l'équation $x^2 + a = 0$ a exactement deux solutions données par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{-a} \textit{ et } x_2 = \sqrt{-a} \textit{ si } a < 0 \\ x_1 = -i\sqrt{a} \textit{ et } x_2 = i\sqrt{a} \textit{ si } a > 0 \end{array} \right.$$

Pour $a = 0$, $x = 0$ est la seule solution de cette équation.

Définition 7.5 *Si α est un nombre complexe, on dit que le nombre complexe u est une racine carrée de α si $u^2 = \alpha$.*

Le théorème précédent nous dit que tout nombre réel non nul a a exactement deux racines carrées complexes, ce sont les réels $\pm\sqrt{a}$ pour $a > 0$ et les complexes $\pm i\sqrt{-a}$ pour $a < 0$.

Ce résultat est en fait valable pour tout nombre complexe α.

Théorème 7.9 *Tout nombre complexe non nul $\alpha = a + ib$ a exactement deux racines carrées.*

Démonstration. Il s'agit de résoudre l'équation $z^2 = \alpha$ et pour ce faire il nous suffit de trouver une solution.

Si $b = 0$, alors $\alpha = a$ est réel et le problème a été résolu.

On suppose donc que $b \neq 0$.

En notant $z = x + iy$, l'équation $z^2 = \alpha = a + ib$ équivaut au système de deux équations aux inconnues x, y :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{array} \right.$$

En utilisant le module de z, le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = a \\ |z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2 = |\alpha| \end{array} \right.$$

nous donne immédiatement :

$$x^2 = \frac{a + |\alpha|}{2}$$

avec

$$a + |\alpha| = a + \sqrt{a^2 + b^2} > a + \sqrt{a^2} = a + |a| \geq 0$$

et en conséquence, $x = \pm\dfrac{\sqrt{a + |\alpha|}}{\sqrt{2}}$, la partie imaginaire y étant déterminée par l'équation $2xy = b$ avec $b \neq 0$ (donc $x \neq 0$ et $y \neq 0$). En définitive l'équation $z^2 = \alpha$ a deux solutions complexes données par :

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\frac{a + |\alpha|}{2}} + i\frac{b}{2\sqrt{\frac{a+|\alpha|}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a + ib + |\alpha|}{\sqrt{a + |\alpha|}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\alpha + |\alpha|}{\sqrt{\Re(\alpha) + |\alpha|}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a + ib + \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}} \end{aligned}$$

et :

$$z_2 = -z_1$$

■

On en déduit alors le résultat suivant.

Théorème 7.10 *Toute équation de degré 2, $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) a deux solutions complexes distinctes ou confondues.*

Démonstration. En utilisant la forme réduite d'un polynôme de degré 2 :

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

on est ramené à l'équation :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

qui a deux solutions distinctes (si $b^2 - 4ac \neq 0$) ou confondues (si $b^2 - 4ac = 0$). ■

Avec les notations du théorème la quantité $\delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Pour $\delta = 0$, $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$ est la seule solution (on dit que c'est une racine double) et pour $\delta \neq 0$, les deux solutions sont $z_1 = \dfrac{-b-\gamma}{2a}$ et $z_1 = \dfrac{-b+\gamma}{2a}$ où γ est une racine carrée de δ (i.e. $\gamma^2 = \delta$).

Dans les deux cas, on $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{b^2 - \gamma^2}{4a^2} = \dfrac{b^2 - \delta}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.

Réciproquement si z_1, z_2 sont deux nombres complexes tels que $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$, on a $z_2 = -\dfrac{b}{a} - z_1$ et $z_1\left(-\dfrac{b}{a} - z_1\right) = \dfrac{c}{a}$, c'est-à-dire que z_1 est solution de l'équation $z^2 + \dfrac{b}{a}z + \dfrac{c}{a} = 0$, soit de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Comme z_1 et z_2 jouent des rôles symétriques, z_2 est également solution de cette équation. En résumé, on a le résultat suivant.

Théorème 7.11 *Étant donnés des nombres complexes a, b, c avec $a \neq 0$, les nombres complexes z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si, et seulement si, $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.*

Dans le cas où les coefficients a, b, c sont réels, il en est de même de δ et on distingue trois cas de figure :

- soit $\delta = 0$ et $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$ est la seule solution réelle de cette équation ;
- soit $\delta > 0$ et $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\delta}}{2a}$, $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\delta}}{2a}$ sont les deux solutions réelles de cette équation ;
- soit $\delta < 0$ et $x_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\delta}}{2a}$, $x_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\delta}}{2a}$ sont les deux solutions complexes non réelles de cette équation.

Parfois le coefficient b s'écrit naturellement sous la forme $b = 2b'$ et on a :

$$\delta = 4\left((b')^2 - ac\right)$$

La quantité $\delta' = (b')^2 - ac$ est alors appelée discriminant réduit de l'équation $ax^2 + 2b'x + c = 0$. Dans le cas où les coefficients a, b, c sont réels, on a :

- soit $\delta' = 0$ et $x_1 = -\dfrac{b'}{a}$ est la seule solution réelle de cette équation ;
- soit $\delta' > 0$ et $x_1 = \dfrac{-b'-\sqrt{\delta'}}{a}$, $x_1 = \dfrac{-b'+\sqrt{\delta'}}{a}$ sont les deux solutions réelles de cette équation ;

– soit $\delta' < 0$ et $x_1 = \dfrac{-b' - i\sqrt{-\delta'}}{a}$, $x_1 = \dfrac{-b' + i\sqrt{-\delta'}}{a}$ sont les deux solutions complexes non réelles de cette équation.

De manière plus générale, on peut montrer le théorème suivant que nous admettrons.

Théorème 7.12 (d'Alembert-Gauss) *Toute équation polynomiale à coefficients complexes de degré non nul n admet n racines complexes distinctes ou confondues.*

On rappelle que si P est un polynôme non constant (i. e. de degré $n \geq 1$) à coefficients complexes [resp. réels], on dit que $\alpha \in \mathbb{C}$ [resp. $\alpha \in \mathbb{R}$] est racine de P si $P(\alpha) = 0$.

On peut donner plusieurs démonstrations du théorème de d'Alembert-Gauss mais toutes utilisent des outils d'algèbre ou d'analyse plus sophistiqués que le contenu de ce chapitre. Le problème du paragraphe 24 propose une démonstration classique qui utilise des outils d'analyse.

Il est par contre facile de montrer qu'un polynôme à coefficients complexes [resp. réels] de degré $n \geq 1$ a au plus n racines complexes[resp. réelles] distinctes ou confondues. En effet pour $n = 1$, l'unique racine du polynôme $az + b$ avec $a \neq 0$ est $z = -\dfrac{b}{a}$. En supposant le résultat acquis pour les polynômes de degré $n - 1 \geq 1$, on se donne un polynôme $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ de degré n (ce qui signifie que $a_n \neq 0$). S'il admet une racine α, on peut écrire, pour tout nombre complexe z :

$$P(z) = P(z) - P(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(z^k - \alpha^k\right)$$

avec $z^k - \alpha^k = (z - \alpha) \sum\limits_{j=1}^{k} z^{k-j} \alpha^{j-1}$ pour tout $k \geq 1$, ce qui donne $P(z) = (z - \alpha) Q(z)$, où Q est un polynôme de degré $n - 1$, il a donc au plus $n - 1$ racines et P a au plus n racines.

