Agrégation Externe

Le groupe linéaire $GL(E)$

[1]

Ce problème est en relation avec les leçons d'oral suivantes :

- 104 Groupes finis. Exemples et applications.
- 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
- 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
- 123 Corps finis. Applications.
- 152 Déterminant. Exemples et applications.
- 159 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

On pourra consulter les ouvrages suivants.

- M. Alessandri. *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique..* Dunod. 1999.
- S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. *Oraux X-ENS. Algèbre 2.* Cassini (2009).
- R. Mneimne. *Réduction des endomorphismes.* Calvage et Mounet (2006).
- D. Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses (1996).
- J. E. Rombaldi. *Analyse matricielle.* EDP Sciences (2000).
- P. Tauvel. *Mathématiques générales pour l'agrégation.* Masson (1993).

1. Le 11/11/2013

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ou infinie.

$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est l'espace dual de E.

On rappelle qu'un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

$\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E, $GL(E)$ est le groupe des automorphismes de E.

Pour E de dimension finie, on note $SL(E)$ le sous-ensemble de $GL(E)$ défini par :

$$SL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det(u) = 1\}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note Id [resp. I_n] l'endomorphisme [resp. la matrice] identité.

La notion de déterminant et ses principales propriétés sont supposées acquises.

Pour E de dimension $n \geq 1$, le choix d'une base de E permet de réaliser un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et un isomorphisme de groupes de $GL(E)$ sur $GL_n(\mathbb{K})$.

– I – Questions préliminaires

On rappelle que le centre (ou commutateur) $Z(G)$ d'un groupe G est la partie de G formée des éléments de G qui commutent à tous les autres éléments de G, soit :

$$Z(G) = \{h \in G \mid \forall g \in G,\ gh = hg\}$$

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) (ligne i et colonne j) qui vaut 1.

On rappelle que la famille $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 1 *Soit φ une forme linéaire non nulle sur E.*
On appelle transvection d'hyperplan $\ker(\varphi)$ *toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)\, a \tag{1}$$

où $a \in \ker(\varphi)$.

Définition 2 *Soit φ une forme linéaire non nulle sur E.*
On appelle dilatation d'hyperplan $\ker(\varphi)$ *toute application linéaire $u \in GL(E)$ définie par :*

$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)\, a \tag{2}$$

où $a \in E \setminus \ker(\varphi)$.

On notera $\tau_{\varphi,a} = Id + \varphi \cdot a$ une transvection définie par (1), où $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et $a \in \ker(\varphi)$ et $\delta_{\varphi,a} = Id + \varphi \cdot a$ une dilatation définie par (2) où $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et $a \notin \ker(\varphi)$.

1. **Hyperplans.**
   (a) Montrer qu'une forme linéaire φ sur E non identiquement nulle est surjective.
   (b) Montrer qu'un hyperplan de E est un sous-espace de E supplémentaire d'une droite.

2. **Centre de $\mathcal{L}(E)$.**
   (a) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie si, et seulement, il laisse stable toute droite de E.

(b) Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ laisse stable tout hyperplan de E, son adjoint $u^* \in \mathcal{L}(E^*)$ laisse alors stable toute droite de E^*.

(c) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie si, et seulement, il laisse stable tout hyperplan de E.

(d) Déterminer le centre de $\mathcal{L}(E)$.

3. **Polynômes caractéristique et minimal de $u \circ v$ et $v \circ u$ en dimension finie.**
   E est de dimension finie $n \geq 2$.

   (a) Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une infinité de scalaires λ tels que $u - \lambda Id$ soit inversible.

   (b) En déduire que pour tous u et v dans $\mathcal{L}(E)$, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal (considérer d'abord le cas où u est inversible).

4. **Transvections en dimension finie ou infinie.**

   (a) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une transvection si, et seulement si, il existe un hyperplan H de E tel que $u_{|H} = Id_H$ et $\operatorname{Im}(u - Id) \subset H$.

   (b) Montrer qu'une transvection $\tau_{\varphi,a}$ est un isomorphisme de E, son inverse étant la transvection $\tau_{\varphi,-a}$, puis que 1 est son unique valeur propre, l'espace propre associé étant $\ker(\varphi)$ si $u \neq Id$.

   (c) Montrer que le conjugué dans $GL(E)$ d'une transvection est une transvection.

   (d) Montrer que l'ensemble $T(H)$ des transvections d'hyperplan $H = \ker(\varphi)$ est un sous groupe commutatif de $GL(E)$ isomorphe au groupe additif $(H, +)$.

