Sapienza, Università di Roma

Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Note di base di

Analisi Matematica

versione 1.2 (7 ottobre 2015)

Lamberto LAMBERTI

Corrado MASCIA

CAPITOLO 3

Incontri ravvicinati con i limiti: le successioni

Una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni numero naturale n un valore $a(n)$ è una successione (numerica). In genere, l'$n-$esimo elemento della successione si indica con a_n (invece di $a(n)$), questione di tradizione. Gli elementi della successione a_n possono essere pensati come una sequenza di valori ordinati in base al loro indice n

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

Un primo esempio è la successione dei numeri pari: $2, 4, 6, \ldots$. In questo caso $a_n = 2n$. Un altro esempio semplice di funzione di n è l'espressione n-fattoriale, definita dal prodotto dei primi n numeri interi

$$a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

che dà luogo alla successione $1, 1, 2, 6, 24, 120, \ldots$ (per definizione $0! := 1$).

Una successione può essere rappresentata disegnando nel piano cartesiano sopra ogni valore $n \in \mathbb{N}$ (dell'asse x) il valore definito da a_n, proprio come nel caso delle funzioni. Questo primo metodo è molto pratico nel caso di successioni definite da $a_n = f(n)$, dove si conosca il grafico della funzione f: basta prendere sul grafico di f solamente i punti con coordinata $x \in \mathbb{N}$. In alternativa, assegnata la successione a_n si può considerare come sua rappresentazione il grafico della funzione g definita da

$$g(x) = a_n \qquad \text{per} \quad x \in [n, n+1).$$

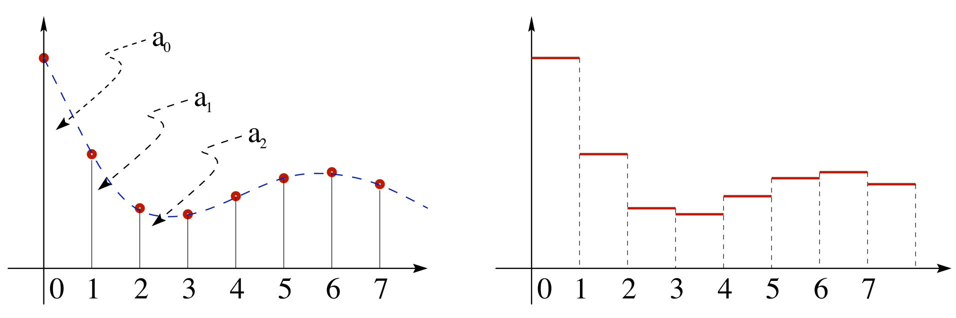

FIGURA 1.

Successioni definite per ricorrenza. In quel che segue utilizzeremo le successioni numeriche come una "cavia da laboratorio" per imparare, in una situazione particolarmente semplice, il concetto di limite e le procedure di base di calcolo. In realtà le successioni numeriche possono emergere anche da semplici modelli applicati. Supponiamo di voler studiare una popolazione di individui e di indicare con a_n il numero di abitanti all'anno n. Per controllare l'evoluzione della popolazione occorre conoscere il *tasso di incremento* R, definito da

$$R = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n},$$

che descrive quanto valga l'aumento di popolazione $a_{n+1} - a_n$ rispetto alla popolazione a_n all'anno n. Se si suppone che il tasso di crescita R sia costante ed uguale ad $r \in \mathbb{R}$, si ottiene, $a_{n+1} - a_n = ra_n$, cioè, esplicitando rispetto ad a_{n+1},

$$a_{n+1} = (1 + r)a_n.$$

Quindi, se si assegna la popolazione a_0 all'anno iniziale, si deduce che $a_1 = (1 + r)a_0$, $a_2 = (1 + r)a_1 = (1 + r)^2 a_0$ In generale questo semplice modello dà luogo ad una popolazione che cresce esponenzialmente in n, infatti

$$a_{n+1} = (1 + r)a_n = (1 + r)^2 a_{n-1} = \cdots = (1 + r)^{n+1} a_0.$$

Ad esempio, se si parte da una popolazione di 100 abitanti e si suppone che il tasso di crescita annuale sia del 10%, cioè $r = 0,1$, dopo dieci anni la popolazione sarà di $a_{10} = 1,1^{10} \times 100$ abitanti (circa 259). Se si sceglie il tasso di incremento della forma $R = r(N - a_n)$ (questo vuol dire che c'è una popolazione critica, in questo caso pari a N, tale che se $a_n > N$ la popolazione decresce, mentre se $a_n < N$ la popolazione aumenta), si ottiene

$$a_{n+1} = (1 + Nr)a_n - ra_n^2 \qquad \text{(equazione logistica).}$$

Già un oggetto così semplice e apparentemente innocuo è in grado di generare (per scelte opportune del parametro r) dinamiche particolarmente "stravaganti" e molto interessanti.

L'esempio precedente rientra nella classe delle successioni *definite per ricorrenza*: il termine $(n + 1)-$esimo si ottiene in funzione dei termini precedenti. Nella forma più semplice, il termine $(n+1)-$esimo è determinato dal solo termine $n-$esimo: assegnata la funzione f (dipende dal modello), si pone $a_{n+1} = f(a_n)$. Come nell'esempio precedente occorre anche assegnare una *condizione iniziale*, cioè deve essere dato il valore iniziale a_0.

1. Limite di successioni

Il concetto fondamentale su cui si basa l'analisi matematica è quello di limite. L'idea che esprime il concetto di limite di una successione è semplice: assegnata la successione a_n, siamo in grado di "prevedere" quello che succederà per valori di n molto grandi? Più precisamente: è vero che la successione a_n "si stabilizza" per $n \to +\infty$, ovvero tende ad avvicinarsi ad un valore ℓ fissato? In caso affermativo, si dice che la successione ammette limite ℓ per $n \to +\infty$, altrimenti si dice che la successione non ha limite. Molte parole che abbiamo scritto nelle righe precedenti vanno precisate: che vuol dire "avvicinarsi"? E mandare n a $+\infty$ è da considerarsi un terribile insulto?

