Практическая работа №1

Выполнение действий с матрицами. Вычисление определителя матрицы.

Цели работы:

- получить навыки выполнения операций над матрицами и вычисления определителей квадратных матриц различных порядков;
- закрепить теоретические и практические знания и навыки по данной теме.

1.1 Краткие теоретические сведения.

1. *Сложение (вычитание) матриц* одинакового размера осуществляется поэлементно:

$$C = A \pm B, \text{ если } c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \text{ где } i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n$$

2. *Умножение матрицы на число* – каждый элемент матрицы умножается на это число:

$$B = \lambda A, \text{ если } b_{ij} = \lambda a_{ij};\ i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n$$

3. *Умножение матрицы A на матрицу B* определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матрицы $\underset{m\times k}{A} * \underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица C, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{is};\ i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n$$

4. Транспонирование матрицы – переход от матрицы A к матрице $A^{/}$, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка:

$$a^{/}_{ij} = a_{ji};\ i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n$$

Свойства операции транспонирования:

$(A^{/})^{/} = A$; $(\lambda A)^{/} = \lambda A^{/}$; $(A + B)^{/} = A^{/} + B^{/}$; $(AB)^{/} = B^{/} A^{/}$

5. *Возведение квадратной матрицы A в целую положительную степень m* (m > 1): $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m раз}$

6. Следом trA квадратной матрицы A называется сумма её диагональных элементов: $trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

При умножении матриц обратите внимание на следующее:

a. Произведение матриц некоммутативно, т.е. AB ≠ BA. Если AB существует, то BA – не обязательно. Даже если оба произведения существуют и представляют матрицы одного размера, то в общем случае AB ≠ BA.

b. В равенствах AE = A и EA = A, где A – матрица размера m×n, E - единичная матрица: в первом равенстве – n–го порядка, во втором равенстве – m–го порядка.

1.2 Пример выполнения.

Задача. Найти матрицу $C = A^{/} - 3B$, где $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Решение.

Найдём матрицу $A^{/}$, транспонированную к A, т.е. поменяем строки и столбцы местами:

$$A^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдём матрицу 3B, умножив все элементы матрицы B на 3. Произведём вычитание матриц $A^{/}$ и 3B (поэлементно):

$$C = A^{'} - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 15 & 18 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -13 & -17 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$$

2.1 Краткие теоретические сведения.

1. *Определитель* квадратной матрицы *2 – го порядка* вычисляется по формуле:

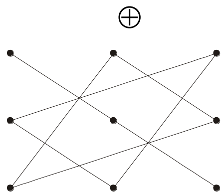
$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. *Определитель* квадратной матрицы 3 – го порядка может быть вычислен по правилу треугольников, или правилу Сарруса.

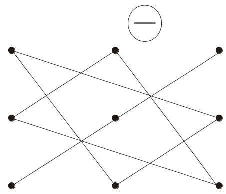
$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - \quad -$$

$$a_{32}a_{23}a_{11}$$

Где соответствующие произведения элементов берутся либо со знаком «+» (левая схема), либо со знаком «-» (правая схема):



$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$



3. *Определитель* квадратной матрицы *n - го порядка* определяется более сложным образом. Он может быть вычислен по теореме Лапласа.

4. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} матрицы *n – го порядка* называется её минор M_{ij}, т. е. определитель матрицы, полученной из матрицы *A* вычёркиванием *i – й* строки и *j – го* столбца, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

5. *Теорема Лапласа.* Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения:

$$A = \sum_{s=1}^{n} a_{ij} A_{is} = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} A_{sj}$$

6. *Определитель треугольной* и, в частности, *диагональной матрицы* равен произведению её диагональных элементов.

7. Некоторые свойства определителей квадратных матриц:

c. Определитель не изменяется при транспонировании матриц.

d. Определитель меняет знак, если поменять местами любые две строки (или столбца) матрицы.

e. Определитель равен нулю, если: все элементы любой строки (или столбца) равны нулю; элементы любых двух строк (или столбцов) пропорциональны либо (в частном случае) равны.

f. Определитель не изменится, если к элементам какой – либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на число, отличное от нуля.

2.2 Пример выполнения.

Задача. Вычислить определитель матрицы $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, используя его разложение по элементам: а) первой строки; б) второго столбца.

Решение.

а) Находим алгебраические дополнения элементов первой строки:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \; A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

Теперь по Теореме Лапласа:

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot (-5) + 0 \cdot 15 = -15$$

б) Находим алгебраические дополнения элементов второго столбца:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \; A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Теперь по теореме Лапласа:

$$|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} = 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -15$$

3. Порядок выполнения работы.

2.1 Изучить материал, изложенный в данном руководстве и соответствующий материал по лекционному курсу.

2.2 Получить у преподавателя вариант задания.

2.3 Выполнить решение своего варианта.

2.4 Оформить отчёт по практическому занятию и подготовить ответы на контрольные вопросы.

2.5 Защитить работу у преподавателя.

4. Контрольные вопросы.

1. Что такое матрица?
2. Опишите операции сложения и вычитание матриц.
3. Что такое порядок матрицы?
4. Что такое транспонирование матрицы?
5. Что такое след матрицы?
6. Какими свойствами обладает операция транспонирования матриц?
7. Опишите операцию умножения одной матрицы на другую.
8. В каком случае мы имеем право умножать две матрицы?
9. Как вычисляется определитель матрицы второго порядка?
10. Что такое алгебраическое дополнение?
11. Сформулируйте правило треугольников.
12. Сформулируйте теорему Лапласа.
13. Чему равен определитель диагональной матрицы?
14. Перечислите свойства определителя.