UNIVERSIDAD NACIONAL SAN CRISTOBAL DE HUAMANGA

FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

ESCUELA DE CIENCIAS FISICO Y MATEMATICAS

Cálculo de Probabilidades

Docente: Jackson M'coy Romero Plasencia

Alumno: Romeld Jheffry Vilca Torres

Ayacucho,Perú
2019

Práctica 03

1. Sean A,B y C eventos aleatorios en un espacio de probabilidad (Ω, A, P).Muestre que

   a) - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ y

      - $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

      Demostración del primero
      $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$, por aditiva finita
      $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$.......(i)
      $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$, también por aditividad finita
      $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c)$.......(ii)
      Haciendo (ii)-(i) tenemos
      $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

      Demostración del segundo
      $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup K) = P(A) + P(K) - P(A \cap K)$, por lo anterior como $K = B \cup C$
      Por tanto
      $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C))$
      tenemos que $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap C) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C))$
      $\Rightarrow P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

   b) Enuncie una generalización del item(a) para el caso de la unción de n eventos aleatorios

      Sean n eventos $A_1, A_2, ..., A_n$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{i<j<k<l} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + ... + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

c) Pruebe las siguientes desigualdades de Bonferron

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_i \cap A_j) \leqslant P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$

Sabemos que

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{1\leqslant i<j<k<l\leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + ... + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

Vemos que

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{1\leqslant i<j<k<l\leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + ... + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geqslant 0 ....(*)$$

y también tenemos que

$$-\sum_{1\leqslant i<j<k<l\leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + ... + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) ....(**)$$

Note que

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

Se sabe

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \geqslant 0$$

Se comprueba (**)

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(\cup(A_i\cap A_j\cap A_k)) = \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_i\cap A_j\cap A_k) -$$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k<l\leqslant n} P(A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l) + ... + (-1)^{n+1}P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_i\cap A_j\cap A_k) \geqslant -\sum_{1\leqslant i<j<k<l\leqslant n} P(A_i\cap A_j\cap A_k\cap$$

$$A_l) + ... + (-1)^{n+1}P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Entonces probamos (**)

ii) Si k es impar, k$\leqslant n$, entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n} P(A_i\cap$$

$$... \cap A_{i_k})$$

si k es par $k \leqslant n$, vale$\geqslant$ en esta ultima desigualdad

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n} P(A_i\cap$$

$$... \cap A_{i_k}) + (-1)^k \sum_{i\leqslant i_1<...<i_k<i_{k+1}} P(\cup(A_{i1}\cap ... \cap A_{ik}\cap A_{ik+1}))$$

Si k es par tenemos que la ultima parte de esta sumatoria es positivo y esta ocurre $\leqslant$ cuando retiramos esta ultima parte . Si k es impar tenemos negativo o desigualdades.

2. Sea(Ω, A, P) un espacio de probabilidad y suponga que todos los siguientes conjuntos pertenecen a A. Pruebe:

(a) Si los A_n son disjuntos y $P(B|A_n) = P(C|A_n)\forall_n$, entonces $P(B|\cup A_n) = P(C|\cup A_n)$

Probando

Si son disjuntos y $P(B|A_n) = P(C|A_n)\forall_n$

$\Rightarrow P(B|\cup A_n) = P(C|\cup A_n)$

$P(B|\cup A_n) = \frac{P(B\cap[\cup A_n])}{P(\cup A_n)} = \frac{P(B\cap A_i)+...+P(B\cap A_n)}{P(\cup A_n)}$

$= \frac{P(A_i)P(B|A_i)+...+P(A_n)P(B|A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{P(A_i)P(C|A_i)+...+P(A_i)P(C|A_i)}{P(\cup A_n)}$

$= \frac{P(C\cap A_i)+...+P(C\cap A_n)}{P(\cup A_n)} = \frac{C\cap[\cup A_n]}{P(\cup A_n)} = P(C|\cup A_n)$

