

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

А. П. ИВАНОВ

**ПРАКТИКУМ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Методические указания

Санкт-Петербург
2013

ГЛАВА 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В методическом пособии приведены классификация методов решения СЛАУ и алгоритмы их применения. Методы приведены в форме, позволяющей их использование без обращения к другим источникам. Предполагается, что матрица системы неособая, т.е. $\det A \neq 0$.

§1. Нормы векторов и матриц

Напомним, что линейное пространство Ω элементов x называется нормированным, если в нём введена функция $\|\cdot\|_\Omega$, определённая для всех элементов пространства Ω и удовлетворяющая условиям:

1. $\|x\|_\Omega \geq 0$, причём $\|x\|_\Omega = 0 \iff x = 0_\Omega$;
2. $\|\lambda x\|_\Omega = |\lambda| \cdot \|x\|_\Omega$;
3. $\|x + y\|_\Omega \leq \|x\|_\Omega + \|y\|_\Omega$.

Договоримся в дальнейшем обозначать малыми латинскими буквами векторы, причём будем считать их вектор-столбцами, большими латинскими буквами обозначим матрицы, а греческими буквами станем обозначать скалярные величины (сохраняя за буквами i, j, k, l, m, n обозначения для целых чисел).

К числу наиболее употребительных норм векторов относятся следующие:

1. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$;
2. $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$;
3. $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.

Отметим, что все нормы в пространстве R^n являются *эквивалентными*, т.е. любые две нормы $\|x\|_i$ и $\|x\|_j$ связаны соотношениями:

$$\alpha_{ij} \|x\|_j \leq \|x\|_i \leq \beta_{ij} \|x\|_j,$$

$$\tilde{\alpha}_{ij}\|x\|_i \leq \|x\|_j \leq \tilde{\beta}_{ij}\|x\|_i,$$

причём α_{ij} , β_{ij} , $\tilde{\alpha}_{ij}$, $\tilde{\beta}_{ij}$ не зависят от x . Более того, в конечномерном пространстве любые две нормы являются эквивалентными.

Пространство матриц с естественным образом введёнными операциями сложения и умножения на число образуют линейное пространство, в котором многими способами можно ввести понятие нормы. Однако чаще всего рассматриваются так называемые *подчинённые* нормы, т.е. нормы, связанные с нормами векторов соотношениями:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Отмечая подчинённые нормы матриц теми же индексами, что и соответствующие нормы векторов, можно установить, что

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|; \quad \|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^T A)}; \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Здесь через $\lambda_i(A^T A)$ обозначено собственное число матрицы $A^T A$, где A^T – матрица, транспонированная к A . Кроме отмеченных выше трёх основных свойств нормы, отметим здесь ещё два:

- $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$,
- $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$,

причём в последнем неравенстве матричная норма подчинена соответствующей векторной норме. Договоримся использовать в дальнейшем только нормы матриц, подчинённые нормам векторов. Отметим, что для таких норм справедливо равенство: если E – единичная матрица, то $\|E\| = 1$.

§2. Матрицы с диагональным преобладанием

Определение 2.1. Матрица A с элементами $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ называется *матрицей с диагональным преобладанием* (величины δ), если имеют место неравенства

$$|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \geq \delta > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

§3. Положительно определённые матрицы

Определение 3.1. Симметричную матрицу A будем называть *положительно определённой*, если квадратичная форма $x^T A x$ с этой матрицей принимает лишь положительные значения при любом векторе $x \neq 0$.

Критерием положительной определённости матрицы может служить положительность её собственных чисел или положительность её главных миноров.

§4. Число обусловленности СЛАУ

При решении любой задачи, как известно, имеют место три типа погрешностей: неустраняемая погрешность, методическая погрешность и погрешность округления. Рассмотрим влияние неустраняемой погрешности исходных данных на решение СЛАУ, пренебрегая погрешностью округления и принимая во внимание отсутствие методической погрешности.

Будем считать, что в СЛАУ

$$Ax = b \quad (4.1)$$

матрица A известна точно, а правая часть b содержит неустраняемую погрешность δb .

