

## ===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925

**О СУЩЕСТВОВАНИИ ДВУХТОЧЕЧНО-КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ  
РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЁННОЙ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ  
С ГИСТЕРЕЗИСОМ**

© 2021 г. В. В. Евстафьева

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка, правая часть которой представляет собой сумму линейной с постоянной матрицей функции от решения, существенной нелинейности типа реле с гистерезисом и возмущающей непрерывной периодической функции. Матрица линейной функции имеет только вещественные простые ненулевые собственные числа, среди которых по крайней мере одно положительное. Изучается вопрос о существовании у таких систем непрерывных решений с двумя точками переключения в фазовом пространстве (двухточечно-колебательные решения), при этом возвращение решения в каждую из этих точек происходит за время, которое в целое число раз меньше периода возмущающей функции или равно ему. Установлено достаточное условие отсутствия таких решений и доказана теорема, дающая достаточные условия существования двухточечно-колебательного решения с временем возврата, равным периоду возмущающей функции. Приведён подтверждающий пример.

DOI: 10.31857/S0374064121020047

**Введение. Постановка задачи.** Системы с нелинейностями типа реле являются существенно нелинейными системами с разрывными правыми частями (относительно термина “существенная нелинейность” см. [1, с. 45]). Исследования таких систем, в частности систем с гистерезисом, представляют не только теоретический, но и прикладной интерес и проводятся, начиная с середины прошлого века. Из последних работ в данном направлении отметим работы [2–11].

В приложениях часто встречаются периодические внешние возмущения, которые в существенно нелинейных системах влияют на наличие у возмущённых систем периодических решений и их период. Известно [12], что в случае периодического внешнего возмущения в нелинейных системах могут существовать три типа периодических решений: во-первых, основные решения с периодом, равным периоду возмущения (гармонические колебания с основной частотой, совпадающей с частотой внешней силы); во-вторых, сопутствующие им решения с периодами, кратными периоду возмущения (субгармонические колебания с частотой, в целое число раз меньшей основной частоты); и, в-третьих, решения, период которых в целое число раз меньше периода возмущения (супергармонические колебания с частотой, кратной основной частоте).

Первые два типа решений (гармонические и субгармонические колебания) исследовались в работах [2, 3, 6–11]. В них в качестве возмущающей функции рассматривались функция синуса и укороченный ряд Фурье (сумма константы и двух функций синуса, периоды которых различны, но соизмеримы). В [2, 3] доказано существование периодических решений в случае, когда среди ненулевых вещественных собственных чисел матрицы системы по крайней мере одно является положительным. В [6] рассмотрена система с гурвицевой матрицей. В работе [7] исследован случай комплексных собственных чисел матрицы системы, а в [8, 9] – случай вещественных ненулевых кратных собственных чисел. Случай нулевого собственного числа матрицы системы изучен в работе [10]. В указанных работах исследовалось двухпозиционное реле. Трёхпозиционное реле, которое также часто используется на практике, рассматривалось в [11].

В данной работе в случае двухпозиционного реле рассматривается вопрос о существовании у возмущённой системы одного специального типа гармонических колебаний.

Исследуется  $n$ -мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{Y} = AY + BF(\sigma) + Kf(t), \quad \sigma = (C, Y). \quad (1)$$

Здесь  $n \times n$ -матрица  $A$  и векторы  $B = (b_1, \dots, b_n)^T$ ,  $K = (k_1, \dots, k_n)^T$  являются вещественными и не зависят от времени (здесь и ниже символом  $t$  обозначается операция транспонирования),  $Y$  – вектор состояний системы. Вектор  $C = (c_1, \dots, c_n)^T$  определяет обратную связь в системе, является вещественным и постоянным. Функция  $F(\sigma)$  представляет собой неидеальное двухпозиционное реле с двумя пороговыми числами  $\ell_1, \ell_2$  ( $\ell_1 \neq \ell_2$ ), двумя выходными числами  $m_1, m_2$  ( $m_1 \neq m_2$ ), где  $\ell_1, \ell_2, m_1, m_2$  – вещественные числа. Для определённости считаем, что  $\ell_1 < \ell_2$  и  $m_1 < m_2$ . Функция  $F(\sigma(t))$  определена при непрерывном входе  $\sigma(t)$  для  $t \geq 0$  в классе кусочно-непрерывных функций и задаётся в соответствии с [13] следующим образом: из неравенства  $\sigma(t) \leq \ell_1$  следует равенство  $F(\sigma) = m_1$ , из неравенства  $\sigma(t) \geq \ell_2$  следует равенство  $F(\sigma) = m_2$ , а из неравенств  $\ell_1 < \sigma(t) < \ell_2$  ( $t_1 < t \leq t_2$ ) – равенство  $F(\sigma(t_1)) = F(\sigma(t_2))$ . Другими словами,  $F(\sigma(t))$  принимает постоянное значение на замкнутом промежутке  $[t_1, t_2]$ , если либо  $F(\sigma(t_1)) = m_1$  и  $\sigma(t) < \ell_2$  при  $t \in [t_1, t_2]$ , либо  $F(\sigma(t_1)) = m_2$  и  $\sigma(t) > \ell_1$  при  $t \in [t_1, t_2]$ . Петля гистерезиса на плоскости  $(\sigma, F(\sigma(t)))$  обегается против хода часовой стрелки. Возмущающая функция  $f(t)$  принадлежит классу непрерывных  $T$ -периодических функций и имеет вид

$$f(t) = f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2), \quad (2)$$

где  $f_0, f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$  – вещественные постоянные, причём  $f_0, f_1$  и  $f_2$  ненулевые. Период возмущающей функции равен  $T = 2\pi/\omega$  ( $\omega > 0$ ).

