

[787] Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)^2 - 4 &= 0 \\ 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0 \\ D = 4 - 4 \cdot (-3) &= 16 \\ \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} &= 1 \pm 2 \\ \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\underline{\lambda_1 = 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & -1 \\ -4 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} -2V_{11} - V_{12} = 0 \\ -4V_{11} - 2V_{12} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2V_{11} = V_{12} \\ -2V_{11} = V_{12} \end{cases}$$

$$\text{Тогда: } V_{11} = 1, \quad V_{12} = -2$$

$$\text{Собственный вектор} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = -1}$$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & -1 \\ -4 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} 2V_{11} - V_{12} = 0 \\ -4V_{11} + 2V_{12} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2V_{11} = V_{12} \\ -2V_{11} = -V_{12} \end{cases}$$

$$\text{Тогда: } V_{11} = 1, \quad V_{12} = 2$$

$$\text{Собственный вектор} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$