Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 7
(a.a. 23/24, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (lorenzo.carlucci@uniroma1.it)

1 Funzioni

In Informatica una funzione è l'associazione di un input a un output. L'input può essere di vario genere: numerico, simbolico, etc. e così l'output. Parliamo di *funzione* quando siamo sicuri che a un input in entrata corrisponderà almeno un output in uscita.

Più astrattamente poniamo la seguente definizione sufficientemente generale.

Definizione 1 (Funzione) *Una funzione è una associazione tra elementi di un insieme I (detto dominio) ed elementi di un insieme O (detto codominio) in modo tale che ogni elemento del dominio venga associato un unico elemento del codominio. Denotiamo una funzione da un dominio I a un codominio O come segue:*

$$f : I \to O$$

In generale I e O sono due insiemi arbitrari. Ogni elemento $x \in I$ viene associato (o mappato) da f in un unico elemento $y \in O$. In questo caso scriviamo $f(x) = y$ e diciamo che y è immagine di x via f.

Definizione 2 (Immagine e pre-immagine di un elemento) *Sia $f : X \to Y$ è una funzione. Se $y \in Y$ e $x \in X$ sono tali che $f(x) = y$ chiamiamo y una immagine di x via f e x una pre-immagine di y via f.*

Esempio 1 *Se associo a ogni individuo i suoi figli non ottengo una funzione se interpreto l'associazione come una associazione con dominio gli individui e codominio gli individui: lo stesso individuo può avere più figli o nessun figlio – violando così la definizione di funzione.*

Ottengo però una funzione se interpreto l'associazione come una associazione con dominio gli individui e codominio i sottinsiemi di individui: associo a ogni individuo l'insieme di tutti i suoi figli. Se non ha figli, l'insieme associato è un insieme vuoto. Indicando con I l'insieme degli individui, questa funzione è di tipo: $p : I \to \mathcal{P}(I)$.

Esempio 2 *Sia A un insieme. Se associo a ogni elemento $a \in A$ tutti suoi soprainsiemi in A ottengo una funzione f di tipo:*

$$f : A \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$$

in quanto l'immagine di un elemento del dominio è un insieme di sottinsiemi di A.

Esempio 3 *Sia A un insieme. Se associo a ogni sottinsieme di A la sua cardinalità ottengo una funzione f di tipo:*

$$f : \mathcal{P}(A) \to \mathbf{N},$$

dato che gli elementi del dominio sono i sottinsiemi di A e i valori possibili sono i naturali.

Se A ha cardinalità n so che l'associazione descritta sopra è una funzione di tipo:

$$g : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1, 2, \ldots, 2^n\},$$

Considerando la f definita sopra, posso affermare correttamente che se A ha cardinalità n allora $f(\mathcal{P}(A)) \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, 2^n\}$.

Osservazione 1 *Si noti che secondo la definizione proposta una funzione non è identificabile semplicemente come una regola di associazione di elementi di un insieme a elementi di un altro insieme. La specifica di una funzione contiene la specifica del suo dominio e del suo codominio. Due funzioni in questo senso possono differire (a livello di definizione) anche se la regola che le definisce è la stessa. A volte, seguendo l'uso comune, identificheremo la funzione con la regola.*

Esempio 4 *La stessa regola di calcolo, per es.* $x \mapsto x-1$ *dà luogo a differenti funzioni a seconda di come dichiariamo dominio e codominio. Per esempio,* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, *con* $f(x) = x-1$ *è una funzione con dominio* $\mathbb{Z}$ *e codominio* $\mathbb{Z}$. *Si tratta di una funzione perché per ogni elemento* x *del dominio* $\mathbb{Z}$ *esiste ed è unico l'elemento* y *del codominio* $\mathbb{Z}$ *che viene associato a* x *da* f.

