

Практическое занятие №5

Приближённое вычисление определённого интеграла.

Цели работы:

- ❖ получить навыки приближённого вычисления значения определённого интеграла с помощью формулы трапеций;
- ❖ закрепить теоретические и практические знания и навыки по данной теме.

1. Краткие теоретические сведения.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и этот отрезок разбит на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $x_i = x_{i-1} + h$, где $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда приближённое значение определённого интеграла от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ может быть найдено по **формуле трапеций**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right)$$

Погрешность Δ от применения формулы трапеций оценивается по формуле:

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2,$$

где M_2 – максимальное значение модуля второй производной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т. е.

$$M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Формула трапеций даёт точное значение интеграла, когда подынтегральная функция $f(x)$ – линейна, ибо тогда $f^{(2)}(x) = 0$.

2. Пример выполнения

Задание. Найти значение интеграла по формуле трапеций при $n = 10$. $\int_{0.8}^{1.6} \frac{\ln(x+8)}{x} dx$

Решение:

$$\int_{0.8}^{1.6} \frac{\ln(x+8)}{x} dx \quad h = \frac{1.6-0.8}{10} = 0.08$$

i	x_i	y_i
0	0.8	2.71844
1	0.88	2.4816
2	0.96	2.2841
3	1.04	2.11698
4	1.12	1.9736
5	1.2	1.8493
6	1.28	1.7405
7	1.36	1.6444
8	1.44	1.559
9	1.52	1.4825
10	1.6	1.4136

$$\begin{aligned} \int_{0.8}^{1.6} \frac{\ln(x+8)}{x} dx &= h \cdot \left[\frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + \frac{y_9}{2} \right] = 0.08 \cdot ((2.71844/2) + 2.4816 + \\ &+ 2.2841 + 2.11698 + 1.9736 + 1.8493 + 1.7405 + 1.6444 + 1.559 + 1.4825 + \\ &+ (1.4136/2)) = 1.53584 \end{aligned}$$

3. Контрольные вопросы.

1. Напишите формулу трапеций и поясните значение всех входящих переменных.
2. Как оценивается погрешность от формулы трапеций?