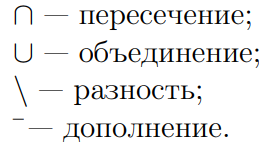
Вопросы к зачету по основам функционального анализа

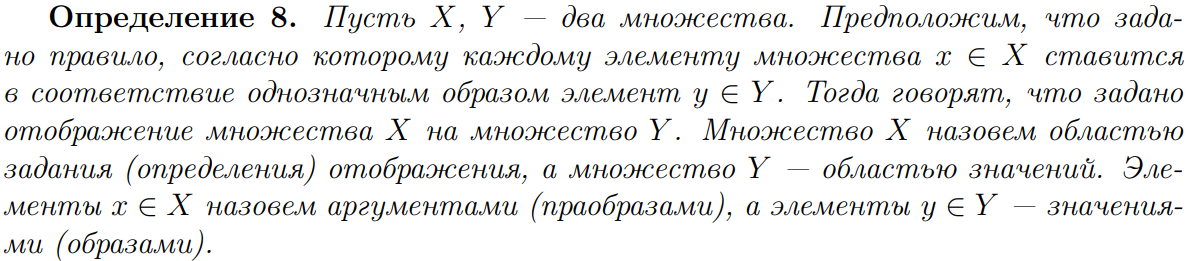
## 1. Множества. Основные операции над множествами. Отображения множеств. Эквивалентность множеств. Счетные множества. Счетность множества рациональных чисел.

*Множество* – совокупность элементов какой либо природы.

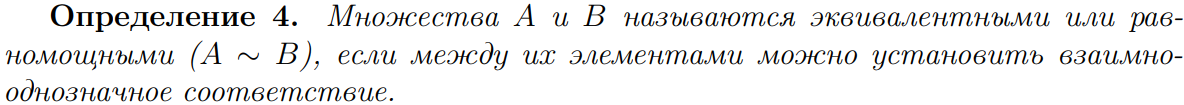
Основные операции над множеством

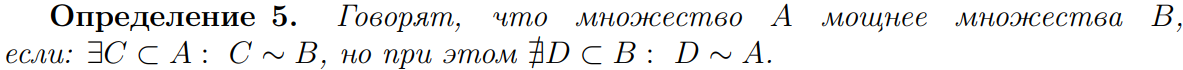


Отображения множеств

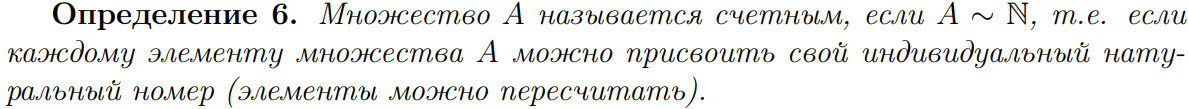


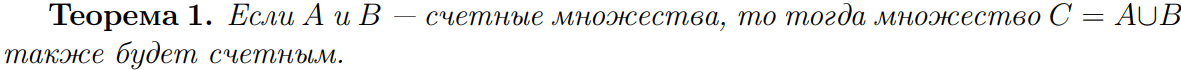
Эквивалентность множеств.

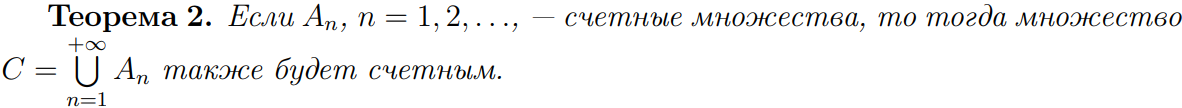




Счетные множества



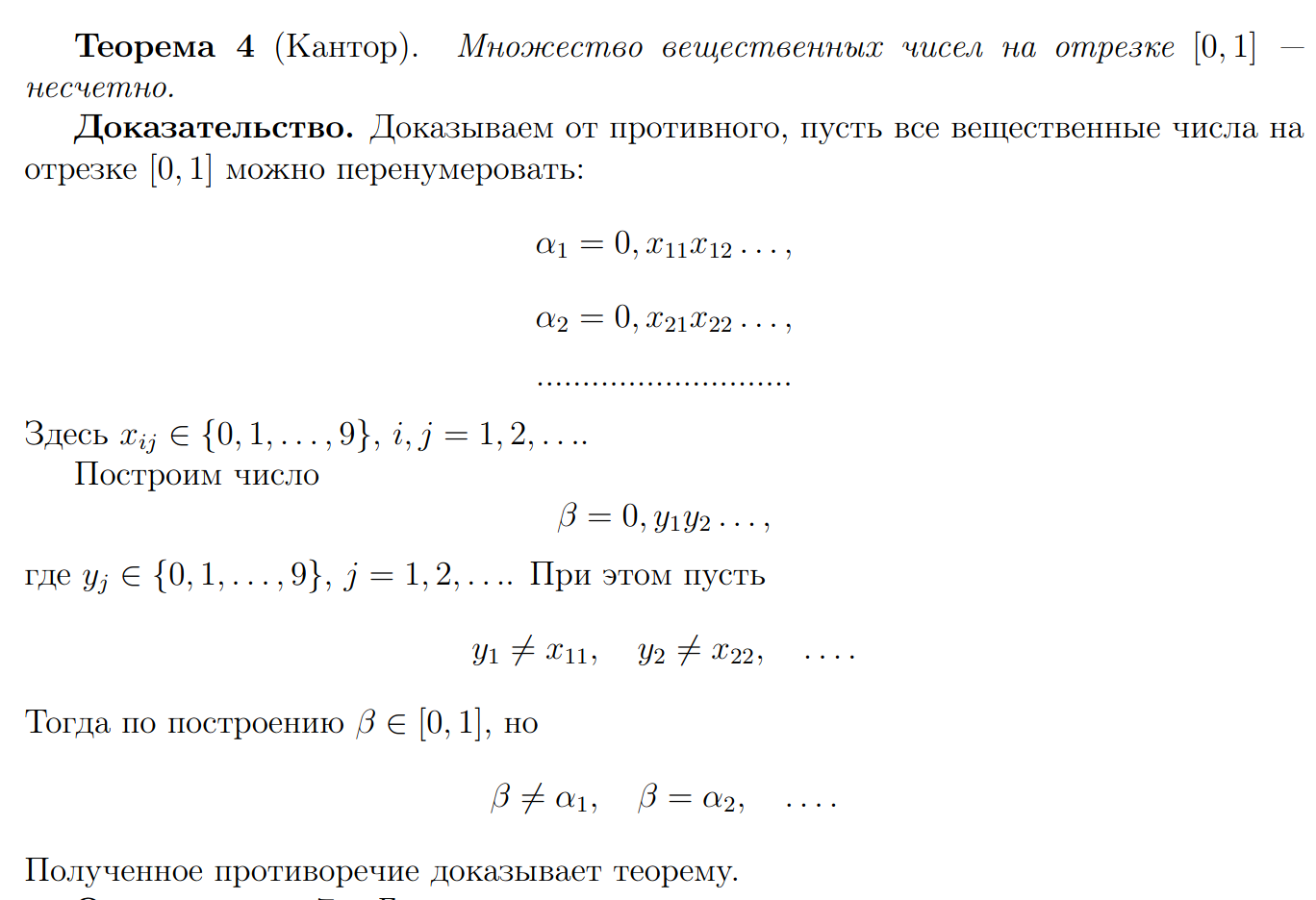




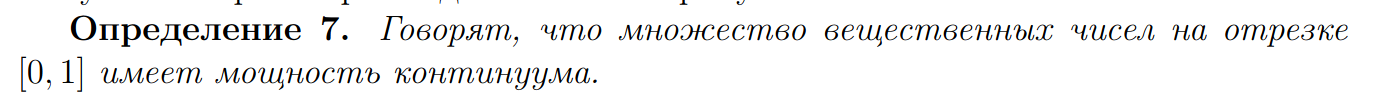
Счетность множества рациональных чисел.

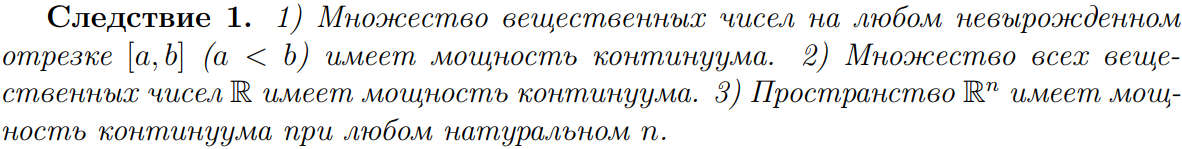


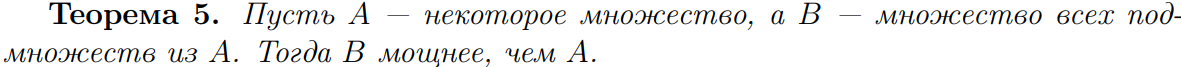
Теорема Кантора.



Мощность континуума.

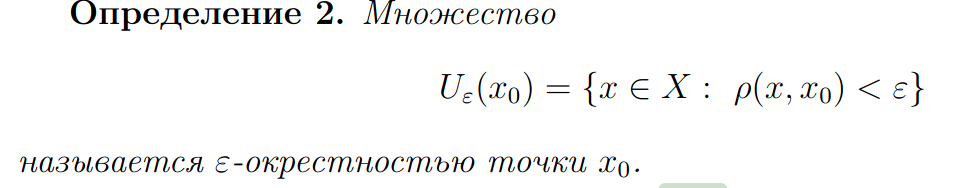




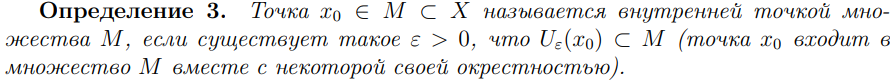


## 2. Метрические пространства. Основные определения (метрики, шара, внутренней точки, предельной точки, замкнутости, открытости, всюду плотности, нигде не плотности, сепарабельности). Фундаментальные последовательности. Полные пространства. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Пополнение пространства. Линейные пространства. Основные определения (линейной независимости, базиса, размерности пространства, подпространства). Изоморфизм линейных пространств. Нормированные пространства. Связь нормы и метрики. Банахово пространство.

