Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 9 (a.a. 23/24, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`lorenzo.carlucci@uniroma1.it`)

1 Caratterizzazioni di iniezioni, suriezioni e biiezioni

Proposizione 1. *Se $f : X \to Y$ è iniettiva allora esiste $g : Y \to X$ tale che $(g \circ f) : X \to X$ è l'identità su X, ossia per ogni $x \in X$*

$$(g \circ f)(x) = x.$$

Dimostrazione. Sia $f : X \to Y$ iniettiva. Dato che vogliamo concludere l'esistenza di una funzione g con certe proprietà conviene ragionare in modo diretta, definendo una g desiderata. Dobbiamo assegnare un valore $g(y)$ a ogni elemento y di Y. Distinguiamo due casi.

Caso 1. y è nell'immagine di X via f (in simboli: $y \in f(X)$). In questo caso, dato che f è iniettiva siamo sicuri che esiste un unico $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Definiamo $g(y)$ come questo unico x.

Caso 2. y non è nell'immagine di X via f. In questo caso osserviamo che possiamo definire $g(y)$ come un arbitrario elemento di X, perché il comportamento di g su $Y \setminus f(X)$ non può contribuire a violare la proprietà desiderata di g. Vogliamo infatti che per ogni $x \in X$ si abbia $g(f(x)) = x$, dunque ci interessa il comportamento di g solo su elementi di forma $f(x)$ per $x \in X$, ossia su elementi di $f(X)$.

Verifichiamo che la definizione di g soddisfa il vincolo desiderato. Innanzitutto si tratta di una funzione (a ogni elemento di Y viene associato uno e un solo elemento di X). In secondo luogo abbiamo $g(f(x)) = x$ per definizione di g.

QED

Proposizione 2. *Se esiste $g : Y \to X$ tale che $(g \circ f) : X \to X$ è l'identità su X, allora $f : X \to Y$ è iniettiva.*

Dimostrazione. Sia g come da ipotesi. Dato che di f non sappiamo nulla, conviene ragionare per assurdo. Assumiamo dunque la negazione della nostra tesi. La tesi è che f è iniettiva dunque assumiamo f non iniettiva. Questo significa che esistono $x, x' \in X$ distinti e tali che $f(x) = f(x')$. Applichiamo g a $f(x)$ e $f(x')$:

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x$$

perché per ipotesi $(g \circ f)$ è l'identità su X.

$$g(f(x')) = (g \circ f)(x') = x'$$

perché per ipotesi $(g \circ f)$ è l'identità su X. Ma se $f(x) = f(x')$, necessariamente $g(f(x)) = g(f(x'))$ perché g è una funzione! Dunque $x = x'$, il che contraddice l'ipotesi per assurdo.

QED

Abbiamo ottenuto un *caratterizzazione* della nozione di funzione iniettiva in termini di composizione e identità:

Corollario 1 (Caratterizzazione dell'iniettività)**.** *$f : X \to Y$ è iniettiva se e solo se esiste $g : Y \to X$ tale che $(g \circ f) : X \to X$ è l'identità su X.*

Consideriamo ora la suriettività.

Proposizione 3. *Se $f : X \to Y$ è suriettiva allora esiste $g : Y \to X$ tale che $(f \circ g) : Y \to Y$ è l'identità su Y, ossia per ogni $y \in Y$*

$$(f \circ g)(y) = y.$$

Dimostrazione. Sia $f : X \to Y$ suriettiva. Definiamo una $g : Y \to X$ che soddisfa il vincolo richiesto. Sia $y \in Y$. Vogliamo assegnare a y una immagine $g(y)$ in X in modo tale che applicando f a questa immagine otteniamo di nuovo y. Basta scegliere un $x \in X$ che viene mandato da f in y. Dato che f è suriettiva siamo sicuri che almeno un tale x esiste. Possono esisterne però più di uno (questo accade se f non è iniettiva). Si osserva facilmente che per soddisfare il vincolo non è importante quale di questi io scelga: l'importante è che la sua immagine via f sia y. Definisco dunque $g : Y \to X$ ponendo $g(y) =$ un $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

QED

Proposizione 4. *Se esiste $g : Y \to X$ tale che $(f \circ g) : Y \to Y$ è l'identità su Y allora $f : X \to Y$ è suriettiva.*

Dimostrazione. Supponiamo che esiste $g : Y \to X$ come da ipotesi. Supponiamo per assurdo che f non sia suriettiva. Per definizione di suriettività questo significa che esiste almeno un elemento del codominio di f che non è immagine di alcun elemento del dominio di f; ossia: esiste $y \in Y$ tale che per nessun $x \in X$ si ha $f(x) = y$. Sia y un tale elemento. Applicando ad esso la funzione g otteniamo un elemento $g(y) \in X$. Applicando ad esso la funzione f otteniamo $f(g(y))$ in Y. Per ipotesi su g questo elemento deve coincidere con y: $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y$. Ma allora y appartiene all'immagine di X via f!! Contraddizione.