Тогда для относительной погрешности решения $\|\delta x\|/\|x\|$ нетрудно получить оценку:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \nu(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}, \quad (4.2)$$

где $\nu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Число $\nu(A)$ называется числом обусловленности системы (4.1) (или матрицы A). Оказывается, что всегда $\nu(A) \geq 1$ для любой матрицы A . Поскольку величина числа обусловленности зависит от выбора матричной нормы, то при выборе конкретной нормы будем соответственно индексировать и $\nu(A)$: $\nu_1(A)$, $\nu_2(A)$ или $\nu_\infty(A)$.

В случае $\nu(A) \gg 1$ систему (4.1) или матрицу A называют плохо обусловленной. В этом случае, как это следует из оценки

(4.2), погрешность решения системы (4.1) может оказаться неприемлемо большой. Понятие приемлемости или неприемлемости погрешности определяется постановкой задачи.

Для матрицы с диагональным преобладанием легко получить оценку её числа обусловленности сверху. Имеет место

Теорема 4.1. Пусть A – матрица с диагональным преобладанием величины $\delta > 0$. Тогда она неособая и $\nu_\infty(A) \leq \|A\|_\infty/\delta$.

§5. Пример плохо обусловленной системы.

Рассмотрим СЛАУ (4.1), в которой

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Данная система имеет единственное решение $x = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$. Пусть правая часть системы содержит погрешность $\delta b = (0, 0, \dots, 0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\delta x_n = \varepsilon, \quad \delta x_{n-1} = \varepsilon, \quad \delta x_{n-2} = 2\varepsilon, \quad \delta x_{n-k} = 2^{k-1}\varepsilon, \dots, \delta x_1 = 2^{n-2}\varepsilon.$$

Отсюда

$$\|\delta x\|_\infty = \max_i \{|\delta x_i|\} = 2^{n-2}\varepsilon, \quad \|x\|_\infty = 1; \quad \|\delta b\|_\infty = \varepsilon, \quad \|b\|_\infty = 1.$$

Следовательно,

$$\nu_\infty(A) \geq \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} : \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 2^{n-2}.$$

Поскольку $\|A\|_\infty = n$, то $\|A^{-1}\|_\infty \geq n^{-1}2^{n-2}$, хотя $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1$. Пусть, например, $n = 102$. Тогда $\nu(A) \geq 2^{100} > 10^{30}$. При этом если даже $\varepsilon = 10^{-15}$ получим $\|\delta x\|_\infty > 10^{15}$. И тем не

менее $\|A\delta x\|_\infty = \varepsilon$.

§6. Ещё один пример

Рассмотрим совсем простую систему двух уравнений вида

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 &= 2 \\ (2 - \varepsilon)x_1 + x_2 &= 1. \end{cases} \quad (6.1)$$

С геометрической точки зрения уравнения, входящие в систему, представляют две прямые, пересекающиеся под малым углом (при $\varepsilon \ll 1$). Для этой системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 - \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \varepsilon - 2 & 2 \end{pmatrix},$$

а поэтому $\|A\|_\infty = 3$, $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{4 - \varepsilon}{\varepsilon}$ и, следовательно,
 $\nu_\infty(A) = \frac{12}{\varepsilon} - 3$. Решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\varepsilon} \\ x_2 = 2(1 - \frac{1}{\varepsilon}), \end{cases}$$

откуда видно, что оно существенно зависит от ε .

ГЛАВА 2. ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Под точными методами решения СЛАУ понимают методы, которые позволяют за конечное число арифметических операций при отсутствии округлений получить точное решение СЛАУ при точно заданной правой части СЛАУ и и точно заданных элементах её матрицы. Перечислим здесь некоторые из них с указанием алгоритмов их использования.

§1. Методы Гаусса

Методы Гаусса (или методы исключения неизвестных) оптимальны для решения СЛАУ общего вида по количеству арифметических операций, необходимых для нахождения решения этой системы.

