Metodi Matematici per l'Informatica

Esame (a.a. 23/24, I canale) - Docente: Lorenzo Carlucci

26 Gennaio 2024

Parte 1

Esercizio 1 *Consideriamo un sistema di password formato da 2 lettere (scelte le 26 lettere dell'alfabeto latino, solo maiuscole) seguite da 3 cifre seguite da 2 caratteri speciali scelti tra $, !, % e @ (per esempio BA344!$).*

1. *Quante password hanno la prima lettera del vostro nome come primo simbolo? [1.5 punti]*
2. *Quante password hanno L come prima lettera o ! come ultimo simbolo? [1.5 punti]*
3. *Quante password contengono esattamente un 4 ed esattamente una A? [2 punti]*

Esercizio 2 *Sia f la funzione che associa a una stringa finita binaria (ossia una successione finita ordinata di 0 e di 1) il massimo numero di 1 consecutivi nella stringa. Indicare se i seguenti punti sono veri o falsi.*

1. *La funzione f è iniettiva. [1 punto]*
2. *La funzione f è invertibile. [1 punto]*
3. *Se σ e τ sono due stringhe finite binarie e $\sigma\tau$ è la loro concatenazione, vale $f(\sigma\tau) = f(\sigma) + f(\tau)$. [1 punto]*
4. *Con la notazione del punto precedente, per ogni stringa σ, vale $f(\sigma\sigma) \geq f(\sigma)$. [1 punto]*
5. *Per ogni $n \geq 1$ esiste una stringa σ tale che $f(\sigma) < n$. [1 punto]*

Esercizio 3 *Una relazione binaria R su un insieme A è detta simpatica se ha la seguente proprietà: per ogni $a, b, c, d \in A$, se aRb e bRc e cRd allora aRd. Indicare se i seguenti punto sono veri o falsi.*

1. *Ogni relazione transitiva è simpatica. [1 punto]*
2. *Ogni relazione simpatica è transitiva. [1 punto]*
3. *Nessuna relazione simpatica è transitiva. [1 punto]*
4. *La seguente relazione binaria R sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ è simpatica? [1 punto]*

   $$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 2), (3, 5), (3, 1), (4, 5), (5, 1)\}$$

   .
5. *Scrivere una relazione simpatica sull'insieme dei numeri naturali **N**. [1 punto]*

Parte 2

Esercizio 4 *Trovare l'errore (o gli errori) nella seguente dimostrazione per induzione forte. [5 punti]*

Tesi: *Per ogni* $n \geq 0$, $7 \times n = 0$.
Base: *Se* $n = 0$ *allora* $7 \times n = 7 \times 0 = 0$.
Passo: *Assumiamo che la tesi sia vera per tutti i numeri da* 0 *a* n, *per un generico intero* $n \geq 0$. *Dimostriamo che è vera per* $n + 1$. *Possiamo scrivere* $n + 1 = a + b$ *con* a, b *interi* $0 \leq a, b \leq n$. *Per Ipotesi Induttiva abbiamo* $7 \times a = 0$ *e* $7 \times b = 0$. *Dunque* $7 \times (n + 1) = 7 \times (a + b) = 7 \times a + 7 \times b = 0 + 0 = 0$.

NB: non è sufficiente dire che la tesi dimostrata è falsa – questo è ovvio. Indicare esplicitamente se il Caso Base e il Passo Induttivo sono corretti.

Esercizio 5 *Mario, Claudia e Gianni hanno fatto un test di ammissione. Rilasciano le seguenti dichiarazioni.*

Mario dice: "O io ho superato il test e Gianni non lo ha superato o Gianni e Claudia hanno superato il test." Claudia dice: "O Mario e Gianni superano entrambi il test o nessuno dei due lo ha superato." Gianni dice: "Se Mario non ha superato il test allora Claudia ha superato il test."

1. *Formalizzare le tre affermazioni in logica proposizionale scegliendo un linguaggio adeguato. [1.5 punti]*
2. *È possibile che tutti e tre dicano il vero? Argomentare. [1.5 punti]*
3. *Se tutti dicono il falso, posso dire chi ha superato sicuramente il test? Argomentare. [2 punti]*

(Indicazione: usare le tavole di verità).

Esercizio 6 *La seguente formula proposizionale in CNF è soddisfacibile? [5 punti]*

$$\{\{\neg p, \neg q, r\}, \{\neg p, q, s\}, \{p, \neg q\}, \{p, q, \neg r\}\}.$$

Se si risponde "SI" definire un assegnamento che la soddisfa, se si risponde "NO" dimostrare l'insoddisfacibilità usando la regola di Risoluzione.