QED

Abbiamo così ottenuto una caratterizzazione della suriettività in termini di composizione e identità.

Corollario 2 (Caratterizzazione della suriettività)**.** *$f : X \to Y$ è suriettiva se e soltanto se esiste esiste $g : Y \to X$ tale che $(f \circ g) : Y \to Y$ è l'identità su Y.*

Dato che una funzione è biiettiva se e solo se è sia suriettiva che iniettiva otteniamo il corollario seguente:

Corollario 3 (Caratterizzazione della biiettività)**.** *$f : X \to Y$ è biiettiva se e solo se*

1. *Esiste $g : Y \to X$ tale che $(f \circ g) : Y \to Y$ è l'identità su Y, e*
2. *Esiste $h : Y \to X$ tale che $(h \circ f) : X \to X$ è l'identità su X.*

Che relazione corre tra g e h nel corollario qui sopra? Dire che esiste g e che esiste h non implica che siano la stessa funzione.

Proposizione 5. *Sia $f : X \to Y$ biiettiva e sia $g : Y \to X$ tale che $(g \circ f) : X \to X$ è l'identità su X. Allora $(f \circ g) : Y \to Y$ è l'identità su Y.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo: supponiamo che $(f \circ g) : Y \to Y$ non sia l'identità su Y. Questo significa che per almeno un $y \in Y$ vale

$$(f \circ g)(y) \neq y.$$

f è biiettiva dunque in particolare suriettiva, per cui y è immagine di un qualche $x \in X$ via f, ossia esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Sostituiamo $f(x)$ a y nella disequazione di sopra:

$$(f \circ g)(f(x)) \neq f(x),$$

ossia

$$f(g(f(x))) \neq f(x).$$

Ma allora, dato che f è una funzione, necessariamente deve valere

$$g(f(x)) \neq x,$$

il che contraddice l'ipotesi che $(g \circ f)$ è l'identità su X.

QED

In modo perfettamente analogo possiamo dimostrare che

Proposizione 6. *Sia $f : X \to Y$ biiettiva e sia $g : Y \to X$ tale che $(f \circ g) : Y \to Y$ è l'identità su Y. Allora $(g \circ f) : X \to X$ è l'identità su X.*

Mettendo insieme le informazioni di sopra abbiamo che se $f : X \to Y$ è biiettiva allora esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che valgono *entrambe le condizioni seguenti*:

1. $(g \circ f)$ è l'identità su X, e
2. $(f \circ g)$ è l'identità su Y.

Sappiamo già che vale anche il viceversa. Abbiamo dunque la seguente caratterizzazione della biiettività:

Corollario 4 (Caratterizzazione della biiettività)**.** *$f : X \to Y$ è biiettiva se e solo se esiste $g : Y \to X$ tale che*

1. *$(g \circ f)$ è l'identità su X, e*
2. *$(f \circ g)$ è l'identità su Y.*

Esempio 1. Sia $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali e $P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ l'insieme dei pari. Consideriamo le seguenti funzioni:

$$g : \mathbf{N} \to P; g(n) = 2n,$$
$$h : P \to \mathbf{N}; h(n) = \frac{n}{2}.$$

Consideriamo le loro composte:

$$(g \circ h) : P \to P$$

, e

$$(h \circ g) : \mathbf{N} \to \mathbf{N}.$$

Come si comportano? Per ogni $n \in P$:

$$(g \circ h)(n) = g(h(n)) = g(\frac{n}{2}) = 2 \times \frac{n}{2} = n,$$

dunque $(g \circ h)$ è l'identità su P.

Per ogni $n \in \mathbf{N}$:

$$(h \circ g)(n) = h(g(n)) = h(2n) = \frac{2n}{2} = n,$$

dunque $(h \circ g)$ è l'identità su $\mathbf{N}$.

Per quanto dimostrato sopra, sappiamo che

$$(h \circ g) \text{ è l'identità su } \mathbf{N} \text{ implica che } g \text{ è iniettiva },$$

mentre

$$(g \circ h) \text{ è l'identità su } P \text{ implica che } g \text{ è suriettiva }.$$

Dunque possiamo concludere che g è una biiezione tra $\mathbf{N}$ e P.

2 Funzione inversa, immagine inversa

Data una funzione $f : I \to O$ in alcune situazione siamo interessati a risalire da un elemento del codominio O a un elemento del dominio di cui esso è immagine. Se $x \in I$ e $y \in O$ sono tali che $f(x) = y$ abbiamo già chiamato y immagine di x; chiamiamo x pre-immagine di y.