   (e) Montrer qu'une transvection u admet un polynôme minimal qui est $X - 1$ si $u = Id$ ou $(X-1)^2$ si $u \neq Id$.

5. **Transvections en dimension finie.**
   E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension finie $n \geq 2$.

   (a) Montrer qu'un isomorphisme $u \in GL(E) \setminus \{Id\}$ est une transvection si, et seulement si, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$T_n = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n + E_{n-1,n}$$

   (avec $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$). Une transvection est donc dans $SL(E)$ et non diagonalisable si elle est différente de Id.

   (b) Montrer qu'un isomorphisme $u \in GL(E) \setminus \{Id\}$ est une transvection si, et seulement si, il existe une base dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$$

   avec $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

   (c) Montrer qu'un isomorphisme $u \in GL(E) \setminus \{Id\}$ est une transvection si, et seulement si, $\operatorname{rg}(u - Id) = 1$ et le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = (X-1)^n$. [2]

   (d) Montrer que, pour $\mathbb{K}$ infini, toute transvection différente de Id s'écrit comme produit de deux matrices diagonalisables inversibles.

2. d'après Agrégation 2013, mathématiques générales

6. **Dilatations en dimension finie ou infinie.**

   (a) Montrer qu'un isomorphisme $u \in GL(E)$ est une dilatation si, et seulement si, il existe un hyperplan H de E tel que $u_{|H} = Id_H$ et u est diagonalisable de valeurs propres 1 et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ (c'est-à-dire que $E = \ker(u - Id) \oplus \ker(u - \lambda Id)$).
   On dit que u est une dilatation de rapport λ (pour $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 et $\lambda = -1$, on dit que u est une réflexion d'hyperplan $H = \ker(\varphi)$).

   (b) Montrer que le conjugué dans $GL(E)$ d'une dilatation est une dilatation de même rapport.

   (c) Montrer qu'une dilatation u de rapport λ admet un polynôme minimal qui est $(X-1)(X-\lambda)$.

   (d) Montrer que l'inverse d'une dilatation de rapport λ est une dilatation de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

7. **Dilatations en dimension finie**
   E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension finie $n \geq 2$.

   (a) Montrer qu'un isomorphisme $u \in GL(E)$ est une dilatation si, et seulement si, il existe une base dans laquelle la matrice de u est de la forme :

   $$D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1) E_{n,n}$$

   avec $\lambda = \det(u) \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$.

   (b) Montrer que deux dilatations sont conjuguées dans $GL(E)$ si, et seulement si, elles ont même rapport.

– II – Généralités sur les groupes $GL(E)$ et $SL(E)$

Sauf précision contraire, E est de dimension finie $n \geq 2$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   (a) $u \in GL(E)$;

   (b) $\ker(u) = \{0\}$ (i. e. u injectif) ;

   (c) $\mathrm{Im}(u) = E$ (i. e. u surjectif) ;

   (d) il existe $v \in GL(E)$ tel que $u \circ v = Id$;

   (e) il existe $w \in GL(E)$ tel que $w \circ u = Id$.

2. Le résultat de la question précédente est-il valable en dimension infinie ?

3. **Le sous-groupe $SL(E)$ en dimension finie.**

   (a) Montrer que $SL(E)$ est un sous-groupe distingué de $GL(E)$.

   (b) On suppose que $n = 2$. Quels sont les éléments d'ordre 2 du groupe $SL(E)$? [3]

   (c) Montrer que, pour $n \geq 3$, toutes les transvections différentes de Id sont conjuguées dans $SL(E)$.

   (d) Que se passe-t-il pour $n = 2$?

4. **Dénombrement de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ et de $SL_n(\mathbb{F}_q)$** [4]
   On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ est un corps fini à q éléments ($q = p^r$, où $p \geq 2$ est un nombre premier).

---

3. d'après Agrégation 2013, mathématiques générales
4. d'après Agrégation 2013, mathématiques générales

(a) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \text{card}\left(GL_n\left(\mathbb{F}_q\right)\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(q^n - q^{k-1}\right) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{j=1}^{n}\left(q^j - 1\right)$$

(b) Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \text{card}\left(SL_n\left(\mathbb{F}_q\right)\right) = q^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(q^n - q^{k-1}\right) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{j=2}^{n}\left(q^j - 1\right)$$

(c) Montrer que si $\mathbb{L}$ est un corps tel que les groupes $SL_n\left(\mathbb{F}_q\right)$ et $SL_n\left(\mathbb{L}\right)$ soient isomorphes (pour $n \geq 2$), alors $\mathbb{L}$ est isomorphe à $\mathbb{F}_q$ (i. e. $\mathbb{L}$ est un corps fini à q éléments.