В данной работе используем каноническое преобразование системы (1) и специальный подход к выбору её параметров, при которых существуют непрерывные решения  $Y(t)$ ,  $t \geq 0$ , с двумя точками переключения в фазовом пространстве (двухточечно-колебательные решения), и при этом возвращение изображающей точки решения в каждую из точек переключения происходит за время  $T/k$ , где  $k = \text{fix} \in \mathbb{N}$ . Под *точкой переключения* понимается такое состояние системы, при котором аргумент  $\sigma(t) = (C, Y(t))$  релейной функции  $F(\sigma(t))$  достигает одного из пороговых чисел, а значит, релейная функция при этом меняет значение выходного числа. Точки переключения принадлежат гиперплоскостям вида  $\sigma = \ell_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2$ ), которые далее в работе называем *гиперплоскостями переключения*. В точках переключения происходит “сшивание” по непрерывности траекторий изображающей точки решения  $Y(t)$  в фазовом пространстве в силу систем

$$\dot{Y} = AY + Bm_\mu + Kf(t), \quad \mu = 1, 2. \quad (3)$$

Для аналитического представления решения системы (1) используем форму Коши

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau-t)}(Bm_\mu + Kf(\tau))d\tau, \quad \mu = 1, 2, \quad (4)$$

где  $t_0$  – начальный момент времени.

Далее через  $L_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2$ ) обозначаем гиперплоскости переключения. Дадим

**Определение 1.** Если в некоторый момент времени  $t'$  изображающая точка принадлежит гиперплоскости  $L_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2$ ), то наименьший момент времени  $t'' > t'$ , в который изображающая точка принадлежит гиперплоскости  $L_{3-\kappa}$ , назовём *моментом первой встречи* изображающей точки с гиперплоскостью  $L_{3-\kappa}$ .

Сформулируем теперь основное в работе

**Определение 2.** Решение  $Y(\cdot)$  назовём *двухточечно-колебательным с временем возврата  $\Delta$  на гиперплоскости*, если существуют точки  $Y^\kappa \in L_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2$ ) такие, что в моменты первой встречи изображающей точки решения с гиперплоскостью  $L_\kappa$  изображающая точка попадает в точку  $Y^\kappa$ , а сами моменты первой встречи с каждой из гиперплоскостей периодичны с периодом  $\Delta$ .

В дальнейшем такое решение будем для краткости называть *двухточечно-колебательным с временем возврата  $\Delta$* .

Ставится задача о достаточных условиях, при выполнении которых система (1) имеет двухточечно-колебательное решение с временем возврата  $T/k$ . Согласно определению 2 искомое решение  $Y(\cdot)$  удовлетворяет условию  $T/k$ -периодической возвращаемости в точки переключения  $Y^1$  и  $Y^2$  (где  $(C, Y^\kappa) = \ell_\kappa$ ,  $\kappa = 1, 2$ ), т.е.  $Y^\kappa = Y(t_0 + mT/k)$ ,  $\kappa = 1, 2$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Несложно видеть, что для системы (1) двухточечно-колебательное решение с временем возврата  $T$  является  $T$ -периодическим.

Итак, предположим, что существует двухточечно-колебательное решение  $Y(\cdot)$  с временем  $T/k$  возврата на гиперплоскости переключения, а его поведение удовлетворяет следующим условиям. Изображающая точка решения  $Y(\cdot)$  системы (1) начинает своё движение в точке  $Y^1$  на гиперплоскости  $L_1$  в момент времени  $t_0 = 0$ , движется в силу системы (3) при  $m_\mu = m_1$  и в момент  $t = t_1$  ( $t_1 < T/k$ ) первой встречи с гиперплоскостью  $L_2$  попадает в точку  $Y^2$ . Затем она продолжает своё движение в силу системы (3) при  $m_\mu = m_2$  и в момент её первой встречи (который равен  $T/k$ ) с гиперплоскостью  $L_1$  возвращается в точку  $Y^1$ , и т.д.: изображающая точка решения движется между точками  $Y^1$  и  $Y^2$ , попадая попеременно в каждую из них через время  $T/k$ . При этом обе точки являются точками первой встречи изображающей точки с гиперплоскостями, и от точки  $Y^1$  к точке  $Y^2$  изображающая точка движется в силу системы (1) при  $m_\mu = m_1$ , а от точки  $Y^2$  к точке  $Y^1$  – в силу системы (1) при  $m_\mu = m_2$ . Таким образом, согласно предписанной последовательности движения изображающей точки решения системы (1) условие  $T/k$ -периодической возвращаемости на гиперплоскости переключения принимает вид  $Y(mT/k) = Y^1$  и  $Y(t_1 + mT/k) = Y^2$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ , при этом на полуинтервалах  $[mT/k, t_1 + mT/k]$  вектор-функция  $Y(t)$  представляет собой решение системы (3) при  $m_\mu = m_1$ , а на полуинтервалах  $[t_1 + mT/k, t_1 + (m+1)T/k]$  – системы (3) при  $m_\mu = m_2$ . Кроме того, как отмечалось,  $(C, Y^1) = \ell_1$  и  $(C, Y^2) = \ell_2$ . В соответствии с этими условиями строим вспомогательную систему уравнений.

