L3 A, intégration : M363

– I – Exercices préliminaires

Exercice 1 *Soient A, B deux parties de X. Exprimer $\mathbf{1}_{X\setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\cap B}$, $\mathbf{1}_{AUB}$, $\mathbf{1}_{B\setminus A}$, $\mathbf{1}_{A\Delta B}$, en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.*
Plus généralement, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ de parties de X, exprimer $\mathbf{1}_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k}$ et $\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_k}$.

Exercice 2 *Montrer que l'application qui associe à une partie A de X sa fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ réalise une bijection de $\mathcal{P}(X)$ sur $\{0,1\}^X$ (ensemble des applications de X dans $\{0,1\}$). Préciser son inverse.*

Exercice 3 *Montrer qu'il n'existe pas de bijection de X sur $\mathcal{P}(X)$ (théorème de Cantor). On en déduit en particulier que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.*

Exercice 4 *Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $\sum u_n$ une série réelle absolument convergente. Montrer que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ (cela justifie l'écriture $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ dans le cas d'une série absolument convergente, ce qui est le cas pour une série à termes positifs convergente, ce qui est utilisé implicitement dans la définition d'une mesure).*

Exercice 5 *La longueur d'un intervalle réel I est définie par :*

$$\ell(I) = \sup(I) - \inf(I) \in [0,+\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

1. *Soient $I = [a,b]$ un intervalle fermé, borné et $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille finie d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

   Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

2. *Soient $I = [a,b]$ un intervalle fermé, borné et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

   Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

3. *Soient I un intervalle et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles telle que :*

$$I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

   Montrer que :

$$\ell(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

4. *Soit* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'intervalles deux à deux disjoints inclus dans un intervalle* I. *Montrer que :*
$$\ell(I) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n)$$

Exercice 6 *Pour tous réels* $a < b$, *on désigne par* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

1. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *qui converge simplement vers une fonction* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
   Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,b]$ *(théorème de Dini). On donnera deux démonstrations de ce résultat, l'une utilisant la caractérisation des compacts de Bolzano-Weierstrass et l'autre utilisant celle de Borel-Lebesgue.*
2. *Le résultat précédent est-il encore vrai dans* $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ *si on ne suppose plus l'intervalle* I *compact ?*
3. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ *telle que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement vers une fonction* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
   Montrer que :
$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$
4. *On désigne par* $\mathcal{A}$ *la famille des parties de* $\mathbb{R}^2$ *de la forme :*
$$A(f,g) = \{(x,y) \in [a,b]\times\mathbb{R} \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$$
   où f,g *sont dans* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *telles que* $f \leq g$ *et on note :*
$$\mu(A(f,g)) = \int_a^b (g(t) - f(t))\,dt$$
   Montrer que cette application μ *est* σ*-additive sur* $\mathcal{A}$.

– II – Les mesures

Exercice 7 *Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Montrer que :*

1. $X \in \mathcal{A}$ *;*
2. *si A, B sont dans $\mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $A \triangle B$ sont dans $\mathcal{A}$;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable).*

Exercice 8 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) < +\infty$. Montrer que :*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \mu_{k,n}$$

où on a noté pour $1 \leq k \leq n$:

$$\mu_{k,n} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \mu\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\cdots,n\} \\ \mathrm{card}(I)=k}} \mu\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

(formule de Poincaré).

Exercice 9

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, l'application :*

$$\begin{array}{rccl} \delta_x : & \mathcal{P}(X) & \to & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \mathbf{1}_A(x) \end{array}$$

   est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$ (mesure de Dirac en x).

2. *Soit $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels positifs ou nuls indexée par (n, m) dans $\mathbb{N}^2$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} u_{n,m}$ est convergente de somme S_n et que la série $\sum S_n$ est convergente de somme S.*
   Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_{n,m}$ est convergente de somme T_m et que la série $\sum T_m$ est convergente, soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

   (en fait cette égalité valable dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ pour toute suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs).

3. *On suppose que $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable. Montrer que pour toute suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls tels que la série $\sum p_n$ soit convergente, l'application :*

$$\begin{array}{rccl} \mu : & \mathcal{P}(X) & \to & \mathbb{R}^+ \\ & A & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}(A) \end{array} \tag{1}$$

   est une mesure finie sur $\mathcal{P}(X)$.

4. *Montrer que toute mesure finie μ sur $\mathcal{P}(X)$ peut s'exprimer sous la forme* (1) *(pour X dénombrable, toute mesure finie est une série pondérée de masses de Dirac).*

Exercice 10 *Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ telle que :*
- $\emptyset \in \mathcal{A}$ *;*
- $\forall A \in \mathcal{A},\ X \setminus A \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire) ;*
- $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2,\ A \cap B \in \mathcal{A}$ *($\mathcal{A}$ est stable par intersection finie) ;*

($\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole) et $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ une application telle que :
- $\mu(\emptyset) = 0$ *;*
- *μ est σ-additive (i. e. $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$).*

1. *Montrer que, pour toute suite finie $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ et $A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathcal{A}$ (dans le cas où $n \geq 2$).*
2. *Montrer que μ est croissante.*
3. *Soient $A \in \mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que :*

$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Exercice 11 *Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur X supposée dénombrable (i. e. en bijection avec une partie, finie ou infinie, de $\mathbb{N}$). Pour tout $x \in X$, on note :*

$$A(x) = \bigcap_{\substack{A\in\mathcal{A} \\ x\in A}} A$$

(atome de x).

1. *Montrer que, pour tout $x \in X$, $A(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ qui contient x.*
2. *Soient x, y dans X. Montrer que si $y \in A(x)$, on a alors $A(x) = A(y)$.*
3. *Montrer que, pour tous x, y dans X, on a $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ ou $A(x) = A(y)$.*
4. *En désignant par $(x_i)_{i\in I}$ la famille des éléments de X telle que les $A(x_i)$ soient deux à deux disjoints, montrer que cette famille est dénombrable et que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a une partition $A = \bigcup_{j\in J} A(x_j)$, où J est une partie de I.*
5. *En déduire que $\mathcal{A}$ est finie, son cardinal étant une puissance de 2.*

Exercice 12 *Soit X un ensemble dénombrable. Quelle est la σ-algèbre engendrée par les singletons de X ?*

Exercice 13 *Soit X un ensemble non dénombrable.*

1. *Quelle est la σ-algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par les singletons de X ?*

2. *Montrer que l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathcal{A} & \rightarrow & \{0,1\} \\ & A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \textit{ si } A \textit{ est dénombrable} \\ 1 \textit{ si } X \setminus A \textit{ est dénombrable} \end{array} \right. \end{array}$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Exercice 14 *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré.*

1. *Montrer que si* A, B *sont des éléments de* $\mathcal{A}$ *tels que* $A \subset B$ *et* $\mu(B) < +\infty$, *on a alors :*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

2. *Soient* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite croissante d'éléments de* $\mathcal{A}$ *et* $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. *Montrer que la suite* $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge en croissant vers* $\mu(A)$.

