Практическая работа №3

Решение задач с применением определённого интеграла.

Цели работы:

- получить навыки решения задач с применением определённого интеграла;
- закрепить теоретические и практические знания и навыки по данной теме.

1. Краткие теоретические сведения.

1. Если функция *f(x)* неотрицательна на отрезке [a, b], то площадь *S* пол кривой *y = f(x)* на [a, b] (площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y = f(x)* и прямыми *x = a, x = b, y = 0*) (рис. 1) численно равна определённому интегралу от *f(x)* на данном отрезке:

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

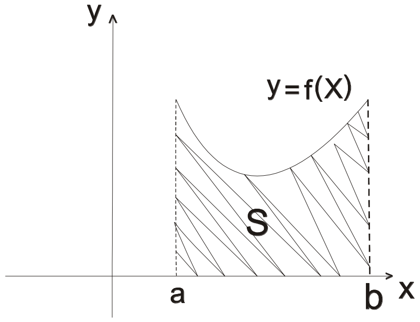

Рис. 1

2. Если $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке [a, b], то площадь *S* фигуры, заключённой между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$ на этом отрезке (рис. 2) определяется формулой

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$$

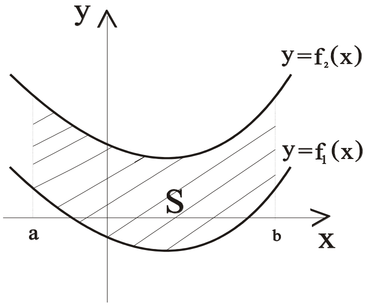

Рис. 2

3. Длина *s* дуги кривой *y = f(x)*, заключённой между точками с абсциссами *x = a*, *x = b*, определяется по формуле:

$$S=\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}dx$$

2. Примеры выполнения.

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x + 4$ и прямой $y = x + 6$. Сделать чертёж.

Решение.

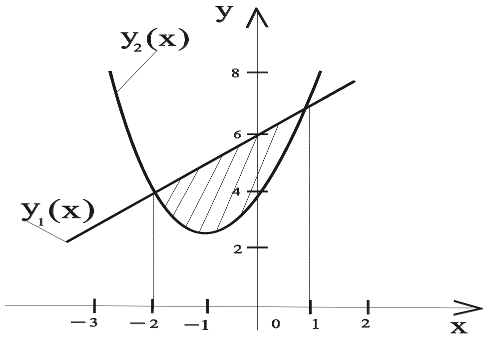

Рис. 2

Построим параболу $y = x^2 + 2x + 4$. Координаты вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ - точки (x_0, y_0) - находятся по формулам: $x_0 = \frac{-b}{2a}; y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

В нашем случае $x_0 = \frac{-2}{2} = -1, y_0 = y(-1) = 3$. Т. к.

a = 1 > 0, то ветви параболы направлены вверх (Рис. 2).

b. Прямую $y = x + 6$ построим по двум точкам: x = 0, y = 0 + 6 = 6 и x = -1, y = -1 + 6 = 5.

c. Найдём точки пересечения параболы и прямой, решив систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 4 \\ y = x + 6 \end{cases} \qquad \begin{gathered} x^2 + 2x + 4 - (x+6) = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \\ x_1 = -2, y_1 = 4 \\ x_2 = 1, y_2 = 7 \end{gathered}$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, вычисляется по формуле: S = $\int\limits_{x_1}^{x_2} (y_2(x) - y_1(x))dx$. Найдём площадь фигуры, ограниченной данной прямой и параболой:

$$S = \int\limits_{-2}^{1} \left[(x+6) - (x^2 + 2x + 4)\right]dx = \int\limits_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) =$$

= 4,5 кв. ед.

3. Контрольные вопросы.

1.Запишите формулу площади трапеции (различные расположения трапеции).
2.Запишите формулу длины дуги кривой.
3.Запишите формулу площади поверхности вращения.
4.Запишите формулу объёма тела вращения.