Sapienza, Università di Roma
Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Note di base di

# Analisi Matematica

Parte terza

versione 1.2 (18 novembre 2012)

Lamberto LAMBERTI
Corrado MASCIA

CAPITOLO 2

# Derivate, derivate e derivate

Prima di definire rigorosamente il concetto di derivabilità, prendiamoci il tempo di discutere un paio di punti di vista che indicano quale sia il significato di questo nuovo oggetto matematico: la derivata.

**La derivata come velocità.** Consideriamo un punto che si muova lungo l'asse $y$ con posizione $y = f(t)$ all'istante $t$ Se la funzione $f$ è affine, ossia $f(t) = At+B$, si parla di moto uniforme. La velocità $A$ è il rapporto tra la distanza percorsa nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ e la durata di questo intervallo:

$$A = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Il moto è *uniforme* perchè la velocità è costante e, di conseguenza, in intervalli di tempo uguali, vengono percorse distanze uguali.

Se il moto non è uniforme, la quantità $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ esprime la velocità media del punto nell'intervallo di tempo $[t_0, t]$. Se la velocità media tende ad un limite finito per $t \to t_0$, il valore del limite è detto velocità (istantanea):

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Se il limite non esiste, la velocità istantanea non è definita.

Un esempio semplice è il moto di un corpo in caduta libera, cioè sottoposto alla sola forza di gravità. Sperimentalmente, la distanza percorsa al tempo $t$ da un corpo, lasciato cadere da fermo al tempo $t = 0$, è proporzionale a $t^2$; si rappresenta quindi con una funzione della forma

$$y = f(t) = at^2 \qquad (a > 0).$$

La velocità $v$ all'istante $t$ si ottiene quindi calcolando

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{at^2 - at_0^2}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} a(t + t_0) = 2at_0.$$

Quindi la velocità di un corpo in caduta libera cresce in modo proporzionale al tempo.

Nello studio del moto di un punto è utile osservare anche la variazione di velocità. Il procedimento è simile al precedente. L'accelerazione media è il rapporto tra la variazione di velocità nell'intervallo di tempo $[t_0, t]$ e la durata dell'intervallo, cioè è data da

$(v(t)-v(t_0))/(t-t_0)$. L'accelerazione (istantanea) $a$ è il limite dell'accelerazione media per $t \to t_0$

$$a(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}.$$

Nel caso di moto uniforme $f(t) = At + B$,

$$v(t) = A \qquad \forall\, t \qquad \Rightarrow \qquad a(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{A-A}{t-t_0} = 0,$$

cioè l'accelerazione è nulla; nel caso del corpo in caduta libera $f(t) = at^2$,

$$v(t) = 2at \qquad \forall\, t \qquad \Rightarrow \qquad a(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{2at-2at_0}{t-t_0} = 2a,$$

cioè il moto è *uniformemente accelerato.*

**La derivata come approssimazione lineare.** In generale, supponiamo di esaminare l'evoluzione di una quantità (la posizione di un punto in movimento, la temperatura dell'acqua sul fuoco, o altro...) descritta all'istante $t$, dal numero reale $y = f(t)$. Fissiamo un istante iniziale $t_0$ e misuriamo il valore di $y = f(t_0)$. Per controllare quello che succederà da $t_0$ in poi, dobbiamo studiare la variazione di $f$, cioè la quantità

$$\Delta f(t; t_0) := f(t) - f(t_0).$$

Se la funzione $f$ è costante, non c'è evoluzione: $\Delta f = 0$ per ogni scelta di $t_0$ e $t$. Se $f$ è una funzione affine, cioè se $f(t) = At + B$ per qualche $A, B \in \mathbb{R}$, allora

$$\Delta f(t; t_0) = (At + B) - (At_0 + B) = A(t - t_0) = A\Delta t,$$

dove $\Delta t = t - t_0$ rappresenta l'intervallo di tempo trascorso dall'istante iniziale $t_0$ a quello finale $t$. Come si vede, se $f$ è affine, la funzione $\Delta f$ è <u>lineare</u> nell'incremento $\Delta t$ della variabile indipendente $t$, cioè $\Delta f$ è proporzionale a $\Delta t$. La costante di proporzionalità è $A$ ed è data da $A = \Delta f/\Delta t$.

Proviamo con un polinomio di secondo grado in $t$: $f(t) = at^2+bt+c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. In questo caso, scrivendo $t = t_0 + \Delta t$

$$\begin{aligned}\Delta f(t_0 + \Delta t; t_0) &= \left[a(t_0 + \Delta t)^2 + b(t_0 + \Delta t) + c\right] - \left[at_0^2 + bt_0 + c\right] \\ &= (2at_0 + b)\,\Delta t + a\,(\Delta t)^2 .\end{aligned}$$

Questa volta l'incremento $\Delta f$ non è lineare in $\Delta t$, dato che compare il termine quadratico $A\,(\Delta t)^2$. Però $\Delta f$ ha la gentilezza di decomporsi in due parti:

$$\Delta f(t_0 + \Delta t; t_0) = (\text{termine lineare in } \Delta t) + (\text{resto})\,.$$

Quanto è grande il resto $a\,(\Delta t)^2$? Consideriamo un caso semplice: $a = 1, b = 0$, $c$ qualsiasi, $t_0 = 1$. In questo caso:

$$f(t) = t^2 + c, \qquad \Delta f(1 + \Delta t; 1) = 2\Delta t + (\Delta t)^2,$$

la parte lineare è $2\Delta t$ ed il resto è $(\Delta t)^2$. Vediamo i valori di questi due termini per diverse scelte di $\Delta t$:

| $\Delta t$ | 1 | $0,1$ | $0,01$ | $0,001$ | $0,0001$ | $0,00001$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| parte lineare: $2\Delta t$ | 2 | $0,2$ | $0,02$ | $0,002$ | $0,0002$ | $0,00002$ |
| resto: $(\Delta t)^2$ | 1 | $0,01$ | $0,0001$ | $0,000001$ | $0,00000001$ | $0,0000000001$ |

Come si vede dalla tabella, sia il termine lineare che il resto diminuiscono per $\Delta t \to 0$ (sono infinitesimi). Ma c'è una differenza fondamentale: il resto $(\Delta t)^2$ diviene piccolo molto più rapidamente del termine lineare. Dunque è ragionevole approssimare, per $\Delta t \to 0$, l'incremento $\Delta f$ tramite una funzione lineare in $\Delta t$:

$$\Delta f(t_0 + \Delta t; t_0) \approx (2at_0 + b)\,\Delta t \qquad \text{per} \quad \Delta t \to 0.$$

In generale, data $f$ qualsiasi, se è possibile scrivere l'incremento $\Delta f$ nella forma $\Delta f(t_0 + \Delta t; t_0) = A\Delta t + R$ con $R$ che tende a zero più rapidamente del termine lineare $A\Delta t$ ha senso utilizzare l'approssimazione

$$\Delta f(t_0 + \Delta t; t_0) \approx A\Delta t \qquad \text{per} \quad \Delta t \to 0.$$

Tutte le volte che questa operazione è possibile, la funzione $f$ si dice *derivabile* e il valore $A$ è la *derivata prima* di $f$ in $t_0$. La derivata, dunque, dà un'informazione sulla variazione $\Delta f$ della funzione $f$ quando la variabile indipendente $t$ subisca una variazione $\Delta t$ piccola.

Restano un paio di perplessità: che vuol dire la frase "il resto tende a zero più rapidamente del termine lineare"? E, in concreto, data una funzione $f$ come stabilire se esiste e come calcolare il valore $A$? La risposta alla prima domanda permette magicamente di risolvere anche il secondo angoscioso quesito. Dire che il resto $R$ tende a zero più rapidamente del termine lineare vuol dire richiedere che valga

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{R}{\Delta t} = 0.$$

In questo limite ci si trova di fronte ad una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, e la richiesta è che il resto $R$ tende a zero tanto rapidamente da dominare l'effetto del termine infinitesimo a denominatore.

Dalla condizione sul resto si deduce un modo per calcolare $A$: se esiste $A$ tale che $\Delta f = A\Delta t + R$ con $R$ che soddisfa $\lim_{\Delta t \to 0} R/\Delta t = 0$, allora, dividendo per $\Delta t$,

$$A = \frac{\Delta f}{\Delta t} - \frac{R}{\Delta t},$$

e passando al limite per $\Delta t \to 0$, si ha

$$A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t},$$

che dà una maniera rigorosa di definire la derivata di $f$ e, allo stesso tempo, una maniera per calcolarne il valore.

## 1. Definizione di derivata

Riprendiamo il discorso da capo e mettiamo ordine nel *brainstorming* fatto fin qui.

DEFINIZIONE 1.1. Derivabilità. *Una funzione* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *è* derivabile in $x_0 \in (a,b)$ *se esiste finito il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{10}$$

*Se esiste, il limite si indica con* $f'(x_0)$ *e si dice* derivata (prima) della funzione $f$ in $x_0$. *Se* $f$ *è derivabile in tutti i punti di* $[a,b]$*, si dice che* $f$ è derivabile in $[a,b]$.

Per la derivata si usano anche altri simboli:

$$f' = \frac{df}{dx} = Df = \frac{dy}{dx} = \dot{y} = \cdots,$$

e il limite (10) può essere scritto in maniere equivalenti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \cdots$$

Dato che la derivata $f'$ dipende dal punto di derivazione, $f'$ *è essa stessa una funzione*, il cui insieme di definizione è contenuto nell'insieme di definizione della funzione $f$ (non è detto che i due domini di definizione coincidano).

**Significato geometrico.** Data una funzione $y = f(x)$, consideriamo il problema di determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$. L'idea è la seguente: dato un secondo punto $P = (x, f(x))$ sul grafico di $f$, per $P_0$ e $P$ passa un'unica retta, detta retta secante. Se, muovendo $P$ verso $P_0$, la retta secante

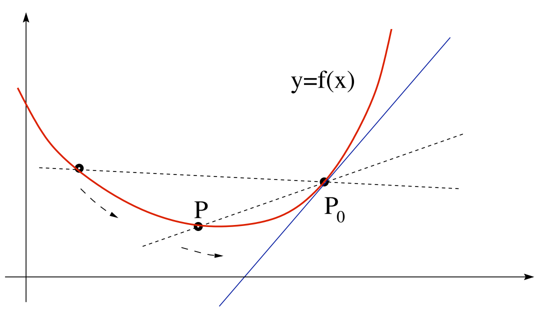



FIGURA 1. Il grafico di una funzione con tangente e secanti.

tende ad una posizione limite, tale retta limite è la retta tangente. Formuliamo ora, in maniera rigorosa, il processo geometrico di limite che abbiamo appena raccontato. Il coefficiente angolare della retta secante per $P_0$ e $P$ è

$$\textsf{rapporto incrementale:}\qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Se la funzione $f$ è derivabile in $x_0$, esiste il limite del rapporto incrementale e vale $f'(x_0)$, quindi il valore della derivata prima in $x_0$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

Osservazione 1.2. Determinare una derivata vuol dire fare (con successo) un limite: i limiti si fanno nei punti interni ad un intervallo di definizione. Negli estremi si fanno al più limiti sinistri o limiti destri. In punti isolati non si fanno neanche i limiti... Chi penserebbe di fare la tangente in un singolo punto?

La derivata è dunque il limite di una funzione opportuna, il rapporto incrementale. Vediamo come calcolare *esplicitamente* tale funzione derivata. Partiamo da alcuni casi semplici:

– se $f(x) = c \in \mathbb{R}$ per ogni $x$, si ha

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0 \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} 0 = 0;$$

– se $f(x) = x$, vale

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)-x}{h} = 1 \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} 1 = 1;$$

– infine, se $f(x) = x^2$, si ha

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

Passiamo ora ad un esempio meno facile: sia $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \geq 0$. Il rapporto incrementale in $x \neq 0$ è

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\,\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Passando al limite per $h \to 0$ si ottiene

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad\qquad x > 0.$$

Nel punto $x = 0$ la funzione ha una *singolarità* (come è fatto il grafico di $\sqrt{x}$?): pur essendo definita e continua, si ha

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = +\infty.$$

Ecco altri due esempi di funzioni continue, ma non derivabili in $x = 0$:

$$f(x) = |x| \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Per la funzione $f$, la non derivabilità in 0 è dovuta al fatto che i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale esistono finiti ma non coincidono (il rapporto incrementale ha una discontinuità di salto in 0)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{|h|}{h}.$$

Nel grafico, un comportamento di questo genere si traduce nella presenza di un *punto angoloso*. Nel caso della funzione $g$, il rapporto incrementale ha l'espressione

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{h\sin(1/h) - 0}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Come si è già visto, questa funzione non ha limite (né destro né sinistro) per $h \to 0$. In termini di grafico (controllare di persona!), questa funzione ha delle variazioni sempre più rapide di pendenza man mano che ci sia avvicina ad $x = 0$.

**Due conseguenze.** Vediamo cosa si può dedurre in un soffio dalla derivabilità.

**1.** *Derivabilità $\Rightarrow$ Continuità.* Se una funzione $f$ è derivabile in $x_0$, allora è anche continua in $x_0$. Infatti la continuità della funzione $f$ nel punto $x_0$ è equivalente all'affermazione $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$, e, dato che

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,(x - x_0),$$

passando al limite per $x \to x_0$ si ottiene la conclusione.

**2.** *Equazione della retta tangente.* Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in [a, b]$ un punto in cui $f$ è derivabile, la retta tangente è, per definizione, la retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$, il cui coefficiente angolare è pari a $f'(x_0)$

$$\text{equazione della retta tangente:} \qquad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Fissato il punto $x_0$, il polinomio di primo grado in $x$ a secondo membro può essere visto come un'approssimazione della funzione $f$ *vicino al punto* $x_0$.

Nel sostituire la funzione con la sua retta tangente l'errore $R_{x_0}$, è pari a

$$R(x; x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Per $x \to x_0$, l'errore che si commette tende a zero, cioè

$$\lim_{x\to x_0} R(x; x_0) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big) = 0. \tag{11}$$

Ma (attenzione!) lo stesso è vero per qualsiasi altra retta per il punto $(x_0, f(x_0))$, infatti

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)\big) = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Quindi la proprietà (11) non è indicativa! Il fatto *fondamentale* è che per $R(x; x_0)$ vale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x; x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0. \tag{12}$$

Questa condizione è più restrittiva della precedente e, tra le funzioni affini, è verificata *solo* da quella che rappresenta la retta tangente ad $f$ in $x_0$. In maniera equivalente, avremmo potuto dire che una funzione è derivabile in $x_0$ se esiste un valore $\ell \in \mathbb{R}$ per cui

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Il valore $\ell$ è pari a $f'(x_0)$.

**Prime formule di derivazione.** Applichiamo ora la definizione per calcolare esplicitamente le derivate di alcune funzioni semplici.

*Polinomi e potenze.* Si è già visto che valgono le regole di derivazione

$$\big(c\big)' = 0, \qquad \big(x\big)' = 1, \qquad \big(x^2\big)' = 2x.$$

Per un generico polinomio di grado 2, $f(x) = ax^2 + bx + c$ si può procedere in modo analogo. Il rapporto incrementale è

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c}{h} = 2ax + b + h.$$

Quindi, passando al limite per $h \to 0$, si ottiene

$$\big(ax^2 + bx + c\big)' = \lim_{h\to 0}(2ax + b + h) = 2ax + b.$$

In modo simile è possibile derivare un qualsiasi polinomio. Calcoliamo prima di tutto la derivata di $f(x) = x^n$ dove $n \in \mathbb{N}$. Il rapporto incrementale si può scrivere come

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \cdots + x^{n-1},$$

dato che $x_1^n - x^n = (x_1 - x)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})$ per ogni $x_1, x \in \mathbb{R}$. Passando al limite per $x_1 \to x$, ciascuno dei termini tende a $x^{n-1}$ e quindi, dato che si tratta di $n$ termini, si ottiene

$$\big(x^n\big)' = nx^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

(per $n = 1, 2$ si ottengono le relazioni già note per $x$ e $x^2$).

Una volta noto che è possibile calcolare esplicitamente la derivata di un qualsiasi polinomio, è naturale chiedersi se sia possibile fare lo stesso per funzioni razionali. Partiamo dal caso più semplice:

$$f(x)=\frac{1}{x}\qquad (x\neq 0)\qquad\Rightarrow\qquad \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x}}{x_1-x}=\frac{x-x_1}{x_1x(x_1-x)}=-\frac{1}{x_1x}.$$

Quindi passando al limite $x_1\to x$, si ottiene la formula

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\qquad\qquad (x\neq 0).$$

Allo stesso modo è possibile trattare funzioni $f(x)=\frac{1}{x^\beta}$ con $\beta\in\mathbb{N}$ $(x\neq 0)$:

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}=\frac{\frac{1}{x_1^\beta}-\frac{1}{x^\beta}}{x_1-x}=\frac{x^\beta-x_1^\beta}{x_1^\beta x^\beta(x_1-x)}=-\frac{x_1^{\beta-1}+x_1^{\beta-2}x+\,\cdots\,+x^{\beta-1}}{x_1^\beta x^\beta}.$$

Passando al limite per $x_1\to x$, si ottiene

$$(14)\qquad \left(x^{-\beta}\right)'\equiv\left(\frac{1}{x^\beta}\right)'=-\frac{\beta}{x^{\beta+1}}\equiv-\beta x^{-\beta-1}\qquad \forall\beta\in\mathbb{N},\quad\forall\,x\neq 0.$$

Vedremo più avanti come si possa calcolare la derivata di una generica funzione razionale.

Le formule (13) e (14) si possono sintetizzare nell'unica formula

$$(15)\qquad (x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}\qquad\qquad \forall\,\alpha\in\mathbb{Z}.$$

Dimostriamo che è possibile scegliere $\alpha\in\mathbb{Q}$ ottenendo ancora la formula (15). Supponiamo la funzione $f(x)=x^\alpha$ con $\alpha=p/q$ con $p$ e $q$ interi $(q\neq 0)$. Consideriamo, per semplicità, il caso $p,q>0$. Il rapporto incrementale è

$$\frac{x_1^\alpha-x^\alpha}{x_1-x}=\frac{x_1^{p/q}-x^{p/q}}{x_1-x}.$$

Ponendo $x_1^{1/q}=\xi_1$ e $x^{1/q}=\xi$, otteniamo

$$\frac{x_1^\alpha-x^\alpha}{x_1-x}=\frac{\xi_1^p-\xi^p}{\xi_1^q-\xi^q}=\frac{\xi_1^{p-1}+\xi_1^{p-2}\xi+\,\cdots\,+\xi^{p-1}}{\xi_1^{q-1}+\xi_1^{q-2}\xi+\,\cdots\,+\xi^{q-1}}.$$

Passando al limite per $x_1\to x$, cioè per $\xi_1\to\xi$, si ottiene

$$\lim_{x_1\to x}\frac{x_1^\alpha-x^\alpha}{x_1-x}=\lim_{\xi_1\to\xi}\frac{\xi_1^{p-1}+\xi_1^{p-2}\xi+\,\cdots\,+\xi^{p-1}}{\xi_1^{q-1}+\xi_1^{q-2}\xi+\,\cdots\,+\xi^{q-1}}=\frac{p\,\xi^{p-1}}{q\,\xi^{q-1}}=\frac{p}{q}\,\xi^{p-q}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1},$$

cioè la formula (15) per $\alpha$ razionale positivo.