Al contrario una dichiarazione del tipo $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *con* $g(x) = x-1$ *non è una buona dichiarazione di funzione perché l'elemento* 0 *del dominio* $\mathbf{N}$ *non ha una immagine nel codominio* $\mathbf{N}$. *Se invece scriviamo* $h : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \cup \{-1\}$ *con* $h(x) = x-1$ *oppure* $h' : \mathbf{N} \setminus \{0\} \to \mathbf{N}$ *con* $h'(x) = x-1$ *abbiamo due dichiarazioni corrette di funzione.*

Esempio 5 *L'associazione a un numero* x *del suo quadrato* x^2 *ha senso in molti contesti. Specificando in modi diversi dominio e codominio di una tale associazione d luogo – secondo la definizione – a diverse funzioni. Per esempio,*

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

è il quadrato preso sui naturali, mentre

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

è il quadrato definito sui reali. In senso tecnico, si tratta di due funzioni differenti che possono avere proprietà differenti.

Osservazione 2 *Si nota anche che se* $f : X \to Y$ *è una funzione, allora sono funzioni anche tutte le associazioni da elementi di* X *a elementi di* Z *per qualunque soprainsieme* Z *di* Y *definita esattamente come* f. *Analogamente sono funzioni tutte le associazioni di tipo* $W \to Y$ *per ogni sottinsieme* $W \subseteq X$ *di* X, *definite esattamente come* f.

Osservazione 3 *Attenzione! Nella nostra definizione di funzione ci sono due componenti fondamentali che possono causare confusione:*

1. *Una funzione deve essere definita su tutti gli elementi del suo dominio.*

2. *Non è detto che tutti gli elementi del codominio della funzione siano immagini di elementi del dominio!*

Gli elementi del codominio di una funzione $f : I \to O$ *sono in generale un sottinsieme del codominio* O.

L'insieme $\{s \in O : \text{ esiste un } t \in I \text{ tale che } f(t) = s\}$ viene detta l'immagine di f su I e denotata con $f(I)$. In generale si ha $f(I) \subseteq O$, ma non necessariamente si ha $f(I) = O$.

Analogamente possiamo definire *l'immagine via* f di un qualunque *sottinsieme* A del dominio I: Sia $A \subseteq I$. L'immagine via f di A, denotata con $f(A)$ è l'insieme di tutti e soli gli elementi del codominio O che hanno una pre-immagine di A. In simboli:

$$f(A) = \{y \in O : \text{ esiste un } x \in A \text{ tale che} f(x) = y\}.$$

Se $f : I \to O$ e $A \subseteq I$ vale sempre $f(A) \subseteq f(I)$. Per dimostrarlo scriviamo le definizioni dei due insiemi.

$$f(I) = \{y \in O \mid \text{ esiste } x \in I \text{ t.c. } f(x) = y\},$$

$$f(A) = \{y \in O \mid \text{ esiste } x \in A \text{ t.c. } f(x) = y\},$$

Sia y arbitrario in $f(A)$. Per definizione $y \in O$ e per qualche $x \in A$ abbiamo $f(x) = y$. Dato che $A \subseteq I$ vale che $y \in O$ e per qualche $x\, inI$ abbiamo $f(x) = y$. Dunque $y \in f(I)$.

Funzioni come insiemi Nella Matematica moderna è abituale *identificare* una funzione con un insieme che corrisponde a tutti i punti del suo grafico. Una funzione $f : I \to O$ associa a ogni elemento $x \in I$ (*l'argomento*) un unico elemento $y \in O$ (*il valore*), che denotiamo con $f(x)$. Una associazione di questo tipo viene codificata come la coppia ordinata (x, y). Se conosco tutte le coppie ordinate (argomento, valore), conosco completamente f. Di fatto una funzione $f : I \to O$ viene identificata con l'insieme delle coppie ordinate (argomento, valore), ossia con $\{(x, y) : x \in I, y \in O, f(x) = y\}$.

Dati due insiemi A, B denotiamo con $A \times B$ l'insieme delle coppie ordinate di tipo (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$. Questo insieme viene detto il *prodotto cartesiano* di A per B. Tecnicamente dunque, una funzione $f : I \to O$ è un sottinsieme del prodotto cartesiano $I \times O$. Inoltre, per ogni elemento $x \in I$ esiste un unico elemento $y \in O$ tale che $(x, y) \in f$.

Possiamo dare la seguente definizione astratta di funzione.

