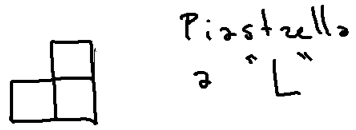
Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 15
(a.a. 23/24, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (lorenzo.carlucci@uniroma1.it)

1 Piastrellamenti

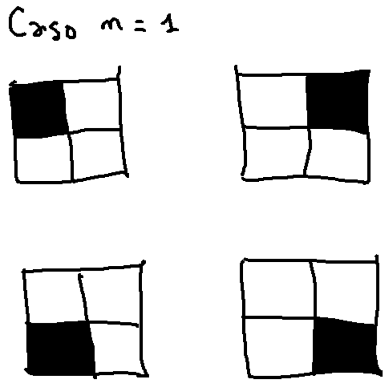
Consideriamo il seguente problema: Abbiamo un pavimento quadrato composto di $2^n \times 2^n$ quadrati. Voglio ricoprirlo di piastrelle bianche a forma di L



rispettando il vincolo seguente: vogliamo mettere una piastrella nera quadrata in una delle posizioni centrali del pavimento; ossia in uno dei quattro quadrati che hanno un angolo nel centro del pavimento.

L'arredatore ci assicura che è possibile farlo per ogni $n \geq 1$. Non siamo molto convinti e vogliamo dimostrarlo. Proviamo per induzione.

Il **caso base** è rassicurante: se ho un pavimento di $2^1 \times 2^1$ piastrelle quadrate ogni modo di posizionare una piastrella a L lascia libero un quadrato centrale.



Passiamo al **caso** $n + 1$: abbiamo un pavimento di $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ piastrelle quadrate. La nostra ipotesi induttiva ci dice che:

Ipotesi Induttiva
Possiamo pavimentare ogni pavimento quadrato di dimensione $2^n \times 2^n$ nel modo desiderato.

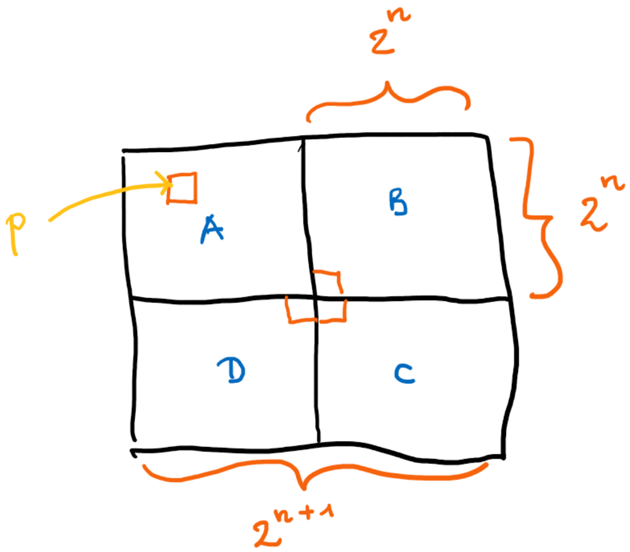
Risulta naturale applicare questa ipotesi induttiva scomponendo il pavimento di $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ in quattro pavimenti di $2^n \times 2^n$ ottenuti tagliando lungo gli assi centrali. A questo punto abbiamo un problema: l'ipotesi induttiva, come l'abbiamo formulata, ci assicura di poter pavimentare le quattro zone con una piastrella quadrata nera nel centro di ciascuno di essi. Questo *non ci garantisce* di poter posizionare una piastrella nera al centro del pavimento di dimensione $2^{n+1} \times 2^{n+1}$.

In questo caso risulta necessario **modificare l'ipotesi induttiva** e in particolare **rinforzare l'ipotesi induttiva**! Partiamo da una osservazione banale: nel caso $n = 1$ abbiamo dimostrato non solo che è possibile pavimentare il pavimento 4×4 mettendo una piastrella nera in una posizione centrale ma anche che è possibile farlo mettendo una piastrella nera in ogni possibile posizione del pavimento! In questo caso l'osservazione è una banalità perché tutte le posizioni del pavimento sono posizioni centrali! Ma ovviamente in generale non è così. Proviamo però a modificare l'ipotesi induttiva in base a questa osservazione.