***Шар***



***Внутренняя точка***



***Предельная точка***



***Замкнутость***





***Открытость***



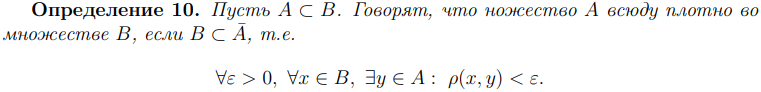
Х – ***метрическое пространство,*** если любым х,у ∈ Х поставлено в соответствие вещественное число p(x,y):

1) p(x,y)>=0, p(x,y)=0 если x=y

2) p(x,y) = p(y,x)

3) p(x,y)<= p(x,z)+p(z,y)

***Всюду плотно***



- замыкание A

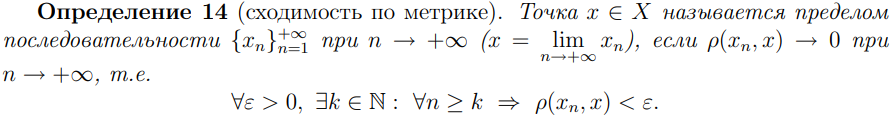
В – ***сепарабельное***, если оно имеет счетное, всюду плотное подмножество.

(Пространство вещественных чисел сепарабельно: счетным всюду плотным множеством здесь являются рациональные числа)

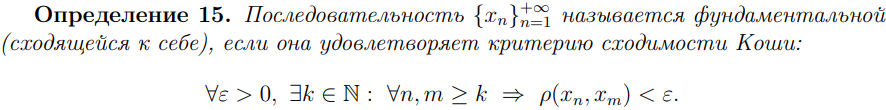
***Нигде не плотно***



***Сходимость по метрике***



***Фундаментальная последовательность***



Теорема

Любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

***Полное пространство***

Пространство X - ***полное***, если любая фундаментальная последовательность в этом пространстве сходится к некоторому элементу пространства.

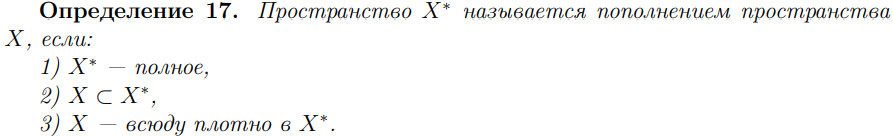
Теорема о вложенных шарах

Для того чтобы метрическое пространство X было полным необходимо и достаточно, чтобы любая система вложенных друг в друга замкнутых шаров из X имела непустое пересечение.

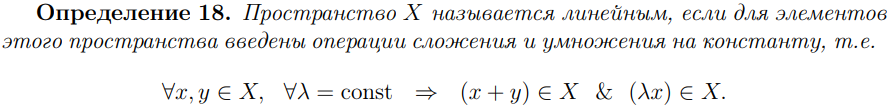
Теорема(Бэр)

Полное метрическое пространство не может быть представлено в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.

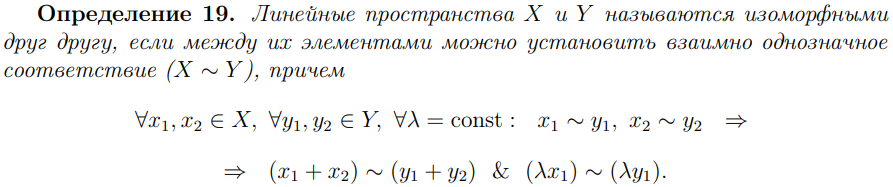
***Пополнение***



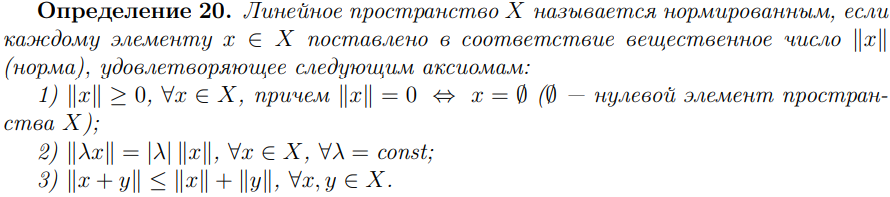
***Линейное пространство***



***Изоморфные пространства***



***Нормированное пространство***

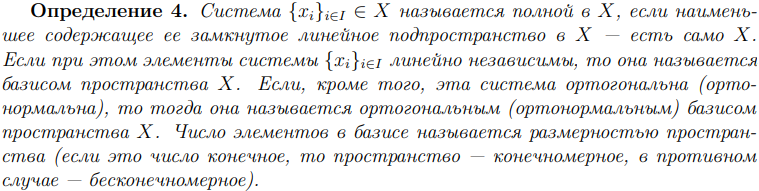


Полное нормированное пространство – ***банахово*** пространство

***Линейная независимость***

При отсутствии нетривиальной линейной комбинации элементов множества, равной нулевому элементу, множество называется *линейно независимым*.

***Базис, размерность пространства***



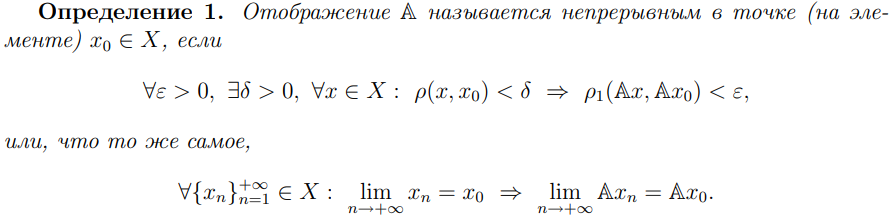
***Подпространство***

Подпространством линейного пространства L называется такое множество элементов из L, которое само является линейным пространством с теми же операциями сложения и умножения на число.

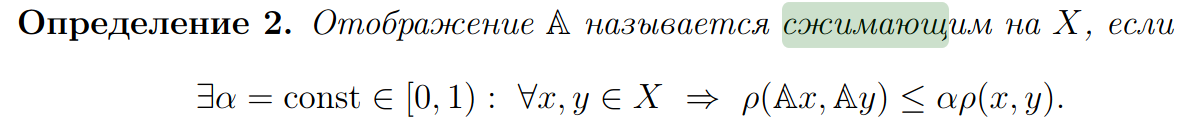
Связь нормы и метрики

## 3. Непрерывные отображения. Сжимающие отображения. Принцип сжимающих отображений. Компактные метрические пространства. Критерий компактности. Выпуклые множества. Принцип неподвижной точки Шаудера.

***Непрерывное отображение***



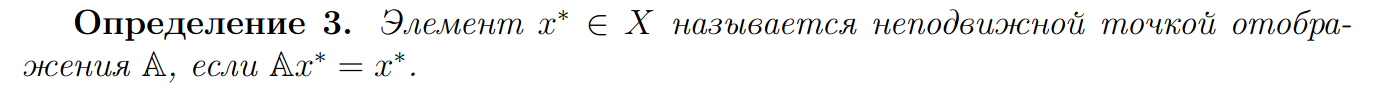
***Сжимающее отображение***



Теорема

Любое сжимающее на X отображение является непрерывным на X.

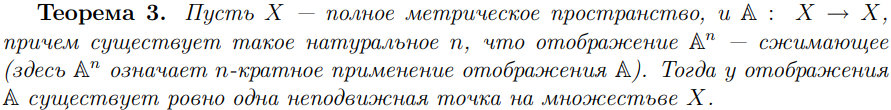
***Неподвижная точка отображения***



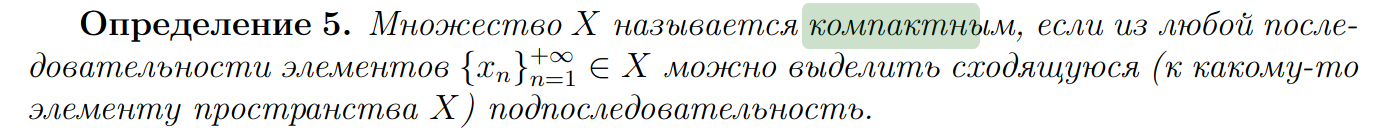
Теорема(принцип сжимающего отображения Каччополи — Банаха)

Пусть X — полное метрическое пространство, и A : X → X, причем отображение A — сжимающее.

Тогда у данного отображения существует ровно одна неподвижная точка на множестве X.



***Компактные метрические пространства***



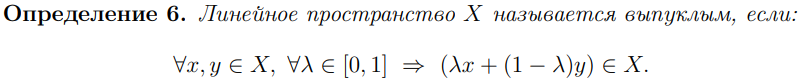
Критерий компактности

Любое компактное пространство является полным

Теорема

Любое компактное пространство является замкнутым и ограниченным

Выпуклые множества

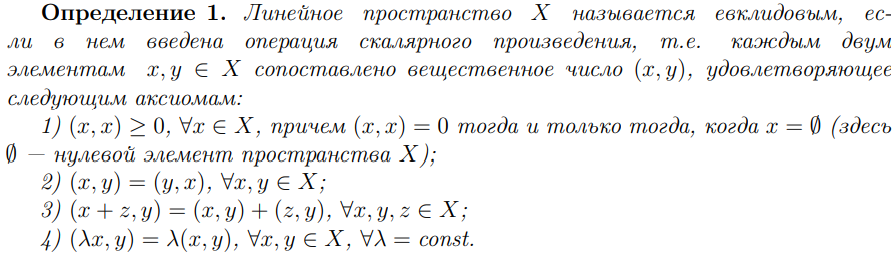


Принцип неподвижной точки Шаудера

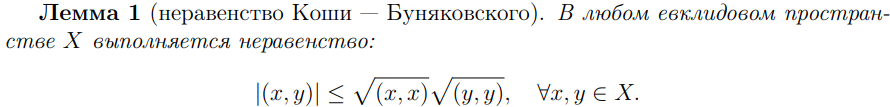
Пусть X — выпуклый компакт, и A : X → X — непрерывное отображение.

Тогда отображение A будет иметь хотя бы одну неподвижную точку.

