

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ — ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

В. Э. Вишневский, А. М. Максина, И. В. Олемской  
Практикум на ЭВМ по численным методам  
Тема 7. Вычисление определённого интеграла  
Методические указания

Санкт-Петербург  
2016

# Постановка задачи

Рассматривается задача о вычислении однократного интеграла

$$J(F) = \int_a^b F(x)dx, \quad (1)$$

с использованием конечного числа значений интегрируемой функции. Интервал интегрирования  $[a, b]$  — любой отрезок числовой оси (конечный или бесконечный). Подынтегральная функция  $F(x)$  — любая интегрируемая в смысле Римана функция.

Такой интеграл является пределом суммы вида:

$$J(F) = \int_a^b F(x)dx = \lim_{r_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{r_n \rightarrow 0} S_n, \quad (2)$$

где  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $r_n = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i$ ,  $S_n = \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i$ .

Взяв достаточно малые частичные отрезки  $[x_{i-1}, x_i]$  и вычислив достаточно много значений  $F(\xi_i)$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , можно найти значение интеграла с любой заданной точностью. Каждая интегральная сумма определяется способом деления отрезка  $[a, b]$  на части  $\Delta x_i$  и выбором в каждой из них промежуточных точек  $\xi_i$ .

При построении правила вычисления (1), одинакового для всех функций  $F(x)$ , можно взять все  $\Delta x_i$  одинаковыми:  $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = h$ , а в качестве точек  $\xi_i$  выбрать середины частичных отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$ :  $\xi_i = a + (i - \frac{1}{2})h$ . Получим правило интегрирования, называемое составной формулой *средних прямоугольников* (или *средней точки*)

$$J(F) = \int_a^b F(x)dx \approx \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i = h \sum_{i=1}^n F\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right). \quad (3)$$

Оно позволяет вычислять интеграл (1) сколь угодно точно при всякой функции  $F(x)$ , но оно является медленно сходящимся даже для случая аналитической функции  $F(x)$  и требует для достижения хорошей точности вычисления интеграла большого числа значений  $F(x)$ . Правило (3) становится неприменимым, если интеграл является несобственным.

Правила численного интегрирования, рассчитанные на более узкие классы функций, могут иметь лучшую точность, если заранее принять во внимание свойства функций этих классов и использовать их при конструировании. Каждое правило основано на замене

интегрируемой функции на какую-либо элементарную функцию: алгебраический многочлен, рациональную функцию, тригонометрический многочлен и др.

Такая замена дает хорошую точность, если заменяемая функция  $F(x)$  обладает высоким порядком гладкости. При наличии у  $F(x)$  каких-нибудь особенностей, мы заинтересованы в выделении их. Выделение делается обычно при помощи разложения  $F(x)$  на два сомножителя  $F(x) = p(x) \cdot f(x)$ , причем  $p(x)$  имеет особенности того же типа, что и  $F(x)$ , и называется *весовой* функцией или просто *весом* (обозначение  $p(x)$  вводится по первой букве французского слова *poids* — вес). Важно, чтобы функция  $p(x)$  имела аналитически вычисляемые  $j$ -е *моменты*:

$$\mu_j = \int_a^b p(x)x^j dx, \quad j = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Второй сомножитель,  $f(x)$  — гладкая функция. Такое разложение приводит (1) к виду:

$$J(F) = \int_a^b p(x)f(x)dx. \quad (5)$$

Считая вес  $p(x)$  фиксированным, а  $f(x)$  — произвольной гладкой функцией, строим правила интегрирования вида

$$J(F) = \int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) = S_n, \quad x_j \in [a, b], \quad (6)$$

расчитанные на функции, имеющие одинаковые, заранее известные особенности. Здесь  $f(x) \in \Phi(a, b)$  — некоторый класс функций, определенных на  $[a, b]$ ;  $p(x)$  — весовая функция: некоторая фиксированная *неотрицательная* на  $[a, b]$  функция, для которой

$$\int_a^b p(x)dx > 0,$$

и  $\forall f(x) \in R$  существует

$$\int_a^b p(x)|f(x)|dx.$$

**Определение 1.** Формулу (6) называют *формулой механических квадратур* или просто *квадратурной формулой* (КФ).

$S_n = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$  называют *квадратурной суммой*,  $A_j$  — квадратурными коэффициентами, а  $x_j$  — узлами квадратурной формулы.

Условимся считать, что узлы квадратурной формулы (6) расположены по возрастанию:  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  и не повторяются.

**Определение 2.** Величина

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) = J(f) - S_n(f) \quad (7)$$

называется *методической погрешностью* или *остаточным членом* квадратурной формулы (6).

**Определение 3.** Говорят, что квадратурная формула (6) имеет *алгебраическую степень точности* (АСТ)  $m$ , если она верна для любых многочленов степени  $m$  и не верна для многочленов степени  $m + 1$ .

Это равносильно тому, что равенство

$$\int_a^b p(x)x^i dx = \sum_{j=1}^n A_j x_j^i, \quad (8)$$



выполняется для  $i = \overline{0, m}$  и не выполняется для  $i = m + 1$ . Или, что то же самое,  $R_n(x^i) = 0$ ,  $i = \overline{0, m}$  и  $R_n(x^{m+1}) \neq 0$ . Параметры квадратурной формулы  $n$ ,  $x_j$ ,  $A_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  чаще всего выбирают так, чтобы квадратурная формула имела максимально возможную алгебраическую степень точности.