La nuova ipotesi induttiva è quindi la seguente:

Nuova Ipotesi Induttiva
È possibile pavimentare un pavimento di $2^n \times 2^n$ con piastrelle bianche a L lasciando spazio per un piastrella nera quadrata in *una qualsiasi posizione del pavimento*.

Riconsideriamo ora il caso $n + 1$: possiao ora assumere di saper pavimentare ciascuno dei quattro riquadri lasciando uno spazio per la piastrella nera in qualunque posizione. Dobbiamo dimostrare di poter fare lo stesso con il pavimento $2^{n+1} \times 2^{n+1}$. Sia dunque p una arbitraria posizione in questo pavimento. Necessariamente p appartiene a uno dei quattro quadranti. Supponiamo, senza perdita di generalità, che si tratti del primo quadrante in altro a sinistra (A nella figura). Per ipotesi induttiva applicata a questo quadrante sappiamo di poter pavimentarlo nel modo desiderato. Che fare ora degli altri quadranti? Per ciascuno di essi sappiamo di poterli pavimentare lasciando un posto libero per la piastrella nera in qualunque posizione. In particolare possiamo lasciare un posto libero nelle tre posizioni centrali del pavimento $2^{n+1} \times 2^{n+1}$. L'ipotesi induttiva ci assicura di poter pavimentare i quadranti $2, 3, 4$ lasciando libere le posizioni indicate. Ovviamente queste tre posizioni possono essere coperte da una singola piastrella a forma di L. Dunque possiamo ottenere una pavimentazione completa del pavimento $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ con una piastrella nera in posizione p, come desiderato.



Come abbiamo osservato, una volta rinforzata l'ipotesi induttiva, è necessario dimostrare che questa nuova proprietà rinforzata viene preservata dal generico $n \geq$ della base al suo successore $n+1$. Consideriamo la proprietà $P(n) =$ Ogni pavimento quadrato $2^n \times 2^n$ si può ricoprire con piastrelle a L lasciando libera una posizione centrale, e consideriamo la proprietà rinforzata $Q(n) =$ Ogni pavimento quadrato $2^n \times 2^n$ si può ricoprire con piastrelle a L lasciando libera una qualunque posizione.

Ovviamente Q è più forte di P (possiamo dire che $Q(n)$ implica $P(n)$). Abbiamo visto sopra che $Q(1)$ è vera ed è stabilita dalla stessa osservazione che ci convince che $P(1)$ è vera. La dimostrazione vista sopra stabilisce, per un generico $n \geq 1$, l'implicazione: Se $Q(n)$ allora $Q(n+1)$. Il Principio di Induzione ci permette allora di concludere che: Per ogni $n \geq 1$ vale $Q(n)$. In particolare abbiamo stabilito il nostro caso di interesse iniziale, ossia che possiamo coprire ogni pavimento $2^n \times 2^n$ per $n \geq 1$ con piastrelle a L lasciando libera una posizione *centrale*. Lo abbiamo dimostrato dimostrando una tesi più forte: Possiamo coprire ogni pavimento $2^n \times 2^n$ per $n \geq 1$ lasciando libera una posizione *qualunque*.

Preso un generico $n \geq 1$, possiamo stabilire $P(n+1)$ assumendo $Q(n+1)$ con un argomento molto simile a quello visto nella dimostrazione di sopra: in questo caso ci interessa ottenere una copertua del quadrato $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ lasciando libera una delle posizioni centrali (e non una posizione arbitraria). Assumendo $Q(n)$ possiamo dimostrare $P(n+1)$ con un caso specifico dell'argomento visto sopra: applichiamo l'ipotesi induttiva $Q(n)$ a ciascuno dei quattro sotto-quadrati $2^n \times 2^n$ del quadrato $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ scegliendo di lasciare libera una posizione d'angolo in modo da avere una copertura del quadrato $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ che lascia libere tutte e quattro le posizioni centrali. A questo punto concludiamo applicando una piastrella a L per coprire tre di queste posizioni. Otteniamo così quanto desiderato, ossia una copertura del quadrato che lascia libera una posizione centrale (ovviamente possiamo farlo per ognuna delle quattro posizioni centrali, a seconda di come posizioniamo l'ultima piastrella a L). Quindi abbiamo stabilito $P(n+1)$ assumendo $Q(n)$.

