

Metodi Matematici per l'Informatica

Esame (a.a. 22/23, I canale) - Docente: Lorenzo Carlucci - Data: 14 Luglio 2023

Parte 1

Esercizio 1 Il menu di un ristorante comprende 5 antipasti (di tre tipi: 2 di carne, 1 di pesce, 2 vegetariani), 8 primi (di tre tipi: 4 di carne, 2 di pesce e 2 vegetariani) e 7 secondi (di tre tipi: 3 di carne, 2 di pesce e 2 vegetariani).

1. In quanti modi posso scegliere un pasto completo (antipasto, primo e secondo)? [1 punto]
2. In quanti modi posso scegliere un pasto completo senza piatti di carne? [2 punti]
3. Mario non mangia carne e Maria non mangia pesce. Quante sono le possibili ordinazioni di due pasti completi fatte da Mario e Maria? [2 punti]

Esercizio 2 Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Z \rightarrow Y$ dove $Z \subseteq X$. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false. (NB: per un qualunque $S \subseteq X$ con $f(S)$ si denota l'insieme $\{y \in Y : \text{per qualche } s \in S \text{ vale } f(s) = y\}$. Analogamente per $g(S)$).

1. Se f è iniettiva allora g è iniettiva. [1 punto]
2. $f(X - Z) \subseteq f(X) - f(Z)$. [2 punti]
3. $Y = f(X) \cup g(Z)$. [2 punti]

Esercizio 3 Consideriamo la seguente relazione \prec definita su coppie di intervalli chiusi dell'insieme dei numeri interi relativi: $[x, y] \prec [w, z]$ se e solo se $[x, y] \subseteq [w, z]$ oppure $y < z$. Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. La relazione \prec è riflessiva. [1 punto]
2. La relazione \prec non è simmetrica. [2 punti]
3. La relazione \prec è transitiva. [2 punti]

Parte 2

Esercizio 4 Dimostrare per Induzione che, per ogni $n \geq 1$, se X e Y sono insiemi di n elementi, il numero di funzioni biiettive tra X e Y è $n!$.

1. Caso Base [1 punto]
2. L'ipotesi induttiva (che posso assumere quando dimostro il caso generico $n + 1$) è: [2 punti]
3. Dimostrazione del passo induttivo: [2 punti]

Esercizio 5 Mario, Claudia e Gianni hanno fatto un test di ammissione. Rilasciano le seguenti dichiarazioni.

Mario dice: “O io ho superato il test e Gianni non lo ha superato o Gianni e Claudia hanno superato il test.”
Claudia dice: “O Mario e Gianni superano entrambi il test o nessuno dei due lo ha superato.”
Gianni dice: “Se Mario non ha superato il test allora Claudia ha superato il test.”

1. Formalizzare le tre affermazioni in logica proposizionale scegliendo un linguaggio adeguato.
2. È possibile che tutti e tre dicano il vero? Argomentare.
3. Se tutti dicono il falso, posso dire chi ha superato sicuramente il test? Argomentare.

(Indicazione: usare le tavole di verità).

Esercizio 6 La seguente formula proposizionale in CNF è soddisfacibile?

$$\{\{\neg p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{s, p\}, \{\neg s, p, \neg q\}\}.$$

Se si risponde “SI” definire un assegnamento che la soddisfa, se si risponde “NO” dimostrare l'insoddisfacibilità usando la regola di Risoluzione.