Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 4 (a.a. 23/24, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (lorenzo.carlucci@uniroma1.it)

1 Dimostrazioni per traduzione

Il doppio conteggio che abbiamo usato per dimostrare che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (contare i promossi è come contare i bocciati) potrebbe non risultare convincente. Come potremmo convincere uno scettico della validità del nostro conteggio? Possiamo concettualizzare quello che abbiamo fatto come una *traduzione* da un insieme all'altro. L'insieme (o lingua) di partenza è quello dei sottinsiemi di A di k elementi, chiamiamola $\mathcal{L}_1$. L'insieme (o lingua) di arrivo è quello dei sottinsiemi di A di $n-k$ elementi, chiamianola $\mathcal{L}_2$.

Abbiamo proposto una traduzione dal primo al secondo, ossia una associazione di un elemento del secondo a ogni elemento del primo. La traduzione scelta è la seguente:

$$S \mapsto A \setminus S$$

che associa un sottinsieme S di A con k elementi al suo complemento $A \setminus S$. Per sostenere che $\mathcal{L}_2$ ha lo stesso numero di elementi di $\mathcal{L}_1$ dobbiamo assicurarci che la traduzione abbia delle buone proprietà:

1. Ogni elemento di $\mathcal{L}_1$ viene tradotto in uno e un solo elemento di $\mathcal{L}_2$.

2. Ogni elemento di $\mathcal{L}_2$ è la traduzione di almeno un elemento di $\mathcal{L}_1$.

3. Non si dà il caso che due elementi distinti di $\mathcal{L}_1$ vengano tradotti nello stesso elemento di $\mathcal{L}_2$.

Chiamiamo una traduzione con le proprietà qui sopra una *buona traduzione*. Risulta abbastanza chiaro che se ho stabilito una buona traduzione tra due insiemi posso affermare che contare gli elementi dell'uno o quello dell'altro non fa differenza. Immaginiamo infatti di contare $\mathcal{L}_1$ togliendo un elemento alla volta: ogni volta che tolgo un elemento tolgo la corrispondente traduzione in $\mathcal{L}_2$. Se la traduzione è buona ogni sottrazione di un elemento in $\mathcal{L}_1$ dà luogo a una sottrazione di un unico elemento in $\mathcal{L}_2$ e una volta esaurito $\mathcal{L}_1$ ho esaurito $\mathcal{L}_2$. Torneremo più avanti in modo più formale su questi concetti ma per il momento ci accontentiamo di questo livello di formalità.

Dobbiamo quindi convincere il nostro interlocutore scettico della bontà della nostra traduzione $S \mapsto A \setminus S$. La cosa risulta piuttosto ovvia: ogni $S \subseteq A$ ha uno e un solo complemento; ogni insieme X di $n-k$ elementi in A può vedersi come il complemento di un insieme di k elementi in A (in particolare X è il complemento di $A \setminus X$); e non si dà mai il caso che due insiemi S, S' di k elementi in A possano avere lo stesso complemento (si invita il lettore a dettagliare questa dimostrazione).

Avendo stabilito una buona traduzione possiamo dunque concludere che $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ hanno la stessa cardinalità. Dato che sappiamo contare separatamente entrambi, otteniamo l'identità desiderata:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Possiamo formulare il seguente principio generale di conteggio:

Principio della Buona Traduzione: Se posso stabilire una buona traduzione tra due insiemi A e B allora A e B hanno lo stesso numero di elementi.

Combinazioni semplici e sottinsiemi Con la formula per $C_{n,k}$ posso contare quanti sono i sottinsiemi contenenti esattamente k elementi, per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$. Ovviamente un sottinsieme arbitrario di un insieme A di n elementi avrà $0, 1, 2, \ldots, n-1$ oppure n elementi. Dunque, per il principio additivo, so che la seguente somma conta esattamente il numero di tutti i sottinsiemi di un insieme di n elementi.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Intuitivamente stiamo contando i sottinsiemi di un insieme di n elementi suddividendoli in gruppi distinti, ossia i sottinsiemi di 0 elementi, di 1 elemento, di 2 elementi, etc, fino ai sottinsiemi di n elementi. In linguaggio insiemistico l'insieme di tutti i sottinsiemi di un insieme A viene detto *insieme potenzza di* A viene denotato con $P(A)$. La definizione ufficiale, per un insieme A arbitrario, è la seguente:

$$P(A) = \{S \,:\, S \subseteq A\}.$$

Si noti che gli elementi di $P(A)$ sono sottinsiemi di A e che tra di essi ci sono l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'insieme A stesso. Con questa notazione abbiamo

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \#P(A).$$

Possiamo esprimere questa quantità in modo più sintetico?