Пространство параметров системы (1) изучаем на основе исследования этой вспомогательной системы – системы трансцендентных уравнений, которая содержит параметры исходной системы и параметры решения. Под *параметрами решения* понимаем моменты времени и точки переключения.

В работе получены условия разрешимости указанной системы трансцендентных уравнений относительно первого и второго моментов времени переключения реле (теорема 1). Доказана теорема существования  $T$ -периодического решения системы (1) с двумя точками переключения за период (теорема 2). Кроме того, получены условия неразрешимости системы трансцендентных уравнений (теорема 3) и при  $k \geq 1$  установлено достаточное условие, при выполнении которого исходная система не имеет двухточечно-колебательного с временем возврата  $T/k$  решения, изображающая точка которого движется в предписанной ей последовательности (следствие к теореме 3).

**1. Построение системы трансцендентных уравнений.** Предположим, что существует хотя бы одно двухточечно-колебательное с временем возврата  $T/k$  решение, изображающая точка которого движется, попадая на гиперплоскости в соответствии с заданной в постановке задачи последовательностью. Используя формулу (4), строим систему трансцендентных уравнений относительно точек переключения  $Y^1$  и  $Y^2$ , момента времени первого переключения  $t_1$  и времени возврата  $T/k$ . Имеем

$$\ell_1 = (C, Y^1), \quad \ell_2 = (C, Y^2), \quad (5)$$

где

$$Y^2 = e^{At_1} Y^1 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} (Bm_1 + Kf(\tau)) d\tau,$$

$$Y^1 = e^{A(T/k-t_1)} Y^2 + \int_{t_1}^{T/k} e^{A(T/k-\tau)} (Bm_2 + Kf(\tau)) d\tau.$$

В общем виде система (5) является достаточно сложной для аналитического исследования, поэтому для возможности её изучения примем некоторые дополнительные предположения.

Пусть выполняются условия обратимости преобразования исходной системы в канонический вид: 1)  $\det(B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B) \neq 0$ ; 2) матрица  $A$  имеет простые собственные числа  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Кроме того, для упрощения выкладок будем считать, что собственные числа являются ненулевыми и вещественными. При этих предположениях после неособого преобразования  $Y = SX$  получаем следующий канонический вид системы (1):

$$\dot{X} = A_0 X + B_0 F(\sigma) + K_0 f(t), \quad \sigma = (\Gamma, X), \quad (6)$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B_0 = S^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_0 = S^{-1}K = \begin{pmatrix} k_1^0 \\ \vdots \\ k_n^0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Компоненты  $\gamma_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) вектора  $\Gamma$  вычисляются по формуле

$$\gamma_i = \frac{-1}{D'(\lambda_i)} \sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_i), \quad (7)$$

где

$$D'(\lambda_i) = \left. \frac{dD(p)}{dp} \right|_{p=\lambda_i}, \quad D(p) = |A - pE|, \quad N_h(p) = \sum_{i=1}^n b_i D_{ih}(p).$$

Здесь  $\lambda_i$  – корни характеристического уравнения  $D(p) = 0$ ,  $E$  – единичная матрица,  $D_{ih}(p)$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ih}$  в определителе  $D(p)$ , стоящего на пересечении  $i$ -й строки и  $h$ -го столбца,  $b_i$  – компоненты вектора  $B$ ,  $c_h$  – компоненты вектора  $C$ ,  $p$  – некоторый вещественный параметр. Матрица  $S$  имеет вид

$$S = - \begin{pmatrix} \frac{N_1(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \dots & \frac{N_1(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{N_n(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \dots & \frac{N_n(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Далее полагаем  $\gamma_s \neq 0$  и  $\gamma_j = 0$ , где  $j \neq s$ .