3. *Soient* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite décroissante d'éléments de* $\mathcal{A}$ *et* $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. *En supposant qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, *montrer que la suite* $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge en décroissant vers* $\mu(A)$.

Exercice 15 *Soient* μ *une mesure finie sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* F *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mu([x, +\infty[)$$

1. *Montrer que* F *est décroissante avec, pour tout réel* x *:*

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} F(t) = F(x),\ \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} F(t) = F(x) - \mu(\{x\})$$

et :

$$\lim_{t \to -\infty} F(t) = \mu(\mathbb{R}),\ \lim_{t \to +\infty} F(t) = 0$$

2. *Montrer que l'ensemble :*

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x\}) > 0\}$$

est dénombrable.

– III – Fonctions mesurables

Exercice 16 *La mesure ℓ des intervalles réels se prolonge de manière unique en une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens, cette mesure étant invariante par translation. C'est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*
Nous allons vérifier que cette mesure ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
On désigne par $\mathcal{C}$ le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

1. *Vérifier que, pour toute classe d'équivalence $c \in \mathcal{C}$, on peut trouver un représentant x dans $[0, 1[$.*
   Pour tout $c \in \mathcal{C}$, on se fixe un représentant x_c de c dans $[0, 1[$ (axiome du choix) et on désigne par A l'ensemble de tous ces réels x_c.
2. *Montrer que les translatés $r + A$, où r décrit $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, sont deux à deux disjoints et que :*
$$[0,1] \subset \bigcup_{r \in [-1,1]\cap\mathbb{Q}} (r + A) \subset [-1, 2]$$
3. *En déduire que A n'est pas borélien et que ℓ ne peut pas se prolonger en une mesure invariante par translation sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*
4. *Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non mesurable ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu de Borel) telle que $|f|$ soit mesurable.*

Exercice 17 *$\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable si, et seulement si, la restriction de f à tout segment $[a, b]$ est mesurable.

Exercice 18 *Soient E un espace vectoriel normé complet et $a < b$ deux réels.*
Une fonction $f : [a, b] \to E$ est dite réglée si elle admet une limite à droite en tout point de $[a, b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a, b]$.
On notera $f(x^-)$ [resp. $f(x^+)$] la limite à gauche [resp. à droite] en $x \in]a, b]$ [resp. en $x \in [a, b[$].

1. *Montrer qu'une fonction réglée est bornée.*
2. *Montrer qu'une limite uniforme de fonctions réglées de $[a, b]$ dans E est réglée.*
3. *Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction réglée et $\varepsilon > 0$. On note :*
$$E_\varepsilon = \left\{ x \in]a, b] \mid \textit{il existe } \varphi \textit{ en escaliers sur } [a, x] \textit{ telle que } \sup_{t \in [a,x]} \|f(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon \right\}$$
   Montrer que $E_x \neq \emptyset$, puis que $b = \max(E_\varepsilon)$.
4. *Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to E$ est réglée si, et seulement si, elle est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escaliers.*
5. *Montrer qu'une fonction réglée $f : [a, b] \to E$ est borélienne et qu'elle est continue sur $[a, b]$ privé d'un ensemble D dénombrable (éventuellement vide).*
6. *La fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est-elle réglée ?*
7. *En désignant par $E(t)$ la partie entière d'un réel t, montrer que la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :*
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(nx)}{2^n}$$
   est réglée, puis calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ (il s'agit d'une intégrale de Riemann).

Exercice 19 *$[a,b]$ est un intervalle fermé borné fixé avec $a < b$ réels.*

1. *Montrer que les fonctions en escaliers positives sur $[a,b]$ sont exactement les fonctions du type :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{I_k}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, les a_k sont des réels positifs ou nuls et les I_k sont des intervalles contenus dans $[a,b]$.

2. *Montrer que si $(\varphi_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite finie de fonctions en escaliers sur $[a,b]$, alors la fonction $\varphi = \max\limits_{1\leq k\leq n} \varphi_k$ est aussi en escaliers.*

3. *Soit f une fonction réglée définie sur $[a,b]$ et à valeurs positives.*

   (a) *Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ et telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ \varphi_n(x) \leq f(x)$$

   (b) *On désigne par $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[a,b]$ par $\psi_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:*

$$\psi_n = \max(0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

   Monter que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

   (c) *Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers à valeurs positives telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

4. *Montrer que les fonctions réglées à valeurs positives sur $[a,b]$ sont exactement les fonctions de la forme :*

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathbf{1}_{I_n}$$

où les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs ou nuls, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'intervalles contenus dans $[a,b]$ et la série considérée converge uniformément sur $[a,b]$.

Exercice 20 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que sa dérivée f' est borélienne.*

Exercice 21

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente est-il ouvert ? fermé ?*

2. *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ étant muni de la tribu borélienne).*
   Montrer que l'ensemble des éléments x de X tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente est mesurable.

– IV – Intégration

Exercice 22 *On se place sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu(A) = \text{card}(A) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} x d\mu$ *pour toute suite réelle positive* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs complexes soit sommable.*

Exercice 23 *On se place sur* $(X, \mathcal{P}(X))$ *muni d'une mesure de Dirac* $\mu = \delta_x$, *où* $x \in X$ *est fixé.*
Calculer $\displaystyle\int_X f d\mu$ *pour toute fonction* $f : X \to \mathbb{R}^+$.

Exercice 24 *Soient* X, Y *deux espaces métriques munis de leur tribu borélienne respective. Montrer qu'une fonction* $f : X \to Y$ *qui est continue sur* X *privé d'un ensemble* D *dénombrable est borélienne.*

Exercice 25 *On se place sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, *où* λ *est la mesure de Lebesgue.*

1. *Montrer que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver un ouvert* $\mathcal{O}$ *dense dans* $\mathbb{R}$ *tel que* $\lambda(\mathcal{O}) < \varepsilon$.
2. *Montrer qu'une partie mesurable bornée de* $\mathbb{R}$ *est de mesure finie. La réciproque est-elle vraie ?*
3. *Montrer qu'une partie mesurable de* $\mathbb{R}$ *d'intérieur non vide est de mesure non nulle. La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Montrer qu'une partie mesurable* A *de* $[0, 1]$ *de mesure égale à* 1 *est dense dans* $[0, 1]$. *Réciproquement un ouvert dense de* $[0, 1]$ *est-il de mesure égale à 1 ?*

Exercice 26 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré avec* $\mu \neq 0$, $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel et les fonctions considérées sont à valeurs réelles.*