Une conséquence importante est que deux polynômes P et Q de degré $n \geq 1$ qui coïncident en $n+1$ points distincts sont nécessairement égaux. En effet $P - Q$ est nul ou de degré au plus n. S'il est non constant, il est degré $p \leq n$ avec $n + 1 > p$ racines, ce qui est impossible. Il est donc constant égal à $P(\alpha) - Q(\alpha) = 0$ où α est l'une des racines communes de P et Q.

Exercice 7.15 *Factoriser dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$, $x^4 + 1$.*

Solution 7.15 *Dans $\mathbb{R}$ on a :*

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= \left(x^2 + 1\right)^2 - 2x^2 \\ &= \left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right) \end{aligned}$$

les deux polynômes $x^2 \pm \sqrt{2}x + 1$ de discriminant $\delta = -2 < 0$ étant sans racines réelles. Sur $\mathbb{C}$ ces polynômes ont pour racines $\dfrac{\pm 1 \pm i1}{\sqrt{2}}$, ce qui donne :

$$x^4 + 1 = \left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

Exercice 7.16 *Déterminer les racines carrés complexes de $\alpha = -7 + 24i$.*

Solution 7.16 *En écrivant $z = x + iy$, l'équation $z^2 = \alpha$ équivaut à :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = -7 \\ xy = 12 \end{array} \right.$$

Considérant que $|z|^2 = x^2 + y^2 = |\alpha| = 25$, on déduit que $x^2 = 9$, donc $x = 3$ et $y = 4$ ou $x = -3$ et $y = -4$. Les deux racines carrés de α sont donc $\pm(3 + 4i)$.

Exercice 7.17 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1-2i)z + 1 - 7i = 0$.*

Solution 7.17 *Cette équation est équivalente à :*

$$\left(z - \frac{1-2i}{2}\right)^2 = \frac{(1-2i)^2}{4} - 1 + 7i = \frac{-7+24i}{4}$$

soit à $Z^2 = \alpha = -7+24i$, où on a posé $Z = 2z - 1 + 2i$, ce qui donne $Z = \pm(3+4i)$ et $z = \dfrac{1-2i}{2} \pm \dfrac{3+4i}{2}$. Les deux solutions complexes de cette équation sont donc :

$$z_1 = 2 + i,\ z_2 = -2 - 3i.$$

7.5 Les équations de degré 3 et 4

On s'intéresse tout d'abord aux équations polynomiales de degré 3 :

$$P(z) = z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

où a, b, c sont des nombres complexes.

Dans un premier temps, on effectue une translation en vue de supprimer le terme en z^2 de cette équation, c'est-à-dire qu'in cherche $\lambda \in \mathbb{C}$ qui permette de supprimer z^2 dans :

$$P(z-\lambda) = (z-\lambda)^3 + a(z-\lambda)^2 + b(z-\lambda) + c.$$

En développant, on a :

$$P(z-\lambda) = z^3 + (a-3\lambda)z^2 + \left(\lambda^2 - 2a\lambda + b\right)z + \left(c - b\lambda + a\lambda^2 - \lambda^3\right).$$

Le choix de $\lambda = \dfrac{a}{3}$ donne :

$$P(z-\lambda) = z^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)z + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right).$$

On est donc ramené à l'équation :

$$Q(z) = z^3 + pz + q = 0$$

où on a noté $p = b - \dfrac{a^2}{3}$ et $q = c - \dfrac{ab}{3} + \dfrac{2a^3}{27}$. Si z est solution de $Q(z) = 0$, alors $z - \lambda$ est solution de $P(t) = 0$.

Si $p = 0$, alors les solutions de $Q(z) = 0$ sont les racines cubiques de $-q$.

Si $p \neq 0$, on cherche alors les solutions sous la forme $z = u + v$ en imposant une condition supplémentaire à u et v. En développant :

$$P(u+v) = u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q$$

on est amené à imposer $3uv + p = 0$, ce qui donne le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p \end{cases}$$

Les nombres complexes u^3 et v^3 sont alors solutions de : :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

ce qui revient à dire que ce sont les solutions de l'équation de degré 2 :

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\delta = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}.$$

Notant ω une racine carrée de δ ($\omega^2 = \delta$), on a :

$$u^3 = \frac{-q - \omega}{2} \text{ et } v^3 = u^3 = \frac{-q + \omega}{2}$$

En désignant par w une racine cubique $\dfrac{-q-\omega}{2}$, les deux autres sont jw et $\overline{j}w$. Enfin la relation $3uv = -p$ avec $p \neq 0$, donne $u \neq 0$, $v \neq 0$ et $v = -\dfrac{p}{3u}$. On a donc ainsi trouvé trois solutions (u, v) , à savoir :

$$\left(w, -\frac{p}{3w}\right), \ \left(jw, -\frac{p}{3jw}\right) = \left(jw, -\frac{p\overline{j}}{3w}\right) \text{ et } \left(\overline{j}w, -\frac{p}{3\overline{j}w}\right) = \left(\overline{j}w, -\frac{pj}{3w}\right)$$

ce qui donne trois solutions pour l'équation $Q(z) = 0$:

$$z_1 = w - \frac{p}{3w}, \ z_2 = jw - \frac{p\overline{j}}{3w}, \ z_3 = \overline{j}w - \frac{pj}{3w}$$

et on les a toutes.

Exercice 7.18 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :*

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 4 = 0$$

Solution 7.18 *On élimine tout d'abord le terme en z^2. On a :*

$$\begin{aligned} P(z-\lambda) &= (z-\lambda)^3 - 3(z-\lambda)^2 + 4(z-\lambda) - 4 \\ &= z^3 - 3(\lambda+1)z^2 + \left(4 + 6\lambda + 3\lambda^2\right)z - \left(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 4\right) \end{aligned}$$

et $\lambda = -1$ donne :

$$Q(z) = P(z+1) = z^3 + z - 2.$$

Cherchant les solutions sous la forme $z = u + v$, on aboutit à :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ u^3 v^3 = -\dfrac{1}{27} \end{cases}$$

qui nous conduit à résoudre :

$$x^2 - 2x - \frac{1}{27} = 0$$

de solutions :

$$u^3 = 1 + \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} \text{ et } v^3 = 1 - \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}.$$

Ce qui donne :

$$u \in \left\{ \sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}, j\sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}, \overline{j}\sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}} \right\}$$

et $v = -\frac{1}{3u}$ *avec :*

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} - 1}}{\sqrt[3]{\frac{28}{27} - 1}} = 3\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} - 1}.$$

D'où les solutions de $Q(z) = 0$ *:*

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} + 1} - \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} - 1}$$

$$z_2 = j\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} + 1} - \overline{j}\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} - 1}$$

$$z_2 = \overline{j}\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} + 1} - j\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} - 1}$$

Comme 1 *est racine évidente de* $Q(z) = 1$ *et que* z_1 *est la seule solution réelle, on a nécessairement :*

$$\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} + 1} - \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} - 1} = 1$$

ce qui peut se vérifier en élevant au carré.
Les solutions de $P(z) = 0$ *sont alors :*

$$z_1 + 1 = 2,\ z_2 + 1,\ z_3 + 1.$$

7.6 Arguments d'un nombre complexe

On suppose connues du cours d'analyse les fonctions trigonométriques cos, sin et tan avec leurs principales propriétés. En particulier, les fonctions cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$, périodiques de période 2π, la fonction cos est paire, la fonction sin est impaire et on a les formules de trigonométrie suivantes valables pour tous réels a, b :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{cases}$$

desquelles on déduit les suivantes bien utiles :

$$\begin{cases} \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\ \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b) \\ \cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \\ \sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} \\ \cos(a)\sin(b) = \dfrac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2} \\ \sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2} \end{cases}$$

enfin avec $\cos(0) = 1$, on déduit que :

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1.$$

La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et elle est impaire et π-périodique.