Definizione 3 (Funzione (definizione insiemistica)) *Siano A, B insiemi. Una funzione $f : A \to B$ è un sottinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ tale che per ogni $a \in A$ esiste uno e un solo $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$.*

La definizione insiemistica di funzione data sopra è anche detta *estensionale* in quanto una funzione è identificata con l'insieme delle coppie argomento/valore e gli insiemi sono oggetti *estensionali* nel senso che due insiemi con la stessa *estensione* (= gli stessi elementi) sono lo stesso insieme. Al concetto estensionale di funzione si contrappone quello *intensionale*: la stessa funzione può essere ovviamente descritta da diverse regole di associazione o da diverse formule chiuse che danno luogo allo stesso insieme di coppie ordinate argomento/valore. Per esempio la funzione descritta dalla regola $f(x) = x + 1$ (sui naturali) è ovviamente la stessa descritta di quella descritta dalla regola $g(x) = ((x + 1) \times 2) : 2$ o dalla regola $h(x) = x + 1 - 2$. Analogamente esistono sempre molti (più precisamente infiniti) programmi (sintatticamente) distinti che associano esattamente gli stessi output agli stessi input. Queste diverse regole e questi diversi programmi per la stessa funzione vengono considerati *intensionalmente* differenti ma *estensionalmente* identici.

Funzioni a più argomenti Siamo abituati a trattare con funzioni con più di un argomento (per esempio, la somma). Secondo la definizione di funzione che abbiamo dato una funzione a due argomenti viene formalizzata come una associazione definita su insieme di coppie ordinate. Analogamente una funzione di tre argomenti viene formalizzata come associazione definita su un insieme di triple ordinate, e così per una funzione di n argomenti.

Abbiamo dato come primitiva la nozione di sequenza ordinata di elementi (n-pla ordinata). Per convenienza indichiamo con $A \times B$ l'insieme delle coppie ordinate (a, b) dove $a \in A$ e $b \in B$. $A \times B$ è un insieme e viene detto prodotto cartesiano di A e B. Una funzione a due input come la somma viene quindi formalizzata come una associazione tra elementi di $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e elementi di $\mathbf{N}$, ossia è dichiarata come segue:

$$s : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}.$$

Il prodotto cartesiano di un insieme A per se stesso $A \times A$ viene anche denotato con A^2.

Analogamente se $A_1, \ldots, A_n$ sono insiemi definiamo il loro prodotto cartesiano, indicato con $A_1 \times \cdots \times A_n$ come l'insieme di tutte le n-ple ordinate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dove $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$.

Si osserva che è possibile definire l'insieme delle triple, quadruple, n-ple ordinate iterando il prodotto cartesiano a due argomenti. Se A è un insieme, il prodotto cartesiano n-esimo di A viene denotato con A^n. Una funzione di tipo $f : A^n \to B$ è una funzione che ha per dominio l'insieme delle n-ple ordinate di elementi di A e per codominio B.

Rappresentazioni di funzioni Esistono diversi modi di rappresentare una funzione (in particolare una funzione con dominio finito) che risultano comodi e adatti in diverse situazioni.

1. Rappresentazione grafica Una funzione da un dominio I a un codominio O si può rappresentare graficamente su un piano cartesiano. Numero le ascisse con gli elementi del dominio e le ordinate con gli elementi del codominio e segno un punto in (x, y) se $f(x) = y$ come facciamo usualmente in Analisi. Dal grafico posso giudicare se si tratti di una funzione: a ogni punto in ascissa deve corrispondere uno e un solo punto in ordinata.

2. Rappresentazione diagrammatica Una funzione da un dominio finito I a un codominio finito O si può rappresentare con un diagramma a frecce disegnando a sinistra tanti pallini quanti sono gli elementi di I e a destra tanti pallini quanti sono gli elementi di O e mettendo una freccia da sinistra a destra tra ogni elemento di I e la sua immagine secondo f. Dal diagramma posso giudicare se si tratti di una funzione: da ogni punto a sinistra deve uscire esattamente una freccia.

