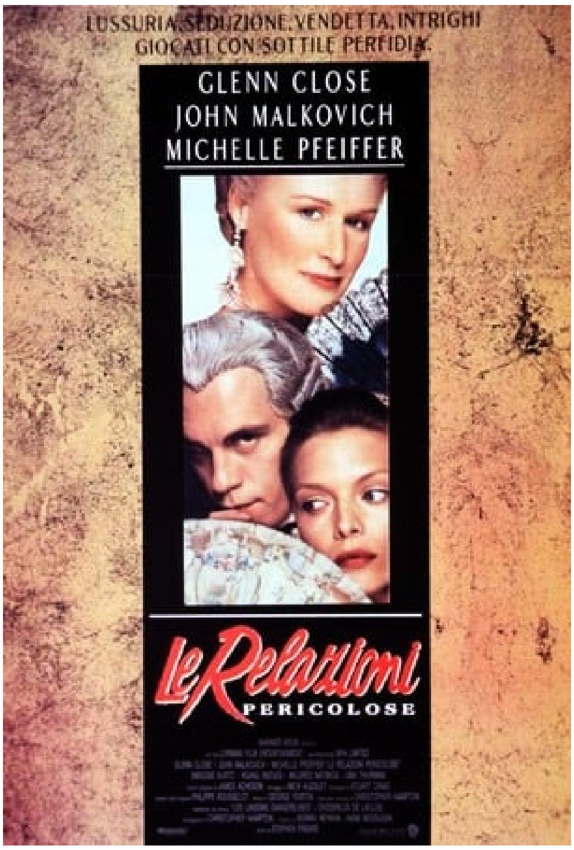
# Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 11
# (a.a. 23/24, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`lorenzo.carlucci@uniroma1.it`)

## 1 Relazioni

Il concetto di *relazione* è fondamentale in Matematica e Informatica, nonché nel linguaggio naturale. Come modelli intuitivi di ciò che intendiamo per *relazione* prendiamo per esempio: "$a$ è padre di $b$", dove $a$ e $b$ sono due esseri umani; oppure: "$n$ è minore di $m$" dove $n, m$ sono numeri naturali. Si vede facilmente che, a differenza delle funzioni: una relazione non è ovunque definita e può 'far corrispondere' allo stesso 'input' ($a$) più di un 'output' (i suoi figli). Questa è la differenza fondamentale tra *funzioni* e *relazioni*.




### 1.1 Definizione di Relazione

Al livello insiemistico formalizziamo il concetto di relazione in modo analogo a quanto fatto per le funzioni.

**Definizione 1.** *Siano $A$ e $B$ due insiemi. Una* relazione *$R$ tra $A$ e $B$ (o su $A$ e $B$) è un sottinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$, ossia un insieme di coppie ordinate di tipo $(a, b)$ con $a \in A$ e $b \in B$; senza ulteriori vincoli.*

Se $R$ è una relazione tra $A$ e $B$, e $a \in A$ e $b \in B$ scriviamo $R(a, b)$ o anche $aRb$ per $(a, b) \in R$.

**Osservazione 1.** Una relazione tra $A$ e $B$ si distingue da una funzione per i seguenti due punti fondamentali:

1. Possono esistere elementi $a \in A$ che non sono in relazione con nessun elemento di $B$.

2. Possono esistere elementi $a \in A$ che sono in relazione con più di un elemento di $B$.

**Esempio 1.** Sia $A$ l'insieme degli esseri umani e $B$ l'insieme dei cani. La proprietà che vale di una coppia $(a, b) \in A \times B$ se e solo se "$a$ è il padrone di $b$" è una relazione su $A$.

**Esempio 2.** Sia $A$ l'insieme dei numeri naturali e $B$ l'insieme dei numeri razionali. La proprietà che vale di una coppia $(a, b) \in A \times B$ se e solo se $0 \leq b \leq a$ è una relazione tra $A$ e $B$.

**Osservazione 2.** Il caso in cui $A = B$ ha una particolare importanza. Se $R \subseteq A \times A$ diciamo che $R$ è una *relazione su $A$*. Ogni relazione può essere vista come una relazione su un singolo insieme. Sia infatti $R \subseteq A \times B$. Allora $R$ è anche un sottinsieme di $(A \cup B) \times (A \cup B)$ e dunque è una relazione su $C = A \cup B$.

**Esempio 3.** Sia $A$ l'insieme degli esseri umani. La proprietà che vale di una coppia $(a_1, a_2) \in A \times A$ se e solo se $a_1$ è padre di $a_2$ è una relazione

**Esempio 4.** Sia $A$ l'insieme dei naturali. $a \leq b$, $a < b$, "$a$ divide $b$ senza resto", "$a$ è un multiplo di $b$" sono relazioni su $A$.

**Esempio 5.** Sia $A$ l'insieme di utenti di Facebook. La relazione che sussiste tra $a_1, a_2 \in A$ se e solo se $a_1$ è amico di $a_2$ è una relazione su $A$.

**Esempio 6.** Sia $A$ l'insieme degli utenti di Instagram. La relazione che sussiste tra $a_1, a_2 \in A$ se e solo se $a_1$ segue $a_2$ è una relazione su $A$.