La fonction cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, la fonction sin une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$ et la fonction tan une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Les fonctions réciproques de ces fonctions trigonométriques sont notées respectivement arccos, arcsin et arctan. On a donc :

$$(x \in [0, \pi] \text{ et } y = \cos(x)) \Leftrightarrow (y \in [-1, 1] \text{ et } x = \arccos(y))$$
$$\left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } y = \sin(x)\right) \Leftrightarrow (y \in [-1, 1] \text{ et } x = \arcsin(y))$$
$$\left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } y = \tan(x)\right) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{R} \text{ et } x = \arctan(y))$$

Exercice 7.19 *Montrer que pour tout réel x on a :*

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right).$$

Solution 7.19 *Pour tout entier naturel k et pour tout réel u on a :*

$$\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos(ku) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)u\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)u\right)\right),$$

on en déduit alors que pour tout réel u on a :

$$\begin{aligned} \sin\left(\tfrac{u}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku)\right) &= \tfrac{1}{2}\left(\sin\left(\tfrac{u}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\tfrac{2k+1}{2}u\right) - \sin\left(\tfrac{2k-1}{2}u\right)\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{2n+1}{2}u\right) \end{aligned}$$

Exercice 7.20 *Montrer que pour tout réel x on a :*

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right)\right) = \sin^2\left(\frac{n}{2}x\right).$$

Solution 7.20 *Pour tout entier naturel k et pour tout réel u on a :*

$$\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left((2k+1)\frac{u}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(ku)-\cos((k+1)u)\right),$$

on en déduit alors que pour tout réel u on a :

$$\begin{aligned}\sin\left(\tfrac{u}{2}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left((2k+1)\tfrac{u}{2}\right)\right)&=\tfrac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos(ku)-\cos((k+1)u)\right)\right)\\&=\tfrac{1}{2}\left(1-\cos(nu)\right)=\sin^2\left(\tfrac{n}{2}u\right).\end{aligned}$$

Le résultat suivant est la base de la définition de l'argument d'un nombre complexe.

Théorème 7.13 *Si z est un nombre complexe de module 1, il existe un unique réel $\theta\in[-\pi,\pi[$ tel que $z=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.*

Démonstration. Le nombre complexe $z=x+iy$ est de module 1 si, et seulement si $x^2+y^2=1$. En particulier x est dans $[-1,1]$ et il existe un unique réel $\alpha\in[0,\pi]$ tel que $x=\cos(\alpha)$. Avec $y^2=1-x^2=\sin^2(\alpha)$, on déduit que $y=\pm\sin(\alpha)$, soit $y=\sin(\pm\alpha)$. Avec la parité de la fonction cos, on peut écrire que $x=\cos(\pm\alpha)$ et on aboutit à $(x,y)=(\cos(\theta),\sin(\theta))$ avec $\theta\in[-\pi,\pi[$ (pour $(x,y)=(\cos(\pi),\sin(\pi))=(-1,0)$, on écrit $(x,y)=(\cos(-\pi),\sin(-\pi))$).

Si $\theta'\in[-\pi,\pi[$ est une autre solution, de $\cos(\theta)=\cos(\theta')$, on déduit que $\theta'=\pm\theta$. Si $\theta'=\theta$, c'est terminé, sinon $\theta'=-\theta$ et de $\sin(\theta)=\sin(\theta')=-\sin(\theta)$, on déduit que θ vaut 0 ou $-\pi$, 0 étant la seule solution puisque $\theta'=\pi\notin[-\pi,\pi[$. D'où l'unicité. ■

Corollaire 7.2 *Pour tout nombre complexe non nul z, il existe un unique réel $\theta\in[-\pi,\pi[$ tel que $\frac{z}{|z|}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.*

Démonstration. On applique le théorème précédent à $\frac{z}{|z|}$ qui est de module égal à 1. ■

Définition 7.6 *Avec les notations du corollaire qui précède, on dit que le réel $\theta\in[-\pi,\pi[$ est l'argument principal du nombre complexe non nul z.*

Si $\theta\in[-\pi,\pi[$ est l'argument principal d'un nombre complexe $z\in\mathbb{C}^*$, les seuls réels θ' tels que $\frac{z}{|z|}=\cos(\theta')+i\sin(\theta')$ sont les réels $\theta'=\theta+2k\pi$, où k est un entier relatif. En effet ces réels conviennent et les égalités $\cos(\theta)=\cos(\theta')$ et $\sin(\theta)=\sin(\theta')$ sont réalisées si, et seulement si il existe un entier relatif k tel que $\theta'=\theta+2k\pi$ (on peut trouver un entier k tel que $\theta'-2k\pi$ soit dans $[-\pi,\pi[$, c'est-à-dire que k est tel que $-\pi\leq\theta'-2k\pi<\pi$, soit $k\leq\frac{\theta'+\pi}{2\pi}<k+1$, encore équivalent à $k=\left[\frac{\theta'+\pi}{2\pi}\right]$ et $\theta'-2k\pi$ est l'argument principal de z).

Définition 7.7 *On dit qu'un réel θ est un argument du nombre complexe non nul z si $\frac{z}{|z|}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.*

Ce qui précède nous dit qu'un nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments et que deux tels arguments différent d'un multiple entier de 2π, on dit alors qu'ils sont égaux modulo 2π.

On notera $\theta' \equiv \theta \ (2\pi)$ pour signifier que les réels θ' et θ sont égaux modulo 2π.

Si θ est un argument d'un nombre complexe non nul z, on notera $\arg(z) \equiv \theta \ (2\pi)$. La notation $\arg(z)$ signifie qu'on a choisi un argument de z, c'est donc un réel défini modulo 2π.

Par abus de langage, on écrira $\theta = \arg(z)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Avec le théorème qui suit on donne quelques propriétés des arguments d'un nombre complexe.

Théorème 7.14 *En désignant par z et z' des nombres complexes non nuls, λ un réel non nul et n un entier relatif, on a :*

1. $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ (2\pi)$ *;*
2. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ (2\pi)$ *;*
3. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') = \arg\left(z\overline{z'}\right) \ (2\pi)$ *;*
4. $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \ (2\pi)$ *;*
5. *si* $\lambda > 0$, *alors* $\arg(\lambda z) \equiv \arg(z) \ (2\pi)$, *si* $\lambda < 0$, *alors* $\arg(\lambda z) \equiv \arg(z) + \pi \ (2\pi)$ *;*
6. *z est réel si, et seulement si* $\arg(z) \equiv 0 \ (\pi)$ *(c'est-à-dire que les arguments de z sont de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, l'argument principal étant* 0 *ou* $-\pi$*) ;*
7. *z est imaginaire pur si, et seulement si* $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ (\pi)$ *(c'est-à-dire que les arguments de z sont de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, l'argument principal étant $-\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{\pi}{2}$).*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas des nombres complexes de module 1 par définition des arguments.