3. Rappresentazione tabulare Una funzione può rappresentarsi in molti casi in forma tabulare enumerando sulla prima riga gli elementi del dominio e sulla seconda riga i corrispondenti elementi del codominio.

Anche funzioni a dominio infinito possono rappresentarsi tabularmente, ma tale rappresentazione è sempre ambigua, perché si può continuare in infiniti modi diversi mantenendo la proprietà di essere una funzione!

4. Rappresentazione algebrica Una rappresentazione con formula è spesso conveniente, specie se si tratta di funzioni con dominio infinito. Un caso particolare è una definizione per ricorsione, particolarmente adatta quando si tratta di funzioni con dominio i numeri naturali.

2 Iniezioni, Suriezioni, Biiezioni

Alcuni tipi particolari di funzione emergono naturalmente da semplici problemi di conteggio.

Esempio 6 *Voglio distribuire tutti i miei 8 giochi tra i 5 figli dei miei amici. In quanti modi posso farlo? Sappiamo già rispondere: ho* 5 *possibilità per assegnare il primo gioco,* 5 *per assegnare il secondo, etc. Dunque ho* 5^8 *possibili assegnazioni. Posso rappresentare il problema come l'associazione di un gioco a un bambino, ossia come una funzione dal dominio* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *(giochi) al codominio* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *(bambini). Che si tratti di una funzione segue dall'ovvietà che non posso dare lo stesso gioco a due bambini diversi! Questo semplice problema di conteggio corrisponde dunque al concetto generico di funzione:* **sto contando le funzioni** *dal dominio* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *al codominio* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Il concetto generale di funzione (su dominio finito) corrisponde quindi esattamente a quello di distribuzione con ripetizione. In generale il numero di funzioni con dominio di cardinalità k e codominio di cardinalità n sono $D'_{n,k} = n^k$.

Esempio 7 *Voglio distribuire tutti i miei 3 giochi tra i 5 figli dei miei amici,* in modo che nessuno riceva più di un gioco. *In quanti modi posso farlo? Sappiamo già rispondere: ho 5 scelte per il primo gioco, 4 scelte per il secondo, etc. Ho dunque* $5\times4\times3$ *modi di distribuire i giochi rispettando il vincolo. Considerando una soluzione come una associazione di un gioco a un bambino, mi interessando le funzioni dal dominio* $\{1, 2, 3\}$ *(giochi) al codominio* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *(bambini)* escludendo quelle in cui due elementi distinti del dominio hanno la stessa immagine *(due giochi diversi vanno allo stesso amico). Una funzione di questo tipo si dice* iniettiva. *Abbiamo dunque in generale che il numero di* **funzioni iniettive** *da un dominio di cardinalità k a un codominio di cardinalità n è $D_{n,k}$ ossia il numero di disposizioni semplici di ordine k su n.*

Esempio 8 *Voglio distribuire tutti i miei* 8 *giochi tra i* 5 *figli dei miei amici* in modo che ciascuno abbia almeno un gioco. *Sappiamo già contarli (è un po' lungo, si usa il PIE). In termini di funzioni sto considerando le funzioni con dominio* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *e codominio* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *tali che* ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio. *Queste funzioni si chiamano* **funzioni suriettive**. *(Esercizio: contarle, usando il PIE).*

Gli esempi di sopra evidenziano la naturalezza dei seguenti concetti generali.

Definizione 4 (Funzione iniettiva) *Una funzione $f : I \to O$ è detta* iniettiva *se ogni elemento del codominio O è immagine di* <u>al più un</u> *elemento del dominio I.*

Osservazione 4 *La definizione di sopra si riformula in modo equivalente così: una funzione $f : I \to O$ è iniettiva se e solo se* **per ogni** $i, i' \in I$ **se** $i \neq i'$ **allora** $f(i) \neq f(i')$.

Analogamente si riformula così, nella forma contrapposta (ossia invertendo l'implicazione e negando l'antecedente e il conseguente): **per ogni** $i, i' \in I$, **se** $f(i) = f(i')$ **allora** $i = i'$.