1. *Montrer que si* f, g *sont deux fonctions mesurables de* X *dans* $\mathbb{R}$, *les fonctions* $f + g$ *et* fg *sont mesurables.*
2. *Montrer que la somme de deux fonctions intégrables est intégrable.*
3. *Le produit de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
4. *La composée de deux fonctions intégrables est-il intégrable ?*
5. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable positive. Montrer que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe un réel* $\eta > 0$ *tel que :*
$$(A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < \eta) \Rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon$$
6. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Montrer que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe une partie mesurable* A *de* X *telle que* $\mu(A) > 0$ *et* $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ *pour tous* x, y *dans* A.
7. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable positive. Montrer que pour tout réel* $\alpha > 0$, *on a :*
$$\mu\left(f^{-1}([\alpha, +\infty[)\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_X f d\mu$$
8. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable positive. Montrer que* $\displaystyle\int_X f d\mu = 0$ *si, et seulement si,* f *est nulle presque partout.*
9. *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable positive. Montrer que si* $\displaystyle\int_X f d\mu < +\infty$, *on a alors* $f(x) < +\infty$ *presque partout.*

10. *Soient f, g deux fonctions mesurables positives sur X. Montrer que si $f = g$ presque partout, alors $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$.*
11. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) > 0$ et f est bornée sur A.*
12. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $f \neq 0$ presque partout. Montrer qu'il existe une partie mesurable A de X telle que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ est minorée sur A par une constante strictement positive.*
13. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que si $\int_A f d\mu = 0$ pour toute partie A mesurable dans X, alors la fonction f est nulle presque partout.*

Exercice 27 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, la mesure μ étant finie, et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel). On définit les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de X par :*

$$A_n = f^{-1}([n, +\infty[),\ B_n = f^{-1}([n, n+1[)$$

et g est la fonction définie sur X par :

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbf{1}_{B_n}$$

1. *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mu(B_k)$$

2. *Montrer que $g \leq f < g + 1$.*
3. *Montrer que f est intégrable si, et seulement si, la série $\sum n\mu(B_n)$ est convergente.*
4. *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} k\mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - n\mu(A_{n+1})$$

5. *Montrer que la suite $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.*
6. *Montrer que f est intégrable si, et seulement si, la série $\sum \mu(A_n)$ est convergente.*
7. *Le résultat précédent est-il valable dan le cas où $\mu(X) = +\infty$?*

Exercice 28 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.*

1. *Montrer que s'il existe une fonction intégrable $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ telle $|f| \leq \varphi$ presque partout, la fonction f est alors intégrable.*
2. *Montrer que si f est bornée presque partout et $\mu(X)$ est fini, la fonction f est alors intégrable. En particulier, une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est mesurable et bornée presque partout est intégrable.*

Exercice 29

1. *Soient I un intervalle réel non réduit à un point et $a \in I$.*
   Pour tout $x \in I$, on désigne par $I_{a,x}$ l'intervalle fermé d'extrémités a et x.

On se donne une fonction mesurable bornée, $f : I \to \mathbb{R}$ et on désigne par F la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_{I_{a,x}} f(t)\,dt$$

soit :

$$F(x) = \begin{cases} \int_a^x f(t)\,dt \text{ si } a \leq x \\ \int_x^a f(t)\,dt \text{ si } x \leq a \end{cases}$$

Montrer que F est lipschitzienne (donc uniformément continue) sur I et qu'elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$ où la fonction f est continue avec $F'(x_0) = f(x_0)$.

2. *Montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable de dérivée bornée, alors f' est intégrable sur $[a, b]$ et :*

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

3. *En considérant la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par $f(0) = 0$ et :*

$$f(x) = \frac{x}{\ln(|x|)} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

pour $x \neq 0$, vérifier que le résultat précédent n'est plus valable pour f dérivable de dérivée non bornée.

– V – Convergence monotone, dominée

Exercice 30 *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$ qui converge vers une fonction f. Montrer que s'il existe une constante $M > 0$ telle que $\int_X f_n d\mu \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\int_X f d\mu \leq M$.*
2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+$ qui converge presque partout vers une fonction f.*
Montrer que si f_0 est intégrable, il en est alors de même de toutes les fonctions f_n ainsi que de f et qu'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Le résultat subsiste-t-il si $\int_X f_0 d\mu = +\infty$?

3. *Soient $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction intégrable et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de parties mesurables de X définie par :*

$$A_n = |f|^{-1}([n, +\infty[)$$

   (a) *Montrer que f est finie presque partout et que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} |f|\,d\mu = 0$$

   (b) *Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :*

$$(A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < \eta) \Rightarrow \int_A |f|\,d\mu < \varepsilon$$

(c) *En prenant* $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *où* λ *est la mesure de Lebesgue, montrer que la fonction* F *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ($\int_0^x f(t)\, dt$ *désigne l'intégrale de* f *sur l'intervalle d'extrémités* 0 *et* x*).*

Exercice 31 *On se place sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu(A) = \operatorname{card}(A) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on désigne par* δ_n *la mesure de Dirac en* n.

1. *Montrer que :*
$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$$
2. *Montrer que pour toute suite réelle positive* $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *on a :*
$$\int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$$
3. *Calculer :*
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{k} \sin\left(\frac{1}{kn}\right)$$

Exercice 32 *Calculer*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 n^2 x (1-x)^n\, dx$$

et conclure.

Exercice 33 *Pour tout réel* $\alpha > 0$, *on désigne par* $(I_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$ *la suite réelle définie par :*

$$I_n(\alpha) = \int_0^{n^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{x^\alpha}{n}\right)^n dx$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Exercice 34 *Pour tout réel* $\alpha > 0$, *on désigne par* $(I_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}^*}$ *la suite réelle définie par :*

$$I_n(\alpha) = \int_1^{+\infty} n^\alpha \sin\left(\frac{x}{n}\right) e^{-n^2 x^2} dx$$

Montrer que cette suite est convergente et calculer sa limite.

Exercice 35

1. *Montrer que :*
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt$$

2. *Montrer que :*

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt$.

Exercice 36

1. *Montrer que, tout réel* x *et tout réel* $t \in \left]-1,1\right[$ *la série* $\sum t^{n-1}\sin(nx)$ *est convergente et calculer sa somme. On notera* $f(x,t)$ *cette somme.*
2. *Montrer que, pour tout réel* $x \in \left]0,\pi\right[$*, on a :*

$$\int_0^1 f(x,t)\,dt = \frac{\pi - x}{2}$$

3. *Monter que, pour tout réel* $x \in \left]0,\pi\right[$*, on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$

Exercice 37 *Soient* $a < b$ *deux réels et* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *deux suites réelles telles que :*

$$\forall x \in \left]a,b\right[,\ \lim_{n\to+\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right) = 0$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ *(lemme de Cantor).*
On peut raisonner par l'absurde en utilisant une suite de fonctions définie par :

$$f_k(x) = \frac{\left(a_{n_k}\cos(n_k x) + b_{n_k}\sin(n_k x)\right)^2}{a_{n_k}^2 + b_{n_k}^2}$$

où la suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ *est judicieusement choisie.*

Exercice 38 *On désigne par* $\mathcal{H}$ *le demi plan complexe défini par :*

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

1. *Montrer que, pour tout nombre complexe* z*, la fonction* $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ *est intégrable sur* $\left]1,+\infty\right[$.
2. *Soit* z *un nombre complexe. Montrer que la fonction* $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ *est intégrable sur* $\left]0,1\right[$ *si, et seulement si,* $z \in \mathcal{H}$.
   La fonction gamma d'Euler est la fonction définie sur $\mathcal{H}$ *par :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

3. *Montrer que :*

$$\Gamma(1) = 1 \text{ et } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

4. *Montrer que la fonction gamma vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2}$$

5. *Montrer que pour tout entier naturel n, on a :*

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ et } \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

6.