## 1.2 Rappresentazioni di Relazioni

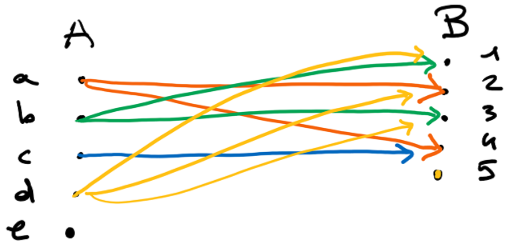
Come per le funzioni esistono molti modi di rappresentare una relazione.

### 1.2.1 Grafi Diretti

Per rappresentare una relazione $R$ tra $A$ e $B$ rappresentiamo a sinistra gli elementi di $A$ e a destra quelli di $B$. Disegnamo una freccia da un elemento $a$ di $A$ a un elemento $b$ di $B$ se e solo se $(a, b) \in R$.

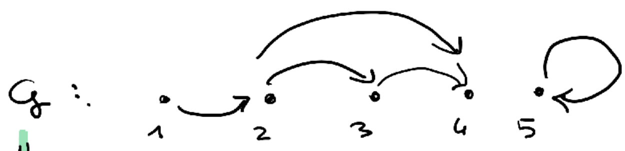
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$R = \{(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$




Nel caso di una relazione $R$ su un singolo insieme $A$ possiamo disegnare una volta sola gli elementi di $A$ e disegnare una freccia tra ogni coppia $(a_1, a_2)$ di elementi di $A$ per cui vale $(a_1, a_2) \in R$.

Un diagramma a frecce di questo tipo è detto un *grafo semplice diretto* o *digrafo*. Si noti che possono esistere frecce che partono da un punto e puntano allo stesso punto: questo accade se $aRa$ (il punto $a$ è in relazione con se stesso; si pensi, per esempio alla relazione $a \leq a$). Non può accadere che ci siano due frecce distinte con stessa origine e stessa destinazione!




$$R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (2,4), (5,5)\}$$

### 1.2.2 Matrici

Si può usare una matrice con valori $0, 1$. Questa rappresentazione è particolarmente importante perché è usata per rappresentare relazioni nei calcolatori elettronici e ne permette una manipolazione abbastanza efficiente.

Se $R$ è una relazione tra $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, la matrice di $R$, denotata $M_R$ è una matrice $n \times m$ definita come segue:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{se } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

In altre parole: le righe corrispondono agli elementi di $A$: $a_1, a_2, \dots, a_n$; le colonne a elementi di $B$: $b_1, b_2, \dots, b_m$ e nella cella $(i, j)$ scriviamo 1 se sussiste la relazione $R$ tra $a_i$ e $b_j$ e 0 se non sussiste. I valori 1 e 0 indicano il *valore di verità* di $R(a_i, b_j)$.

**Esempio 7.** Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$.

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2 Inversione

Come per le funzioni è naturale considerare l'inversione di una relazione. L'inversa della relazione "$a$ è padre di $b$" è la relazione "$b$ è figlio di $a$".

**Definizione 2** (Relazione Inversa)**.** *Se $R \subseteq A \times B$ denotiamo con $R^{-1}$ (inversa di $R$) il sottinsieme di $B \times A$ definito come segue:*

$$R^{-1} = \{(b, a) \,:\, (a, b) \in R\}.$$

A differenza di quanto accade con le funzioni, una relazione possiede sempre un'inversa: se $R \subseteq A \times B$ allora definiamo $R^{-1}$ (relazione inversa di $R$) il sottinsieme di $B \times A$ contenente tutte e sole le coppie ordinate $(b, a)$ tali che $(a, b) \in R$.

**Esempio 8.** Sia $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 6, 8\}$. Sia $R$ la seguente relazione:

$$\{(2, 2), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}.$$

Calcolare l'inverso di $R$ partendo dalla sua elencazione insiemistica è semplicissimo: basta invertire le coppie:

$$R^{-1} = \{(2, 2), (6, 2), (6, 3), (8, 4)\}.$$

In un digrafo basta invertire la direzione delle frecce:


Vediamo cosa succede se usiamo la rappresentazione matriciale.

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservando le due matrici ci accorgiamo che $M_{R^{-1}}$ si ottiene da $M_R$ facendo diventare le righe delle colonne! La prima colonna di $M_{R^{-1}}$ è identica alla prima riga di $M_R$; la seconda colonna di $M_{R^{-1}}$ è identica alla seconda riga di $M_R$, e così per la terza.

**Esercizio 1.** *Convincersi che l'osservazione di sopra vale in generale.*

L'operazione che trasforma una matrice $M$ in un'altra matrice $M'$ facendo diventare righe di $M'$ le colonne di $M$ si chiama in Algebra Lineare *trasposizione*, e $M'$ è detta *matrice trasposta* di $M$.

In termini di matrici dunque l'inversione di relazioni corrisponde alla trasposizione. Questo fatto risulta utile nella pratica informatica per poter calcolare l'inversa di una relazione salvata come una matrice binaria.

**Proposizione 1.** *La matrice di $R^{-1}$ è la trasposta della matrice di $R$.*

**Osservazione 3.** Sia $aRb$ se e solo se "$a$ è fratello di $b$". Cos'è l'inversa di $R$? Si vede facilmente che l'inversa di $R$ coincide con $R$: se $a$ è fratello di $b$ allora $b$ è fratello di $a$ e viceversa. Una relazione che gode di questa proprietà viene detta *simmetrica*.

Più formalmente: una relazione $R \subseteq A \times A$ è *simmetrica* se vale: Per ogni $a_1, a_2 \in A$

$$(a_1, a_2) \in R \text{ se e solo se } (a_2, a_1) \in R.$$

(Domanda: cambia qualcosa se usiamo una implicazione semplice invece di una doppia implicazione nella definizione di relazione simmestrica?)