Osservazione 5 *In termini di diagrammi una funzione è iniettiva se e solo se ogni punto del codominio ha* **al massimo** *una freccia entrante.*

In termini di grafico cartesiano una funzione è iniettiva se e solo se ogni asse orizzontale contiene **al più** *un punto.*

Osservazione 6 *Una funzione $f : I \to O$* **non** *è iniettiva se e solo se* **Esistono** $i, i' \in I$ *tali che* $i \neq i'$ **e** $f(i) = f(i')$.

Esempio 9 *La funzione che a ogni cittadino italiano associa il suo Codice Fiscale è una funzione iniettiva.*

Esempio 10 *L'associazione che a ogni essere umano associa suo padre è una funzione non iniettiva.*

Definizione 5 (Funzione suriettiva) *Una funzione $f : I \to O$ è detta* suriettiva *se ogni elemento del codominio O è immagine di* <u>al meno un</u> *elemento del dominio I.*

Osservazione 7 *La definizione di sopra si riformula in modo più esplicito così: una funzione $f : I \to O$ è suriettiva se e solo se* **per ogni** $o \in O$ **esiste** $i \in I$ *tale che* $f(i) = o$.

Osservazione 8 *In termini di diagrammi una funzione è suriettiva se e solo se ogni punto del codominio ha* **almeno** *una freccia entrante.*

In termini di grafico cartesiano una funzione è suriettiva se e solo se ogni asse verticale contiene **almeno** *un punto.*

Osservazione 9 *Una funzione $f : I \to O$* **non** *è suriettiva se e solo se* **esiste** $o \in O$ *tale che* **per ogni** $i \in I$ *si ha* $f(i) \neq o$.

Definizione 6 (Funzione biiettiva) *Una funzione $f : I \to O$ è detta* biiettiva *se è suriettiva e iniettiva; ossia ogni elemento del codominio O è immagine di* <u>esattamente un</u> *elemento del dominio I.*

Osservazione 10 *In termini di diagrammi una funzione è biiettiva se e solo se ogni punto del codominio ha* **esattamente** *una freccia entrante.*

Esercizio 1 *Consideriamo la funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita come segue: $f(x) = 1+x$. Si tratta di una funzione iniettiva? Suriettiva?*

Esercizio 2 *Consideriamo la funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita come segue: $f(x) = 1 + x^2$. Si tratta di una funzione iniettiva? Suriettiva?*

Esercizio 3 *Consideriamo la funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definita come segue: $f(n) = 1 + x^3$. Si tratta di una funzione iniettiva? Suriettiva?*

Esercizio 4 *Consideriamo la funzione $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ così definita:*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \textit{se } x \textit{ è pari} \\ x-3 & \textit{se } x \textit{ è dispari} \end{cases}$$

Esercizio 5 *Consideriamo la funzione* $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ *definita come segue:* $f(x) = 1+x$. *Si tratta di una funzione iniettiva? Suriettiva?*

Per rispondere alla prima domanda – accertatomi che si tratti di una funzione – devo considerare la condizione che definisce l'iniettività: per ogni $z, z' \in \mathbf{Z}$ *se* $z \neq z'$ *allora* $f(z) \neq f(z')$. *Alternativamente posso provare a dimostrare la* contrapposta *ossia: per ogni* $z, z' \in \mathbf{Z}$, *se* $f(z) = f(z')$ *allora* $z = z'$. *Quando si ha a che fare con semplici funzioni algebriche questa strada è la più conveniente. Supponiamo quindi che* $f(z) = f(z')$. *Per definizione di* f *questo significa che* $1 + z = 1 + z'$. *Dunque* $z = z'$. *Abbiamo così stabilito che* f *è una iniezione.*

Passiamo alla suriettività: dobbiamo verificare se per ogni elemento $z \in \mathbf{Z}$ *(del codominio) esiste almeno un* $x \in \mathbf{Z}$ *(elemento del dominio) tale che* z *è immagine di* x *via* f *ossia tale che* $f(x) = z$. *Devo quindi chiedermi: è vero che posso scrivere un arbitrario intero* z *nella forma* $1 + x$ *dove* x *è un intero? Ovviamente la risposta è sì: per chiarezza è opportuno specificare qualle* x *funziona per l'arbitrario* z *scelto, e si vede facilmente che si tratta di* $z - 1$, *che è ovviamente in* $\mathbf{Z}$.