   (a) *Soient z et α deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $(z,\alpha) \in \mathcal{H}^2$.*

   (b) *Montrer que :*

$$\forall (z,\alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z e^{-\alpha t}}{1-e^{-t}} dt = \Gamma(z+1)\,\zeta(z+1,\alpha)$$

   où ζ est la fonction dzéta de Hurwitz définie par :

$$\forall (z,\alpha) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{+,*},\ \zeta(z+1,\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{z+1}}$$

   En particulier, pour $\alpha = 1$, on a :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{e^t - 1} dt = \Gamma(z+1)\,\zeta(z+1)$$

   où ζ est la fonction dzéta de Riemann.

7. *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on note :*

$$I_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

   (a) *Montrer que :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = I_n(z)$$

   (b) *En déduire que :*

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

   (formule d'Euler).

8. *Montrer que :*

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}$$

   soit :

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

   (formule de Wallis).

9.

   (a) *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$I_{2n}(z) = 2^{z-1}\left(1+\frac{z}{2n+1}\right) \frac{I_n\left(\frac{z}{2}\right) I_n\left(\frac{z+1}{2}\right)}{I_n\left(\frac{1}{2}\right)}$$

(b) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

(formule de Legendre).

10. *On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}$ par :*

$$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^{+,*} \times \mathbb{R}, \ f(x,u) = \begin{cases} 0 \ si \ u \leq -\sqrt{x} \\ \left(1 + \dfrac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} \ si \ u > -\sqrt{x} \end{cases}$$

(a) *Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :*

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u) \, du$$

(b) *Montrer que, pour tout réel u, on a :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(c) *Montrer que pour tout $(x,u) \in [1, +\infty[\times \mathbb{R}$, on a :*

$$0 \leq f(x,u) \leq \varphi(u) = \begin{cases} e^{-\frac{u^2}{2}} \ si \ u \leq 0 \\ (1+u) e^{-u} \ si \ u > 0 \end{cases}$$

(d) *En déduire la formule de Stirling :*

$$\Gamma(x+1) \underset{x \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Pour $x = n$ entier naturel non nul, on retrouve la formule usuelle :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\backsim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

11. *Montrer que la fonction gamma est continue sur $\mathcal{H}$ et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec pour tout entier naturel non nul n et tout réel strictement positif x :*

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t} dt$$

12. *En utilisant l'équation fonctionnelle (2), montrer que la fonction Γ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et que ce prolongement vérifie la même équation fonctionnelle. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, on notera encore $\Gamma(z)$ ce prolongement.*

13. *Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :*

$$\Gamma(z) \underset{z \to -n}{\backsim} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

14. ***La formule des compléments.***
On désigne par φ la fonction définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall z \in \mathcal{H}, \ \varphi(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1+t} dt$$

et par $\mathcal{D}$ la bande ouverte du plan complexe définie par :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(z) < 1\}$$

(a) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

(b) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \varphi(z) + \varphi(1-z)$$

(c) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, on a :*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$$

(d) *Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2}$$

(e) *Montrer que, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et tout réel $t \in [0, \pi]$, on a :*

$$\cos(zt) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \left(\frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - z^2} \cos(nt) \right)$$

(f) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

(g) *Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)}$$

(h) *En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Exercice 39 ***Utilisation d'une intégrale double pour calculer*** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

1. *Montrer que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y} dy$$

2. *En déduire que :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \int\int_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{1-xy}$$

3. *Montrer que l'application $\varphi : (u,v) \mapsto (u-v, u+v)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même et préciser son inverse.*
4. *Déterminer l'image par φ^{-1} du carré $[0,1]^2$.*

5. *Montrer que pour tout* $u \in]0,1[$, *on a :*

$$\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \arcsin(u)$$

et :

$$\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin(u)}{2}$$

6. *En utilisant le changement de variable* $(x,y) = \varphi(u,v)$, *montrer que* $\displaystyle\iint \frac{dxdy}{1-xy} = \frac{\pi^2}{6}$ *et en conséquence* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

– VI – Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne la tribu de toutes les parties de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ (i. e. la tribu engendrée par les intervalles ouverts).

Pour tout partie A de $\mathbb{R}$, on note :

$$\ell^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n} \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) \in \overline{\mathbb{R}^+}$$

la borne inférieure étant prise sur toutes les suites d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est négligeable si $\ell^*(A) = 0$, ce qui revient à dire que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles telle que :

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) < \varepsilon$$

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable (on dira simplement mesurable) si pour toute partie E de $\mathbb{R}$, on a :

$$\ell^*(E) = \ell^*(E \cap A) + \ell^*(E \setminus A)$$

où $E \setminus A = E \cap (\mathbb{R} \setminus A)$ (condition de Carathéodory).

La famille de toutes les parties de $\mathbb{R}$ qui sont Lebesgue-mesurable est une tribu qui contient la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On la note $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, on note $\lambda(A) = \ell^*(A)$ et λ est une mesure sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ (mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$).

Exercice 40 *Montrer que* $\ell^*(I) = \ell(I)$ *pour tout intervalle réel* I *et que* ℓ^* *est une mesure extérieure sur* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, *c'est-à-dire que :*

$$\ell^*(\emptyset) = 0$$

$$A \subset B \Rightarrow \ell^*(A) \leq \ell^*(B)$$

et pour toute partie A *de* $\mathbb{R}$, *toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de parties de* $\mathbb{R}$, *telles que* $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, *on a :*

$$\ell^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell^*(A_n)$$

Exercice 41

1. *Montrer qu'une partie négligeable de $\mathbb{R}$ est mesurable de mesure nulle.*
2. *Montrer que toute partie d'un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}$ est négligeable et qu'une réunion dénombrable de parties négligeables est négligeable.*
3. *Montrer qu'une partie négligeable de $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide. La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est négligeable si, et seulement si, elle est contenue dans un borélien de mesure nulle.*

Exercice 42 *Montrer que, pour toutes parties A, B de $\mathbb{R}$, on a :*

$$\ell^*(A \cup B) + \ell^*(A \cap B) \leq \ell^*(A) + \ell^*(B)$$

Exercice 43 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ contenu dans un mesurable B. Montrer que pour toute partie C de $\mathbb{R}$ telle que $B \cap C = \emptyset$, on a :*

$$\ell^*(A \cup C) = \ell^*(A) + \ell^*(C)$$

Exercice 44 *Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $d(A, B) > 0$. Montrer que :*

$$\ell^*(A \cup B) = \ell^*(A) + \ell^*(B)$$

Exercice 45 *Soit B une partie négligeable de $\mathbb{R}$. Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{R}$ on a :*

$$\ell^*(A \cup B) = \ell^*(A) = \ell^*(A \setminus B)$$

Exercice 46 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est mesurable ;*
2. *pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tel que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus A) < \varepsilon$;*
3. *pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ contenu dans A tel que $\ell^*(A \setminus \mathcal{F}) < \varepsilon$.*