Si osserva facilmente che se $R$ è simmetrica allora $R = R^{-1}$. Infatti: sia $(a_1, a_2) \in R$; dimostriamo che $(a_1, a_2) \in R^{-1}$. Dato che $R$ è simmetrica se $(a_1, a_2) \in R$ allora $(a_2, a_1) \in R$. Per definizione di $R^{-1}$: se $(a_2, a_1) \in R$ allora $(a_1, a_2) \in R^{-1}$. Abbiamo così dimostrato l'inclusione $R \subseteq R^{-1}$. Dimostriamo ora l'inversa: siano $(a_1, a_2) \in R^{-1}$. Per definizione questo implica $(a_2, a_1) \in R$. Ma $R$ è simmetrica e dunque abbiamo $(a_1, a_2) \in R$. Abbiamo così dimostrato l'inclusione $R^{-1} \subseteq R$. Dunque $R = R^{-1}$.

Un altro semplice ragionamento ci convince che se una relazione $R$ su $A$ coincide con il proprio inverso $R^{-1}$ allora è necessariamente simmetrica. Assumiamo che $R$ su $A$ sia tale che $R = R^{-1}$. Per dimostrare che $R$ è simmetrica dobbiamo dimostrare che per ogni $a_1, a_2 \in A$, $(a_1, a_2) \in R$ *se e solo se* $(a_2, a_1) \in R$. Dato che $R = R^{-1}$ (per ipotesi) abbiamo che, per $a_1, a_2 \in A$ qualunque, vale $(a_1, a_2) \in R$ sse $(a_1, a_2) \in R^{-1}$. Questo per definizione di $R^{-1}$ vale se e solo se $(a_2, a_1) \in R$. Abbiamo così dimostrato che $R$ è simmetrica.

# 3 Composizione di Relazioni

Come accade per le funzioni, risulta naturale considerare la composizione di relazioni.

Per esempio, se $R$ è la relazione tale che $aRb$ se solo se "$a$ è padre di b" e $S$ è la relazione tale che $cSd$ se e solo se "$c$ è marito di $d$" la relazione "composta" è la relazione $T$ tale che $aTd$ se e solo se "$a$ è suocero di $d$".

Se $aRb$ se e solo se $a$ è fratello di $b$ e $cSd$ sse $c$ è marito di $d$ la relazione composta è $aTd$ sse $a$ è cognato di $d$.

Per comporre due relazioni $R$ e $S$ occorre che $R$ sia una relazione tra $A$ e $B$ e $S$ sia una relazione tra $B$ e $C$. In questo caso possiamo definire la loro composizione come segue.

**Definizione 3** (Composizione di Relazioni)**.** *Se $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$, la relazione composta o composizione di $R$ e $S$ è la relazione tra $A$ e $C$ che sussiste tra $a \in A$ e $c \in C$ se e solo se* **esiste un** *$b \in B$ tale che*

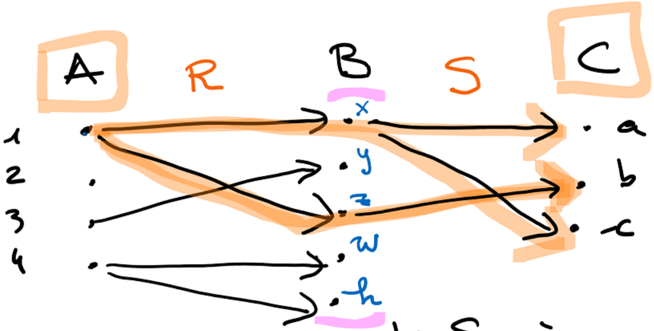
$$aRb \text{ e } bSc.$$

*La relazione composta viene denotata $(S \circ R)$.*

Quando componiamo una relazione con se stessa parliamo di *iterazione*. Questa operazione corrisponde alla formazione di concetti molto naturali. Per esempio, la composta della relazione $P$ "$a$ è padre di $b$" corrisponde alla relazione "$a$ è nonno di $b$". Se componiamo di nuovo, ottenendo $P \circ (P \circ P)$ otteniamo la relazione "$a$ è bisnonno di $b$", etc.

**Esempio 9.** Nella rappresentazione a frecce l'operazione di composizione è molto intuitiva:

Esempio:




La composizione di R e di S è: $\{(1,a),(1,c),(1,b)\}$

**Esempio 10.** Sia $R = \{(a,b),(b,b),(b,d),(c,a),(d,a)\}$ $S = \{(a,d),(a,b),(b,c),(d,b)\}$.

La composta $(S \circ R)$ si può "calcolare" così, in base alla presentazione esplicita di tutti gli elementi di $R$ e di $S$: partiamo dal primo elemento di $R$, ossia $(a,b)$ e cerchiamo in $S$ una coppia che inizi con $b$, ossia di tipo $(b,x)$ per qualche $x \in C$. Per ogni coppia di questo tipo sappiamo che $(a,x)$ è nella relazione composta $(S \circ R)$.