Partiamo da alcuni esempi. Sia

$$a_n = \frac{1}{n+1} \qquad n \in \mathbb{N},$$

cioè consideriamo la successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Nessun numero di questa successione è zero, ma, per n che cresce, a_n si avvicina a zero. La frase "si avvicina a zero" va interpretata in questo senso: se decidiamo che l'essere vicino vuol dire che la distanza tra a_n e 0 deve essere minore di $1/10$, allora basta considerare gli elementi a_n della successione con indice $n \geq 10$; se rendiamo la condizione più stringente, ad esempio richiedendo che la distanza sia minore di $1/100$, basta considerare $n \geq 100$, e così via. In generale, comunque fissiamo una distanza $\varepsilon > 0$, da un certo indice n_ε in poi (n_ε dipende da ε) la distanza di a_n da 0 (che è data da $|a_n - 0|$) è minore di ε, cioè

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall\, n > n_\varepsilon. \tag{11}$$

In questo caso si dice che a_n tende a 0 per $n \to +\infty$ (che si legge "n tende a $+\infty$"). Per la successione $b_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ la situazione è esattamente la stessa, dato che

$$|b_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| = |a_n - 0|.$$

L'unica differenza è che i numeri b_n sono alternativamente più grandi e più piccoli di zero, cioè la successione *oscilla* attorno al valore limite 0, ma anche in questo caso vale la proprietà (11).

Consideriamo $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Scrivendo la successione nella forma

$$a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| = \frac{1}{n+1},$$

vediamo che, per $n \to +\infty$, la distanza di a_n da 1 tende a zero, cioè il valore a_n si avvicina ad 1. Anche la successione $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+n+1}$ si comporta in modo analogo, infatti:

$$a_n = 1 - \frac{n+2}{n^2+n+1} \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| = \frac{n+2}{n^2+n+1} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \qquad \forall n \geq 2,$$

da cui si deduce che la distanza di a_n da 1 tende a zero per $n \to \infty$.

DEFINIZIONE 1.1. Limite di successione. *Si dice che la successione a_n* converge ad *$\ell \in \mathbb{R}$* per *$n \to +\infty$ e si scrive $a_n \to \ell$ per $n \to +\infty$ o $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon. \tag{12}$$

Il valore ℓ è il limite della successione *a_n.*

Se $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$ (cioè se vale (11)), si dice che a_n è infinitesima.

La definizione esprime che, comunque si fissi una soglia di errore $\varepsilon > 0$, tutti gli elementi a_n della successione distano dal limite ℓ meno di ε, tranne al più un numero finito (quelli con indice da 1 ad n_ε). Quindi una maniera equivalente di dire che ℓ è il limite di a_n è affermare che *ogni intorno di ℓ contiene tutti i valori della successione a_n tranne al più un numero finito.*

Si faccia bene attenzione al fatto che la soglia ε vive sull'asse delle ordinate (e non su quello delle ascisse). In generale, scegliendo valori più piccoli per il margine di errore ε occorre scegliere valori più grandi di n_ε; in altre parole, in generale, n_ε cresce quando ε tende a zero.

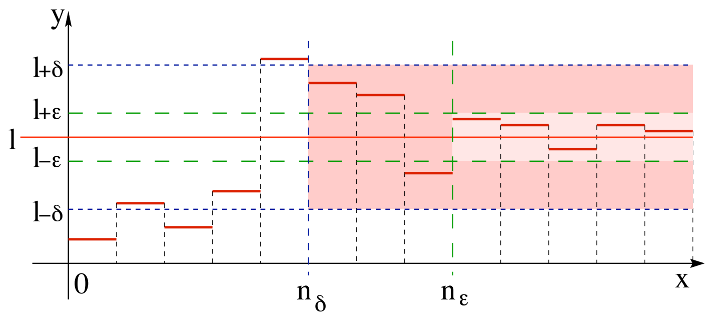

FIGURA 2.

OSSERVAZIONE 1.2. Per quale motivo si richiede che ε possa essere scelto arbitrariamente? Non basterebbe scegliere un fissato ε sufficientemente piccolo, ad esempio ε pari a un miliardesimo o a un miliardesimo di miliardesimo? Il problema è che i concetti di "grande" e "piccolo" sono soggettivi, mentre quello che si vuole definire qui è un criterio assoluto che vada bene sia per l'astronomo che usa la distanza Terra-Luna come parametro di "vicinanza", sia per il fisico atomico per cui un millimetro è già una distanza abissale. La richiesta di una proprietà che valga *per ogni scelta di ε* rende la definizione "universale", cioè indipendente dalla personale idea di piccolo o grande.

ESERCIZIO 1.3. *Sia a_n una successione convergente ad ℓ per $n \to +\infty$ e sia b_n un'altra successione tale che $b_n = a_n$ per ogni $n > N_A$ dove N_A è il numero di Avogadro*[1]*. Dimostrare che anche b_n converge ad ℓ per $n \to +\infty$.*

Soluzione. Niente di più facile dato che la definizione di limite non dipende dal comportamento di un numero finito di elementi della successione. Per ipotesi,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \qquad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

Ora vogliamo far vedere che vale una frase analoga anche per la successione b_n. Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $n'_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon, N_A\}$. Allora, se $n > n'_\varepsilon$, dato che $n > N_A$ si ha $b_n = a_n$ e dato che $n > n_\varepsilon$ vale anche $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Dunque

$$|b_n - \ell| = |a_n - \ell| < \varepsilon \qquad \forall n > n'_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon, N_A\},$$

cioè la conclusione. E' essenziale che N_A sia proprio il numero di Avogadro o lo stesso ragionamento vale per N_A qualsiasi?