Необходимо отметить, что в некоторых задачах не все параметры являются произвольными. Например, если  $F(x)$  задана таблично, то мы ограничены в выборе узлов  $x_j$ . Иногда для упрощения счета можно потребовать равенства  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A = \text{const}$ . В таком случае в нашем распоряжении только  $n + 1$  параметр:  $A$  и  $x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Величина погрешности  $R_n(f)$  зависит от свойств функции  $f$  и от выбора квадратурной формулы, т. е. от узлов и коэффициентов. При исследовании погрешности основными являются две задачи: оценка погрешности для функций с известными (распространенными) свойствами и выяснение условий сходимости — условий, при которых  $R_n(f) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Таким образом, для построения квадратурной формулы при фиксированном, но произвольном  $n$  необходимо указать способ выбора узлов  $x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , и коэффициентов  $A_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  квадратурной формулы и указать способ оценивания методической погрешности  $R_n(f)$  для данной функции  $f(\cdot)$  или некоторого множества функций  $\Phi(a, b)$ .

**Замечание 1.** При вычислении величин  $f(x_j)$  приходится почти всегда иметь дело с приближенными значениями функции  $\bar{f}(x_j)$ , верными на некоторое число значащих цифр:  $|f(x_j) - \bar{f}(x_j)| < \varepsilon$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Квадратурная сумма будет вычислена с погрешностью

$$|S_n - \bar{S}_n| < \varepsilon \sum_{j=1}^n |A_j|.$$

Если сумма  $\sum_{j=1}^n |A_j|$  велика, то это естественно вызывает большую погрешность в приближенном значении интеграла. Именно поэтому при построении квадратурных формул стремятся к тому, чтобы  $\sum_{j=1}^n |A_j|$  имела бы возможно меньшее значение. Если  $p(x) \geq 0$ ,  $x \in [a, b]$  и квадратурная формула верна для  $f \equiv 1$ , что равносильно равенству  $\int_a^b p(x)dx = \sum_{j=1}^n A_j$ , то  $\sum_{j=1}^n |A_j|$  будет иметь наименьшее значение, когда все  $A_j > 0$ . Именно это обстоятельство придает квадратурным формулам с положительными коэффициентами особое значение.

**Определение 4.** Последовательность квадратурных формул называется *квадратурным процессом*.

Эта последовательность определяется двумя треугольными матрицами: матрицей узлов и матрицей коэффициентов

$$X = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & & & \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & & & \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ A_1^{(n)} & A_2^{(n)} & \dots & A_n^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Квадратурная формула соответствующая  $n$ -й строке этих матриц, имеет вид:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} f(x_j^{(n)}) + R_n(f) = S_n(f) + R_n(f).$$

**Определение 5.** Будем говорить, что квадратурный процесс, определенный матрицами  $X$  и  $A$ , *сходится* для функции  $f$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} f(x_j^{(n)}) = \int_a^b p(x) f(x) dx.$$

## Интерполяционные квадратурные формулы

Рассмотрим квадратурную формулу с  $n$  узлами

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n A_j f(x_j). \quad (9)$$

Если узлы заданы, то наилучшей точности можно добиться, заменяя функцию  $f(x)$  на её интерполяционный полином и вычисляя получаемый интеграл аналитически. Коэффициенты  $A_j$  находятся в этом случае однозначно.

**Определение 6.** Квадратурная формула (9) называется *интерполяционной* (ИКФ), если её коэффициенты удовлетворяют равенству

$$A_j = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_j) \omega'(x_j)} dx, \quad (10)$$

где  $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$  — *узловой многочлен*.

Методическая погрешность интерполяционного правила (9), (10), если  $f(x)$  имеет непрерывную производную порядка  $n$  на  $(a, b)$ , имеет вид

$$R_n(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b p(x) \omega(x) f^{(n)}(\xi) dx, \quad \xi \in [a, b].$$

Для функции  $f(x)$ , имеющей непрерывную и ограниченную по модулю производную порядка  $n$  ( $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$ ,  $|f^{(n)}(x)| \leq M_n$ ) верна оценка

$$R_n(f) \leq \frac{M_n}{n!} \int_a^b |p(x) \omega(x)| dx. \quad (11)$$

**Замечание 2.** Всякое квадратурное правило (9), алгебраическая степень точности которого не меньше чем  $n - 1$ , является интерполяционным. Верно и противоположное: алгебраическая степень точности ИКФ при всяком расположении узлов  $x_j$  будет не меньше  $n - 1$ .

Это является следствием того, что если  $f(x)$  является полиномом степени меньшей  $n$ , то она совпадает со своим интерполяционным полином, построенным по  $n$  узлам.

Коэффициенты ИКФ  $A_j$  проще найти из требования точного равенства квадратурной суммы  $S_n$  и интеграла для всех одночленов степеней от 0 до  $n - 1$ . Получаем следующий

### Алгоритм построения ИКФ

1. Задать узлы квадратурной формулы (9)  $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ .
2. Вычислить *моменты* весовой функции  $p(x)$  на  $[a, b]$

$$\mu_j = \int_a^b p(x)x^j dx, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (12)$$

3. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n A_j x_j^s = \mu_s, \quad s = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (13)$$

### Пример построения ИКФ

Построить двухточечную ( $n = 2$ ) интерполяционную квадратурную формулу для вычисления интеграла

$$\int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{x-a}} dx \approx \sum_{j=1}^n A_j f(x_j), \quad b > a.$$

В качестве весовой функции при условии достаточно гладкой функции  $f(x)$  возьмем  $p(x) = 1/\sqrt{x-a}$ . Сделаем замену переменной  $t = x - a$  и сведём исходную задачу к построению ИКФ для вычисления интеграла

$$\int_0^{b-a} \frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{t}} dt \approx \sum_{j=1}^n A_j \hat{f}(t_j).$$

Далее вычисляем моменты весовой функции

$$\mu_0 = \int_0^{b-a} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2(b-a)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu_1 = \int_0^{b-a} \frac{t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{3}(b-a)^{\frac{3}{2}}.$$