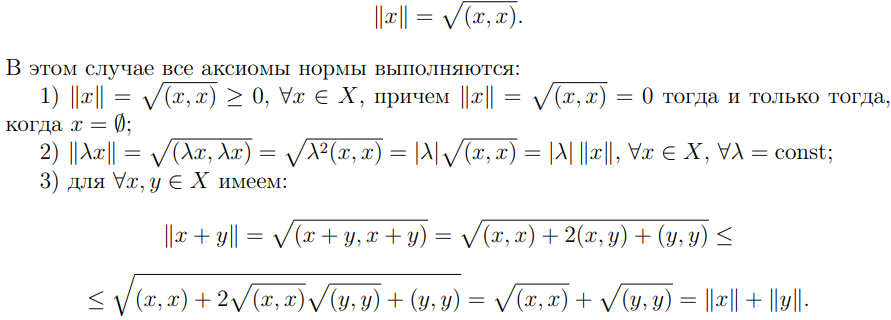
## 4. Евклидовы пространства. Понятие скалярного произведения. Неравенство Коши – Буняковского. Введение нормы в евклидовых пространствах. Угол между элементами. Ортогональные системы элементов. Линейная независимость элементов ортогональной системы. Полнота системы элементов. Примеры: пространства , , . Теоремы об ортогональном базисе. Обобщенный ряд Фурье. Теорема о наилучшем приближении элемента. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы. Равенство Парсеваля. Теорема о полноте и замкнутости ортогональной системы в сепарабельном пространстве. Теорема Рисса-Фишера. Гильбертовы пространства. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

***Евклидово пространство (Понятие скалярного произведения)***

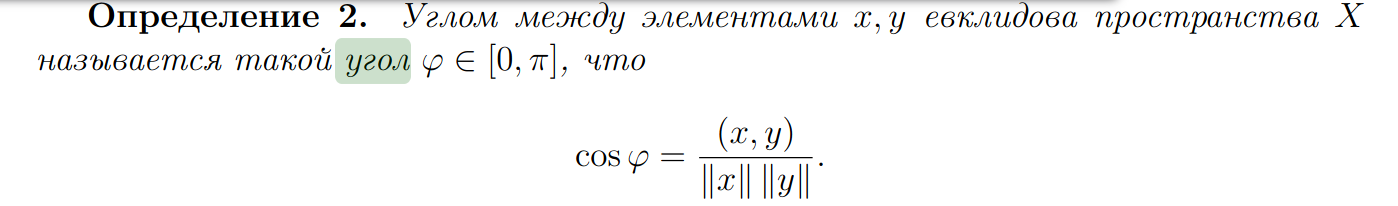
Неравенство Коши – Буняковского



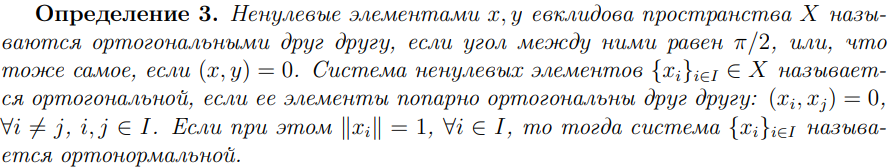
Введение нормы в евклидовых пространствах



***Угол между элементами***



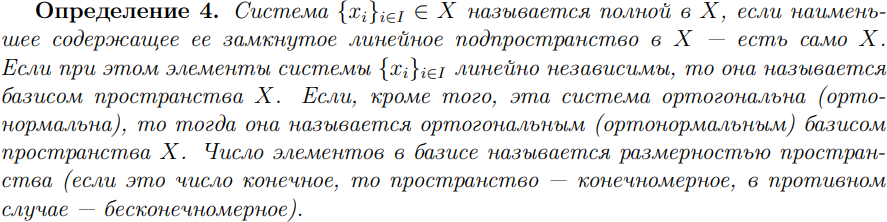
***Ортогональные системы элементов***

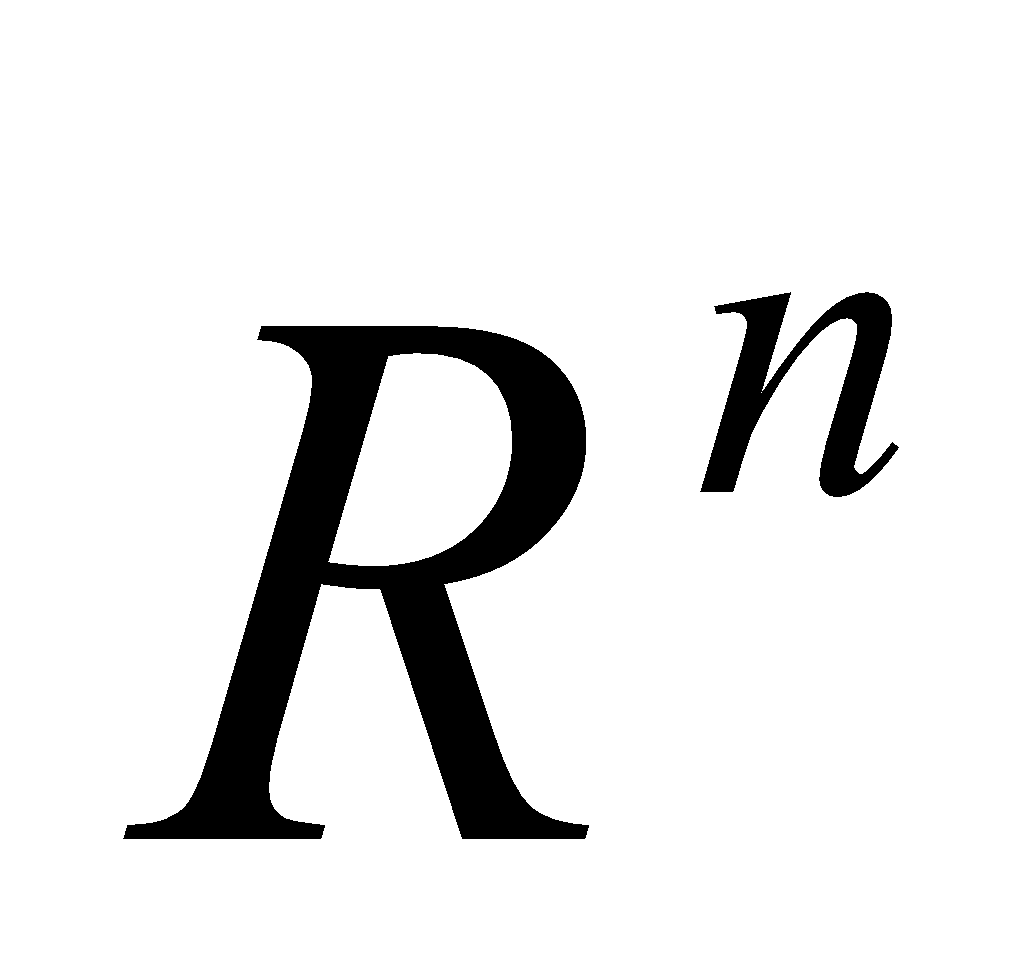
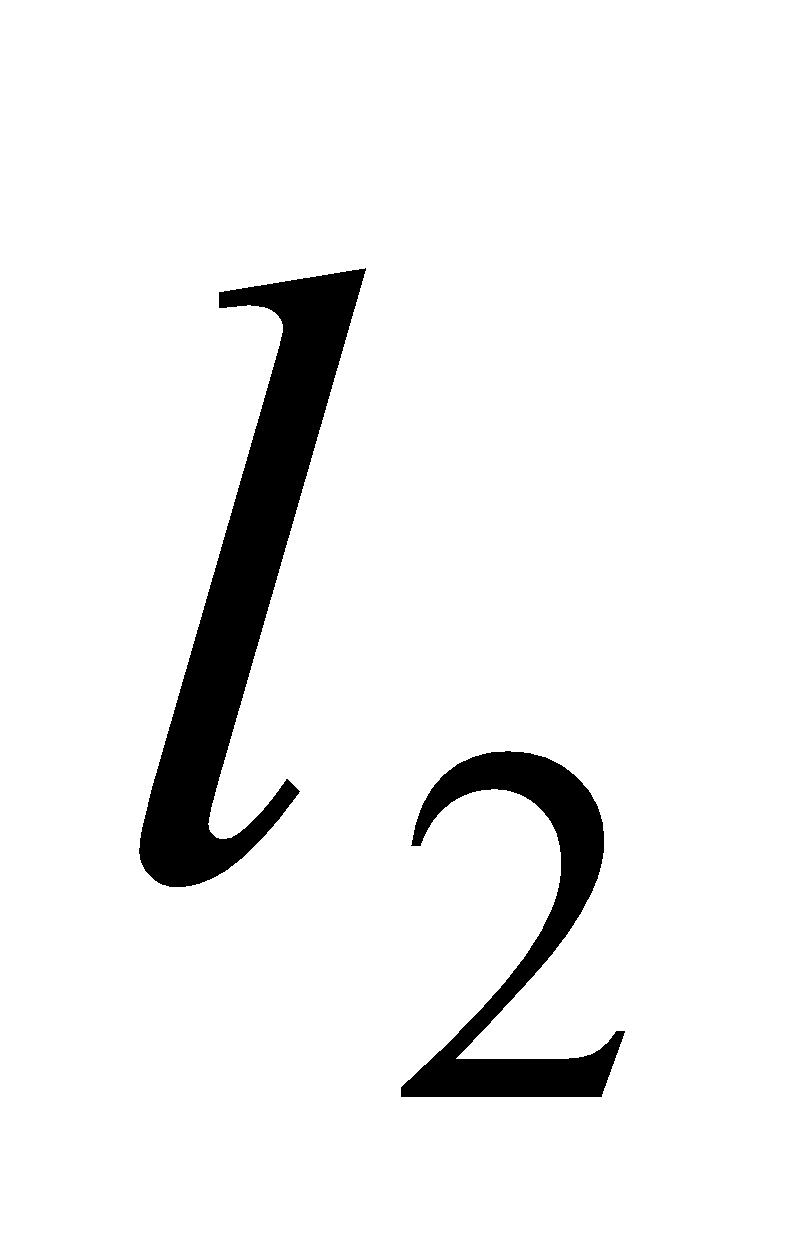
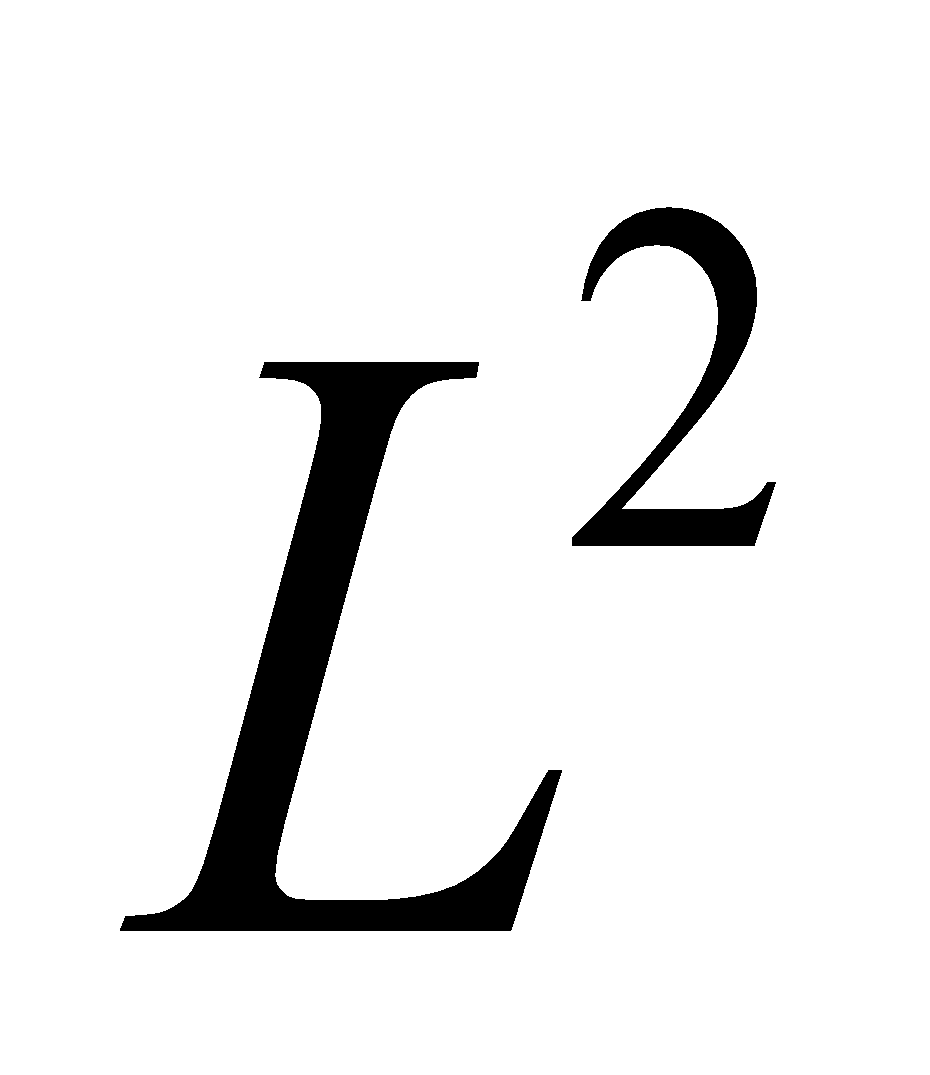