1. Pour $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, on a :
$$\overline{z} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$
et $-\theta$ est un argument de $\overline{z}$, donc $\arg(\overline{z}) \equiv -\theta \ (2\pi)$.
2. Pour $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et $z' = \cos(\theta') + i\sin(\theta')$, on a :
$$\begin{aligned} zz' &= (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')) \\ &= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') \end{aligned}$$
et donc $\arg(zz') \equiv \theta + \theta' \ (2\pi)$.
3. On a
$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg\left(z\overline{z'}\right) \equiv \arg(z) + \arg\left(\overline{z'}\right) \\ &\equiv \arg(z) - \arg(z') \ (2\pi) \end{aligned}$$
4. Se déduit de ce qui précède.

■

En désignant par ψ l'application qui associe à tout réel θ le nombre complexe $\psi(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ on réalise une application surjective de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble Γ des nombres complexes de module 1. Cette application n'est pas injective puisque l'égalité $\psi(\theta) = \psi(\theta')$ équivaut à $\theta' \equiv \theta \ (2\pi)$. En restriction à $[-\pi, \pi[$ cette application ψ est bijective.

Théorème 7.15 *Avec les notations qui précèdent, on a* $\psi(0) = 1$ *et pour tous réels* θ, θ' *:*

$$\psi(\theta + \theta') = \psi(\theta)\psi(\theta').$$

Démonstration. On a $\psi(0) = \cos(0) + i\sin(0) = 1$ et :

$$\begin{aligned} \psi(\theta + \theta') &= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') \\ &= (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')) \\ &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= \psi(\theta)\psi(\theta') \end{aligned}$$

■

La fonction ψ vérifie donc la même équation fonctionnelle que la fonction exponentielle réelle. Cette remarque justifie la notation $\psi(\theta) = e^{i\theta}$.

Avec $1 = \psi(0) = \psi(\theta - \theta) = \psi(\theta)\psi(-\theta)$, on déduit que $\dfrac{1}{\psi(\theta)} = \psi(-\theta) = \overline{\psi(\theta)}$ (ce que l'on savait déjà : l'inverse d'un nombre complexe de module 1 est égal à son conjugué).

On a donc en résumé la notation :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

ce qui définit une fonction 2π-périodique surjective de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble Γ des nombres complexes de module 1 avec les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{i\cdot 0} = e^0 = 1 \\ \forall(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2,\ e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'} \\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} \\ \forall(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2,\ \left(e^{i\theta} = e^{i\theta'}\right) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta' = \theta + 2k\pi) \\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) = \Re\left(e^{i\theta}\right) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \Im\left(e^{i\theta}\right) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array} \right.$$

Par récurrence sur $n \geq 0$, on déduit facilement que $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$. Puis pour $n < 0$ on a $e^{in\theta} = \dfrac{1}{e^{-in\theta}} = \left(\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)^{-n} = \left(e^{-i\theta}\right)^{-n} = e^{in\theta}$, c'est-à-dire que cette formule est valable pour tous les entiers relatifs. Nous verrons un peu plus loin l'intérêt de cette égalité.

On a en particulier les valeurs suivantes :

$$e^{i\pi} = -1,\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

les égalités $e^{i\theta} = 1$, $e^{i\theta} = -1$ et $e^{i\theta} = i$ étant réalisées respectivement si, et seulement si $\theta = 2k\pi$, $\theta = (2k+1)\pi$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Un nombre complexe non nul peut donc s'écrire sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ où ρ est un réel strictement positif uniquement déterminé, c'est le module de z, et θ est un argument de z. Cette écriture est l'écriture polaire (ou trigonométrique) de z.

Exercice 7.21 *Soient* z, z' *deux nombres complexes non nuls. Montrer que* $|z + z'| = |z| + |z'|$ *si, et seulement si,* $\arg(z) \equiv \arg(z')\ (2\pi)$.

Solution 7.21 *L'égalité* $|z+z'| = |z| + |z'|$ *est équivalente à* $|z+z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$ *avec :*

$$|z+z'|^2 = (z+z')\left(\overline{z} + \overline{z'}\right) = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z'.$$

On a donc $|z+z'| = |z| + |z'|$ *si, et seulement si,* $z\overline{z'} + \overline{z}z' = 2|z||z'|$, *ce qui équivaut encore à* $\Re\left(z\overline{z'}\right) = |z||z'|$. *En utilisant l'écriture polaire,* $z = \rho e^{i\theta}$ *et* $z' = \rho' e^{i\theta'}$ *avec* $\rho > 0$, $\rho' > 0$ *et* θ, θ' *réels, on déduit que* $|z+z'| = |z| + |z'|$ *si, et seulement si,* $\cos(\theta - \theta') = 1$, *ce qui équivaut à* $\theta - \theta' \equiv 0 \ \ (2\pi)$ *et signifie que* $\arg(z) \equiv \arg(z') \ \ (2\pi)$.

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Exercice 7.22 *Démontrer que, pour tout entier naturel* r *non nul et toute famille* $(z_1, \cdots, z_r)$ *de complexes non nuls, l'égalité :*

$$\left|\sum_{k=1}^{r} z_k\right| = \sum_{k=1}^{r} |z_k|$$

est réalisée si, et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ (2 \leq k \leq r) \Rightarrow (\exists \lambda_k \in \left]0, +\infty\right[, \ z_k = \lambda_k z_1)$$

ce qui revient à dire que tous les z_k *ont le même argument modulo* 2π.

Solution 7.22 *Chaque nombre complexe non nul* z_k $(1 \leq k \leq r)$ *peut s'écrire* $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ *avec* $\rho_k = |z_k| > 0$ *et* $\theta_k \in [-\pi, \pi[$. *On a alors :*

$$\begin{cases} \left|\sum\limits_{k=1}^{r} z_k\right|^2 = \sum\limits_{k=1}^{r} |z_k|^2 + 2 \sum\limits_{1 \leq j < k \leq r} \rho_j \rho_k \cos(\theta_j - \theta_k), \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{r} |z_k|\right)^2 = \sum\limits_{k=1}^{r} |z_k|^2 + 2 \sum\limits_{1 \leq j < k \leq n} \rho_j \rho_k \end{cases}$$

et l'égalité $\left|\sum\limits_{k=1}^{r} z_k\right| = \sum\limits_{k=1}^{r} |z_k|$ *est équivalente à :*

$$\sum_{1 \leq j < k \leq r} \rho_j \rho_k (1 - \cos(\theta_j - \theta_k)) = 0.$$