При заданных узлах  $(t_1, t_2 \in [0, b-a])$  двухточечная ИКФ имеет АСТ не меньше 1. А это значит, что должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} R_2(1) &= \int_0^{b-a} \frac{1}{\sqrt{t}} dt - (A_1 + A_2) = 0 \quad \implies A_1 + A_2 = \mu_0, \\ R_2(t) &= \int_0^{b-a} \frac{t}{\sqrt{t}} dt - (A_1 t_1 + A_2 t_2) = 0 \quad \implies A_1 t_1 + A_2 t_2 = \mu_1. \end{aligned}$$

Решая эту линейную систему относительно  $A_1$  и  $A_2$ , получим значения коэффициентов КФ

$$A_1 = \frac{\mu_0 t_2 - \mu_1}{t_2 - t_1}, \quad A_2 = \frac{\mu_1 - \mu_0 t_1}{t_2 - t_1}.$$

Проверим, является ли единица алгебраической степенью точности для построенной квадратурной формулы

$$\int_0^{b-a} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{\mu_0 t_2 - \mu_1}{t_2 - t_1} f(t_1) + \frac{\mu_1 - \mu_0 t_1}{t_2 - t_1} f(t_2) + R_2(f). \quad (14)$$

Для этого вычислим

$$R_2(t^2) = \int_0^{b-a} \frac{t^2}{\sqrt{t}} dt - \frac{\mu_0 t_2 - \mu_1}{t_2 - t_1} t_1^2 + \frac{\mu_1 - \mu_0 t_1}{t_2 - t_1} t_2^2 = \mu_2 - \mu_1(t_1 + t_2) + \mu_0 t_1 t_2.$$

Если  $R_2(t^2) \neq 0$ , для выбранных  $t_1$  и  $t_2$ , то это и доказывает тот факт, что алгебраическая степень точности квадратурной формулы (14) не больше 1.

**Замечание 3.** Особое место в теории интерполяционных квадратурных формул занимают интерполяционные квадратурные формулы с равноотстоящими узлами — квадратурные формулы типа Ньютона — Котса<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> *Исаак Ньютон* (англ. *Sir Isaac Newton*) (1643–1727), английский физик и



# Квадратурные формулы наивысшей АСТ

Поставим своей целью построить такие квадратурные формулы с  $n$  узлами, чтобы достичь наивысшей возможной алгебраической степени точности.

Поскольку АСТ  $n - 1$  требует, чтобы формула была интерполяционной, то коэффициенты должны быть найдены по формуле (10). Таким образом, повысить АСТ сверх  $n - 1$  мы можем только особым образом выбирая узлы  $x_j$ .

**Определение 7.** Интерполяционная квадратурная формула (9) называется *квадратурной формулой наивысшей алгебраической степени точности* (КФНАСТ) или КФ типа Гаусса<sup>2</sup>, если её узлы выбраны таким образом, что её АСТ равна  $2n - 1$ . Т. е.

$$\mu_s = \int_a^b p(x)x^s dx = \sum_{j=1}^n A_j x_j^s, \quad s = 0, 1, \dots, 2n - 1. \quad (15)$$

**Теорема.** Для того, чтобы квадратурная формула (9) была точной для алгебраических многочленов степени  $2n - 1$ , необходимо и достаточно выполнения условий:

- формула (9) должна быть интерполяционной;
- узлы  $x_j$  формулы (9) должны быть такими, чтобы узловой многочлен  $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  был ортогонален с весом  $p(x)$  ко всякому многочлену  $Q(x)$  степени меньше  $n$ , т. е.

$$\int_a^b p(x)\omega(x)Q(x)dx = 0, \quad \forall Q(x) : \deg Q(x) \leq n - 1. \quad (16)$$

---

математик, создавший теоретические основы механики и астрономии, открывший закон всемирного тяготения, разработавший (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисления, изобретатель зеркального телескопа и автор важнейших экспериментальных работ по оптике.

*Роджер Котс* (также *Котес*) (англ. *Roger Cotes*) (1682–1716), английский математик, сотрудничавший с И. Ньютоном. Помимо квадратурных формул Ньютона—Котса, он также известен тем, что первым вывел формулу показательной записи комплексного числа, называемую сейчас формулой Эйлера.

<sup>2</sup>*Иоганн Карл Фридрих Гаусс* (нем. *Johann Carl Friedrich Gauß*) (1777–1855), немецкий математик, механик, физик, внёсший фундаментальный вклад также в астрономию и геодезию.

Следует обратить внимание на следующие особенности:

- все корни многочлена  $\omega(x)$  лежат внутри отрезка  $[a, b]$  и различны между собой;
- все коэффициенты квадратурной формулы  $A_j > 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;
- квадратурная формула типа Гаусса не может быть верной для всех многочленов степени  $2n$ ;
- если  $f(x) \in C^{(2n)}(a, b)$ , то существует точка  $\xi \in [a, b]$  такая, что для методической погрешности квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности верно равенство

$$R_n(f) = \frac{1}{2n!} \int_a^b p(x) \omega^2(x) f^{(2n)}(\xi) dx.$$

Для функции  $f(x)$ , у которой  $2n$ -я производная непрерывна ( $f(x) \in C^{(2n)}(a, b)$ ) и ограничена по модулю ( $|f^{(2n)}(x)| \leq M_{2n}$ ), верна оценка

$$R_n(f) \leq \frac{M_{2n}}{(2n)!} \int_a^b |p(x) \omega^2(x)| dx. \quad (17)$$

## Алгоритм построения КФ типа Гаусса

1. Вычислить *моменты* весовой функции  $p(x)$  на  $[a, b]$

$$\mu_j = \int_a^b p(x) x^j dx, \quad j = 0, 1, \dots, 2n-1. \quad (18)$$

2. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j \mu_{j+s} = -\mu_{n+s}, \quad s = 0, 1, \dots, n-1. \quad (19)$$