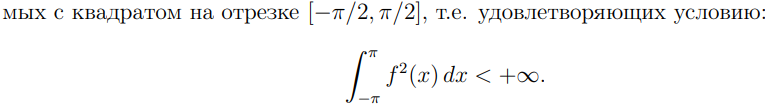
Линейная независимость элементов ортогональной системы.

Элементы любой ортогональной системы линейно независимы между собой.

***Полнота системы элементов***

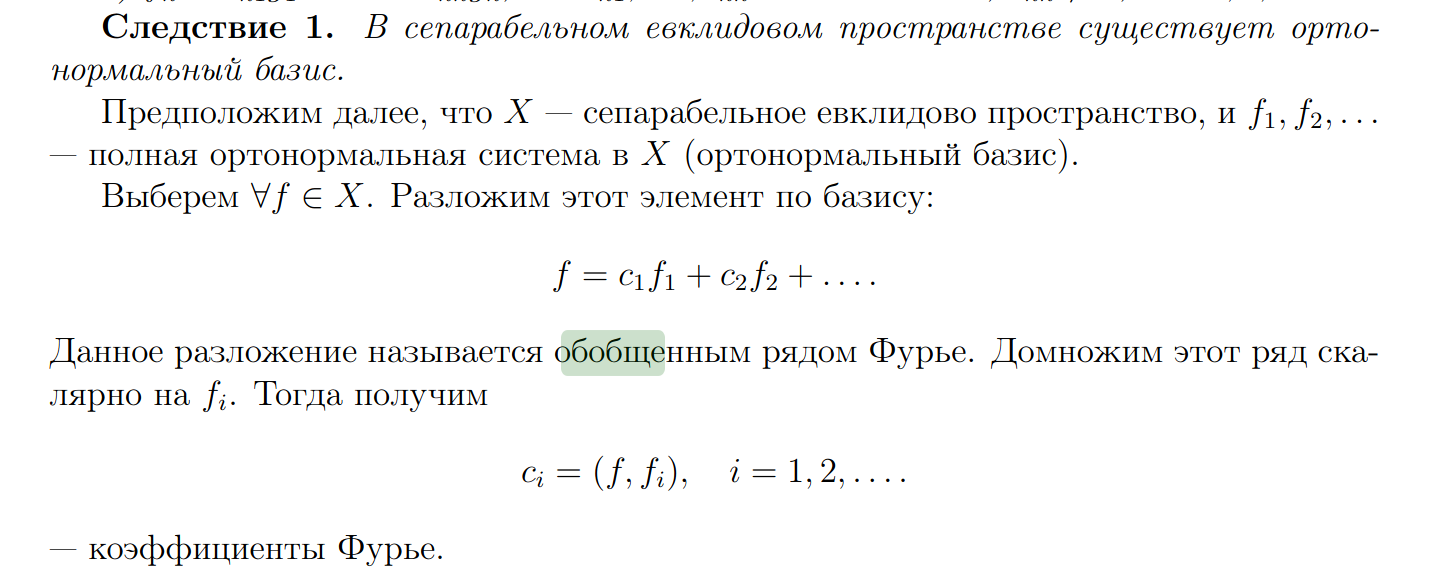


Примеры: пространства , , .





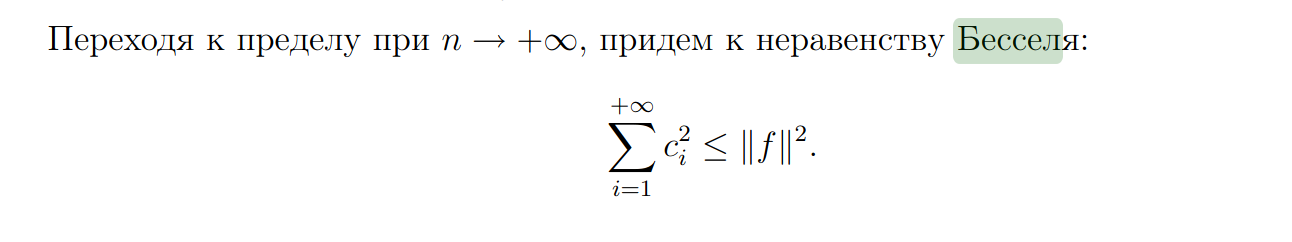
***Обобщенный ряд Фурье***



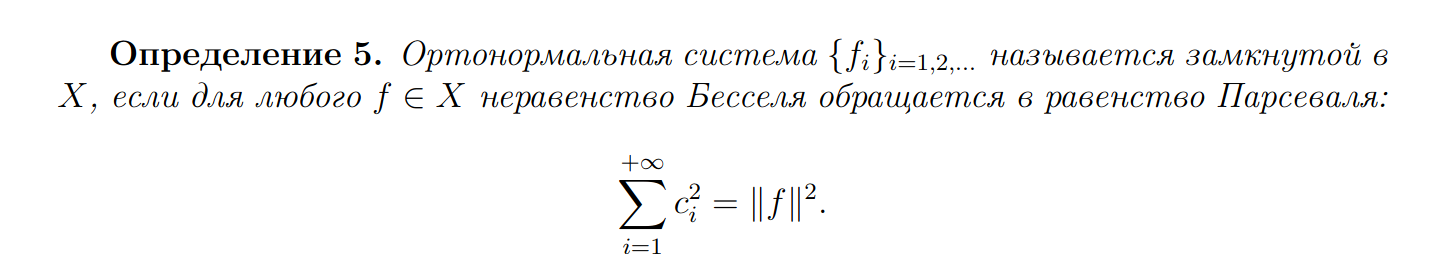
Теорема о наилучшем приближении элемента

Наилучшая аппроксимация по норме осуществляется с помощью частичных сумм ряда Фурье.

***Неравенство Бесселя.***



***Замкнутые ортогональные системы.***



Теорема о полноте и замкнутости ортогональной системы в сепарабельном пространстве

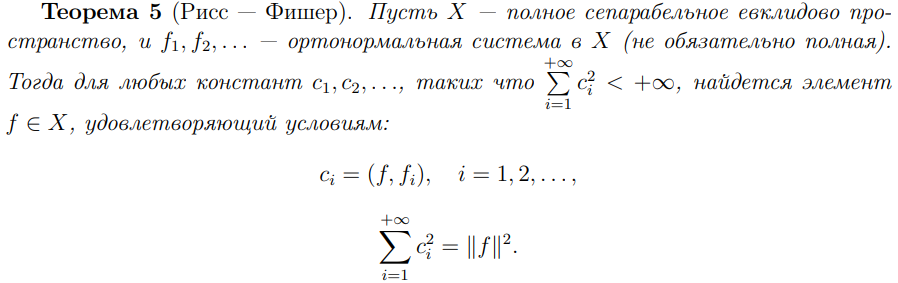
В сепарабельном евклидовом пространстве любая полная ортонормальная система является замкнутой, и наоборот

Рисс-Фишер (позволяет нам разложить в ряд Фурье? Или зачем нам эта теорема)

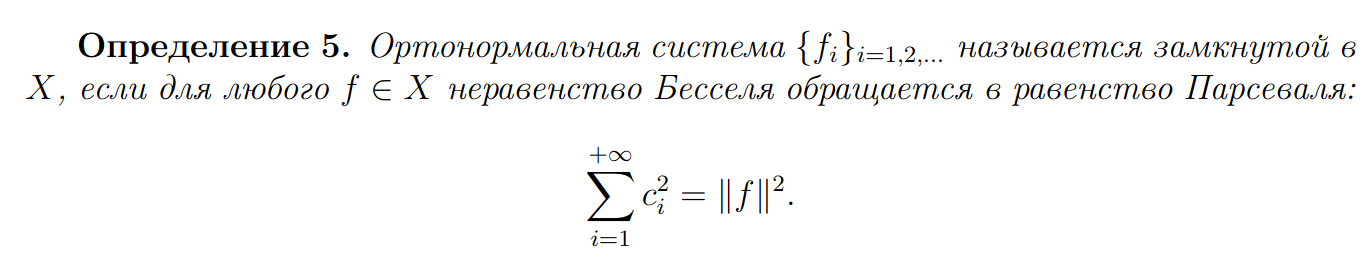
X - полное сепарабельное евклидово пространство