Простой метод Гаусса состоит в следующем: в СЛАУ (4.1), записанной в координатной форме, производится деление первого уравнения системы на коэффициент при первом неизвестном, после чего это преобразованное уравнение, будучи умноженным последовательно на все коэффициенты при первом неизвестном из всех нижележащих уравнениях системы, вычитается из соответствующих уравнений. Тем самым первое неизвестное оказывается "исключенным" из всех уравнений системы, кроме первого. Оставив на время в покое первое уравнение, таким же образом исключаем из системы уравнений с номерами 2– n второе неизвестное и так далее. Результатом проделанной работы явится уравнение, содержащее лишь последнее неизвестное системы (4.1), из которого оно и находится. Этот этап преобразований СЛАУ носит название прямого хода метода Гаусса. Вслед за найденным неизвестным находятся поочередно и остальные. Этот этап называется обратным ходом метода Гаусса.

Отметим очевидный недостаток простого метода Гаусса – возможное обращение в нуль *ведущих* элементов, т.е. тех элементов, на которые приходится делить в прямом ходе метода Гаусса. Легко указать и способ избавления от этого недостатка простого метода Гаусса – перестановка уравнений системы, которая, очевидно, не меняет решения СЛАУ. Ввиду того, что решается СЛАУ с неособой матрицей, при исключении первого неизвестного в первом столбце

определена. Поставим задачу представить её в виде произведения: $A = S^T S$, где S – правая треугольная матрица:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Умножая матрицу S^T на S справа и приравнивая элементы результирующей матрицы соответствующим элементам матрицы A , получим:

$$\begin{aligned} s_{11}^2 &= a_{11}, & s_{1i} &= a_{1i}/s_{11}, & i &= \overline{2, n}, \\ s_{kk}^2 &= a_{kk} - \sum_{i < k} s_{ik}^2, & k &\geq 2, \\ s_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k < i} s_{ki} s_{kj} \right) / s_{ii}, & j &> i. \end{aligned} \quad (2.1)$$

§3. Метод отражений

Пусть $w \in \mathbb{R}^n$ – вектор единичной длины в евклидовой метрике: $w^T w = \sum_{j=1}^n w_j^2 = 1$. С его помощью построим матрицу $U = E - 2ww^T$, где E – единичная матрица $n \times n$. Очевидно, что $U = U^T$ и, кроме того,

$$U^2 = U^T U = (E - 2ww^T)^T (E - 2ww^T) = E - 4ww^T + 4w(w^T w)w^T = E,$$

т.е. матрица U является симметричной и ортогональной. Последнее равенство означает, что все собственные числа построенной матрицы U удовлетворяют соотношению: $\lambda^2(U) = 1$. Проверим, что вектор w является собственным для матрицы U , отвечающим собственному значению $\lambda(U) = -1$:

$$Uw = (E - 2ww^T)w = w - 2w(w^T w) = -w.$$

Кроме того, любой вектор $v \in \mathbb{R}^n$, $v \perp w$ (т.е. $w^T v = 0$) является собственным вектором матрицы U , отвечающим собственному значению $\lambda(U) = +1$:

$$Uv = (E - 2ww^T)v = v - 2w(w^T v) = v.$$

$$U = H, y = x, z = a \cdot n, v = a \cdot t, \omega = n, Uy = de$$

Если рассмотреть произвольный вектор $y \in \mathbb{R}^n$ и разложить его по векторам z, v : $y = z + v$, где $z = \alpha w$, $v \perp w$, то после умножения его на матрицу U получим: $Uy = -z + v$, т.е. вектор Uy является зеркальным отражением вектора y относительно плоскости, перпендикулярной вектору w .

Пусть y, z — произвольные векторы из \mathbb{R}^n . Построим вектор w таким образом, чтобы $Uy = \alpha z$. Поскольку матрица U является ортогональной и, следовательно, вектор Uy имеет в евклидовой метрике ту же длину, что и y , то α определится из условия $\|Uy\| = \|y\|$, т.е. $\alpha = \|y\|/\|z\|$. Следовательно, положив $w = (y - \alpha z)/\varrho$, где $\varrho = \|y - \alpha z\|$, мы получим искомый вектор.

Используем полученные результаты для упрощения СЛАУ. Возьмём на первом шаге преобразования СЛАУ $Ax = b$ в качестве вектора y первый столбец матрицы A , а в качестве вектора z — орт $e^1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ и построим как указано выше вектор $w^1 = y - \alpha e^1$. Умножив обе части исходной системы на матрицу $U_1 = (E - 2w^1(w^1)^T)$, получим СЛАУ $A_1x = b^1$, $A_1 = U_1A$, $b^1 = U_1b$, у которой первый столбец имеет нули во всех строках, кроме первой (если он уже имел такой вид, то никаких преобразований с ним производить не требуется).