Exercice 47 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A est mesurable de mesure finie si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $\mathbb{R}$ contenu dans A et un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ qui contient A tels que $\ell^*(\mathcal{O} \setminus K) < \varepsilon$.*

Exercice 48 ***Fonctions Riemann-intégrables.***
On se donne deux réels $a < b$ et une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in [a, b]$, l'oscillation de f en x est le réel :

$$\omega(x) = \inf_{\eta > 0} \sup_{]x-\eta, x+\eta[\cap [a,b]} |f(y) - f(z)|$$

1. *Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est :*

$$C = \{x \in [a, b] \mid \omega(x) = 0\}$$

2. *Montrer que la fonction ω est semi-continue supérieurement.*
3. *Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble :*

$$D_n = \left\{ x \in [a, b] \mid \omega(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

est un fermé et en déduire que l'ensemble D des points de discontinuité de f est mesurable.

4. *On se propose de montrer dans cette question, qu'une fonction Riemann-intégrable est continue presque partout.*
On suppose que la fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.
On se donne un réel $\varepsilon > 0$ et un entier $n \geq 1$.

   (a) *Justifier l'existence de deux fonctions en escaliers φ et ψ telles que $|f - \varphi| \leq \psi$ et $\displaystyle\int_a^b \psi(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2n}$.*
   On se donne une subdivision $a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ de $[a,b]$ telle que $\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \varphi_k \mathbf{1}_{[a_k,a_{k+1}[}$ et $\psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \psi_k \mathbf{1}_{[a_k,a_{k+1}[}$ (la valeur de ces fonctions en b est sans importance).

   (b) *Montrer que :*
$$\forall x \in [a,b] \setminus \{a_0, a_1, \cdots, a_p\},\ \omega(x) < 2\psi(x)$$

   (c) *En déduire que $0 \leq \lambda(D_n) < \varepsilon$ et conclure.*

5. *On se propose de montrer dans cette question, la réciproque du résultat précédent, à savoir qu'une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est continue presque partout est Riemann-intégrable.*
On suppose que l'ensemble D des points de discontinuité de la fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est négligeable et pour tout réel $\varepsilon > 0$, on note :
$$D_\varepsilon = \{x \in [a,b] \mid \omega(x) \geq \varepsilon\}$$

   (a) *Montrer qu'il existe une suite finie $(I_k)_{1 \leq k \leq p}$ d'intervalles ouverts telle que :*
$$D_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^{p} I_k \text{ et } \sum_{k=1}^{p} \ell(I_k) < \varepsilon$$

   (b) *Montrer qu'il existe une suite $(J_k)_{1 \leq k \leq m}$ d'intervalles ouverts telle que :*
$$K_\varepsilon = [a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k \subset \bigcup_{k=1}^{m} J_k$$
   avec :
$$\forall k \in \{1, \cdots, m\},\ \sup_{(y,z) \in J_k^2} |f(y) - f(z)| < \varepsilon$$

   (c) *On ordonne les extrémités des intervalles de $R_1 = (I_k)_{1 \leq k \leq p}$ et de $R_2 = (J_k)_{1 \leq k \leq m}$ en une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq r}$ de $[a,b]$, chaque intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$ étant dans au moins un des I_j ou un des J_i.*
   On note E_1 l'ensemble des indices k compris entre 0 et $r-1$ tels que $]a_k, a_{k+1}[$ est dans au moins un des I_j et E_2 le complémentaire de cet ensemble.
   On note M la borne supérieure de $|f|$ sur $[a,b]$ et on définit les fonctions en escaliers φ et ψ par :
$$\forall k \in E_1 \text{ et } \forall t \in]a_k, a_{k+1}[,\ \varphi(t) = 0,\ \psi(t) = M$$
$$\forall k \in E_2 \text{ et } \forall t \in]a_k, a_{k+1}[,\ \varphi(t) = f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right),\ \psi(t) = \varepsilon$$
   (la définition de ces fonctions aux points de la subdivision σ n'ayant pas d'importance).
   Montrer que $|f - \varphi| \leq \psi$ et $\displaystyle\int_a^b \psi(x)\,dx < (M + b - a)\varepsilon$. Conclure.

Exercice 49 *Montrer que la fonction* $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ *est Lebesgue-intégrable et non Riemann-intégrable sur* $[0,1]$.

Exercice 50 *Soient* I, *un intervalle réel d'intérieur non vide,* a *un point de* I *et* f, g *deux fonctions intégrables de* I *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer* $f = g$ *presque partout si, et seulement si,* $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt$ *pour tout* $x \in I$.

– VII – Fonction définie par une intégrale

Exercice 51 ***Théorème de Fubini pour les fonctions continues sur un rectangle.***
Étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b]\times[c,d],\mathbb{C})$, *où* $a < b$ *et* $c < d$, *on lui associe les fonctions* α *et* β *définies sur* $[c,d]$ *par :*

$$\forall z \in [c,d],\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha(z) = \displaystyle\int_c^z \left(\int_a^b f(t,x)\,dt \right) dx \\ \beta(z) = \displaystyle\int_a^b \left(\int_c^z f(t,x)\,dx \right) dt \end{array} \right.$$

1. *Montrer que la fonction* α *est de classe* C^1 *sur* $[c,d]$ *et donner une expression de sa dérivée* α'.
2. *On désigne par* γ *la fonction définie sur le rectangle* $R = [a,b]\times[c,d]$ *par :*

$$\gamma(t,z) = \int_c^z f(t,x)\,dx$$

   Montrer que la fonction γ *est continue sur* R *et qu'elle admet une dérivée partielle par rapport à* z *en tout point de* R, *cette dérivée* $\dfrac{\partial \gamma}{\partial z}$ *étant continue sur* R.
3. *Montrer que la fonction* β *est de classe* C^1 *sur* $[c,d]$ *et donner une expression de sa dérivée* β'.
4. *Déduire de ce qui précède que :*

$$\forall z \in [c,d],\ \int_c^z \left(\int_a^b f(t,x)\,dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^z f(t,x)\,dx \right) dt$$

   et en particulier :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(t,x)\,dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(t,x)\,dx \right) dt$$

Exercice 52 ***Théorème de Fubini pour les fonctions continues sur un triangle.***
Soient deux réels $a < b$ *et* φ *une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le triangle :*

$$T = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq y \leq b \right\}$$

1. *Montrer que la fonction* ψ *définie sur le carré* $C = [a,b]^2$ *par :*

$$\forall (x,y) \in C,\ \psi(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(x,y) - \varphi(x,x) & si\ (x,y) \in T \\ 0 & si\ (x,y) \notin T \end{array} \right.$$

   est continue sur C.
2. *Soit* $k \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. *Montrer que :*

$$\forall z \in [a,b],\ \int_a^z \left(\int_a^y k(x)\,dx \right) dy = \int_a^z \left(\int_x^z k(y)\,dy \right) dx$$