Si noti però che, dal fatto che è vera $Q(1)$, e che per ogni $n \geq 1$ abbiamo stabilito l'implicazione $Q(n) \to P(n+1)$, non possiamo concludere usando il Principio di Induzione che per ogni $n \geq 1$ vale $P(n)$. Abbiamo stabilito i seguenti fatti

$$Q(1), Q(1) \to P(2), Q(2) \to P(3), Q(3) \to P(4), \ldots$$

ma questa catena di implicazioni non ci permette di concludere che per ogni $n \geq 1$ vale $P(n)$.

Per questo motivo abbiamo dovuto dimostrare, per $n \geq 1$, l'implicazione $Q(n) \to Q(n+1)$ e non l'implicazione $Q(n) \to P(n+1)$.

2 Errori di Induzione: una sola squadra del cuore

Abbiamo discusso in classe il seguente argomento che dimostra che tutti i tifosi tifano la stessa squadra. Dimostreremo per induzione che per ogni $n \geq 1$ per ogni gruppo di n tifosi esiste una squadra tale che tutti gli n tifosi tifano quella stessa squadra. Questo implica ovviamente che tutti i tifosi tifano la stessa squadra. Assumiamo che ogni tifoso tifa una e una sola squadra.

Caso Base: $n = 1$. Preso un arbitrario insieme di 1 tifoso, sia esso t_1, è ovvio che esiste una unica squadra tifata da t_1.

Passo Induttivo: Consideriamo un insieme arbitrario di $n + 1$ tifosi, sia esso

$$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}\}.$$

Consideriamo il sottinsieme dei primi n tifosi, ossia

$$T_1 = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}.$$

Questo è ovviamente un insieme di n elementi, dunque per Ipotesi Induttiva esiste una squadra, sia S, tale che $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tifano S.

Consideriamo il sottinsieme degli ultimi n tifosi in T, ossia

$$T_2 = \{t_2, t_3, \ldots, t_n, t_{n+1}\}.$$

Ovviamente è un insieme di n tifosi. Dunque per Ipotesi Induttiva esiste una squadra, sia S', tale che $t_2, t_3, \ldots, t_n, t_{n+1}$ tifano S'.

Ora osserviamo che il tifoso t_n appartiene sia all'insieme T_1, e dunque tifa S, che all'insieme T_2, e dunque tifa S'. Dunque $S = S'$. Dunque tutti i tifosi $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}$ tifano la stessa squadra, S.

Cosa non va in questo argomento? L'argomento che dimostra la base è corretto, dunque stabilisce la proprietà per 1, ossia $P(1)$.

L'argomento del passo induttivo è quasi corretto: il problema è che non si applica per tutti i valori di n cui dovrebbe applicarsi. Questi sono tutti i valori $\geq$ alla base, ossia ≥ 1. Ma per $n = 1$ l'argomento non funziona: l'insieme T di partenza in questo caso ha due elementi, è $\{t_1, t_2\}$. L'argomento individua due sottinsiemi $T_1 = \{t_1\}$ (i primi n, ossia il primo elemento di t_1) e $T_2 = \{t_2\}$ (gli ultimi n, ossia l'ultimo elemento di T). Ma questi insiemi non hanno alcun punto in comune!! Dunque l'argomento non può procedere.

Si osservi che l'argomento nel passo induttivo è corretto per tutti i valori $n = 2, 3, 4, \ldots$. Ossia stabilisce le implicazioni seguenti:

$$P(2) \to P(3)$$

$$P(3) \to P(4)$$

$$P(4) \to P(5)$$

etc., e in generale, per $n \geq 2$

$$P(n) \to P(n+1).$$

Inoltre abbiamo dimostrato la base, ossia $P(1)$. Ma questo non è sufficiente a concludere l'induzione, perché non abbiamo dimostrato l'implicazione

$$P(1) \to P(2).$$

3 Principio di Induzione Forte

Il seguente teorema è noto a tutti dalle superiori.