- Ортонормальная система в X (не обязательно полная)

ТОГДА



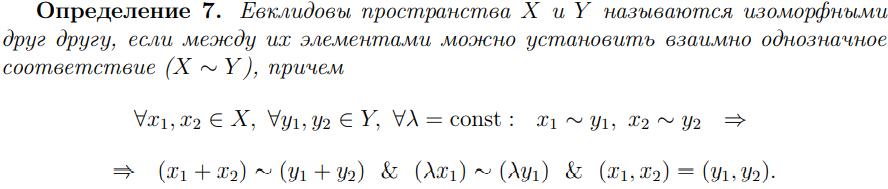
Равенство Парсеваля



***Гильбертовы пространства.***

Гильбертово пространство – полное евклидово пространство бесконечной размерности

***Изоморфные евклидовы пространства***

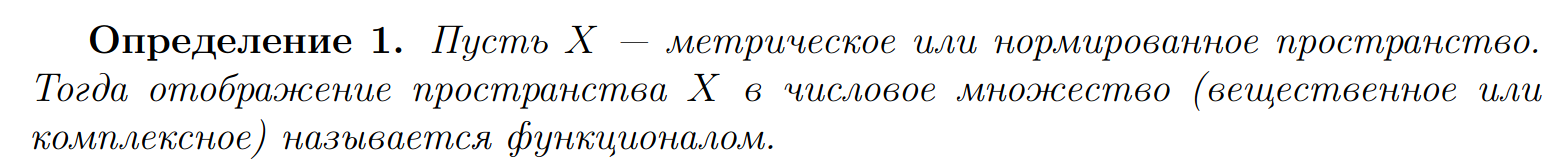


Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

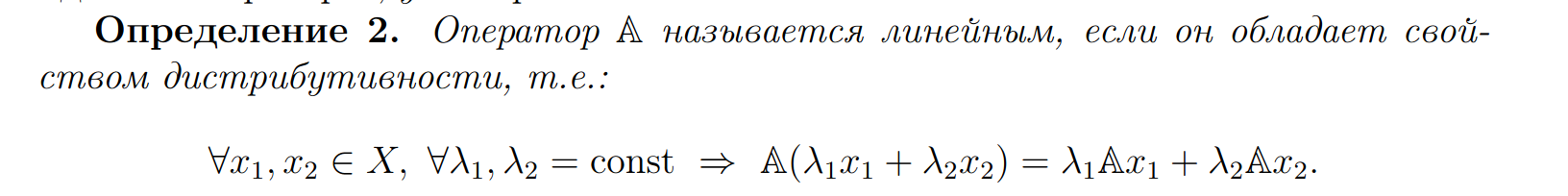
Любые два сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны друг другу.

## 5. Операторы и функционалы в линейных пространствах. Линейные операторы и функционалы. Матрица оператора в конечномерных линейных пространствах.

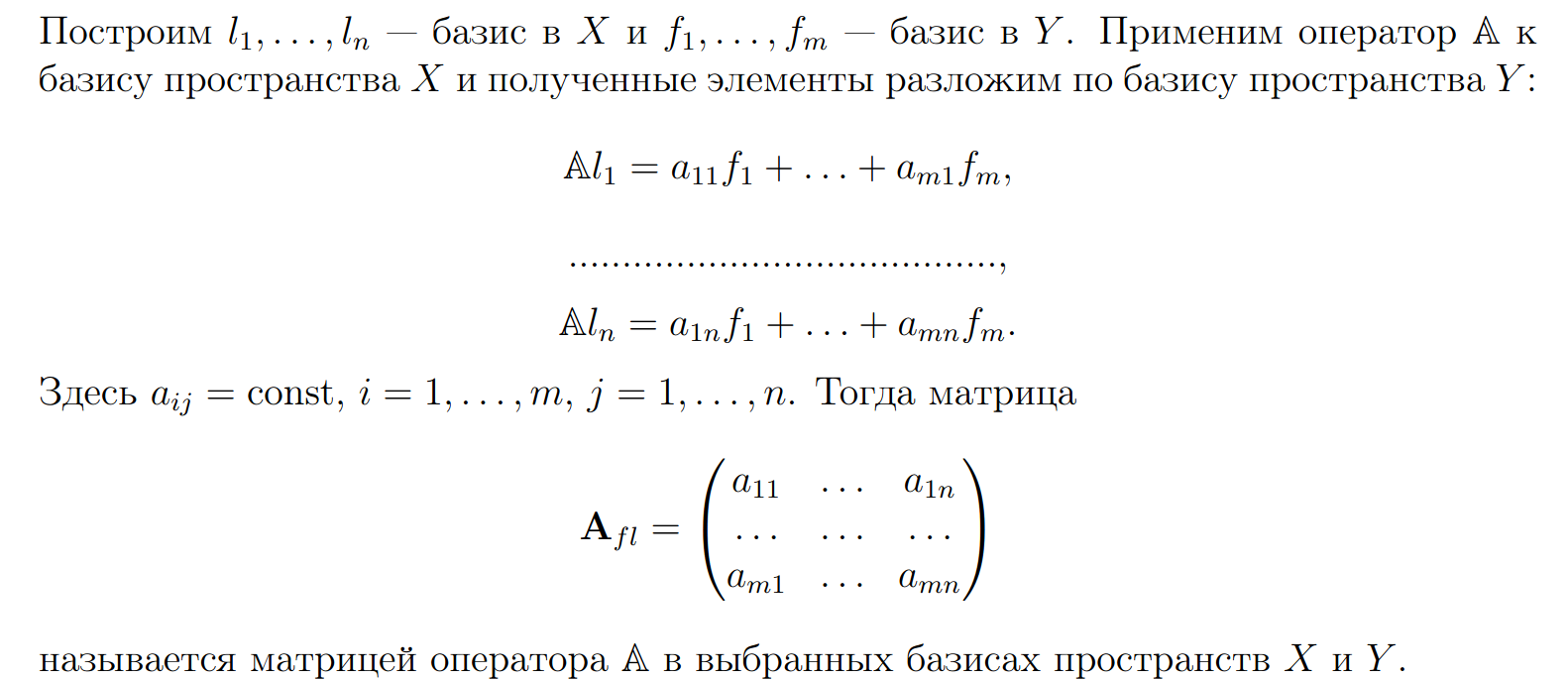
Операторы и функционалы в линейных пространствах



Линейные операторы и функционалы.

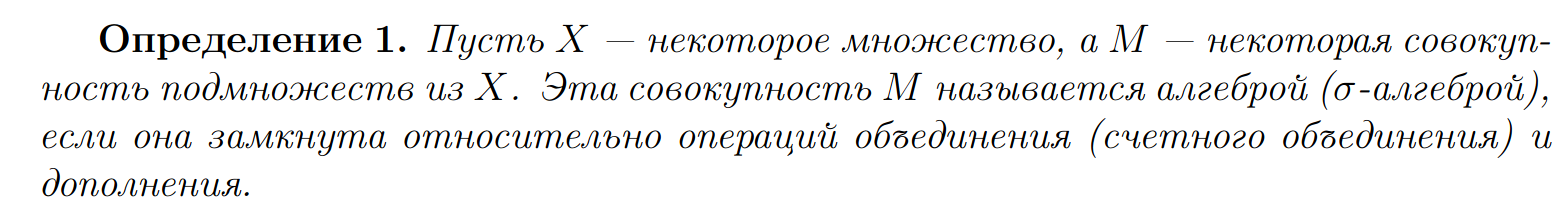


Матрица оператора в конечномерных линейных пространствах.

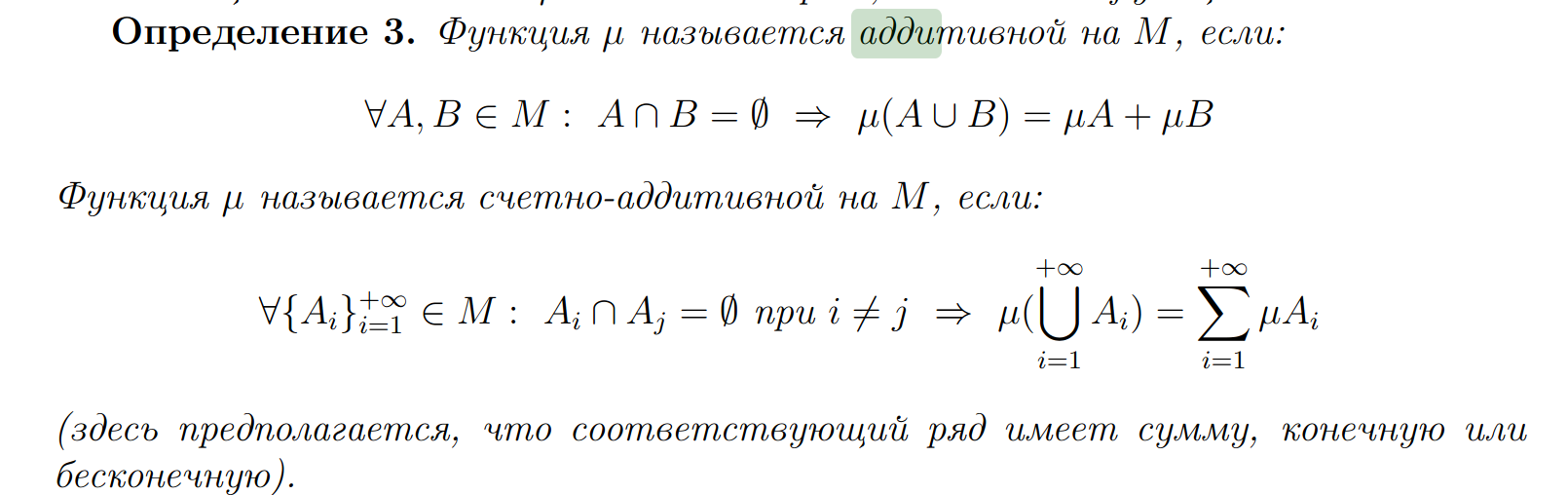


## 6. Алгебра (сигма-алгебра). Аддитивные функции. Мера множества. Мера Лебега. Измеримые множества. Измеримость открытых и замкнутых множеств. Множества типа и . Измеримые функции. Свойства. Предельный переход в классе измеримых функций. Сходимость «почти всюду» и эквивалентные функции. Сходимость по мере. Связь сходимости «почти всюду» и сходимости по мере. Теорема Лебега. Теорема Рисса. Интеграл Лебега от ограниченной функции по множеству конечной меры. Суммы Лебега-Дарбу. Теорема об интегрируемости измеримой функции. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.