In generale si può dimostrare che (15) vale *per ogni* $\alpha\in\mathbb{R}$, cioè

$$(16)\qquad (x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}\qquad\qquad \forall\,\alpha\in\mathbb{R}\quad\forall\,x\neq 0.$$

*Funzioni trigonometriche.* Grazie alle formule di addizione è possibile scrivere i rapporti incrementali di $\sin x$ e $\cos x$ come

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} = \sin x\,\frac{\cos h-1}{h} + \cos x\,\frac{\sin h}{h},$$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} = \cos x\frac{\cos h-1}{h} - \sin x\,\frac{\sin h}{h}.$$

Passando al limite per $h\to 0$ e ricordando che $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = 0$ e $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$,

$$\big(\sin x\big)' = \cos x \qquad \text{e} \qquad \big(\cos x\big)' = -\sin x.$$

*Esponenziale e logaritmo.* Come ultimo esempio, consideriamo le funzioni $e^x$ e $\ln x$. Nel caso dell'esponenziale, il rapporto incrementale è

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\,\frac{e^h-1}{h}.$$

Passando al limite per $h\to 0$ e usando il limite notevole $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$,

$$\big(e^x\big)' = e^x,$$

che esprime una proprietà notevole dell'esponenziale: *la derivata di $e^x$ è $e^x$*. In effetti, la funzione $e^x$ è l'unica funzione $f$ che verifica l'equazione (differenziale) $f' = f$ e la condizione $f(0) = 1$.

Il rapporto incrementale del logaritmo naturale si riscrive come

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right).$$

Quindi, ponendo $t = h/x$ ($x$ è fissato) e usando il limite notevole $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\,\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x}.$$

## 2. Regole fondamentali di derivazione

Dalla definizione dell'operazione di derivazione, discendono alcune regole basilari che permettono di derivare una classe ampia di funzioni, a partire da una classe più ristretta di derivate note.

<u>Linearità.</u> *Dati $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $f,g$ derivabili, allora anche $\alpha f+\beta g$ è derivabile e*

$$\phi(x) = \alpha f(x)+\beta g(x) \quad\Longrightarrow\quad \phi'(x) = \alpha f'(x)+\beta g'(x).$$

Basta infatti osservare che il rapporto incrementale di $\phi$ si può riscrivere come

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} = \alpha\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \beta\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

e passare al limite per $h \to 0$, applicando le proprietà note dei limiti.

Ad esempio, la derivata di un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ si può calcolare senza bisogno di passare per il limite del rapporto incrementale, ma semplicemente usando la linearità della derivazione e la formula $(x^k)' = kx^{k-1}$:

$$\begin{aligned}(p(x))' &= a_n(x^n)' + a_{n-1}(x^{n-1})' + \cdots + a_1(x)' + (a_0)'\\ &= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.\end{aligned}$$

<u>Derivata di un prodotto.</u> *Date $f, g$ derivabili, allora anche $fg$ è derivabile e*

$$\phi(x) = f(x)g(x) \quad \Longrightarrow \quad \phi'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Per dimostrare la formula, scriviamo il rapporto incrementale

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= f(x+h)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x),\end{aligned}$$

(si è aggiunto e sottratto a numeratore la quantità $f(x+h)g(x)$). Per $h \to 0$, la conclusione.

Ad esempio, per calcolare la derivata della funzione $\phi(x) = x\sin x$,

$$(x\sin x)' = x(\sin x)' + (x)'\sin x = x\cos x + \sin x,$$

avendo usato le formule di derivazione per $x$ e $\sin x$.

<u>Derivata di un rapporto.</u> *Se $f$ e $g$ sono derivabili ($g(x) \neq 0$ per ogni $x$), allora anche il rapporto $f/g$ è derivabile e vale la formula*

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Longrightarrow \quad \phi'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

La dimostrazione discende dalla struttura del rapporto incrementale per la funzione rapporto. Niente di sorprendente. Si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)}\\ &= \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)}\\ &= \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x) - f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right].\end{aligned}$$

Per $h \to 0$, si ottiene la conclusione.

OSSERVAZIONE 2.1. La formula di derivazione del rapporto è stata scritta nel caso in cui $g(x) \neq 0$ per ogni $x$. Ripercorrendo la dimostrazione ci si convince che basta supporre $g(x) \neq 0$ nel punto considerato. Infatti, se $g$ è derivabile in $x$ è anche continua nel punto, e quindi, c'è tutto un intorno $I$ di $x$ in cui $g$ non si azzera.

Ad esempio, la derivata di $f(x) = \tan x$ è data da

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x\ \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Anche per derivare funzioni razionali basta applicare la formula di derivazione del rapporto. Ad esempio,

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

<u>Derivata di una funzione composta.</u> *Siano $g, h$ derivabili, allora la funzione composta $f = h \circ g$ è derivabile e vale la formula (in inglese, nota come* chain rule*)*

$$f(x) = h(g(x)) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = h'(g(x))\, g'(x). \tag{17}$$

Usare concretamente questa regola è molto più semplice di quel che possa sembrare. Vediamo, ad esempio, come calcolare la derivata di $f(x) = e^{x^2}$.

*i.* Riconosciamo la struttura di funzione composta:

$$f(x) = h(g(x)) \qquad \text{dove} \qquad g(x) = x^2, \quad h(s) = e^s.$$

*ii.* Dato che $g(x) = x^2$ e $h(s) = e^s$, si ha $g'(x) = 2x$ e $h'(s) = e^s$.

*iii.* Ora occorre fare il prodotto delle derivate, *calcolando $h'$ in $s = g(x) = x^2$*:

$$D\big(e^{x^2}\big) = 2xe^{x^2}.$$

Analogamente, dato che $D(\sin x) = \cos x$ e $D(\sqrt{s}) = 1/(2\sqrt{s})$,

$$D\left(\sqrt{1 + \sin x}\right) = \frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}}.$$

Se la funzione è composta da più di due funzioni, si itera il procedimento:

$$D\left(h(g(f(x)))\right) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ad esempio,

$$D\left(\sqrt{1 + \sin^2 x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

Per dimostrare la formula (17), scriviamo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta h}{\Delta x} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \Delta g = 0, \\ \dfrac{\Delta h}{\Delta g}\dfrac{\Delta g}{\Delta x} & \text{se} \quad \Delta g \neq 0, \end{cases} \tag{18}$$

dove

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$
$$\Delta h = h(g(x_2)) - h(g(x_1)) \qquad \Delta g = g(x_2) - g(x_1).$$

Se, per $x_2$ vicino ad $x_1$, si ha $\Delta g \neq 0$, la conclusione segue da

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta g}\frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta g} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = h'(g(x_1))\, g'(x_1),$$

dato che $\Delta g \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Se in ogni intorno di $x_1$ ci sono punti per cui $\Delta g = 0$, la derivata di $g$ in $x_1$ deve essere nulla (come si dimostra?), e quindi vale la conclusione, dato che entrambe le rappresentazioni di $\Delta f/\Delta x$ in (18) tendono a zero per $\Delta x \to 0$.

Applicando la formula (17) è possibile ottenere le formule per le derivate di

$$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad a^x \qquad (a > 0).$$

Per entrambe è utile osservare utilizzare la formula

$$a^b = e^{b \ln a} \qquad \forall\, a > 0,\ b \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Usando la formula (19),

$$D(x^\alpha) = D(e^{\alpha \ln x}) = \frac{\alpha}{x}\, e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha - 1} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$
$$D(a^x) = D(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a}\, \ln a = a^x\, \ln a \qquad \forall\, a > 0.$$

<u>*Derivata di una funzione inversa.*</u> Una conseguenza della formula di derivazione di funzione composta è la formula della derivata dell'inversa di una funzione. La prima domanda naturale da porsi è: *se la funzione $f$ è invertibile e derivabile, lo è anche la funzione inversa?* La risposta è immediata se si pensa a come si ottiene il grafico della funzione inversa a partire da quello della funzione originale e se si ricorda il significato geometrico della derivabilità: la funzione $f$ è derivabile in $x$ se in tale punto il grafico ammette tangente e tale retta tangente *non è verticale* (quando la tangente al grafico è verticale, il rapporto incrementale tende ad $\infty$). Il grafico di $f^{-1}$ si può ottenere da quello della $f$ tramite un ribaltamento attorno alla bisettrice del primo e terzo quadrante. In questa operazione di ribaltamento, rette orizzontali diventano verticali e viceversa. Quindi un punto in cui la tangente al grafico di $f$ è orizzontale (cioè $f'(x) = 0$), corrisponde, nel grafico di $f^{-1}$, ad un punto in cui la tangente è verticale e viceversa (Fig.2). Questo significa che:

*Se $f'(x) \neq 0$, la funzione inversa $f^{-1}$ è derivabile nel punto $y = f(x)$.*

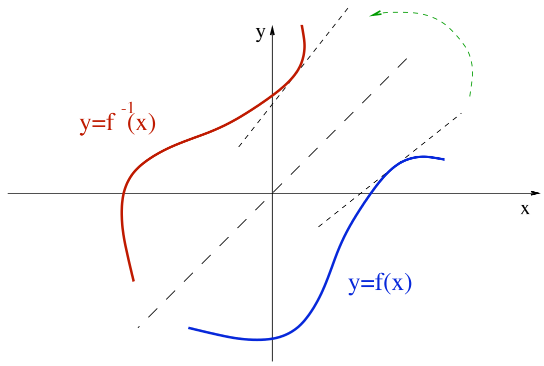



FIGURA 2. Una funzione e la sua inversa, con le relative tangenti.

Come calcolare la derivata della'inversa $f^{-1}$? Dato che $f(f^{-1}(x)) = x$ per ogni $x$, derivando membro a membro tramite la formula di derivazione di funzione composta,

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \Longrightarrow \qquad f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1.$$

Esplicitando $(f^{-1})'(x)$, si ottiene la formula di derivazione della funzione inversa

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{20}$$

Verifichiamo questa formula, calcolando di nuovo la derivata della funzione $f(x) = \ln x$ (in precedenza la formula si è ottenuta in modo diverso). In questo caso

$$\begin{cases} f(t) = e^t \\ f^{-1}(x) = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = e^t \\ f'(f^{-1}(x)) = e^{\ln x} = x \end{cases} \Rightarrow \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Consideriamo le inverse delle funzioni trigonometriche e calcoliamone le derivate. Dato che $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ per $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t}$ per $t \in [0, \pi]$, si ha

$$\begin{cases} f(t) = \sin t \\ f^{-1}(x) = \arcsin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = \cos t \\ f'(f^{-1}(x)) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in (-1, 1),$$

$$\begin{cases} f(t) = \cos t \\ f^{-1}(x) = \arccos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = -\sin t \\ f'(f^{-1}(x)) = -\sin(\arccos x) = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in (-1, 1).$$

Per quanto riguarda la funzione $\arctan x$, è utile ricordare che

$$D(\tan t) = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t.$$

Quindi

$$\begin{cases} f(t) = \tan t \\ f^{-1}(x) = \arctan x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = 1 + \tan^2 t \\ f'(f^{-1}(x)) = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ultima, ma non ultima, la formula della derivata di $f^{-1}(x) = \log_a x$ con $a > 0$ qualsiasi:

$$\begin{cases} f(x) = a^x \\ f^{-1}(x) = \log_a x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = a^t \ln a \\ f'(f^{-1}(x)) = a^{\log_a x} \ln a = x \ln a \end{cases} \Rightarrow \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

## 3. Derivate successive

L'operazione di derivazione porta da una funzione $f$ ad una nuova funzione $f'$. E' naturale chiedersi se la funzione derivata $f'$ sia a sua volta derivabile.

DEFINIZIONE 3.1. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile e sia $x \in [a,b]$. Se esiste finito*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}, \tag{21}$$

*la funzione $f$ è* derivabile due volte in $x$*, il limite si indica con $f''(x)$ e si chiama* derivata seconda di $f$ in $x$*. Come sempre, se $f$ è derivabile due volte in tutti i punti dell'intervallo $[a,b]$, si dice che $f$ è* derivabile due volte in $[a,b]$.

Per la derivata seconda si usano anche le notazioni

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = D^2 f = \frac{d^2 y}{dx^2} = \cdots,$$

Analogamente, nel caso di una funzione derivabile due volte, è possibile domandarsi se esista la derivata terza $f'''$. Iterando il procedimento si può parlare di derivata $n-$esima, che si indica con $f^{(n)}$. Simboli equivalenti sono

$$f^{(n)} \equiv D^n f \equiv \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Qualche volta si indica la funzione $f$ come la sua derivata $0-$esima: $f^{(0)} \equiv f$.

La maniera *operativa* di calcolare derivate successive è semplicemente di iterare le formule note per la derivazione. Ad esempio,

$$f(x) = x^3 + x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6x \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = 6.$$

Le derivate di ordine superiore al terzo della funzione $f(x) = x^3 + x$ esistono e sono tutte nulle. In generale, un polinomio $p$ di grado $n$ è infinitamente derivabile (cioè ammette derivate di qualsiasi ordine), e le sue derivate di ordine maggiore o uguale ad $n+1$ sono tutte nulle. Anche le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono infinitamente derivabili:

$$D(\sin x) = \cos x,\ D^2(\sin x) = -\sin x,\ D^3(\sin x) = -\cos x,\ D^4(\sin x) = \sin x$$
$$D(\cos x) = -\sin x,\ D^2(\cos x) = -\cos x,\ D^3(\cos x) = \sin x,\ D^4(\cos x) = \cos x.$$

Le derivate successive ripetono lo stesso schema in modo periodico, ossia

$$\begin{matrix} D^{2n-1}(\sin x) = (-1)^{n+1}\cos x, & D^{2n}(\sin x) = (-1)^n \sin x, \\ D^{2n-1}(\cos x) = (-1)^n \sin x, & D^{2n}(\cos x) = (-1)^n \cos x, \end{matrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pensando al caso di polinomi e funzioni trigonometriche, si potrebbe essere indotti a credere che tutte le funzioni siano infinitamente derivabili. Un esempio di funzione che sia derivabile due volte in un punto, ma non tre volte è $f(x) = x^{5/2}$. Infatti $f''(x) = \frac{15}{4}\sqrt{x}$ che, come sappiamo, non è derivabile in zero.

Esercizio 3.2. *Se $f(x) = \cos x$, quanto vale l'espressione $f''(x) + f(x)$? E se, dato $\lambda \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{\lambda x}$, quanto vale $g''(x) - \lambda^2 g(x)$?*

**Notazioni.** Comunememente si usano le notazioni (qui $I$ è un intervallo aperto e $k \in \mathbb{N}$)

$$C(I) \equiv C^0(I) := \{\text{funzioni continue in } I\}$$
$$C^1(I) := \{\text{funzioni derivabili in } I \text{ e con } f' \in C(I)\}$$
$$C^k(I) := \{\text{funzioni derivabili } k \text{ volte in } I \text{ e con } f^{(k)} \in C(I)\}$$
$$C^\infty(I) := \{\text{funzioni infinitamente derivabili in } I\}.$$

## 4. Il Teorema di Lagrange

Dato che il rapporto incrementale è determinato dai valori della funzione in due punti distinti, esso riflette proprietà della funzione "in grande". Invece, la derivata, che si ottiene con un procedimento di limite, riflette solo proprietà "in piccolo". E' molto utile poter dedurre proprietà *globali* della funzione (cioè "in grande") a partire da proprietà *locali* (cioè "in piccolo") date dalla derivata prima della funzione. Lo strumento più utile per questa operazione è il *teorema di Lagrange* (o *teorema del valor medio del calcolo differenziale*).[1]

Graficamente il Teorema di Lagrange afferma che data una funzione $f$ continua nell'intervallo chiuso $[x_1, x_2]$ e derivabile nell'intervallo aperto $(x_1, x_2)$, la retta passante per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ (detta retta secante) è parallela alla retta tangente

[1] Nei testi americani, spesso il Teorema di Lagrange è denominato "mean value theorem of differential calculus" o "intermediate value theorem".

al grafico nel punto $(\xi, f(\xi))$ per almeno un valore $\xi \in (x_1, x_2)$. Dato che il coefficiente angolare della secante è

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

per questo valore intermedio $\xi$ vale la relazione $f'(\xi) = [f(x_2) - f(x_1)]/[x_2 - x_1]$.

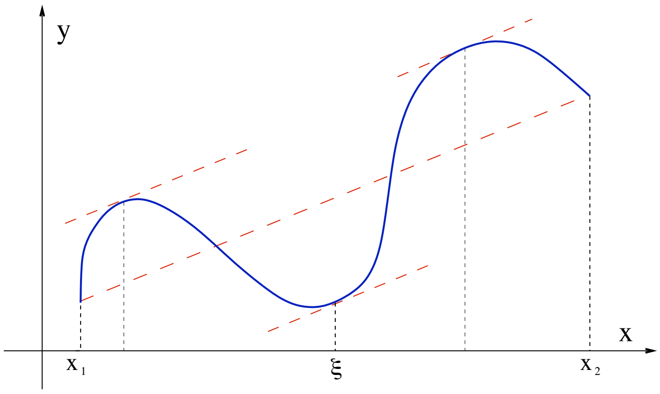



FIGURA 3. Il teorema di Lagrange

TEOREMA 4.1. Teorema di Lagrange. *Sia $f$ continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in $(x_1, x_2)$. Allora esiste $\xi \in (x_1, x_2)$ tale che*

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

La tesi del Teorema equivale ad affermare che esiste $\theta \in (0, 1)$ per cui

$$f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Le due formulazioni sono equivalenti dato che il punto intermedio $\xi$ può sempre essere scritto nella forma $\xi = x_1 + \theta(x_2 - x_1)$ per $\theta \in (0, 1)$ opportuno. Oppure, sostituendo $x_1$ con $x$ e $x_2$ con $x + h$, possiamo scrivere

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h), \qquad \theta \in (0, 1).$$

OSSERVAZIONE 4.2. Il punto di partenza nella definizione di derivabilità è dare solidità ad approssimazioni del tipo

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x \qquad \text{per} \quad x \approx x_0.$$

dove $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ e $\Delta x = x - x_0$. Il Teorema di Lagrange garantisce che $\Delta f = f'(\xi)\Delta x$ per qualche $\xi$ compreso tra $x$ e $x_0$. Quindi se si è disposti a pagare il prezzo di calcolare la derivata di $f$ in un misterioso punto $\xi$, anziché in $x_0$, l'errore commesso è nullo (ma non si dimentichi che $\xi$ dipende da $x$ e da $x_0$).

Controesempio 4.3. *"Datemi un punto (interno) di non derivabilità, e vi darò un controesempio."* Se la funzione $f$ non è derivabile in tutti i punti dell'intervallo aperto $(x_1, x_2)$, non è detto che valga la conclusione del Teorema di Lagrange: può capitare che nessuna parallela della secante che congiunge gli estremi del grafico sia tangente al grafico stesso. Consideriamo la funzione $f(x) = |x|$ nell'intervallo $[-1, 1]$. Questa funzione è derivabile per ogni $x \neq 0$ e si ha

$$D(|x|) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0, \\ +1 & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

ma, dato che

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 1}{2} = 0 \neq D(|x|) \qquad \forall x,$$

la conclusione del Teorema non vale.

Il Teorema di Lagrange è conseguenza del seguente risultato.