3. *Déduire de ce qui précède que :*

$$\forall z \in [a,b]\,,\ \int_a^z \left(\int_a^y \varphi(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^z \left(\int_x^z \varphi(x,y)\,dy\right)dx$$

et en particulier :

$$\int_a^b \left(\int_a^y \varphi(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^b \left(\int_x^b \varphi(x,y)\,dy\right)dx$$

Exercice 53 ***L'intégrale de Gauss*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

1. *Montrer que la fonction* $f : t \mapsto e^{-t^2}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^+$.
2. *Pour tout réel* $R > 0$*, on note :*

$$I_R = \int_0^R e^{-t^2}dt$$

$$C_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq R\right\} \text{ et } T_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq R\right\}$$

   (a) *Montrer que :*

$$I_R^2 = 2\iint_{T_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

   (b) *Montrer que :*

$$I_R^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{R^2}{\cos^2(\theta)}}d\theta$$

   et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. *En munissant, pour tout entier* $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ *de sa structure euclidienne canonique, calculer* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}dx$.

Exercice 54 ***L'intégrale de Gauss*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

On considère les fonctions F *et* G *définies sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2,\ G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(t^2+1\right)}}{t^2+1}dt$$

1. *Montrer que ces fonctions sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *et que* $F' + G' = 0$.
2. *En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

Exercice 55 ***L'intégrale de Gauss*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

On désigne par f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{+,*}$ *par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+,*},\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}$$

1. *Montrer que la fonction :*

$$F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$$

   est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et solution d'une équation différentielle de la forme $y' - y = -\dfrac{\lambda}{\sqrt{x}}$, où λ est une constante réelle.*
3. *Résoudre cette équation différentielle et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.*

Exercice 56 ***L'intégrale de Dirichlet*** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$
On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

1. *Montrer que la fonction :*

$$F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$$

   est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ et solution de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.*
3. *Résoudre cette équation différentielle et en déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet.*

Exercice 57 *$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions Lebesgue-intégrables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.*
Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on note :

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt$$

1. *Soient f, g deux fonctions dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que :*
   (a) *pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t) g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;*
   (b) *la fonction $f * g : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t)\, dt$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;*
   (c) *$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|f\|_1$.*

   La fonction $f * g$ est le produit de convolution de f et g.
2. *Montrer que la loi de composition interne $*$ est commutative et associative sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.*

Exercice 58 *Pour tout intervalle réel I non réduit à un point, on désigne par $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.*
$I = \mathbb{R}^+$ ou $I = [0, X]$ pour un réel $X > 0$, E est l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et T est l'opérateur de Volterra (ou opérateur de primitivation) défini par :

$$\forall f \in E, \ \forall x \in I, \ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

Pour toutes fonctions f, g dans E, on définit le produit de convolution $f * g$ par :

$$\forall x \in I, \ f * g(x) = \int_0^x f(x-t) g(t)\, dt$$

1. *Montrer que :*
   (a) *la loi $*$ est une loi de composition interne sur E ;*
   (b) *cette loi est commutative ;*

   (c) cette loi est associative ;
   (d) il n'existe pas d'élément neutre pour cette loi.

2. Montrer que pour toutes fonctions f, g dans E, on a :

$$T(f * g) = T(f) * g = f * T(g)$$

et pour tout entier naturel n :

$$T^n(f * g) = T^n(f) * g = f * T^n(g)$$

3. On suppose que f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Montrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec :

$$(f * g)' = f(0)\, g + f' * g = g(0)\, f + f * g'$$

4. On prend ici $I = [0, 1]$ et on se propose de montrer le cas particulier suivant du théorème de Titchmarsh : si f, g sont deux fonctions développables en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ où $R > 1$ telles que $f * g = 0$, on a alors $f = 0$ ou $g = 0$.
   (a) On suppose que f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ avec $f(0) \neq 0$. Montrer que si $f * g = 0$, on a alors $g^{(n)}(0) = 0$ et $f * g^{(n+1)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) On suppose que f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ telles que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ et $f * g = 0$. Montrer qu'on a $f' * g = 0$ et $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$. Montrer que si $f * g = 0$, on a alors $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Soient f, g deux fonctions développables en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ où $R > 1$. Montrer que si $f * g = 0$, on a alors $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 59 ***Opérateurs de Volterra***

On se donne deux réels $a < b$ et E est l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si $\ker(\lambda Id - u) \neq \{0\}$.
On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur spectrale de $u \in \mathcal{L}(E)$ si $\lambda Id - u$ n'est pas bijective.
Le spectre de u est l'ensemble $\sigma(u)$ des valeurs spectrales de u.
Étant donnée une fonction $K \in \mathcal{C}^0\left([a, b]^2, \mathbb{R}\right)$, où $a < b$, on lui associe les endomorphismes de E, T_K et T_K^* définis par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [a, b],\ T_K(f)(x) = \int_a^x f(t)\, K(t, x)\, dt \tag{3}$$

et :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [a, b],\ T_K^*(f)(x) = \int_x^b f(t)\, K(x, t)\, dt$$

On dit que T_K est un opérateur de Volterra de noyau K.
Pour K constante égale à 1 sur $[0, 1]^2$, on notera simplement T l'opérateur de Volterra correspondant et T^* l'opérateur T_K^*.

1. Montrer que T_K^* est l'unique endomorphisme de E tel que pour toutes fonctions f, g dans E, on ait :

$$\langle T_K(f) \mid g \rangle = \langle f \mid T_K^*(g) \rangle$$

2. On se propose de montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec :

$$\|T_K\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} \int_a^x |K(t, x)|\, dt$$

(a) *Montrer le résultat pour K à valeurs positives.*

(b) *Montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ avec :*

$$\|T_K\|_\infty \leq \left\|T_{|K|}\right\|_\infty$$

(c) *Justifier l'existence de $x_0 \in [a,b]$ tel que :*

$$\left\|T_{|K|}\right\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x |K(t,x)|\,dt = \int_a^{x_0} |K(t,x_0)|\,dt$$

(d) *On désigne par $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions continues définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a,b]\,,\ f_n(t) = \frac{K(t,x_0)}{|K(t,x_0)| + \varepsilon_n}$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_K(f_n)(x_0) = \left\|T_{|K|}\right\|_\infty$ et conclure.

3. *On suppose que K est à valeurs positives et on se propose de montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$ avec :*

$$\|T_K\|_1 = \sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(x,t)\,dt$$

(a) *Montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$ avec :*

$$\|T_K\|_1 \leq \sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(x,t)\,dt$$

(b) *Justifier l'existence de $x_0 \in [a,b]$ tel que :*

$$\sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(x,t)\,dt = \int_{x_0}^b K(x_0,t)\,dt$$

(c) *Montrer que :*

$$\|T_K\|_1 = \sup_{x\in[a,b]} \int_x^b K(x,t)\,dt$$

4. *Montrer que T_K est continue de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans $(E, \|\cdot\|_2)$ et que :*

$$\|T_K\|_2 \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|K\|_\infty$$

où $\|K\|_\infty = \sup\limits_{(x,t)\in[a,b]^2} |K(x,t)|$.