5. **Centre de** $GL\left(E\right)$.
   Déterminer le centre de $GL\left(E\right)$, pour E de dimension finie ou infinie.
   Le groupe quotient $PGL\left(E\right) = GL\left(E\right)/Z\left(GL\left(E\right)\right)$ est le groupe projectif linéaire
6. Les groupes $GL_n\left(\mathbb{Q}\right)$, $GL_n\left(\mathbb{R}\right)$ et $GL_n\left(\mathbb{C}\right)$ peuvent-ils être isomorphes ?
7. Soient n, m deux entiers naturels non nuls. On fait agir le groupe produit $GL_n\left(\mathbb{K}\right) \times GL_m\left(\mathbb{K}\right)$ sur l'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}\left(\mathbb{K}\right)$ des matrices à n lignes et m colonnes par :

$$\forall \left(P, Q\right) \in GL_n\left(\mathbb{K}\right) \times GL_m\left(\mathbb{K}\right),\ \forall A \in \mathcal{M}_{n,m}\left(\mathbb{K}\right),\ \left(P, Q\right) \cdot A = PAQ^{-1}$$

   Montrer que les orbites correspondantes sont les ensembles :

$$\mathcal{O}_r = \left\{A \in \mathcal{M}_{n,m}\left(\mathbb{K}\right) \mid \text{rg}\left(A\right) = r\right\}$$

   où r est compris entre 0 et $\min\left(n, m\right)$.
8. En supposant que le corps $\mathbb{K}$ est infini, montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}\left(E\right)$ formée d'isomorphismes
9. On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est infini et que l'espace E est de dimension finie $n \geq 1$.

– II – Générateurs de $SL\left(E\right)$ et $GL\left(E\right)$

E est de dimension finie $n \geq 2$.

1. **Générateurs de** $SL\left(E\right)$.
   On se propose de montrer que, pour E de dimension $n \geq 2$, le groupe $SL\left(E\right)$ est engendré par l'ensemble des transvections.

   (a) Soient H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E et $a \in E \setminus \left(H_1 \cup H_2\right)$.

      i. Montrer que $H = H_1 \cap H_2 \oplus \mathbb{K}a$ est un hyperplan de E.
      ii. Montrer que $E = H + H_1 = H + H_2$.
      iii. Montrer qu'il existe une transvection u telle que $u\left(a\right) = a$ et $u\left(H_1\right) = H_2$ (pour $a_2 \in H_2 \setminus H$, on justifiera l'existence de $a_1 \in H_1 \setminus H$ et $b \in H$ tels que $a_2 = a_1 + b$, puis on peut considérer la transvection $\tau_{\varphi,b}$ où φ est une équation de H telle que $\varphi\left(a_1\right) = 1$).

   (b) Montrer que pour tous x, y non nuls dans E, il existe $u \in SL\left(E\right)$ produit de une ou deux transvections tel que $y = u\left(x\right)$.

(c) Montrer que le groupe $SL(E)$ est engendré par l'ensemble des transvections.
Ce résultat peut aussi se montrer en utilisant les opérations élémentaires sur les matrices (voir Rombaldi).

2. **Générateurs de $GL(E)$.**

   (a) Montrer que, pour E de dimension $n \geq 2$, le groupe $GL(E)$ est engendré par l'ensemble des dilatations et des transvections.

   (b) Montrer que, pour $\mathbb{K}$ infini et E de dimension $n \geq 2$, le groupe $GL(E)$ est engendré par l'ensemble des matrices diagonalisables inversibles.

3. **Morphismes de groupes de $GL(E)$ dans $\mathbb{F}_q^*$.**

   (a) On suppose que E est de dimension finie $n \geq 2$ sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à $q = p^m$ éléments, où $p \geq 2$ est un nombre premier et on se donne un morphisme de groupes γ de $GL(E)$ dans $\mathbb{F}_q^*$.

   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel r compris entre 0 et $q-2$ tel que pour toute dilatation u de rapport, on ait $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$, $\gamma(u) = \lambda^r$.