Teorema 4.4. <u>*Teorema di Rolle.*</u> *Sia $\phi$ continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in $(x_1, x_2)$. Se $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, allora esiste $\xi \in (x_1, x_2)$ tale che $\phi'(\xi) = 0$.*

Geometricamente, il Teorema di Rolle afferma che, se $\phi(x_1)$ e $\phi(x_2)$ coincidono allora il grafico di $\phi$ ha tangente orizzontale in un punto interno dell'intervallo $(x_1, x_2)$.

Dimostrazione del Teorema 4.4. Sia $\ell = \phi(x_1) = \phi(x_2)$. Dato che la funzione $\phi$ è continua in $[x_1, x_2]$, per il Teorema di Weierstrass, esistono sia il massimo $M$ che il minimo $m$ di $\phi$ in $[x_1, x_2]$. Chiaramente, $m \leq \ell \leq M$.

Se $M = m$, deve essere $\phi(x) = M$ in tutto l'intervallo $[x_1, x_2]$, quindi $\phi'(x) = 0$ in tutti i punti dell'intervallo.

Se $M \neq m$, almeno uno dei due valori deve essere diverso da $\ell$. Supponiamo che sia $M \neq \ell$ (l'altro caso si tratta in modo simile). Allora $M > \ell$ ed esiste $\xi \in [x_1, x_2]$ tale che $\phi(\xi) = M$. Inoltre visto che $\phi(x_1) = \phi(x_2) = \ell \neq M$, $\xi \neq x_1, x_2$, ossia $\xi \in (x_1, x_2)$. Dato che $\phi(x) \leq M = \phi(\xi)$ per ogni $x \in [x_1, x_2]$,

$$\frac{\phi(x) - \phi(\xi)}{x - \xi} \quad \begin{cases} \leq 0 & \forall\, x > \xi, \\ \\ \geq 0 & \forall\, x < \xi, \end{cases}$$

Passando al limite per $x \to \xi$ da destra e da sinistra e, sapendo che i limiti destro e sinistro esistono e coincidono, si ha

$$\phi'(\xi) = \lim_{x \to \xi^+} \frac{\phi(x) - \phi(\xi)}{x - \xi} \leq 0 \quad \text{e} \quad \phi'(\xi) = \lim_{x \to \xi^-} \frac{\phi(x) - \phi(\xi)}{x - \xi} \geq 0$$

da cui $0 \leq \phi'(\xi) \leq 0$, e quindi $\phi'(\xi) = 0$. □

Dimostrazione del Teorema 4.1. Definiamo la funzione (ausiliaria) $\phi$

$$\phi(x) := f(x) - f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

che rappresenta la distanza verticale tra il punto $(x, f(x))$ del grafico della funzione e la retta secante passante per i suoi estremi. La funzione $\phi$ soddisfa le ipotesi di regolarità del Teorema di Rolle (cioè è continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in $(x_1, x_2)$). Inoltre

$$\phi(x_1) = f(x_1) - f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_1 - x_1) = 0,$$
$$\phi(x_2) = f(x_2) - f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = 0.$$

Quindi esiste un valore $\xi \in (x_1, x_2)$ tale che $\phi'(\xi) = 0$. Dato che

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad x \in (x_1, x_2),$$

si deduce che

$$\phi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0,$$

cioè la conclusione. □

**Conseguenze del Teorema di Lagrange.** L'apparentemente innocuo Teorema di Lagrange è un'arma estremamente potente. Vediamo perché.

a. *<u>Funzioni monotòne.</u>* *Sia $f$ derivabile in $(a, b)$. Allora*

$$f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f \quad \text{strettamente crescente in } (a, b).$$

Infatti, supponiamo $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$ e siano $x_1, x_2$ in $(a, b)$ tali che $x_1 < x_2$. Per il Teorema di Lagrange, esiste $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Dato che $f'(\xi) > 0$ per ipotesi, ne segue $f(x_2) > f(x_1)$.

Analogamente si dimostra che

$$f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f \quad \textit{strettamente decrescente in } (a, b).$$

Se invece dell'informazione $f'(x) > 0$ o $f'(x) < 0$, si ha l'informazione più debole $f'(x) \geq 0$ o $f'(x) \leq 0$, la conclusione va sostituita con le analoghe proprietà di monotonía deboli (nondecrescente/noncrescente).

Consideriamo, come esempio, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

e studiamone la monotonía. Da quanto si è appena detto, basta studiare il segno della derivata prima:

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

Dato che $f'(x)$ è strettamente positiva per $x<0$ e strettamente negativa per $x>0$, la funzione è crescente in $(-\infty,0]$ ed è decrescente $[0,+\infty)$.

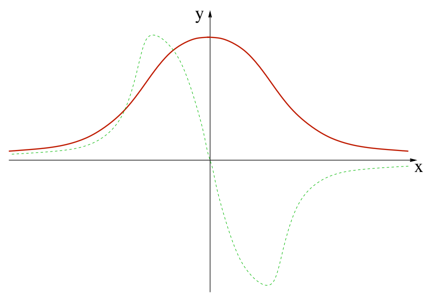



FIGURA 4. Grafico (qualitativo) di $1/(1+x^2)$ e della sua derivata

Vediamo un secondo esempio. Consideriamo la funzione $f(x)=\frac{1}{x}$. Dato che la derivata di questa funzione è

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \qquad \forall x \neq 0,$$

concludiamo che la funzione $f$ è decrescente... Se però calcoliamo la differenza del valore della funzione in 1 e in $-1$, otteniamo una contraddizione: $f(1)-f(-1)=1+1>0$. Cosa sta succedendo? Bisogna stare attenti al fatto che le conclusioni sulla monotonìa delle funzioni seguono dal Teorema di Lagrange che vale su intervalli, cioè su insiemi "senza buchi" (si dicono *insiemi connessi*). Se togliamo dall'enunciato del Teorema l'ipotesi di "assenza di buchi", la conclusione non è più vera.[2] Nel caso della funzione $1/x$ stiamo applicando il Teorema all'insieme $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ che invece ha un buco: non contiene il punto 0. Ecco l'errore. Quindi la funzione $f(x)=1/x$ NON è decrescente in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$! Possiamo invece correttamente applicare i risultati sulla monotonìa alle semirette $(-\infty,0)$ e $(0,\infty)$ *separatamente* e concludere che $\frac{1}{x}$ è decrescente in $(-\infty,0)$ ed è decrescente in $(0,+\infty)$.

OSSERVAZIONE 4.5. Cogliamo l'occasione per far notare una sottigliezza. Se $f'(x)>0$ in un intervallo, necessariamente la funzione $f$ è crescente. Cosa succede se $f'(x_0)>0$ *nel solo punto* $x_0$? La possibilità di tracciare la retta tangente (che è crescente) suggerirebbe il fatto che la funzione $f$ sia crescente, per lo meno in un intorno di $x_0$. Invece

[2] Da cui il noto modo di dire, attribuito a N. Barbecue, "Non tutti i Teoremi riescono col buco"...

questa affermazione è falsa! Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2\left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

Questa funzione è derivabile dappertutto e (c'è da dirlo? ...verificare!)

$$f'(x) = \begin{cases} 1/2 + \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & x \neq 0, \\ 1/2 & x = 0, \end{cases}$$

Quindi $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, ma in ogni intorno di $x = 0$ cadono punti in cui la derivata è negativa: si tratta dei punti in cui $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ è uguale a $-1$. Quindi *non è vero che $f$ è crescente in un intorno dell'origine.* Il problema sta nel fatto che $f'$ non è continua in 0. Se fosse stata continua, $f'(x_0) > 0$ avrebbe implicato $f'(x) > 0$ in un intorno di $x_0$ e quindi la monotonia in tale intorno.

*b.* *Funzioni a derivata nulla.* Una seconda conseguenza del Teorema di Lagrange:

$$f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f \quad \textit{è costante in } (a, b).$$

Infatti, per ogni coppia di valori $x_1, x_2 \in (a, b)$, esiste un valore $\xi$, compreso tra i due, per cui $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Dato che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$, si avrà, in particolare, $f'(\xi) = 0$, cioè

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) = f(x_1).$$

Si noti che, anche qui, ha un ruolo fondamentale il fatto che si lavori su intervalli. Ad esempio, la funzione $f$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1], \\ 1 & x \in [2, 3], \end{cases}$$

è derivabile nel suo insieme di definizione $[0, 1] \cup [2, 3]$ e la sua derivata è ovunque nulla, ma la funzione si guarda bene dall'essere costante.

*c.* *Lipschitzianità di funzioni a derivata limitata.* Siano $I$ l'intervallo aperto $(\alpha, \beta)$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $I$. Se $f'$ è limitata in $I$, cioè se

$$\exists\, L > 0 \quad \text{tale che} \quad |f'(x)| \leq L \quad \forall\, x \in I.$$

allora dal Teorema di Lagrange segue

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)(x_2 - x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \qquad \forall x_1, x_2 \in (\alpha, \beta).$$

Quindi *una funzione derivabile con derivata limitata è lipschitziana.*

In particolare, se $f \in C^1(I)$ (sempre con $I = (\alpha, \beta)$), la derivata prima è continua in $[a, b]$ per ogni $[a, b] \subset I$ e quindi, per il Teorema di Weierstrass, è limitata in $[a, b]$. Se ne deduce che le funzioni in $C^1(I)$ sono localmente lipschitziane, cioè lipschitziane in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $I$.

*d.* <u>*Approssimazione lineare.*</u> Un'ulteriore applicazione interessante del Teorema di Lagrange è la stima dell'errore che si commette approssimando una funzione con la sua tangente in un punto. Sia $f$ derivabile in $[a, b]$. Supponiamo conoscere il valore della funzione $f$ e della sua derivata prima $f'$ in un punto assegnato $x_0 \in [a, b]$. Si può pensare che il valore della funzione $f$ in un qualsiasi altro punto sia dato *approssimativamente* dal valore della funzione lineare che definisce la tangente al grafico di $f$ in $x_0$, cioè

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Questo corrisponde ad approssimare il grafico della funzione $f$ con quello della sua tangente. *E' possibile stimare l'errore che commettiamo facendo questa approssimazione?* Consideriamo un esempio concreto. Vogliamo calcolare, in modo approssimato, il valore di $\sin(1/10)$. Dato che $1/10$ è ragionevolmente vicino a $0$, possiamo pensare di approssimare la funzione $\sin x$ con la sua tangente in $x = 0$, cioè $\sin(x) \approx x$. Calcolando in $x = 0,1$ otteniamo l'approssimazione richiesta

$$\sin(0,1) \approx 0,1.$$

Il problema fondamentale è: quant'è grande l'errore commesso? In altri termini, è possibile stimare $|\sin(0,1) - 0,1|$?

Torniamo al caso generale. Supponiamo di lavorare con una funzione $f$ che sia *derivabile due volte* nell'intervallo $(a, b)$ e supponiamo che la derivata seconda $f''$ sia limitata, cioè esista $M > 0$ tale che $|f''(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$. Dato $x_0 \in [a, b]$, vogliamo stimare *il valore assoluto* della quantità

$$R(x; x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Applicando il Teorema di Lagrange otteniamo l'espressione

$$R(x; x_0) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \big(f'(\xi) - f'(x_0)\big)(x - x_0),$$

dove $\xi$ è compreso tra $x$ e $x_0$. Applicando il Teorema di Lagrange a $f'(\xi) - f'(x_0)$

$$R(x; x_0) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

dove $\eta$ è tra $\xi$ e $x_0$. Quindi il valore assoluto dell'errore $R(x; x_0)$ è stimato da

$$|R(x; x_0)| = |f''(\eta)||\xi - x_0||x - x_0| \leq M|x - x_0|^2, \tag{22}$$

dove si è usata la limitatezza della derivata seconda $f''$ e il fatto che $|\xi - x_0| \leq |x - x_0|$. Nel caso-modello di $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ e $x = 1/10$, si ha $M = 1$, pertanto

$$\left|R\left(10^{-1}; 0\right)\right| \leq \frac{1}{100},$$

dove si è usato che $|f''(x)| = |-\sin x| \leq 1$ e $|x - x_0| = 1/10$. Quindi

$$0.09 < \sin(0.1) < 0.11$$

*e.* *Derivabilità tramite il limite della derivata.* In alcune situazioni, capita di lavorare con funzioni definite tramite formule diverse in diversi intervalli. Consideriamo come caso modello una funzione della forma

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < x_0, \\ \ell & x = x_0, \\ f_2(x) & x > x_0, \end{cases}$$

dove $\ell \in \mathbb{R}$, e $f_1, f_2$ sono funzioni note. La domanda naturale è se la funzione $f$ sia derivabile nel punto $x_0$ oppure no. Come abbiamo già visto, la derivabilità implica la continuità, quindi, prima di tutto, deve essere verificata la condizione

$$\lim_{x \to x_0^-} f_1(x) = \ell = \lim_{x \to x_0^+} f_2(x).$$

Se questa condizione non è verificata, la funzione non è continua in $x_0$ e quindi, a maggior ragione, non è neanche derivabile in $x_0$. Nel caso in cui la funzione sia continua in $x_0$, per stabilirne la derivabilità occorre calcolare il limite del rapporto incrementale in $x_0$. Dato che la funzione $f$ è definita da espressioni diverse a seconda che ci si trovi a destra o a sinistra di $x_0$, è sensato calcolare il limite del rapporto incrementale da destra e da sinistra.[3] Per definizione, *la funzione $f$ è derivabile in $x_0$ se e solo se questi limiti esistono e coincidono*, ossia se e solo se

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f_1(x) - \ell}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f_2(x) - \ell}{x - x_0}.$$

La derivata in $x_0$ è il valore comune di questi due limiti.

In molte situazioni le $f_1$ e $f_2$ sono funzioni derivabili in tutto il loro insieme di definizione ed è possibile calcolare esplicitamente la funzione derivata. Invece di calcolare il limite del rapporto incrementale, può essere più semplice calcolare le derivate $f_1'$ e $f_2'$ nei rispettivi domini e calcolare il limite di queste funzioni derivate. Quale informazione dà questa procedura?

PROPOSIZIONE 4.6. *Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, sia $f$ continua in $x_0$ e derivabile in $(x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$ e supponiamo che esistano finiti il limite destro e sinistro $\lim\limits_{x \to x_0^\pm} f'(x) = \ell^\pm$. Allora $f$ è derivabile in $x_0$ se e solo se $\ell^+ = \ell^-$.*

---

[3] Se esiste il limite destro del rapporto incrementale di una funzione $f$ in $x_0$, si dice che *$f$ è derivabile da destra in $x_0$*. Analogamente per il limite sinistro. Per indicare il limite destro/sinistro del rapporto incrementale (qualora esistano), cioè per indicare la *derivata destra/sinistra* si usa il simbolo $D_\pm f(x_0)$, o varianti.

Dimostrazione. Grazie al Teorema di Lagrange,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} f'(\xi_-) & \text{se } x < x_0, \qquad (x < \xi_- < x_0) \\ \\ f'(\xi_+) & \text{se } x > x_0, \qquad (x_0 < \xi_+ < x) \end{cases}$$

dove $\xi_\pm$ sono punti opportuni tra $x$ e $x_0$. Passando al limite per $x \to x_0$ da sinistra, dato che il limite sinistro della derivata $f'$ esiste ed è uguale ad $\ell^-$,

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} f'(\xi_-) = \ell^-.$$

Analogamente per il limite destro. Quindi, nelle ipotesi della Proposizione 4.6, i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale esistono e sono uguali, rispettivamente, a $\ell^+$ e $\ell^-$. A questo punto, la conclusione è evidente. □

Ad esempio, studiamo la derivabilità in 0 della funzione $f(x) = x|x|$. Dato che

$$x|x| = \begin{cases} -x^2 & x < 0, \\ x^2 & x \geq 0, \end{cases}$$

la funzione è certamente derivabile per $x \neq 0$ e

$$D\left(x|x|\right) = \begin{cases} -2x & x < 0, \\ 2x & x > 0. \end{cases}$$

Dato che $\lim\limits_{x\to 0^-} -2x = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0$, la funzione è derivabile in 0.

Consideriamo, invece, la funzione $e^{-|x|}$. In questo caso

$$e^{-|x|} = \begin{cases} e^x & x < 0, \\ e^{-x} & x \geq 0. \end{cases}$$

La funzione è derivabile per $x \neq 0$ e

$$D\left(e^{-|x|}\right) = \begin{cases} e^x & x < 0, \\ -e^{-x} & x > 0. \end{cases}$$

Dato che $\lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1 \neq -1 = \lim\limits_{x\to 0^+} -e^{-x}$, la funzione non è derivabile in 0.

La verifica della derivabilità in $x_0$ tramite il calcolo del limite della derivata a destra e a sinistra di $x_0$ è lecita *solo quando la derivata ammetta limiti destro e sinistro in* $x_0$. Quando questi limiti non esistano, il criterio non è più valido. La funzione può essere derivabile o può non esserlo. Ad esempio, consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Per $x \neq 0$, la derivata prima $f'$ di questa funzione è

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Per $x \to 0$, il primo dei due termini è infinitesimo, mentre il secondo non ammette limite, quindi non esiste $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x)$. La Proposizione 4.6 non è applicabile. Per studiare la derivabilità in zero, calcoliamo direttamente il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin(1/h) - 0}{h - 0} = \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

Quindi la funzione è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$.

## Tabella delle derivate

| funzione $f$ | derivata prima $f'$ | funzione $f$ | derivata prima $f'$ |
|---|---|---|---|
| costante | $0$ | $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $\cot x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ | $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x$ | $\cosh x$ | $\sinh x$ |

CAPITOLO 1

# Analisi locale e analisi globale

Una proprietà di una funzione $f$ è *locale* se dipende dal comportamento della funzione nell'intorno di un punto $x$. Continuità e derivabilità in $x$ sono proprietà locali. Una proprietà di una funzione $f$ è *globale* se vale in tutto l'insieme di definizione della $f$. Ad esempio le funzioni $e^x, \arctan x, x^3, \ldots$ sono funzioni globalmente monotòne crescenti e pertanto (globalmente) invertibili. Nella prima parte di questo capitolo approfondiamo l'uso della derivazione per determinare proprietà locali di funzioni: massimi/minimi relativi, punti di singolarità,... Torneremo più avanti sulle proprietà globali, concentrandoci sul problema di determinare massimi e minimi (assoluti) di una funzione assegnata.

## 1. Punti stazionari

Abbiamo già definito massimo e minimo di una funzione: data $f : D \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in D$ è punto di massimo di $f$ se $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in D$. Il valore $f(x_0) = \max_{x \in D} f(x)$ è il massimo della funzione $f$ in $D$. Analogo per i minimi.

L'esistenza di massimo e/o minimo è una proprietà globale della funzione. E' utile introdurre un analogo locale del concetto di massimo e di minimo.