После канонического преобразования системы (1) при выбранных ограничениях на преобразованный вектор обратной связи  $\Gamma$  система (5) разбивается на подсистему относительно моментов времени переключения и формулы для нахождения точек переключения. Итак, система трансцендентных уравнений относительно  $t_1$  и  $T/k$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \ell_2 &= \left( \ell_1 + \frac{\gamma_s m_1}{\lambda_s} \right) e^{\lambda_s t_1} - \frac{\gamma_s m_1}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int_0^{t_1} e^{\lambda_s(t_1-\tau)} f(\tau) d\tau, \\ \ell_1 &= \left( \ell_2 + \frac{\gamma_s m_2}{\lambda_s} \right) e^{\lambda_s(T/k-t_1)} - \frac{\gamma_s m_2}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int_{t_1}^{T/k} e^{\lambda_s(T/k-\tau)} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Точки переключения  $X^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)^T$ ,  $X^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)^T$  преобразованной системы (6) принадлежат гиперплоскостям переключения  $\sigma = \ell_\mu$  ( $\mu = 1, 2$ ) и определяются по следующим формулам:

$$x_s^1 = \ell_1 / \gamma_s, \quad x_s^2 = \ell_2 / \gamma_s, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
x_j^1 &= \frac{e^{\lambda_j T/k}}{1 - e^{\lambda_j T/k}} \left( m_1 \int_0^{t_1} e^{-\lambda_j \tau} d\tau + m_2 \int_{t_1}^{T/k} e^{-\lambda_j \tau} d\tau + k_j^0 \int_0^{T/k} e^{-\lambda_j \tau} f(\tau) d\tau \right), \\
x_j^2 &= \frac{e^{\lambda_j t_1}}{1 - e^{\lambda_j T/k}} \left( \int_{t_1}^{T/k} e^{-\lambda_j (T/k - \tau)} (m_2 + k_j^0 f(\tau)) d\tau + \int_0^{t_1} e^{-\lambda_j \tau} (m_1 + k_j^0 f(\tau)) d\tau \right), \\
j &= \overline{1, n}, \quad j \neq s.
\end{aligned} \tag{11}$$

Равенства (11) получаются в результате решения линейной алгебраической системы

$$\begin{aligned}
x_j^2 &= \left( x_j^1 + \frac{m_1}{\lambda_j} \right) e^{\lambda_j t_1} - \frac{m_1}{\lambda_j} + k_j^0 e^{\lambda_j t_1} \int_0^{t_1} e^{-\lambda_j \tau} f(\tau) d\tau, \\
x_j^1 &= \left( x_j^2 + \frac{m_2}{\lambda_j} \right) e^{\lambda_j (T/k - t_1)} - \frac{m_2}{\lambda_j} + k_j^0 e^{\lambda_j T/k} \int_{t_1}^{T/k} e^{-\lambda_j \tau} f(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

относительно неизвестных  $x_j^1 = x_j(T/k)$  и  $x_j^2 = x_j(t_1)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $j \neq s$ , поскольку определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_j t_1} & -1 \\ 1 & -e^{\lambda_j (T/k - t_1)} \end{vmatrix} = -e^{\lambda_j T/k} + 1$$

отличен от нуля.

**2. Основные результаты.** Положим

$$\delta_1 = \arctg \frac{\omega}{\lambda_s}, \quad \delta_2 = \arctg \frac{2\omega}{\lambda_s}, \quad H = \gamma_s k_s^0 \left( \frac{f_1 \sin(\varphi_1 + \delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} + \frac{f_2 \sin(\varphi_2 + \delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \right).$$

Для упрощения записи также обозначим

$$H_s(t) = \gamma_s k_s^0 \left( \frac{f_1 \sin(t + \varphi_1 + \delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} + \frac{f_2 \sin(2t + \varphi_2 + \delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

в частности,  $H_s(0) = H$ , и

$$L = - \left( \frac{\lambda_s}{\gamma_s} \ell_1 + k_s^0 f_0 \right) + \frac{\lambda_s (H_s(\omega T/k) - H e^{\lambda_s T/k})}{\gamma_s (e^{\lambda_s T/k} - 1)}.$$

Условия разрешимости системы (9) содержит

**Теорема 1.** Пусть  $\gamma_s \neq 0$ ,  $\lambda_s > 0$  и выполняются следующие условия:

1) при некотором  $k \in \mathbb{N}$  имеют место неравенства

$$m_2 - m_1 e^{\lambda_s T/k} + (e^{\lambda_s T/k} - 1)L > 0, \tag{12}$$

$$m_1 < L < m_2 \tag{13}$$

и равенство

$$t_1 = \frac{T}{k} + \frac{1}{\lambda_s} \ln \frac{m_2 - m_1}{(e^{\lambda_s T/k} - 1)L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s T/k}}; \tag{14}$$

2) определяемая равенством (14) величина  $t_1$  удовлетворяет первому уравнению системы (9).

Тогда система трансцендентных уравнений (9) имеет решение  $(t_1, T/k)$ , где  $t_1 \in (0, T/k)$ .