Esempio 1 *Consideriamo il seguente problema: ho una collezione di lettere B, M, Q, T, U , Z e voglio contare tutti i modi possibili per selezionare una sottocollezione, ossia scegliere alcune lettere e altre no. Non mi interessa l'ordine degli elementi, ma solo quali elementi sono selezionati (ossia non distinguo tra una scelta M, Q, Z e Q, M, Z). Più in generale suppongo di avere una collezione di n oggetti distinti e di voler contare tutte le possibili scelte di alcuni tra essi, senza contare l'ordine.*

Proviamo a definire una traduzione (o associazione, o riduzione), descrivendo una regola per trasformare uno degli oggetti che vogliamo contare (ossia una scelta di m oggetti tra gli n totali) in un oggetto di tipo diverso. In questo caso associamo a una scelta arbitraria di m oggetti tra gli n totali una stringa binaria (ossia composta di 0 e di 1) di lunghezza n.

Immaginiamo di voler comunicare a un amico al telefono il sottinsieme $\{M, Q, T\}$*, evitando che una spia capisca il messaggio. A questo fine assumiamo di aver fissato un ordinamento del mio insieme di lettere, sia: B, M, Q, T, U, Z e assumiamo che il mio interlocutore conosca questo ordinamento. Comunichiamo al nostro interlocutore l'insieme* $\{M, Q, T\}$ *dando la seguente successione ordinata di informazioni: "non c'è, c'è, c'è, c'è, non c'è, c'è". L'interlocutore può facilmente capire senza ambiguità di quale sottinsieme stiamo parlando, mentre una spia che non conosca l'enumerazione scelta dell'insieme di lettere non potrà decifrare il messaggio.*

Per semplicità di notazione sostituiamo 1 *alla risposta* c'è *e* 0 *alla risposta* non c'è*. Possiamo allora comunicare al nostro amico al telefono il sottinsieme* $\{M, Q, T\}$ *comunicando la sequenzza* 011100.

Si osserva che una stringa binaria di lunghezza 6 descrive completamente una delle possibili scelte di lettere tra B,M,Q,T,U,Z, nel senso che a ogni scelta di questo tipo corrisponde una e una sola stringa binaria di lunghezza 6 e, viceversa, a ogni stringa binaria di lunghezza 6 corrisponde una scelta: per es. alla stringa 101010 corrisponde la scelta B, Q, U. All'insieme vuoto (scelgo nessuna lettera) corrisponde la sequenza 000000; all'insieme di tutte le lettere la sequenzza 111111.

Abbiamo stabilito una traduzione tra i seguenti due insiemi:

1. *L'insieme dei sottinsiemi di* $\{B, M, Q, T, U, Z\}$.

2. *Le stringhe di 0 e di 1 di lunghezza 6.*

Si verifica facilmente che la traduzione è una buona traduzione. Possiamo concludere che le due collezioni hanno lo stesso numero di elementi. Sappiamo contare facilmente le stringhe di 0,1 di lunghezza 6: sono 2^6 *(le disposizioni con ripetizione di 6 elementi scelti tra 2). Dunque anche il numero di sottinsiemi dell'insieme* $\{B, M, Q, T, U, Z\}$ *è* 2^6.

Il ragionamento di sopra si generalizza facilmente a un insieme generico di n oggetti, sia $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Assumiamo di aver fissato una enumerazione degli elementi di A, nell'ordine mostrato sopra: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Una scelta di un suo sottinsieme ha la forma $S = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ per un qualche k tra 0 e n, dove gli indici $i_1, \ldots, i_k$ variano tra 1 e n, e per convenzione supponiamo di averli scritti in ordine crescente, ossia $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. A un oggetto di questo tipo associamo la stringa binaria $b_1 b_2 \ldots b_n$ definita così: $b_1 = 0$ se a_1 non è in S, e $b_1 = 1$ altrimenti; $b_2 = 0$ se a_2 non è in S, e $b_2 = 1$ altrimenti; etc. In altre parole stiamo segnando, per ogni elemento $a_1, \ldots, a_n$ della collezione di partenza, la sua presenza (1) o assenza (0) nel sottinsieme $S = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$.

Per il PM il numero di stringhe binarie di lunghezza n è 2^n. Concludiamo che il numero di sottinsiemi di un insieme di n oggetti è pure 2^n.

Teorema 1 *Un insieme di n elementi ha 2^n sottinsiemi.*

Equivalentemente: se $\#A = n$ allora $\#P(A) = 2^n$.