Definizione 1.1. Massimo e minimo locale. *Il punto $x_0 \in D$ è un* punto di massimo locale *(o* relativo*) e il valore $f(x_0)$ è un* massimo locale *(o* relativo*) di $f$ se esiste un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ del punto $x_0$ tale che $f(x_0)$ è il massimo di $f$ in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:*

$$\exists\, \delta > 0 \quad \textit{tale che} \quad f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

*Analogamente per il* minimo locale*.*

*Un punto $x_0$ che sia o di massimo o minimo locale è un* punto di estremo locale*.*

Per distinguere in modo più chiaro il massimo e il minimo dagli analoghi concetti locali, si parla di massimo globale (o assoluto) e di minimo globale (o assoluto). Dalla definizione segue immediatamente che se $x_0$ è punto di massimo globale, allora è anche punto di massimo locale. Il viceversa invece non è vero, come nel caso del grafico rappresentato in Figura 1. Per un esempio analitico, si può considerare la funzione

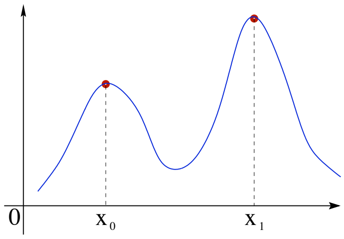



FIGURA 1. Il punto $x_0$ è di massimo locale, ma non globale; il punto $x_1$ è di massimo globale.

$f(x) = x^4 - x^2$. Dato che $f(0) = 0$ e $f(x) \leq 0$ per $x \in (-1, 1)$, il punto $x = 0$ è un punto di massimo locale, ma non è di massimo globale dato che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

DEFINIZIONE 1.2. *Sia $D \subset \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è* interno a *$D$ se esiste un intorno di $x_0$ interamente contenuto in $D$, cioè se esiste $\delta > 0$ per cui $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$.*

Se una funzione $f$ ha un massimo o un minimo locale in corrispondenza di un punto $x_0$ interno all'insieme di definizione e in cui la funzione è derivabile, necessariamente

$$f'(x_0) = 0.$$

Basta infatti pensare alla necessaria posizione orizzontale della retta tangente (Fig.2(a)). Per una dimostrazione analitica, sia $x_0$ un punto di massimo locale interno e supponiamo $f$ derivabile in $x_0$. Dato che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \forall\, x_0 < x < x_0 + \delta, \\ \geq 0 & \forall\, x_0 - \delta < x < x_0, \end{cases}$$

Passando al limite per $x \to x_0$ si deduce $f'(x_0) = 0$.

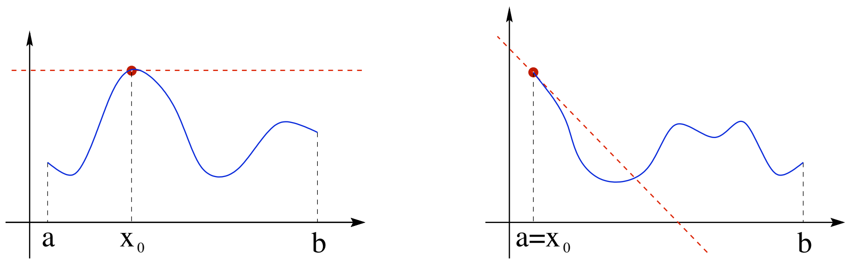



FIGURA 2. Se il punto di massimo locale è interno, la tangente è orizzontale. Se, invece, si trova sul bordo... non è detto!

Nel caso in cui il punto $x_0$ non sia interno al dominio, non è detto che la retta tangente sia orizzontale (Fig.2(b)). Conclusioni analoghe per i punti di minimo.

Pertanto, risolvere l'equazione $f'(x) = 0$ permette di determinare i possibili candidati a punti di minimo o massimo locale *interno* in cui $f$ è *derivabile*. È comunque possibile che un estremo locale cada in un punto in cui la funzione non è derivabile; ad esempio $f(x) = |x|$ ha un minimo (globale) in $x = 0$ dove non ha retta tangente.

DEFINIZIONE 1.3. Punto stazionario. *Sia* $f : D \to \mathbb{R}$. *Un punto* $x_0$*, interno a* $D$*, tale che* $f'(x_0) = 0$ *si dice* punto stazionario[1] *(o* punto critico*) della funzione* $f$.

Equivalentemente, si può affermare che i punti critici di $f$ sono i punti $x$ per cui la tangente al grafico di $f$ in $(x, f(x))$ è orizzontale.

ESERCIZIO 1.4. *Determinare i punti critici di* $f(x) = x^7 + 14x^4 + 1$.

**Classificazione dei punti stazionari.** Se $x_0$ è un punto di massimo o di minimo locale interno e $f$ è derivabile in $x_0$, necessariamente $x_0$ è un punto critico, cioè $f'(x_0) = 0$. *Il viceversa non è vero*: esistono punti $x_0$ tali che $f'(x_0) = 0$, ma che non sono né punti di massimo locale, né punti di minimo locale. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente (quindi non ha né punti di massimo né punti di minimo in $\mathbb{R}$), ma $f'(x) = 3x^2$ si azzera nel punto $x = 0$.

Conoscendo il segno della derivata prima alla destra e alla sinistra del punto in questione, grazie al legame tra monotonia e segno di $f'$, si può individuare quando un punto stazionario sia di massimo o di minimo. Supponiamo $f$ derivabile in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ con $\delta > 0$, allora

$$f'(x) \begin{cases} \geq 0 & x_0 - \delta < x < x_0, \\ \\ \leq 0 & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 \quad \text{punto di massimo locale.}$$

Analogamente, per il minimo, vale

$$f'(x) \begin{cases} \leq 0 & x_0 - \delta < x < x_0, \\ \\ \geq 0 & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 \quad \text{punto di minimo locale.}$$

ESERCIZIO 1.5. *Determinare i punti critici della funzione* $f(x) = x^2(3x^2 - 8x + 6)$ *e dire quali di essi sono punti di massimo o di minimo.*

**Soluzione.** La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = 2x(3x^2 - 8x + 6) + x^2(6x - 8) = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x - 1)^2.$$

[1]Il termine *stazionario* è ereditato dalla cinematica. Se $x$ è la posizione di un punto su cui agisce una forza conservativa con potenziale dato dalla funzione $f = f(x)$, allora l'accelerazione del punto è proporzionale a $f'$. Se il punto viene collocato a riposo nella posizione $x_0$ e $f'(x_0) = 0$, allora, dato che l'accelerazione (cioè la variazione di velocità) è nulla, il punto *stazionerà* nella posizione $x_0$ per ogni tempo successivo

I punti critici sono $x = 0$ e $x = 1$; il punto $x = 0$ è punto di minimo, mentre il punto $x = 1$ non è né di massimo né di minimo. Il grafico qualitativo della funzione $f$ è in Figura 3.

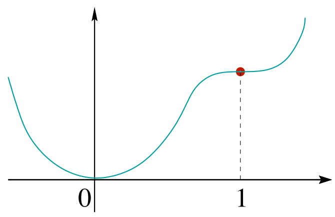



FIGURA 3. Il grafico di $f(x) = x^2(3x^2 - 8x + 6)$ dell'Esercizio 1.5.

Se $x_0$ è un punto critico di $f$, per riconoscere se $f'$ cambia segno traversando $x_0$, basta considerare il segno di $f''$, qualora esista:

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \quad \text{punto di minimo locale;}$$

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \quad \text{punto di massimo locale.}$$

Si noti che si tratta solo di condizioni sufficienti: ad esempio, la funzione $f(x) = x^4$ ha un punto di minimo in 0, ma $f''(0) = 0$.

ESEMPIO 1.6. *Una raffinatezza per buongustai.* In genere, si immagina il grafico di una funzione vicino al punto di minimo $x_0$ con $f'(x) \leq 0$ per $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f'(x) \geq 0$ per $x_0 < x < x_0 + \delta$. Esistono però anche situazioni in cui una funzione alla sinistra del punto di minimo non è decrescente e alla destra non è crescente. Scetticismo? Ecco un esempio:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 - \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

La funzione $f$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e

$$f(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{e} \qquad f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Il punto $x = 0$ è punto di minimo globale, e quindi di minimo locale. Necessariamente $f'(0) = 0$ (come si può ottenere anche tramite il calcolo del limite del rapporto incrementale). La derivata prima di $f$ nei punti $x \neq 0$ è

$$f'(x) = 2x\left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

quindi, per $x \approx 0$, si ha $f'(x) \approx \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, che assume valori sia positivi che negativi.

## 2. Analisi al microscopio

Nello studio dell'andamento qualitativo del grafico di una funzione, è interessante approfondire quello che succede in prossimità di certi punti significativi. Qui consideriamo come punti "significativi" quelli che corrispondono ad una delle seguenti situazioni:

(a) punti $x_0$ che non sono nell'insieme di definizione di $f$, ma che sono sul "bordo" (ad esempio, se $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, il punto $x_0 = a$, oppure se $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, $x_0 = c$);

(b) punti $x_0$ dell'insieme di definizione in cui $f$ non è continua;

(c) punti $x_0$ in cui $f$ è continua, ma non derivabile.

Nei casi (b) e (c) si parla talvolta di *punti di singolarità*.

**Asintoti verticali.** Sia nel caso (a) che nel caso (b), si calcola il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Se il limite è $+\infty$ o $-\infty$, la funzione ha in $x = x_0$ un asintoto verticale. Lo stesso è vero

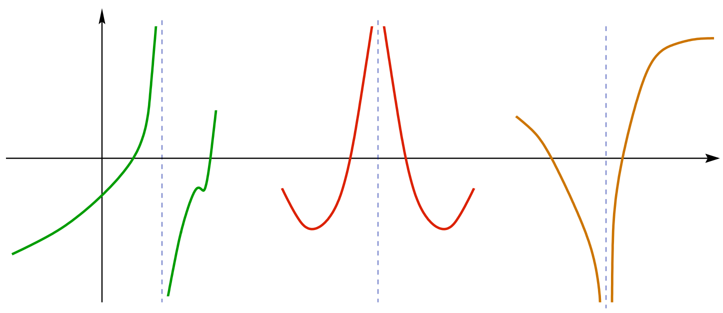


FIGURA 4. Alcuni esempi di asintoti verticali.

nel caso in cui sia il limite destro che il limite sinistro tendano a $+\infty$ o $-\infty$, ma con segni opposti. In generale, zeri del denominatore di una funzione razionale (che non siano anche zeri del numeratore), corrispondono a punti di asintoto verticale.

Ci sono situazioni più esotiche: il limite potrebbe non esistere oppure potrebbero esistere i limiti destro e sinistro, ma con valori diversi,... A voi individuare possibili esempi e corrispondenti grafici.

ESERCIZIO 2.1. *Studiare la funzione* $f(x) = \arctan(1/x)$ *vicino al punto* $x = 0$.

**Punti angolosi e cuspidi.** Consideriamo il caso (c), quindi supponiamo $x_0$ tale che la funzione $f$ sia continua in $x_0$, ma non derivabile. Se esistono finiti i limiti destro e sinistro della derivata prima

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f'(x) = \ell^\pm,$$

dato che $f$ non è derivabile in $x_0$, deve essere $\ell^+ \neq \ell^-$. Un punto di questo genere si chiama punto angoloso (o spigolo). Per disegnarlo correttamente è possibile tracciare le rette tangenti destra e sinistra, cioè le rette di equazione $y = f(x_0) + \ell^\pm(x - x_0)$.

Nel caso in cui i limiti destro e sinistro siano $\pm\infty$ si possono avere due situazioni differenti. Se entrambi sono $+\infty$ (o $-\infty$), cioè se

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f'(x) = +\infty \quad (-\infty),$$

il punto $x_0$ è un punto a tangente verticale. Se invece i limiti destro e sinistro sono $\pm\infty$, ma con segni opposti, il punto $x_0$ è una cuspide del grafico di $f$. Per un esempio di cuspide, si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$. In questo caso

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\infty.$$

Ovviamente sono possibili comportamenti analoghi a quelli descritti, ma misti: ad

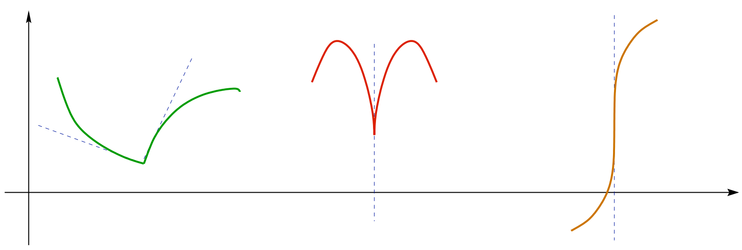


FIGURA 5. Da sinistra: un punto angoloso, una cuspide e un punto a tangente verticale.

esempio, una funzione può avere derivata prima che tende ad un valore dato da destra e che diverge da sinistra, o tutte le varianti che la mente è in grado di inventare.

## 3. Comportamento asintotico

Se la funzione $f$ è definita in insiemi illimitati, è interessante studiarne il comportamento per $x \to \pm\infty$. Per fissare le idee, consideriamo una funzione $f$ definita su una semiretta $[a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$. In questo caso si vuole stabilire cosa succeda per $x \to +\infty$, cioè determinare il *comportamento asintotico per* $x \to +\infty$. Considerazioni analoghe valgono per il caso di semirette del tipo $(-\infty, a]$, per $\mathbb{R}$, e, in generale, per domini illimitati.

La prima operazione sensata è il calcolo del limite per $x \to +\infty$. Se

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

si dice che la funzione $f$ tende asintoticamente ad $\ell$, oppure che $f$ ha un asintoto orizzontale (di equazione $y = \ell$) per $x \to +\infty$. Il grafico della funzione $f$ si avvicina alla retta di equazione $y = \ell$ per $x$ sempre più grandi. Per un disegno più preciso, si può studiare il segno della funzione $f(x) - \ell$, che indica se il grafico della funzione $f$ sia al di sopra o al di sotto dell'asintoto.

Esempio 3.1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} \qquad x \in [1, +\infty).$$

In questo caso,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2,$$

quindi la funzione ha l'asintoto orizzontale di equazione $y = 2$. Dato che

$$f(x) - \ell = \frac{2x^2}{x^2+1} - 2 = -\frac{2}{x^2+1} < 0,$$

quindi $f$ tende a $y = 2$ dal basso. A voi il gusto di tracciare il grafico di questa funzione.

Invece, la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2+1} \qquad x \in [1, +\infty),$$

non ha limite per $x \to +\infty$ e quindi non ha asintoto orizzontale.

Se il limite della funzione $f$ esiste, ma è $+\infty$ o $-\infty$, evidentemente non c'è asintoto orizzontale. Che cosa si può dire in questo caso? È possibile che la funzione tenda ad un asintoto obliquo, ossia è possibile che esistano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - (ax+b)\big] = 0. \tag{1}$$

Questa proprietà indica che il grafico della funzione $f$ si avvicina al grafico della retta $y = ax+b$ per $x \to +\infty$. Il problema è: *come determinare (qualora esistano) le costanti $a$ e $b$?* Supponiamo che valga (1), allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - ax}{x} + a = a.$$

Una volta noto $a$, è possibile determinare $b$ (qualora esista) calcolando

$$\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - ax\big] = b.$$

Ecco, quindi, le istruzioni per determinare la presenza di un asintoto obliquo:

**i.** calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: se il limite esiste finito, c'è un asintoto orizzontale (fine dello studio a $+\infty$), se il limite non esiste, non c'è né asintoto obliquo, né asintoto orizzontale (fine dello studio a $+\infty$), se il limite è $+\infty$ o $-\infty$ si va al punto (ii);

**ii.** calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$: se il limite esiste finito, il suo valore è $a$ e si va al punto (iii), se il limite non esiste o se vale $\pm\infty$, non c'è asintoto obliquo (fine dello studio a $+\infty$);

**iii.** calcolare $\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - ax\big]$: se il limite esiste finito, il suo valore è $b$, la funzione ha asintoto obliquo di equazione $y = ax + b$, se il limite non esiste o se vale $\pm\infty$, non c'è asintoto obliquo (fine dello sudio a $+\infty$).

Esempio 3.2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{3x+1} \qquad x \in [0, +\infty).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{3x+1} = +\infty, \\
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{3x(x+1)} = \frac{1}{3} =: a, \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{3} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{3x+1} - \frac{x}{3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3-x}{3(3x+1)} = -\frac{1}{9} =: b.
\end{aligned}$$

Quindi la funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$. Anche in questo caso, per disegnare un grafico più preciso, si può studiare il segno della funzione

$$f(x) - (ax+b) = \frac{x^2-1}{3x+1} - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) = -\frac{8}{9(3x+1)} < 0 \qquad \forall\, x > -\frac{1}{3}.$$

La differenza è negativa, quindi la funzione tende all'asintoto dal basso.

Dopo il punto (i), se esiste finito $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$, allora $a$ è uguale al valore di questo limite e si può proseguire direttamente dal punto (iii). Se invece il limite di $f'$ non esiste, bisogna necessariamente seguire il procedimento esposto sopra. Ad esempio, per $f(x) = x + \dfrac{\sin(x^2)}{x}$, si ha

$$f'(x) = 1 + 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2},$$

che non ammette limite per $x \to +\infty$, ma è facile vedere che la funzione ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ di equazione $y = x$.

ESERCIZIO 3.3. *Sia* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *con* $p$ *polinomio di grado* $k$ *e* $q$ *polinomio di grado* $h$*. Dimostrare che:*
*(i)* $f$ *ha un asintoto orizzontale se e solo se* $k \leq h$*;*
*(ii)* $f$ *ha un asintoto obliquo, non orizzontale, se e solo se* $k = h + 1$*.*

*Altri profili asintotici.* Il caso dell'asintoto obliquo è solo una situazione molto particolare: può capitare che una funzione tenda asintoticamente ad una funzione, che non sia un polinomio di primo grado. Consideriamo, ad esempio,

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 2}.$$

Grazie all'algoritmo di divisione di polinomi, possiamo riscrivere questa funzione come

$$f(x) = x^2 + 2x + 4 + \frac{9}{x - 2}.$$

Da questa espressione è immediato vedere che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big[ f(x) - (x^2 + 2x + 4) \big] = 0,$$

e quindi il grafico di $f$ tende asintoticamente alla parabola $y = x^2 + 2x + 4$.

Riconsideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 1} \qquad x \in [1, +\infty).$$

Dato che $\frac{2x^2}{x^2+1} \to 2$ per $x \to +\infty$, è sensato immaginare che questa funzione "assomigli" alla funzione $f(x) = 2\sin x$ per $x \to +\infty$. Calcoliamo la differenza tra $f(x)$ e $2 \sin x$ e vediamo se è infinitesima:

$$\left| \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 1} - 2 \sin x \right| = \frac{2\,|\sin x|}{1 + x^2} \leq \frac{2}{1 + x^2} \to 0 \qquad \text{per} \quad x \to +\infty.$$

Quindi

$$f(x) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 1} = 2 \sin x + h(x) \qquad \text{con} \qquad \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0.$$

In generale se siamo in grado di riscrivere la funzione $f$ nella forma

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

con $g$ funzione di cui si conosce il grafico e $h \to 0$ per $x \to \infty$, il grafico della funzione $f$ tende verso quello della funzione $g$. Non esiste alcuna strategia generale per determinare una decomposizione di questo genere.

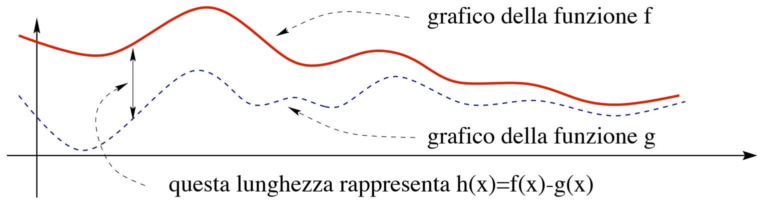



FIGURA 6. Il grafico di $f$ con $f(x) = g(x) + h(x)$ e $h$ infinitesima per $x \to +\infty$.