Calcolo diretto di un limite. Abbiamo una perfetta definizione di limite: logicamente ineccepibile. Ma come fare per verificarne la validità in un caso concreto? Proviamo a vedere un esempio. Tenete però conto che, nella pratica, non è questo il modo con cui si calcolano la maggior parte dei limiti! L'esempio che segue serve solo per acquisire maggiore familiarità con la definizione.

Consideriamo la successione

$$a_n = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Ammette limite? Ecco subito il primo problema: nella definizione di limite compare il valore ℓ del limite stesso, ma in generale ci si trova ad avere un'espressione per la successione, non per il suo (eventuale) limite. Questo va ottenuto per un'altra strada. Proviamo a ragionare in maniera casereccia. La domanda di fondo è: cosa succede dei valori a_n per n molto grande? Ad esempio, se $n = 1000$,

$$a_{1000} = \frac{1000^2}{1000^2+1} = \frac{1000000}{1000001}.$$

Bene... e se $n = 100000$? Allora

$$a_{100000} = \frac{100000^2}{100000^2+1} = \frac{10000000000}{10000000001}.$$

Come si vede, per valori di n molto grandi il termine $+1$ a denominatore diventa sempre più ridicolo perché va a sommarsi ad una quantità enormemente più grande. Allora è sensato aspettarsi che per $n \to +\infty$ valga un'approssimazione del tipo $n^2 + 1 \approx n^2$ e quindi $a_n = \frac{n^2}{n^2+1} \approx \frac{n^2}{n^2} = 1$. Questo per ora non dimostra un bel nulla, ma fa sospettare che la successione abbia limite e che il suo limite sia $\ell = 1$. Rimbocchiamoci le maniche

[1] Per chi non lo ricorda il numero di Avogadro è $N_A = 6,02214199 \times 10^{23}$.

e proviamo a dimostrarlo. Qual'è l'affermazione racchiusa nella definizione di limite? la distanza di a_n da ℓ è piccola se n è grande. Prima di tutto, quindi, scriviamo $|a_n - \ell|$:

$$|a_n - \ell| = \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n^2 - n^2 - 1}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1}.$$

Ora si tratta di far vedere che, fissato $\varepsilon > 0$, questa distanza è minore di ε se scegliamo $n > n_\varepsilon$ dove *abbiamo completa libertà di scelta per* n_ε. Imponiamo la disequazione a cui vogliamo arrivare e riscriviamola come condizione su n:

$$\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \qquad \overset{\varepsilon<1}{\Longleftrightarrow} \qquad n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}.$$

Il gioco è fatto, basta scegliere $n_\varepsilon \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, ad esempio,

$$n_\varepsilon := \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}\right] + 1$$

dove $[\,\cdot\,]$ indica la funzione parte intera.

Esercizio 1.4. *Dimostrare a partire dalla definizione la validità di*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \qquad k \in \mathbb{N},\ k \neq 0.$$

Esercizio 1.5. *Dimostrare che, se* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, *allora* $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$.

Come dimostrare che una successione non ha limite? Data una successione a_n, una sottosuccessione a_{n_k} di a_n si ottiene scegliendo un sottoinsieme infinito degli elementi di a_n, scelti in modo che ogni elemento abbia indice strettamente maggiore di quello del precedente. Ad esempio, gli elementi di indice dispari $a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ \dots$ costituiscono una sottosuccessione di $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots$, così come gli elementi di indice pari $a_0,\ a_2,\ a_4,\ a_6,\ \dots$. Invece $a_5, a_3, a_{12}, a_{101}, \dots$ non è una sottosuccessione, perché il primo elemento ha indice maggiore del secondo.

Come individuare una sottosuccessione? Bisogna indicare il primo elemento, poi il secondo, quindi il terzo e così via. In definitiva bisogna scegliere un'applicazione da $\mathbb{N}$ ad $\mathbb{N}$ che ci dica al $k-$esimo posto qualè l'elemento n_k della successione scelto: al numero $k \in \mathbb{N}$ viene quindi associato un numero naturale n_k. Per fare in modo che l'ordine degli elementi venga preservato occorre che n_k sia crescente, cioè se $k_1 < k_2$ allora $n_{k_1} < n_{k_2}$. La sottosuccessione dei termini di indice dispari è espressa da $n_k = 2k+1$: per $k = 0$ si prende $n_k = 1$, per $k = 1$ si prende $n_k = 3$ e così via...

Esercizio 1.6. *Dire quale delle seguenti espressioni possono essere i primi elementi di una sottosuccessione di* $a_n = n$

$$\{1, 1, 3, 5, 7, \dots\}, \qquad \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}, \qquad \{1, 3, 5, 7, 6, 9, \dots\}.$$

ESERCIZIO 1.7. *Data la successione* $a_n = n$, *quali sono i primi termini della sottosuccessione* a_{k^2}? *E se* $k_n = 2n$? *Ripetere l'esercizio nel caso in cui* $a_n = n^2 + 1$.

PROPOSIZIONE 1.8. *Sia* a_n *una successione convergente ad* ℓ *per* $n \to +\infty$. *Allora ogni sua sottosuccessione* a_{n_k} *converge allo stesso limite* ℓ *per* $k \to +\infty$.

