| Неронов Роман  Михайлович | 20.Б11-пу | 20.04.2022 |
| --- | --- | --- |
| Номер эссе: 19 | Тема эссе: “КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ” п. 1-2 | |

***Уравнения Лагранжа I рода и реакции идеальных связей***

Введем некоторые обозначения:

координаты j-ой точки.

– проекции главного вектора внутренних и внешних активных сил, действующих на j-ую точку.

– проекции главного вектора реакций связи, действующих на j-ую точку.

– масса j-ой точки

В этих обозначения уравнения Ньютона принимают следующий вид:

Система ограничена следующими связями:

где – функции аргументов и t.

Допустим, что все связи являются идеальными, тогда воспользуемся общим уравнением механики .

Так как вариации не являются независимыми, то голономные связи накладывают следующие условия: , а неголономные: .

Из этих условий k+r вариаций виртуальных перемещений можно выразить остальные, которые можно считать независимыми. После подстановки зависимых вариаций в общее уравнение механики оно становится линейной комбинацией независимых вариаций. Последовательно приравнивая к нулю все вариации кроме одной, получим уравнения движения.

Такой способ использования общего уравнения механики называется естественным, однако на практике это можно осуществлять более удобным способом – методом множителей Лагранжа.

Введем в рассмотрение дополнительных переменных – функции времени (множители Лагранжа).

Умножим каждое i условие, накладываемое голономными связями, на и каждое p условие, накладываемое неголономными связями, на и выберем эти величины так, чтобы множители при виртуальных перемещениях обратились в нуль, тогда и множители при остальных независимых вариациях тоже будут равны нулю. Так получим систему из уравнений:

Эти равенства и условия налагаемые связями образуют систему из уравнений относительно неизвестных: , называемых уравнениями Лагранжа первого рода.

Полученные уравнения весьма удобны для нахождения реакций связи, если найдены :

***Вывод канонических уравнений***

*Преобразование Лежандра*

Исходя из уравнений Лагранжа введём импульсы (обобщённые импульсы):

Система уравнений Лагранжа состоит из *s* обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат , для которых существуют способы сведения к системе из *2s* уравнений первого порядка. Можно помимо переменных ввести переменные и получить симметричную форму канонических (гамильтоновых уравнений).

Ввиду , а не зависит от обобщенных скоростей, то получаем равенство: Т.к. , то разрешимы относительно : .

Введём функцию Гамильтона . Далее, используя выше выведенные равенства, получаем:

*.*

Далее выводим канонические (гамильтоновы) уравнения:

Переход к этим уравнениям от уравнений Лагранжа второго рода при помощи обобщенных импульсов и функции Гамильтона называется преобразованием Лежандра.

*Преобразования Дирака*

Рассмотрим систему

Преобразование Дирака этих уравнений заключается в том, что в дополнение к «координатам» вводятся в рассмотрение «импульсы» и гамильтониан *H* по следующей формуле:

что приводит к гамильтоновой системе , .

***Первые интегралы канонических уравнений***

*Интеграл механической энергии*

Используя гамильтоновы уравнения получаем:

Отсюда следует, при независимости гамильтониана от *t*, то он является первым интегралом канонических уравнений: на любом решении *q,p* этих уравнений, причем величина *h* не зависит от времени – она является постоянной механической энергии.

Далее, используя формулы

получаем интеграл механической энергии в форме Якоби-Остроградского:

*.*

Если соотношения (при помощи которых введены лагранжевы координаты) стационарны, то получаем , а интеграл механической энергии выглядит следующим образом:

*Циклические координаты и соответствующие первые интегралы первого рода*

Если функция Лагранжа не зависит явно от координат при , то такие координаты – *циклические*. При этом оставшиеся координат называются *позиционными*.

Из получаем, что , и далее из канонических уравнений получаем , где не меняются со временем, а отсюда функции являются первыми интегралами канонической системы, то есть – первый интеграл, соответствующий циклической координате .

Для позиционных координат существует замкнутая система канонических уравнений:

Подставив позиционные координаты в , , находим циклические координаты.

*Метод Пуассона построения первых интегралов*

*Скобки Пуассона*

Допустим – скалярные, дважды дифференцируемые функции канонических аргументов и времени.

Пусть – скобка Пуассона функций .

Имеются следующие скобки:

* Если , то
* – тождество Пуассона

*Теорема Пуассона*

Рассмотрим уравнение Гамильтона и скалярную функцию вместе со своей полной производной по *t:* . Далее получаем

Отсюда следует необходимое и достаточное условие того, что – первый интеграл уравнения Гамильтона:

**Теорема Пуассона**

Если функции – первые интегралы канонической системы уравнений Гамильтона, то функция тоже интеграл этой системы и .

*Построение интеграла в стационарном случае*

**Теорема**

Если , – первый интеграл системы уравнений Гамильтона, и функции , при непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам, то они также являются интегралами этой системы.