## 4. Funzioni convesse

Come già detto, ripetuto ed usato ampiamente, il segno della derivata prima dà informazioni relative alla monotonia della funzione $f$. Quale ruolo gioca, invece, il segno della derivata seconda? Partiamo da una definizione.

DEFINIZIONE 4.1. *Una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è* convessa in $[a, b]$ *se*

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall\, x, y \in [a, b] \quad \forall\, t \in (0, 1). \tag{2}$$

*Una funzione per cui valga la disuguaglianza opposta si dice* concava.

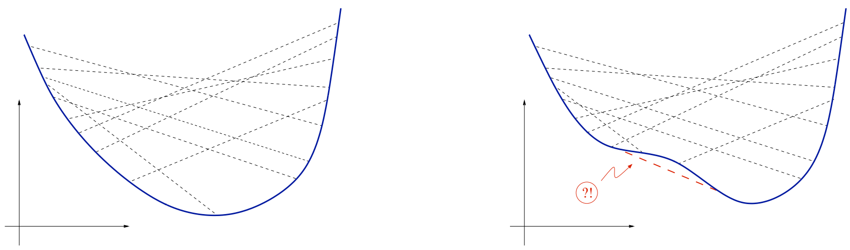



FIGURA 7. Una funzione convessa ed una non convessa.

Dalla definizione segue che se $f$ è concava, allora $-f$ è convessa, e viceversa. Quindi studiare la convessità è sufficiente per comprendere anche la concavità.

OSSERVAZIONE 4.2. Esiste una maniera diversa di introdurre il concetto di convessità. Un sottoinsieme $E$ del piano è convesso se scelta una qualsiasi coppia di punti $P$ e $Q$ appartenenti ad $E$, il segmento che li congiunge è interamente contenuto in $E$. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è convessa in $[a, b]$ se l'insieme $E := \{(x, y) : y \ge f(x)\}$, composto dai punti che si trovano sopra il suo grafico (detto epigrafico) è un insieme convesso. Le due definizioni sono comunque equivalenti (sapete dimostrarlo?).

Cerchiamo di capire il significato geometrico della condizione (2). Fissiamo $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$ con $\bar{x} < \bar{y}$. Per $t \in (0, 1)$, definiamo $z(t) := t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in (\bar{x}, \bar{y})$. Scriviamo la retta che passa per $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ e $(\bar{y}, f(\bar{y}))$:

$$\Phi(x) = f(\bar{x}) + \frac{f(\bar{y}) - f(\bar{x})}{\bar{y} - \bar{x}}(x - \bar{x}),$$

e calcoliamo questa funzione in $z(t)$. Dato che

$$\begin{aligned}\Phi(z(t)) &= f(\bar{x}) + \frac{f(\bar{y}) - f(\bar{x})}{\bar{y} - \bar{x}}(t\bar{x} + (1-t)\bar{y} - \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + \frac{f(\bar{y}) - f(\bar{x})}{\bar{y} - \bar{x}}(1-t)(\bar{y} - \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + (f(\bar{y}) - f(\bar{x}))(1-t) = tf(\bar{x}) + (1-t)f(\bar{y}),\end{aligned}$$

la condizione (2), si può riscrivere come

$$f(z(t)) \leq \Phi(z(t)) \qquad \forall\, x, y \in [a, b] \quad \forall\, t \in (0, 1).$$

Questa scrittura ha un interpretazione in termini di grafico immediata: *una funzione $f$ è convessa, se per ogni scelta di $x$ e $y$, il grafico di $f$ giace al di sotto della retta secante che congiunge i punti $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ nell'intervallo di estremi $x$ e $y$.*

Esercizio 4.3. *Se $f$ e $g$ sono due funzioni convesse in $[a, b]$, allora una tra $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ è convessa. Sapete dire quale?*

Proposizione 4.4. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è convessa in $[a, b]$ se e solo se*

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \tag{3}$$

*per ogni $x, y, z$ tali che $a \leq x < z < y \leq b$.*

La dimostrazione della formula (3) si ottiene riscrivendo in termini di rapporti incrementali la formula (2). I dettagli sono lasciati alla buona volontà del lettore.

La proprietà (3) può essere interpretata graficamente in termini di monotonía delle pendenza delle secanti: fissato $y$, la funzione

$$\phi(x) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

è crescente in $x$. Quando la funzione è derivabile, questa proprietà diviene una richiesta di monotonia della derivata prima $f'$. Nel caso in cui la funzione $f$ sia derivabile due volte, la monotonía della funzione $f'$ può essere tradotta in termini di segno della derivata seconda $f''$.

Teorema 4.5. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Allora*

*(i) se $f$ è derivabile una volta, la funzione $f$ è convessa in $[a, b]$ se e solo se $f'$ è non decrescente in $[a, b]$;*

*(ii) se $f$ è derivabile due volte, la funzione $f$ è convessa in $[a, b]$ se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.*

Per le funzioni concave, vale un risultato analogo sostituendo a "$f'$ non decrescente" la frase "$f'$ non crescente" e a "$f'' \geq 0$" la frase "$f'' \leq 0$".

Dal Teorema 4.5(i) discende un'altra interpretazione geometrica della convessità: *se la funzione $f$ è derivabile e convessa, il suo grafico è interamente al di sopra di ogni retta tangente ad esso.* Infatti, scriviamo la differenza tra $f$ e la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$

$$R(x; x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

con l'obiettivo di dimostrare che se $f$ è convessa, la funzione $R(x; x_0)$ è positiva. Applichiamo il Teorema di Lagrange e riscriviamo $R(x; x_0)$ come

$$R(x; x_0) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \big(f'(\xi) - f'(x_0)\big)(x - x_0).$$

Se $x > x_0$ allora $\xi > x_0$ e quindi, essendo $f'$ crescente, $f'(\xi) > f'(x_0)$. Ne segue che il termine a destra è positivo perché prodotto di termini positivi. Se $x < x_0$ allora $\xi < x_0$ e, sempre per la monotonía di $f'$, $f'(\xi) < f'(x_0)$. Questa volta i due termini sono entrambi negativi, ma comunque il loro prodotto è positivo.

Dimostrazione del Teorema 4.5. (i) Supponiamo che $f$ sia convessa, allora vale la (3). Quindi, passando al limite per $z \to x^+$ si ottiene

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Analogamente, passando al limite nella (3) per $z \to y^-$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y).$$

Ne segue che $f'(x) \leq f'(y)$ per ogni $x \leq y$.

Viceversa, supponiamo che la funzione $f'$ sia non decrescente e dimostriamo la (2) studiando la funzione differenza

$$F(t) := tf(x) + (1 - t)f(y) - f(tx + (1 - t)y), \qquad t \in [0, 1],$$

con $x, y$ fissati. Consideriamo il caso $y < x$ (l'altro è analogo). Calcolando la derivata di $F$ e applicando il Teorema di Lagrange, si deduce che esiste $\xi \in (y, x)$ tale che

$$F'(t) = f(x) - f(y) - f'(tx + (1 - t)y)(x - y) = \Big[f'(\xi) - f'(tx + (1 - t)y)\Big](x - y).$$

Dato che, per $t \in [0, 1]$, il punto $tx + (1 - t)y$ descrive l'intervallo $[y, x]$, esiste $t^*$ tale che $t^*x + (1 - t^*)y = \xi$. Inoltre, dato che $f'$ è non decrescente, $f'(tx + (1 - t)y) \leq f'(\xi)$

per $t \in [0, t^*]$ e $f'(tx + (1-t)y) \geq f'(\xi)$ per $t \in [t^*, 1]$. Perciò:

$$F'(t) \geq 0 \quad \text{per} \quad t \in [0, t^*] \qquad \text{e} \qquad F'(t) \leq 0 \quad \text{per} \quad t \in [t^*, 1].$$

Perciò il minimo globale della funzione $F$ è assunto in uno degli estremi $t = 0$ o $t = 1$ e, dato che $F(0) = F(1) = 0$, $F(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0, 1]$, cioè la formula (2). □

Esercizio 4.6. *Sia $f$ una funzione convessa e derivabile in $(a, b)$. Se esistono $x_0, x_1 \in (a, b)$ con $x_0 \neq x_1$ tali che $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$, che cosa si può dedurre sulla funzione $f$?*

Definizione 4.7. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile due volte. Se $x_0$ è tale che $f''$ cambia segno in $x_0$ (cioè è negativa da una parte e positiva dall'altra), allora $x_0$ si chiama* punto di flesso *della funzione $f$.*

Grazie al Teorema 4.5, se $f''$ ha segno opposto alla destra e alla sinistra di $x_0$, necessariamente $x_0$ è un punto di flesso.

Esempio 4.8. Consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$. La sua derivata seconda è $f''(x) = -\sin x$, quindi tutti punti della forma $x = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di flesso.

Per la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si ha

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},$$

e quindi i punti di flesso di $f$ sono $x = \pm 1/\sqrt{3}$. La funzione $f$ è convessa in $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ e in $(1/\sqrt{3}, +\infty)$ e concava in $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

La convessità è utile per determinare l'esistenza di minimi di una funzione. Infatti, vale la seguente implicazione

$$f \quad \text{convessa,} \quad f'(x_0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 \quad \text{punto di minimo globale.}$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio. Analogamente, per le funzioni concave ed i punti di massimo. Chiaramente se la convessità è solo locale (cioè in un intorno del punto $x_0$), $x_0$ è punto di minimo locale.

Esercizio 4.9. *Dimostrare la seguente implicazione*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \textit{convessa} \quad \Rightarrow \quad f \quad \textit{continua in} \quad (a, b).$$

## 5. A caccia di massimi e minimi assoluti

**Problema 1.** Abbiamo già considerato il problema di determinare il cilindro di volume $V = k =$ costante con superficie totale $S$ minima, con l'obiettivo (malcelato) di diventare ricchi grazie all'uso della matematica, applicando il risultato alla costruzione di scatole di fagioli, o, più in generale, di confezioni cilindriche con minima spesa di materiali. La speranza si era presto infranta quando ci siamo resi conto che per via elementare non riuscivamo a determinare il minimo della funzione $S$, cioè a risolvere il problema ($r$ =raggio della base del cilindro)

$$\text{determinare il minimo di } S(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{k}{\pi r}\right) \qquad r > 0.$$

Torniamo al problema con la conoscenza delle derivate e studiamo la monotonìa di $S$:

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi\left(2r - \frac{k}{\pi r^2}\right) = \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{k}{2\pi}\right).$$

Perciò $S'(r) \geq 0$ se e solo se $r \geq r^*$ dove $r^* = (k/2\pi)^{1/3}$. Quindi la funzione $S$

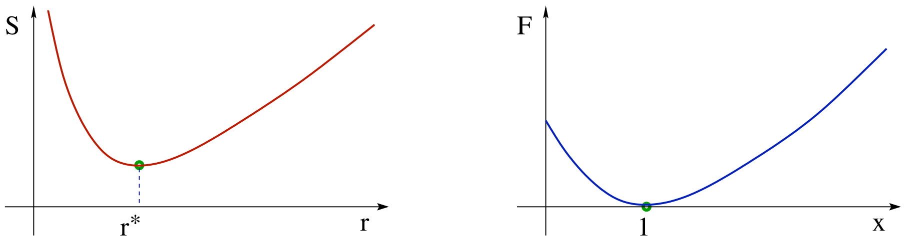



FIGURA 8. (a) Il grafico della funzione $S(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{k}{\pi r}\right)$; (b) il grafico della funzione $F(x) = x^p - 1 - p(x-1)$, $p > 1$.

è decrescente in $(0, r^*)$ ed è crescente in $(r^*, \infty)$. Ne segue che il punto di minimo richiesto esiste ed è proprio $r = r^*$ (Fig.8(a)). Problema risolto, corriamo in fabbrica!

**Problema 2.** Vogliamo dimostrare la disequazione

$$x^p - 1 \geq p(x-1) \qquad \forall p > 1, \quad \forall x \geq 0.$$

Fissiamo $p > 1$ e consideriamo la funzione

$$F(x) = x^p - 1 - p(x-1) \qquad x \geq 0.$$

Dato che $F'(x) = p(x^{p-1} - 1)$, $F'(x) < 0$ per $x \in (0,1)$ e $F'(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$. Quindi la funzione $F$ è decrescente in $[0,1)$ e crescente in $(1, +\infty)$ e $x = 1$ è un punto di minimo. Ne segue che $F(x) \geq F(1) = 0$, da cui la conclusione (Fig.8(b)).

**Problema 3.** Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ assegnati. Supponiamo di voler determinare $x \in \mathbb{R}$ tale che sia minima la quantità

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2. \tag{4}$$

Possiamo immaginare che i valori $a_i$ provengano da misurazioni di un fenomeno sotto osservazione e che si stia cercando un valore medio per questi numeri, che minimizzi l'errore commesso misurato dal valore in (4). Consideriamo la funzione $F(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - x)^2$ e calcoliamone la derivata:

$$F'(x) = -2\sum_{i=1}^{n}(a_i - x) = -2\left[\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} x\right] = 2n\left[x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right].$$

La funzione $F$ è decrescente a sinistra di $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ e crescente a destra. Il valore

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

è il punto di minimo (e coincide con la media aritmetica di $a_1, \dots, a_n$).

Esercizio 5.1. *Dati $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, determinare $x$ che minimizzi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a_i - x)^2$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ sono pesi (positivi) assegnati.*

I problemi che abbiamo appena presentato mostrano alcune tra le miriadi di situazioni in cui si pone il problema: data una funzione $f$, come determinarne massimo e minimo globali (qualora esistano)? Proviamo ad affrontare il problema in generale.

Supponiamo di lavorare con una funzione $f$ definita nell'intervallo $[a, b]$ e continua. Grazie al teorema di Weierstrass, l'ipotesi di continuità garantisce l'esistenza del massimo e del minimo assoluti. Abbiamo già visto che le soluzioni di $f'(x) = 0$ (cioè i punti critici di $f$) permettono di determinare i possibili candidati a punti di minimo o massimo locale *interno derivabile*. Chiaramente, è possibile che un estremo locale cada in un punto in cui la funzione non è derivabile. Quindi, la strategia per individuare il massimo ed il minimo di una funzione continua in $[a, b]$ è la seguente:

- ⋆ determinare l'insieme $\mathcal{S}$ dei punti stazionari in $(a, b)$;
- ⋆ determinare l'eventuale insieme $\mathcal{N}$ dei punti in cui $f$ non è derivabile;
- ⋆ calcolare la funzione in $\mathcal{S}$, in $\mathcal{N}$ e negli estremi dell'intervallo $a$ e $b$.
- ⋆ individuare il più grande e il più piccolo tra i valori calcolati.

Esercizio 5.2. *Determinare il massimo ed il minimo assoluti di*

$$f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x \qquad x \in [0, 2].$$

**Soluzione.** La funzione $f$ è derivabile dappertutto. Per determinare i punti singolari:

$$f'(x) = (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 7)e^x = (x^2 - 3x + 2)e^x = (x - 2)(x - 1)e^x.$$

Quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ o $x = 2$. L'insieme dei punti critici *interni* è $\mathcal{S} = \{1\}$. Dato che $f(0) = 7 < f(2) = e^2 < f(1) = 3e$, si ha

$$\min_{x\in[0,2]} f(x) = f(0) = 7, \qquad \max_{x\in[0,2]} f(x) = f(1) = 3e,$$

che è quanto richiesto dall'esercizio.

Spesso è utile conoscere il massimo del modulo di una funzione assegnata $f$, cioè risolvere il problema

$$\text{data } f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{continua,} \quad \text{calcolare } \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

In questo caso, si può procedere come detto sopra, o, alternativamente, determinare il massimo ed il minimo della funzione $f$ in $[a, b]$ e poi sfruttare la relazione (evidente?)

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max\Big\{\big|\max_{x\in[a,b]} f(x)\big|, \big|\min_{x\in[a,b]} f(x)\big|\Big\}.$$

ESERCIZIO 5.3. *Calcolare* $\max\{|x^2 - 1| : x \in [-1, 2]\}$.

Nel caso in cui si studi una funzione $f$ continua, ma definita su un dominio illimitato (ad esempio, $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$), le ipotesi del Teorema di Weierstrass non sono soddisfatte e quindi non è detto che esistano il massimo ed il minimo della funzione. Comunque ha senso domandarsi: *quanto valgono l'estremo superiore e l'estremo inferiore? Nel caso in cui siano finiti, si tratta di massimo o di minimo?* La strategia per risolvere questo problema è simile a quanto appena visto. Il punto che bisogna modificare è quello relativo al calcolo della funzione negli estremi dell'intervallo. In questo caso almeno uno degli estremi dell'intervallo sarà $+\infty$ o $-\infty$ e le espressioni $f(+\infty)$ e $f(-\infty)$, in generale, non hanno senso, ma vanno sostituite con $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. Vediamo la procedura negli esercizi che seguono.

ESERCIZIO 5.4. *Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione* $f(x) = e^{x^2}$ *in* $\mathbb{R}$ *e dire se si tratta di massimo e minimo.*

**Soluzione.** L'estremo superiore è presto detto: dato che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, è chiaro che $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f = +\infty$. Che possiamo dire sull'estremo inferiore? Visto che la funzione $f$ è continua su $\mathbb{R}$, esistono massimo e minimo di $f$ in $[-M, M]$ per ogni scelta di $M > 0$. Quindi

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min\left\{\min_{|x|\le M} f(x), \inf_{|x|>M} f(x)\right\}.$$

Inoltre, dato che $f(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$, per $M$ grande, $\min\limits_{|x|\le M} f(x) \le \inf\limits_{|x|>M} f(x)$. Non resta che cercare i punti di minimo relativo in $[-M, M]$. Derivando, $f'(x) = 2xe^{x^2}$ che si azzera se e solo se $x = 0$, quindi l'unico punto di minimo relativo è $x = 0$ che, per quanto detto, è anche minimo assoluto: $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} e^{x^2} = e^0 = 1$.

Esercizio 5.5. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua tale che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

*Dimostrare che la funzione* $f$ *ammette minimo assoluto su* $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.6. *Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione* $f(x) = e^{-x^2}$ *in* $\mathbb{R}$ *e dire se si tratta di massimo e minimo.*

**Soluzione.** La funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e la derivata vale $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. Quindi c'è un unico punto critico $x = 0$ in cui la funzione vale $f(0) = 1$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Confrontando i valori deduciamo che

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} e^{-x^2} = 0 \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-x^2} = f(0) = 1.$$

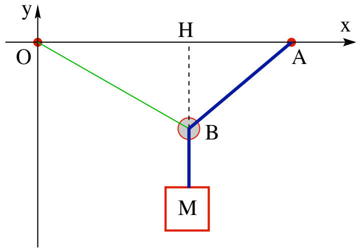
Dato che l'estremo superiore fa parte dell'insieme immagine, l'estremo superiore è massimo. Invece l'estremo inferiore non è minimo, perchè la funzione $f$ è strettamente positiva.

Analogamente nel caso di funzioni continue definite in insiemi non chiusi, cioè $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ oppure $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, o varianti, non si applica il Teorema di Weierstrass. Anche in questi casi, per determinare l'estremo superiore/inferiore bisogna considerare i limiti agli estremi.

Concludiamo la Sezione, analizzando altri due problemi di massimo e minimo.