$(a,c) \in (S \circ R)$ perché $aRb, bSc$
$(b,c) \in (S \circ R)$ perché $bRb, bSc$
$(b,b) \in (S \circ R)$ perché $bRd, dSb$
$(c,b) \in (S \circ R)$ perché $cRa$, $aSb$
$(c,d) \in (S \circ R)$ perché $cRa$, $aSd$
$(d,b) \in (S \circ R)$ perché $dRa$, $aSb$
$(d,d) \in (S \circ R)$ perché $dRa$, $aSc$

**Esempio 11.** Vediamo cosa succede se calcoliamo la composta usando la rappresentazione matriciale, applicata all'esempio precedente.

Le matrici associate a $R$ e $S$ sono:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si nota facilmente che la matrice di $(S \circ R)$ si ottiene facendo il prodotto righe per colonne, usando come prodotto l'AND e come somma l'OR.

$$M_R \times M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{(S \circ R)}$$

L'osservazione nell'ultimo esempio vale in generale:

**Proposizione 2.** *La composizione di relazioni corrisponde al prodotto righe per colonne di matrici.*

**Esercizio 2.** *Dimostrare che la composizione di relazioni è associativa, ossia che*

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R,$$

*per* $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times D$.

**Esercizio 3.** *Dimostrare che la composizione di relazioni non è commutativa.*

**Esercizio 4.** *Siano* $R \subseteq A \times B$ *e* $S \subseteq B \times C$. *Che relazioni di inclusione sussistono tra* $(S \circ R)^{-1}$ *e* $(R^{-1} \circ S^{-1})$*?*

## 4 Transitività

**Definizione 4** (Transitività)**.** *Una relazione* $R \subseteq A \times A$ *è detta* transitiva *se vale: per ogni* $a, b, c \in A$, *se* $aRb$ *e* $bRc$ *allora* $aRc$.


**Esempio 12.** La relazione $aRb$ se e solo se $a$ è padre $b$ non è transitiva.

**Esempio 13.** La relazione $aRb$ se e solo se $a$ è un antenato per linea paterna di $b$ è transitiva.

**Esempio 14.** La relazione di successore $R = \{(n, n+) : n \in \mathbf{N}\}$ sui naturali non è transitiva: $R(4,5)$ e $R(5,6)$ ma non $R(4,6)$.

**Esempio 15.** La relazione $n < m$ sui naturali è transitiva.

**Esempio 16.** La relazione $nRm$ se e solo se $n$ divide $m$ senza resto è transitiva sui naturali.

**Esempio 17.** La relazione $aRb$ se e solo se $a$ è amico di $b$ su Facebook non è transitiva. La relazione $aSb$ se e solo se $a$ è follower di $b$ su Instagram non è transitiva.

**Osservazione 4.** Si noti che la definizione di transitività è espressa con un quantificatore universale (per ogni $a, b, c \in A$) seguito da un condizionale (se...allora). Questa definizione *non* richiede che una relazione $R$ soddisfi che per ogni $a, b, c \in A$ valga $aRb$ e $bRc$!! Richiede invece che *se* valgono sia $aRb$ che $bRc$ allora deve valere anche $aRc$. In altre parole, una coppia $(a, b)$ di una relazione $R$ tale che non esiste nessuna coppia di forma $(b, \cdot)$ in $R$ *non ha nessun effetto* sulla transitività o meno di $R$.


Alcune zone d'ombra della definizione di relazione transitiva.

**Esempio 18.** Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Consideriamo il seguente digrafo su $A$:

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

Innanzitutto si tratta di una relazione $R$ su $A$: una relazione è un arbitrario sottinsieme di $A \times A$ e il digrafo qui sopra rappresenta graficamente la relazione corrispondente al sottinsieme vuoto: $\emptyset \subseteq A \times A$. Inoltre, per quanto possa sembrare contro-intuitivo, si tratta di una relazione transitiva su $A$.

Infatti, la definizione di transività prevede che per ogni scelta di $a, b, c \in A$ (non necessariamente distinti), se si dà il caso che $aRb$ e $bRc$ allora deve darsi il caso che $aRc$.

Se non si dà mai una configurazione di tipo $aRb$ e $bRc$ per qualche $a, b, c \in A$, la pre-condizione della definizione di transivitià non è mai verificata, e in questo caso (come accade in un comando *if ... then*) l'implicazione è vera. Si dice che è *vera a vuoto.*

**Esempio 19.** Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Consideriamo la relazione $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$. Anche in questo caso si tratta di una relazione transitiva. Infatti, per ogni configurazione di tipo $aRbRc$ si ha anche $aRc$. Le uniche configurazioni di questo tipo sono $1R1R1$, $2R2R2$, $3R3R3$ e $4R4R4$. In tutti i casi la post-condizione dell'implicazione che definisce la transività è verificata: $1R1$, $2R2$, $3R$ e $4R$.

**Esempio 20.** Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Consideriamo la relazione $R = \{(1, 2), (3, 4), (1, 5)\}$. Anche in questo caso si tratta di una relazione transitiva. Infatti, non ci sono configurazioni di tipo $aRbRc$! La pre-condizione è vera a vuoto.