Teorema 1. *Ogni numero natural ≥ 2 può scriversi come prodotto di numeri primi.*

Proviamo a dimostrarlo per induzione. Il caso base è ovvio: $n = 2$ è un primo e dunque anche un prodotto di primi. Consideriamo il passo induttivo: sia $n \geq 2$ generico; dobbiamo dimostrare che $n + 1$ può scriversi come prodotto di primi. La nostra ipotesi induttiva è che n può scriversi come prodotto di primi. Possiamo dunque assumere che esistono $p_1, \ldots, p_k$ numeri primi tali che

$$n = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k.$$

Da questo dovremmo dedurre che anche $n+1$ si può scrivere come prodotto di primi, ossia che esistono primi $q_1, \ldots, q_\ell$ tali che

$$n + 1 = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_\ell.$$

Si osservi che dalla nostra ipotesi induttiva possiamo soltanto dedurre:

$$n + 1 = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1.$$

Non è affatto semplice dedurre da questo che $n + 1$ si può esprimere come prodotto di primi.

Proviamo un altro approccio. Usiamo il Principio del Minimo Numero (che abbiamo usato per giustificare la correttezza del Principio di Induzione).

Per assurdo, supponiamo che la tesi non sia vera. Dunque l'insieme seguente è non vuoto:

$$C = \{n \ : \ n \geq 2 \text{ e non è fattorizzabile in primi}\}.$$

Per il PMN esiste il minimo, sia $m = \min(C)$.

m può essere primo? Ovviamente no, altrimenti avrebbe una scrittura come prodotto di primi (se stesso!). m non può essere $= 2$, perché 2 è primo.

Dato che m non è un primo, esistono a, b tali che

$$m = a \times b$$

e

$$2 \leq a, b < m.$$

Dato che a e b sono minori di m, a e b non sono in C. Inoltre dato che $2 \leq a, b$, il motivo per cui a e b non sono in C non è perché sono minori di 2. Dunque non sono in C perché non soddisfano l'altra condizione che definisce C, ossia ammettono ciascuno una fattorizzazione in primi: esistono primi $p_1, \ldots, p_k$ e $q_1, \ldots, q_\ell$ tali che

$$a = p_1 \times \cdots \times p_k$$

$$b = q_1 \times \cdots \times q_\ell$$

Ma allora possiamo scrivere

$$m = a \times b = p_1 \times \cdots \times p_k \times q_1 \times \cdots \times q_\ell$$

e m ammette una fattorizzazione in primi. Contraddizione a $m \in C$. Concludiamo che l'ipotesi per assurdo è falsa, dunque $C = \emptyset$, ossia non esistono numeri ≥ 2 non scomponibili in fattori primi; ossia: tutti i numeri maggiori o uguali a 2 sono esprimibili come prodotti di primi. **Q.E.D.**

Nell'argomento di sopra ci siamo ritrovati a ragionare su **due** elementi più piccoli del minimo dei controesempi, ossia i due fattori a, b tali che $a \times b = m$. In termini di induzione questo significa supporre che l'Ipotesi Induttiva vale non soltanto per il predecessore immediato del numero che stiamo considerando, ma **per tutti i numeri più piccoli di esso**. In base a queste considerazioni formuliamo il seguente Principio di Induzione Forte.

Principio di Induzione Forte Sia P una proprietà di interi non-negativi e sia k un intero non-negativo. Se valgono i seguenti punti

1. (Base) P vale di k,
2. (Passo) Se P vale di $k, k+1, k+2, \ldots, n-1$ allora vale di n (per $n > k$ arbitrario),

allora posso concludere che per ogni $n \geq k$ vale $P(n)$.

Il caso classico è $k = 0$, utile a dimostrare proprietà che valgono per tutti gli interi non-negativi. L'Induzione Forte va usata tutte le volte che nell'analisi del passo induttivo, ci troviamo a ragionare su arbitrari elementi più piccoli del caso in esame.

Esempio Diamo una dimostrazione del Teorema di fattorizzazione usando l'Induzione Forte. La tesi è che per ogni $n \geq 2$ esiste una fattorizzazione in numeri primi.

La base è $n = 2$, e ovviamente vale la tesi perché 2 è primo.