На втором шаге положим

$$z = e^1 \in \mathbb{R}^{n-1}, y = (a_{22}^1, a_{32}^1, \dots, a_{n2}^1)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$$

(при условии, что второй столбец матрицы A_1 не коллинеарен вектору $e^2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$). Построив матрицу $U_2 = \{u_{ij}^2\}$ (размерности $(n-1) \times (n-1)$) и умножив обе части СЛАУ $A_1x = b_1$ на матрицу

$$\hat{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{11}^2 & \dots & u_{1,n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_{n-1,1}^2 & \dots & u_{n-1,n-1}^2 \end{pmatrix},$$

получим СЛАУ $A_2x = b^2$, у которой в первых двух столбцах под главной диагональю стоят нули. Дальнейшее очевидно. Получив систему с треугольной матрицей, решаем её как и в методе Гаусса. Отметим, что использование ортогональных матриц в процессе

преобразования системы к треугольному виду позволяет минимизировать влияние неустранимых погрешностей на решение СЛАУ.

§4. Метод окаймления

Отметим, что все методы, применяемые для решения СЛАУ применимы и для построения обратной матрицы, ибо последняя задача эквивалентна задаче решения совокупности n систем вида $Ax = e^i$, где e^i – i -ый орт пространства \mathbb{R}^n . Излагаемый ниже метод предназначен для построения обратных матриц для последовательности матриц увеличивающихся размерностей.

Представим исходную матрицу $A_n = A$ и искомую обратную к ней матрицу A^{-1} в блочном виде

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & v \\ u^T & a_n \end{pmatrix}, \quad A_n^{-1} = \begin{pmatrix} B_{n-1} & w \\ s^T & \alpha \end{pmatrix}$$

причём считаем, что матрица A_{n-1}^{-1} уже построена. Производя по-блочное умножение $A_n A_{n-1}^{-1}$ и $A_{n-1}^{-1} A_n$ и приравнивая результат единичной матрице, получим соотношения, из которых определятся блочные элементы матрицы A_n^{-1} (далее обозначено для краткости $c = A_{n-1}^{-1} v$):

$$\alpha = (a_n - u^T c)^{-1}, \quad s^T = -\alpha u^T A_{n-1}^{-1}, \quad w = -\alpha c, \quad B_{n-1} = A_{n-1}^{-1} - c s^T.$$

ГЛАВА 3. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

В итерационных методах строится последовательность векторов, которая при определенных условиях сходится к решению исходной СЛАУ.

§1. Метод простой итерации

Пусть СЛАУ

$$Ax = b \quad (1.1)$$

тем или иным способом записана в виде:

$$x = Bx + c. \quad (1.2)$$

Метод простой итерации (для краткости – МПИ) состоит в следующем: берётся некоторый вектор $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и строится последовательность векторов $\{x^k\}$ по формуле

$$x^{k+1} = Bx^k + c. \quad (1.3)$$

Теорема 1.1. (достаточное условие сходимости МПИ) Если $\|B\| < 1$, то СЛАУ (1.2) имеет единственное решение \bar{x} и последовательность (1.3) сходится к нему со скоростью геометрической прогрессии.

Замечание 1.1. При выполнении условий теоремы МПИ сходится к решению системы для любого начального вектора.

Теорема 1.2. МПИ сходится при любом начальном векторе x^0 и любом векторе c тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B лежат в единичном круге.

Замечание 1.2. В качестве начального вектора для итерационного процесса ((1.3)) рекомендуется брать вектор c .

Степень близости очередного приближения x^k к решению может быть оценена так:

$$\|\bar{x} - x^k\| \leq \|B\| \|\bar{x} - x^{k-1}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|x^k - x^{k-1}\|.$$

Замечание 1.3. Для сходимости построенной последовательности достаточно, чтобы нашлась *любая подчинённая* норма матрицы, в которой выполнено условие теоремы 1.1. При этом сходимость $\{x^k\}$ к решению \bar{x} будет иметь место в *любой* норме пространства \mathbb{R}^n ввиду эквивалентности норм в конечномерных пространствах.