5. *On se propose de montrer que l'opérateur T_K n'a pas de valeur propre réelle non nulle.*

(a) *On suppose que $K = 1$. Montrer que T n'admet pas de valeur propre.*

(b) *On revient au cas général.*
Comme pour $K = 0$ le résultat est évident, on suppose que $K \neq 0$.
On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et une onction $f \in E \setminus \{0\}$ tels que $_K(f) = \lambda f$.
On désigne par g la fonction définie par $g = T(f^2)$.

i. *Montrer que la fonction g est croissante et qu'il existe un réel $\alpha \in [a, b[$ tel que $g(x) = 0$ pour tout $x \in [a, \alpha]$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha, b]$.*

ii. *Montrer qu'il existe un réel $\beta > 0$ tel que :*

$$\forall x \in [a, b], \ \lambda^2 g'(x) \leq \beta g(x)$$

iii. *Conclure.*

(c) *On suppose que $[a, b] = [0, 1]$ et T_K est l'opérateur défini par :*

$$\forall f \in E, \ \forall x \in [0, 1], \ T_K(f)(x) = \int_0^x f(t) \cos(x - t) \, dt$$

(opérateur de convolution par la fonction $\cos$*).*

i. *Montrer que, pour toute fonction $f \in E$, la fonction $T_K(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.*

ii. *Montrer que T_K n'a pas de valeur propre.*

6. *Montrer que si K_1 et K_2 sont deux fonctions continues sur $[a, b]^2$, alors la composée $T_{K_1} \circ T_{K_2}$ est un opérateur de Volterra sur E.*

7. *On se propose de montrer que $\sigma(T_K) = \{0\}$.*

(a) *Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, l'application T_K^n est un opérateur de Volterra, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $K_n \in \mathcal{C}^0\left([a, b]^2, \mathbb{R}\right)$ telle que :*

$$\forall f \in E, \ \forall x \in [a, b], \ T_K^n(f)(x) = \int_a^x f(t) K_n(t, x) \, dt$$

(b) *Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :*

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \ |K_n(x, y)| \leq \frac{\|K\|_\infty^n}{(n-1)!} |x - y|^{n-1}$$

(c) *Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :*

$$\|T_K^n\|_2 \leq \frac{\|K\|_\infty^n (b - a)^n}{n!}$$

(d) *Montrer que la série $\sum T_K^n$ est convergente dans $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|_2)$, que $Id - T_K$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et donner une expression de $(Id - T_K)^{-1}$.*

(e) *Montrer que, pour tout réel non nul λ, l'opérateur $\lambda Id - T_K$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et retrouver le fait que T_K n'a pas de valeur propre non nulle.*

(f) *Montrer que $\sigma(T_K) = \{0\}$.*

8. *Pour cette question et les suivantes, $K = 1$.*

(a) *Montrer que, pour tout $f \in E$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$, on a :*

$$T^n(f)(x) = \int_a^x \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \, dt$$

la fonction $T^n(f)$ étant de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$.

(b) *Calculer $\|T^n\|_\infty$ et $\|T^n\|_1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(c) *Donner une expression de $(\lambda Id - T)^{-1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$.*

(d) *Montrer que, pour tout $f \in E$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [a,b]$, on a :*

$$(T^*)^n (f)(x) = \int_x^b \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt$$

(e) *Montrer que, pour tout $f \in E$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [a,b]$, on a :*

$$T^n (f)(x) + (T^*)^n (f)(x) = \int_a^b \frac{|t-x|^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt$$

9. *Soit H un sous-espace vectoriel de dimension finie de E stable par T. Montrer que $H = \{0\}$.*
10. *Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que $f(a) = 0$ et φ la fonction définie sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ par :*

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2(b-a)\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)}$$

(a) *Montrer que la fonction φ se prolonge par continuité en b et que la fonction $\varphi \cdot f$ se prolonge par continuité en a.*

(b) *Montrer que :*

$$\forall t \in]a,b[,\ \varphi^2(t) + \varphi'(t) = -\frac{\pi^2}{4(b-a)^2}$$

(c) *Montrer que :*

$$\|f' - \varphi \cdot f\|_2^2 = \|f'\|_2^2 - \frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \|f\|_2^2$$

(d) *En déduire que :*

$$\|f\|_2 \leq \frac{2(b-a)}{\pi} \|f'\|_2$$

l'égalité étant réalisée uniquement pour les fonctions $f : t \in [a,b] \mapsto \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{t-a}{b-a}\right)$, où λ est une constante réelle.

11. *Calculer $\|T\|_2$.*

– VIII – Théorèmes de changement de variables et de Fubini sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 60 *Quelle est l'image de $\mathcal{U} = \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ par l'application qui à (x,y) associe $(x+y,y)$? Montrer que cette application est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur son image. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathcal{U}} e^{-(x+y)^2} dx\, dy$.*

Exercice 61 *Soient a et b deux réels tels que $-1 < a < b$.*

1. *Montrer que la fonction la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = y^x$ est intégrable sur le rectangle $[a,b] \times [0,1]$.*
2. *En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln(y)}\, dy$.*

Exercice 62 *La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{-xy} \sin(x) \sin(y)$ est-elle intégrable sur $\mathcal{U} = \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$?*

Exercice 63 *Soit f la fonction définie sur $R =]0,1[^2$ par :*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1. *La fonction f est-elle intégrable sur R ?*
2. *Calculer une primitive de $\dfrac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ sur $\mathbb{R}$.*
3. *Calculer, pour tout $y \in]0,1[$:*

$$\varphi(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$$

4. *Montrer que :*

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx$$

Exercice 64 *Soient f, g les fonctions définies sur $R =]0,1[^2$ par :*

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ et } g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

1. *Montrer que f est intégrable sur R et calculer $\displaystyle\int_R f(x,y)\,dxdy$.*
2.
   (a) *Calculer, pour tout $y \in]0,1[$:*

$$\varphi(y) = \int_0^1 g(x,y)\,dx$$

   (b) *Calculer :*

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dx\right) dy \text{ et } \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\,dy\right) dx$$

   et conclure.

Exercice 65 ***Fonction Béta.***
On désigne par $\mathcal{H}$ le demi plan complexe défini par :

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$$

1. *Soient u, v deux nombres complexes. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{u-1}(1-t)^{v-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement si, $(u,v) \in \mathcal{H}^2$.*
   Définition : *la fonction béta (ou fonction de Bessel de seconde espèce) est la fonction définie sur $\mathcal{H}^2$ par :*

$$\forall (u,v) \in \mathcal{H}^2,\ B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$$

2. *Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :*

$$B(u,v) = B(v,u) \text{ et } B(u+1,v) = \frac{u}{u+v} B(u,v)$$

3. *Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a :*

$$\lim_{n \to +\infty} n^u B(u, v+n+1) = \Gamma(u)$$

4. Montrer que, pour tous nombres complexes u, v dans $\mathcal{H}$, on a $B(u,v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$.
5. Calculer $B(n+1, m+1)$, pour n, m entiers naturels.