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

La Proposizione 1.8 può essere utilizzata "in negativo" per dimostrare che una assegnata successione non ammette limite. Consideriamo ad esempio la successione $a_n = (-1)^n$. La sottosuccessione dei termini di indice pari è $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ per ogni k, quindi, essendo costantemente uguale ad 1, converge ad 1 per $k \to +\infty$. Invece, la sottosuccessione dei termini di indice dispari è $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$ per ogni k, quindi converge a -1 per $k \to +\infty$. Dato che due sottosuccessioni diverse convergono a limiti diversi, la conclusione della Proposizione 1.8 e quindi l'ipotesi non può essere vera: la successione $(-1)^n$ non è convergente. In generale, *se da una successione possono essere estratte due sottosuccessioni convergenti a limiti diversi, la successione non è convergente.*

Prime proprietà delle successioni convergenti. Prima di enunciare alcuni risultati che permettono di calcolare limiti in maniera più semplice di come si è fatto finora, dimostriamo alcune proprietà generali delle successioni convergenti.

PROPOSIZIONE 1.9. *Se una successione è convergente, allora il suo limite è unico.*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che se la successione a_n tende sia ad ℓ che ad ℓ', allora deve essere $\ell = \ell'$. Per definizione di limite, è vero che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, n > n_\varepsilon \qquad \text{e} \qquad \exists\, n'_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |a_n - \ell'| < \varepsilon \quad \forall\, n > n'_\varepsilon.$$

Allora, per $n > \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$, sono vere entrambe le affermazioni e quindi

$$0 \le |\ell - \ell'| = |\ell - a_n + a_n - \ell'| \le |\ell - a_n| + |a_n - \ell'| < 2\varepsilon.$$

In definitiva, abbiamo dimostrato che, per ogni $\varepsilon > 0$, vale $0 < |\ell - \ell'| < 2\varepsilon$. Quindi $|\ell - \ell'| = 0$, cioè $\ell = \ell'$. □

DEFINIZIONE 1.10. *Una successione* a_n *tale che esista* $M > 0$ *per cui* $|a_n| \le M$ *per ogni* n, *(cioè tutti gli* a_n *appartengono all'intervallo* $[-M, M]$*) si dice* limitata.

Se si ricorda che una successione a_n è una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, la condizione espressa nella Definizione 1.10 è equivalente alla frase "$a(\mathbb{N})$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$", che è proprio la definizione di limitatezza data per funzioni di una variabile.

PROPOSIZIONE 1.11. *Se* a_n *è una successione convergente allora è anche limitata.*

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon = 1$, dato che a_n è convergente, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\ell - 1 < a_n < \ell + 1$ per ogni $n > N$. Quindi la "coda" della successione $a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ vive in un insieme limitato. Dato che i termini mancanti sono in numero finito, tutta la successione "vive" in un insieme limitato (se necessario più grande del precedente). □

Il viceversa non è vero: *esistono successioni limitate, non convergenti.* Ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ non è convergente, ma è limitata dato che $|(-1)^n| = 1$ per ogni n (quindi si può scegliere $M = 1$ nella Definizione 1.10).

Successioni divergenti. Oltre alle successioni che tendono ad un limite, ci sono anche quelle il cui valore a_n diventa arbitrariamente grande: ad esempio la successione dei numeri pari $2n$, o la successione del fattoriale $n!$. La prossima definizione esprime cosa significhi in modo preciso l'affermazione "una successione tende a $+\infty$".

Definizione 1.12. *La successione a_n* diverge a $+\infty$ *(rispettivamente a $-\infty$) per $n \to +\infty$ se, comunque si scelga un valore M tutti i valori a_n sono più grandi di M (risp. più piccoli) tranne al più un numero finito. In tal caso si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad (\textit{risp.} \ -\infty).$$

In modo equivalente si può scrivere

$$\forall\, M \quad \exists\, n_M \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad a_n \geq M \quad (\textit{risp. } a_n \leq M) \quad \forall\, n > n_M. \tag{13}$$

Come nel caso delle successioni divergenti è utile vedere almeno un esempio di verifica diretta del fatto che una successione è divergente. Ad esempio, dimostriamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty.$$

Fissato $M > 0$, dobbiamo far vedere che è possibile determinare n_M per cui valga $a_n > M$ per ogni $n > n_M$. Dato che

$$\frac{n^2}{n+1} > M \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 - Mn - M > 0,$$

la domanda da porsi è: per quali n è vera la disequazione finale? Le radici del polinomio di secondo grado $x^2 - Mx - M$ sono $x_\pm := (M \pm \sqrt{M^2 + 4M})/2$, quindi, se $n > x_+$, è vero che $n^2 - Mn - M > 0$. Ottimo, allora scegliamo

$$N_M := \left[\frac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2}\right] + 1.$$

Strade diverse portano alla stessa conclusione. Lo stesso problema può essere risolto in un modo diverso, meno contoso. Prima di tutto si osserva che (verificate i passaggi)

$$a_n = \frac{n^2}{n+1} = n - \frac{1}{n+1} \geq n - 1.$$

Quindi, se $n - 1 > M$, vale anche $a_n > M$. Perciò si può scegliere $N_M = [M + 1] + 1$ per dedurre la stessa conclusione. In effetti, il valore n_M della Definizione 1.12 (così come n_ε della Definizione 1.1), non è definito in maniera univoca, tutt'altro!

Esercizio 1.13. *Dimostrare le implicazioni*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|a_n|} = +\infty.$$

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Criterio di convergenza di Cauchy. Ogni successione convergente definisce un numero ℓ, il suo limite, ma l'unico test di convergenza che emerge dalla definizione consiste nel dimostrare che la differenza $|a_n - \ell|$ è infinitesima, quindi è applicabile solo se il numero ℓ è già noto. Invece, è essenziale avere un test "intrinseco" di convergenza che non richieda la conoscenza *a priori* del valore del limite, ma che coinvolga solamente i termini stessi della successione.

