Metodi Matematici per l'Informatica

Esame (a.a. 22/23, I canale) - Docente: Lorenzo Carlucci
- Data: 12 Giugno 2023

Esercizio 1 *Sia A l'insieme $\{1, 2, 3\}$.*

1. *Quante sono le stringhe lunghe* 10 *di cifre scelte in A? [1.5 punti]*
2. *Quante di esse non contengono* 3 *e non iniziano con* 2*? [1.5 punti]*
3. *Quante stringhe lunghe* 10 *di cifre scelte in A rispettano (da sinistra a destra) l'ordine crescente debole (ossia gli 1 compaiono solo a sinistra dei 2 e i 2 a sinistra dei 3)? [2 punti]*

Esercizio 2 *Sia f la funzione che associa a una stringa finita binaria (ossia una successione finita ordinata di* 0 *e di* 1*) il massimo numero di* 1 *consecutivi nella stringa. Indicare se i seguenti punti sono veri o falsi.*

1. *La funzione f è iniettiva. [1 punto]*
2. *La funzione f è invertibile. [1 punto]*
3. *Se σ e τ sono due stringhe finite binarie e $\sigma\tau$ è la loro concatenazione, vale $f(\sigma\tau) = f(\sigma) + f(\tau)$. [1 punto]*
4. *Con la notazione del punto precedente, per ogni stringa σ, vale $f(\sigma\sigma) \geq f(\sigma)$. [1 punto]*
5. *Per ogni $n \geq 1$ esiste una stringa σ tale che $f(\sigma) < n$. [1 punto]*

Esercizio 3 *Una relazione binaria R su un insieme A è detta* simpatica *se ha la seguente proprietà: per ogni $a, b, c, d \in A$, se aRb e bRc e cRd allora aRd. Indicare se i seguenti punto sono veri o falsi.*

1. *Ogni relazione transitiva è simpatica. [1.5 punti]*
2. *Ogni relazione simpatica è transitiva. [1.5 punti]*
3. *Nessuna relazione simpatica è transitiva. [2 punti]*

Esercizio 4 *Dimostrare per Induzione la seguente proposizione: Sia* $n \geq 2$*. Un insieme* A *di* n *elementi contiene* $\frac{n\times(n-1)}{2}$ *sottinsiemi di* 2 *elementi. Specificare Caso Base [1.5 punti], Ipotesi Induttiva [1.5 punti], Passo induttivo [2 punti].*

(Suggerimento: fissare un elemento a *in* A *qualunque e usarlo per dividere in due tipi gli insiemi da contare).*

Esercizio 5 *Sia* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e* R *una relazione binaria su* A*. Consideriamo il linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *contenente una variabile* $r_{(a,b)}$ *per ogni scelta di* $a, b \in A$ *(non necessariamente distinti). Ill significato intuitivo della variabile* $r_{(a,b)}$ *è* $(a, b) \in R$ *(che leggiamo:* a *è in relazione con* b*).*

Formalizzare le proprietà seguenti nel linguaggio $\mathcal{L}$*:*

1. 3 *è in relazione con* 5 *e con* 6*. [1 punto]*
2. 4 *è in relazione solo con* 2 *e con* 6*. [1 punto]*
3. *La relazione* R *è simmetrica. [1 punto]*
4. *La relazione* R *non è riflessiva. [1 punto]*
5. *Esistono tre elementi di* A*, siano* a, b, c *tali che* $(a, b) \in R$*,* $(b, c) \in R$ *e* $(a, c) \notin R$*. [1 punto]*

(Suggerimento: una quantificazione universale (per ogni) su un insieme finito si esprime con una congiunzione, una quantificazione esistenziale (esiste) su un insieme finito si esprime con una disgiunzione.)

Esercizio 6 *La seguente formula proposizionale in CNF è soddisfacibile?*

$$\{\{p, q\}, \{\neg p, s\}, \{\neg q, s\}\}.$$

Se si risponde SI definire un assegnamento che la soddisfa, se si risponde NO dimostrare l'insoddisfacibilità usando la regola di Risoluzione.