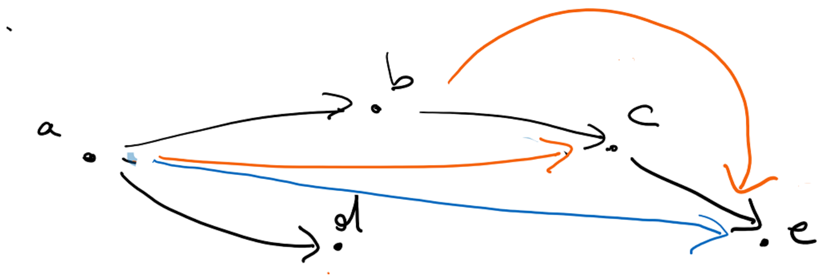
**Osservazione 5.** La definizione di transitività di una relazione ha la forma di una quantificazione universale (per ogni $a, b, c \in A$) seguita da un condizionale (se ... allora). Si tratta di una forma piuttosto comune ed è importante capirne bene le condizioni di verità. Consideriamo per esempio la sua negazione, che devo usare ogni volta che voglio dimostrare che una certa relazione $R$ non è transitiva. Procedendo passo passo abbiamo

$R$ NON è transitiva
sse
NON è vero che (Per ogni $a, b, c \in A$: Se $aRb$ e $bRc$ allora $aRc$).
sse
C'è almeno una scelta di $a, b, c \in A$ tali che NON è vero che (SE $aRb$ e $bRc$ ALLORA $aRc$)
sse
C'è almeno una scelta di $a, b, c \in A$ tali che $aRb$ e $bRc$ ma NON $aRc$,
ossia
Esistono $a, b, c \in A$ tali che $aRb$ E $bRc$ E NON $aRc$.

**Esempio 21.** La relazione $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 5), (5, 2), (3, 4)\}$ su $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ non è transitiva. Per dimostrarlo è sufficiente esibire una scelta di $a, b, c$ tali che $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ ma $(a, c) \notin R$. Una scelta di questo tipo è, per esempio $a = 1$, $b = 3$, $c = 4$.

## 5 Chiusura Transitiva

**Esempio 22.** La relazione $R_1$ rappresentata con righe NERE nel digrafo seguente non è transitiva: per esempio, $aR_1b$ e $bR_1c$ ma non vale $aR_1c$; analogamente: $bR_1c$ e $cR_1e$ ma non vale $bR_1e$. Si noti che il fatto che $aR_1d$ ma non ci siano frecce uscenti da $d$ *non è rilevante* per stabilire se $R_1$ è transitiva!!




La relazione $R_2$ rappresentata dalla righe NERE e dalla righe ARANZIONI è ottenuta cercando di rimediare ai due controesempi indicati sopra alla non-transività di $R_1$. Ma neanche questa relazione è transitiva: vale infatti $aR_2c$ (perché c'è una freccia arancione da $a$ a $c$) e $cR_2e$ (perché c'è una freccia nera da $c$ a $e$); ma non ci sono frecce (né nere né arancioni) da $a$ a $e$.

La relazione $R_3$ rappresentata dalle frecce NERE, ARANCIONI e AZZURRE è transitiva. L'ho ottenuta rimediando al controesempio visto sopra alla transività di $R_2$, aggiungendo la freccia da $a$ a $e$. Non ho creato in questo modo nuove configurazioni del tipo $(x, y) \in R_3$ e $(y, z) \in R_3$ ma $(x, z) \notin R_3$.

Con $R_3$ abbiamo ottenuta una *estensione* della relazione iniziale, nel senso che $R_1 \subseteq R_3$; inoltre questa estensione è *transitiva*. La relazione $R_3$ è inoltre la più piccola relazione che estende $R_1$ e che è transitiva. Qui "più piccola" può intendersi come: "ottenuta aggiungendo a $R_1$ il minor numero di frecce.

L'idea di estendere una relazione $R$ non-transitiva a una relazione $R^*$ transitiva è molto naturale.

Risulta infatti naturale in molti contesti considerare l'insieme che otteniamo "percorrrendo" una relazione non transitiva e raccogliendo gli elementi che incontriamo: per esempio, se consideriamo la relazione $aRb$ se $a$ è amico di $b$ su Facebook, può essere utile mettere in relazione $a$ non solo con tutti i suoi amici, ma anche con gli amici degli amici di $a$, gli amici degli amici di $a$; ossia la "comunità" cui $a$ fa riferimento, o l'insieme degli individui "raggiungibili" da $a$ attraverso la relazione di amicizia.

Se la relazione iniziale rappresenta l'esistenza di una strada tra due città, l'idea di "percorrere" la relazione corrisponde all'idea di "essere raggiungibile".

Vogliamo ottenere una relazione $R^T$ che estende $R$, ossia tale che $R \subseteq R^T$ e che sia transitiva. Inoltre è naturale volere identificare la *più piccola relazione* di questo tipo. Nel caso di una relazione $R$ su un insieme $A$ finito, possiamo intendere "la più piccola" come quella contenente il minor numero di coppie, ma questo perde di senso se $A$ è infinito. Il terzo punto della definizione qui sotto rimedia a questo problema offrendo una definizione di "minima" o "più piccola" in termini di inclusione insiemistica che vale sia per il caso finito che per il caso infinito. Questa condizione viene espressa richiedendo che ogni relazione che soddisfa le prime due condizioni (ossia estende $R$ ed è transitiva) contenga la chiusura transitiva.

**Definizione 5** (Chiusura Transitiva di una relazione)**.** *Chiamiamo* chiusura transitiva *di $R$ la più piccola relazione transitiva che estende $R$, ossia la relazione $R^T$ tale che:*

1. *$R \subseteq R^T$.*
2. *$R^T$ è transitiva.*
3. *Se $S$ estende $R$ ed è transitiva allora $R^T \subseteq S$.*

Se escludiamo anche solo una coppia dalla chiusura transitiva $R^T$ di una relazione $R$, necessariamente violiamo o il fatto che la relazione estende $R$ o il fatto che è transitiva.