Un problema di statica: la puleggia di De L'Hôpital. Consideriamo gli assi cartesiani $(x, y)$ posti in modo che l'asse $y$ sia in verticale rispetto al suolo e che la forza di gravità sia direzionata nel verso delle $y$ negative. Indichiamo con $O = (0, 0)$ e con $A = (a, 0)$ dove $a > 0$ è una lunghezza fissata. Nel punto $O$, fissiamo una corda di lunghezza $b$ e all'estremità $B$ di questa corda fissiamo una puleggia. Lasciamo pendere per fatti suoi la puleggia e fissiamo una seconda corda di lunghezza $\ell$ al punto $A$. Dopo aver fatto passare la seconda corda attraverso la puleggia (quindi facendola passare per il punto $B$) fissiamo un peso $M$ all'altra estremità. La configurazione finale è disegnata in Figura 9. Il problema è: in quale punto $(x, y)$ si posizionerà il peso $M$?

Qui stiamo supponendo che l'unica forza esterna che agisce sul sistema è la forza di gravità. Se, inoltre, supponiamo che il peso delle corde e della puleggia sia trascurabile rispetto al peso di $M$, e che non sia presente nessun tipo di attrito, il peso $M$ si collocherà nella posizione più bassa possibile, cioè minimizzerà il valore $y$. Quest'affermazione discende dal principio seguente: *la posizione d'equilibrio (stabile) del sistema minimizza l'energia potenziale di* $M$. Dato che l'energia potenziale di $M$ è della forma $Ay + B$ con $A > 0$, minimizzare l'energia potenziale equivale a minimizzare l'altezza $y$.



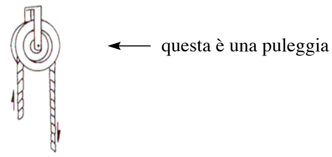




FIGURA 9. La puleggia di De L'Hôpital.

Riscriviamo per chiarezza i dati del problema:

$$\overline{OA} = a, \qquad \overline{OB} = b, \qquad \overline{AB} + \overline{BM} = \ell.$$

L'incognita è la posizione di $M = (x, y)$. Supponiamo inoltre $0 < b < a < \ell$. La soluzione del problema può essere divisa in due passi:

**passo 1.** assegnata la coordinata $x$ di $M$, determinare la coordinata $y = f(x)$;

**passo 2.** calcolare (se esiste) il minimo della funzione $f$.

Da brave persone ordinate, partiamo dal primo passo. Indichiamo con $H$ la proiezione ortogonale di $M$ sull'asse $x$, cioè $H = (x, 0)$. Allora

$$y = -\left(\overline{HB} + \overline{BM}\right) = -\left(\overline{HB} + \ell - \overline{AB}\right) = \overline{AB} - \overline{HB} - \ell.$$

Si tratta ora di scrivere le lunghezze $\overline{AB}$ e $\overline{HB}$ in funzione di $x$. Basta usare il Teorema di Pitagora per ottenere:

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{b^2 - x^2}, \qquad \overline{AB} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{HA}^2} = \sqrt{b^2 - x^2 + (a - x)^2}$$

Quindi la funzione da studiare è

$$y = f(x) = \sqrt{b^2 - x^2 + (a - x)^2} - \sqrt{b^2 - x^2} - \ell \qquad x \in [0, b].$$

L'intervallo di variazione di $x$ si deduce direttamente dal problema considerato.

Secondo passo: qual è la scelta di $x$ che minimizza $y$? Dato che la funzione è continua in $[0, b]$ e l'intervallo è chiuso e limitato, il Teorema di Weierstrass ci assicura che il problema ha soluzione, ma non ci dà nessuna informazione su quale sia il punto di minimo. Implementiamo, quindi, la strategia proposta poche pagine fa.

Prima di tutto, notiamo che la funzione $f$ non è derivabile nei punti in cui si azzera l'argomento di una delle due radici. Dato che $b < a$, il termine $b^2 - x^2 + (a - x)^2$ è sempre non nullo. La seconda radice $\sqrt{b^2 - x^2}$ si azzera per $x = \pm b$. Di questi due punti, $-b$ va scartato perché è fuori da $[0, b]$ e $b$ è uno degli estremi dell'intervallo.

Determiniamo l'insieme $\mathcal{S}$ dei punti stazionari di $f$ in $(0, b)$. Dato che

$$f'(x) = -\frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2 + (a-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

i punti stazionari $x \in (0, b)$ verificano

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2 + (a-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}},$$

e, passando ai quadrati,

$$\frac{a^2}{b^2 + a^2 - 2ax} = \frac{x^2}{b^2 - x^2}.$$

Ora ci vogliono un po' di conti: l'equazione precedente è equivalente a

$$2ax^3 - 2a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2ax^2(x-a) - b^2(x+a)(x-a) = 0.$$

Dividendo per $x - a \neq 0$,

$$2ax^2 - b^2x - ab^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = x_{\pm} := \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 + 8a^2b^2}}{4a}$$

Dato che $x_- < 0 < x_+ < b$ (verificare!), c'è un unico punto critico in $(0, b)$: $\mathcal{S} = \{x_+\}$.

Ricapitolando, la nostra strategia propone tre punti di minimo assoluto possibili: $0, x_+, b$. Per determinare chi di questi sia il punto di minimo bisognerebbe confrontare i tre valori $f(0)$, $f(x_+)$ e $f(b)$. Fattibile, ma non particolarmente semplice. Seguiamo una strada diversa. Dato che

$$f'(0) = -\frac{a}{a-b} < 0$$

il punto 0 non può essere di minimo relativo e dunque nemmeno di minimo assoluto! La lotta rimane tra $x_+$ e $b$. In $b$ non possiamo ragionare come in 0 dato che la funzione $f$ non è derivabile in $b$, quindi $f'(b)$ non ha senso. Non perdiamoci d'animo: dato che

$$\lim_{x \to b^-} f'(x) = \lim_{x \to b^-} -\frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2 + (a-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}} = +\infty$$

la funzione $f$ è crescente in un intorno (sinistro) di $b$, quindi nemmeno $b$ può essere il punto di minimo richiesto. Perfetto: resta un unico sopravvissuto $x_+$ che è il punto di

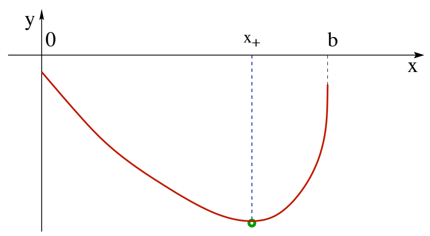



FIGURA 10. Il grafico della funzione $f$.

minimo cercato. Il peso $M$ si collocherà nella posizione di coordinate $(x_+, f(x_+))$. In alternativa, per stabilire che $x_+$ è il punto di minimo assoluto, si sarebbe potuto anche notare che $f'' \geq 0$, quindi la funzione $f$ è convessa e, necessariamente, il suo punto critico $x_+$ è di minimo assoluto.

Il principio di Fermat. Passiamo ora a considerare due problemi di *ottica geometrica* che si traducono nella ricerca del punto di minimo assoluto di certe funzioni. In quel che segue, considereremo un raggio di luce in maniera naïf: come un qualcosa che viaggia da un punto ad un altro, si riflette sugli oggetti, entra nell'occhio...

Il problema fondamentale è stabilire quale sia il tragitto percorso dal raggio per passare da un punto $A$ ad un punto $B$. Il principio, proposto da Fermat, è il segunte: *il tragitto prescelto è quello che minimizza il tempo di percorrenza.* Se il raggio viaggia sempre nello stesso mezzo, la sua velocità $v$ è costante, quindi minimizzare il tempo di percorrenza $T$ equivale a minimizzare la lunghezza del percorso. Perciò il raggio percorre linee rette. Che succede in situazioni un po' più complicate?

**Riflessione.** Consideriamo un raggio di luce che parta dal punto $A = (0, a)$ e e che si diriga verso l'asse delle $x$ dove immaginiamo collocato uno specchio. Il raggio viene riflesso nel punto $P = (x, 0)$ e da lì arriva nel punto $B = (b, c)$. I tragitti da $A$ a $P$ e da $P$ a $B$ sono percorsi lungo segmenti. Supponendo assegnati $a, b, c > 0$ e quindi assegnati i punti $A$ e $B$, qual'è il punto $P$ prescelto dal raggio luminoso?

Ad ogni scelta di $P = (x, 0)$, corrisponde un certo tempo di percorrenza $T = T(x)$. Il principio di Fermat afferma che il punto di riflessione $(x_0, 0)$ è tale che $T(x_0) = \min T(x)$. Bene, non resta che determinare l'espressione esplicita di $T = T(x)$ e trovare in quale punto sia assunto il minimo. Indicando con $T_{AP}$ e $T_{PB}$, il tempo impiegato dal raggio per andare da $A$ a $P$ e da $P$ a $B$ rispettivamente, e con $v$ la velocità della luce nel mezzo in considerazione,

$$T(x) = T_{AP}(x) + T_{PB}(x) = \frac{\overline{AP}}{v} + \frac{\overline{PB}}{v}.$$

Quindi, grazie al teorema di Pitagora,

$$T(x) = \frac{1}{v}\left(\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2}\right) \qquad x \in [0, b].$$

Dato che la funzione $T$ è derivabile infinite volte, applicando la strategia per il calcolo di massimi e minimi assoluti, il punto di minimo $x_0$ sarà o 0, o $b$, o tale che $T'(x_0) = 0$. Cerchiamo quindi i punti critici di $T$. La derivata prima $T'$ è esplicitamente data da

$$T'(x) = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}\right).$$

Essa si azzera se e solo se $x = x_* := ab/(a + c)$.

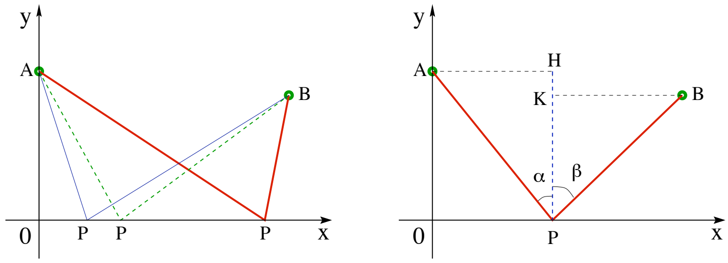



FIGURA 11. Quale sarà il punto $P$ prescelto da un raggio riflesso in uno specchio? Quello che fa in modo che gli angoli di incidenza $\alpha$ e di riflessione $\beta$ coincidano.

Invece di confrontare i valori di $T$ per $x = 0, x_*, b$, si può notare che

$$T'(0) = -\frac{b}{v\sqrt{b^2+c^2}} < 0 \qquad \text{e} \qquad T'(b) = \frac{b}{v\sqrt{b^2+a^2}} > 0,$$

quindi nessuno dei due estremi dell'intervallo è di minimo. Pertanto il punto $x_*$ è il punto di minimo assoluto.

Il punto di riflessione $P$ è individuato da una condizione geometrica semplice. Sia $\alpha$ l'angolo, detto di *incidenza*, determinato dal segmento $AP$ e dalla semiretta da $P$, perpendicolare all'asse $x$, contenuta nel semipiano $y > 0$, e sia $\beta$ l'angolo, detto di *riflessione*, determinato dal segmento $PB$ e dalla stessa semiretta di prima. Allora, indicando con $H$ il punto di coordinate $(x_*, a)$ e con $K$ il punto di coordinate $(x_*, c)$,

$$\tan\alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{PH}} = \frac{x_*}{a} = \frac{b}{a+c} \qquad \tan\beta = \frac{\overline{BK}}{\overline{PK}} = \frac{b-x_*}{c} = \frac{ab+bc-ab}{a+c}\,\frac{1}{c} = \frac{b}{a+c}$$

Quindi $\tan\alpha = \tan\beta$ e, dato che $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$, ne segue che $\alpha = \beta$. In definitiva, il principio di Fermat implica che *l'angolo di riflessione coincide con l'angolo di incidenza.*

**Rifrazione.** Cambiamo tipo di esperimento. Consideriamo un raggio luminoso che viaggi in due mezzi differenti in cui la sua velocità è $v_+$ e $v_-$. Per semplicità, supponiamo che il mezzo in cui la velocità è $v_+$ corrisponda alla regione di piano con $y > 0$ e quello in cui la velocità è $v_-$ corrisponda a $y < 0$. Se un raggio parte da $A = (0, a)$ con $a > 0$ ed arriva a $B = (b, c)$ con $c < 0 < b$, che tragitto sceglie?

Esattamente come prima, utilizziamo il principio di Fermat. Indicando con $T_{AP}$ e $T_{PB}$, il tempo impiegato dal raggio per andare da $A$ a $P$ e da $P$ a $B$ rispettivamente, il tempo impiegato per andare da $A$ a $B$ è

$$T(x) = T_{AP}(x) + T_{PB}(x) = \frac{\overline{AP}}{v_+} + \frac{\overline{PB}}{v_-}.$$

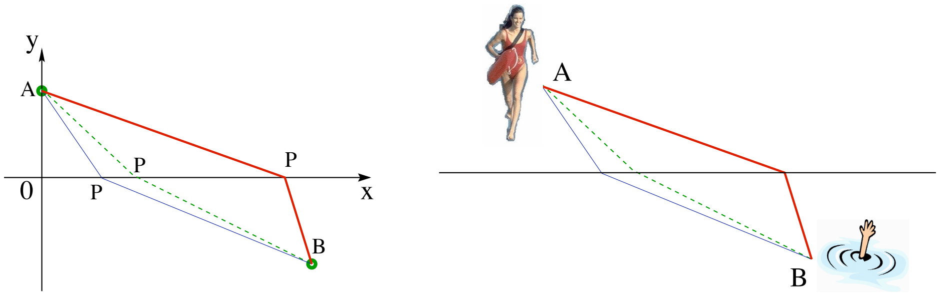



FIGURA 12. Quale percorso scegliere? Supponiamo che nel semipiano $y > 0$ ci sia la terra ferma e il mare nel semipiano $y < 0$. Nel punto $A$ c'è la prestante bagnina di Baywatch pronta ad intervenire per salvare la vita di un affogando sito nel punto $B$. Sapendo che la soccorritrice quando corre sulla spiaggia va a velocità $v_+$ e quando nuota in mare va a velocità $v_-$, qual'è il percorso che le permette di soccorrere il malcapito nel minor tempo possibile?

e, di nuovo per il teorema di Pitagora,

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_+} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}{v_-} \qquad x \in [0, b].$$

Anche questa funzione è derivabile infinite volte in $[0, b]$. La sua derivata prima è

$$T'(x) = \frac{x}{v_+\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b-x}{v_-\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}.$$

Quindi $T'(0) < 0 < T'(b)$ e anche in questo caso gli estremi non sono punti di minimo. Perciò il minimo è in $(0, b)$. Inoltre, con un po' di pazienza, si ottiene

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_+\,(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{c^2}{v_-\,[(b-x)^2 + c^2]^{3/2}} > 0$$

Dato che la derivata seconda è (strettamente) positiva, la derivata prima $T'$ è strettamente crescente, quindi esiste un unico $x_*$ tale che $T'(x_*) = 0$ (si ricordi che $T'(0) < 0 < T'(b)$). Necessariamente $x_*$ è il punto di minimo che andiamo cercando.

Come individuarlo? Per ora sappiamo solo che $x_*$ è individuato in maniera univoca dalla relazione $T'(x_*) = 0$, cioè $x_*$ è l'unico valore per cui

$$\frac{1}{v_+}\frac{x_*}{\sqrt{x_*^2 + a^2}} = \frac{1}{v_-}\frac{b-x_*}{\sqrt{(b-x_*)^2 + c^2}}. \tag{5}$$

Come nel caso della riflessione, ragioniamo in termini di angoli. Sia $\alpha$, *angolo di incidenza*, l'angolo formato dal segmento $AP$ con la semiretta verticale per $P$ contenuta in $y > 0$, e sia $\beta$, *angolo di rifrazione*, l'angolo formato dal segmento $PB$ con la semiretta verticale per $P$ contenuta in $y < 0$. Se $H$ e $K$ sono le proiezioni di $A$ e $B$

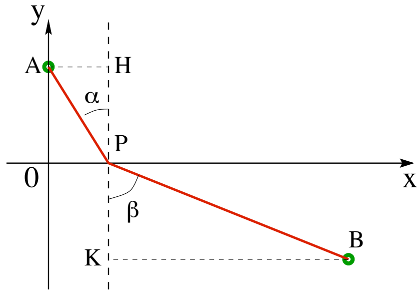



FIGURA 13. Gli angoli di incidenza e di rifrazione.

sulla retta $x = x_*$, i triangoli $APH$ e $BPK$ sono rettangoli e quindi

$$\sin\alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AP}} = \frac{x_*}{\sqrt{x_*^2 + a^2}} \qquad \sin\beta = \frac{\overline{BK}}{\overline{BP}} = \frac{b - x_*}{\sqrt{(b - x_*)^2 + c^2}}.$$

Sostituendo nella formula (5), si deduce che il punto di rifrazione $P$ è scelto in modo che valga

$$\frac{\sin\alpha}{v_+} = \frac{\sin\beta}{v_-}.$$

Tale relazione è nota come legge di rifrazione di Snell.

CAPITOLO 2

# Ordini di grandezza e la formula di Taylor

## 1. Verso lo zero e ad un passo dall'infinito

Le funzioni con cui ci si trova a dover lavorare possono avere una struttura complicata, e anche molto. Se si è interessati al comportamento della funzione solo per determinati regimi, cioè per valori dell'incognita in opportune regioni, può bastare conoscere quali siano i termini dominanti all'interno della funzione. Ad esempio, se il valore $f(t)$ rappresenta la posizione di una particella all'istante $t$, si potrebbe essere interessati solo al comportamento della funzione $f$ per valori grandi di $t$. Se $f(t) = e^t + \sin t$, è chiaro che saremo soddisfatti di un'approssimazione del tipo $f(t) \approx e^t$ per $t \to +\infty$, dato che questo termine diverge a $+\infty$, mentre l'altro rimane limitato. Ma se invece $f(t) = e^t + t$? Anche qui l'approssimazione sensata, per $t \to +\infty$, è $f(t) \approx e^t$, dato che l'esponenziale cresce più rapidamente del termine di primo grado $t$. Come formalizzare in modo preciso la frase "cresce ben più rapidamente"?

Lo stesso tipo di problema sorge nel caso di quantità infinitesime. Come confrontare termini che diventano molto piccoli (tendenti a zero)?

**Ordine di infinito per $x \to +\infty$.** Consideriamo qui funzioni $f$ tali che

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$$

(il caso $x \to -\infty$ è analogo). Come distinguere tra funzioni di questo genere quelle che divergono "più rapidamente" e quelle che divergono "meno rapidamente"? Ad esempio le funzioni $x^\alpha$, $\ln x, e^x, a^x$ (con $\alpha > 0$ e $a > 1$) divergono per $x \to +\infty$ in modi essenzialmente differenti. Quale di queste funzioni cresce più rapidamente delle altre?

Dato che

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 10 | 100 | 1000 |
| $x^2$ | 1 | 100 | 10000 | 1000000 |
| $x^3$ | 1 | 1000 | 1000000000 | 1000000000000 |

ci aspettiamo che $x^3$ tenda all'infinito più rapidamente di $x^2$. La maniera <u>rigorosa</u> per esprimere questo concetto è studiare il rapporto delle due quantità. Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty,$$

la grandezza di $x^3$ relativamente a quella di $x^2$ è maggiore. Questa proprietà si esprime dicendo che $x^3$ *tende a* $+\infty$ *più rapidamente di* $x^2$ *per* $x \to +\infty$.