3. Найти узлы  $x_j, j = \overline{1, n}$ , как корни узлового многочлена

$$\omega(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0. \quad (20)$$

4. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n A_j x_j^s = \mu_s, \quad s = \overline{0, n-1}. \quad (21)$$

## Пример построения КФ типа Гаусса

Построить двухточечную ( $n = 2$ ) КФНАСТ для вычисления интеграла

$$\int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{x-a}} dx \approx \sum_{j=1}^n A_j f(x_j), \quad b > a.$$

Аналогично примеру с ИКФ делаем замену переменной  $t = x - a$ :

$$\int_0^{b-a} \frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{t}} dt \approx \sum_{j=1}^n A_j \hat{f}(t_j).$$

Вычисляем нужные нам моменты весовой функции  $p(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ :  
 $\mu_0 = 2(b-a)^{\frac{1}{2}}, \mu_1 = \frac{2}{3}(b-a)^{\frac{3}{2}}, \mu_2 = \frac{2}{5}(b-a)^{\frac{5}{2}}, \mu_3 = \frac{2}{7}(b-a)^{\frac{7}{2}}.$

Формируем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_0\mu_0 + a_1\mu_1 = -\mu_2, \\ a_0\mu_1 + a_1\mu_2 = -\mu_3 \end{cases}$$

для определения коэффициентов  $a_1, a_0$  узлового многочлена  $\omega(t)$ .  
Находим её решение

$$a_1 = \frac{\mu_0\mu_3 - \mu_1\mu_2}{\mu_1^2 - \mu_0\mu_2}, \quad a_0 = \frac{\mu_2^2 - \mu_1\mu_3}{\mu_1^2 - \mu_0\mu_2}.$$

Далее, разрешая уравнение  $\omega(t) = 0$ , находим корни  $t_0$  и  $t_1$  узлового многочлена, являющиеся узлами квадратурной формулы. Коэффициенты же квадратурной формулы являются решением системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = \mu_0, \\ A_1 t_1 + A_2 t_2 = \mu_1. \end{cases}$$

## Составные квадратурные формулы

Основная идея метода заключается в том, что для повышения точности интегрирования отрезок  $[a, b]$  делят на несколько частей, применяют избранную квадратурную формулу к каждой отдельной части и результаты складывают. Для большинства квадратурных формул методическая погрешность  $R_n(f)$  зависит от величины отрезка интегрирования и может быть представлена в виде:

$$R_n(f) = (b - a)^m K(a, b), \quad (22)$$

где  $K(a, b)$  есть медленно меняющаяся функция от  $a, b$  и  $s$ . Эта зависимость показывает, что если уменьшить отрезок интегрирования в  $k$  раз, то  $R_n(f)$  уменьшится в  $k^m$  раз.

Для вычисления интеграла по отрезку  $[a, b]$  разделим его на  $k$  равных частей и вычислим при помощи выбранной квадратурной формулы интегралы по всем частичным отрезкам. На каждом частичном отрезке методическая погрешность будет в  $k^m$  раз меньше, чем при применении квадратурной формулы непосредственно ко всему интервалу  $[a, b]$ . При сложении всех таких интегралов получится результат, погрешность которого будет в  $k^{m-1}$  раз меньше, чем погрешность (22), когда квадратурная формула применяется для вычисления интеграла по всему отрезку  $[a, b]$ .

Разобьем исходный интервал интегрирования на частичные отрезки

$$[a, b] : a = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_k = b.$$

В самом общем случае  $h_i = z_{i+1} - z_i$  предполагаются различными.

Теперь применим на каждом частичном отрезке  $[z_i, z_{i+1}]$  какое-нибудь квадратурное правило (в общем случае свое) для вычисления интеграла

$$J^{(i)}(f) = \int_{z_i}^{z_{i+1}} p(x)f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}f(x_{ij}) = S_{n_i}^{(i)}(f), \quad (23)$$

$$R_{n_i}^{(i)}(f) = J^{(i)}(f) - S_{n_i}^{(i)}(f), \quad i = \overline{0, k-1}.$$

Просуммируем по  $i$  левые и правые части (23):

$$\begin{aligned} J(f) &= \int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^{k-1} J^{(i)}(f) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} p(x)f(x)dx \approx \\ &\approx \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}f(x_{ij}) = \sum_{i=0}^{k-1} S_{n_i}^{(i)}(f) = S_N(f), \quad N = \sum_{i=0}^{k-1} n_i, \end{aligned} \quad (24)$$

$$R_N(f) = J(f) - S_N(f) = \sum_{i=0}^{k-1} R_{n_i}(f).$$

**Определение 8.** Полученное правило (24) вычисления интеграла называется *составной квадратурной формулой* (СКФ).

В качестве квадратурных формул (23) могут быть использованы квадратурные формулы всех рассмотренных типов (интерполяционные, типа Ньютона—Котса, типа Гаусса и др.) То же самое можно сказать и о числе узлов квадратурной формулы, используемой на каждом из частичных отрезков. Оно может зависеть от номера отрезка.

В смешанной составной квадратурной формуле используется несколько типов малых формул (с одинаковым или разным числом узлов), в однородном — только одинаковые квадратурные формулы.

## Пример построения СКФ Ньютона — Котса

Разобьем интервал интегрирования  $[a, b]$  на  $k$  равных частичных отрезков длиной  $h = \frac{b-a}{k}$ :  $[z_{i-1}, z_i]$ ,  $i = \overline{1, k}$ , где  $z_i = a + ih$ ,  $i = \overline{0, k}$ . Будем применять одно и то же квадратурное правило на каждом

частичном отрезке. Построим малую интерполяционную трёхточечную квадратурную формулу с равноотстоящими узлами

$$J^{(i)}(f) = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} dx \approx A_{i1}f(z_{i-1}) + A_{i2}f\left(\frac{z_{i-1}+z_i}{2}\right) + A_{i3}f(z_i).$$

Обозначим центральную точку отрезка  $[z_{i-1}, z_i]$  через  $z_{i-\frac{1}{2}} = \frac{z_{i-1}+z_i}{2}$ .