Il passo induttivo consiste nell'assumere, per un arbitrario $n \geq 2$, che per ogni $2 \leq k \leq n$ vale la tesi e dimostrare che vale per $n+1$.

Se $n+1$ è primo, la tesi è dimostrata. Se $n+1$ non è primo allora $n = a \times b$ con $2 \leq a, b < n+1$. Dunque per a e per b vale la tesi (Ipotesi Induttiva) ossia a è fattorizzabile e b è fattorizzabile. Allora anche $n+1$ è fattorizzabile.

Questo conclude la dimostrazione.

Esempio 1. Il Principio di Induzione Forte risulta molto utile quando vogliamo dimostrare che una certa proprietà P vale di tutti i termini (o di quasi tutti i termini) di una successione $S_0, S_1, S_2, \ldots$ definita ricorsivamente; ossia in cui il termine $(n+1)$-esimo è una combinazione di termini precedenti.

Un esempio classico è la successione di Fibonacci, così definita: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, per $n \geq 1$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Proviamo a dimostrare un limite inferiore alla grandezza di F_n per ogni $n \geq 2$. Definiamo la seguente costante $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Questa costante è detta *sezione aurea* e ha moltissime proprietà interessanti (si invita il lettore a informarsi!). Dimostriamo che per ogni $n \geq 2$

$$F_n \geq \phi^{n-2}.$$

Il caso base è $n = 2$: $F_2 = F_1 + F_0 = 0 + 1 = 1$ per definizione. D'altra parte $\phi^{2-2} = \phi^0 = 1$, dunque la tesi è dimostrata.

Per il passo induttivo, sia n generico ≥ 2. La nostra ipotesi induttiva forte è che per ogni i tale che $2 \leq i \leq n$ vale la proprietà, ossia $F_n \geq \phi^{n-2}$. Vogliamo dimostrare che vale anche per F_{n+1}. La tesi per F_{n+1} è la seguente:

$$F_{n+1} \geq \phi^{n+1-2} = \phi^{n-1}.$$

Partiamo dalla definizione di F_{n+1}. Dato che $n \geq 2$, la definizione della successione di Fibonacci ci dice che

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Si noti però che questa definizione vale per $n \geq 2$. Quindi per $n = 2$ $n-1 = 1$ cade fuori dal range della nostra ipotesi induttiva forte. Dobbiamo quindi dimostrare direttamente anche la proprietà per $n = 3$: $F_3 = 2$ per definizione. D'altra parte $\phi^{3-2} = \phi^1 = \phi \leq 3$.

Possiamo ora procedere con il passo induttivo. Dato che per ogni $n \geq 3$ vale

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

e $n - 1 \geq 2$, l'ipotesi induttiva forte può applicarsi sia a F_n che a F_{n-1}. Applcata a F_n ci dice che

$$F_n \geq \phi^{n-2},$$

mentre applicata a $n - 1$ ci dice che

$$F_{n-1} \geq \phi^{n-3}.$$

Dunque

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq \phi^{n-2} + \phi^{n-3}.$$

Raccogliendo il fattore ϕ^{n-3} abbiamo

$$F_{n+1} = \phi^{n-3}(\phi + 1).$$

A questo punto usiamo una proprietà speciale di ϕ, ossia che:

$$\phi + 1 = \phi^2,$$

(da verificare per esercizio). Abbiamo dunque

$$F_{n+1} = \phi^{n-3}(\phi^2) = \phi^{n-3+2} = \phi^{n-1} = \phi^{n+1-2},$$

come volevasi dimostrare.

Esempio 2. Consideriamo la seguente dimostrazione del fatto che tutti i numeri di Fibonacci sono pari; ossia per ogni $n \geq 0$, F_n è pari.

Il caso base è $F_0 = 0$, e 0 è pari.

Per il passo induttivo consideriamo n generico; per definizione

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Per l'ipotesi induttiva forte applicata a F_n e F_{n-1} sappiamo che entrambi questi numeri sono pari. Dunque F_{n+1} è pari perché è somma di pari.

Cosa non va? Il problema è che l'equazione $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ non vale per tutti i valori di n cui la stiamo applicando. In particolare non vale per $n = 0$. Questo è sufficiente a invalidare tutto l'argomento induttivo!