Tous les termes de cette somme étant positifs ou nuls avec $\rho_j \rho_k > 0$, *on en déduit que* $\cos(\theta_j - \theta_k) = 1$ *avec* $\theta_j - \theta_k \in \left]-2\pi, 2\pi\right[$ *pour* $1 \leq j < k \leq r$ *(on a* $-\pi \leq \theta_j < \pi$ *et* $-\pi \leq \theta_k < \pi$ *donc* $-\pi < -\theta_k \leq \pi$ *et* $-2\pi < \theta_j - \theta_k < 2\pi$*), ce qui donne* $\theta_j = \theta_k$ *et en notant* θ *cette valeur commune on a* $z_k = \rho_k e^{i\theta} = |z_k| e^{i\theta}$ *pour tout entier* k *compris entre* 1 *et* r *ou encore :*

$$z_k = \frac{|z_k|}{|z_1|} |z_1| e^{i\theta} = \lambda_k z_1 \ \ (1 \leq k \leq r)$$

où on a posé $\lambda_k = \dfrac{|z_k|}{|z_1|}$ *pour tout* k *compris entre* 1 *et* r.
Réciproquement si $z_k = \lambda_k z_1$ *avec* $\lambda_k > 0$ *pour tout* k *compris entre* 2 *et* r *et* $\lambda_1 = 1$, *on a :*

$$\left|\sum_{k=1}^{r} z_k\right| = |z_1| \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k |z_1| = \sum_{k=1}^{r} |z_k|.$$

On peut aussi démontrer ce résultat par récurrence sur $r \geq 1$, *le cas* $r = 2$ *correspondant au cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire sur* $\mathbb{C}$.

Exercice 7.23 *Déterminer, pour tout couple de réel (θ, θ') tel que $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \neq 0$, le module et un argument de $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.*

Solution 7.23 *On a :*

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

donc $e^{i\theta} + e^{i\theta'} \neq 0$ *si* $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \neq 0$,

$$\left|e^{i\theta} + e^{i\theta'}\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right|$$

et :

$$\arg\left(e^{i\theta} + e^{i\theta'}\right) \equiv \begin{cases} \dfrac{\theta+\theta'}{2} \ (2\pi) \ \text{ si } \cos\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right) > 0 \\ \dfrac{\theta+\theta'}{2} + \pi \ (2\pi) \ \text{ si } \cos\left(\dfrac{\theta-\theta'}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Exercice 7.24 *Pour tout réel θ, on désigne par z_θ le nombre complexe $z_\theta = 1 - e^{i\theta}$.*

1. *Exprimer z_θ en fonction de $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et de $e^{i\frac{\theta}{2}}$.*
2. *Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a :*
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
3. *En déduire des expressions de $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et de $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$ pour tout entier naturel non nul n et tout réel θ.*

Solution 7.24

1. *On a :*
$$z_\theta = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$$
On peut aussi écrire que :
$$\begin{aligned} z_\theta = 1 - \cos(\theta) - i\sin(\theta) &= 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$
2. *Comme $e^{i\theta} \neq 1$ pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a :*
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} &= \frac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

3. *Ce qui donne en identifiant les parties réelles et imaginaires dans l'identité précédente :*
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
et :
$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta) = \sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
pour $n \geq 1$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Pour $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\cos(k\theta) = 1$ et $\sin(k\theta) = 0$ pour tout k, de sorte que $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = n+1$ et $\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta) = 0$.

Exercice 7.25 *Pour tout réel $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$, on désigne par z_θ le nombre complexe $z_\theta = 1 + e^{i\theta}$.*

1. *Exprimer z_θ en fonction de $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et de $e^{i\frac{\theta}{2}}$.*
2. *En calculant, pour n entier naturel non nul, z_θ^n de deux manières différentes, montrer que :*
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)$$
et :
$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin(k\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)$$

Solution 7.25

1. *On a :*
$$z_\theta = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$$
On peut aussi écrire que :
$$\begin{aligned} z_\theta = 1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta) &= 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$
2. *On a d'une part :*
$$z_\theta^n = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{n\theta}{2}}$$
et d'autre part, en utilisant la formule du binôme de Newton :
$$z_\theta^n = \left(1 + e^{i\theta}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ik\theta}$$
ce qui donne en identifiant les parties réelles et imaginaires :
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)$$
et :
$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin(k\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)$$

Exercice 7.26 *Pour tout réel $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$, on désigne par z_θ le nombre complexe $z_\theta = 1 + e^{i\theta}$.*

1. *Déterminer le module et un argument de z_θ.*
2. *Déterminer, pour $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[\setminus \{0\}$, le module et un argument de $u_\theta = \dfrac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$.*
3. *Déterminer, pour tout entier naturel $n \geq 2$, le module et un argument de z_θ^n.*
4. *On prend $\theta = 2\dfrac{\pi}{3}$ et $n = 2006$. Déterminer le module et l'argument de z_θ^n qui est dans $\left]-\pi, \pi\right[$.*
5. *Calculer $e^{i\frac{\pi}{12}}$.*
6. *On prend $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ et $n = 2006$. Déterminer le module et l'argument de z_θ^n qui est dans $\left]-\pi, \pi\right[$.*

Solution 7.26

1. *L'exercice 7.25 nous dit que $z_\theta = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$ et tenant compte de $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$ pour $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$, on déduit que :*

$$|z_\theta| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \arg(z_\theta) \equiv \frac{\theta}{2} \ (2\pi)$$

2. *Pour $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[\setminus \{0\}$, on a $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \neq 0$ et :*

$$u_\theta = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}} = i \operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

(exercice 7.24), ce qui donne :

$$|u_\theta| = \left|\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$$

et :

$$\arg(z_\theta) \equiv \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \ (2\pi) \text{ si } \theta \in \left]0, \pi\right[\\ -\dfrac{\pi}{2} \ (2\pi) \text{ si } \theta \in \left]-\pi, 0\right[\end{cases}$$

3. *On a $z_\theta^n = 2^n \cos^n\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{n\theta}{2}}$ avec $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$ pour $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$, donc :*

$$|z_\theta^n| = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \arg(z_\theta^n) \equiv \frac{n\theta}{2} \ (2\pi)$$

4. *On a :*

$$z_\theta = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$2006 = 6 * 334 + 2$, *de sorte que :*

$$|z_\theta^n| = 1 \text{ et } \arg(z_\theta^n) \equiv \frac{n\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} \ (2\pi)$$

5. *On a :*
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
avec $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, *donc :*
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$
6. *On a*
$$|z_\theta^n| = 2^n \left|\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right|^n = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^n = \left(2+\sqrt{3}\right)^{1003}$$
et $2006 = 24 * 83 + 14$ *de sorte que :*
$$\arg\left(z_\theta^n\right) \equiv n\frac{\pi}{12} \equiv \frac{7\pi}{6} \ (2\pi)$$

Exercice 7.27 *Pour cet exercice, θ est un réel fixé appartenant à $]0,\pi[$.*

1. *Déterminer le module et un argument de $u_\theta = 1 + e^{i\theta}$.*
2. *Déterminer le module et un argument de $v_\theta = 1 - e^{i\theta}$.*
3. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2ze^{i\theta} + 2ie^{i\theta}\sin(\theta) = 0$.*

