UNIVERSIDAD NACIONAL SAN CRISTOBAL DE HUAMANGA

FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

ESCUELA DE CIENCIAS FISICO Y MATEMATICAS

Cálculo de Probabilidades

Docente: Jackson Macoy Romero Plasencia

Alumno: Romeld Jheffry Vilca Torres

Ayacucho,Perú
2019

Práctica 01

1. Demuestre que $\mathcal{F}$ es una σ - álgebra de subconjuntos de si, y solo si,satisface las siguientes propiedades:

   a) $\phi \in \mathcal{F}$

      Demostración

      Si $\Omega \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ colección cerrada

      $\Omega^c = \phi \in \mathcal{F}$

   b) A $\in \mathcal{F} \longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$

      Demostración

      $A_1 \in \mathcal{F} \longrightarrow A_1^c \in \mathcal{F}$

      $A_2 \in \mathcal{F} \longrightarrow A_2^c \in \mathcal{F}$

   c) $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in N$

      Demostración:

      Por definición: $\{A_n\}_{n\in N} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{A_n\}^c_{n\in N} \in \mathcal{F}$

      Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ y a su vez $\bigcup_{n=1}^{\infty} {A_n}^c \in \mathcal{F}$

      Luego $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in N$

2. Sea $\mathcal{F}$ una σ - álgebra; demuestre que $\mathcal{F}^c$ es una σ - álgebra definida por: $\mathcal{F}^c = \{A^c$: A $\in \mathcal{F}$ $\}$

Demostración

Como $\mathcal{F}$ es una σ - álgebra entonces cumple las siguientes propiedades:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. A $\in \mathcal{F} \longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Supongamos que $\mathcal{F}^c$ es un σ - álgebra $\Omega \in \mathcal{F}^c$ que verifica la primera propiedad.

Luego como $\{A_n\}_{n\in N}$ es una sucesión esta definida:

$\{A_n\} \in \mathcal{F}^c \Rightarrow \{A_n\}^c \in \mathcal{F}^c$ se verifica por la tercera propiedad

Ahora por la tercera propiedad verificamos que:

$A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}^c \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}^c = \{A^c/A \in \mathcal{F}\}$

3. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de eventos, definida por:

$$A_n = \begin{cases} A & \text{si } n = 1, 3, 5, ... \\ \\ A^c & \text{si } n = 2, 4, 6, ... \end{cases}$$

Determine el: $\lim\limits_{x\to\infty} A_n$

Solución

$\lim\limits_{n\to\infty} inf A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A \cap A^c) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \phi = \phi$

$\lim\limits_{n\to\infty} sup A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (A \cap A^c) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega = \Omega$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} inf A_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} sup A_n$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} A_n \nexists$

4. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de eventos, definida por:

$$A_n = \begin{cases} [-1/n, 0]\,, & \text{n} = 1, 3, 5, ... \\ \\ [0, 1/n]\,, & \text{n} = 2, 4, 6, ... \end{cases}$$

Determine el: $\lim\limits_{x\to\infty} A_n$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} inf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_k \bigcap_{n=2}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{0\} = \{0\}$$

$$\lim_{n\to\infty} sup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \text{ se tiene } A_1 \cap A_2 \cap A_3 ... \{0\}$$

$$\lim_{n\to\infty} inf A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k \bigcup_{n=2}^{\infty} A_k ...\right) \text{ se tiene } A_2 \cap A_3 ... \{0\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 : [-1, 1/2]$$

$A_1 \cup ... \cup A_4 : [-1, 1/2]$

$A_2 \cup ... \cup A_4 : [-1/3, 1/2]$

$A_3 \cup ... \cup A_4 : [-1/3, 1/4]$

$\lim\limits_{n\to\infty} inf A_n = \lim\limits_{n\to\infty} sup A_n = \{0\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \{0\}$

5. Sean $A_1, A_2, ...$ eventos aleatorios, demuestre :

   a) $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)^c$

   Demostración

   Si: $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c$

   $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i^c\right)$

Recuerde: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$

$\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)^c$

b) Si $P\left(A_i\right) \geq 1 - e$ para i=1,2,...,n entonces $P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\right) \geq 1 - ne$

Demostración

tenemos: $P\left(A_i\right) \geqslant 1 - e$

$\Rightarrow e \geqslant 1 - P\left(A_i\right)$

$\prod_{i=1}^{n} e \geqslant \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)^c$

$ne \geqslant \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i)) \Rightarrow ne \geqslant 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$

$\therefore P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant 1 - ne$

c) $P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_k^c\right)$

6. Demuestre las desigualdades de Boole

$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right)$

Por inducción para familia finita queremos demostrar que:

$P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n\right) \leqslant P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + ... + P\left(A_n\right)$

Luego: para n=1

$P\left(A_1\right) \leqslant P\left(A_1\right)$ se cumple

para n=h

$P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_h\right) \leqslant P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + ... + P\left(A_h\right)$ Hipótesis Inductivo.

para n=h+1

$P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_{h+1}\right) \leqslant P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + ... + P\left(A_h + 1\right)$

Para ello consideramos que:

$x = A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n$, luego $P\left(x\right) \leqslant P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + ... + P\left(A_h\right)$

Entonces:

$P\left(x \cup A_{h+1}\right) = P\left(x\right) + P\left(A_{h+1}\right) - P\left(x \cap A_{h+1}\right)$

Luego

$P\left(x\right) + P\left(A_{h+1}\right) - P\left(x \cap A_{h+1}\right) \leqslant P\left(A_1\right) + ... + P\left(A_h\right) + P\left(A_{h+1}\right) - P\left(x \cap A_{h+1}\right)$

Así $P\left(x \cup A_{h+1}\right) \leqslant P\left(A_1\right) + ... + P\left(A_h\right) + P\left(A_{h+1}\right)$

$P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_{h+1}\right) \leqslant P\left(A_1\right) + ... + P\left(A_h\right)$

Por tanto:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right)$$

7. Sea $\{A_n\} n \in N$ una sucesión de eventos. Demuestre que:

   a) $\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} inf A_n\right)^c = \lim_{n \longrightarrow \infty} sup A_n^c$

      Demostración

      $$\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} inf A_n\right)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c = \lim_{n \longrightarrow \infty} sup A_n^c$$

   b) $\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} sup A_n\right)^c = \lim_{n \longrightarrow \infty} inf A_n^c$

      Demostración

      $$\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} sup A_n\right)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \lim_{n \longrightarrow \infty} inf A_n^c$$

   c) $P\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} inf A_n\right) = 1 - P\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} sup A_n^c\right)$

      Demostración

      $$P\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} inf A_n\right) = \left([P \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n]^c\right)^c = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n\right)^c$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n^c\right) = 1 - P\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} supA_n^c\right)$$

8. Encuentre las condiciones sobre los eventos A_1 y A_2 para que la siguiente sucesión sea convergente.

$$A_n = \begin{cases} A_1 & \text{si n es impar} \\ \\ A_2 & \text{si \ n es par} \end{cases}$$

Solución

Para probar la convergencia basta probar que sea acotada inferiormente y monótona creciente.

$\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} infA_n = \lim A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Como $A_1 \geqslant 1$ y $A_2 > 1$

Además

$A_n - A_1 < 0 \Rightarrow A_n < A_1$

$A_n - A_2 < 0 \Rightarrow A_n < A_2$

Ahora bien $B = \lim infA_n = \lim A_n = limA_1 = limA_2$

Entonces:

$$A_n = \begin{cases} B & \text{si n es impar} \\ \\ A_2 & \text{si \ n es par} \end{cases}$$