Teorema 1.14. *Criterio di convergenza di Cauchy. Una successione a_n è convergente se e solo se è una* successione di Cauchy*, cioè se vale la condizione*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n > n_\varepsilon.$$

La condizione di Cauchy descrive il fatto che gli elementi della successione distano tra loro meno di una soglia arbitraria $\varepsilon > 0$ a patto di considerare termini con un indice sufficientemente grande. Il fatto che i termini si avvicinino l'un l'altro per $n \to +\infty$ quando una successione è convergente è del tutto naturale: i termini si avvicinano al limite ℓ e quindi si avvicinano tra loro. La proprietà notevole è che vale anche il viceversa: se gli elementi della successione si avvicinano, allora la successione converge. Non è questa la sede per approfondire ulteriormente questo criterio, ma non si può mancare di dire che si tratta di una pietra miliare nella costruzione dei numeri reali a partire dai numeri razionali.

Piccolo glossario per le successioni

Se una successione a_n ...

... è convergente o divergente (a $\pm\infty$), allora è regolare;

... non è convergente né divergente, allora è non regolare;

... tende a 0 per $n \to +\infty$, allora è infinitesima;

... è tale che $|a_n| \leq M$ per qualche M e per ogni n, (cioè se i suoi elementi sono in un intervallo limitato) allora è limitata;

... è tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$, allora diverge in modulo.

$$
\begin{array}{ccccc}
a_n \text{ è infinitesima} & \Rightarrow & a_n \text{ converge} & \Rightarrow & a_n \text{ è limitata} \\
 & & \Downarrow & & \\
 & & a_n \text{ è regolare} & & \\
 & & \Uparrow & & \\
 & & a_n \text{ diverge} & \Rightarrow & a_n \text{ diverge in modulo}
\end{array}
$$

2. Il limite entra in società

Fin qui abbiamo definito il senso della parola *limite* per successioni di numeri reali. Una successione in $\mathbb{R}$ può avere una struttura complicata: ad esempio, può essere somma/prodotto di vari termini. Come si comporta l'operazione di "passaggio al limite" rispetto alle operazioni + e $\cdot$ definite in $\mathbb{R}$? E rispetto ai segni $\leq$ e $<$?

Operazioni razionali con i limiti. Per il calcolo dei limiti è possibile usare le operazioni elementari di somma, moltiplicazione, sottrazione e divisione.

(i) *Somma e sottrazione.* Il limite della somma/sottrazione di successioni convergenti è la somma/sottrazione dei limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \ \lim_{n\to+\infty} b_n = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \pm b_n = a \pm b.$$

(ii) *Prodotto.* Il limite del prodotto di successioni convergenti è il prodotto dei limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \ \lim_{n\to+\infty} b_n = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n b_n = ab.$$

(iii) *Rapporto.* Il limite del rapporto di successioni convergenti è il rapporto dei limiti *a patto che la successione a denominatore non tenda a zero*:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \ \lim_{n\to+\infty} b_n = b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

In altre parole: possiamo *invertire l'ordine di applicazione* delle operazioni razionali e del procedimento di limite ottenendo lo stesso risultato, o anche *operazioni razionali e limiti commutano.*

Dimostriamo la proprietà del prodotto. Supponiamo $a_n \to a$ e $b_n \to b$ per $n \to +\infty$. Allora[2]

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \quad : \quad |a - a_n| < \varepsilon,\, |b - b_n| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

[2] Il valore di n_ε per la successione $\{a_n\}$ e quello per la successione $\{b_n\}$ potrebbero essere diversi, ma, in questo caso, potremmo scegliere il più grande dei due, per cui sono soddisfatte le relazioni sia per a_n che per b_n.

Scrivendo $ab - a_n b_n = b(a - a_n) + a_n(b - b_n)$, e ricordando che una successione convergente è sempre limitata (per cui esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \le M$ per ogni n), si ha che

$$|ab - a_n b_n| \le |b||a - a_n| + |a_n||b - b_n| < (|b| + M)\varepsilon \qquad \forall n > n_\varepsilon.$$

Dato che la quantità $(|b| + M)\varepsilon$ può essere resa arbitrariamente piccola scegliendo ε sufficientemente piccolo, la distanza tra ab e $a_n b_n$ diviene arbitrariamente piccola scegliendo valori di n sufficientemente grandi e quindi vale la conclusione.

Tramite queste regole è possibile calcolare molti limiti. Ad esempio:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + n + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2}{3},$$

passando al limite sia nel numeratore che nel denominatore.

Per ora, non è chiaro cosa dire sul comportamento al limite della successione $\dfrac{a_n}{b_n}$ nel caso in cui la successione b_n sia infinitesima. Torneremo tra breve sulla questione.

Esercizio 2.1. *Calcolare il limite per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni*

$$\frac{n^4 + 1}{n^4 + n^2}, \qquad \frac{3n^2 + 1}{n(2n^2 + 1)}, \qquad \frac{(n + 1)(2n + 2)(3n + 3)}{n^3}, \qquad \frac{(n + 1)^2}{(n^2 + 1)^2}.$$

Limiti e disequazioni. Un altra questione importante è come si comporti l'operazione di limite rispetto all'ordinamento dei numeri reali.

Teorema 2.2. Monotonìa del limite. *Sia $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. Se, per qualche $N \in \mathbb{N}$, vale $a_n < b_n$ (oppure $a_n \le b_n$) per ogni $n \ge N$, allora $a \le b$.*

Dimostrazione. Dato che a_n tende a a e b_n tende a b, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$, $a - \varepsilon < a_n \le b_n < b + \varepsilon$ per ogni $n > N$ per un opportuno N. Guardando il primo e l'ultimo termine nella catena di diseguaglianze, si deduce che $b - a > -2\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Quindi, necessariamente, $b - a \ge 0$. □

Il Teorema 2.2 afferma che l'operazione di limite è "monotòna non decrescente", nel senso che vale l'implicazione

$$a_n < b_n \qquad \Rightarrow \qquad a := \lim_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} b_n =: b.$$

Si noti che, nel passaggio al limite, la disuguaglianza stretta diviene una disuguaglianza non stretta. Ad esempio, scegliendo $a_n = 1/2n$ e $b_n = 1/n$, si ha $a_n < b_n$ per ogni n, ma $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

In maniera analoga, si dimostra il seguente (utilissimo) risultato.