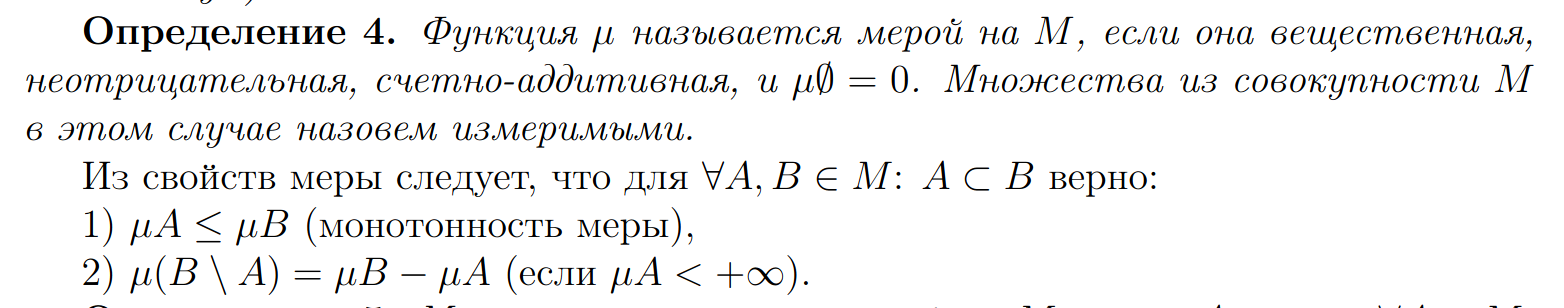
***Алгебра (сигма-алгебра).***



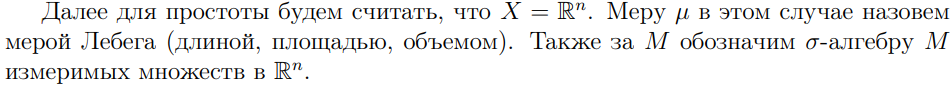
***Аддитивные функции.***

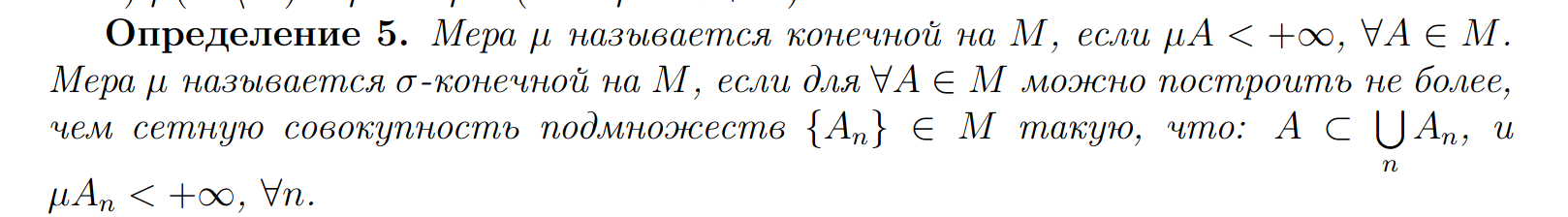


***Мера множества***

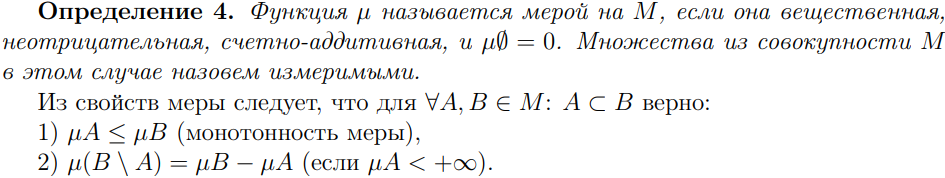


***Мера Лебега.***

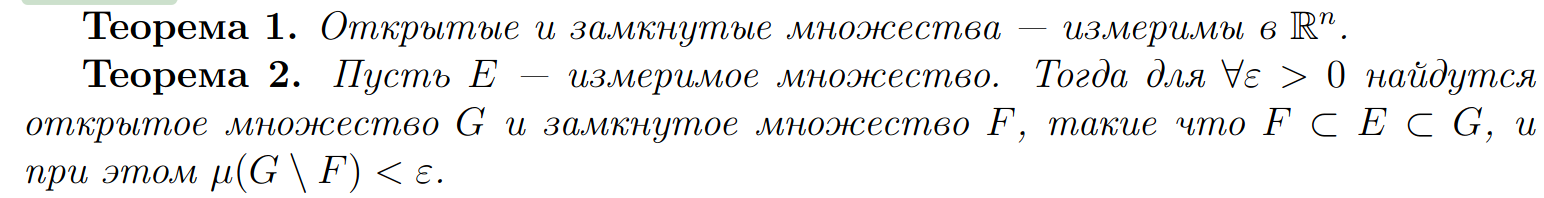


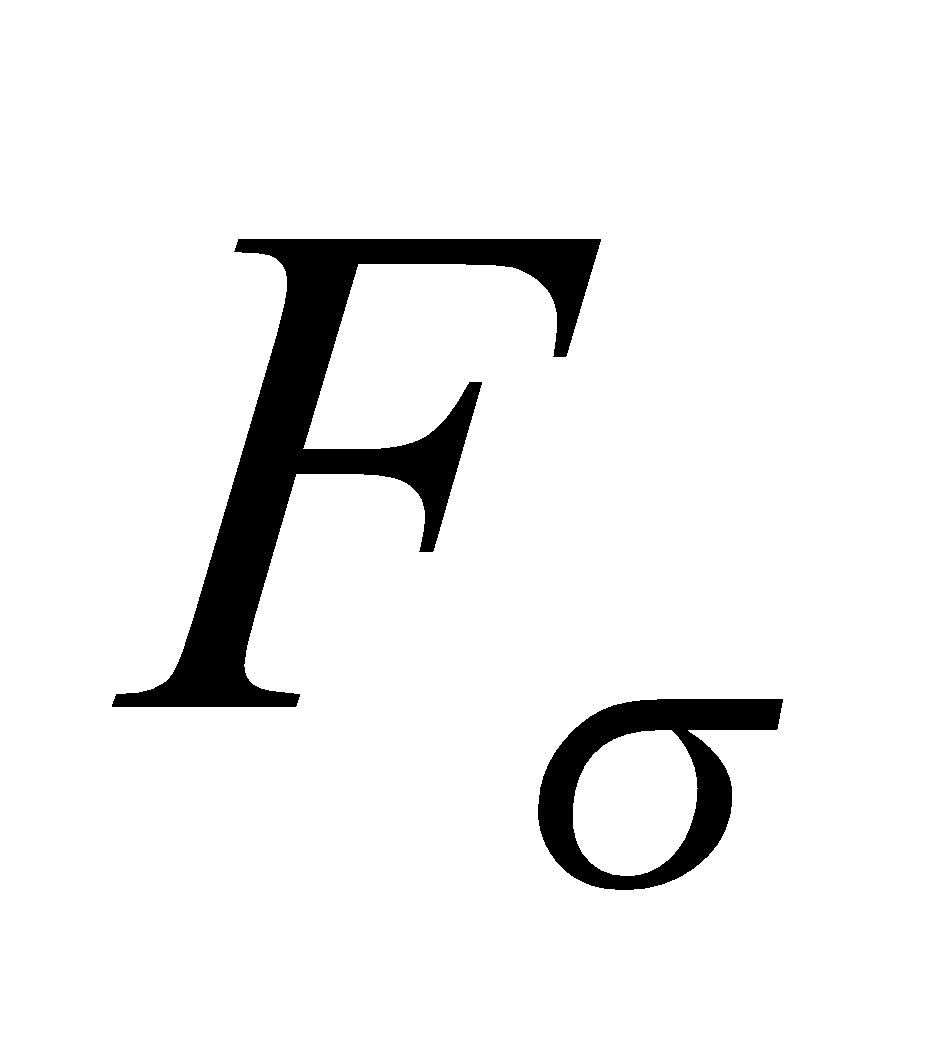
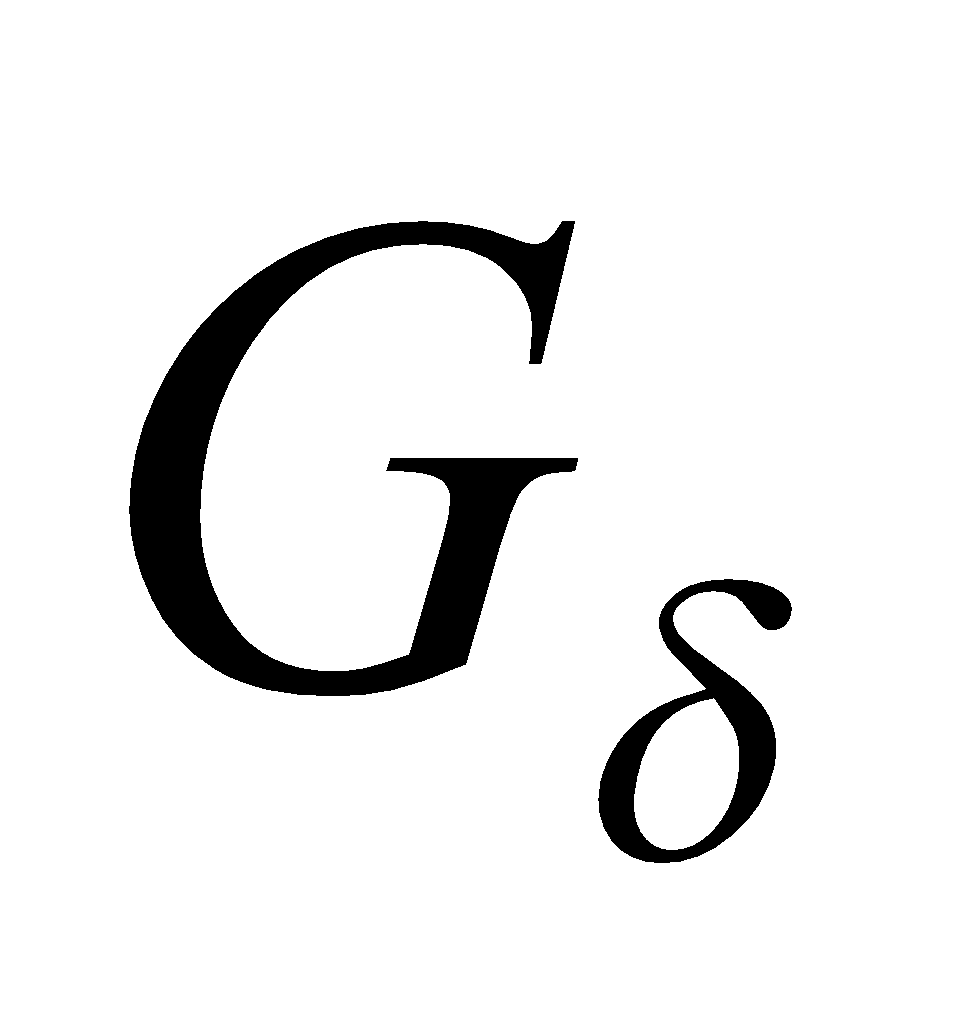