Теперь на каждом частичном отрезке считаем моменты весовой функции

$$\mu_{is} = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{x^s}{(x-a)^\alpha} dx, \quad \alpha < 1, \quad s = 0, 1, 2.$$

$$\mu_{i0} = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx = \frac{(z_i-a)^{1-\alpha} - (z_{i-1}-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

$$\mu_{i1} = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{x}{(x-a)^\alpha} dx = \frac{(z_i-a)^{2-\alpha} - (z_{i-1}-a)^{2-\alpha}}{2-\alpha} + a\mu_{i0},$$

$$\mu_{i2} = \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{x^2}{(x-a)^\alpha} dx = \frac{(z_i-a)^{3-\alpha} - (z_{i-1}-a)^{3-\alpha}}{3-\alpha} + 2a\mu_{i1} - a^2\mu_{i0}$$

и определяем коэффициенты квадратурной формулы

$$\begin{aligned} A_{i1} &= \frac{\mu_{i2} - \mu_{i1}(z_{i-\frac{1}{2}} + z_i) + \mu_{i0}z_{i-\frac{1}{2}}z_i}{(z_{i-\frac{1}{2}} - z_{i-1})(z_i - z_{i-1})}, \\ A_{i2} &= -\frac{\mu_{i2} - \mu_{i1}(z_{i-1} + z_i) + \mu_{i0}z_{i-1}z_i}{(z_{i-\frac{1}{2}} - z_{i-1})(z_i - z_{i-\frac{1}{2}})}, \\ A_{i3} &= \frac{\mu_{i2} - \mu_{i1}(z_{i-\frac{1}{2}} + z_{i-1}) + \mu_{i0}z_{i-\frac{1}{2}}z_{i-1}}{(z_i - z_{i-\frac{1}{2}})(z_i - z_{i-1})}. \end{aligned}$$

Просуммировав по всем частичным отрезкам  $[z_0, z_1], [z_1, z_2]$  и т. д.,

выпишем составную квадратурную формулу

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} dx &\approx A_{11}f(z_0) + A_{12}f(z_{\frac{1}{2}}) + A_{13}f(z_1) + \\
 &+ A_{21}f(z_1) + A_{22}f(z_{\frac{3}{2}}) + A_{23}f(z_2) + \dots + \\
 &+ A_{k,1}f(z_{k-1}) + A_{k,2}f(z_{k-\frac{1}{2}}) + A_{k,3}f(z_k) = \\
 &= A_{11}f(z_0) + A_{k,3}f(z_k) + \sum_{i=1}^k A_{i2}f(z_{i-\frac{1}{2}}) + \sum_{i=1}^{k-1} (A_{i,3} + A_{i+1,1})f(z_i).
 \end{aligned} \tag{25}$$

## Практические способы оценки погрешности составных квадратурных формул

Для представления погрешности составной квадратурной формулы (24) (в частности (25)) для широкого класса функций  $f(\cdot)$  *при достаточно малой величине шага  $h$*  (в случае неравномерного разбиения — максимальной величине шага) можно написать:

$$R_N(f) = C_m h^m + O(h^{m+1}), \quad ? \tag{26}$$

где  $m$  — натуральное число, а  $C_m = C_m(f)$  — некоторая константа, зависящая лишь от  $f(\cdot)$  и типа формулы, но не зависящая от  $h$ . Под  $O(h^{m+1})$  понимаются члены сходящиеся к нулю быстрее, чем  $h^m$ .

Формула (26) дает асимптотическое представление (разложение) погрешности формулы (24) по параметру  $h$  — шагу равномерного разбиения интервала интегрирования. Она справедлива, в частности, для однородной СКФ, в которой малые квадратурные формулы (23) имеют АСТ  $m-1$ , а функция  $f(\cdot)$  — непрерывную (интегрируемую) на  $[a, b]$  производную  $f^{(m)}(\cdot)$ .

**Замечание 3.** Для смешанных СКФ, особенно с малыми формулами разной АСТ, число  $m$  зависит от соотношения и расположения малых формул по частичным отрезкам. В частности,  $m$  может быть не целым.

## Правило Рунге<sup>3</sup>

→ *как оптимизировать*

В этом подразделе и далее будем обозначать квадратурную сумму и погрешность однородной составной квадратурной формулы с постоянным шагом  $h$  как  $S_h$  и  $R_h$  соответственно, т. е. нижний индекс будет обозначать длину шага, а не количество вычислений  $f(x_i)$ , как это было раньше. Также для упрощения записи формул опустим  $(f)$  в этих обозначениях.