(b) Si $A_1, A_2, ...$ son disjuntos y $\cup A_n = \Omega$,entonces
$P(B|C) = \sum_n P(A_n|C)P(B|A_n \cap C)$
Probando
$P(B|C) = \sum_n P(A_n|C)P(B|A_n \cap C)$
$P(B|C) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \sum_n \frac{P(B \cap C \cap A_n)}{P(C)}$,pues
$B \cap C = \Omega \cap (B \cap C) = [\cup A_n] \cap B \cap C \Rightarrow P(\cup A_n \cap B \cap C) = \sum_n P(A_n \cap B \cap C)$
Luego
$P(B|C) = \sum_n \frac{P(B \cap C \cap A_n)}{P(C)} \frac{P(C \cap A_n)}{P(C \cap A_n} = \sum_n \frac{P(C \cap A_n)}{P(C)} \frac{P(B \cap C \cap A_n)}{P(C \cap A_n)}$
$= \sum_n P(A_n|C)P(B|C \cap A_n)$

3. Durante el mes de noviembre la probabilidad de lluvia es de 0,3. El Fluminense gana un partido en un día con lluvia con probabilidad 0,4; en un día sin lluvia con probabilidad 0,6. Si ganó un partido en noviembre, ¿ cuál es la probabilidad que haya llovido ese día?
Solución:
C: lluvia en el mes de noviembre
$F|C$: Fluminense gana un partido en un dia con lluvia
$P(C) = 0,3; P(F|C) = 0,4$

$P(C|F) = \frac{P(C)P(F|C)}{P(C)P(F|C)+P(C^c)P(F|C^c)} = \frac{(0,3)(0,4)}{(0,3)(0,4)+(0,7)(0,6)} = 0,222$

4. Pedro quiere enviar una carta a Marina, La probabilidad de que Pedro escriba la carta es 0,8. La probabilidad de que el correo no la pierda es 0,9. La probabilidad de que el cartero la entregue es 0,9. Dado que Marina no recibió la carta, ¿cuál es la probabilidad de que Pedro no haya escrito?
$p : Pedro$
$C : correo$
$c : cartero$
$M : Marinarecibelacarta$
$P(p) = 0,8$

$P(C) = 0,9$
$P(c) = 0,9$
$P(M) = (0,8)(0,9)(0,9) = 0,648$
$P(p{\cap}M) = P(p{\cap}|p{\cap}C{\cap}c) = 0,648$ $P(p^c|M^c) = \frac{P(p^c \cap M^c)}{M^c} = \frac{1-P(p \bigcup M)}{1-P(M)}$
$= \frac{1-[P(p)+P(M)-P(p \cap M)]}{1-P(M)} = \frac{(1)-(0,8)-(0,648)+(0,648)}{1-0,648} = \frac{0,2}{0,352} = 0,568$

5. Sean $A{-}1, ..., A_n$ eventos aleatorios independientes, con $p_k = P(A_n), k = 1, ..., n$. Obtenga la probabilidad de ocurrencia de los siguientes eventos en términos de las probabilidades p_k.
(a) La ocurrencia de ninguno de los A_k
(b) La ocurrencia de por lo menos uno de los A_k
(c) La ocurrencia de exactamente uno de los A_k
(d) La ocurrencia de exactamente dos de los A_k
(e) La ocurrencia de todos los A_k
(f) La ocurrencia de, como máximo, $n-1$ de los A_k
Solución (a):
$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap ... \cap A_n^c) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(A_k^c\right)$$
$$= \prod_{k=1}^{n}(1 - P\left(A_k\right))$$
Solución (b):
$$1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - P\left(A_k\right))$$
Solución (d):
$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n}^{n} P_j P_i \prod_{k=1, k \neq j, k \neq i}^{n} (1 - P\left(A_k\right))$$
Solución (e):
$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)$$