Deduciamo, per doppio conteggio, la seguente interessante identità generale:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

2 Soluzioni di esercizi

Alcune soluzioni di esercizi (molto simili o identici a quelli assegnati e discussi in classe).

Esempio 2 *In una gara di 8 atleti di cui 2 italiani, 3 francesi e 3 spagnoli, quanti sono gli ordini di arrivo in cui i primi tre atleti hanno nazionalità diverse?*

Vediamo una soluzione che usa il PA. Ci interessa la numerosità dell'insieme

$$A = \{ \textit{ ordini di arrivo con i tre primi posti occupati da atleti di nazionalità diverse} \}.$$

Si noti che gli elementi di A sono sequenze ordinate $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ dove ogni a_i è uno tra gli 8 atleti, gli a_i sono tutti distinti e le nazionalità di a_1, a_2, a_3 sono diverse.

Dichiariamo i seguenti tipi, distinguendo le soluzioni (gli elementi di A) in base alle nazionalità dei primi tre arrivati al traguardo:

1. $IFS = \{$*ordini di arrivo con un Italiano primo, un Francese secondo e uno Spagnolo terzo*$\}$.
2. $ISF = \{$*ordini di arrivo con un Italiano primo, uno Spagnolo secondo e un Francese terzo*$\}$.
3. $FIS = \{$*ordini di arrivo con un Francese primo, un Italiano secondo e uno Spagnolo terzo*$\}$.
4. $FSI = \ldots$
5. $SIF = \ldots$
6. $SFI = \ldots$

Verifichiamo che si tratta di una partizione di A in 6 parti. Esaustività: ogni elemento di A (un ordine di arrivo con i tre primi di nazionalità diverse) è ovviamente di uno dei sei tipi specificati. Viceversa: ogni elemento dell'unione dei sei tipi è un elemento di A (per es: un ordine di arrivo di tipo IFS avrà un italiano in prima, un francese in seconda e uno spagnolo in terza, ed è dunque un ordine di arrivo con i primi tre di nazionalità diverse – ossia un elemento di A. Anche l'esclusività di verifica facilmente: nessun ordine di arrivo con i primi tre di nazionalità diverse può appartenere a due diversi tipi.

In base al PA ci resta quindi da contare le cardinalità dei tipi specificati, per poi sommarle. Si può fare facilmente con il PM:

- $\#IFS = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2.$
- $\#ISF = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2.$
- $\#FIS = 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2.$
- $\#FSI = 3 \times 3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$
- $\#SIF = 3 \times 3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$
- $\#SFI = 3 \times 3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$

Il calcolo di $\#IFS$ si giustifica così: in prima posizione ho 2 scelte (devo scegliere un Italiano), in seconda 3 scelte (un Francese) in terza 3 scelte (uno Spagnolo); in quarta posizione non ho vincolo di nazionalità e dunque posso scegliere uno qualunque dei 5 atleti restanti (8 totali meno i 3 che ho già messo nelle prime tre posizioni), in quinta uno dei 4 restanti, in sesta uno dei 3 restanti, in settima uno dei 2 restanti e in ultima l'unico restante. Si tratta di una semplice applicazione del PM. Anche in questo caso osserviamo che tutti i tipi hanno la stessa cardinalità. Dal PA otteniamo:

$$\#A = \#IFS + \#ISF + \#FIS + \#FSI + \#SIF + \#SFI = (2 \times 3^2 \times 5!) \times 6.$$

Posso anche osservare a priori che il numero di classi della partizione è dato dal numero di permutazioni delle 3 nazionalità, ossia 3×2; e che ogni classe ha lo stesso numero di elementi contati con il PM.

Esempio 3 *In un gruppo di 80 individui di cui 40 maschi e 40 femmine vogliamo scegliere una delegazione di 4 rappresentanti. Le possibili delegazioni sono $C_{80,4}$ ossia i sottinsiemi di 4 elementi dell'insieme di partenza. Il genere non ci interessa.*

Quante sono invece le delegazioni con 2 individui per gruppo? Possiamo concettualizzare così: dobbiamo scegliere 2 rappresentanti maschi e 2 rappresentanti femmine. Applicando il PM il numero desiderato sarà dato dal prodotto. Le scelte di 2 rappresentanti maschi sono $\binom{40}{2}$ e le scelte di rappresentanti femmine sono $\binom{40}{2}$. Il numero di scelte che soddisfano la richiesta è dunque

$$\binom{40}{2} \times \binom{40}{2}$$

(In classe abbiamo analizzata la proposta di soluzione $\binom{40}{2} + \binom{40}{2}$. Siete invitati a confrontarla con la soluzione di sopra cercando di indicare il più precisamente possibile perché la soluzione è scorretta).

