Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 6
(a.a. 23/24, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`lorenzo.carlucci@uniroma1.it`)

1 Problema delle caramelle e scritture additive

Consideriamo due problemi tipici che si risolvono con una applicazione non banale del concetto di combinazione.

Problema delle caramelle Il setting è il seguente: all'uscita di una scuola elementare si aggira un uomo con un pacco di caramelle, in attesa dell'uscita dei bambini. L'uomo vuole distribuire le caramelle tra i bambini che escono dalla scuola. Per evitare il peggio, intercettiamo l'uomo e chiediamogli: Quanti sono i modi di distribuire le caramelle ai bambini? Sperando di tenerlo occupato per un po'...

Per chiarire il problema osserviamo che: le caramelle sono tutte identiche tra loro mentre i bambini non sono identici. In altre parole quello che ci interessa è quante caramelle (identiche) vengono date a ciascuno dei bambini.

Esempio 1 *Quanti modi ho di distribuire 3 caramelle tra 2 bambini? Posso visualizzare le soluzioni così:*

Giorgio	*Marco*
1 caramella	*2 caramelle*

Giorgio	*Marco*
0 caramelle	*3 caramelle*

Giorgio	*Marco*
3 caramelle	*0 caramelle*

Giorgio	*Marco*
2 caramella	*1 caramella*

In forma più schematica possiamo usare un pallino $\odot$ per indicare le caramelle.

Giorgio	*Marco*
$\odot$	$\odot\odot$

Giorgio	*Marco*
	$\odot \odot \odot$

Giorgio	*Marco*
$\odot \odot \odot$	

Giorgio	*Marco*
$\odot\odot$	$\odot$

Astraendo ulteriormente posso rappresentare le soluzioni con stringhe di 3 *pallini (le caramelle) e* 1 *barrette (separatori tra i 2 bambini):*

$$\odot| \odot \odot$$

$$| \odot \odot\odot$$

$$\odot \odot \odot|$$

$$\odot \odot |\odot$$

Esempio 2 *Quanti modi ho di distribuire 7 caramelle tra 6 bambini? Usando il formato dell'esempio precedente posso rappresentare una soluzione del tipo:*

Bambino 1	*Bambino 2*	*Bambino 3*	*Bambino 4*	*Bambino 5*	*Bambino 6*
2 caramelle	*0 caramelle*	*1 caramella*	*1 caramella*	*0 caramelle*	*3 caramelle*

con la seguente stringa di 7 pallini $\odot$ e 5 *barrette* $|$*:*

$$\odot \odot || \odot | \odot || \odot \odot\odot$$

Ci convinciamo facilmente che abbiamo stabilito una **buona traduzione** *tra l'insieme delle soluzioni al problema delle caramelle e l'insieme delle stringhe lunghe 12 contenenti 7 pallini e 5 barrette.*

Immaginiamo di voler comunicare una di queste soluzioni a un amico al telefono, supponendo che questo amico sappia che sto comunicando una stringa lunga 12 contenente 7 pallini e 5 barrette. Dato che ognuna delle 12 posizioni può contenere soltanto una barretta oppure un pallino, è sufficiente comunicare la posizione dei 7 pallini oppure delle 5 barrette.

Scegliamo di comunicare la posizione delle 5 barrette: una soluzione è completamente specificata dall'indicazione delle posizioni in cui c'è una barretta (in ogni altra posizione c'è un pallino). Quindi una soluzione è completamente specificata da un sottinsieme di 5 elementi in un insieme di 12 (le posizioni). Per esempio, la soluzione di sopra $\odot \odot || \odot | \odot || \odot \odot\odot$ è rappresentata dall'insieme $\{3, 4, 6, 8, 9\}$ *che indica la posizione delle* *sbarrette (contando le posizioni da sinistra a partire da 1). Le soluzioni sono tante quante i sottinsiemi di* 5 *elementi in un insieme di* 12*. Sappiamo già contare questa quantità, che è* $\binom{12}{5}$.

Scegliamo di comunicare la posizione dei 7 pallini: una soluzione è completamente specificata dall'indicazione delle posizioni in cui c'è un pallino (in ogni altra posizione c'è una barretta). Quindi una soluzione è completamente specificata da un sottinsieme di 7 elementi in un insieme di 12 (le posizioni). Per esempio la soluzione di sopra è rappresentata dall'insieme $\{1, 2, 5, 7, 10, 11, 12\}$ *che indica la posizione dei pallini. Le soluzioni sono tante quante i sottinsiemi di* 7 *elementi in un insieme di* 12*. Sappiamo già contare questa quantità, che è* $\binom{12}{7}$.

Ovviamente le due soluzioni coincidono – sappiamo già che $\binom{12}{5} = \binom{12}{7}$.