In generale un elemento del codominio non ha necessariamente una unica pre-immagine. Anzi: possono esistere elementi del codominio senza alcuna pre-immagine ed elementi del codominio con più di una pre-immagine. Il primo caso si ha per $y \in O$ che non sono in $f(I)$.

2.1 Funzioni inverse

La nozione di *funzione inversa* è piuttosto naturale nella pratica matematica: sappiamo cosa vuol dire che $x \mapsto x - 1$ è l'inversa di $x \mapsto x - 1$; o che $n \mapsto \frac{n}{2}$ è l'inversa di $n \mapsto 2n$. In generale abbiamo la seguente definizione.

Definizione 1 (Funzione inversa)**.** *Sia $f : X \to Y$ una funzione. Una funzione $g : Y \to X$ si dice l'inversa di f sse*

1. *$(g \circ f)$ è l'identità su X, e*
2. *$(f \circ g)$ è l'identità su Y.*

La funzione inversa di f si denota con f^{-1}.

Sappiamo già che l'esistenza di una g come nella definizione qui sopra equivale alla biiettività di f; dunque una tale g non esiste per f arbitrarie.

Definizione 2 (Funzione invertibile)**.** *Una funzione $f : X \to Y$ è invertibile se esiste la funzione inversa f^{-1}.*

Quanto visto sopra si riassume nel nuovo linguaggio così:

Proposizione 7 (Invertibilità)**.** *Una funzione $f : X \to Y$ è invertibile se e solo se è biiettiva.*

2.2 Immagini inverse di funzioni

Risulta in molti casi naturale considerare l'insieme delle pre-immagini di un sottinsieme del dominio di una funzione.

Definizione 3 (Immagine inversa)**.** *Sia $f : X \to Y$ e sia $A \subseteq Y$. Definiamo $f^{-1}(A)$ come l'insieme che contiene tutte e sole le pre-immagini via f di elementi di A, in simboli*

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \ : \ f(x) \in A\}.$$

Attenzione: Il simbolo f^{-1} non indica necessariamente una funzione. Si tratta di una associazione tra sottinsiemi del codominio O e sottinsiemi del dominio I ma non si tratta in generale di una funzione da O a I. Quando f^{-1} esiste come funzione (i.e. quando f è biiettiva) la notazione introdotta $f^{-1}(A)$ per la pre-immagine di A sotto f coincide con la notazione già introdotta $f^{-1}(A)$ come immagine dell'insieme A sotto la funzione f^{-1}.

Esempio 2. Consideriamo la funzione $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c\}$ definita come segue:

$$f(1) = a, f(2) = a, f(3) = a, f(4) = b, f(5) = b.$$

Abbiamo che $f^{-1}(\{a, b, c\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. L'elemento a ha 3 pre-immagini, l'elemento b ha 2 pre-immagini, mentre l'elemento c non ha alcuna pre-immagine. Non abbiamo un modo univco per leggere f all'inverso, associando uno e un unico elemento di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a ogni elemento di $\{a, b, c\}$.

Osservazione 1. Data una funzione $f : I \to O$ possiamo senz'altro definire sempre una funzione pre-immagine di tipo:

$$\pi : O \to \mathcal{P}(I)$$

associando a ogni elemento del codominio di f l'insieme delle sue pre-immagini. Si noti che in questo caso è ammesso associare l'insieme vuoto come insieme delle pre-immagini. Questo accade ogni volta che consideriamo un elemento del codominio che non possiede pre-immagini.

Esempio 3. Nel caso dell'esempio precedente, la funzione pre-immagini è di tipo:

$$\pi : \{a, b, c\} \to \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}),$$

e si comporta così:

$$\pi(a) = \{1, 2, 3\}; \pi(b) = \{4, 5\}; \pi(c) = \emptyset.$$

La seguente proposizione mostra come $f^{-1}(A)$ interagisce con le operazioni insiemistiche di base.

Proposizione 8. *Sia $f : X \to Y$ e siano $A, B \subseteq X$. Allora:*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$

e

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'inclusione

$$f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Sia x nel membro a sinistra, allora $f(x) \in A \cap B$ dunque $f(x) \in A$ e $f(x) \in B$. Ma $f(x) \in A$ implica $x \in f^{-1}(A)$ e $f(x) \in B$ implica $x \in f^{-1}(B)$. Dunque x è anche nel membro a destra.

Dimostriamo l'inclusione inversa

$$f^{-1}(A \cap B) \supseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Sia x nel membro a destra: allora $f(x) \in A$ e $f(x) \in B$. Dunque $f(x) \in A \cap B$. Dunque x è anche nel membro a sinistra.

La dimostrazione dell'identità relativa all'unione è lasciata al lettore.

QED