Osservazione 11 *Abbiamo osservato che dichiarare come codominio* $\mathbf{N}$ *per la* f *dell'esercizio precedente (ossia dichiarare* $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ *non costituisce una corretta dichiarazione di funzione: non è vero che ogni elemento del dominio ha una immagine nel codominio: la regola che definisce* f *non mappa* -2 *in nessun numero naturale non-negativo, dato che lo mappa in* -1.

Abbiamo anche osservato che dichiarare $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ *risulta essere una corretta definizione di funzione (perché per ogni* $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \in \mathbf{Z}$*) ma che in questo caso non si tratta di una funzione suriettiva: per esempio il numero* 0 *appartiene al codominio* $\mathbf{Z}$ *ma non esiste alcun elemento* n *del dominio* $\mathbf{N}$ *per cui valga* $f(n) = 0$, *dato che* $f(n) = n + 1$.

Esercizio 6 *Consideriamo la funzione* $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ *definita come segue:* $f(x) = 1 + x^2$. *Si tratta di una funzione iniettiva? Suriettiva?*

Consideriamo l'iniettività. Dobbiamo verificare se è vera l'implicazione: se z, y *sono elementi distinti del dominio* $\mathbf{Z}$ *allora* $f(z) \neq f(y)$. *Oppure, come sopra, la contrapposta: per ogni* z, y *in* $\mathbf{Z}$ *se* $f(z) = f(y)$ *allora* $z = y$. *Per come è definita* f *questo significa: se* $1 + z^2 = 1 + y^2$*? Di certo se* $1 + z^2 = 1 + y^2$ *allora vale* $z^2 = y^2$. *Da questo però non segue che* $z = y$. *Per concludere in modo rigoroso: negare l'implicazione significa trovare due valori specifici di* z *e di* y *che verificano la premessa (ossia* $1 + z^2 = 1 + y^2$*) ma non verificano la conseguenza (ossia tali che* $z \neq y$*). Per esempio possiamo scegliere* $z = 1$ *e* $y = -1$. *Ovviamente*

$$1 + z^2 = 1 + 1^2 = 2 = 1 + 1 = 1 + (-1)^2 = 1 + y^2$$

ma $1 \neq -1$. *Possiamo concludere che la funzione non è iniettiva.*

Passiamo alla suriettività: dobbiamo verificare se è vero che per ogni $z \in \mathbf{Z}$ *esiste un* $y \in \mathbf{Z}$ *tale che* $f(y) = z$, *ossia tale che* $z = 1 + y^2$. *Si vede facilmente che non è vero, e per dimostrarlo è sufficiente indicare un valore di* z *tale che non è possibile trovare un valore corrispondente di* y *che soddisfi la proprietà richiesta. Dato che* $1 + y^2$ *è sempre positivo per ogni* $y \in \mathbf{Z}$ *basta scegliere per* z *un qualunque numero negativo, e.g., porre* $z = -2$. *Abbiamo così verificato che la funzione* f *non è suriettiva.*

Esempio 11 *Consideriamo la funzione* $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ *così definita:*

$$f(x) := \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \text{ è pari} \\ x - 3 & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

Consideriamo prima l'iniettività. La funzione f *è iniettiva se e solo se due elementi distinti del dominio hanno immagini distinte, ossia: per ogni* $x, y \in \mathbf{Z}$, *se* $x \neq y$ *allora* $f(x) \neq f(y)$. *Ragioniamo* **per casi***:* $x \neq y$ *si verifica nei seguenti casi:*

- *Caso 1:* x *pari e* y *dispari.*
- *Caso 2:* x *pari e* y *pari.*

- *Caso 3: x dispari e y dispari.*

Se riusciamo a dimostrare che nei tre casi abbiamo $f(x) \neq f(y)$ allora abbiamo dimostrato che f è iniettiva. (NB: A differenza di quando tipizziamo un insieme di soluzioni per un problema di conteggio, nel **ragionamento per casi** *non è necessario che i casi siano esclusivi. L'importante è che siano esaustivi!).*

Caso 1: Se x è pari allora $f(x) = x + 1$ è dispari; se y è dispari allora $f(y) = y - 3$ è pari. Dunque abbiamo $f(x) \neq f(y)$ e la tesi è dimostrata per questo caso.