**Esempio 23.** Se $R$ è la relazione su $\mathbf{N}$ tale che $nRm$ se e solo se $m = n + 1$, la chiusura transitiva contiene tutte e sole le coppie di naturali $(x, y)$ tali che $x < y$. Se togliamo anche una sola coppia $(x, y)$ o violiamo che la relazione risultante estende il successore (questo accade se la coppia è tale che $y = x + 1$) oppure violiamo la transitività (questo accade se la coppia è tale che $y = x + n$ per $n > 1$).

Data $R \subseteq A \times A$ consideriamo la relazione di *raggiungibilità* (anche detta *connettività*), definita come

$$R^c = \{(a, b) \in A \times A : \text{ esiste un cammino di lunghezza } \ell \geq 1 \text{ da } a \text{ verso } b\}.$$

Questa relazione è intuitivamente connessa all'idea di chiusura transitiva: sicuramente stiamo mettendo frecce da $a$ a $c$ ogni volta che abbiamo una configurazione di tipo $aRbRc$, ma anche frecce da $a$ a $d$ se abbiamo una configurazione $aRbRcRd$, etc.

**Esempio 24.** Consideriamo la relazione $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ su $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Proviamo a estendere $R$ in modo da ottenere una relazione transitiva.

Dato che $(1, 2) \in R$ e $(2, 3) \in R$, devo aggiungere la coppia $(1, 3)$. Dato che $(2, 3) \in R$ e $(3, 4) \in R$, devo aggiungere la coppia $(2, 4)$.

Chiamiamo $R^{++}$ la relazione ottenuta aggiungendo queste coppie, ossia $R^{++} = R \cup \{(1, 3), (2, 4)\}$.

$R^{++}$ non è transitiva: infatti $(1, 3) \in R^{++}$ e $(3, 4) \in R^{++}$ ma $(1, 4) \notin R^{+}$.

Aggiungiamo la coppia $(1, 4)$. Chiamiamo $R^{+++}$ la relazione così ottenuta, ossia $R^{+++} = R \cup R^{++} \cup \{(1, 4)\}$.

$R^{+++}$ è transitiva: per tutti i possibili casi in cui si verifica la pre-condizione della definizione di transività è vera anche la conclusione.

Ripercorrendo quanto appena fatto, osserviamo che $R^{++} = R \cup (R \circ R)$. Infatti per definizione $R \circ R$ contiene tutte e sole le coppie $(a, c)$ tali che esiste un $b \in A$ tale che $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$. Questo è il caso per la coppia $(1, 3)$ (esistono $(1, 2)$ e $(2, 3)$ in $R$) e per la coppia $(2, 4)$ (esistono $(2, 3)$ e $(3, 4)$ in $R$).

Analogamente, $R^{+++}$ è uguale a $R \cup (R \circ R) \cup ((R \circ R) \circ R)$. Per definizione infatti, $(x, y) \in (R \circ R) \circ R$ se e solo se esiste $z \in A$ tale che $(x, z) \in (R \circ R)$ e $(z, y) \in R$. Questo è il caso solo per la coppia $(1, 4)$: infatti $(1, 3) \in R \circ R$ e $(3, 4) \in R$.

In base all'esempio precedente, la chiusura transivita di una relazione $R$ è strettamente collegata con le relazioni ottenute componendo $R$ con se stessa.

Data $R$, definiamo una successione di relazioni:

$$R^1 = R, R^2 = R \circ R, R^3 = R \circ R \circ R, R^4 = R \circ R \circ R \circ R, \ldots$$

In generale possiamo porre: $R^1 = R$ e $R^{n+1} = (R^n) \circ R$ per $n \geq 1$.

Consideriamo l'unione di tutte le $R_n$, ponendo

$$R^\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R^n.$$

Si ricorda che una coppia $(x, y)$ appartiene all'unione infinita $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} R^n$ se e solo se esiste un $n \in \mathbf{N}$ tale che $(x, y) \in R^n$ (ossia se e solo se appartiene a uno dei termini dell'unione).

Dimostreremo che $R^c$ e $R^\infty$ sono due modi di vedere la stessa relazione: entrambi coincidono con la chiusura transitiva di $R$.

**Esempio 25.** Data una mappa di strade a senso unico che collegano città ($aRb$ se e solo se c'è una strada che parte dala città $a$ e arriva alla città $b$), la chiusura transitiva contiene tutte e sole le coppie di città $(x, y)$ tali che esiste un itinerario che porta da $x$ a $y$.

**Definizione 6** (Cammino)**.** *Sia $R$ una relazione su $A$. Siano $a, b \in A$. Diciamo che esiste un* cammino *di lunghezza $\ell \geq 1$ da $a$ verso $b$ se esistono elementi $x_1, \ldots, x_{\ell-1}$ in $A$ tali che $aRx_1Rx_2 \ldots Rx_{\ell-1}Rb$.*

**Osservazione 6.** La Definizione precedente è così predisposta da includere come caso particolare quello di due punti $a$ e $b$ tali che $aRb$. In questo caso si può correttamente affermare che esiste un cammino di lunghezza 1 da $a$ verso $b$: $\ell = 1$ e la condizione *esistono* $x_1, \ldots, x_{\ell-1}$ è vera a vuoto.

> Si osserva facilmente che esiste un cammino di lunghezza $\ell$ tra $a$ e $b$ se e solo se $(a, b) \in R_\ell$.
> Analogamente l'unione $R_1 \cup R_2 \cup \ldots R_\ell$ contiene tutte le coppie $(a, b)$ per cui esiste un cammino di lunghezza tra 1 e $\ell$.

Una dimostrazione rigorosa usa l'induzione matematica, perché dovremmo dimostrare che l'equivalenza è vera per ogni possibile $\ell \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Limitiamoci a qualche osservazione. Per $\ell = 1$ stiamo dicendo che $R_1$ (che è $R$) contiene tutte e sole le coppie $(a, b) \in A \times A$ per cui esiste un cammino di lunghezza 1 da $a$ verso $b$. Queste sono tutte le coppie $(a, b) \in R$, dunque l'identità è verificata. La relazione $R_2$ contiene tutte e solo le coppie in $(R \circ R)$ ossia le coppie $(x, y)$tali che esiste $z \in A$ tale che $xRz$ e $zRy$. Dunque esiste un cammino di lunghezza 2 da $x$ verso $y$: $xRzRy$. Viceversa se esiste un cammino di lunghezza 2 da $x$ verso $y$ allora la coppia $(x, y)$ è in $R \circ R$ (per definizione di composizione). Per il caso $\ell = 3$: una coppia $(x, y) \in R_3 = (R \circ R) \circ R$ se e solo se esiste $z \in A$ tale che $(x, z) \in R \circ R$ e $(z, y) \in R$. Per quanto visto sopra, $(x, z) \in R \circ R$ equivale all'esistenza di un cammino di lunghezza 2 da $x$ verso $z$, e $(z, y) \in R$ equivale all'esistenza di un cammino di lunghezza 1 da $z$ verso $y$. Dunque esiste un cammino di lunghezza 3 da $x$ verso $z$.

Abbiamo dunque che $R^\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n$ coincide con l'insieme delle coppie $(a, b)$ per cui, per qualche $\ell$, esiste un cammino di lunghezza $\ell$ tra $a$ e $b$ (abbiamo indicato con $R^c$ questa relazione). Questa identità è molto utile perché in molti casi è più semplice e intuitivo ragionare in termini di cammini che non in termini di iterazione della composizione di $R$ con se stessa! Per esempio, in termini di cammini è evidente che $R^c$ è una relazione transitiva: se esiste un cammino da $a$ verso $b$ e un cammino da $b$ verso $c$ di certo esiste un cammino da $a$ verso $c$.

Dimostriamo che $R^\infty$ (e dunque $R^c$) è la chiusura transitiva di $R$.

**Teorema 1.** *Sia $R$ una relazione su un insieme $A$. La chiusura transitiva di $R$, $R^T$, è la relazione*

$$R^\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n = R^c = \{(x, y) \in A \times A : \textit{ esiste un cammino da averso } b\}.$$

**Dimostrazione** Abbiamo già osservato che $R^\infty R^c$. Resta da dimostrare che $R^\infty$ (o $R^c$) è la chiusura transivita di $R$.

Dobbiamo dimostrare che $R^\infty$ soddisfa le tre condizioni che definiscono la Chiusura Transitiva $R^T$. Ricordiamole:

1. $R^\infty$ estende $R$.
2. $R^\infty$ è transitiva.
3. $R^\infty$ è la più piccola relazione transitiva che estende $R$.

Dimostriamo il punto 1. $R \subseteq R^\infty$ è ovvio dato che per definizione $R_1 = R$, e ovviamente $R_1 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n = R^\infty$.

Dimostriamo il puno 2. Siano $(a, b) \in R^\infty$ e $(b, c) \in R^\infty$. Per l'equivalenza vista sopra tra appartenenza a una composizone $R_n$ ed esistenza di un cammino di lunghezza $n$, $(a, b) \in R^\infty$ equivale a: Esiste un cammino (di una qualche lunghezza $n$) da $a$ verso $b$. Analogamente $(b, c) \in R^\infty$ equivale a: Esiste un cammino (di una qualche lunghezza $m$) da $b$ verso $c$. Dunque esiste un cammino tra $a$ e $c$: basta iniziare con il cammino da $a$ verso $b$ e proseguire da $b$ con il cammino da $b$ verso $c$. Questo cammino ha lunghezza $n + m$. Dunque $(a, c) \in R_m$. Dunque $(a, c) \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n$, ossia $(a, c) \in R^\infty$. Abbiamo così dimostrato che $R^\infty$ è transitiva.

Dimostriamo il punto 3. Ci limitiamo a considerazioni intuitive (una dimostrazione rigorosa richiede l'induzione). Per dimostrare che $R^\infty$ è la *più piccola* relazione transitiva che estende $R$ procediamo così: presa una arbitraria relazione $S \subseteq A \times A$ transitiva che estende $R$, dimostriamo che necesariamente deve includere $R^\infty$, ossia $R^\infty \subseteq S$.

Sia dunque $S$ una relazione su $A$ transitiva e che estende $R$.

Osserviamo che dato che $R \subseteq S$ ($S$ estende $R$), tutte le frecce di $R$ sono frecce anche di $S$, e dunque se esiste un cammino da $a$ verso $b$ in $R$ quello è anche un cammino da $a$ verso $b$ in $S$. In termini insiemistici questo significa che, per ogni $n$, $R_n \subseteq S_n$ e questo implica a sua volta che $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbf{N}} S_n$, dove $S_1 = S$, $S_2 = S \circ S$, $S_3 = (S \circ S) \circ S$, etc.

D'altra parte è facile convincersi che, dato che $S$ è transitiva, comporre $S$ con se stessa non porta fuori da $S$, ossia: $S \circ S \subseteq S$, $(S \circ S) \circ S \subseteq S$, etc. In generale $S_n \subseteq S$. Questo implica anche $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} S_n \subseteq S$.

Abbiamo dunque che

$$R^\infty = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbf{N}} S_n \subseteq S,$$

e dunque $R^\infty \subseteq S$, come richiesto.

**QED**

Abbiamo ottenuto una descrizione rigorosa della chiusura transitiva di una qualunque relazione $R$ come iterazione (infinita) della composizione di $R$ con se stessa.

**Esempio 26.** Se $R = \{(x,y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : y = x+1\}$ abbiamo che la chiusura transitiva $R^T$ è

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n = R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R) \circ R \cup \ldots$$

e si verifica facilmente che $(x,y) \in R_n$ se e solo se $y = x+n$. Dunque $R^T$ è tale che $(x,y) \in R^T$ se e solo se per qualche $n$ positivo $y = x+n$; in altre parole $R^T$ è la relazione $x < y$ sui naturali.

Se pensiamo di voler calcolare $R^T$, per esempio scrivendo un programma, l'unione infinita delle iterazioni di $R$ non è molto conveniente.

Consideriamo cosa accade nel caso di una relazione $R$ su un insieme finito.

**Esercizio 5.** *Sia $A = \{a,b,c,d\}$ e sia $R = \{(a,b),(b,c),(c,d),(b,a)\}$. Sappiamo che la chiusura transitiva di $R$ è $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} R_n$. Calcolare, con um metodo a piacere, $R_2 = R \circ R$, $R_3 = (R \circ R) \circ R$, $R_4, \ldots$. Cosa possiamo osservare?*

*Il calcolo (con grafico o con matrice) di $R \circ R$ dà*

$$\{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d)\}$$

*Il calcolo di $R_3 = (R \circ R) \circ R$ dà*

$$\{(a,b),(a,d),(b,a),(b,c)\}$$

*Il calcolo di $R_4 = ((R \circ R) \circ R) \circ R$ dà*

$$\{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d)\}$$

*e per $R_5$ otteniamo*

$$\{(a,b),(a,d),(b,a),(b,c)\}$$

*Proseguendo si osserva una regolarità:*

$$R_2 = R_4 = R_6 = R_8 = \ldots$$

*e*

$$R_3 = R_5 = R_7 = \ldots$$

*La chiusura transitiva di $R$ è dunque*

$$R \cup R_2 \cup R_3$$

*e non occorre calcolare gli altri fattori!*

Quanto visto nell'esercizio precedente vale in generale e risulta molto utile per calcolare (anche algoritmicamente) la chiusura transitiva di una relazione su un insieme finito.

**Proposizione 3.** *Sia $A$ con $n$ elementi. Sia $R \subseteq A \times A$. Allora*

$$R^T = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n.$$

**Dimostrazione** Usiamo la caratterizzazione della chiusura transitiva in termini di cammini:

$$R^T = \{(a,b) \in A \times A : \text{ esiste un cammino da } a \text{ verso } b\}.$$

Vale inoltre la corrispondenza punto a punto tra lunghezza del cammino e appartenenza a una potenza di $R$:

$$(a,b) \in R_1 \text{ sse esiste un cammino di lunghezza 1; ossia } aRb.$$

$$(a,b) \in R_2 \text{ sse esiste un cammino di lunghezza 2; ossia esiste } x_1 \in A \text{ t.c. } aRx_1Rb.$$

$$(a,b) \in R_3 \text{ sse esiste un cammino di lunghezza 2; ossia esistono } x_1, x_2 \in A \text{ t.c. } aRx_1Rx_2Rb.$$

etc.

Dunque $(a,b) \in R^T$ se e solo se per qualche $m \geq 1$ esistono $x_1, \ldots, x_{m-1}$ tali che

$$aRx_1Rx_2Rx_3 \ldots x_{m-2}Rx_{m-1}Rb$$

Se tutti gli $x_i$ sono distinti sappiamo che sono al massimo $n-1$ e dunque il cammino da $a$ a $b$ è di lunghezza $\leq n$, e dunque $(a,b) \in R_n$.

Supponiamo che esistano $i, j \in \{1, \ldots, m-1\}$ tali che $x_i = x_j$, con $i < j$; ossia che nei punti intermedi del cammino compaia due volte lo stesso elemento di $A$. Possiamo allora suddividere il cammino da $a$ verso $b$ in tre parti:

$$a \rightsquigarrow_{C_1} x_i \rightsquigarrow_{C_2} x_j \rightsquigarrow_{C_3} b$$

Dato che $x_i = x_j$ il cammino $C_2$ è un ciclo, e otteniamo un cammino da $a$ verso $b$ tagliando $C_2$:

$$a \rightsquigarrow_{C_1} x_i \rightsquigarrow_{C_3} b$$

Questo cammino è più corto di quello di partenza.

Iterando questa procedura otteniamo un cammino di lunghezza minima da $a$ verso $b$, in cui tutti i punti intermedi sono distinti. Come osservato sopra, questo cammino ha lunghezza $\leq n$, per cui $(a,b) \in R \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n$.

**QED**

In conclusione, per calcolare la chiusura transitiva di una relazione $R$ su un insieme di $n$ elementi, basta calcolare le potenze di $R$ fino a $R_n$.