**Доказательство.** Система уравнений (9) при условии  $\lambda_s > 0$  принимает вид

$$\begin{aligned}\ell_2 &= (\ell_1 + \lambda_s^{-1} \gamma_s(m_1 + k_s^0 f_0) + H) e^{\lambda_s t_1} - \lambda_s^{-1} \gamma_s(m_1 + k_s^0 f_0) - H_s(\omega t_1), \\ \ell_1 &= (\ell_2 + \lambda_s^{-1} \gamma_s(m_2 + k_s^0 f_0) + H_s(\omega t_1)) e^{\lambda_s(T/k - t_1)} - \lambda_s^{-1} \gamma_s(m_2 + k_s^0 f_0) - H_s(\omega T/k).\end{aligned}\quad (15)$$

Сложив уравнения системы (15), получим равенство

$$(m_2 - m_1) e^{\lambda_s(T/k - t_1)} = (e^{\lambda_s T/k} - 1)L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s T/k}, \quad (16)$$

из которого однозначно находим величину  $t_1$ , определяемую равенством (14). Следовательно, если при заданном  $k$  существует решение системы (9), то оно единственно. В (14) стоящее под логарифмом выражение должно быть положительным. Учитывая предположение  $m_2 > m_1$ , получаем неравенство (12). Величина  $t_1$  должна принадлежать промежутку  $(0, T/k)$ . Согласно условию теоремы 1 имеем  $\lambda_s > 0$ . Поэтому следует потребовать выполнение неравенств

$$\begin{aligned}m_2 - m_1 &< (e^{\lambda_s T/k} - 1)L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s T/k}, \\ m_2 - m_1 &> (e^{\lambda_s T/k} - 1)e^{-\lambda_s T/k}L + m_2 e^{-\lambda_s T/k} - m_1,\end{aligned}$$

откуда получаем двойное неравенство (13).

Теперь докажем обратное: если выполнены предположения 1) и 2) теоремы 1, то система (9) имеет решение  $(t_1, T/k)$ , где  $t_1 \in (0, T/k)$ . Действительно,  $t_1$  удовлетворяет уравнению (16) и первому уравнению системы (9), а значит, и равносильной системе (15). Из неравенств (12), (13) условия 1) теоремы вытекает, что точка  $t_1$  принадлежит промежутку  $(0, T/k)$ . Теорема доказана.

Докажем теорему, дающую достаточные условия существования двухточечно-колебательных с временем возврата  $T$  решений системы (1) (в частности, такие решения системы (1), как отмечено выше, являются  $T$ -периодическими).

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия:

- 1) внешнее возмущение  $f(t)$  системы (1) является  $T$ -периодической функцией вида (2);
- 2) система (1) полностью управляема по отношению ко входу  $F(\sigma)$ , и матрица  $A$  имеет простые ненулевые вещественные собственные числа, среди которых по крайней мере одно положительное, пусть  $\lambda_s > 0$ ;
- 3) система (1) приведена неособым преобразованием  $Y = SX$  с матрицей  $S$  вида (8) к каноническому виду (6), в котором

$$\sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_s) \neq 0, \quad \sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_j) = 0, \quad j = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n, \quad (17)$$

где  $c_h$  – компоненты вектора обратной связи  $C$ ,  $N_h$  – определитель матрицы  $A$ , в которой  $h$ -й столбец заменён вектором  $B$ ,  $s$  – некоторый индекс, принимающий значение от единицы до  $n$ ;

- 4) система уравнений (9), параметры которой удовлетворяют условиям теоремы 1, имеет решение  $(t_1, T/k)$  при  $k = 1$  (т.е.  $t_1$  и  $T$  – первый и второй моменты времени переключения соответственно).

Тогда существует  $T$ -периодическое решение системы (1) с двумя точками  $Y^1, Y^2$  переключения за период на гиперплоскостях  $(C, Y^\kappa) = \ell_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2$ ), где  $Y^1 = SX^1$ ,  $Y^2 = SX^2$ , а координаты точек  $X^1, X^2$  выражаются по формулам (10) и (11) при  $k = 1$ .

**Доказательство.** Рассматривается двухточечно-колебательное с временем возврата  $T/k$  решение системы (1) в классе непрерывных функций. По построению для обеспечения непрерывности решения  $Y(t)$  (согласно методу припасовывания) точки переключения совпадают с точками “сшивания” траекторий, построенных в силу систем (3). Поскольку  $t_1$  – момент времени первого переключения изображающей точки решения системы, то имеет место условие  $0 < t_1 < T/k$ . Исходя из необходимых условий существования двухточечно-колебательного

решения с заданными параметрами и с учётом заданного в постановке задачи поведения изображающей точки искомого решения, строим систему (5) относительно точек переключения  $Y^1$  и  $Y^2$ , момента времени первого переключения  $t_1$  и времени возврата  $T/k$ . Для упрощения системы трансцендентных уравнений используем каноническое преобразование исходной системы в соответствии с условием 2) теоремы 2. Система (1) полностью управляема по отношению ко входу  $F(\sigma)$ , если

$$\det(B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B) \neq 0.$$

Далее предполагаем, что  $n - 1$  корней уравнения  $D(p) = 0$  совпадают с  $n - 1$  корнями уравнения  $\sum_{h=1}^n c_h N_h(p) = 0$ , т.е. имеет место условие (17). Тогда  $n - 1$  величин  $\gamma_i$ , определяемых по формуле (7), обращаются в нуль, при этом  $\gamma_s$  отлично от нуля, что отражено в условии 3) теоремы 2.