Caso 2: Se x e y sono pari, allora $f(x) = x + 1$ e $f(y) = y + 1$. Per ipotesi $x \neq y$, e dunque ovviamente $x + 1 \neq y + 1$. La tesi è dimostrata per questo caso.

Caso 3: Se x e y sono dispari, allora $f(x) = x-3$ e $f(y) = y-3$. Per ipotesi $x \neq y$ e dunque $x-3 \neq y-3$. La tesi è dimostrata per questo caso.

Concludiamo che la tesi è dimostrata per ogni $x \neq y$ nel dominio.

Consideriamo la suriettività. In generale possiamo concettualizzare una dimostrazione di suriettività come segue: un avversario sceglie a piacere un elemento w nel codominio di f. Noi dobbiamo essere in grado di rispondere con un elemento x nel dominio di f tale che $f(x) = w$. Risulta utile provare alcuni casi per farsi un'idea della forma generale della risposta:

- *L'avversario ci dà $w = -17$. Si tratta di un numero dispari, dunque so già che devo cercare un intero x pari (per come è definita f). Inoltre deve valere $f(x) = w$ e dato che x è pari questo significa $x+1 = -17$. Scelgo dunque $x = w - 1$.*

- *L'avversario ci dà $w = 102$. Si tratta di un numero pari, dunque so già che devo cercare un intero x dispari come pre-immagine. Inoltre deve valere $f(x) = 102$ e dato che x è dispari questo significa $x - 3 = 102$. Scelgo dunque $x = w + 3$.*

- *L'avversario ci dà $w = 0$. Si tratta di un numero pari, dunque so già che devo cercare un intero x dispari come pre-immagine. Inoltre deve valere $f(x) = 0$ e dato che x è dispari questo significa $x-3 = 0$. Scelgo dunque $x = w + 3$.*

- *Etc.*

Una volta che mi sono fatto un'idea della soluzione posso organizzare come segue la dimostrazione: dato $w \in \mathbf{Z}$, se w è dispari allora la sua pre-immagine è $w - 1$; se w è pari allora la sua pre-immagine è $w + 3$. Dunque f è suriettiva.

Abbiamo considerato anche la seguente argomentazione più formale. Denotiamo con P l'insieme degli interi pari e con D l'insieme degli interi dispari. Siano $f_0 : P \to D$ e $f_1 : D \to P$ le seguenti funzioni:

$$f_0(x) = x + 1; f_1(x) = x - 3.$$

Risulta allora che $f = f_0 \cup f_1$. Inoltre il dominio di f_0 e il dominio di f_1 sono disgiunti. Analogamente sono disgiunte l'immagine di f_0 e l'immagine fi f_1: $f_0(P) \subseteq D$ e $f_1(D) \subseteq P$. Infine, $P \cup D = \mathbb{Z}$.

In queste condizioni abbiamo osservato che se f_0 e f_1 sono iniettive, allora anche f è iniettiva. Se f non fosse iniettiva esisterebbero $x \neq x'$ interi tali che $f(x) = f(x')$. Se x e x' hanno stessa parità questo è impossibile perché f si comporta su entrambi come f_0 o come f_1 e queste sono iniettive. Se x e x' hanno parità opposte, è impossibile che le loro immagini coincidono perché l'immagine di un pari è un dispari (sotto f_0) e l'immagine di un dispari è un pari (sotto f_1).

Inoltre in questo caso vale anche che se f_0 e f_1 sono suriettive allora $f = f_0 \cup f_1$ è suriettiva, perché $P \cup D = \mathbb{Z}$ e $P \cap D = \emptyset$.