Teorema 2.3. *Teorema dei carabinieri.* *Siano a_n, b_n, c_n successioni tali che*

(i) esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n > N$,

(ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell \in \mathbb{R}$.

Allora la successione b_n è convergente e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$.

Dimostrazione. L'obiettivo è dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ c'è una scelta di $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$. Quindi occorre stimare dall'alto e dal basso i termini b_n. Dalle ipotesi segue che comunque si fissi $\varepsilon > 0$ esiste $\tilde{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > \tilde{n}_\varepsilon$,

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon.$$

Quindi, dato che per ipotesi esiste N tale che $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ogni $n > N$, si ottiene

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon \qquad \forall n > N := \max\{N, \tilde{n}_\varepsilon\},$$

ossia la conclusione. □

Esempio 2.4. Dato $x \in (0, 1)$, applichiamo il Teorema 2.3, alla successione

$$b_n = x^n.$$

Chiaramente esiste $h > 0$ tale che $x = 1/(1 + h)$. Poiché $(1 + h)^n \geq 1 + nh$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (dimostrarlo!),

$$0 < b_n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dato che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+nh} = 0$, scegliendo $a_n = 0$ e $c_n = \frac{1}{1+nh}$ e applicando il Teorema 2.3

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0 \qquad \text{per} \quad x \in (0, 1).$$

Esercizio 2.5. *Dati $\lambda \in [0, 1)$ e $a_0 \in \mathbb{R}$, sia a_n la successione definita per ricorrenza da $a_{n+1} = \lambda a_n$. Dimostrare che la successione a_n è infinitesima.*

Conseguenza del Teorema 2.3 è questo piccolo criterio, che è una versione più generale dell'esercizio precedente: sostanzialmente si suppone che l'uguaglianza $a_{n+1} = \lambda a_n$ con $\lambda \in [0, 1)$ valga "all'infinito"...

Corollario 2.6. *Sia $a_n > 0$ per ogni n una successione tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \tag{14}$$

Allora, se $\lambda \in [0, 1)$, la successione a_n è infinitesima.

DIMOSTRAZIONE. *Passo 1.* Dimostriamo che esistono $\sigma \in [0,1)$ e $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_{n+1} \leq \sigma a_n \qquad \forall\, n \geq N. \tag{15}$$

Infatti, scegliamo $\sigma \in (\lambda, 1)$ e sia $\varepsilon := \sigma - \lambda$. Utilizzando la definizione di limite per la successione a_{n+1}/a_n, si deduce che esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda + \varepsilon = \lambda + (\sigma - \lambda) = \sigma \qquad \forall\, n > n_\varepsilon.$$

che porta alla (15) scegliendo $N = n_\varepsilon$.

Passo 2. Dimostriamo che a_n è infinitesima. Per semplicità, supponiamo $N = 0$ (cioè che (15) valga per ogni n), allora

$$0 < a_{n+1} \leq \sigma a_n \leq \sigma^2 a_{n-1} \leq \ldots \leq \sigma^{n+1} a_0.$$

Dato che $\sigma \in [0,1)$, per $n \to +\infty$ la quantità $\sigma^n a_1$ tende a zero e quindi si ha la conclusione. Nel caso generale, dato che

$$0 < a_{n+1} \leq \sigma^n \sigma^{1-N} a_N \qquad \forall n \geq N,$$

la dimostrazione è analoga. □

È possibile dare criteri analoghi al Teorema 2.3 per dimostrare la divergenza di una successione. Ad esempio, una successione a_n che sia più grande di una successione b_n divergente a $+\infty$ è divergente a $+\infty$.

ESEMPIO 2.7. Consideriamo di nuovo la successione $b_n = x^n$, questa volta con $x > 1$. Allora $x = 1 + h$ con $h > 0$. Dalla disuguaglianza $(1+h)^n \geq 1 + nh$, segue

$$b_n = (1+h)^n \geq 1 + nh$$

Dato che $1 + nh \to +\infty$ per $n \to \infty$, anche la successione b_n diverge a $+\infty$.

Zeri a denominatore ed uso degli infiniti. Dall'analisi che abbiamo presentato fin qui restano fuori alcuni casi significativi:

– che succede della successione $\dfrac{a_n}{b_n}$ nel caso in cui $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$?

– che succede di somma/sottrazione/prodotto/rapporto quando qualcuno dei termini in gioco tende a $+\infty$ o a $-\infty$?

Partiamo dalla prima delle due questioni. Un numero molto piccolo a denominatore rende tutta la frazione molto grande. Quindi è ragionevole aspettarsi che, qualora il denominatore sia infinitesimo, il rapporto tenda a $+\infty$. Il banalissimo esempio:

$$a_n = 1, \qquad b_n = \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{1/n} = n \to +\infty \qquad \text{per} \quad n \to +\infty,$$

dà conforto a questa prima ipotesi di lavoro. Arrischiamoci in una congettura:

$$\textit{Congettura 1:} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

Ma se consideriamo il caso

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1/n}{1/n} = 1 \to 1 \qquad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

Cosa succede? Molto semplice, il denominatore è infinitesimo, ma lo è anche il numeratore. Quindi, può capitare che il tendere a zero del denominatore sia (in qualche modo) compensato dal tendere a zero del numeratore! Proviamo una nuova versione:

$$\textit{Congettura 2:} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

Qui non siamo troppo lontani dal vero, ma ancora siamo stati un po' troppo leggeri nella questione dei segni: nel caso

$$a_n = 1, \qquad b_n = -\frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{-1/n} = -n \to -\infty \qquad \text{per} \quad n \to +\infty,$$