При указанном выборе величин  $\gamma_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) гиперплоскости переключения в фазовом пространстве канонической системы являются ортогональными оси  $x_s$ , а каноническая система  $n$ -го порядка распадается на системы более низкого порядка, которые могут быть последовательно проинтегрированы, а именно, функция  $\sigma(t) = (\Gamma, X(t)) = \gamma_s x_s$  определяется из уравнения первого порядка

$$\dot{x}_s = \lambda_s x_s + F(\sigma) + k_s^0 f(t),$$

а решения  $x_j$ , где  $j = \overline{1, n}$ ,  $j \neq s$ , определяются из уравнений

$$\dot{x}_j = \lambda_j x_j + F(\sigma) + k_j^0 f(t).$$

Дифференциальное уравнение

$$\dot{\sigma}(t) = \lambda_s \sigma(t) + \gamma_s (F(\sigma(t)) + k_s^0 f(t))$$

относительно функции  $\sigma(t)$  имеет общее решение

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{\lambda_s(t-t_0)} + \gamma_s e^{\lambda_s t} \left( m_\mu \int_{t_0}^t e^{-\lambda_s \tau} d\tau + k_s^0 \int_{t_0}^t e^{-\lambda_s \tau} f(\tau) d\tau \right), \quad \sigma_0 = \sigma(t_0).$$

Начальные и граничные условия удобно записать в развёрнутом виде, в котором отражено поведение изображающей точки решения и условие  $T/k$ -периодической возвращаемости на гиперплоскости переключения, а именно, начальное условие  $\ell_1 = \sigma(\ell_1, 0, m_1, 0)$  и граничные условия  $\ell_2 = \sigma(\ell_1, 0, m_1, t_1)$ ,  $\ell_1 = \sigma(\ell_2, t_1, m_2, T/k)$  (в двух последних равенствах правые части – обозначения для правых частей первого и второго уравнений системы (5)).

Система (5) после канонического преобразования упрощается и принимает вид (9)–(11) в новых переменных. Система трансцендентных уравнений в новых переменных разделяется на систему относительно  $t_1$ ,  $T/k$  и формулы для нахождения точек переключения.

Пусть выполнены условия теоремы 1 для заданного  $k \in \mathbb{N}$ , тогда система (9) имеет единственное решение  $(t_1, T/k)$ . Это означает, что на промежутке  $(0, T/k)$  нет других моментов времени попадания на гиперплоскость  $L_2$ , и изображающая точка решения движется между гиперплоскостями. Далее по формулам (10), (11) однозначно находятся соответствующие точки  $X^1$ ,  $X^2$ . Система трансцендентных уравнений, из которой получены эти формулы, составлена с учётом предписанной последовательности движения изображающей точки решения. Поэтому полученные точки являются точками переключения и принадлежат траектории решения канонической системы на отрезке  $[0, T/k]$  при первом обходе петли гистерезиса. Нетрудно заметить, что в силу  $T$ -периодичности функции  $f(t)$  при последующих обходах петли на отрезках  $[mT/k, (m+1)T/k]$ , где  $m \in \mathbb{N}$ , изображающая точка решения достигает каждый раз гиперплоскости  $(\Gamma, X) = \ell_\mu$  за один и тот же промежуток времени  $T/k$  и возвращается в одну и ту же точку  $X^\mu$  по одной и той же траектории, если  $k = 1$ . В этом случае  $X(t+T) = X(t)$  для любого  $t > 0$ , т.е. решение  $X(t)$  является  $T$ -периодическим

в положительном направлении. Значит, при выполнении условия 1) теоремы 2 двухточечно-колебательное с временем возврата  $T$  решение системы (6) является  $T$ -периодическим.

Системы (1) и (6) в силу неособого преобразования эквивалентны, поэтому полученные для канонической системы результаты верны и для исходной системы. Таким образом, существует одно  $T$ -периодическое решение системы (1) с двумя точками переключения  $Y^1$  и  $Y^2$  за период на гиперплоскостях вида  $(C, Y) = \ell_\mu$  ( $\mu = 1, 2$ ), где  $Y^1 = SX^1$ ,  $Y^2 = SX^2$ . Теорема доказана.

Отметим, что условия существования у системы (1) двухточечно-колебательных решений с временем возврата  $T/k$  при  $k > 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , требуют отдельного исследования и дополнительных ограничений на параметры.

Далее приведём условия неразрешимости системы (9).

Введём обозначение

$$\Phi_s(t) = [\ell_1 + \lambda_s^{-1} \gamma_s(m_1 + k_s^0 f_0) + H]e^{\lambda_s t} - [\ell_2 + \lambda_s^{-1} \gamma_s(m_1 + k_s^0 f_0)], \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $\gamma_s \neq 0$ ,  $\lambda_s > 0$  и при некотором  $k \in \mathbb{N}$  имеют место неравенства

$$\ell_1 + \lambda_s^{-1} \gamma_s(m_1 + k_s^0 f_0) + H < 0, \quad (18)$$

$$H_s(\omega t_{\min}) \geq \ell_1 - \ell_2 + H, \quad (19)$$

где  $t_{\min}$  – точка, доставляющая функции  $H_s(\omega t)$  на отрезке  $[0, T/k]$  минимальное значение.

