Практическая работа №2

Решение систем линейных уравнений методом Крамера, матричным способом, методом Гаусса.

Цели работы:

- получить навыки решения систем n линейных уравнений с n переменными;
- закрепить теоретические и практические знания и навыки по данной теме.

1. Краткие теоретические сведения.

1. *Общий вид системы m* линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} (*)$$

2. *В матричной форме* система (*) имеет вид:

$A * X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} (*)$$

Здесь A – матрица системы; X – матрица – столбец переменных; B – матрица – столбец свободных элементов.

3. Если определитель матрицы системы n линейных уравнений с n переменными $\Delta = |A| \neq 0$ (т.е. матрица A - невырожденная), то единственное решение системы определяется:

a. *методом обратной матрицы* по формуле:

$$X = A^{-1} * B$$

b. *по формулам Крамера*:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \text{ (j = 1, … , n)},$$

где Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j – го столбца столбцом свободных элементов B.

c. *Методом Гаусса* можно решить любую систему уравнений вида (*). Для этого составляют расширенную матрицу коэффициентов (A|B), приписывая к матрице A столбец свободных элементов B, затем матрицу (A|B) с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду (так называемый «прямой ход»); далее по полученной матрице выписывают новую систему и решают её методом исключения переменных: начиная с последних (по номеру) переменных находят все остальные (так называемый «обратный ход»).

2. Пример выполнения.

Задача. Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение. Обозначим: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Тогда в матричной форме система имеет вид: $A * X = B$. Определитель матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, т. е. обратная матрица A^{-1} существует: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Теперь по формуле: $X = A^{-1} * B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Ответ: (3; 2; -1).

3. Порядок выполнения работы.

1 Изучить материал, изложенный в данном руководстве и соответствующий материал по лекционному курсу.
2 Получить у преподавателя вариант задания.
3 Выполнить решение своего варианта.
4 Оформить отчёт по практическому занятию и подготовить ответы на контрольные вопросы.
5 Защитить работу у преподавателя.

4. Контрольные вопросы.

1.Напишите общий вид системы m линейных уравнений с n переменными.
2.Как выглядит система линейных уравнений в матричной форме?
3.Какими методами можно определить решение системы линейных уравнений?
4.Какая матрица называется невырожденной?
5.Опишите метод Гаусса решения систем линейных уравнений.