Практическая оценка константы  $C_m$  проводится следующим образом. Фиксируем два значения шага разбиения  $h_1 = h$  и  $h_2 = h/L$ ,  $L > 1$ , и проводим расчеты по исследуемой квадратурной формуле на двух равномерных сетках с шагом  $h_1$  и  $h_2$ . Предполагаем, что для ее методической погрешности верно асимптотическое разложение (26), т. е.

$$R_{h_1} = J(f) - S_{h_1} = C_m h_1^m + O(h_1^{m+1}) = C_m h^m + O(h^{m+1}) \quad (27)$$

и

$$\begin{aligned} R_{h_2} &= J(f) - S_{h_2} = C_m h_2^m + O(h_2^{m+1}) = \\ &= C_m \left(\frac{h}{L}\right)^m + O\left(\left(\frac{h}{L}\right)^{m+1}\right) = \frac{C_m}{L^m} h^m + O(h^{m+1}). \end{aligned} \quad (28)$$

Исключая из (27), (28) неизвестное значение интеграла  $J(f)$ , найдем

$$S_{h_2} - S_{h_1} = C_m h^m \left(1 - \frac{1}{L^m}\right) + O(h^{m+1}), \quad (29)$$

откуда

$$C_m = \frac{S_{h_2} - S_{h_1}}{h^m (1 - L^{-m})} + O(h^{m+1}). \quad (30)$$

Подставляя это выражение для  $C_m$  в равенства (27), (28) и отбрасывая члены более высокого порядка малости, чем  $h^m$ , найдем приближенные представления погрешностей  $R_{h_1}$  и  $R_{h_2}$  составной квадратурной формулы на рассматриваемых равномерных сетках:

$$R_{h_1} = J(f) - S_{h_1} \approx \frac{S_{h_2} - S_{h_1}}{1 - L^{-m}}, \quad (31)$$

---

<sup>3</sup>Карл Давид Тольмё Рунге (нем. *Carl David Tolme Runge*) (1856–1927), немецкий математик, физик и спектроскопист. Внес существенный вклад в численный анализ, в частности, явился одним из разработчиков методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, носящих теперь общее название методов типа Рунге — Кутты.



$$R_{h_2} = J(f) - S_{h_2} \approx \frac{S_{h_2} - S_{h_1}}{L^m - 1}. \quad (32)$$

**Определение 9.** Представленный практический способ оценивания методической погрешности называется правилом Рунге.

Так при  $L = 2$  — если шаг расчёта уменьшается в два раза — погрешность составной квадратурной формулы  $R_{\frac{h}{2}}$  меньше погрешности  $R_h$  почти в  $2^m$  раз.

Используя правило Рунге, можно решить вопрос о нахождении оптимального шага разбиения  $h_{opt}$  интервала интегрирования, обеспечивающего (в первом приближении) вычисление интеграла с требуемой точностью  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = |R_{h_{opt}}| \approx |C_m h_{opt}^m| \approx \frac{|S_{h_2} - S_{h_1}|}{h^m (1 - L^{-m})} h_{opt}^m = R_{h_1} \left( \frac{h_{opt}}{h} \right)^m. \quad (33)$$

Отсюда получаем приблизительный оптимальный шаг разбиения

$$h_{opt} = h \left( \frac{\varepsilon (1 - L^{-m})}{|S_{h_2} - S_{h_1}|} \right)^{\frac{1}{m}} = h_1 \sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{|R_{h_1}|}} = h_2 \sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{|R_{h_2}|}}. \quad (34)$$

**Замечание 4.** Находя оптимальный шаг, следует несколько уменьшить значение, получаемое по формуле (34). Во-первых, из-за приближённости вычислений значение погрешности на найденном шаге  $h_{opt}$  может быть больше предсказанного. Рекомендуется домножить  $h_{opt}$  на некий «гарантийный множитель»  $fac < 1$ , например, 0.95. Во-вторых, для вычисления интеграла по СКФ с постоянным шагом, необходимо, чтобы в отрезке  $[a, b]$  укладывалось целое число таких шагов. С этой целью следует округлить число  $(b - a)/h_{opt}$  вверх, и вычислить новую длину оптимального шага, поделив  $b - a$  на найденное округлённое значение.

## Метод Ричардсона<sup>4</sup> → улучшить

Можно повысить точность оценки погрешности, если рассматривать её асимптотическое представление в виде

$$R_h = J(f) - S_h = C_m h^m + C_{m+1} h^{m+1} + \dots + C_{m+r-1} h^{m+r-1} + O(h^{m+r}). \quad (35)$$

Фиксируя  $r$  и отбрасывая члены порядка  $h^{m+r}$ , получим выражение, в котором при любом известном  $h$  остаётся  $r + 1$  неизвестная величина:  $C_m, \dots, C_{m+r-1}$  и  $J(f)$ . Если теперь провести расчёты на  $r + 1$  сетке с шагами  $h_1, h_2, \dots, h_{r+1}$ , то получим систему линейных алгебраических уравнений на перечисленные неизвестные. Решив её, получим оценку (35) более точную, чем (26), и приближение к  $J(f)$ , которое будет существенно точнее, чем любое из значений  $S_{h_1}, \dots, S_{h_{r+1}}$ .

**Определение 10.** Этот подход к оценке методической погрешности называется *методом Ричардсона*, а приближение к  $J(f)$  — *уточнением по Ричардсону*.

Для случая  $r = 1$  получаем оценку, совпадающую с правилом Рунге. В этом случае также можно использовать уточнение по Ричардсону, более точное чем  $S_{h_1}$  и  $S_{h_2}$  (помним, что  $h_1 = Lh_2$ ):

$$J(f) \approx S_{h_1} + \frac{S_{h_2} - S_{h_1}}{1 - L^{-m}} = S_{h_2} + \frac{S_{h_2} - S_{h_1}}{L^m - 1}.$$

**Замечание 5.** Для каждой конкретной функции  $f(\cdot)$  величина  $C_m$  (как и  $C_{m+1}$ , и последующие) и скорость сходимости  $m$  становятся постоянными только при достаточно малых  $h$ . Часто при длинах шагов, используемых в практических вычислениях, нельзя быть уверенным в том, что процесс сходится со скоростью АСТ + 1. Величина  $h$ , для которой асимптотическая оценка (26) становится верна, зависит от задачи и от веса  $p(\cdot)$ . Как правило, для  $p(\cdot) \equiv 1$  устойчивая сходимость достигается при больших длинах шага, чем в других случаях.