Proponiamo allora una versione (si spera finale) più precisa:

$$\textit{Congettura 3:} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty$$

La Congettura 3 è vera. Per dimostrarla, bisogna mostrare che per ogni $M > 0$, vale la disuguaglianza $|a_n/b_n| \geq M$ per n sufficientemente grande. Dato che la disequazione precedente è equivalente a $|a_n| - M|b_n| \geq 0$ bisogna mostrare che

$$\forall\, M \quad \exists\, n_M \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |a_n| - M|b_n| \geq 0 \quad \forall\, n > n_M.$$

Niente di più facile, dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \big(|a_n| - M|b_n|\big) = |a| > 0.$$

Esercizio 2.8. *Siamo tranquilli e soddisfatti del nostro risultato, quando, d'improvviso, giunge un tipo, sicuro del fatto suo, che afferma*

$$\textit{Congettura 4:} \qquad \left.\begin{array}{l} \exists\, \nu > 0 \quad t.c. \quad a_n \geq \nu \quad \forall\, n, \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty$$

Credergli o non credergli?

Resta fuori dalla nostra analisi il caso in cui sia il numeratore che il denominatore tendano a 0 per $n \to +\infty$. In questo caso può succedere di tutto! Ci sono casi in cui il rapporto tende a zero, casi in cui tende ad ∞, casi in cui il limite del rapporto non esiste! Non esiste una regola generale e per questo si dice che si tratta di una **forma** indeterminata (nel senso che non si può determinare subito se esista e quanto valga il limite ed occorre un'analisi più raffinata):

$$\textbf{forma indeterminata} \quad \frac{0}{0} \ : \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = ?$$

Esercizio 2.9. *Trovare due successioni a_n e b_n infinitesime tali che la successione dei rapporti a_n/b_n non abbia limite.*

Consideriamo il caso in cui uno dei termini sia divergente (per fissare le idee, divergente a $+\infty$) e l'altro convergente, cioè supponiamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = b.$$

Cosa succede di somma e prodotto? La regola, detta in maniera molto poco ortodossa, è che "finché i termini in gioco non si contrastano tra loro tutto va bene...". Ad esempio:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = +\infty, \qquad\qquad \text{se} \quad b \neq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} |a_n b_n| = +\infty,$$

(dimostrate queste proprietà!). L'unica situazione di "contrasto" è quella in cui la successione da studiare sia prodotto di una successione divergente e di una infinitesima

$$\textbf{forma indeterminata} \quad \infty \cdot 0 \ : \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = ?$$

Infine, resta la situazione più drammatica di tutte: entrambe le successioni a_n e b_n sono divergenti. Nel caso in cui si sommino due successioni divergenti a $+\infty$, la conclusione è evidente: la successione somma è anch'essa divergente a $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = +\infty.$$

Nel caso in cui le due successioni divergano una a $+\infty$ e l'altra a $-\infty$, non si può dedurre nessuna conclusione generale:

$$\textbf{forma indeterminata} \quad +\infty - \infty \ : \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = ?$$

Il prodotto di successioni divergenti non crea nessun problema particolare (bisogna solo stare attenti al segno di ∞, che si deduce con la buona vecchia regola del segno di un prodotto). Ad esempio,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = +\infty.$$

Per quanto riguarda il rapporto, pochi minuti di riflessione portano alla conclusione che l'unica situazione problematica è la seguente:

$$\textbf{forma indeterminata}\quad \frac{\infty}{\infty}: \qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \infty\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = ?$$

3. Calcolo di alcuni limiti

Utilizziamo ora le proprietà dei limiti per studiare alcune successioni specifiche.

Esempio 3.1.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x} = 1 \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

Poniamo $a_n = \sqrt[n]{x}$ e usiamo la disequazione $(1+h)^n \geq 1 + nh$. Nel caso $x > 1$, allora anche $\sqrt[n]{x} > 1$ e quindi $h_n := \sqrt[n]{x} - 1 > 0$ e $a_n = 1 + h_n$. Esplicitando la disequazione rispetto a h_n,

$$x = (a_n)^n = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n \quad \Rightarrow \quad 0 < h_n \leq \frac{x-1}{n},$$

da cui segue $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 0$ e quindi otteniamo la conclusione nel caso $x > 1$.

Se $x = 1$ la successione è costante ed il risultato banale. Se $x < 1$, allora $1/x > 1$ e quindi $\sqrt[n]{1/x}$ converge ad 1 per quanto già visto. Dato che $\sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{1/x}}$, segue la conclusione.

Esempio 3.2.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0.$$

In questo caso $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ è la differenza di termini che tendono a $+\infty$. Passare al limite separatamente sui due termini dà l'espressione $+\infty - \infty$, che è *senza senso*.[3] Ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata e quindi per determinare l'esistenza o meno del limite bisogna lavorare un po' d'astuzia. Qui possiamo riscrivere a_n come

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

che tende a 0 per $n \to +\infty$.

Esempio 3.3. (Molto importante!)

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & x \in (-1, 1), \\ 1 & x = 1, \\ \text{non esiste} & x = -1, \\ +\infty & x > 1, \\ \text{diverge in modulo} & x < -1. \end{cases}$$

[3] In generale si pone la questione: si possono dare delle "regole algebriche" per l'uso dei simboli $\pm\infty$? Occorre ricordarsi che questi simboli sono definiti dall'operazione di limite e quindi, per definire tali regole, bisogna ricondursi alle proprietà dei limiti.

Abbiamo già visto che $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ per $x \in (0,1)$ e che $\lim_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ per $x > 1$ Anche per $x \in (-1,0]$, la successione x^n è infinitesima, dato che $\lim_{n\to+\infty} |x|^n = 0$.