3.1 Toblerone

Abbiamo una barra di Toblerone con n quadratini. Ci chiediamo quante mosse di spezzatura (lungo le linee che separano i quadratini) sono **necessarie** per dividere il Toblerone in n quadratini distinti (monoporzioni). Vogliamo individuare una funzione $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ per cui sia possibile dimostrare che: per ogni $n \geq 1$, per spezzare una barra di Toblerone di n quadratini sono necessarie **almeno** $f(n)$ mosse. NB: A differenza di quanto accadeva con le Torri di Hanoi qui dobbiamo escludere che esista una strategia più corta/veloce di $f(n)$ mosse per risolvere il problema, mentre per le Torri di Hanoi la scelta della strategia era nostra. In questo caso conviene immaginare di avere a che fare con un avversario che decide liberamente quale strategia usare. Il nostro compito è di ragionare sulla sua strategia (in modo molto generale dato che non sappiamo quale sia) per dimostrare che deve impiegare almeno $f(n)$ mosse.

Proposizione 1. *Per ogni $n \geq 1$ sono necessarie $n-1$ spezzature per suddividere in n quadratini una barra di Toblerone lunga n.*

Dimostrazione

Base: $n = 1$. Ovviamente mi servono 0 mosse.

Passo: Sia $n \geq 1$. L'ipotesi induttiva forte ci assicura che la tesi vale per $1, 2, \ldots, n$. Usando queste ipotesi dobbiamo dimostrare che vale per $n+1$. NB: dobbiamo dimostrare che non si può ridurre in porzioni singole il Toblerone da $n+1$ cubetti. usando meno di n mosse.

Possiamo ragionare così: lasciamo la prima mossa a un avversario, che può decidere di spezzare il Toblerone in un punto a sua scelta tra gli n possibili. Dimostreremo poi, usando l'ipotesi induttiva forte, che qualunque sia la scelta dell'avversario, non potrà far meglio di fare n spezzature totali.

La mossa dell'avversario divide il Toblerone in due parti A e B, di a e b quadratini rispettivamente. Di questi valori so soltanto che $a + b = n + 1$, con $1 \leq a, b < n$. Per ipotesi induttiva forte sappiamo che per dividere la prima parte, A, sono necessarie $a-1$ mosse e che per dividere la seconda parte, B, sono necessarie $b-1$ mosse. Dunque la strategia dell'avversario non potrà fare a meno di fare

$$a - 1 + b - 1 + 1 = a + b - 1 = n + 1 - 1 = n$$

mosse.

4 Extra: Torri di Hanoi

4.1 Torri di Hanoi

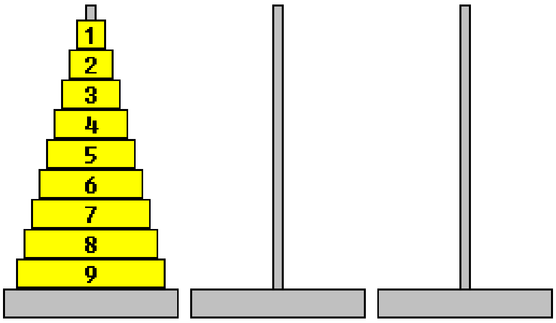
Il gioco delle Torri di Hanoi è il seguente: abbiamo tre pioli A, B, C e n dischi di diametri diversi posizionati in ordine decrescente per diametro dal basso verso l'alto in uno dei tre pioli. L'obiettivo è di spostare gli n dischi su un altro piolo rispettando i seguenti vincoli:

1. Alla fine tutti i dischi devono essere sullo stesso piolo in ordine decrescente per diametro dal basso verso l'alto.

2. A ogni mossa posso spostare un disco da un piolo a un altro.

3. Non posso mai mettere un disco di diametro maggiore sopra a un disco di diametro minore.

In rete trovate molti siti con versioni interattiva del gioco, e.g. `https://www.mathsisfun.com/games/towerofhano`



Provando con i primi valori di n si vede facilmente che per $n = 1$ basta una mossa per raggiungere l'obiettivio; con $n = 2$ basta 3 mosse; con $n = 3$ bastano 7 mosse, con $n = 4$ bastano 15 mosse, ... (si invita il lettore a controllare queste risposte).