Allo stesso modo, $x^\alpha$ cresce più rapidamente di $x^\beta$ per $\alpha > \beta$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = +\infty \qquad \forall\, \alpha > \beta.$$

DEFINIZIONE 1.1. Ordine di infinito I. *Siano $f$ e $g$ tali che*

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim_{x\to+\infty} |g(x)| = +\infty. \tag{6}$$

*Si dice che: $f$ ha* ordine di infinito superiore rispetto a $g$ per $x \to +\infty$ *se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty.$$

*Analogamente, $f$ ha* ordine di infinito inferiore rispetto a $g$ per $x \to +\infty$ *se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Può capitare che due funzioni abbiano lo stesso tipo di andamento all'infinito. Ad esempio: $x$ e $2x$ sono entrambi polinomi di grado 1 e vale:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Il fatto che il limite del rapporto sia una costante non zero, suggerisce che le due funzioni hanno lo stesso ordine di grandezza. Si sarebbe tentati di dire che due funzioni hanno lo stesso ordine di grandezza se e solo se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \ell > 0.$$

Questa definizione, seppure ragionevole, è troppo restrittiva: non è in grado di coprire casi con termini oscillanti. Un esempio: per $f(x) = x(1+\sin^2 x)$ e $g(x) = x$, si ha

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{|x||1+\sin^2 x|}{|x|} = 1 + \sin^2 x \in [1,2],$$

che non ammette limite per $x \to +\infty$. Ma, dato che $x \le f(x) \le 2x$, è ragionevole affermare che $f$ tende all'infinito con la stessa velocità di $x$.

DEFINIZIONE 1.2. Ordine di infinito II. *Si dice che le funzioni $f$ e $g$, soddisfacenti* (6)*, hanno* lo stesso ordine di infinito per $x \to +\infty$ *se esistono $C_1, C_2 > 0$ tali che*

$$0 < C_1 \le \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \le C_2 \qquad \text{per } x \text{ sufficientemente grande.} \tag{7}$$

In generale, per verificare la condizione (7) occorre stimare il rapporto $|f|/|g|$ e non sempre questa operazione è facile. Però, se esiste ed è diverso da zero il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=\ell\neq 0,$$

la condizione (7) è automaticamente soddisfatta. Ad esempio, consideriamo le funzioni $f(x)=2x^2-1$ e $g(x)=x^2+x+3$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+x+3}=2\neq 0,$$

quindi hanno lo stesso ordine di infinito. In generale, se $f$ è un polinomio di grado $m$ e $g$ un polinomio di grado $p$, allora: se $m>p$, $f$ è di ordine superiore a $g$; se $m=p$, $f$ e $g$ sono dello stesso ordine; se $m<p$, $f$ è di ordine inferiore a $g$.

OSSERVAZIONE 1.3. Se $f$ è di ordine superiore rispetto a $g$, allora la funzione somma $f+g$ ha lo stesso ordine di $f$, infatti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)=1.$$

Ad esempio, la funzione $x+\ln x$ ha lo stesso ordine di infinito di $x$ per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)=1.$$

DEFINIZIONE 1.4. *Se per una funzione $f$ esiste un valore $\alpha>0$ tale che $f$ è dello stesso ordine di infinito di $|x|^\alpha$ per $x\to+\infty$ si dice che $f$ è un* infinito di ordine $\alpha$. *La funzione $|x|$ è detta* infinito campione per $x\to+\infty$.

Ad esempio, la funzione $\sqrt{1+x^2}$ è tale che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1,$$

quindi ha ordine di infinito uguale ad 1 per $x\to+\infty$. La funzione $\dfrac{4x^3+1}{x-5}$ è tale che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(4x^3+1)/(x-5)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+1}{x^3-5x^2}=4$$

quindi ha ordine di infinito 2. In generale, l'ordine di infinito di una funzione razionale con numeratore di grado $m$ e denominatore di grado $p$ (con $m>p$) è $m-p$ (dimostratelo!).

OSSERVAZIONE 1.5. Se una funzione $f$ ha ordine di infinito $\alpha$, allora

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{\alpha+\varepsilon}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}\frac{1}{x^\varepsilon}=0\qquad\forall\varepsilon>0;$$

cioè ha ordine di infinito inferiore rispetto ad $x^{\alpha+\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$. Analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha-\varepsilon}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}}\, x^{\varepsilon} = \infty \qquad \forall\, \varepsilon > 0,$$

quindi ha ordine di infinito superiore rispetto ad $x^{\alpha-\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Si potrebbe pensare di introdurre una “scala assoluta” di ordine di grandezza delle funzioni, attribuendo a ciascuna funzione divergente la corrispondente potenza che la rappresenta. Questa scala, però, non adempie il compito richiesto: ci sono funzioni la cui “velocità di divergenza” non corrisponde a quella di nessuna potenza e quindi che, in questo senso, non possono essere classificate. I due casi più rilevanti sono dati dalla funzione $\ln x$ e da $e^x$ per cui vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = +\infty \qquad \forall\, \alpha > 0. \tag{8}$$

Per dimostrare (8), osserviamo preliminarmente che vale la disequazione[1]

$$\ln t \le t \qquad \forall\, t > 0. \tag{9}$$

Ora, dato $\alpha > 0$, scegliamo $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Applicando la disequazione (9) per $t = x^{\alpha-\varepsilon}$ e usando le proprietà del logaritmo:

$$\ln x \le \frac{1}{\alpha-\varepsilon}\, x^{\alpha-\varepsilon} \qquad \forall\, x > 0,\ 0 < \varepsilon < \alpha.$$

Dividendo entrambi i membri per $x^{\alpha}$ e passando al limite,

$$0 \le \frac{\ln x}{x^{\alpha}} \le \frac{1}{(\alpha-\varepsilon)x^{\varepsilon}} \qquad \forall\, x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0.$$

Per il secondo limite in (8), ponendo $y = e^x$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(\ln y)^{\alpha}} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y^{1/\alpha}}{\ln y}\right)^{\alpha} = +\infty.$$

Le formule in (8) affermano che $\ln x$ diverge per $x \to +\infty$ più lentamente di qualsiasi potenza $x^{\alpha}$ e che $e^x$ diverge più rapidamente di qualsiasi potenza $x^{\alpha}$.

Osservazione 1.6. Con le funzioni esponenziali e con i logaritmi, è possibile costruire funzioni che divergono a velocità sempre più grandi o a velocità sempre più piccole. Ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(e^x)}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty,$$

e quindi $\ln(\ln x)$ è un infinito di ordine inferiore a $\ln x$ e $e^{(e^x)}$ è di ordine superiore a $e^x$.

---

[1] Infatti, detta $F(t) = t - \ln t$, allora $F'(t) = 1 - 1/t$ e quindi $F$ ha un punto di minimo assoluto per $t = 1$. Perciò $F(t) \ge F(1) = 1 > 0$.

Osservazione 1.7. Cosa succede per $a^x$ e $\log_a x$ con $a > 1$ (e diverso da $e$)? La funzione $\log_a x$ si può scrivere in termini della funzione $\ln x$:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

(sapete giustificare questa formula?). Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha \ln a} = 0 \qquad \forall\, \alpha > 0.$$

Procedendo come nel passaggio dal limite riguardante il logaritmo naturale al limite per l'esponenziale con base $e$, deduciamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \forall\, \alpha > 0,\ a > 1.$$

E' interessante confrontare tra loro esponenziali e logaritmi con basi diverse:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln a}\,\frac{\ln b}{\ln x} = \frac{\ln b}{\ln a} \qquad \forall a, b > 1,$$

quindi logaritmi con basi diverse hanno lo stesso ordine di infinito. Per gli esponenziali, invece, dati $a, b > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \begin{cases} 0 & a < b, \\ 1 & a = b, \\ +\infty & b < a, \end{cases}$$

che mostra che esponenziali con base maggiore hanno ordine di infinito maggiore.

*Ordine di infinito e comportamento asintotico.* È possibile che per una funzione $f$ valga una decomposizione del tipo

$$f(x) = g(x) + h(x) \qquad \text{con } \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0, \tag{10}$$

dove la funzione $g$ è una funzione "nota" (ad esempio, una funzione con un asintoto obliquo). Se la funzione $|g|$ diverge a $+\infty$ per $x \to +\infty$, allora

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim_{x\to+\infty} |g(x) + h(x)| = +\infty.$$

Come sono collegati gli ordini di infinito di $f$ e $g$? La risposta è semplice: *le funzioni $f$ e $g$ hanno lo stesso ordine di infinito*, infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x) + h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{h(x)}{g(x)}\right) = 1. \tag{11}$$

Ad esempio, tutte le funzioni che possiedono un asintoto obliquo (non orizzontale) per $x \to +\infty$ hanno ordine di infinito 1.

E' vero il viceversa? Supponiamo di sapere che una funzione $f$ abbia lo stesso ordine di infinito di una funzione $g$:

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)| = \lim_{x\to+\infty}|g(x)| = +\infty \quad \text{e} \quad 0 < C_1 \le \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \le C_2.$$

E' vero che vale una rappresentazione come quella data in (10)? La risposta, in generale, è negativa. Ad esempio, per le funzioni $f(x) = x + \ln x$ e $g(x) = x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} = 1,$$

ma la differenza tra $f$ e $g$ se ne guarda bene dal tendere a zero per $x \to +\infty$

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x - \ln x) - x = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

**Ordine di infinito per $x \to x_0$.** Così come si confrontano i comportamenti delle funzioni per $x \to +\infty$, è possibile confrontare funzioni che divergono in un punto $x_0$. La terminologia è analoga alla precedente.

DEFINIZIONE 1.8. <u>*Ordine di infinito III.*</u> *Date due funzioni $f$ e $g$ tali che*

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \lim_{x\to x_0}|g(x)| = +\infty,$$

*si dice che $f$ è un* infinito di ordine superiore rispetto a $g$ per $x \to x_0$ *se*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty.$$

*Se il limite è 0, $f$ è un* infinito di ordine inferiore rispetto a $g$ per $x \to x_0$. *Infine, se esistono $C_1, C_2$ e $\delta > 0$ per cui*

$$0 < C_1 \le \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \le C_2 \qquad \textit{per} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \tag{12}$$

*si dice che $f$ e $g$ hanno* stesso ordine di infinito per $x \to x_0$.

Come nel caso di $x \to +\infty$, se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x) = \ell \neq 0$, allora è automaticamente verificata la condizione (12) e, quindi, $f$ e $g$ sono dello stesso ordine. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{\sin x}\right| = +\infty \quad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{1/\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

quindi $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/\sin x$ sono “infiniti” dello stesso ordine per $x \to 0$.

DEFINIZIONE 1.9. *Se la funzione $f$ ha lo stesso ordine di infinito di $1/|x - x_0|^\alpha$ per qualche $\alpha > 0$, si dice che $f$ è un* infinito di ordine $\alpha$ per $x \to x_0$. *La funzione $1/|x - x_0|$ è detta* infinito campione per $x \to x_0$.

Anche qui si può ripetere quanto detto in precedenza: esistono funzioni che non hanno un ordine di infinito per $x \to x_0$. Un esempio? Con il cambio di variabile $y = -\ln x$, si deduce che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = 0,$$

che mostra che $\ln x$ ha un ordine di infinito in 0 inferiore a qualsiasi potenza.

**Ordine di infinitesimo.** Così come si confrontano infiniti, è possibile confrontare funzioni infinitesime per $x \to x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure per $x \to \pm\infty$. Qui, per abbreviare l'esposizione, scriviamo $x_0$ per indicare o un numero reale, o uno dei due simboli $\pm\infty$.

DEFINIZIONE 1.10. *Ordine di infinitesimo. Siano $f$ e $g$ infinitesime per $x \to x_0$. Si dice che $f$ è un* infinitesimo di ordine superiore a $g$ per $x \to x_0$ *se*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0. \tag{13}$$

*Se il limite è $+\infty$, $f$ è un* infinitesimo di ordine inferiore a $g$. *Infine, $f$ e $g$ hanno lo* stesso ordine di infinitesimo *se in un intorno di $x_0$ (nel caso di $x_0 = \pm\infty$ si intende per valori sufficientemente grandi),*

$$0 < C_1 \le \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le C_2 \qquad \textit{per qualche } C_1, C_2 > 0.$$

Come nel caso degli infiniti, si introducono infinitesimi campione.

– Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che $f$ è un infinitesimo di ordine $\alpha$, se è dello stesso ordine di $|x - x_0|^\alpha$. La funzione $|x - x_0|$ è l'infinitesimo campione per $x \to x_0$.
– Se $x_0 = \pm\infty$, si dice che $f$ è un infinitesimo di ordine $\alpha$, se è dello stesso ordine di $1/|x|^\alpha$. La funzione $1/|x|$ è l'infinitesimo campione per $x \to \pm\infty$.

Qualche esempio (tanto per gradire):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \sin x \text{ è infinitesimo di ordine 1 per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/(1+x^2)}{1/x^2} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} \text{ è infinitesimo di ordine 2 per } x \to \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad 1-\cos x \text{ è infinitesimo di ordine 2 per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arctan(1/x)}{1/x} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \text{ è infinitesimo di ordine 1 per } x \to \pm\infty$$

**I simboli di Landau: "$O$" e "$o$".** Per indicare che una funzione $f$ ha un ordine di grandezza inferiore a quello di un'altra funzione $g$ si usa la notazione $f = o(g)$ per $x \to x_0$ (si legge *$f$ è un "o piccolo" di $g$*). Il significato di questa affermazione è che $f/g$ tende a zero per $x \to x_0$. Ad esempio,

$$x^\alpha = o(x^\beta) \qquad \forall\, \alpha < \beta \qquad\qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Abbiamo anche visto che

$$\begin{aligned} &\ln x = o(x^\alpha) && \forall\, \alpha > 0 && \text{per } x \to +\infty,\\ &x^\alpha = o(e^x) && \forall\, \alpha > 0 && \text{per } x \to +\infty,\\ &1 - \cos x = o(x) && && \text{per } x \to 0. \end{aligned}$$

Esercizio 1.11. *Verificare la validità di*

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad\qquad \textit{per } x \to +\infty.$$

Analogamente si introduce la notazione $f = O(g)$ (si legge *$f$ è un "O grande" di $g$*) per indicare che la funzione $f$ ha al più l'ordine di grandezza di $g$, ossia se il rapporto $f/g$ è limitato in un intorno di $x_0$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le C,$$

per qualche $C > 0$, in un intorno di $x_0$. Ad esempio,

$$\sqrt{10x-1} = O(\sqrt{x}) \qquad\qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Infatti, dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{10x-1}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{10 - \frac{1}{x}} = \sqrt{10},$$

il rapporto di $\frac{\sqrt{10x-1}}{\sqrt{x}}$ è limitato per valori della $x$ sufficientemente grandi.

Dai limiti notevoli

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

segue che, per $x \to 0$,

$$e^x = 1 + O(x), \quad \ln(1+x) = O(x), \quad \sin x = O(x), \quad \cos x = 1 + O(x^2).$$

*Derivabilità con i simboli di Landau.* Tramite i simboli di Landau si può riscrivere la derivabilità di una funzione in modo diverso. La derivabilità di una funzione $f$ in $x$ può essere scritta nella forma

$$\lim_{h\to0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0.$$

Quindi, se una funzione è derivabile in $x$, vale la relazione (particolarmente significativa)

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \qquad \text{per } x \to 0. \tag{14}$$

L'interpretazione di questa formula è che l'incremento di $f$ si può rappresentare come un termine $f'(x)h$, lineare nell'incremento $h$, più un resto che ha un ordine di grandezza inferiore ad $h$ per $h \to 0$. Si usa la terminologia:

$$\textsf{differenziale di } f: \qquad df(x;h) := f'(x)h.$$

Fissato il valore di $x$, il differenziale $df(x;h)$ rappresenta un'approssimazione (valida a meno di $o(h)$) dell'incremento $\Delta f(x;h) := f(x+h) - f(x)$:

$$\Delta f(x;h) \approx df(x;h) \qquad \text{per } h \to 0.$$

Come si precisa il senso del simbolo $\approx$? Proprio tramite i simboli di Landau:

$$|\Delta f(x;h) - df(x;h)| = o(h) \qquad \text{per } h \to 0,$$

che esprime il fatto che l'errore che si commette sostituendo all'incremento $\Delta f$, il differenziale $df$ è un infinitesimo di ordine superiore al primo.

## 2. Il Teorema di de l'Hôpital

Supponiamo $f$ e $g$ continue nell'intervallo $(a,b)$ e sia $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

In questa situazione non è evidente se esista e quanto valga il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Sostituendo, formalmente, a $f$ e $g$ il valore nel punto limite si ottiene l'espressione $\frac{0}{0}$ che non ha senso. L'esistenza o meno del limite è legata alla rapidità con cui le funzioni $f$ e $g$ tendono a 0 per $x \to x_0$, ossia alla relazione che c'è tra i loro ordini di infinitesimo. Come risolvere un limite del genere? Se le funzioni $f$ e $g$ sono derivabili in $x_0$, si può pensare di approssimare le funzioni $f$ e $g$ con la loro retta tangente nel punto $x_0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0)} = \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{g'(x_0)(x-x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Come rendere rigorosa tale affermazione? Utilizzando (14), si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)} = \frac{f'(x_0) + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0}}{g'(x_0) + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0}} \tag{15}$$

avendo utilizzato la proprietà $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Passando al limite per $x \to x_0$, nel caso in cui $g'(x_0) \neq 0$, si ottiene

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad\qquad (g'(x_0) \neq 0).$$

Questa formula è nota come **regola di de l'Hôpital**[2]. Lavorando in maniera più raffinata, si dimostra una variante della precedente formula di de l'Hôpital, che non richiede la derivabilità delle funzioni $f$ e $g$ nel punto limite, ma solo l'esistenza del limite del rapporto delle derivate. Anche tale variante è nota sotto lo stesso nome.

TEOREMA 2.1. Regola di de l'Hôpital. *Siano $f$ e $g$ due funzioni derivabili tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Se esiste finito*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R},$$

*allora esiste anche il limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ ed ha lo stesso valore $\ell$.*

La conclusione è valida anche nel caso in cui il rapporto delle derivate abbia limite $+\infty$ o $-\infty$. Non si può dedurre nessuna conclusione nel caso in cui il rapporto delle derivate non abbia limite.

Esistono in commercio anche altre versioni del Teorema di de l'Hôpital che si applicano a casi differenti: forme indeterminate del tipo $0/0$ per $x \to \pm\infty$ o del tipo $\infty/\infty$ per $x \to x_0$ e per $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = \lim_{x\to\pm\infty} |g(x)| = \infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Il simbolo $\ell$ può essere sia un numero reale sia $+\infty$ o $-\infty$.