Тогда система трансцендентных уравнений (9) не имеет решения  $(t_1, T/k)$ , где  $t_1 \in (0, T/k)$ .

**Доказательство.** Исследуем первое уравнение системы (15) относительно  $t_1 > 0$ . Запишем это уравнение в виде

$$\Phi_s(t_1) = H_s(\omega t_1). \quad (20)$$

Заметим, что в точке  $t_1 = 0$  левая часть уравнения (20) меньше его правой части (поскольку  $\Phi_s(0) = H + \ell_1 - \ell_2$ ,  $H_s(0) = H$  и  $\ell_2 > \ell_1$ ). Неравенство (18) означает, что коэффициент при экспоненте у функции  $\Phi_s(t)$  отрицателен. Значит, функция  $\Phi_s(t)$  убывает, а её наибольшее на отрезке  $[0, T/k]$  значение равно  $\Phi_s(0)$  – правой части неравенства (19). Поэтому при выполнении неравенства (19) уравнение (20) не может иметь положительного решения  $t_1$ . Это означает, что система (9) не имеет решения. Теорема доказана.

Из теоремы 3 очевидно вытекает следующее

**Следствие.** Пусть выполнены условия 1)–3) теоремы 2. Пусть, кроме того, параметры системы трансцендентных уравнений (9) удовлетворяют условию теоремы 3.

Тогда система (1) не имеет двухточечно-колебательного с временем возврата  $T/k$  решения, изображающая точка которого начинает своё движение на гиперплоскости  $L_1$  и движется согласно предписанной последовательности.

**3. Пример.** Пусть внешнее воздействие описывает функция

$$f(t) = 1 + 2 \sin(t + \pi/3) + 5 \sin(2t)$$

с периодом  $T = 2\pi$  (условие 1) теоремы 2).

Рассмотрим систему (1) третьего порядка с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -13.5 & -12.5 & -43 \\ 5.2 & 4.2 & 17.8 \\ 2.1 & 2.1 & 6.4 \end{pmatrix}$$

и векторами  $B = (1, 0, 0)^T$ ,  $K = (12.5, -4.5, -2.5)^T$ . Среди собственных чисел матрицы  $A$  есть положительное  $\lambda_1 = 0.1$  (положим  $\lambda_s = \lambda_1$ ),  $\lambda_2 = -1$  и  $\lambda_3 = -2$ . Векторы  $B$ ,  $AB$ ,  $A^2B$  являются линейно независимыми, так как

$$\begin{vmatrix} 1 & -13.5 & 26.95 \\ 0 & 5.2 & -10.98 \\ 0 & 2.1 & -3.99 \end{vmatrix} = 2.31 \neq 0.$$



Матрица  $S$  преобразования, приводящего матрицу системы к диагональной матрице  $A_0$ , имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\det S = -1 \neq 0$ . Тогда  $B_0 = (1, 1, 1)^T$ ,  $K_0 = (-2, 1, 0.5)^T$ . Условия 2) и 3) теоремы 2 выполнены.

Положим  $\Gamma = (-0.14, 0, 0)^T$ . Согласно условию 3) теоремы 2 из неоднородной системы линейных алгебраических уравнений, построенной в соответствии с (7), имеем следующие значения параметров вектора обратной связи:  $c_1 = -0.14$ ,  $c_2 = -0.14$  и  $c_3 = -0.56$ .

Обратимся к условию 4) теоремы 2. Сначала проверим условие 1) теоремы 1 и найдём решение системы трансцендентных уравнений (9). Имеем  $\delta_1 \approx 1.47$ ,  $\delta_2 \approx 1.52$  и  $H \approx 1.02$  (здесь и далее расчёты проведены с точностью  $10^{-2}$ ). Пусть  $\ell_1 = 0.75$ , тогда  $L \approx 3.27$ . Пусть  $k = 1$ ,  $m_1 = -1.11$  и  $m_2 = 5.30$ . Имеют место неравенства (12), (13), согласно которым  $8.89 > 0$  и  $-1.11 < 3.27 < 5.30$ . Находим  $t_1 \approx 1.60$  в соответствии с равенством (14). Условие 2) теоремы 1 имеет место, если  $\ell_2 \approx 4.00$ . Согласно теореме 1 система трансцендентных уравнений (9) имеет решение  $(t_1, T) \approx (1.60, 2\pi)$  при выбранных значениях параметров  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  и  $\gamma_s = \gamma_1$ .

Пусть  $k = 2$  при тех же значениях параметров. Условие 1) теоремы 1 выполняется. Величина  $t_1 \approx 0.33$  не удовлетворяет условию 2) теоремы 1. Однако при  $m_2 = 11.39$  величина  $t_1 \approx 1.60$  удовлетворяет этому условию, и, следовательно, система (9) имеет решение  $(t_1, T/2) \approx (1.60, \pi)$  при значениях параметров, которые отличаются только значением параметра  $m_2$ .