   (c) Montrer que, pour toute transvection u, on a $\gamma(u) = 1$.

   (d) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall u \in GL(E), \ \gamma(u) = (\det(u))^r$$

– III – Sous-groupes de $GL(E)$

E est de dimension finie $n \geq 1$.

1. Montrer que si $(G, \cdot)$ est un groupe tel que tout ses éléments sont d'ordre au plus égal à 2, G est alors commutatif. Si de plus que G est fini, montrer qu'il existe alors un entier $p \geq 0$ tel que $\mathrm{card}(G) = 2^p$.
2. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables (l'ensemble I ayant au moins deux éléments).
   Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation dans E pour la famille $(u_i)_{i \in I}$ si, et seulement si, ces endomorphismes commutent deux à deux.
3. On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2.

   (a) Montrer que si G est un sous-groupe multiplicatif fini de $GL(E)$ tel que tout élément de G soit d'ordre au plus égal à 2, alors tous les éléments de G sont diagonalisables et G est commutatif de cardinal inférieur ou égal à 2^n.

   (b) En déduire que, si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors les groupes multiplicatifs $GL(E)$ et $GL(F)$ sont isomorphes si, et seulement si, $\dim(F) = \dim(E)$.

4. Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$ de cardinal $p \geq 2$.

   (a) Montrer que $v = \frac{1}{p} \sum_{u \in G} u$ est un projecteur.

   (b) Montrer que $\sum_{u \in G} \mathrm{tr}(u)$ est un entier divisible par p.

   (c) En supposant que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, montrer que si $\sum_{u \in G} \mathrm{tr}(u) = 0$, on a alors $\sum_{u \in G} u = 0$.

5. **Un théorème de Burnside**
On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle.

(a) Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, 0 est alors l'unique valeur propre de u et $\mathrm{Tr}(u) = 0$.

(b) Montrer qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si, et seulement si, $\mathrm{Tr}\left(u^k\right) = 0$ pour tout k compris entre 1 et n.

(c) Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, montrer que u est nilpotent si, et seulement si, 0 est la seule valeur propre de u.

(d) Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, donner une deuxième démonstration du fait que $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si, et seulement si, $\mathrm{Tr}\left(u^k\right) = 0$ pour tout k compris entre 1 et n.

(e) Soient G un sous-groupe de $GL(E)$, F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par G, $\mathcal{B} = (u_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F extraite de G et l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \to & \mathbb{K}^p \\ & u & \mapsto & \left(\mathrm{tr}(u \circ u_1), \cdots, \mathrm{tr}(u \circ u_p)\right) \end{array}$$

Montrer que si u, v dans G sont tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$, on a alors :

$$\begin{cases} \forall w \in G,\ \mathrm{tr}\left(u \circ v^{-1} \circ w\right) = \mathrm{tr}(w) \\ \forall k \geq 1,\ \mathrm{tr}\left(\left(u \circ v^{-1}\right)^k\right) = n \end{cases}$$

et en déduire que $u \circ v^{-1} - Id$ est nilpotent.

(f) En gardant les notations de la question précédente et en supposant que tous les éléments de G sont diagonalisables, montrer que φ est injective.

(g) Montrer que si G est un sous-groupe de $GL(E)$ tel que tous ses éléments sont diagonalisables et $\mathrm{tr}(G)$ est fini, il est alors fini.

(h) Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, montrer qu'un sous-groupe G de $GL(E)$ est fini si, et seulement si, il est d'exposant fini (c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^m = Id$ pour tout $u \in G$). Ce résultat est un théorème de Burnside.

6. **Le groupe orthogonal d'un espace euclidien.**
On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que E est un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.
On rappelle qu'une isométrie (ou application orthogonale) de E est une application $u : E \to E$ qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E.

(a) Montrer qu'une application $u : E \to E$ est une isométrie si, et seulement si, elle est linéaire et conserve la norme, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$$

(b) Montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. $\mathcal{O}(E)$ est le groupe orthogonal de E.

(c) Que se passe-t-il en dimension infinie.

(d) On note :

$$\mathcal{O}^+(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = 1\}$$

l'ensemble des isométries positives (ou rotations vectorielles).
Montrer que $\mathcal{O}^+(E)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{O}(E)$ d'indice 2.

(e) On désigne par S la sphère unité de E. Montrer que l'application $(u,x) \in \mathcal{O}^+(E) \times S \mapsto u \cdot x = u(x)$ définit une action transitive de $\mathcal{O}^+(E)$ sur S.