Se $x = 1$ la successione è costantemente 1 (che quindi è il suo limite). Se $x = -1$, la successione oscilla tra i valori ± 1 ed è non regolare. Nel caso $x < -1$, la successione oscilla tra valori positivi e negativi e non è regolare, ma in valore assoluto diverge.

Esempio 3.4.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{x^n} = 0. \qquad \forall\, x > 1,\ p \in \mathbb{N}.$$

Per dimostrare questo limite, applichiamo il Corollario 2.6 ad $a_n = \frac{n^p}{x^n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^p}{x^{n+1}}\frac{x^n}{n^p} = \frac{(n+1)^p}{xn^p} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \longrightarrow \frac{1}{x} \in (0,1) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Dato che il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tende ad un numero in $[0,1)$, sono verificate le ipotesi del Corollario e quindi vale la conclusione.

Esempio 3.5.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \forall\, x > 1. \tag{16}$$

Applichiamo di nuovo il Corollario 2.6

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0 \qquad \text{per } n \to +\infty,$$

da cui segue la conclusione.

Esempio 3.6.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Infatti

$$0 \le a_n = \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n\cdot n\cdots n} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{n} = 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\frac{1}{n} \le \frac{1}{n},$$

quindi, per il Teorema 2.3, vale la conclusione.

Esempio 3.7. **La serie geometrica.** Fissato $q \in \mathbb{R}$, la successione

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k,$$

è convergente se e solo se $q \in (-1,1)$. Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q} \qquad \forall\, q \in (-1,1).$$

Infatti, la successione S_n si può riscrivere nella forma

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1, \\ \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ è utilizzando i risultati dell'Esempio 3.3 si ottiene la conclusione. Nel caso $q \geq 1$ la successione diverge, mentre per $q \leq -1$ la serie è non regolare. Per esprimere la convergenza di S_n a $1/(1-q)$ per $|q| < 1$, si usa la notazione

serie geometrica : $$\sum_{k=0}^{+\infty} q^n := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \forall\, q \in (-1,1).$$

Sul significato della parola "serie" in generale torneremo tra poco.

4. Successioni monotòne

Definizione 4.1. Successioni monotòne. *Una successione a_n è* strettamente crescente *se ogni termine è maggiore del precedente, cioè se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, è* strettamente decrescente *se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Una successione a_n è* strettamente monotòna *se è o strettamente crescente o strettamente decrescente.*

Nel caso in cui valgano le disuguaglianze non strette valgono delle definizioni analoghe: a_n è non decrescente se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni n ed è non crescente se $a_n \geq a_{n+1}$. Una successione a_n è monotòna se è o non decrescente o non crescente.

Per verificare se una successione è monotona occorre risolvere delle disequazioni. Ad esempio, la successione $a_n = \dfrac{1}{1+n^2}$ è strettamente decrescente, infatti

$$a_{n+1} < a_n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1+(n+1)^2} < \frac{1}{1+n^2} \quad \Longleftrightarrow \quad 1+n^2 < 1+(n+1)^2$$

che è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4.2. *Dire se la successione $a_n = \frac{n}{1+n^2}$ è strettamente decrescente.*

Esercizio 4.3. *Siano a_n e b_n due successioni postive e non decrescenti. Dimostrare che $a_n + b_n$ e $a_n b_n$ sono anch'esse successioni non decrescenti. E' ancora vera la conclusione se si rimuove l'ipotesi di positività?*

Se una successione è monotóna, allora è preclusa la possibilità che abbia delle oscillazioni: i termini o salgono sempre o scendono sempre, non possono fare "un po' su e un po' giù". In termini di esistenza/non esistenza del limite questa proprietà semplifica molto la casistica.

TEOREMA 4.4. Regolarità delle successioni monotòne. *Una successione a_n monotòna è sempre regolare (cioè o è convergente o è divergente) e*

$$a_n \text{ non decrescente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n,$$
$$a_n \text{ non crescente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Se a_n è anche limitata, allora è convergente.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo a_n non decrescente e superiormente limitata,

$$a_n \le a_m \le \ell := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < +\infty, \qquad n \le m.$$

Per dimostrare che tale successione converge ad ℓ bisogna mostrare che comunque scelto $\varepsilon > 0$ è possibile scegliere $N \in \mathbb{N}$ per cui si ha $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ per ogni $n > N$. La seconda delle due disequazioni è sempre verificata per definizione di ℓ (è un maggiorante). Inoltre, dato che ℓ è il più piccolo dei maggioranti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste certamente un indice N tale che $\ell - \varepsilon < a_N$ (altrimenti $\ell - \varepsilon$ sarebbe un maggiorante e, quindi, ℓ non sarebbe il piú piccolo!). Usando la monotonia si ha

$$\ell - \varepsilon < a_N \le a_n < \ell \qquad \forall n \ge N,$$

cioè la conclusione.

I casi rimanenti si dimostrano in maniera simile. □

ESERCIZIO 4.5. *Sia a_n una successione non decrescente. Dimostrare che:*
(i) se da a_n si può estrarre una sottosuccessione a_{n_k} convergente, allora a_n è convergente;
(ii) se da a_n si può estrarre una sottosuccessione a_{n_k} divergente, allora a_n diverge.

5. Serie numeriche

In generale, una **serie numerica** è definita da una successione a_n, con la richiesta di sommare i termini nell'ordine dato dall'indice n. In parole povere, si tratta di dare senso alla *somma di un numero infinito di termini.* Il procedimento più naturale (utilizzato nell'Esempio 3.7) è di considerare la successione S_n delle **somme parziali**

$$S_0 := a_0, \quad S_1 := a_0 + a_1, \quad \dots, \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

cioè la successione il cui termine $n-$esimo è la somma dei primi $n+1$ termini $a_0, \dots, a_n$. Se la successione delle somme parziali S_n è convergente, la serie si dice **semplicemente convergente**. La **somma della serie**, che si indica con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, è definita da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} S_n,$$