Solution 7.27

1. *On a :*
$$\begin{aligned} u_\theta = 1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta) &= 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$
avec $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ *pour* $\theta \in \,]0,\pi[$, *donc :*
$$|u_\theta| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \ \text{et} \ \arg(u_\theta) \equiv \frac{\theta}{2} \ (2\pi)$$
2. *On a :*
$$\begin{aligned} v_\theta = 1 + e^{i(\theta+\pi)} &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= -2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+3\frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned}$$
avec $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ *pour* $\theta \in \,]0,\pi[$, *donc :*
$$|v_\theta| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \ \text{et} \ \arg(v_\theta) \equiv \frac{\theta}{2} + 3\frac{\pi}{2} \equiv \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$$

3. On a :

$$\begin{aligned} P(z) = z^2 - 2ze^{i\theta} + 2ie^{i\theta}\sin(\theta) &= \left(z - e^{i\theta}\right)^2 + e^{i\theta}\left(2i\sin(\theta) - e^{i\theta}\right) \\ &= \left(z - e^{i\theta}\right)^2 + e^{i\theta}\left(i\sin(\theta) - \cos(\theta)\right) \\ &= \left(z - e^{i\theta}\right)^2 - e^{i\theta}\left(\cos(\theta) - i\sin(\theta)\right) \\ &= \left(z - e^{i\theta}\right)^2 - e^{i\theta}e^{-i\theta} = \left(z - e^{i\theta}\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

et $P(z) = 0$ équivaut à $z = e^{i\theta} \pm 1$. Les solutions sont donc $u_\theta = 1 + e^{i\theta}$ et $-v_\theta = e^{i\theta} - 1$.

Exercice 7.28 *On désigne par $D(0,1)$ le disque unité fermé du plan complexe, soit :*

$$D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

Montrer que l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus D(0,1) & \to & \mathbb{C} \setminus [-1,1] \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \end{array}$$

est bijective.

Solution 7.28 *Tout $z \in \mathbb{C} \setminus D(0,1)$ s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 1$ et :*

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\theta} + \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos(\theta) + i\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin(\theta)\right) \end{aligned}$$

Si $\varphi(z)$ est réel, nécessairement $\sin(\theta) = 0$, donc $\cos(\theta) = \pm 1$ et :

$$|\varphi(z)| = \frac{\rho^2 + 1}{2\rho} = \frac{(\rho - 1)^2 + 2\rho}{2\rho} > \frac{2\rho}{2\rho} = 1.$$

On a donc bien $\varphi(z) \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus D(0,1)$.
Il s'agit maintenant de montrer que pour tout $Z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ l'équation $\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = Z$ a une unique solution $z \in \mathbb{C} \setminus D(0,1)$. Cette équation est équivalente à l'équation de degré 2 :

$$z^2 - 2Zz + 1 = 0$$

Le discriminant réduit de cette équation est $\delta' = Z^2 - 1 \neq 0$, ce qui donne deux solution distinctes $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ dans $\mathbb{C}$. De $z_1 z_2 = 1$, on déduit que $\rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = 1$, donc que $e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ est réel positif et $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0$ modulo 2π. On a donc $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \dfrac{1}{\rho_1}e^{-i\theta_1}$. Si $\rho_1 = 1$, on a alors :

$$2Z = z_1 + z_2 = e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1} = 2\cos(\theta_1)$$

et $Z = \cos(\theta_1) \in [-1,1]$, ce qui n'est pas. On a donc $\rho_1 \neq 1$, de sorte que $z_1 \in \mathbb{C} \setminus D(0,1)$ et $z_2 \notin \mathbb{C} \setminus D(0,1)$ pour $\rho_1 > 1$, ou $z_2 \in \mathbb{C} \setminus D(0,1)$ et $z_1 \notin \mathbb{C} \setminus D(0,1)$ pour $\rho_1 < 1$. Il y a donc une unique racine dans $\mathbb{C} \setminus D(0,1)$.

L'écriture polaire des nombres complexes non nuls peut aussi être utilisée pour résoudre des équations de la forme $a\cos(x) + b\sin(x) = 0$. Pour ce faire, on utilise le résultat suivant.

Théorème 7.16 *Soient a, b des réels non tous deux nuls (c'est-à-dire que $(a, b) \neq (0, 0)$). Il existe un unique couple (ρ, θ) de réels dans $\mathbb{R}^{+,*} \times [-\pi, \pi[$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\sin(x) = \rho\cos(x - \theta).$$

ρ est le module de $u = a + ib$ et θ son argument principal.

Démonstration. Comme $(a, b) \neq (0, 0)$, on a $u = a + ib \neq 0$ et ce nombre complexe s'écrit de manière unique $u = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |u| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$. Pour tout réel x, on a alors d'un part :

$$\begin{aligned} ue^{-ix} &= (a + ib)(\cos(x) - i\sin(x)) \\ &= a\cos(x) + b\sin(x) + i(b\cos(x) - a\sin(x)) \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$ue^{-ix} = \rho e^{i(\theta - x)} = \rho\cos(\theta - x) + i\rho\sin(\theta - x)$$

ce qui donne :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \rho\cos(\theta - x) = \rho\cos(x - \theta)$$

et aussi :

$$a\sin(x) - b\cos(x) = \rho\sin(x - \theta).$$

Pour ce qui est de l'unicité, supposons que (ρ', θ') soit une autre solution à notre problème. On a alors, pour tout réel x :

$$\rho\cos(x - \theta) = \rho'\cos(x - \theta').$$

Prenant $x = \theta$ [resp. $x = \theta'$], on en déduit que $\rho = \rho'\cos(\theta - \theta') \leq \rho'$ [resp. $\rho' = \rho\cos(\theta' - \theta) \leq \rho$] et $\rho = \rho'$.

Prenant $x = 0$ [resp. $x = \frac{\pi}{2}$], on a $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ [resp. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) = \sin(\theta')$] avec θ, θ' dans $[-\pi, \pi[$, ce qui équivaut à $\theta = \theta'$. ∎

Corollaire 7.3 *Soient a, b des réels non tous deux nuls. Les solutions de l'équation :*

$$a\cos(x) + b\sin(x) = 0 \tag{7.3}$$

sont les réels :

$$x = \theta + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

où $\theta \in [-\pi, \pi[$ est l'argument principal de $a + ib$ et k un entier relatif.

Démonstration. Le théorème précédent nous que l'équation (7.3) est équivalente à $\cos(x - \theta) = 0$, soit à $(x - \theta) \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi)$, encore équivalent à dire que $x = \theta + \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. ∎

Les formules suivantes, valables pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta) = \Re\left(e^{i\theta}\right) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) = \Im\left(e^{i\theta}\right) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{array} \right.$$

(formules d'Euler) et :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

(formule de Moivre) permettent d'obtenir relativement facilement des formules de trigonométrie.

En utilisant la formule du binôme de Newton, la formule de Moivre s'écrit :

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^k(\theta)\sin^{n-k}(\theta)\, i^{n-k}$$

et l'identification des parties réelles et imaginaires nous permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme combinaisons linéaires de puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 7.29 *Exprimer* $\cos(4\theta)$ *et* $\sin(4\theta)$ *comme combinaisons linéaires de puissances de* $\cos(\theta)$ *et* $\sin(\theta)$.