Consideriamo ora il caso in cui vogliamo formare una delegazione di 4 di cui un solo maschio e 3 femmine. Per il PM la prima scelta è tra i 40 maschi e la seconda tra le possibili scelte di 3 femmine tra le 40 totali. Dunque la soluzione è $40 \times \binom{40}{3}$.

Consideriamo ora il problema di contare le delegazioni da 4 che contengono almeno un rappresentante per genere. In classe abbiamo analizzato alcune soluzioni proposte da voi.

Soluzione 1 *Uso il passaggio al complemento! Il vincolo che mi interessa è di contenere almeno un rappresentante per genere. Chiamiamo V questo vincolo. A livello insiemistico V può identificarsi con un* *sottinsieme dell'insieme A di tutte le delegazioni da 4. Vogliamo contare V contando il suo complemento $A \setminus V$, ossia quante sono le delegazioni che* non soddisfano il vincolo V. *Le delegazioni che non soddisfano V sono quelle per cui è falso che contengano almeno un rappresentante per genere. Dunque sono delegazioni che non contengono rappresentanti maschili oppure non contengo rappresentati femminili. Si tratta di delegazioni composte unicamente da maschi oppure unicamente da femmine. Le delegazioni composte solo da maschi sono $\binom{40}{4}$ mentre le delegazioni composte solo da femmine sono $\binom{40}{4}$. Il numero di delegazioni che non soddisfano il vincolo V è dunque $\binom{40}{4} + \binom{40}{4}$. Si osservi che abbiamo usato qui il PA: per contare $A \setminus V$ lo abbiamo suddiviso in due tipi esaustivi e disgiunti: le delegazioni di soli maschi e quelle di sole femmine, e abbiamo contato sepratamente le cardinalità dei due tipi. Concludiamo sottraendo il numero delle delegazioni che non soddisfano il vincolo dal totale delle delegazioni:*

$$\binom{80}{4} - \left(\binom{40}{4} + \binom{40}{4}\right) = \binom{80}{4} - \binom{40}{4} - \binom{40}{4}.$$

Soluzione 2 *Tipizzazione diretta! In questo caso vogliamo suddividere in tipi esclusivi ed esaustivi l'insieme che vogliamo contare, ossia l'insieme delle delegazioni che soddisfano il vincolo V. Dopo un po' di tentativi abbiamo considerato la seguente proposta di tipizzazione:*

1. *Tipo 1: Delegazioni con 1 maschio e 3 femmine;*
2. *Tipo 2: Delegazioni con 2 maschi e 2 femmine;*
3. *Tipo 3: Delegazioni con 3 maschi e 1 femmina.*

Si verifica facilmente che questa tipizzazione dà luogo a una partizione dell'insieme V che ci interessa. Per il PA basta quindi contare la cardinalità dei singoli tipi e poi sommare.

Le delegazioni di tipo 1 sono $40 \times \binom{40}{3}$ (scelgo un maschio e poi un insieme di 3 femmine). Le delegazioni di tipo 2 sono $\binom{40}{2} \times \binom{40}{2}$ (lo abbiamo visto prima). Le delefazioni di tipo 3 sono $\binom{40}{3} \times 40$ (scelgo un insieme di 3 maschi e poi scelgo una femmina). Le delegazioni che soddisfano il vincolo V sono dunque:

$$40 \times \binom{40}{3} + \binom{40}{2} \times \binom{40}{2} + \binom{40}{3} \times 40.$$

Possiamo vedere le due soluzioni precedenti danno due modi diversi di contare la stessa quantità. Per questo possiamo senz'altro concludere che la quantità espressa dalle formule ottenute nei due casi è la stessa, dunque:

$$\underbrace{\binom{80}{4} - \binom{40}{4} - \binom{40}{4}}_{Sol.1} = \underbrace{40 \times \binom{40}{3} + \binom{40}{2} \times \binom{40}{2} + \binom{40}{3} \times 40}_{Sol.2}.$$

pseudo-Soluzione *Consideriamo la seguente proposta di soluzione. Ragiono così: per formare una delegazione con il vincolo V richiesto scelgo un maschio tra i 40, una femmina tra le 40, e infine scelgo* 2 *individui tra tutti i restanti* 78 *(senza alcun vincolo di genere). Quest'ultima scelta corrisponde a contare i sottinsiemi di 2 elementi scelti tra 78. Per il PM ottengo che la soluzione è*

$$40 \times 40 \times \binom{78}{2}.$$

Attenzione! Confrontate il valore numerico ottenuto a quello delle due soluzioni precedenti.... Cosa c'è che non va? Qual è l'errore nel ragionamento?