В соответствии с условием 4) теоремы 2 для решения  $(t_1, T)$  системы (9) рассчитываем точки переключения  $X^1$ ,  $X^2$  решения канонической системы по формулам (10), (11). Имеем

$$X^1 \approx (-5.36, 4.62, 2.52)^T, \quad X^2 \approx (-28.57, 4.46, 0.77)^T.$$

Далее находим точки переключения  $Y^1$ ,  $Y^2$  решения исходной системы. Получаем

$$Y^1 \approx (39.82, -13.66, -7.88)^T, \quad Y^2 \approx (-725.67, 265.65, 143.82)^T.$$

Таким образом, в пространстве параметров исходной системы определены значения, которым соответствует  $T$ -периодическое решение с двумя точками переключения за период.

На рисунке представлена траектория этого  $2\pi$ -периодического решения с двумя точками переключения в фазовом пространстве  $(x_1, x_2, x_3)$  канонической системы с параметрами  $\ell_1 = 0.75$ ,  $m_1 = -1.11$ ,  $m_2 = 5.30$ ,  $\ell_2 \approx 4.00$  и первым моментом времени переключения  $t_1 \approx 1.60$ . Для построения траектории решения в качестве начальной точки выбрана  $X^1$ . Отмечены точки переключения  $X^1$  и  $X^2$  на плоскостях переключения  $L_1$  и  $L_2$  соответственно; эти плоскости ортогональны оси  $x_1$ , поскольку первая компонента  $\gamma_1$  вектора обратной связи  $\Gamma$  ненулевая, причём  $-28.57 \leq x_1 \leq -5.36$ .

**Заключение.** Для ненулевых простых вещественных собственных чисел матрицы системы (1) доказана теорема существования  $T$ -периодического решения с двумя точками переключения за период. Численный пример подтверждает конструктивность условий теоремы и демонстрирует её применение. Найдены условия, при которых система (1) не имеет двухточечно-колебательного с временем возврата  $T/k$  решения, изображающая точка которого начинает своё движение

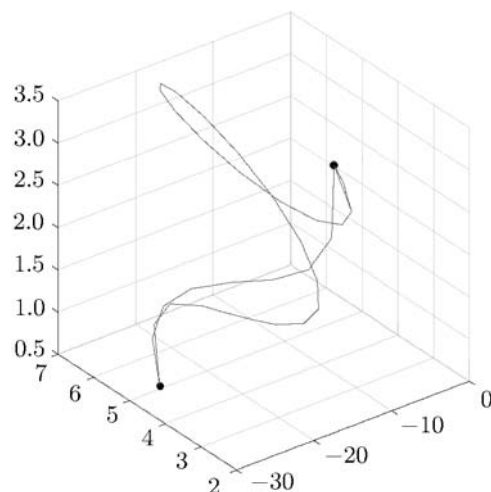


Рисунок. Периодическое решение с параметрами  $(t_1, 2\pi, X^1, X^2)$ .

на гиперплоскости  $L_1$  и движется по траектории согласно предписанной ей последовательности. Отметим, что предложенный в работе подход можно применить к более широкому, чем рассмотренный, классу систем – к системам, в которых нелинейность представляет собой монотонную функцию неидеального реле.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. М., 2004.
2. Евстафьева В.В. О необходимых условиях существования периодических решений в динамической системе с разрывной нелинейностью и внешним периодическим воздействием // Уфимск. мат. журн. 2011. Т. 3. № 2. С. 20–27.
3. Yevstafyeva V.V. Existence of a unique  $kT$ -periodic solution for one class of nonlinear systems // J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys. 2013. V. 6. № 1. P. 136–142.
4. Visintin A. Ten issues about hysteresis // Acta Appl. Math. 2014. V. 132. № 1. P. 635–647.
5. Fang L., Wang J., Zhang Q. Identification of extended Hammerstein systems with hysteresis-type input nonlinearities described by Preisach model // Nonlin. Dyn. 2015. V. 79. № 2. P. 1257–1273.
6. Евстафьева В.В. Об условиях существования двухточечно-колебательного периодического решения в неавтономной релейной системе с гурвицевой матрицей // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 42–56.
7. Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Int. J. Robust Nonlin. Contr. 2017. V. 27. № 2. P. 204–211.
8. Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. J. Differ. Equat. 2017. № 140. P. 1–10.
9. Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // J. Dyn. Contr. Syst. 2017. V. 23. № 4. P. 825–837.
10. Евстафьева В.В. Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.
11. Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // Int. J. Contr. 2020. V. 93. № 4. P. 763–770.
12. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л., 1976.
13. Покровский А.В. Существование и расчёт устойчивых режимов в релейных системах // Автоматика и телемеханика. 1986. № 4. С. 16–23.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 06.02.2019 г.  
После доработки 11.11.2019 г.  
Принята к публикации 13.10.2020 г.