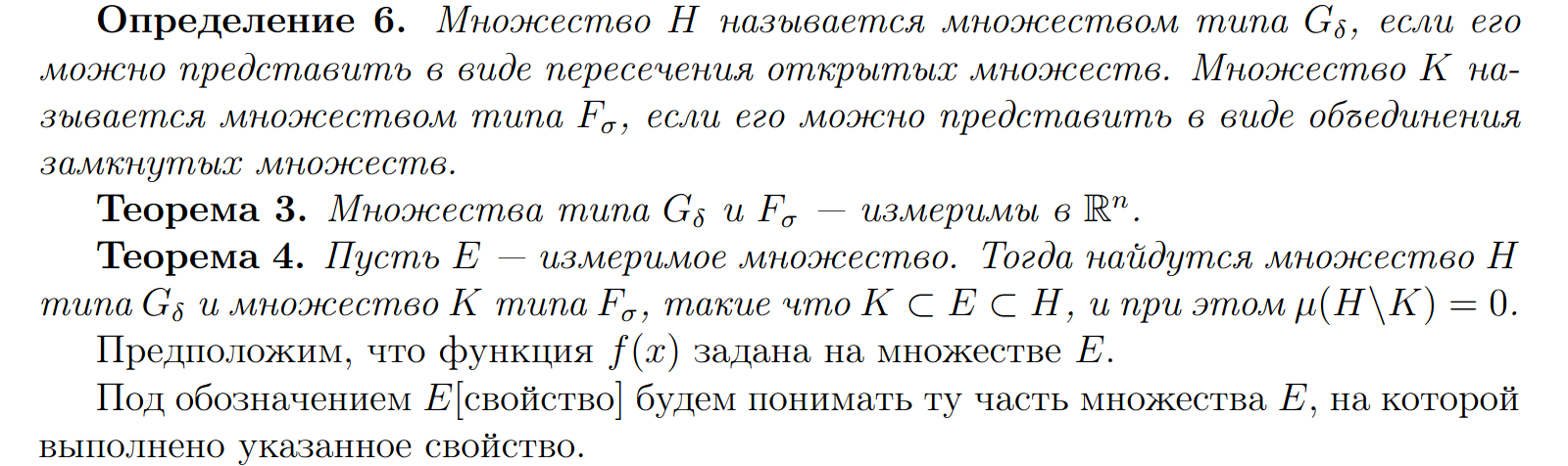
***Измеримые множества.***

******

Измеримость открытых и замкнутых множеств.



***Множества типа  и .***



Измеримые функции. Свойства.

***Множества Лебега:***

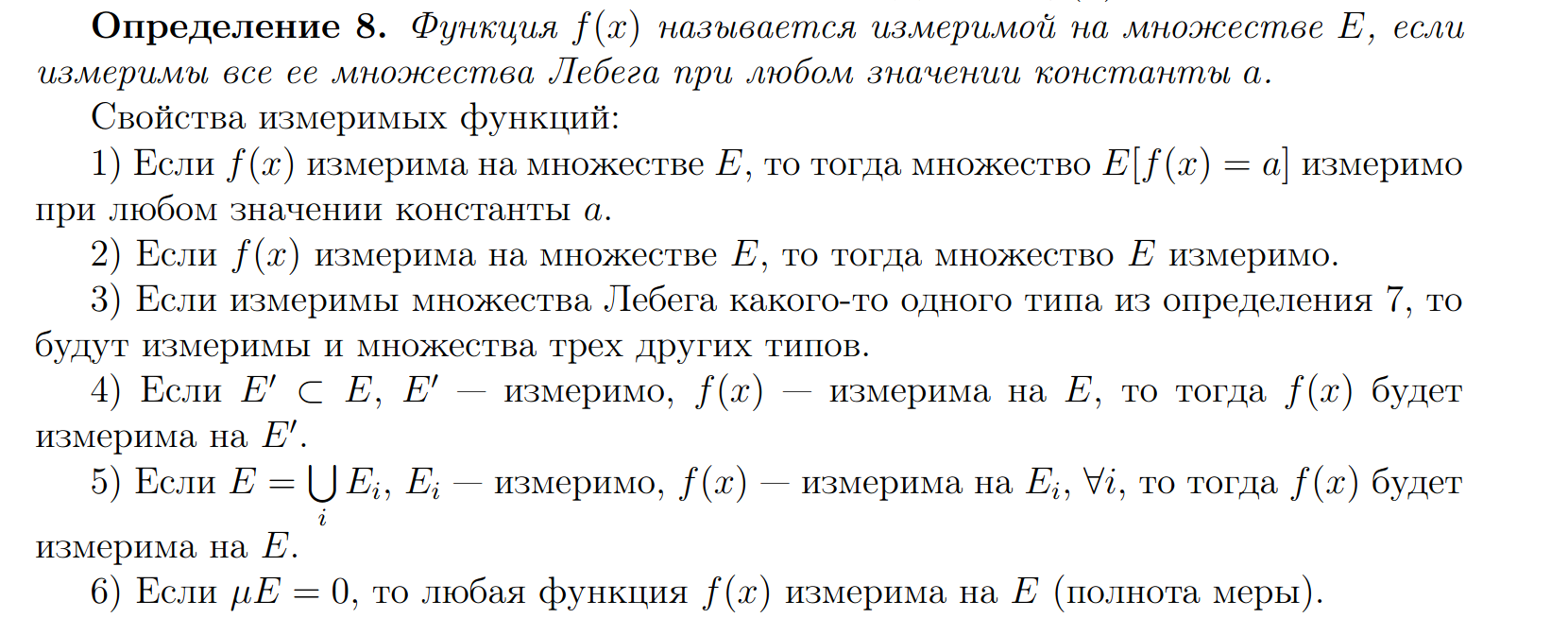
E [ f(x) > a ]

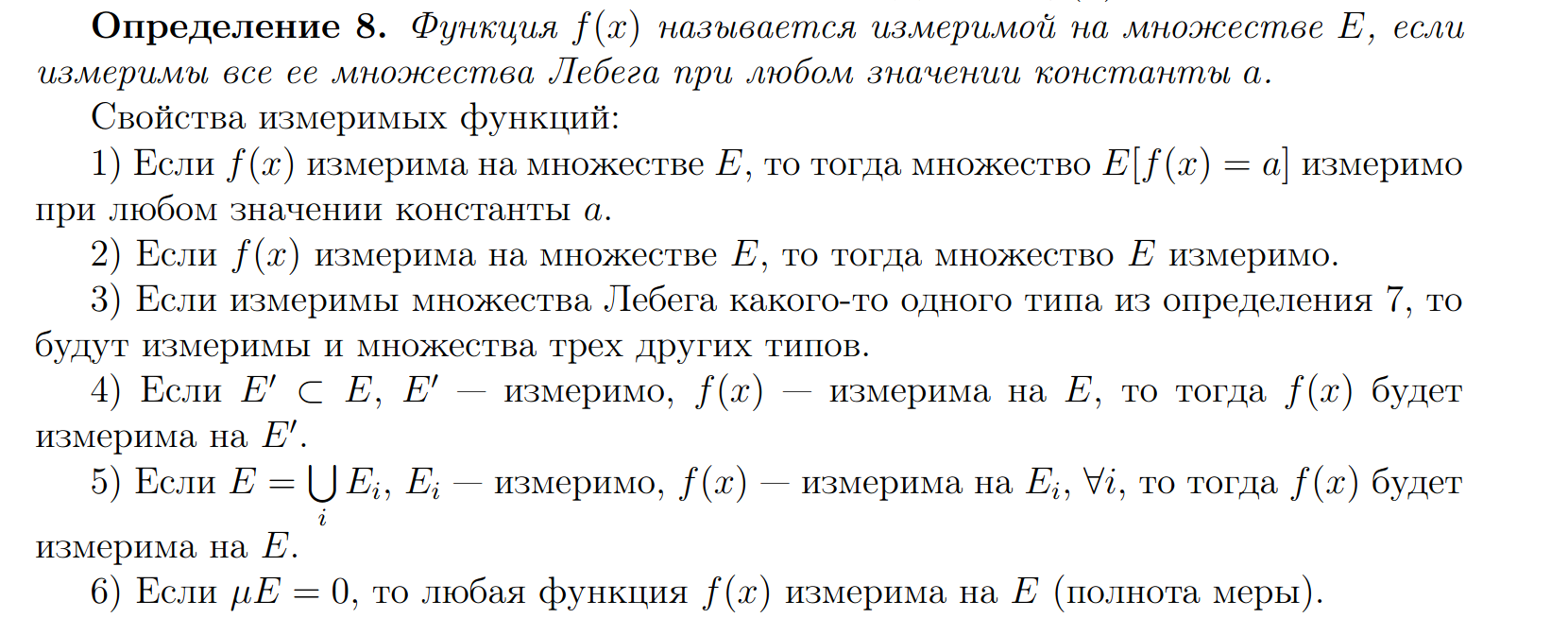
E [ f(x) >= a ]