Possiamo così congetturare che per raggiungere l'obiettivo siano sufficienti $2^n - 1$ mosse.

Proposizione 2. *Per ogni $n \geq 1$ per spostare una torre di n dischi da un piolo all'altro sono sufficienti $2^n - 1$ mosse.*

Dimostriamolo per Induzione. In questo caso l'Ipotesi Induttiva è la seguente:

> **Ipotesi Induttiva**
> Per spostare una torre di n dischi da un piolo a un altro rispettando i vincoli del gioco sono sufficienti $2^n - 1$ mosse.

Consideriamo ora il caso di una torre di $n+1$ dischi. Dobbiamo dimostrare la tesi, ossia che sono sufficienti $2^{n+1} - 1$.

La seguente **osservazione** è cruciale: Supponiamo di avere una torre di $n + 1$ dischi sul piolo A. Consideriamo la torre composta dagli n dischi superiori (ossia tutti tranne la base). L'ipotesi induttiva, presa alla lettera, mi garantisce di poter spostare questa torre su uno dei gli altri pioli B o C con al più $2^n - 1$ mosse. Questo significa che esiste una *sequenza di mosse* o *strategia* – indichiamola con S_n – di al più $2^n - 1$ mosse che mi permette di spostare la torre di n dischi in B o in C. Si osserva ora facilmente che se questa strategia rispetta i vincoli del gioco, allora posso applicarla anche in presenza del disco di base della torre di $n + 1$ dischi, senza spostarlo mai. Infatti, se nella strategia per spostare la torre di n dischi non metto mai un disco di diametro maggiore sopra a uno di diametro minore questo rimane vero in presenza del disco base della torre di $n + 1$ dischi; perché questo disco ha diametro maggiore di tutti quelli coinvolti nella strategia per spostare la torre degli n dischi superiori!

Per spostare la torre di $n + 1$ dischi sul piolo C posso quindi procedere così:

1. Uso la strategia S_n per spostare gli n dischi superiori sul piolo B.
2. Sposto il disco base da A in C.
3. Applico di nuovo la strategia S_n per spostare la torre di n dischi da B a C.

Se volessi spostare la torre di $n + 1$ dischi sul piolo B basterebbe invertire il ruolo di B e C.

Quanto appena descritto è una **strategia** per spostare la torre di $n + 1$ dischi sul piolo C (o B). Quante mosse ho usato in questa strategia? Ho usato due volte la strategia S_n più una singola mossa (spostamento del disco di diametro massimo da A a C). Dunque ho usato al più

$$2^n - 1 + 2^n - 1 + 1 \text{ mosse.}$$

Ovviamente
$$2^n - 1 + 2^n - 1 + 1 \leq 2 \times (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Questo conclude la dimostrazione del passo induttivo: assumendo di avere una strategia di al più $2^n - 1$ mosse per le torri di n dischi ho dimostrato l'esistenza di una strategia di al più $2^{n+1} - 1$ mosse per le torri di $n+1$ dischi. L'esistenza di questa strategia è stata dimostrata *descrivendo* la strategia stessa. Questo, insieme al caso base, conclude il Teorema.

QED

Esercizio 1. *Dimostrare che per ogni* $n \geq 1$
$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \times F_{n+1},$$
dove $(F_n)_{n \geq 0}$ *è la successione di Fibonacci.*

Esercizio 2. *Dimostrare che per ogni* $n \geq 1$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n},$$
dove $(F_n)_{n \geq 0}$ *è la successione di Fibonacci.*

Esercizio 3. *Dimostrare che usando monete da* 2 *euro e da* 3 *euro posso fare qualunque acquisto di valore* $n \geq 2$*. In altre parole dimostrare che per ogni* $n \geq 2$ *esistono* $a, b \geq 0$ *tali che* $n = 2 \times a + 3 \times b$*.*

Esercizio 4. *Dimostrare che esiste un* n *tale che usando monete da* 4 *euro e da* 9 *euro posso fare qualunque acquisto di valore* $\geq n$*.*