

Практическое занятие №4

Применение метода половинного деления (метод дихотомии).

Цели работы:

- ❖ научиться применять метод половинного деления при решении уравнений;
- ❖ закрепить теоретические и практические знания и навыки по данной теме.

1. Сведения из теории

Пусть дано уравнение $f(x)=0$ (1), где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a)f(b)<0$ (2) Требуется найти корень ξ на $[a,b]$ с заданной точностью \mathcal{E} .

] $f(a)>0, f(b)<0$. Для нахождения корня $\xi \in [a,b]$ делят отрезок пополам $C = \frac{a+b}{2}$ и находят значение функции в точке C , т.е. $f(C)$. Если $f(C) = 0$, то C является корнем уравнения (1).

$$\text{If } f(C) = \begin{cases} < 0, \text{ то } a_1 = a, b_1 = C \\ > 0, \text{ то } a_1 = C, b_1 = b \end{cases},$$

т.е. выбираем одну из половин $[a, \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}, b]$, этот отрезок переобозначают в $[a_1, b_1]$.

Новый отрезок $[a_1, b_1]$ снова делят пополам и аналогичным способом проводят рассмотрение.

Процесс продолжается до тех пор, пока длина очередного отрезка не станет меньше заданного \mathcal{E} .

В качестве корня берут значение середины отрезка и оценка погрешностей такова:

$$|\xi - C_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

2. Пример выполнения

Задание. Найти корень ξ уравнения на отрезке $[a,b]$ с заданной погрешностью \mathcal{E} методом половинного деления.

$$(0,21 * N + 1,5) \cos x - x^2 = 0 \quad \text{на} \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{с} \quad \mathcal{E} = 0,001 = 10^{-3}$$

РЕШЕНИЕ:

(в данном примере $N = 8$)

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3,18 \cos \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1,63174929 > 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3,18 \cos \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = -2,4674 < 0$$

$$1) \quad C = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 3,18 \cos \frac{3\pi}{8} - \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 = -0,170979804 < 0$$

$$2) \quad C_1 = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8}}{2} = \frac{5\pi}{16}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{16}\right) = 3,18 \cos \frac{5\pi}{16} - \left(\frac{5\pi}{16}\right)^2 = 0,802884786 > 0$$

$$3) C_2 = \frac{\frac{5\pi}{16} + \frac{3\pi}{8}}{2} = \frac{11\pi}{32}$$

$$f\left(\frac{11\pi}{32}\right) = 3,18 \cos \frac{11\pi}{32} - \left(\frac{11\pi}{32}\right)^2 = 0,332809071 > 0$$

$$4) C_3 = \frac{\frac{11\pi}{32} + \frac{3\pi}{8}}{2} = \frac{23\pi}{64}$$

$$f\left(\frac{23\pi}{64}\right) = 3,18 \cos \frac{23\pi}{64} - \left(\frac{23\pi}{64}\right)^2 = 0,084961933 > 0$$

$$\text{Проверка условия: } \left| \frac{11\pi}{32} - \frac{23\pi}{64} \right| = |-0,049087385| > \mathcal{E}$$

$$5) C_4 = \frac{\frac{23\pi}{64} + \frac{3\pi}{8}}{2} = \frac{47\pi}{128}$$

$$f\left(\frac{47\pi}{128}\right) = 3,18 \cos \frac{47\pi}{128} - \left(\frac{47\pi}{128}\right)^2 = -0,042018419 < 0$$

$$6) C_5 = \frac{\frac{23\pi}{64} + \frac{47\pi}{128}}{2} = \frac{93\pi}{256}$$

$$f\left(\frac{93\pi}{256}\right) = 3,18 \cos \frac{93\pi}{256} - \left(\frac{93\pi}{256}\right)^2 = 0,021722068 > 0$$

$$7) C_6 = \frac{\frac{93\pi}{256} + \frac{47\pi}{128}}{2} = \frac{187\pi}{512}$$

$$f\left(\frac{187\pi}{512}\right) = 3,18 \cos \frac{187\pi}{512} - \left(\frac{187\pi}{512}\right)^2 = -0,010085932 < 0$$

$$8) C_7 = \frac{\frac{93\pi}{256} + \frac{187\pi}{512}}{2} = \frac{373\pi}{1024}$$

$$f\left(\frac{373\pi}{1024}\right) = 3,18 \cos \frac{373\pi}{1024} - \left(\frac{373\pi}{1024}\right)^2 = 0,0058336 > 0$$

$$\text{Проверка условия: } \left| \frac{187\pi}{512} - \frac{373\pi}{1024} \right| = |0,0030664| > \mathcal{E}$$

$$9) C_8 = \frac{\frac{373\pi}{1024} + \frac{187\pi}{512}}{2} = \frac{747\pi}{2048}$$

$$f\left(\frac{747\pi}{2048}\right) = 3,18 \cos \frac{747\pi}{2048} - \left(\frac{747\pi}{2048}\right)^2 = -0,0021222352 < 0$$

$$\text{Проверка условия: } \left| \frac{373\pi}{1024} - \frac{747\pi}{2048} \right| = |-0,002114| > \mathcal{E}$$

$$10) C_9 = \frac{\frac{373\pi}{1024} + \frac{747\pi}{2048}}{2} = \frac{1493\pi}{4096}$$

$$f\left(\frac{1493\pi}{4096}\right) = 3,18 \cos \frac{1493\pi}{4096} - \left(\frac{1493\pi}{4096}\right)^2 = 0,001856692 > 0$$

$$11) C_{10} = \frac{\frac{1493\pi}{4096} + \frac{747\pi}{2048}}{2} = \frac{2987\pi}{8192}$$

$$f\left(\frac{2987\pi}{8192}\right) = 3,18 \cos \frac{2987\pi}{8192} - \left(\frac{2987\pi}{8192}\right)^2 = 0,000132528 > 0$$

$$\text{Проверка условия: } \left| \frac{1493\pi}{4096} - \frac{2987\pi}{8192} \right| = |0,000383495| > \varepsilon$$

$$12) C_{11} = \frac{\frac{2987\pi}{8192} + \frac{747\pi}{2048}}{2} = \frac{5975\pi}{16384}$$

\Rightarrow приближённый корень уравнения:

$$\bar{\xi} = \frac{5975\pi}{16384} \approx 1,145692$$

Контрольные вопросы

1. Сформулировать основной принцип метода дихотомии.
2. Рассказать схему метода половинного деления.
3. Выполнить дополнительный пример.