– IX – Espaces L^p

Exercice 66 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$ et $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.*
$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ est l'espace vectoriel des fonctions qui s'écrivent comme la somme d'une fonction mesurable bornée et d'une fonction nulle presque partout.
Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p = L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est l'espace vectoriel quotient $\dfrac{\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)}{\mathcal{N}(X, \mathcal{M}, \mu)}$ où $\mathcal{N}(X, \mathcal{M}, \mu)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ formé des fonctions nulles presque partout.
Une fonction $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est identifiée à sa classe d'équivalence $\overline{f} \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.
On se donne $p \in [1, \infty]$.

1. *Montrer que, si f, g sont à valeurs réelles et dans $\mathcal{L}^p$, alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont aussi dans $\mathcal{L}^p$.*
2. *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de L^p à valeurs réelles qui convergent dans L^p vers f et g respectivement. Montrer que la suite $(\max(f_n, g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p vers $\max(f,g)$.*
3. *Soient $q \in [1, \infty]$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \leq 1$ et $r \in [1, \infty]$ défini par $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$.*
   (a) *Montrer que si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, on a alors $fg \in L^r$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*
   (b) *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de L^p qui convergent dans L^p vers f et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^q qui convergent dans L^q vers g montrer alors que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fg dans L^r.*
4. *On suppose que p est fini. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^p et si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans L^∞ qui converge vers g presque partout, montrer alors que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fg dans L^p.*

Exercice 67 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ finie.*

1. *Montrer que pour tout $f \in L^\infty$, on a :*
$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$
2. *Soit $f \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p$ telle que $\sup_{1\leq p<\infty} \|f\|_p < \infty$. Montrer que $f \in L^\infty$.*
3. *Donner un exemple de fonction $f \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p$ telle que $f \notin L^\infty$.*

Exercice 68 *Pour cet exercice, $\mathbb{R}_+^\star$ est muni de la tribu de Borel et de la mesure de Lebesgue.*
Soit $p \in]1, \infty[$. À toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$, on associe les fonctions F, G, H définies sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\ G(x) = \frac{F(x)}{x^{\frac{1}{q}}},\ H(x) = \frac{F(x)}{x}$$
où $q = \dfrac{p}{p-1}$ désigne l'exposant conjugué de p.

1. *Montrer que $|F(x) - F(y)| \leq \|f\|_p |x-y|^{\frac{1}{q}}$ pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$. En déduire que F, G et H sont continues sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que $\|G\|_\infty \leq \|f\|_p$.*

2. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = 0$.
3. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to +\infty} G(x) = 0$ *(on pourra commencer par supposer que* f *est continue et à support compact, puis utiliser le fait que l'espace des fonctions de* $\mathbb{R}_+^\star$ *dans* $\mathbb{R}$ *continues et à support compact est dense dans* $\left(L^p\left(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}\right), \|\cdot\|_p\right)$*).*
4. *On veut montrer que* $\|H\|_p \leq q\,\|f\|_p$, *c'est-à-dire que :*
$$\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p} dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p\, dx \tag{4}$$
(inégalité de Hardy).
   (a) *Montrer que, si* $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ *est continue, positive, et à support compact dans* $\mathbb{R}_+^\star$, *on a alors :*
$$\int_0^\infty \frac{F(x)^p}{x^p} dx = \frac{p}{p-1} \int_0^\infty \frac{F(x)^{p-1}}{x^{p-1}} f(x)\, dx$$
   En déduire que f *vérifie l'inégalité* (4).
   (b) *On suppose que* $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ *est continue et à support compact dans* $\mathbb{R}_+^\star$. *Montrer que* f *vérifie l'inégalité* (4).
   (c) *Par un argument de densité, montrer que* (4) *est vraie pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^p\left(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}^+\right)$, *puis montrer qu'elle est vraie pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^p\left(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R}\right)$.
   (d) *En utilisant la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 2}$ *définie par :*
$$\forall n \geq 2,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^\star,\ f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{]1,n[}(t)$$
   montrer que la constante $\dfrac{p}{p-1}$ *est optimale dans l'inégalité de Hardy* (4).
   (e) *Etudier les cas* $p = 1$ *et* $p = \infty$.

– X – Produit de convolution et transformée de Fourier

$\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel et de la mesure de Lebesgue.

Exercice 69

1. *Soient* p, q *deux réels strictement positifs tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Montrer que :
$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2,\ xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$$
2. *Soient* r *un entier naturel non nul,* $p_1, \cdots, p_r$ *une suite d'éléments de* $[1, +\infty]$ *telle que* $\displaystyle\sum_{k=1}^r \frac{1}{p_k} = 1$ *et, pour tout* k *compris entre* 1 *et* r, f_k *une fonction dans* $\mathcal{L}^{p_k}(\mathbb{R})$.
Montrer que la fonction $f = \displaystyle\prod_{k=1}^r f_k$ *est dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *et que* $\|f\|_1 \leq \displaystyle\prod_{k=1}^r \|f_k\|_{p_k}$.

Exercice 70 *Soient* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *et* $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ *où* $1 \leq p \leq +\infty$. *Montrer que :*
– *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *la fonction* $t \mapsto f(x-t)\, g(t)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$;
– *la fonction* $f * g : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, dt$ *est dans* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$;

– $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
La fonction $f * g$ est le produit de convolution de f et g.

Exercice 71 *Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ où $1 \leq p, q \leq +\infty$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geq 1$.*

1. *Justifier l'existence de $r \in [1, +\infty]$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$.*
2. *Pour $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, montrer que le produit de convolution $f * g$ est bien défini et que $f * g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ avec $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*
3. *On suppose que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > 1$.*
   (a) *Vérifier que $1 \leq p, q \leq r < +\infty$ et $p' = \dfrac{pr}{r - p}$, $q' = \dfrac{qr}{r - q}$ sont dans $[1, +\infty]$ avec $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{q'} + \dfrac{1}{r} = 1$.*
   (b) *Montrer que, pour tout réel x, la fonction $t \mapsto |f(x-t)|^{\frac{p}{r}} |g(t)|^{\frac{q}{r}}$ est dans $\mathcal{L}^r(\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto |f(x-t)|^{1-\frac{p}{r}}$ est dans $\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R})$ et la fonction $t \mapsto |g(t)|^{1-\frac{q}{r}}$ est dans $\mathcal{L}^{q'}(\mathbb{R})$.*
   (c) *En déduire que le produit de convolution $f * g$ est bien défini et que $f * g \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R})$ avec $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (inégalité de Young).*

Exercice 72 *Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$, on peut définir la fonction $\widehat{f}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

et que cette fonction $\widehat{f}$ est continue avec :

$$\lim_{|x| \to +\infty} \widehat{f}(x) = 0$$

Cette fonction $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier de f.
Montrer que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est linéaire continue de $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathcal{L}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.