<sup>4</sup> *Льюис Фрай Ричардсон* (англ. *Lewis Fry Richardson*) (1881–1953), английский математик, физик, метеоролог, психолог и пацифист, впервые применивший современные математические методы прогнозирования погоды и приложения подобных методов для изучения причин возникновения войн и их предотвращения. Также разработал метод решения систем линейных уравнений, известный как модифицированные итерации Ричардсона, и одним из первых стал изучать фракталы.

$\varepsilon \rightarrow h \rightarrow \text{конв. узн} \rightarrow \text{АСТ}$

?  $m = \text{АСТ} - 1$

Процесс Эйткена<sup>5</sup>  $\rightarrow m$

В случае если неизвестен порядок главного члена погрешности  $m$  или нет уверенности в том, что шаг  $h$  достаточно мал, чтобы значение  $C_m$  перестало заметно меняться при его изменении, можно оценить практическую скорость сходимости приближения  $S_h$  к  $J(f)$  при уменьшающемся  $h$ . В отличие от правила Рунге, кроме  $J(f)$  и  $C_m$  неизвестным становится ещё и само число  $m$ , и для его определения используется третья сетка.

Пусть  $h_1 = h$ ,  $h_2 = h_1/L$  и  $h_3 = h_2/L = h_1/L^2$ ,  $L > 1$ . Тогда, используя (29) и отбрасывая члены порядка  $h^{m+1}$ , получаем

$$\frac{S_{h_3} - S_{h_2}}{S_{h_2} - S_{h_1}} \approx \frac{C_m \left(\frac{h}{L}\right)^m \left(1 - \frac{1}{L^m}\right)}{C_m h^m \left(1 - \frac{1}{L^m}\right)} = \frac{1}{L^m}.$$

Отсюда,

$$m \approx - \frac{\ln \frac{S_{h_3} - S_{h_2}}{S_{h_2} - S_{h_1}}}{\ln L}. \quad (36)$$

Заметим, что если асимптотическая сходимость для данного  $h$  ещё не достигнута, то значения  $S_{h_1}$ ,  $S_{h_2}$  и  $S_{h_3}$  могут находиться с разных сторон от точной величины интеграла  $J(f)$ . В этом случае под логарифмом в числителе (36) может оказаться отрицательное число, а оценка  $m$  окажется слишком грубой, даже если «схитрить» и вычислить её, взяв логарифм в числителе от модуля выражения. С другой стороны, иногда это лучшее, что можно сделать.

## Задание для самостоятельного выполнения

### Цель задания

Убедиться в необходимости использования квадратурных формул для вычисления «неберущихся» определенных интегралов. Попытаться вычислить предложенный интеграл методом (3). Убедиться в необходимости применения более сложных правил интегрирования, рассчитанных на узкий класс задач.

<sup>5</sup>Александр Крейг Эйткен (англ. Alexander Craig Aitken) (1895–1967), новозеландский математик, разработал обобщённый метод наименьших квадратов, а также ввёл общепринятые теперь векторно-матричные обозначения для линейной регрессионной модели.

Ознакомиться с двумя наиболее распространенными классами квадратурных формул — формулами Ньютона — Котса и Гаусса — и с вычислением интегралов от разрывных функций.

Научиться управлять численным процессом с целью обеспечения заданной точности за приемлемое время, используя составные КФ и практические способы оценки погрешности и выбора оптимального разбиения.

## Содержание задания

Для заданного набора значений параметров вычислить интеграл

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha(b-x)^\beta} dx \quad (37)$$

с заданной точностью  $\varepsilon$  с использованием двух типов формул. Найти «точное» значение интеграла для сверки получаемых численных результатов с помощью какой-нибудь компьютерной системы научных вычислений.

## Вариант Ньютона — Котса

- Построить интерполяционную квадратурную формулу с весовой функцией  $p(x) = (x-a)^{-\alpha}(b-x)^{-\beta}$  на отрезке  $[a, b]$  по трём равномерно распределённым узлам  $x_1 = a$ ,  $x_2 = (a+b)/2$ ,  $x_3 = b$ . Оценить методическую погрешность построенного правила (11), сравнить её с точной погрешностью.
- На базе построенной малой ИКФ построить составную КФ и, уменьшая длину шага  $h$ , добиться заданной точности  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Погрешность оценивать методом Рундсона. На каждом последовательных трёх сетках оценивать скорость сходимости по правилу Эйткена.
- Проведя вычисления по трём грубым сеткам с малым числом шагов (например, 1, 2 и 4) использовать оценку скорости сходимости и выбрать оптимальный шаг  $h_{opt}$ . Начать расчёт с шага  $h_{opt}$  и снова довести до требуемой точности  $\varepsilon$ .

## Вариант Гаусса

Выполнить всё то же самое, используя трёхточечные формулы Гаусса вместо формул Ньютона — Котса. Узлы каждой малой формулы находить либо с помощью формул Кардано, либо численно.

Обратите внимание, что из-за ограниченности разрядной сетки при хранении чисел и большой чувствительности полиномов к погрешностям в их коэффициентах, может оказаться так, что узлы формул Гаусса, находимые как корни узлового многочлена, будут выходить за границы отрезка интегрирования, что не позволит найти с их помощью решение задачи.