Osservazione 12 *Abbiamo discusso il seguente ragionamento per casi: Presi $x, y \in \mathbb{Z}$, con $x \neq y$, consideriamo $f(x)$ e $f(y)$. Lo scopo è di dimostrare che in ogni caso si può concludere $f(x) \neq f(y)$.*

In base alla definizione di f possiamo distinguere i seguenti casi:

Caso 1: $f(x) = x + 1$ *e* $f(y) = y + 1$. *In questo caso è possibile concludere che* $f(x) \neq f(y)$ *dato che* $x \neq y$.

Caso 2: $f(x) = x - 3$ *e* $f(y) = y - 3$. *In questo caso è possibile concludere che* $f(x) \neq f(y)$ *dato che* $x \neq y$.

Caso 3: $f(x) = x + 1$ *e* $f(y) = y - 3$. *In questo caso abbiamo osservato che se* $f(x) = x + 1$ *allora* x *è pari e che se* $f(y) = y - 3$ *allora* y *è dispari. Questo di per sé non contraddice l'ipotesi né verifica la tesi desiderata.*

Caso 4: $f(x) = x - 3$ *e* $f(y) = y + 1$. *In questo caso abbiamo osservato che se* $f(x) = x - 3$ *allora* x *è dispari e che se* $f(y) = y + 1$ *allora* y *è pari. Questo di per sé non contraddice l'ipotesi né verifica la tesi desiderata.*

Abbiamo osservato che quanto sopra rilevato non conduce in nessun modo a concludere che la tesi che si stava cercando di dimostrare (f *iniettiva) sia falsa. Si tratta solo di un ragionamento per casi non conclusivo. Un ragionamento per casi è conclusivo solo se in ciascuno dei casi riesco a stabilire la tesi. Il non riuscire a stabilire la tesi in uno dei casi non significa che la tesi sia falsa.*

Si può inoltre osservare che il ragionamento di sopra può essere ulteriormente sviluppato. Nel Caso 3, supponiamo (per assurdo) di avere $f(x) = f(y)$, *ossia* $x + 1 = y - 3$. *Dunque* $x + 4 = y$. *Da questo deduciamo che la parità di* x *e di* y *è la stessa. Ma questo contraddice l'ipotesi per cui* $f(x) = x + 1$ *mentre* $f(y) = y - 3$. *Infatti, in base alla definizione di* f, *se* x *e* y *sono entrambi pari allora* $f(x) = x + 1$ *e* $f(y) = y + 1$; *se* x *e* y *sono entrambi dispari allora* $f(x) = x - 3$ *e* $f(y) = y - 3$. *Dato che ipotizzare che* $f(x) = f(y)$, *in questo caso, conduce a una contraddizione, possiamo concludere che deve essere necessariamente vero che* $f(x) \neq f(y)$. *Abbiamo così stabilito la tesi desiderata anche nel Caso 3.*

Analogamente possiamo ragionare sul Caso 4 e concludere che $f(x) \neq f(y)$. *Questo dà luogo a un ragionamento per casi conclusivo, alternativo a quello svolto in precedenza.*

Osservazione 13 *Abbiamo osservato che la funzione* f *dell'esempio di sopra definita per casi risulta ben definita perché i casi sono mutualmente esclusivi ed esaustivi. In termini insiemistici gli insiemi corrispondenti ai casi, ossia gli interi relativi pari e gli interi relativi dispari, costituiscono una partizione del dominio* $\mathbf{Z}$.

Al contrario, se proviamo a definire una funzione in base a casi non disgiunti, non otteniamo propriamente una funzione, in quanto a un elemento che cade sotto più di un caso può venir assegnato un valore differente.

In generale una funzione definita come segue:

$$f(x) := \begin{cases} h_1(x) & \textit{se } x \in A_1 \\ h_2(x) & \textit{se } x \in A_2 \\ \dots & \dots \\ h_t(x) & \textit{se } x \in A_t \end{cases}$$

risulta ben posta se tutte le $h_1, \dots, h_t$ *sono funzioni e se gli insiemi* $A_1, \dots, A_t$ *sono due a due disgiunti. In tal caso* f *è una funzione ben definita con dominio* $A_1 \cup \dots \cup A_t$.