| Неронов Роман  Михайлович | 20.Б11-пу | 20.04.2022 |
| --- | --- | --- |
| Номер эссе: 20 | Тема эссе: “КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ” п. 3-4 | |

***Метод Якоби решения канонических уравнений***

***Полный интеграл***

Рассмотрим уравнение в частных производных первого порядка: , где *z* – вещественнозначная функция от *n* независимых вещественных аргументов .

Частный интеграл уравнения в области *D* – любая функция *z аргумента x, которая обращается в при .*

Полный интеграл уравнения в области *D* – *n-*параметрическое семейство интегралов

Что , а из исключением параметров можно получить уравнение .

Отсюда:

* полный интеграл определяется однозначно уравнением
* из полного интеграла может быть получен любой частный интеграл в *D*

При независимости от *z* полный интеграл может быть рассмотрен в виде .

При независимости от *z* и , можно положить . Далее , а преобразуется в уравнение , имеющее интеграл

откуда получаем полный интеграл :

***Уравнение Гамильтона-Якоби***

Уравнения характеристик для уравнения в частных производных первого порядка вида – система обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме , где . Записав эти уравнения в симметрической форме можно заметить, что эта система уравнений характеристик для уравнений в частных производных вида : – уравнения Гамильтона-Якоби. Главная функция Гамильтона – неизвестная функция *S* аргументов и *t*.

Полный интеграл можно записать так: .

***Метод Якоби***

Этот метод решения канонических уравнений основан на том, что известен некоторый полный интеграл уравнения

**Теорема:** Если – область, а – полный интеграл вида уравнения , удовлетворяющий условию , то существует , что равенства представляет собой независимых интегралов канонических уравнений , где , как и , произвольные постоянные.

***Решение задачи о движении точки в центральном поле методом Якоби***

***Уравнения Лагранжа второго рода***

Сила, действующая на материальную точку *M* массы *m* в центральном поле сил в системе координат с началом в центре сил *O* задается формулой , а соответствующее уравнение Ньютона имеет вид , в котором , а – модуль силы, действующей на рассматриваемую материальную точку.

Центральное поле сил является потенциальным, и потенциал и потенциальная энергия задаются формулами . Тогда функция Лагранжа вычисляется так:

В качестве обобщенных координат можно использовать декартовы и любые криволинейные координаты.

***Уравнения Лагранжа в декартовых координатах***

При использовании декартовых координат в качестве обобщённых, то

,

.

Если в уравнения Лагранжа подставить *L* по вышевыведенной формуле и произвести все дифференцирования слева, то получим уравнения Ньютона .

***Уравнения Лагранжа в сферический координатах***

В качестве обобщённых координат введём сферические, задаваемые по формулами Далее, по известным ранее формулам, последовательно получаем , что

***Канонические уравнения относительно декартовых переменных***

Ради получения канонических уравнений для рассматриваемой задачи, введём импульсы и гамильтониан *H*:

.

Если в канонические уравнения для подставить *H* и произвести справа дифференцирования, то в результате получим уравнения:

***Канонические уравнения относительно сферических переменных***

Используя для в сферических координатах переменных, введём импульсы , соответствующие координатам и гамильтониан:

***Уравнение Гамильтона-Якоби в декартовых и сферических переменных***

Для рассматриваемой задачи о движении материальной точки в центральном поле уравнение Гамильтона-Якоби в декартовых переменных имеет следующий вид:

***Общий интеграл уравнений движения***

Так как уравнение Гамильтона не зависит явно от , то его полный интеграл будем искать в виде:

Подставляя это уравнение в получаем:

Функцию *Z* ищем в виде , из за чего получаем равенство:

Далее, если получаем

Система ; решается в квадратурах:

Согласно ; получаем: