Sapienza, Università di Roma
Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Note di base di

Analisi Matematica

versione 1.2 (1 novembre 2015)

Lamberto LAMBERTI
Corrado MASCIA

CAPITOLO 1

Le funzioni continue

Dopo l'*excursus* del Capitolo precedente sulle successioni numeriche, torniamo a parlare di funzioni reali di variabile reale in generale. Per fissare le idee, supponiamo di voler studiare funzioni f, definite in $I \subset \mathbb{R}$, dove I è un intervallo (limitato o illimato) di $\mathbb{R}$. L'obiettivo principale del Capitolo è definire il significato della parola *continuità*.

1. Limite di funzioni

Tutto nasce dalla definizione di "limite". Come abbiamo visto per le successioni, il limite formalizza l'idea di "previsione" del comportamento di un oggetto sotto osservazione per opportuni valori della variabile.

Limiti all'infinito. Partiamo prima di tutto dal concetto di funzione infinitesima per $x \to +\infty$. Una funzione $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è infinitesima per $x \to +\infty$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \quad \text{tale che} \quad |d(x)| < \varepsilon \quad \forall x > M. \tag{1}$$

Il numero $M \in \mathbb{R}$ dipende dalla scelta di ε (come n_ε per le successioni): $M = M(\varepsilon)$.

La proprietà $|d(x)| < \varepsilon$ (equivalente a $-\varepsilon < d(x) < \varepsilon$) indica che il grafico della funzione d vive nella striscia infinita delimitata dalle retta $y = -\varepsilon$ e $y = \varepsilon$ per x sufficientemente grandi (Fig.1(a)), quindi la condizione (1) significa che il grafico della funzione d "tende a confondersi" con l'asse x per $x \to +\infty$.

Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, questa tende ad un limite ℓ per $x \to +\infty$ se è la funzione $f(x) - \ell$ ad essere infinitesima.

Definizione 1.1. *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dice che f* converge ad $\ell \in \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell, \tag{2}$$

se $|f(x) - \ell|$ è infinitesima per $x \to +\infty$, cioè se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \quad \textit{tale che} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x > M.$$

La funzione $d(x) := |f(x) - \ell|$ rappresenta la lunghezza del segmento verticale di estremi $(x, f(x))$ e (x, ℓ) e "tendere ad ℓ" indica che tale lunghezza tende a zero.

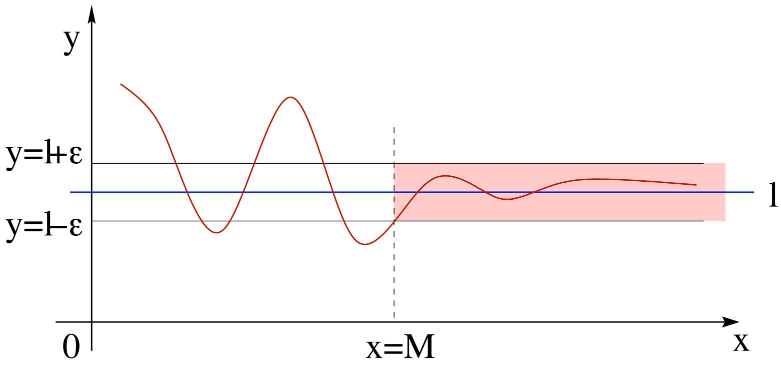

FIGURA 1. Una funzione che tende ad un limite per $x \to +\infty$.

Buona parte di quanto visto per le successioni si può ripetere. Ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Infatti, per ogni $\varepsilon \in (0,1)$, si ha

$$\left| \frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right| = \frac{1}{1+x^2} < \varepsilon \qquad \forall x > M := \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}.$$

OSSERVAZIONE 1.2. Nella definizione di limite di funzione per $x \to +\infty$, siamo partiti da una funzione f definita in <u>tutto</u> $\mathbb{R}$. Per definire il limite per $x \to +\infty$, basta anche di meno: l'unica cosa indispensabile è che l'insieme di definizione sia non limitato superiormente. Pensate al caso delle successioni: sono funzioni definite su $\mathbb{N}$ (e quindi non su una semiretta) e il limite per $n \to +\infty$ ha perfettamente senso.

Analogamente si possono definire anche:
– limiti divergenti: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ o $= -\infty$;
– limiti per x che tende a $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Limiti in un punto. Per funzioni definite in intervalli, è possibile parlare di limite in un punto. Procediamo come in precedenza chiarendo prima il concetto di "funzione infinitesima in un punto" e poi il concetto di "limite di funzione in un punto".

Sia $x_0 \in [a,b]$. Una funzione $d : (a,b) \to \mathbb{R}$ è infinitesima per $x \to x_0$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{t.c.} \quad |d(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in (a,b),\ 0 < |x - x_0| < \delta. \tag{3}$$

Rispetto alla definizione di funzione infinitesima per $x \to +\infty$, l'unica differenza sta nelle scelte di x per cui è soddisfatta la condizione $-\varepsilon < d(x) < \varepsilon$. In questo caso si tratta di tutti i valori x, diversi da x_0, che distano da x_0 meno di $\delta > 0$.

Definizione 1.3. *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in [a, b]$. *La funzione* f tende ad $\ell \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ *se* $f(x) - \ell$ *è infinitesima per* $x \to x_0$, *cioè se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{t.c.} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, x \in (a, b),\, 0 < |x - x_0| < \delta.$$

In questo caso, si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell. \tag{4}$$

Il punto fondamentale è nella definizione di funzione infinitesima: per dimostrare che il limite della funzione è ℓ bisogna verificare che la distanza tra $f(x)$ e ℓ, cioè la quantità $d(x) := |f(x) - \ell|$, diventa piccola quando x è sufficientemente vicino a x_0.

Esempio 1.4. Proviamo a dimostrare il limite

$$\lim_{x \to 1} (3x - 5) = -2.$$

In questo caso $f(x) = 3x - 5$, $x_0 = 1$ e $\ell = -2$. Per definizione, basta mostrare che la quantità $|f(x) - \ell|$ è infinitesima per x che tende ad 1. Poniamoci quindi l'obiettivo di stimarla in termini di una funzione in cui compaia la distanza $|x - 1|$:

$$|f(x) - \ell| = |(3x - 5) - (-2)| = |3x - 3| = 3|x - 1|.$$

Perfetto! Da queste uguaglianze segue la conclusione. Se vogliamo conoscere esplicitamente il valore di δ in funzione di ε, così come richiesto dalla definizione, basta osservare che se $|x - 1| < \delta$, allora $|f(x) - \ell| < 3\delta$, quindi dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere δ in modo che $3\delta = \varepsilon$, cioè $\delta = \varepsilon/3$.

Esempio 1.5. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, calcoliamo $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x$. E' ragionevole aspettarsi che tale limite esista e che valga $\ell = \sin x_0$, quindi proviamo a stimare $|\sin x - \sin x_0|$. Usando una delle (diaboliche) formule di prostaferesi,

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right|.$$

Dato che $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (Cap. 2, Es. **??**), si ottiene

$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|,$$

da cui segue

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

Volendo determinare esplicitamente δ, dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere $\delta := \varepsilon$ per fare in modo che, se $|x - x_0| < \delta$, allora $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$.

Esercizio 1.6. *Dimostrare che, per ogni* $x_0 \in \mathbb{R}$, *vale* $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

Esempio 1.7. Vediamo un limite più complicato:

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1.$$

Euristicamente il risultato è più che ragionevole, dato che, dalla definizione dell'esponenziale data in (**??**), segue

$$e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

e ciascuno dei termini sommati tende a zero per $x \to 0$. Il problema è che i termini sommati sono infiniti! Per dimostrare in modo rigoroso la validità del limite bisogna, come sempre, stimare il termine $|f(x) - \ell| = |e^x - 1|$:

$$|e^x - 1| = \left| x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \right| \leq |x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!} \leq |x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = |x| e^{|x|}$$

(nella riga precedente ci sono due disuguaglianze per serie... perché sono lecite?). Se scegliamo $|x| < 1$, si ha $e^{|x|} \leq e$ (si ricordi che la funzione e^x è crescente), quindi

$$|e^x - 1| \leq |x| e^{|x|} \leq e\,|x| \qquad \forall\, x \in (-1, 1),$$

da cui si arriva alla conclusione.

Osservazione 1.8. $x \neq x_0$. I punti x che intervengono nel limite per $x \to x_0$ sono, per definizione, *distinti da* x_0. In parole povere, il limite della funzione f per $x \to x_0$ è il comportamento che si prevede per la funzione f in x_0, in base al grafico della funzione vicino a x_0, ma *indipendentemente* da quello che succede nel punto limite.

A guardare bene, la Definizione 1.3 vale, così com'è per funzioni f definite in $(a, b) \setminus \{x_0\}$ (e $x_0 \in (a, b)$), cioè funzioni che <u>non</u> sono definite nel punto limite! Quello che conta è il punto limite x_0 sia "vicino" a punti in cui la funzione è definita: non ha senso calcolare il limite per $x \to 2$ di una funzione che è definita in $[0, 1]$!

Come si dimostra che un limite non esiste? Dalla definizione di limite, segue che, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, allora per ogni successione x_n, contenuta nell'insieme di definizione di f, e tale che x_n tende a x_0 per $n \to +\infty$, la successione $f(x_n)$ tende ad ℓ per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell. \tag{5}$$

Esercizio 1.9. *Dimostrare l'affermazione che avete appena letto.*

Dall'implicazione (5) discende il seguente

CRITERIO 1.10. <u>Non esistenza del limite.</u> *Se esistono due successioni x_n e ξ_n entrambe convergenti a x_0 e tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(\xi_n),$$

la funzione f non può ammettere limite per $x \to x_0$.

Un esempio chiarirà meglio le idee. Consideriamo la funzione

$$\textsf{segno di } x: \qquad \operatorname{sgn} x := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$$

e consideriamo $x_n = \frac{1}{n}$ e $\xi_n = -\frac{1}{n}$. È evidente che $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n = 0$. Inoltre, per ogni n, $f(x_n) = 1$ e $f(\xi_n) = -1$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1 \neq -1 \lim_{n\to+\infty} f(\xi_n).$$

Pertanto la funzione sgn non ammette limite per $x \to 0$.

ESERCIZIO 1.11. *Dimostrare che* $\sin(1/x)$ *non ammette limite per* $x \to 0$.

Limite destro e limite sinistro. Quando si studia una funzione solo a destra o a sinistra del punto limite x_0 si parla di limite destro e di limite sinistro.

DEFINIZIONE 1.12. *La funzione f ha* limite destro *uguale ad ℓ per x che tende a x_0, e si scrive $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$, se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad t.c. \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, x \in (a, b),\ x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Analogamente per il limite sinistro*, che si indica con $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$.*

ESERCIZIO 1.13. *Dimostrare che* $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = +1.$

ESERCIZIO 1.14. *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Dalla definizione di limite destro e sinistro si deduce (con poca fatica) il seguente:

CRITERIO 1.15. <u>Esistenza del limite.</u> *Una funzione ammette limite in un punto se e solo se esistono sia il limite destro che quello sinistro e coincidono.*

Di conseguenza, se uno tra i limiti destro e sinistro non esiste, o se entrambi esistono, ma non coincidono, la funzione non ha limite per $x \to x_0$. Avendo risolto l'Esercizio 1.14, sapete dire se $\arctan(1/x)$ ammette limite per $x \to 0$?

Limiti e operazioni razionali. Limiti di somme, differenze, prodotti e rapporti di funzioni godono delle stesse proprietà viste per le successioni:

$$
\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = m\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big) = \ell \pm m, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \ell\, m, \\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{m} \qquad \text{se } m\neq 0.\end{cases} \tag{6}
$$

Esempio 1.16. Per calcolare

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+x-1}{x^5+x^3}$$

non è una buona idea usare la definizione! Basta applicare le regole su descritte:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+x-1}{x^5+x^3} &= \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^5+x^3)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}3x^2+\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}x^5+\lim\limits_{x\to 1}x^3} \\
&= \frac{(\lim\limits_{x\to 1}3)(\lim\limits_{x\to 1}x)^2+\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}1}{(\lim\limits_{x\to 1}x)^5+(\lim\limits_{x\to 1}x)^3} = \frac{3+1-1}{1+1} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Ora, se volete, provate a dimostrare il risultato usando solo la definizione di limite...

Esempio 1.17. Fissato $x_0\in\mathbb{R}$, calcoliamo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}.$$

Qui non è possibile applicare direttamente le regole viste, perché il denominatore tende a zero per $x\to x_0$. Ma basta una riga di conto per risolvere il problema:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = \lim_{x\to x_0}x+\lim_{x\to x_0}x_0 = 2x_0.$$

Analogamente, si dimostra che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = 3x_0^2,$$

utilizzando l'identità $x^3-x_0^3=(x^2+xx_0+x_0^2)(x-x_0)$. In generale, vale

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} = nx_0^{n-1} \qquad n\in\mathbb{N},$$

infatti

$$\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} = x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1}.$$

Limiti e disequazioni. Anche per il rapporto tra limiti e disequazioni valgono le stesse regole già viste nel caso delle successioni: supponiamo che le funzioni f e g abbiano limite per $x \to x_0$, allora

$$f(x) < g(x) \qquad (\text{o} \quad f(x) \leq g(x)) \qquad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

La disuguaglianza stretta diviene una disuguaglianza debole. Le dimostrazioni sono analoghe a quelle per le successioni.

Da queste proprietà discende la seguente proposizione (analoga al Teorema **??**).

PROPOSIZIONE 1.18. *Siano f, g, h tre funzioni tali che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per tutti i valori x in un intorno di x_0. Allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0} h(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell.$$

Omettiamo la dimostrazione.

Zeri a denominatore ed uso degli infiniti. Anche per quanto riguarda quest'argomento, quello che c'è da capire è interamente contenuto nel caso delle successioni. In particolare, le forme indeterminate che si incontrano con più frequenza sono: $\frac{0}{0}$, $\infty \cdot 0$, $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Alcuni limiti notevoli. Il fatto che il limite sia compatibile con le operazioni di somma e prodotto fa in modo che nel calcolo effettivo dei limiti, nella maggior parte dei casi, non si debba utilizzare direttamente la definizione (con conseguente calcolo di ε e $\delta(\varepsilon)$, spesso tremendamente complicato), ma ci si possa ricondurre a limiti già noti. Il problema, a questo punto, è che di limiti noti ne abbiamo pochini... Corriamo al mercato ad acquistarne un po'.

ESEMPIO 1.19. Partiamo da un limite che non può mancare nella casa di nessuno:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{7}$$

(il valore x, come sempre, è calcolato in radianti). Dal significato geometrico di $\sin x$ si deduce immediatamente che

$$\sin x < x < \tan x \qquad \forall\, x \in (0, \pi/2).$$

Ne segue che, per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Dato che $\cos x$ tende a $\cos 0 = 1$ per $x \to 0$, il rapporto $\dfrac{\sin x}{x}$ tende ad 1 per $x \to 0^+$. Lo stesso vale anche per $x \to 0^-$, dato che la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è una funzione pari (verificare!). Quindi, per il Criterio 1.15, il gioco è fatto.

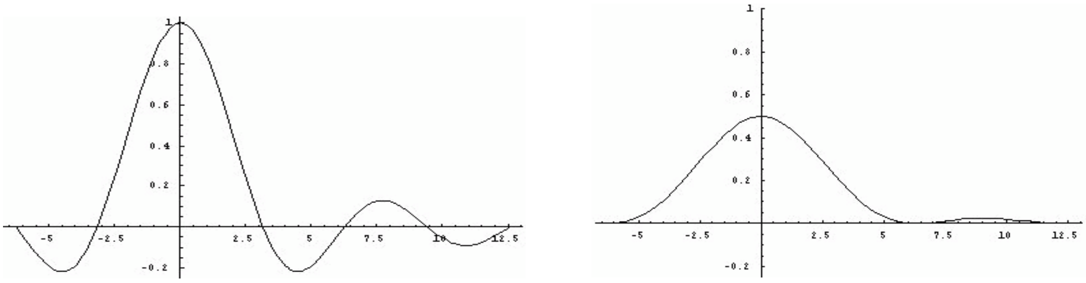

FIGURA 2. (a) $y = \frac{\sin x}{x}$, (b) $y = \frac{1-\cos x}{x^2}$

ESERCIZIO 1.20. *Utilizzando (7), dimostrare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione. Per il primo, basta ricordare la definizione di $\tan x$ e usare le proprietà dei limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = 1.$$

Per i restanti due, si può utilizzare l'uguaglianza

$$1 - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x},$$

da cui seguono

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{1+\cos x} \sin x = 0.$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

e quindi il risultato.

ESEMPIO 1.21. Una coppia di limiti molto importanti è

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{8}$$

Per dimostrare il primo limite di (8), notiamo che

$$f(x) := \frac{e^x-1}{x} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!},$$

dove si è usato che $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Quindi

$$|f(x)| \le |x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+2)!} \le |x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = |x| e^{|x|}.$$

Dato che $0 < e^{|x|} \le e$ per tutti i valori $x \in [-1, 1]$, si ha $|f(x)| \le e|x|$ che tende a zero per $x \to 0$.

Il secondo limite in (8) si può ottenere dal primo ponendo $y = e^x - 1$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

e passando agli inversi si ha la conclusione.

Osservazione 1.22. Nel calcolo di quest'ultimo limite si è utilizzato il cambiamento di variabile per dedurre il valore del limite a partire dal precedente. La giustificazione rigorosa di questo procedimento può essere fatta, con un po' di attenzione, ma senza troppa difficoltà, a partire dalla definizione di limite.

I limiti appena presentati sono utili come esempi, ma allo stesso tempo, sono fondamentali per riuscire a calcolare altri limiti. Altri limiti importanti, di cui non diamo la dimostrazione, sono

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \qquad \forall\, a > 1,\, \alpha > 0.$$

Il significato di ciascuno di questi è particolarmente interessante. Nel primo limite, la funzione x^α tende a 0 per $x \to 0$, mentre $\ln x$ tende a $-\infty$. Non è chiaro a priori quale sia il comportamento della funzione prodotto dato che sono presenti due termini contrastanti. Il fatto che il limite valga zero vuol dire che la funzione x^α tende a zero tanto rapidamente da riuscire a dominare la divergenza $-\infty$ del termine $\ln x$. Allo stesso modo, il secondo limite indica che l'esponenziale a^x, con $a > 1$ diverge più rapidamente di x^α, e il terzo esprime che, al contrario, il logaritmo $\log_a x$, con $a > 1$, diverge più lentamente di x^α. Sulle questioni di ordini di infinito e di infinitesimo ritorneremo più avanti.

2. Continuità

Il concetto di limite è collegato a quello di *continuità*. Intuitivamente la continuità significa che piccoli cambiamenti nella variabile indipendente x provocano piccoli cambiamenti nella variabile dipendente $y = f(x)$. Al contrario un grafico costituito da due parti separate da una "frattura" in corrispondenza dell'ascissa x_0 esibisce (in quel punto) una *discontinuità di salto* (ad esempio, la funzione $\operatorname{sgn} x$ ha una discontinuità di salto in $x_0 = 0$).

L'idea di continuità è implicita nell'uso quotidiano della matematica elementare. Quando una funzione $y = f(x)$ è descritta da tabelle (come nel caso dei logaritmi o delle funzioni trigonometriche), i valori di y possono essere dati solo per un insieme "discreto" di valori della variabile indipendente x, ad esempio in intervalli di lunghezza 10^{-3} (un millesimo) o 10^{-6} (un milionesimo). Però potrebbe essere utile conoscere il valore della funzione per valori intermedi. In questo caso, si assume tacitamente che il valore $f(x_0)$ cercato, corrispondente ad un valore x_0 non presente nella tabella, sia approssimativamente lo stesso di $f(x)$ per un x che appaia nella tabella e che sia "vicino" ad x_0.

DEFINIZIONE 2.1. *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. La funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è* continua in *$x_0 \in I$ se ha limite per $x \to x_0$ esiste e tale limite coincide con il valore di f in x_0:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

cioè (ricordando la definizione di limite) se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad t.c. \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in I, |x - x_0| < \delta.$$

Se una funzione f è continua in ogni punto $x_0 \in I$ allora f è continua in *I.*

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto nel grafico. I punti (x, y) tali che $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$ costituiscono una striscia orizzontale J che contiene P_0. La continuità di f in x_0 significa che per ogni striscia di questo genere J (di qualsiasi ampiezza) è possibile determinare una striscia verticale K data da $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ sufficientemente piccola tale che tutti i punti del grafico di f che sono in K giacciono anche in J.

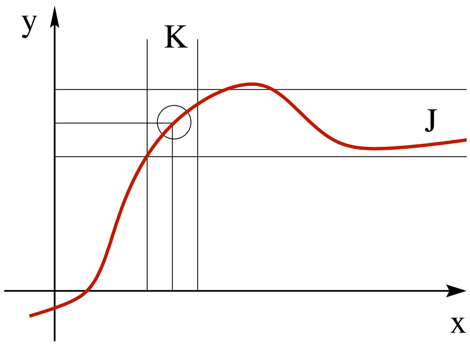

FIGURA 3. Significato geometrico della continuità

ESEMPIO 2.2. Per la funzione affine $f(x) = 5x + 3$ abbiamo

$$|f(x) - f(x_0)| = |(5x + 3) - (5x_0 + 3)| = 5|x - x_0|,$$

che esprime il fatto che la funzione $y = 5x + 3$ *dilata* le distanze di un fattore 5. In questo caso, ovviamente $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per tutti valori x per cui $|x - x_0| < \varepsilon/5$. La condizione di continuità di f nel punto x_0 è soddisfatta scegliendo $\delta = \varepsilon/5$. Chiaramente è possibile scegliere un qualsiasi valore positivo tale che $\delta \leq \varepsilon/5$.

OSSERVAZIONE 2.3. Nella definizione di continuità, la condizione $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ è soddisfatta anche per x_0, a differenza della definizione di limite dove si chiede $|f(x) - \ell|$ per valori x vicini a x_0, ma diversi da x_0 stesso.

OSSERVAZIONE 2.4. *Scommettiamo che...* Per chiarire ulteriormente il significato di continuità, spieghiamo le regole di un gioco per due persone. Supponiamo assegnata una funzione f ed il punto x_0 nel suo insieme di definizione. Il giocatore B può scegliere un qualsiasi numero $\varepsilon > 0$ a suo gusto e piacimento. Per ogni scelta di ε compiuta da B, A deve essere in grado di determinare $\delta > 0$ in modo che tutti i valori immagine $f(x)$, per x che dista da x_0 meno di δ, distino da $f(x_0)$ meno di ε. Se il giocatore B trova un $\varepsilon > 0$ per cui A non possa rispondere, vince; viceversa, se per ogni ε, A è in grado di trovare δ opportuno, vince il giocatore A. Il giocatore A vince se e solo se la funzione f è continua in x_0.

Se la funzione è $\sin(x^2)$ ed il punto $x_0 = 1$, quale giocatore vorreste essere: il giocatore A o il giocatore B?

Ora che abbiamo una definizione chiara di continuità, vorremmo sapere quante e quali funzioni tra quelle che conosciamo sono continue. Dalle proprietà dei limiti di somma, prodotto, quoziente discende che

la somma, la differenza, il prodotto e il rapporto di funzioni continue danno luogo a funzioni continue (prudenza nel quoziente![1]).

Anche le operazioni di composizione e di inversione conservano la continuità:

la composizione $f \circ g$ di funzioni f e g continue è continua

l'inversa f^{-1} di una funzione f continua è una funzione continua

La prima delle due proprietà discende dalla catena di implicazioni

$$x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad g(x) \to g(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(g(x))) \to f((g(x_0))).$$

La continuità della funzione inversa è geometricamente evidente, una volta ricordato che il grafico di f^{-1} si può ottenere da quello di f tramite un ribaltamento attorno alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Ma tutte queste bellissime proprietà non servono a nulla fino a che non si conosca per lo meno <u>una</u> funzione continua. Passiamo quindi ad analizzare qualche esempio di base.

ESEMPIO 2.5. *Le funzioni costanti sono continue.* Banale! Infatti se $f(x) = c$ per ogni x, allora $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0$ sempre e comunque.

ESEMPIO 2.6. *La funzione $f(x) = x$ è continua.* Anche questo è facile, dato che, fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$, quindi basta scegliere $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ nella definizione di continuità per giungere alla conclusione.

[1]Come sempre nel caso della divisione, bisogna stare attenti al fatto che la divisione per zero non ha senso. Perciò se si hanno due funzione continue f e g, la funzione rapporto è una funzione continua dove è definito, cioè dove la funzione g non si azzera.

Esempio 2.7. *I polinomi sono funzioni continue.* Qui basta combinare le proprietà dei limiti (6), con la definizione di continuità e con i due esempi precedenti. Se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ per $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ dati, allora

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} p(x) &= \lim_{x\to x_0} (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\ &= \lim_{x\to x_0} a_0 + \lim_{x\to x_0} a_1 \lim_{x\to x_0} x + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_n \,(\lim_{x\to x_0} x)^n \\ &= a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = p(x_0).\end{aligned}$$

Esempio 2.8. *La funzione $f(x) = \sin x$ è una funzione continua.* Lo abbiamo già visto nell'Esempio 1.5. Stesso dicasi per $\cos x$ (avete risolto l'Esercizio 1.6?).

Esempio 2.9. Cosa dire dell'esponenziale e^x? L'Esempio 1.7 ne garantisce la continuità in $x_0 = 0$. Da questa è possibile dedurre la continuità anche negli altri punti, utilizzando la proprietà $e^{x+y} = e^x e^y$. Infatti:

$$\lim_{x\to x_0} e^x = \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0+x_0} = \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0} e^{x_0} = \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0} \lim_{x\to x_0} e^{x_0} = \lim_{h\to 0} e^h \lim_{x\to x_0} e^{x_0} = e^{x_0}.$$

Una volta che abbiamo questi mattoni fondamentali, ecco a cascata una quantità impressionante di funzioni continue:
– le funzioni razionali,
– le funzioni trigonometriche,
– esponenziali e logaritmi,
– tutte le loro composizioni e inverse.

Esercizio 2.10. *Perché le funzioni $f(x) = 10^x$ e $g(x) = \log_{10} x$ sono continue?*

Estensione per continuità. Quando una funzione f non è definita in x_0, ma esiste il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, è naturale definire una nuova funzione come segue

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0. \end{cases}$$

La funzione F si chiama estensione per continuità di f, dato che, per costruzione, F è continua in x_0. La domanda "è possibile estendere per continuità in x_0 una assegnata funzione f?" equivale a "esiste il limite di f per $x \to x_0$?"

Esempio 2.11. La funzione $\frac{\sin x}{x}$ non è definita in $x = 0$, ma ammette limite per $x \to 0$. Quindi può essere *estesa per continuità* in $x = 0$ attribuendole il valore 1. La nuova funzione (continua in $\mathbb{R}$) è

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2.12. *(a) Dire quale delle seguenti funzioni può essere estesa per continuità in $x = 0$*

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (x+1)\sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

(b) Sia f una funzione continua in $x = 0$ e tale che $f(0) = 0$. E' vero che la funzione $f(x)\sin(1/x)$ può essere estesa per continuità in $x = 0$?

Funzioni lipschitziane. Una funzione $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è lipschitziana se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in I.$$

La lipschitzianità corrisponde al fatto che il *rapporto incrementale*, cioè il coefficiente della retta secante passante per i punti del grafico di f di coordinate $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2},$$

è limitato in valore assoluto da un fissato valore finito L.

Esempi di funzioni lipschitziane sono le funzioni affini $f(x) = ax + b$. Un altro esempio è $f(x) = \sin x$, infatti, come già osservato in precedenza,

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|.$$

Tutte le funzioni lipschitziane sono continue: dato $\varepsilon > 0$, per avere $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ basta scegliere $\delta = \varepsilon/L$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta = \varepsilon.$$

Esercizio 2.13. *Dimostrare le seguenti affermazioni.*
(i) Se f, g sono funzioni lipschitziane, allora anche $f + g$ è lipschitziana.
(ii) Se f, g sono lipschitziane e limitate, *allora fg è lipschitziana.*
(iii) Se in (ii) si rimuove l'ipotesi di limitatezza, la conclusione non è vera.

Soluzione. (i) Indicate con L_f, L_g, due costanti per cui è soddisfatta la condizione di Lipschitz per f e g rispettivamente, allora

$$|(f(x) + g(x)) - (f(y) - g(y))| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq (L_f + L_g)|x - y|.$$

(ii) Indichiamo con L_f, L_g, due costanti per cui è soddisfatta la condizione di Lipschitz per f e g rispettivamente, e sia $|f(x)| \leq M_f$ e $|g(x)| \leq M_g$, allora

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)||g(x)| + |f(y)||g(x) - g(y)| \leq (L_f M_g + M_f L_g)|x - y|.\end{aligned}$$

(iii) Ad esempio, si può scegliere $f(x) = g(x) = x$: il prodotto è la funzione x^2 che non è lipschitziana dato che

$$\sup_{x \neq y} \frac{|x^2 - y^2|}{|x - y|} = \sup_{x \neq y} |x + y| = +\infty.$$

Chiaro, no?

Esercizio 2.14. *Una funzione f è* hölderiana *se esistono $L, \alpha > 0$ tali che*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|^\alpha \qquad \forall x_1, x_2.$$

Dimostrare che se una funzione è hölderiana allora è anche continua.

Soluzione. Infatti dato $\varepsilon > 0$, per avere $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ basta scegliere $\delta = L^{-1/\alpha}\varepsilon^{1/\alpha}$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|^\alpha < L\delta^\alpha = \varepsilon,$$

per giungere alla conclusione sani e salvi.

3. Esempi di discontinuità

Un modo per chiarire ulteriormente la definizione di continuità è "in negativo", cioè dando esempi per cui non è soddisfatta.

Esempio 3.1. Riprendiamo l'esempio $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Chiaramente, in ogni punto $x_0 \neq 0$, questa funzione è continua (qual è la scelta di δ in funzione di ε dato?). In $x_0 = 0$ la funzione, invece, non è continua. Infatti non è possibile determinare nessun δ quando ε sia minore di 1, dato che $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = 1$ per ogni $x \neq 0$.

La funzione $\operatorname{sgn} x$ è l'esempio più semplice di discontinuità in un punto x_0 detto discontinuità di salto: la funzione f si avvicina, per x che tende a x_0 da destra e da sinistra, a valori limite che non coincidono con il valore di f in x_0.

Esempio 3.2. Un esempio di discontinuità in cui non ci siano limiti né da destra né da sinistra è dato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Il grafico della funzione f può essere dedotto da quello della funzione $\sin x$ attraverso un "passaggio al reciproco" nella variabile indipendente. Grossolanamente parlando, tutte le oscillazioni (infinite!) della funzione $\sin x$ per $x > 1$ vengono compresse nell'intervallo limitato $(0, 1)$ e si accumulano sul segmento del piano (x, y) di estremi $(0, -1)$ e $(0, 1)$ e non c'è alcuna speranza che la funzione possa essere continua in $x = 0$. Una figura chiarisce più di mille parole (Fig.4(a)).

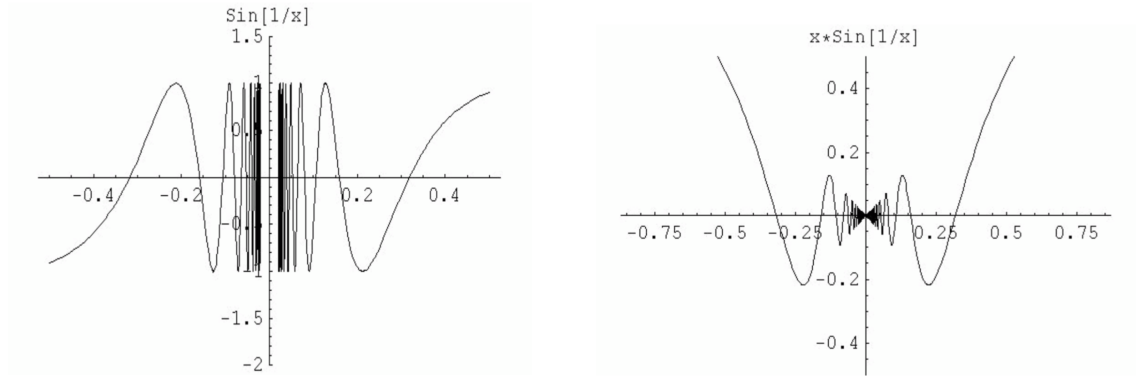

FIGURA 4. (a) Il grafico di $\sin(1/x)$; (b) Il grafico di $g(x)$.

Piccole varianti della funzione precedente possono condurre ad una funzione continua. Ad esempio consideriamo la funzione g seguente

$$g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Questa funzione (vedi Fig.4(b)) è continua in 0, infatti

$$|g(x) - 0| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \to 0 \qquad \text{per} \quad x \to 0.$$

Sapete dire se è continua in 0 la funzione $(x^2+1)f(x)$, dove f è data nell'Esempio 3?

ESERCIZIO 3.3. *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione nondecrescente e discontinua in* $x_0 \in (a,b)$. *Che tipo di discontinuità ha la funzione* f *in* x_0?

4. Teoremi sulle funzioni continue

Ora che abbiamo a disposizione un campionario vasto di funzioni continue e non, passiamo a stabilire alcune proprietà fondamentali che discendono dalla continuità: il *teorema dei valori intermedi* e il *teorema di Weierstrass* (che concerne il problema dell'esistenza di massimo e minimo). Entrambi discendono dal fatto che l'insieme dei numeri reali è *completo*, proprietà che traduce il fatto che la retta reale non ha buchi e che, rigorosamente, si basa sul postulato degli intervalli incapsulati e sull'assioma di Archimede. Nelle pagine che seguono ci dedichiamo prima a capire l'enunciato di questi due Teoremi fondamentali e solo successivamente ne vedremo le dimostrazioni.

Teorema del valore intermedio. Intuitivamente non c'è dubbio che se una funzione è continua, e quindi non ha salti, non può passare da un valore ad un altro senza passare per tutti i valori intermedi. Pensiamo ad un esempio banale: se il signor Lafcadio fa una passeggiata in montagna e ci comunica che è partito da un rifugio che si trova a 2200 metri s.l.m. ed è arrivato in cima ad una montagna alta 3000 metri s.l.m., è vero che ad un certo punto si è trovato ad un'altitudine di 2800 metri? E più in generale, si è mai trovato ad una qualsiasi quota η compresa tra 2200 e 3000? La risposta (intuitiva) è "SI", a meno che non abbia utilizzato il teletrasporto...

TEOREMA 4.1. Teorema del valore intermedio. *Sia $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua Allora, per ogni η compreso tra $f(a)$ e $f(b)$, esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = \eta$.*

Questo teorema dà condizioni sufficienti perchè l'equazione $f(x) = \eta$ abbia soluzione. Geometricamente, afferma che se i due punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ del grafico della funzione (continua) f giacciono su parti opposte rispetto alla retta $y = \eta$, allora il grafico di f interseca la retta in un punto intermedio.

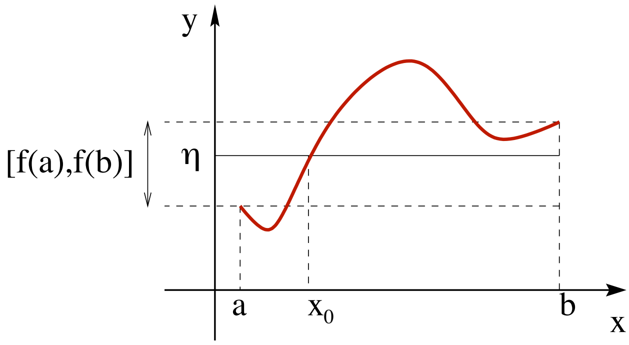

FIGURA 5. Il Teorema del valore intermedio

Un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ è un *intervallo* se per ogni coppia $x_1, x_2 \in I$ si ha $x \in I$ per ogni x compreso tra x_1 e x_2. Quindi, il Teorema del valore intermedio garantisce che se l'insieme di definizione è un intervallo, anche l'immagine lo è. In versione sintetica

una funzione continua trasforma intervalli in intervalli.

In maniera intuitiva, si può affermare che una funzione continua non genera "buchi" a partire da un insieme che buchi non ha.

Controesempio 1. *f non è continua.* Nel caso di una funzione non continua la conclusione, in generale, è falsa. Ad esempio per la funzione

$$\text{segno di } x: \qquad \operatorname{sgn} x := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0, \end{cases}$$

non esistono soluzioni di $\operatorname{sgn} x = \eta$ per ogni $\eta \notin \{0, \pm 1\}$.

Controesempio 2. *f definita in unione di intervalli disgiunti.* Consideriamo la funzione $f : I = [-1, 0) \cup (0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Allora, nonostante $0 \in [-1, 1] = [f(-1), f(1)]$, l'equazione $\frac{1}{x} = 0$ non ammette soluzioni! Analogamente per $g : I = [0, 1] \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = x$, ci sono dei valori $\eta \in [g(0), g(3)] = [0, 3]$ tali che l'equazione $x = \eta$ non ammette soluzioni *in I*.

Qui si è persa una proprietà fondamentale degli intervalli: la *connessione*, cioè la garanzia che se x_1, x_2 appartengono all'intervallo I, allora $[x_1, x_2] \subset I$. In qualche modo si può immaginare che una funzione continua non generi "strappi" o "buchi" nella trasformazione del dominio di partenza in quello di arrivo. E' chiaro però che se il dominio di partenza è "già strappato", cioè sconnesso (come nel caso di due intervalli chiusi disgiunti), è possibile che ci siano buchi anche nel dominio di arrivo.

Controesempio 3. *L'importanza di essere reale (razionale non basta!).* Consideriamo la funzione $f : \mathbb{Q} \cap [0, 2] \to \mathbb{Q}$ definita da $f(x) = x^2$. Allora $f(0) = 0$, $f(2) = 4$ ed è sensato domandarsi se ci siano soluzioni $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 2]$ al problema $x^2 = 2 \in (0, 4)$. Come abbiamo già visto non c'è nessun valore razionale il cui quadrato sia 2. Quindi *il Teorema del valore intermedio non vale nei razionali!*

Esercizio 4.2. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad e \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dimostrare, utilizzando il Teorema del valore intermedio, che $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Cosa si può concludere se, invece, si suppone $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell_- \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_+ \in \mathbb{R}$?

Conseguenza del teorema del valore intermedio è il cosiddetto *Teorema di esistenza degli zeri.*

Corollario 4.3. Esistenza degli zeri. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora, se $f(a)f(b) < 0$ (cioè se $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno discorde), esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Esercizio 4.4. *Utilizzare il Teorema di esistenza degli zeri per dimostrare che ogni polinomio $p = p(x)$ di grado dispari ha sempre almeno uno zero.*

Soluzione. Se p è un polinomio di grado dispari

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \pm\infty \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \mp\infty,$$

e quindi esiste certamente $L > 0$ per cui $p(-L)p(L) < 0$. Di conseguenza, per il Teorema di esistenza degli zeri, esiste $x_0 \in (-L, L)$ che azzera il polinomio.

Una funzione strettamente monotòna, cioè tale che

$$x < x' \iff f(x) < f(x') \quad \text{oppure} \quad x < x' \iff f(x) > f(x'),$$

essendo iniettiva, è invertibile. In generale non è vero il viceversa: esistono funzioni invertibili che non sono monotòne (sapete trovarne un esempio?). Invece, nel caso di funzioni continue definite in un intervallo, la stretta monotonia è una condizione necessaria e sufficiente di invertibilità. La dimostrazione è conseguenza del Teorema del valore intermedio.

COROLLARIO 4.5. *Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Allora f è strettamente monotòna se e solo se f è invertibile.*

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua ed invertibile, allora è anche strettamente monotòna. Supponiamo per assurdo che non lo sia, allora esisterebbero $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ tali che $x_1 < x_2 < x_3$ per cui o $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_3) < f(x_2)$ oppure $f(x_1) > f(x_2)$ e $f(x_3) > f(x_2)$. Supponiamo di essere nel primo caso (l'altro si tratta in modo analogo) e scegliamo η tale che $\max\{f(x_1), f(x_3)\} < \eta < f(x_2)$. Applicando il teorema del valore intermedio agli intervalli $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$ si ottiene che esistono $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ e $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ per cui $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \eta$ che contraddice l'ipotesi di invertibilità di f. □

Se si sostituisce l'ipotesi di "f strettamente monotona" con "f non strettamente monotona" la conclusione non è più vera. L'esempio più banale che si può pensare è quello di una funzione costante.

Teorema di Weierstrass. Un'altra proprietà fondamentale di una funzione continua f definita in un intervallo $[a, b]$ è l'*esistenza del (valore) massimo e del (valore) minimo.*

TEOREMA 4.6. Teorema di Weierstrass. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esistono $x_0, x_1 \in [a, b]$ tali che $f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$ per ogni $x \in [a, b]$.*

Perseveriamo con la buona abitudine di cercare controesempi che mostrino il ruolo delle ipotesi del Teorema.

Controesempio 1. *f non è continua.* Se non è richiesta la continuità della funzione, è facile costruire casi di non esistenza di massimo/minimo. Ad esempio consideriamo $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Chiaramente $\inf\limits_{[-1,1]} f(x) = 0$, ma $f(x) \neq 0$ per ogni x. Analogamente si possono costruire casi in cui non c'è valore massimo.

Controesempio 2. $I = (a, b)$ *(intervallo aperto).* Anche in questo caso si possono trovare molti esempi che mostrano che le conclusioni del Teorema non sono vere. Ad esempio, $f(x) = x^2$ in $(-1, 1)$ non ammette massimo (l'estremo superiore è 1), oppure $g(x) = \sin x$ in $(0, \pi/2)$ non ammette né massimo né minimo (l'estremo superiore è 1 e quello inferiore è 0). Si noti che in entrambi questi esempi, quello che si vorrebbe essere punto di massimo/minimo è uno degli estremi dell'intervallo, che però non appartiene ad I visto che l'intervallo è considerato aperto.

Controesempio 3. *I illimitato.* L'esempio più facile è $f(x) = x$ per $x \in \mathbb{R}$ che non ammette né massimo né minimo. Esistono anche funzioni *limitate* in domini illimitati che non ammettono né massimo né minimo, ad esempio, $f(x) = \arctan x$.

Se si combinano insieme il Teorema del valore intermedio ed il Teorema di Weierstrass si può dimostrare la seguente affermazione.

Corollario 4.7. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'insieme immagine $f([a, b])$ è un intervallo chiuso e limitato.*

5. Gli intervalli incapsulati: *"divide et impera"*

Come abbiamo già detto nella presentazione naïf dei numeri reali, i fatti fondamentali che accettiamo come assiomi sono

> Postulato degli intervalli incapsulati. *Per ogni successione di intervalli $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ chiusi e limitati che siano incapsulati, cioè tali che $I_{n+1} \subset I_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste sempre almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 \in I_n$ per ogni n.*
>
> Assioma di Archimede. *Per ogni numero reale a, esiste un numero naturale n più grande di a: in simboli,*
>
> $$\forall\, a \in \mathbb{R}, \qquad \exists\, n \in \mathbb{N}, \qquad \text{tale che} \quad a \leq n.$$

Si ricordi che una delle conseguenze dell'assioma di Archimede è

$$x \leq \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \leq 0.$$

Daremo ora le dimostrazioni del Teorema del Valore Intermedio e del Teorema di Weierstrass a partire dal seguente risultato.

Teorema 5.1. *Sia $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ una successione di intervalli tali che*

(i) $I_{n+1} \subset I_n$ (cioè $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$) per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$.

Allora, esiste un unico $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$, cioè $a_n \leq x_0 \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = x_0$.

Il Teorema indica che se la successione degli intervalli incapsulati ha la proprietà aggiuntiva che la lunghezza $|I_n| = b_n - a_n$ è infinitesima per $n \to +\infty$, l'intersezione degli I_n (non vuota per il Postulato degli Intervalli Incapsulati) è costituita da un solo elemento.

Dimostrazione del Teorema 5.1. La proprietà (i) implica $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ per il Postulato degli Intervalli Incapsulati; resta da dimostrare che tale intersezione è composta da un solo elemento. Siano $x_0, x_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ con $x_0 \leq x_1$. Allora $a_n \leq x_0 \leq x_1 \leq b_n$ per ogni n. Da questa relazione segue che $0 \leq x_1 - x_0 \leq b_n - a_n$. Dato che la successione $b_n - a_n$ è infinitesima, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $0 \leq x_1 - x_0 \leq b_n - a_n < \varepsilon$ per ogni n sufficientemente grande. In definitiva, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $0 \leq x_1 - x_0 < \varepsilon$, da cui segue $x_0 = x_1$, che conclude la prima parte del Teorema.