– IV – Topologie sur $GL(E)$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Pour cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
On rappelle que si u un endomorphisme de E, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
– u est continue en 0 ;
– u est continue sur E ;
– u est bornée sur la sphère [resp. boule] unité de $(E, \|\cdot\|)$;
– il existe une constante réelle c telle que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq c\|x\|$$

– u est uniformément continue sur E.
En notant $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans E, on peut alors le munir de la norme définie par :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \|u\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|u\|=1}} \|u(x)\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \tag{3}$$

On a $\|Id\| = 1$ et pour tous u, v dans $\mathcal{L}(E)$, on a $\|u \circ v\| \leq \|u\|\,\|v\|$, ce qui se traduit en disant que $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre normée.
$GL(E)$ désigne le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ ($u \in GL(E)$ signifie que u est linéaire, continue, bijective et d'inverse u^{-1} continu).
Dans le cas où l'espace E est de dimension finie, toutes les normes équivalentes et tout endomorphisme est continu.

1. **Cas de la dimension quelconque (finie ou infinie).**
Pour cette question, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach et $\mathcal{L}(E)$ est l'espace des applications linéaires continues de E dans E muni de la norme définie par (3).
   (a) Montrer que $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre de Banach.
   (b) Montrer que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| < 1$, l'endomorphisme $Id - u$ est dans $GL(E)$ d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$.
   (c) Montrer que $GL(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.
   (d) Montrer que l'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue sur $GL(E)$.
   (e) Pour cette question, E est l'espace $\mathbb{C}[X]$ normé par :
$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X],\ \|P\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$
      i. Montrer que l'application :
$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C}[X] \\ P & \mapsto & XP \end{array}$$
      est linéaire et continue.
      ii. Montrer que $B(u,1) \cap GL(E) = \emptyset$ et en déduire que $GL(E)$ n'est pas dense dans $\mathcal{L}(E)$.

On suppose maintenant que E est de dimension finie $n \geq 1$.

2. **Cas de la dimension finie. Densité de $GL(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$. Applications.**

   (a) Montrer, en expoitant la dimension finie, que $GL(E)$ est un ouvert dense de $\mathcal{L}(E)$ et que l'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue de $GL(E)$ dans $GL(E)$.

   (b) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais fermé dans $GL_n(\mathbb{C})$.

   (c) Montrer, en utilisant la densité de $GL(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$, qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée d'isomorphismes.

   (d) Pour tout entier $n \geq 2$, toute matrice $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tous i, j compris entre 1 et n, on note $A_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ déduite de A en supprimant la ligne i et la colonne j.
   Le scalaire $\det(A_{i,j})$ est le mineur d'indice (i,j) et le scalaire $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ est le cofacteur d'indice (i,j).
   La comatrice de A est la matrice :
   $$C(A) = \left(\left((-1)^{i+j}\det(A_{i,j})\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$
   Montrer que :
   $$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(C(A)) = (\det(A))^{n-1}$$

   (e) Montrer que :
   $$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ C(AB) = C(A)C(B)$$

   (f) Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors leurs comatrices le sont aussi.

3. **Connexité de $GL(E)$**

   (a) Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.

   (b) Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $GL(E)$ est connexe par arcs.

   (c) Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $SL(E)$ est connexe par arcs.

   (d) Montrer que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $GL(E)$ n'est pas connexe, puis que ses composantes connexes sont les ouverts de $\mathcal{L}(E)$:
   $$GL^+(E) = \{u \in GL(E) \mid \det(u) > 0\} \text{ et } GL_n^-(E) = \{u \in GL(E) \mid \det(u) < 0\}$$
   Ce résultat permet de définir une orientation sur un espace vectoriel réel E de dimension n. On dit que deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E définissent la même orientation si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est dans $GL_n^+(\mathbb{R})$.

4. **Sous-groupes de $GL(E)$.**

   (a) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   Montrer que si G est un sous-groupe borné de $GL(E)$, alors toutes les valeurs propres des éléments de G sont de module égal à 1, puis que tous ses éléments sont diagonalisables.

   (b)

      i. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $\lambda \neq 1$ et $|\lambda| = 1$, il existe alors un entier naturel p tel que $|1 - \lambda^p| > \sqrt{2}$.

      ii. Montrer que le seul sous-groupe de $GL(E)$ contenu dans la boule de centre Id et de de rayon $\sqrt{2}$ est $\{Id\}$.