

# Metodi Matematici per l'Informatica

Esame (a.a. 22/23, I canale) - Docente: Lorenzo Carlucci  
- Data: 16 Gennaio 2023

**Esercizio 1** *Un testo d'esame comprende 5 domande di Combinatoria, 10 domande di Logica e 5 domande di Algebra.*

1. *In quanti modi posso scegliere 10 domande?*
2. *In quanti modi posso scegliere 10 domande di cui esattamente 4 di Logica?*
3. *In quanti modi posso scegliere 10 domande di cui almeno una di Combinatoria e almeno una di Logica?*

**Esercizio 2** *Consideriamo un sistema di password formato da 3 lettere (scelte le 26 lettere dell'alfabeto latino) seguite da 2 caratteri speciali scelti tra \$, !, e % seguite da 3 lettere. Le lettere possono essere maiuscole o minuscole (per es. AbR!!cCD)*

1. *Quante password hanno ! come ultimo simbolo?*
2. *Quante password hanno L come prima lettera o ! come ultimo simbolo?*
3. *Quante password sono palindrome (ossia possono essere lette indifferentemente da sinistra a destra e da destra a sinistra, per es. AbZ\$\$ZbA)?*

**Esercizio 3** *Siano  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : X \rightarrow Z$  due funzioni, con  $Z \subseteq Y$ . Come al solito identifichiamo una funzione con il suo grafico (insieme di coppie ordinate argomenti/valore). Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. *Se  $f$  e  $g$  sono iniettive allora  $f \cap g : X \rightarrow Z$  è iniettiva.*
2. *Se  $f$  e  $g$  sono suriettive allora  $f \cup g$  è una funzione di tipo  $X \rightarrow Z$ .*
3. *Se  $g$  è biiettiva allora  $(f \circ g^{-1})$  è una funzione di tipo  $Z \rightarrow Y$ .*

**Esercizio 4** *Sia  $R$  la relazione seguente  $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5)\}$  sull'insieme  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .*

1.  *$R$  è una relazione di ordine totale su  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ?*
2. *Calcolare  $R \circ R$ .*
3. *Calcolare la chiusura transitiva di  $R$ .*

**Esercizio 5** *Consideriamo la seguente relazione  $\prec$  definita su coppie di intervalli chiusi della retta reale:  $[x, y] \prec [w, z]$  se e solo se  $[x, y] = [w, z]$  oppure  $y \leq z$ . Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.*

1. *La relazione  $\prec$  è riflessiva.*
2. *La relazione  $\prec$  è simmetrica.*
3. *La relazione  $\prec$  non è transitiva.*

**Esercizio 6** Consideriamo la seguente dimostrazione per Induzione Forte.

*Tesi:* Per ogni  $n \geq 0$ ,  $12 \times n = 0$ .

*Caso Base:* Per  $n = 0$  abbiamo  $12 \times 0 = 0$ .

*Passo Induttivo:* Sia  $n \geq 0$  e assumiamo che la tesi valga per ogni intero  $k$  tale che  $0 \leq k \leq n$ . Dimostriamo che vale per  $n + 1$ . Scriviamo  $n + 1$  come  $a + b$  per qualche  $a, b$  tali che  $0 \leq a, b \leq n$ . Per ipotesi induttiva vale  $12 \times a = 0$  e  $12 \times b = 0$ . Dunque

$$12 \times (n + 1) = 12 \times (a + b) = (12 \times a) + (12 \times b) = 0 + 0 = 0.$$

Trovare l'errore o gli errori nell'argomento sopra esposto

(NB: non è sufficiente dire che la tesi dimostrata è falsa – questo è ovvio). Indicare esplicitamente se il Caso Base e il Passo Induttivo sono corretti.

**Esercizio 7** Formalizzare le frasi seguenti in un linguaggio proposizionale e determinare se l'ultima proposizione (che inizia con *Dunque*) è conseguenza logica della precedenti. Potete usare un metodo a piacere (tavole di verità, risoluzione, ragionamento sulla conseguenza logica ad alto livello):

Ogni caramella è o morbida o alla menta o rossa. Nessuna caramella rossa è alla menta. Nessuna caramella morbida è rossa. Dunque nessuna caramella alla menta è morbida.

**Esercizio 8** La seguente formula proposizionale in CNF è soddisfacibile?

$$\{\{p, \neg q, r, s\}, \{\neg p, q, \neg r\}, \{\neg r, s\}, \{\neg q, r\}, \{p, \neg s\}\}$$

Se si risponde SI definire un assegnamento che la soddisfa, se si risponde NO dimostrare l'insoddisfacibilità usando la regola di Risoluzione.