Solution 7.29 *On a :*

$$\begin{aligned}\cos(4\theta) + i\sin(4\theta) &= e^{i4\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^4 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4 \\ &= \cos^4(\theta) + 4\cos^3(\theta)\sin(\theta)\, i - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) \\ &\quad -4\cos(\theta)\sin^3(\theta)\, i + \sin^4(\theta)\end{aligned}$$

et en conséquence :

$$\begin{aligned}\cos(4\theta) &= \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta) \\ &= \left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)^2 - 8\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) \\ &= 1 - 8\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sin(4\theta) &= 4\left(\cos^3(\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin^3(\theta)\right) \\ &= 4\cos(\theta)\sin(\theta)\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)\end{aligned}$$

L'utilisation des formules d'Euler et de la formule du binôme de Newton nous permet d'exprimer des puissances $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ comme combinaisons linéaires de $\cos(p\theta)$ et $\sin(q\theta)$. On dit qu'on linéarise $\cos^n(\theta)$ ou $\sin^m(\theta)$, n et m étant des entiers naturels.

Pour ce faire, on écrit que :

$$\begin{aligned}\cos^n(\theta) &= \frac{1}{2^n}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ik\theta} e^{-i(n-k)\theta} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i(2k-n)\theta} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos((2k-n)\theta) + i\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin((2k-n)\theta)\end{aligned}$$

et nécessairement :

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos((2k-n)\theta). \tag{7.4}$$

On peut remarquer que l'on a aussi :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin((2k-n)\theta) = 0.$$

En réalité cette formule est évidente. Par exemple, pour $n = 2p$, le changement d'indice $k = 2p - j$ nous permet d'écrire la deuxième moitié de cette somme sous la forme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p+1}^{2p} C_{2p}^{k} \sin\left((2k-2p)\,\theta\right) &= \sum_{j=0}^{p-1} C_{2p}^{2p-j} \sin\left((2p-2j)\,\theta\right) \\ &= -\sum_{j=0}^{p} C_{2p}^{j} \sin\left((2j-2p)\,\theta\right) \\ &= -\sum_{k=0}^{p} C_{n}^{k} \sin\left((2k-n)\,\theta\right)\end{aligned}$$

La vérification étant analogue pour n impair.

La parité de $\cos^p(\theta)$ peut aussi justifier l'absence de termes en $\sin(q\theta)$ dans la formule (7.4) .

Exercice 7.30 *Linéariser* $\cos^4(\theta)$ *et* $\sin^4(\theta)$.

Solution 7.30 *On a :*

$$\begin{aligned}\cos^4(\theta) &= \frac{1}{16}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+4e^{3i\theta}e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}e^{-2i\theta}+4e^{i\theta}e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}+4\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6\right) \\ &= \frac{1}{8}\cos(4\theta)+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sin^4(\theta) &= \frac{1}{16}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}-4e^{3i\theta}e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}e^{-2i\theta}-4e^{i\theta}e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}-4\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6\right) \\ &= \frac{1}{8}\cos(4\theta)-\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{3}{8}\end{aligned}$$

On peut aussi exprimer $\tan(n\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$ pour tout entier naturel n.

Exercice 7.31 *Exprimer* $\tan(4\theta)$ *en fonction de* $\tan(\theta)$.

Solution 7.31 *On a :*

$$\tan(4\theta) = \frac{\sin(4\theta)}{\cos(4\theta)} = 4\frac{\cos^3(\theta)\sin(\theta)-\cos(\theta)\sin^3(\theta)}{\cos^4(\theta)-6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)+\sin^4(\theta)}$$

et divisant numérateur et dénominateur par $\cos^4(\theta)$, *on obtient :*

$$\tan(4\theta) = 4\tan(\theta)\,\frac{1-\tan^2(\theta)}{1-6\tan^2(\theta)+\tan^4(\theta)}.$$

7.7 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

La représentation des nombres complexes nous sera très utile pour résoudre des équations de la forme $x^n = \alpha$.

On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, la fonction $f : x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur lui même. L'application réciproque de f est notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ou $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ et on l'appelle fonction racine n-ième. Donc pour tout réel positif a, l'unique solution de l'équation $x^n = a$ est le réel positif $\sqrt[n]{a}$.

On rappelle que si $z = re^{it}$ avec $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, on a pour tout entier relatif n, $z^n = r^n e^{int}$ et pour $z' = r'e^{it'}$ avec $r' > 0$ et $t' \in \mathbb{R}$, l'égalité $z = z'$ est réalisée si, et seulement si $r = r'$ et $t \equiv t'$ modulo 2π.

Dans le cas où $n = 2$ et $\alpha \neq 0$, on écrit $\alpha = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$ et on cherche $z = re^{it}$ avec $r > 0$ et $t \in [-\pi, \pi[$ tel que :

$$z^2 = r^2 e^{2it} = \rho e^{i\theta}$$

ce qui équivaut à $r^2 = \rho$ et $2t = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a donc $r = \sqrt{\rho}$ et $t = \dfrac{\theta}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui donne $z = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{ik\pi}$ et α a deux racines carrées qui sont :

$$z_1 = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ et } z_2 = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\pi} = -z_1.$$

Définition 7.8 *Étant donné un nombre complexe α et un entier naturel non nul n, on appelle racine n-ième de α tout nombre complexe z tel que $z^n = \alpha$.*

Remarque 7.1 *Si $\alpha = 0$, l'équation $z^n = \alpha$ équivaut à $z = 0$, c'est-à-dire que 0 est l'unique racine n-ième de 0.*
Si $\alpha \neq 0$, une racine n-ième de α est nécessairement non nulle.

Remarque 7.2 *Si α est un nombre complexe non nul, il s'écrit $\alpha = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [-\pi, \pi[$ (ou $\theta \in \mathbb{R}$ si on se contente d'un quelconque argument de α) et le nombre complexe $z_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}}$ nous fournit une solution de l'équation $z^n = \alpha$. Pour tout autre solution z de cette équation on aura $z^n = z_0^n$, soit $\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^n = 1$ et la connaissance de toutes les racines n-ièmes de 1 nous fournira toutes les racines n-ièmes de α.*

Définition 7.9 *Étant donné un entier naturel non nul n, on appelle racine n-ième de l'unité toute racine n-ième de 1.*

Théorème 7.17 *Soit n un entier naturel non nul. Il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité qui sont données par :*

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

Démonstration. Si $z^n = 1$, on a alors $|z|^n = |z^n| = 1$, donc $|z| = 1$ (c'est l'unique racine n-ième réelle positive de 1) et $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. L'équation $z^n = 1$ équivaut alors à $e^{in\theta} = 1$, encore équivalent à $n\theta \equiv 0$ modulo 2π. Les racines n-ièmes de l'unité sont donc les nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où k décrit l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. En effectuant la division euclidienne par n, tout entier k s'écrit $k = qn + r$ avec $0 \leq r \leq n-1$ et $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ir\pi}{n}} = \omega_r$. De plus pour j, k entiers compris entre 0 et $n-1$, l'égalité $\omega_j = \omega_k$ est équivalente à $e^{\frac{2i(j-k)\pi}{n}} = 1$, encore équivalent à $\dfrac{2(j-k)\pi}{n} \equiv 0$ modulo 2π, ce qui revient à dire que $j-k$ est divisible par n, soit $j-k = qn$ et avec $|j-k| \leq n-1$ (puisque j et k sont dans l'intervalle $[0, n-1]$), on déduit que $q = 0$ est la seule possibilité, ce qui signifie que $j = k$. On a donc bien le résultat annoncé. ■

Le théorème précédent peut aussi s'énoncer comme suit.