Il principio è sempre lo stesso: nel caso di una forma indeterminata $0/0$ o $\infty/\infty$, si può calcolare il limite del rapporto delle derivate. Se tale limite esiste, allora dà anche il valore del limite iniziale. Se, invece, il rapporto delle derivate non esiste, non si può

[2]Questa regola porta il nome il nome del matematico francese Guillaume Francois Antoine, marchese de L'Hôpital (1661 – 1704), che pubblicò la formula nel suo libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1692). La regolar è in realtà dovuta a Jean Bernoulli, a cui L'Hôpital pagava una pensione di 300 franchi annui in cambio delle informazioni relative ai suoi progressi nel calcolo infinitesimale e della risoluzione di alcuni problemi posti dal de L'Hôpital (tra cui quello di determinare il limite di forme indeterminate). L'Hôpital, riconoscendo che parte del contenuto del suo trattato era dovuta a Bernoulli, preferì pubblicarlo in forma anonima. Ciò nonostante, una volta scoperto l'autore del libro, la formula fu associata al suo nome.

concludere nulla. Nel caso in cui il limite del rapporto delle derivate dia luogo, esso stesso, ad una forma indeterminata $0/0$ o $\infty/\infty$, si può applicare di nuovo il Teorema di de l'Hôpital e (provare a) calcolare il limite del rapporto delle derivate seconde.

Esempio 2.2. Per calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x - \sin x}, \tag{16}$$

studiamo il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1 + x^2)(1 - \cos x)} = 2,$$

dato che $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \cos x)/x^2 = 1/2$. Quindi il limite (16) esiste e vale 2.

Esempio 2.3. Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) x.$$

Questo limite è della forma $0 \cdot \infty$, ma si può ricondurre alla tipologia trattabile con il teorema di de l'Hôpital riscrivendolo come

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{1/x}.$$

Il rapporto delle derivate ha limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1/(1 + x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1 + x^2} = 1.$$

Quindi, il limite richiesto esiste e vale 1.

Esercizio 2.4. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\cos x - 1}.$$

**La dimostrazione del Teorema di de L'Hôpital.** Per cominciare, enunciamo (e dimostriamo) una variante del Teorema di Lagrange, nota come Teorema di Cauchy.

Teorema 2.5. *Teorema di Cauchy. Siano $f$ e $g$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in $(a, b)$. Allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che*

$$\det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f'(\xi) \\ g(b) - g(a) & g'(\xi) \end{pmatrix} = 0, \tag{17}$$

*cioè $(f(b) - f(a))g'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$.*

**Interpretazione geometrica.** Date le funzioni $f$ e $g$, consideriamo la funzione *vettoriale* $(f, g)$ che associa ad un punto dell'intervallo $[a, b]$ il punto del piano di coordinate $(f, g)$. Il Teorema di Cauchy asserisce che esiste sempre un valore $\xi \in (a, b)$ tale che il vettore incremento $(f(b) - f(a), g(b) - g(a))$ e il vettore "derivata" $(f'(x), g'(x))$ calcolato in $x = \xi$ sono paralleli.

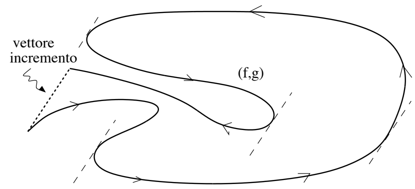



FIGURA 1. L'interpretazione geometrica del Teorema di Cauchy.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.5. Consideriamo la funzione

$$\begin{aligned}\Phi(x) &:= \det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f(x) - f(a) \\ g(b) - g(a) & g(x) - g(a) \end{pmatrix} \\ &= \big[f(b) - f(a)\big]\,[g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)]\big[g(b) - g(a)\big].\end{aligned}$$

La funzione $\Phi$ è continua in $[a, b]$ e derivabile in $(a, b)$. Inoltre, si hanno

$$\Phi(a) = \det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & 0 \\ g(b) - g(a) & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\Phi(b) = \det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f(b) - f(a) \\ g(b) - g(a) & g(b) - g(a) \end{pmatrix} = 0$$

Quindi, per il Teorema di Rolle, esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $\Phi'(\xi) = 0$. Dall'espressione

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= (f(b) - f(a))g'(x) - f'(x)(g(b) - g(a)) \\ &= \det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f'(x) \\ g(b) - g(a) & g'(x) \end{pmatrix} = 0,\end{aligned}$$

segue la conclusione. $\square$

Armati del precedente risultato, si può dimostrare il Teorema di de l'Hôpital.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.1. Scegliamo, nella formula (17), $a = x_0$ e $b = x$. Dato che, per ipotesi, $f(x_0) = g(x_0) = 0$, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{18}$$

dove $\xi$ è compreso tra $x_0$ e $x$. Per $x \to x_0$, necessariamente $\xi \to x_0$, e il termine $f'(\xi)/g'(\xi)$ tende ad $\ell$ per ipotesi. Dato che questo termine è uguale a $f(x)/g(x)$, ne segue la conclusione $\square$

**Approssimazioni polinomiali.** Utilizziamo adesso il Teorema di de l'Hôpital per dedurre delle approssimazioni polinomiali di funzioni con un errore che sia infinitesimo di ordine sempre più alto. Scegliamo come cavia la funzione $\sin x$. Dato che è derivabile in 0 e la sua derivata è 1,

$$\sin x = x + o(x) \qquad \text{per } x \to 0 \tag{19}$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0.$$

Per dedurre un'approssimazione per $\sin x$ con un errore che sia $o(x^2)$, calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}.$$

Per applicare il Teorema di de l'Hôpital, studiamo il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Dato che tale limite esiste finito, anche il limite di partenza esiste e vale 0. Quindi

$$\sin x = x + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0 \tag{20}$$

La formula (20) dice che l'errore che si commette approssimando $\sin x$ con $x$ è un infinitesimo di ordine superiore al secondo per $x \to 0$. Questa informazione è migliore di quella data da (19), che ci garantiva solamente un errore di ordine superiore al primo.

Per ottenere un approsimazione con errore di ordine superiore al terzo, ragioniamo come in precedenza e calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{6},$$

che implica $\sin x = x + O(x^3)$. Portando il termine $-1/6$ a primo membro, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$$

cioè la funzione $\sin x$ è pari a $x - \frac{1}{6}x^3$ più un errore superiore a $x^3$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0. \tag{21}$$

Possiamo iterare il procedimento e calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x}{12x^2} = 0,$$

quindi

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0. \tag{22}$$

Ripetiamo l'esperimento su una cavia diversa: $e^x$. Il fatto che $e^x$ sia derivabile in $x = 0$ e la derivata valga 1 si traduce nella formula

$$e^x = 1 + x + o(x) \qquad \text{per } x \to 0. \tag{23}$$

Per migliorare l'espressione, calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2},$$

cioè $e^x = 1 + x + O(x^2)$. Il limite può essere riscritto come

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} - \frac{1}{2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^2} = 0,$$

cioè $e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$, o anche

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Allo stesso modo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} = \frac{1}{6}, \tag{24}$$

La relazione (24) si può riscrivere come

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \left( e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) = 0 \iff e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Cosa stiamo facendo iterando questo procedimento? Stiamo ottenendo delle approssimazioni ad ordini sempre più alti di una funzione data. La relazione $e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ esprime il fatto che la funzione $e^x$ si può approssimare, per $x \to 0$ con il polinomio $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$ commettendo un errore (la differenza tra $e^x$ e il polinomio) che tende a zero per $x \to 0$ con ordine superiore a 3 (cioè più rapidamente di $x^3$).

L'iterazione dell'algoritmo che abbiamo visto conduce direttamente a quello che si chiama *polinomio di Taylor*.

## 3. La formula di Taylor

Replichiamo, in generale, l'esperimento fatto su $\sin x$ e $e^x$ alla fine del paragrafo precedente. Se $f$ è una funzione derivabile in $x_0$, si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0,$$

o, equivalentemente,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \qquad \text{per} \quad x \to x_0,$$

che esprime che la funzione $f$, vicino ad $x_0$, si approssima con la funzione $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, con un errore che è un infinitesimo di ordine superiore ad 1.

Per ottenere un'approssimazione più precisa, supponendo che la funzione $f$ si derivabile due volte, possiamo calcolare il limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{1}{2}f''(x_0),$$

avendo applicato il Teorema di de l'Hôpital. Il precedente limite si può scrivere come

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2\right]}{(x-x_0)^2}=0$$

ossia

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o(|x-x_0|^2).$$

Così abbiamo scoperto che la funzione $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$ approssima $f$, vicino ad $x_0$, con un errore di ordine superiore a 2. Il grafico della funzione $p(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$ rappresenta la parabola che meglio approssima la funzione $f$ per $x\to x_0$.

Iterando ancora una volta il procedimento e supponendo che la funzione $f$ sia derivabile tre volte in $x_0$, si ottiene

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+o(|x-x_0|^3).$$

E in generale?

Teorema 3.1. <u>Formula di Taylor.</u> *Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile $n$ volte in $(a,b)$ e sia $x_0\in(a,b)$. Dato $n\in\mathbb{N}$, posto*

$$T_n(x;x_0):=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,$$

*si ha*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}=0,$$

*cioè vale la decomposizione $f(x)=T_n(x;x_0)+o(|x-x_0|^n)$.*

Definizione 3.2. *Il polinomio $T_n(x;x_0)$ si chiama* polinomio di Taylor[3] di grado $n$ della funzione $f$ nel punto $x_0$ *e rappresenta un'approssimazione di $f$ vicino ad $x_0$.*

La peculiarità della formula di Taylor sta nel fatto che il resto $R_n$, definito da

$$R_n(x;x_0):=f(x)-T_n(x;x_0),$$

è un infinitesimo di ordine superiore ad $|x-x_0|^n$ per $x\to x_0$.

[3] Se $x_0=0$, il polinomio $p_n$ viene, a volte, chiamato polinomio di McLaurin.

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo il Teorema di de l'Hôpital al limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)-\cdots-\frac{1}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-2}}{n(x-x_0)^{n-1}}.$$

Dato che sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi, possiamo applicare nuovamente il Teorema di de l'Hôpital, ottenendo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)-f'''(x_0)(x-x_0)\ \cdots-\frac{1}{(n-3)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-3}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}.$$

Iterando $n-1$ volte il procedimento si ottiene

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

Quindi vale

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),$$

da cui segue

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n}-\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)=0,$$

che porta alla conclusione. □

ESEMPIO 3.3. <u>*Polinomi.*</u> Assegnati $a_0,\dots,a_p$, sia

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_px^p.$$

Consideriamo, prima di tutto, lo sviluppo in $x_0=0$. Dato che

$$\begin{aligned} f'(x)&=a_1+2a_2\,x+\cdots+pa_px^{p-1}\\ f''(x)&=2a_2+3\cdot 2a_3\,x+\cdots+p(p-1)a_px^{p-2}\\ &\ \ \vdots\\ f^{(p)}(x)&=p(p-1)\cdots 2\cdot 1\,a_p\\ f^{(k)}(x)&=0 \qquad\qquad\qquad\qquad k>p \end{aligned}$$

si ha

$$f'(0)=a_1,\quad f''(0)=2a_2,\quad \dots\quad f^{(p)}(0)=p!\,a_p,\quad f^{(k)}(0)=0\qquad k>p.$$

Quindi,

$$T_n(x;0)=\begin{cases} a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n & n<p,\\ a_0+a_1x+\cdots+a_px^p & n\ge p.\end{cases}$$

Come era naturale aspettarsi, il polinomio di Taylor di $f$ in $x_0 = 0$ e di grado $n$ si ottiene considerando i termini del polinomio con grado minore o uguale ad $n$.

Per il polinomio di Taylor in $x_0 \neq 0$, occorre riscrivere il polinomio in termini di potenze di $h := x - x_0$. In questo modo si otterrà un'espressione del tipo

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_p(x - x_0)^p$$

con $b_0, b_1, \ldots, b_p$ opportuni. Il polinomio di Taylor è dato da

$$T_n(x; x_0) = \begin{cases} b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n & n < p, \\ b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_p(x - x_0)^p & n \geq p. \end{cases}$$

Consideriamo, ad esempio, la funzione $f(x) = x + x^3$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, per scriverla in termini di potenze di $h = x - x_0$ calcoliamo

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h) + (x_0 + h)^3 = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)h + 3x_0h^2 + h^3.$$

Quindi vale l'identità

$$x + x^3 = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3.$$

Ad esempio, il polinomio di Taylor di grado 2 in $x_0$ è

$$T_2(x; x_0) = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2.$$

Lo stesso, evidentemente, si ottiene applicando direttamente la formula: da

$$f(x) = x + x^3, \qquad f'(x) = 1 + 3x^2, \qquad f''(x) = 6x,$$

segue

$$T_2(x; x_0) = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2.$$

Esempio 3.4. <u>*Esponenziale in $x_0 = 0$.*</u> Siano

$$f(x) = e^x \qquad \text{e} \qquad x_0 = 0.$$

Dato che $f^{(k)}(x) = e^x$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ per ogni $k$, quindi il polinomio di Taylor di grado $n$ è

$$T_n(x; 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Questa formula è coerente con la definizione di esponenziale data in precedenza.

Che succede se $x_0 \neq 0$? I conti non sono molto diversi:

$$T_n(x; 0) = e^{x_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} = e^{x_0} \left[ 1 + (x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \right].$$

ESEMPIO 3.5. <u>*Seno e coseno in $x_0 = 0$.*</u> Sia $f(x) = \sin x$, allora

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x, \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \qquad \forall\, k = 0, 1, 2, \dots.$$

Calcolando in $x_0 = 0$, otteniamo

$$f^{(2k)}(0) = 0, \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \qquad \forall\, k = 0, 1, 2, \dots.$$

Ne segue che

$$T_n(x; 0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

è il polinomio di Taylor di grado $n$ con $n = 2k+1$ o $2k+2$. In effetti si può dimostrare che vale l'uguaglianza

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Analogamente se consideriamo la funzione $f(x) = \cos x$ abbiamo

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x, \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x \qquad \forall\, k = 0, 1, 2, \dots.$$

Calcolando in $x_0 = 0$, otteniamo

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k, \qquad f^{(2k+1)}(0) = 0 \qquad \forall\, k.$$

Ne segue che

$$T_n(x; 0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

è il polinomio di Taylor di $\cos x$ centrato in 0 di grado $n$ con $n = 2k$ o $2k+1$. Anche per il coseno vale un'uguaglianza analoga alla precedente:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 3.6. *Calcolare il polinomio di Taylor di grado 4 della funzione $\sin x$ centrato in $x_0 = \pi/2$ e quello centrato in $x_0 = \pi/4$.*

ESEMPIO 3.7. Siano $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e $x_0 = 0$. Le derivate di $f$ sono

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad \dots, \qquad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Perciò $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$,... $f^{(k)}(0) = k!$. Quindi il polinomio di Taylor è

$$T_n(x; 0) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

coerente con l'espressione nota per la serie geometrica.

Esempio 3.8. Come ultimo esempio, consideriamo

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad \text{e} \qquad x_0 = 0.$$

Le derivate di $f$ sono

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad \dots, \qquad f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k},$$

e quindi $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$. Il polinomio di Taylor di grado $n$ in $x_0 = 0$ è

$$T_n(x;0) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\,\frac{x^k}{k}.$$

## 4. Espressioni del resto

Data una funzione $f$, con un buon numero di derivate, sappiamo determinare un polinomio che la approssimi vicino ad un punto assegnato $x_0$. In questa approssimazione viene commesso un errore pari a

$$R_n(x;x_0) := f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k.$$

Quali proprietà conosciamo su $R_n$? Per ora sappiamo solo che

$$R_n(x;x_0) = o(|x-x_0|^n) \quad \text{cioè} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Questa è solo un'informazione sul comportamento al limite, quindi non dice nulla di preciso sulla grandezza della quantità $R_n$ in punti $x \neq x_0$. Per poter stimare l'errore occorre una rappresentazione migliore di $R_n$. Ecco il nostro nuovo obiettivo.

Teorema 4.1. Resto in forma di Lagrange. *Se la funzione $f$ è derivabile $n+1$ volte, esiste $\xi$, tra $x_0$ e $x$, tale che*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1},$$

Dimostrazione. Sia $f$ derivabile $n+1$ volte e consideriamo le funzioni

$$F(x) := R_n(x;x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \qquad \text{e} \qquad G(x) := (x-x_0)^{n+1}.$$

Dato che $F(x_0) = G(x_0) = 0$, applicando il Teorema di Cauchy a $F$ e $G$, segue

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)},$$

per qualche $\xi_1$, compreso tra $x_0$ e $x$. Derivando le espressioni di $F$ e $G$, otteniamo

$$F'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^k \qquad \text{e} \qquad G'(x) = (n+1)(x-x_0)^n.$$

Se $n \geq 1$ è possibile riapplicare il Teorema di Cauchy, trovando $\xi_2$, compreso tra $x_0$ e $\xi_1$ e quindi anche tra $x_0$ e $x$, per cui

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

Iterando $n+1$ volte il procedimento, si dimostra l'esistenza di $\xi_{n+1}$ tra $x_0$ e $x$ tale che

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

Dato che $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ e $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, si deduce (qui $\xi = \xi_{n+1}$)

$$F(x) - F(x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(G(x) - G(x_0))$$

da cui, ricordando le definizioni di $F$ e $G$,

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1},$$

cioè la conclusione. □

A partire da questa espressione del resto, possiamo stimare l'errore commesso quando si approssimi una funzione $f$ con il suo polinomio di Taylor: se $M > 0$ è tale che $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ per ogni $t$ tra $x$ e $x_0$, allora

$$|R_n(x;x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

*Calcolo approssimato di* $\sin(1/10)$ *con stima dell'errore.* Abbiamo già considerato questo problema proponendo come "candidato" per l'approssimazione il valore $1/10$. In quell'occasione avevamo stimato l'errore commesso con $1/100$. Il procedimento era basato sul Teorema di Lagrange e sull'approssimazione della funzione $\sin x$ con la sua tangente nell'origine:

$$\sin x \approx x \qquad \text{per } x \to 0.$$

Detta $f(x) = \sin x$, la stima dell'errore discendeva da

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)| &= |(f'(\xi) - f'(x_0))(x-x_0)| \\ &= |f''(\eta)(\xi - x_0)(x-x_0)| \leq |f''(\eta)||x-x_0|^2. \end{aligned}$$

dove $x = 1/10$ e $x_0 = 0$. Dato che $f''(x) = -\sin x$, la stima è immediata.

Come ottenere stime migliori? La scelta naturale è approssimare la funzione $\sin x$ con un suo polinomio di Taylor di grado opportuno. Ad esempio,

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \qquad \text{per } x \to 0.$$

Quindi un'approssimazione migliore della precedente è

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} = 0,0998\bar{3}.$$

Scriviamo l'errore con la forma di Lagrange $R_3(x; x_0) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x - x_0)^4$, cioè

$$\sin\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6000}\right) = R_3(1/10; 0) = \frac{\sin\xi}{4!}\,\frac{1}{10^4},$$

quindi

$$|R_3(1/10; 0)| \leq \frac{1}{24 \cdot 10^4} = 4,1\bar{6} \times 10^{-6}.$$

In realtà il polinomio $x - \frac{x^3}{6}$ è anche il polinomio di Taylor di $\sin x$ in 0 di grado 4, quindi il resto può anche essere scritto come

$$\sin\frac{1}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6000} = R_4(1/10; 0) = \frac{\cos\xi}{5!}\,\frac{1}{10^5},$$

quindi

$$|R_4(1/10; 0)| \leq \frac{1}{120 \cdot 10^5} = 8,\bar{3} \times 10^{-8}.$$

In definitiva

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) = 0,0998\bar{3} \pm 8,\bar{3} \times 10^{-8}.$$