Определение 1.1. Если для системы (1.2) имеет место сходимость последовательности $\{x^k\}$, построенной в соответствии с формулой (1.3), то будем говорить, что система (1.1) приведена к виду, пригодному для применения МПИ.

Отметим тот факт, что любую СЛАУ с неособой матрицей можно привести к виду, пригодному для применения МПИ.

Рассмотрим сначала СЛАУ (1.1), в которой матрица A является положительно определённой. Пусть в (1.2) матрица B и вектор c имеют вид:

$$B = E - \mu A, \quad c = \mu b, \quad \text{где } \mu = \frac{2}{\|A\| + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.4)$$

Очевидно, что система (1.2) в таком случае эквивалентна системе (1.1). Отметим здесь же, что матрица B является симметричной (хотя, возможно, и не положительно определённой). Для выписанной здесь матрицы B выполнены условия теоремы 1.1 и потому процесс итераций будет сходиться.

Если же в исходной системе A не является и положительно определённой, то, умножая обе части (1.1) на транспонированную матрицу A^T , придём к системе

$$\hat{A}x = \hat{b}, \quad \hat{A} = A^T A, \quad \hat{b} = A^T b,$$

которая эквивалентна исходной системе ввиду предположенной неособости A и в которой матрица \hat{A} обладает требуемым свойством положительной определённости. Тем самым установлено, что *любая* СЛАУ с неособой матрицей указанным выше способом может быть приведена к виду, пригодному для применения МПИ.

Замечание 1.4. В формуле (1.4) можно брать и другие значения для μ , например $\mu = 1/\|A\|$ (оно получается при $\varepsilon = \|A\|$).

причем гарантируется сходимость последовательности к решению \bar{x} системы (1.1), поскольку в данном случае будет выполнено достаточное условие сходимости $\|A\|_\infty < 1$. Построенный таким образом итерационный процесс называется *методом Якоби*.

ГЛАВА 4. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

§1. Цель работы

1. Программная реализация на языке C++ точного и итерационного методов решения СЛАУ, предложенных преподавателем;
2. проверка работы составленной программы для заданной ниже СЛАУ;
3. используя составленные программы, опробовать их работу для плохо обусловленной системы.

§2. СЛАУ для проверки

Далее параметр N равен номеру студента по списку группы.

$$A = \begin{pmatrix} N+2 & 1 & 1 \\ 1 & N+4 & 1 \\ 1 & 1 & N+6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} N+4 \\ N+6 \\ N+8 \end{pmatrix}.$$

§3. Плохо обусловленная СЛАУ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon N \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$
$$b = (-1, -1, \dots, -1, +1)^T.$$

Здесь ε можно брать в широком диапазоне от 10^{-3} до 10^{-6} . Систему следует решать при увеличивающейся размерности матрицы A и вектора b .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Бахвалов, Н. Жидков, Г. Кобельков.* Численные методы. — М.: Изд. Физматлит, 2006.
2. *В. М. Вержбицкий.* Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. — М.: Изд. Высшая школа, 2000.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Вспомогательные сведения.....	2
§ 1. Нормы векторов и матриц.....	2
§ 2. Матрицы с диагональным преобладанием.....	3
§ 3. Положительно определённые матрицы.....	4
§ 4. Число обусловленности СЛАУ.....	4
§ 5. Пример плохо обусловленной системы.....	5
§ 6. Ещё один пример.....	6
Глава 2. Точные методы решения СЛАУ.....	7
§ 1. Методы Гаусса.....	7
§ 2. Метод квадратного корня.....	9
§ 3. Метод отражений.....	10
§ 4. Метод окаймления.....	12
Глава 3. Итерационные методы.....	13
§ 1. Метод простой итерации.....	13
§ 2. Метод Зейделя.....	15
§ 3. Метод Якоби.....	15
Глава 4. Материалы для выполнения задания.....	17
§ 1. Цель работы.....	17
§ 2. СЛАУ для проверки.....	17
§ 3. Плохо обусловленная СЛАУ.....	17
Литература.....	18