Théorème 7.18 *Pour tout entier naturel non nul n et tout nombre complexe z, on a :*

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega_k)$$

où les $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, pour k compris entre 0 et $n-1$, sont les racines n-ièmes de l'unité.

Démonstration. Le polynôme $P(z) = z^n - 1 - \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega_k)$ est nul ou de degré au plus égal à $n-1$ (le coefficient dominant de $\prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega_k)$ est z^n) et s'annule en n points distincts (les ω_k), c'est donc le polynôme nul. ■

Exemple 7.1 *Les racines cubiques de l'unité sont :*

$$\begin{cases} \omega_0 = 1, \\ \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \omega_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

La racine ω_1 est usuellement notée j et $\omega_2 = \overline{j}$.

Corollaire 7.4 *Soit n un entier naturel non nul. Tout nombre complexe non nul $\alpha = \rho e^{i\theta}$ a exactement n racines n-ièmes données par :*

$$u_k = u_0\omega_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

Exercice 7.32 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = (\overline{z})^2$. Combien l'équation a-t-elle de solutions ?*

Solution 7.32 *On voit que $z = 0$ est solution.*
Si $z^6 = (\overline{z})^2$ avec $z \neq 0$, alors $|z| = 1$, donc $z = e^{i\theta}$ et $e^{i8\theta} = 1$, soit $\theta = \dfrac{2k\pi}{8}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui donne les 8 solutions $e^{i\frac{k\pi}{4}}$ où $k \in \{0, 1, \cdots, 7\}$. Donc 9 solutions au total.

Exercice 7.33 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = (\overline{z})^4$.*

Solution 7.33 *On voit que $z = 0$ est solution.*
Pour $z \neq 0$, on écrit que $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ et de $z^4 = (\overline{z})^4$, on déduit que $e^{i8\theta} = 1$, soit $\theta = \dfrac{2k\pi}{8}$ avec $k \in \{0, 1, \cdots, 7\}$. Les solutions non nulles de cette équation sont donc les nombres complexes de la forme $\rho e^{i\frac{k\pi}{4}}$ où ρ est un réel strictement positif et k est un entier compris entre 0 et 7. L'ensemble S des solutions est donc infini, c'est la réunion des quatre droites D_k d'équation polaire $\theta = k\dfrac{\pi}{4}$ où k est entier compris entre 0 et 3. D_0 est l'axe des x, D_1 la diagonale d'équation $y = x$, D_2 l'axe des y et D_3 la diagonale d'équation $y = -x$.

Exercice 7.34 *Déterminer, pour n entier naturel non nul, toutes les racines n-ièmes de -1.*

Solution 7.34 *Il s'agit de résoudre l'équation $z^n = -1 = e^{i\pi}$. Les solutions de cette équation sont les :*

$$u_k = e^{(2k+1)\frac{i\pi}{n}} \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

Exercice 7.35 *En notant, pour n entier naturel non nul, $(\omega_k)_{0\leq k\leq n-1}$ la suite de toutes les racines n-ièmes de l'unité, montrer que pour $n \geq 2$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$ et $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k = (-1)^{n-1}$.*

Solution 7.35 *On a :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k = \frac{1-\omega_1^n}{1-\omega_1} = 0$$

(pour $n \geq 2$, on a bien $\omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$) et :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = \prod_{k=0}^{n-1} \omega_1^k = \omega_1^{\sum\limits_{k=0}^{n-1} k} = \omega_1^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = e^{\frac{n(n-1)}{2}\frac{2i\pi}{n}} = e^{i(n-1)\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

($m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ étant entier, on a bien $\left(e^{i\theta}\right)^m = e^{im\theta}$). De la première identité, on déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

Remarque 7.3 *La parenthèse ($m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ étant entier ...) est due à la remarque du pointilleux lecteur qui voudrait montrer que $-1 = 1$ comme suit :*

$$\left(1 = e^{2i\pi}\right) \Rightarrow \left(1 = 1^{\frac{1}{2}} = \left(e^{2i\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}2i\pi} = e^{i\pi} = -1\right)$$

Exercice 7.36 *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble des racines $2n$-ièmes de l'unité est aussi donnée par :*

$$\Gamma_{2n} = \{-1, 1\} \cup \left\{e^{\frac{ik\pi}{n}} \mid 1 \leq k \leq n-1\right\} \cup \left\{e^{\frac{-ik\pi}{n}} \mid 1 \leq k \leq n-1\right\}$$

En déduire que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^{2n} - 1 = \left(z^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) z + 1\right).$$

Solution 7.36 *Ces racines $2n$-ièmes sont les :*

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}} \quad (0 \leq k \leq 2n-1).$$

Pour $k = 0$, on a $\omega_0 = 1$, pour $k = n$, on a $\omega_n = e^{i\pi} = -1$ et pour $k = 2n - j$ compris entre $n + 1$ et $2n - 1$, on a :

$$\omega_k = e^{\frac{i\{2n-j\}\pi}{n}} = e^{\frac{-ij\pi}{n}}$$

ce qui donne le résultat attendu.
On a donc, pour tout nombre complexe z :

$$\begin{aligned} z^{2n}-1 &= (z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\left(z-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right) \\ &= \left(z^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2-\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)z+1\right) \\ &= \left(z^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)z+1\right) \end{aligned}$$

Exercice 7.37 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8+z^4+1=0$.*

Solution 7.37 *Si z est solution de cette équation, alors $t=z^4$ est solution de $t^2+t+1=0$, ce qui donne $t\neq 1$ et $\dfrac{t^3-1}{t-1}=0$, donc $t=j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ou $t=\overline{j}=j^2$.*
Il s'agit alors de calculer les racines quatrièmes de j et de $\overline{j}$, ces racines sont les :

$$z_k=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right)} \text{ et } \overline{z_k}=e^{-i\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right)} \ (0\leq k\leq 3)$$

soit :

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},\ z_1=e^{2i\frac{\pi}{3}}=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_2=e^{7i\frac{\pi}{6}}=-z_1,\ z_3=e^{5i\frac{\pi}{3}}=-z_1$$

et leurs conjugués.
On peut aussi procéder comme suit. Si z est solution de cette équation, il est alors non nul et $z^4+1+\dfrac{1}{z^4}=0$, soit $\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)^2=1$, donc $z^2+\dfrac{1}{z^2}=\pm 1$, soit $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2-2=\pm 1$, c'est-à-dire $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=1$ ou $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=3$.
Si $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=1$, on a alors $z+\dfrac{1}{z}=\pm 1$, soit $z^2\pm z+1=0$ avec $z\neq\pm 1$ ou encore $\dfrac{z^3\pm 1}{z\pm 1}=0$, ce qui donne les 4 solutions, $j,\overline{j},-j,-\overline{j}$.
Si $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=3$, on a alors $z+\dfrac{1}{z}=\pm\sqrt{3}$, soit $z^2\pm\sqrt{3}z+1=0$ ou encore $\left(z\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\dfrac{1}{4}$, ce qui donne les 4 autres solutions, $z_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2},\overline{z_0},-z_0,-\overline{z_0}$.