[787] Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$
$$1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$
$$D = 4 - 4 \cdot (-3) = 16$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$$
$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

$\underline{\lambda_1 = 3}$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & -1 \\ -4 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2V_{11} - V_{12} = 0 \\ -4V_{11} - 2V_{12} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -2V_{11} = V_{12} \\ -2V_{11} = V_{12} \end{cases}$$

Тогда: $V_{11} = 1, \quad V_{12} = -2$

Собсвтенный вектор $= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = -1}$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & -1 \\ -4 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2V_{11} - V_{12} = 0 \\ -4V_{11} + 2V_{12} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2V_{11} = V_{12} \\ -2V_{11} = -V_{12} \end{cases}$$

Тогда: $V_{11} = 1, \quad V_{12} = 2$

Собсвтенный вектор $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$