## Варианты заданий

1.  $f(x) = 2 \cos(2.5x) \exp(x/3) + 4 \sin(3.5x) \exp(-3x) + x$ ,  
 $a = 1.5, b = 3.3, \alpha = 1/3, \beta = 0$ ;
2.  $f(x) = 3 \cos(0.5x) \exp(x/4) + 5 \sin(2.5x) \exp(-x/3) + 2x$ ,  
 $a = 1.7, b = 3.2, \alpha = 0, \beta = 1/4$ ;
3.  $f(x) = 2.5 \cos(2x) \exp(2x/3) + 4 \sin(3.5x) \exp(-3x) + 3x$ ,  
 $a = 0.1, b = 2.3, \alpha = 1/5, \beta = 0$ ;
4.  $f(x) = 3 \cos(3.5x) \exp(4x/3) + 2 \sin(3.5x) \exp(-2x/3) + 4x$ ,  
 $a = 1, b = 3, \alpha = 0, \beta = 1/6$ ;
5.  $f(x) = \cos(1.5x) \exp(2x/3) + 3 \sin(5.5x) \exp(-2x) + 2$ ,  
 $a = 2.5, b = 4.3, \alpha = 2/7, \beta = 0$ ;
6.  $f(x) = 4 \cos(0.5x) \exp(-5x/4) + 2 \sin(4.5x) \exp(x/8) + 2$ ,  
 $a = 1.3, b = 2.2, \alpha = 0, \beta = 5/6$ ;
7.  $f(x) = 4.5 \cos(7x) \exp(-2x/3) + 1.4 \sin(1.5x) \exp(-x/3) + 3$ ,  
 $a = 2.1, b = 3.3, \alpha = 2/5, \beta = 0$ ;
8.  $f(x) = 3.7 \cos(1.5x) \exp(-4x/3) + 2.4 \sin(4.5x) \exp(2x/3) + 4$ ,  
 $a = 1.8, b = 2.3, \alpha = 0, \beta = 3/5$ ;
9.  $f(x) = 3 \cos(1.5x) \exp(x/4) + 4 \sin(3.5x) \exp(-3x) + 4x$ ,  
 $a = 2.5, b = 3.3, \alpha = 2/3, \beta = 0$ ;
10.  $f(x) = 1.3 \cos(3.5x) \exp(2x/3) + 6 \sin(4.5x) \exp(-x/8) + 5x$ ,  
 $a = 0.7, b = 3.2, \alpha = 0, \beta = 1/4$ ;

11.  $f(x) = 0.5 \cos(2x) \exp(2x/5) + 2.4 \sin(1.5x) \exp(-6x) + 6x$ ,  
 $a = 1.1, b = 2.5, \alpha = 2/5, \beta = 0$ ;
12.  $f(x) = 4 \cos(2.5x) \exp(4x/7) + 2.5 \sin(5.5x) \exp(-3x/5) + 4.3x$ ,  
 $a = 1.8, b = 2.9, \alpha = 0, \beta = 4/7$ ;
13.  $f(x) = 2 \cos(3.5x) \exp(5x/3) + 3 \sin(1.5x) \exp(-4x) + 3$ ,  
 $a = 1.5, b = 2.3, \alpha = 1/5, \beta = 0$ ;
14.  $f(x) = 3 \cos(2.5x) \exp(7x/4) + 5 \sin(0.5x) \exp(3x/8) + 4$ ,  
 $a = 2.3, b = 2.9, \alpha = 0, \beta = 2/5$ ;
15.  $f(x) = 3.5 \cos(0.7x) \exp(-5x/3) + 2.4 \sin(5.5x) \exp(-3x/4) + 5$ ,  
 $a = 1.1, b = 2.3, \alpha = 4/5, \beta = 0$ ;
16.  $f(x) = 2.7 \cos(3.5x) \exp(-7x/3) + 4.4 \sin(2.5x) \exp(5x/3) + 2$ ,  
 $a = 2.8, b = 4.3, \alpha = 0, \beta = 3/7$ ;
17.  $f(x) = 6 \cos(1.5x) \exp(5x/3) + 2 \sin(0.5x) \exp(-1.3x) + 5.4x$ ,  
 $a = 3.5, b = 3.7, \alpha = 2/3, \beta = 0$ ;
18.  $f(x) = 4 \cos(2.5x) \exp(5x/4) + 2.5 \sin(1.5x) \exp(-2x/7) + 5x$ ,  
 $a = 2.7, b = 3.2, \alpha = 0, \beta = 3/4$ ;
19.  $f(x) = 0.5 \cos(3x) \exp(2x/5) + 4 \sin(3.5x) \exp(-3x) + 3x$ ,  
 $a = 1.1, b = 2.3, \alpha = 2/5, \beta = 0$ ;
20.  $f(x) = 1.5 \cos(3.7x) \exp(4x/7) + 3 \sin(2.5x) \exp(3x/4) + 3x$ ,  
 $a = 1.5, b = 3, \alpha = 0, \beta = 5/6$ ;
21.  $f(x) = 3 \cos(2.5x) \exp(4x/3) + 4 \sin(5.5x) \exp(-3.5x) + 3$ ,  
 $a = 2.5, b = 4.3, \alpha = 2/7, \beta = 0$ ;
22.  $f(x) = 5 \cos(0.3x) \exp(-7x/4) + 7 \sin(0.5x) \exp(2x/3) + 4$ ,  
 $a = 0.5, b = 2.2, \alpha = 0, \beta = 3/5$ ;
23.  $f(x) = 2.5 \cos(5.7x) \exp(-4x/3) + 2.4 \sin(2.5x) \exp(-3x/3) + 7$ ,  
 $a = 0.2, b = 3.1, \alpha = 3/5, \beta = 0$ ;
24.  $f(x) = 5.7 \cos(2.5x) \exp(-4x/7) + 4.4 \sin(4.3x) \exp(2x/7) + 5$ ,  
 $a = 0.8, b = 1.3, \alpha = 0, \beta = 4/7$ .

## Литература

1. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов, 2-е изд. — М.: Наука, 1967. 500 с.
2. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: учебник для вузов — М.: Директ-Медиа, 2013. 847 с.
3. Калиткин Н. Н. Численные методы: учебное пособие, 2-е изд. — СПб: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы, 8-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 639 с.