Inoltre, dato che $a_n \leq x_0 \leq b_n$, si ha anche $0 \leq x_0 - a_n \leq b_n - a_n \to 0$ per $n \to \infty$, quindi $a_n \to x_0$ per $n \to \infty$. Per b_n, basta notare che $b_n = a_n + (b_n - a_n) \to x_0 + 0 = x_0$. □

Divide et impera. Per dimostrare i Teoremi useremo sempre la strategia del *Divide et Impera.* Il punto chiave è definire una successione di intervalli incapsulati $[a_n, b_n]$ di misura $b_n - a_n$ infinitesima per $n \to +\infty$. Tipicamente, costruiremo la successione di intervalli I_n, scegliendo un primo intervallo opportuno $I_0 = [a, b]$, poi prendendo il punto intermedio dell'intervallo $\frac{a+b}{2}$ e scegliendo (secondo un criterio che dipende da caso a caso) come intervallo I_1 una delle due metà di I_0. Iterando il procedimento otterremo una successione di $I_n = [a_n, b_n]$ tale che

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}, \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

cioè soddisfacente le ipotesi del Corollario 5.1.

Dimostrazione del Teorema del valore intermedio (Teorema 4.1). Supponiamo $f(a) < f(b)$ e $\eta \in (f(a), f(b))$. Se $f(b) < f(a)$, si può ragionare in modo simile. Come I_0 scegliamo l'intervallo di partenza $[a, b]$ e consideriamo il punto intermedio $\frac{a+b}{2}$. Procediamo come segue:

(i) se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \eta$, siamo arrivati alla conclusione;
(i) se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \eta$, poniamo $a_1 = a$ e $b_1 = \frac{a+b}{2}$;
(ii) se $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \eta$, poniamo $a_1 = \frac{a+b}{2}$ e $b_1 = b$.

In questo modo o siamo giunti alla conclusione, o abbiamo costruito un intervallo $I_1 = [a_1, b_1]$ tale che $f(a_1) < \eta < f(b_1)$ e $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Iteriamo il procedimento: scegliamo il punto $\frac{a_1+b_1}{2}$, calcoliamo $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ e procediamo come sopra.

Così facendo, o si è dimostrata la conclusione dopo un numero finito di passi, o si è costruita una successione di intervalli incapsulati $I_n = [a_n, b_n]$ tale che $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Applicando il Corollario 5.1, deduciamo che esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

Per la scelta di a_n, b_n, si ha $f(a_n) < \eta < f(b_n)$ per ogni n. Dato che f è continua in x_0 e $a_n, b_n \to x_0$, per $n \to \infty$ si deduce $f(x_0) \leq \eta \leq f(x_0)$, cioè $f(x_0) = \eta$. □

Dimostrazione del Teorema di Weierstrass (Teorema 4.6). Sia Λ l'estremo superiore di $\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Per ora non sappiamo se Λ sia finito o no.

Poniamo $I_0 = [a, b]$. Dividiamo I_0 in due parti uguali, tramite il punto medio $\frac{a+b}{2}$. In almeno uno dei due sottointervalli $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ e $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ l'estremo superiore della funzione f è ancora uguale a Λ. Battezziamo il sottointervallo con questa proprietà I_1 e i suoi estremi con a_1 e b_1. Nel caso in cui entrambi gli intervalli vadano bene ne scegliamo uno a nostro piacere. Iteriamo il procedimento, dividendo il sottointervallo tramite il suo punto medio. In questo modo, otteniamo una successione di intervalli incapsulati $I_n = [a_n, b_n]$ tali che $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Applicando il Teorema 5.1, deduciamo che esiste x_1 tale che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_1$. Vogliamo a questo punto mostrare che Λ è finito e, inoltre, $f(x_1) = \Lambda$.

La funzione f è continua in x_1, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_1) - \varepsilon < f(x) < f(x_1) + \varepsilon$ per ogni $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$. Fissato ε, e di conseguenza δ, scelgo $n \in N$ tale che $I_n \subset (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$. Allora

$$f(x) < f(x_1) + \varepsilon \qquad \forall\, x \in I_n, \tag{9}$$

che esprime il fatto che $f(x_1) + \varepsilon$ è un maggiorante di $\{f(x) : x \in I_n\}$. Dato che $\sup\{f(x) : x \in I_n\} = \Lambda$ per costruzione, ne segue che Λ è finito, che $f(x_1) \leq \Lambda$ e che $\Lambda \leq f(x_1) + \varepsilon$. Ma, in quest'ultima relazione, ε può essere scelto arbitrariamente, quindi

$$0 \leq \Lambda - f(x_1) \leq \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Perciò $\Lambda = f(x_1)$ e la dimostrazione è completa. □

Si noti che, sebbene la costruzione porti a determinare un singolo punto di massimo, ce ne potrebbero essere anche molti altri! In effetti, ad ogni passo, nella scelta del sottointervallo ci può essere libertà di scelta, nel caso in cui in entrambi i sottointervalli l'estremo superiore della funzione f sia ancora uguale a Λ.

Per concludere, utilizziamo la strategia del *divide et impera* per dimostrare l'esistenza di estremo superiore ed inferiore (risultato concettualmente del tutto indipendente dai concetti di continuità di funzioni reali di variabile reale).

Ricordiamo che il valore $\Lambda \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di $E \subset \mathbb{R}$ se
(i) Λ è un maggiorante di E, cioè per ogni $y \in E$, si ha $y \leq \Lambda$;
(ii) Λ è il più piccolo dei maggioranti, cioè se L è un maggiorante di E, allora $\Lambda \leq L$.

Teorema di esistenza dell'estremo superiore. *Se $E \neq \emptyset$ è limitato superiormente, allora esiste $\Lambda = \sup E \in \mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $a \in E$ (E non è vuoto) e sia b un maggiorante di E (E è limitato superiormente). Indichiamo con I_0 l'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e prendiamo il punto intermedio $\frac{a+b}{2}$. Allora $I_1 := [a_1, b_1]$, dove
(i) se $\frac{a+b}{2}$ è un maggiorante di E, poniamo $a_1 = a$ e $b_1 = \frac{a+b}{2}$,
(ii) se $\frac{a+b}{2}$ non è un maggiorante di E, poniamo $a_1 = \frac{a+b}{2}$ e $b_1 = b$.

In entrambi i casi in $I_1 = [a_1, b_1]$ c'è almeno un elemento di E e b_1 è un maggiorante di E. Iterando il procedimento, otteniamo la solita successione di intervalli incapsulati con $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Quindi, sempre per il Corollario 5.1, esiste Λ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \Lambda$. Dato che $b_n \geq y$ per ogni $y \in E$, la stessa proprietà vale al limite: $\Lambda \geq y$ per ogni $y \in E$. Inoltre, per costruzione, ci sono elementi di E arbitrariamente vicini a Λ, quindi anche la condizione (ii) è soddisfatta. $\square$