E[ f(x) < a ]

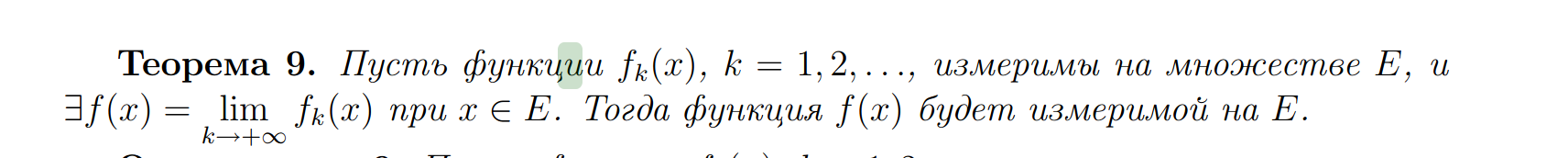
E [ f(x) <= a]

a = const

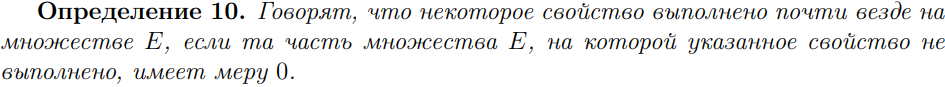




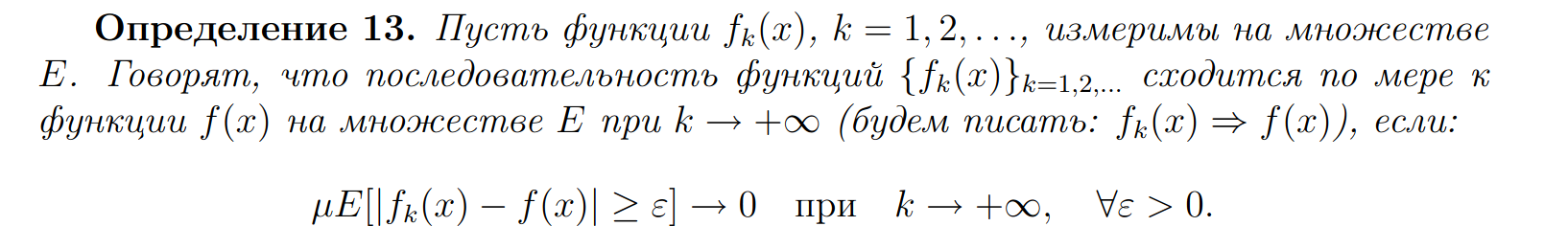
Предельный переход в классе измеримых функций.



***Сходимость «почти всюду» и эквивалентные функции.***



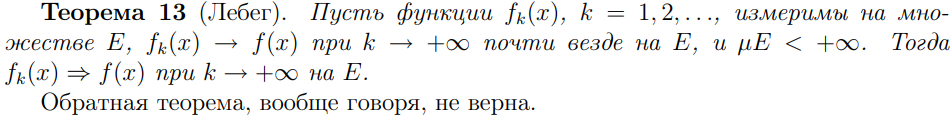
***Сходимость по мере.***



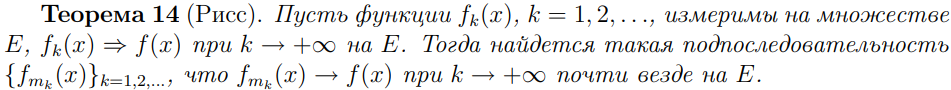
**Связь сходимости «почти всюду» и сходимости по мере.**

Из сходимости по мере не следует обычная сходимость

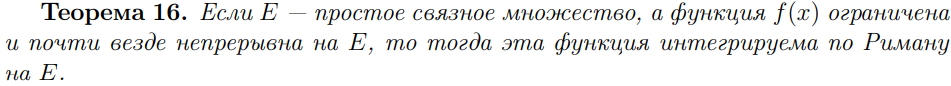
Теорема Лебега.



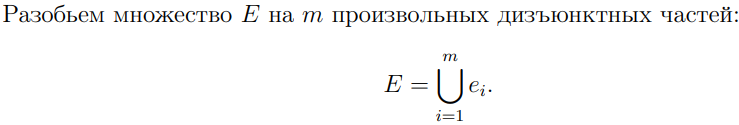
Теорема Рисса.

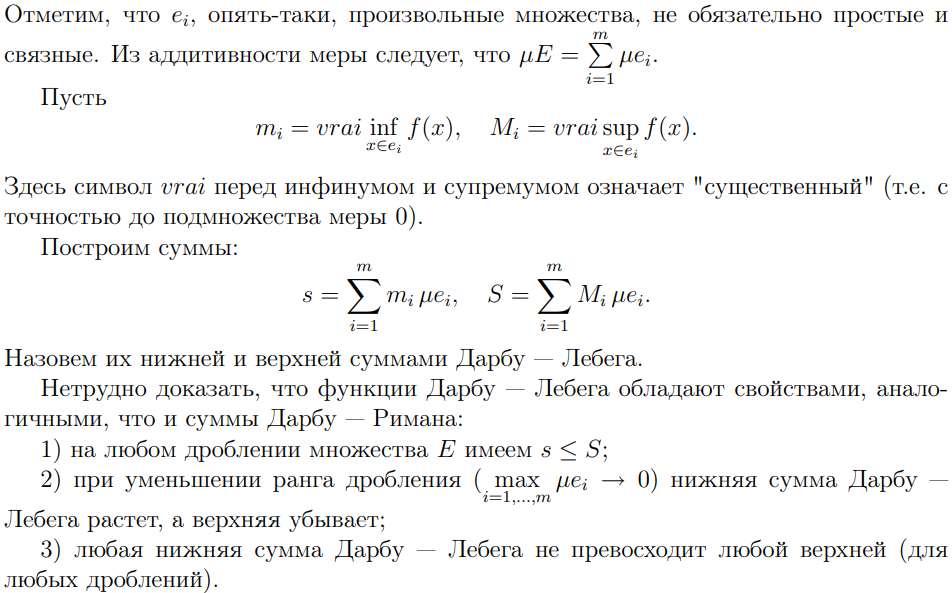


Интеграл Лебега от ограниченной функции по множеству конечной меры.

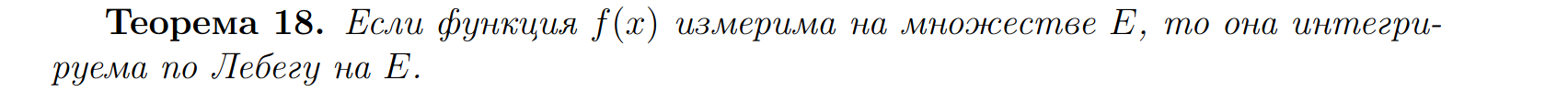


***Суммы Лебега-Дарбу.***

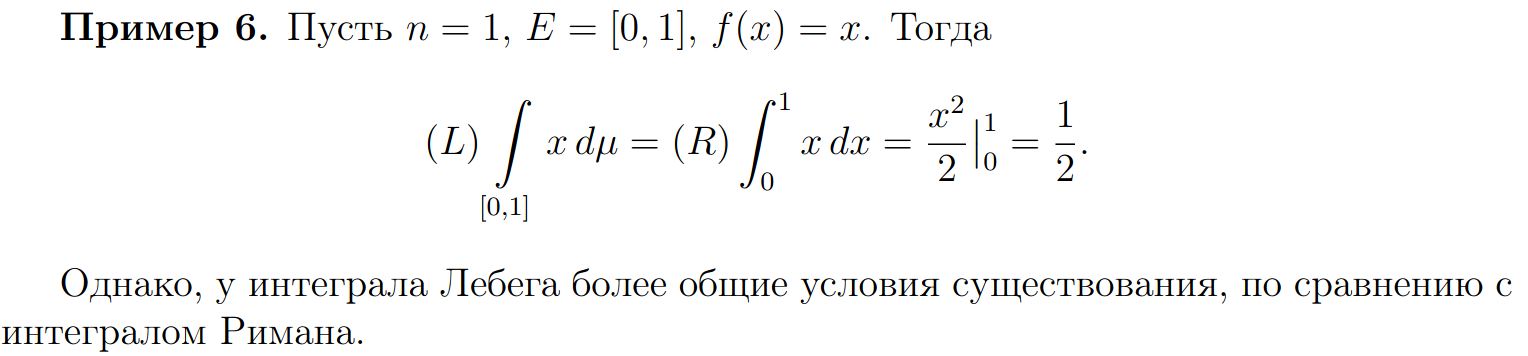




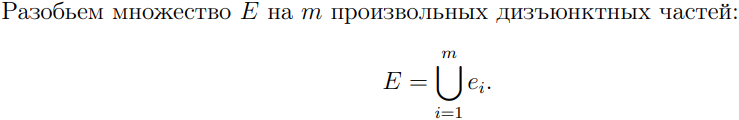
Теорема об интегрируемости измеримой функции.

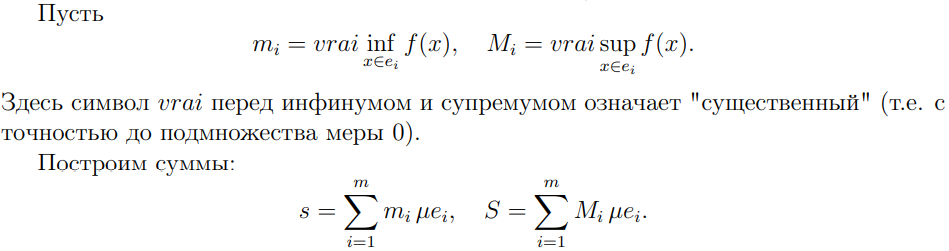


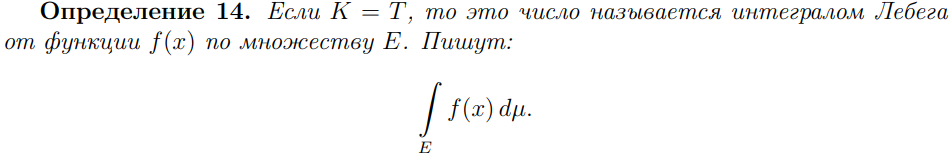
Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.



***Интеграл Лебега***

******

******

******