La procedura usata per l'esempio di sopra si generalizza facilmente. Se vogliamo distribuire m caramelle tra t bambini possiamo tradurre il problema in quello di contare le stringhe formate da m pallini e $t-1$ stanghette, dunque le stringhe lunghe $m+t-1$ contenenti m pallini e $t-1$ stanghette. Come visto sopra basta contare o la posizione delle stanghette o quella dei pallini, dato che la scelta è binaria. Se contiamo la posizione dei pallini stiamo contando i sottinsiemi di m elementi in un insieme di $m+t-1$ elementi (le posizioni) e la soluzione è $\binom{m+t-1}{m}$. Se contiamo le stanghette stiamo contando i sottinsiemi di $t-1$ elementi sempre in un insieme di $m+t-1$ elementi (le posizioni) e la soluzione è $\binom{m+t-1}{t-1}$.

Problema di Biscotti: Il numero di modi di distribuire m caramelle tra t bambini è

$$\binom{m+t-1}{t-1} = \binom{m+t-1}{m}.$$

Scritture additive Il Problema dei Biscotti ha una riformulazione più austera: Quanti sono i modi di scrivere il numero 7 come somma di 6 numeri non negativi? Ossia quante sono le soluzioni non-negative dell'equazione seguente?

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 7$$

Si vede facilmente che il problema è equivalente a quello di distribuire 7 caramelle tra 6 bambini: una soluzione al problema additivo è per esempio

$$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 1$$

che corrisponde a un modo di distribuire 7 unità (le caramelle) tra le 6 variabili (i bambini). Esistono dunque $\binom{7+6-1}{6-1}$ soluzioni:

$$\binom{7+6-1}{6-1} = \binom{7+5}{5} = \binom{12}{5} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2}.$$

In generale abbiamo:

Teorema 1 (Scrittura Additiva) *Il numero di modi di scrivere un intero non negativo* m *come somma di* t *interi non negativi, contando l'ordine, è* $\binom{m+t-1}{t-1}$.

I problemi di scrittura additiva di un intero ammettono molte variazioni in base ai vincoli aggiuntivi che si possono imporre sul valore delle variabili. Cominciamo vedendone una.

Esempio 3 *Quante sono le soluzioni (intere)* ***positive*** *dell'equazione seguente?*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 10$$

In termini di caramelle e bambini si tratta del problema di distribuire 10 caramelle tra 5 bambini dando almeno un caramella a ciascun bambino.

Soluzione 1 Un primo modo di risolvere il problema è il seguente: se consideriamo le espressioni con $\odot$ e $|$ associate alle soluzioni del problema originale (senza vincolo di dare almeno un caramella a ciascuno o, equivalentemente, che ogni x_i sia > 0), ci accorgiamo che vogliamo escludere dal conteggio le espressioni che iniziano con $|$, quelle che finiscono con $|$ e quelle che contengono due $|$ adiacenti. Queste e solo queste corrispondono a soluzioni in cui qualche bambino non riceve caramelle. Il problema è quindi ridotto a contare in quante posizioni possiamo mettere gli $5 - 1 = 4$ separatori nelle posizioni tra le unità (i pallini). Queste posizioni sono ovviamente $10 - 1 = 9$. Dunque dobbiamo contare i sottinsiemi di 4 elementi scelti tra 9, che sono $\binom{9}{4}$.

Soluzione 2 Un secondo modo di ragionare è il seguente, in cui riduciamo il problema a un problema senza il vincolo aggiunto: distribuiamo per iniziare un caramella a ciascun bambino, quindi 5 caramelle, soddisfacendo subito il vincolo. Restano da assegnare $10 - 5 = 5$ caramelle tra 5 bambini, ma questa volta senza il vincolo aggiuntivo di dare almeno un caramella ciascuno. Sappiamo già contare questa quantità, che è $\binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$. In termini di soluzioni di una equazione, assegnamo a ognuna delle 5 variabili il valore 1. Quello che ci resta da contare sono le soluzioni dell'equazione

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10 - 5,$$

dove gli y_i possono essere 0. Sappiamo già contare questa quantità.

I ragionamenti di sopra sono perfettamente generali e otteniamo che i modi di dare m caramelle a r bambini dando almeno un caramella a ciascuno, e il numero delle soluzioni positive dell'equazione

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m$$

è $\binom{m-1}{r-1}$, usando la prima soluzione. Usando la seconda soluzione abbiamo ridotto al problema di distribuire $m - t$ caramelle tra i t bambini, e dunque usando la soluzione al Problema dei Biscotti standard abbiamo

$$\binom{m - t + t - 1}{t - 1}.$$

Chiaramente le due soluzioni coincidono.

Esercizio 1 *Quanti modi ho di distribuire 13 caramelle tra 4 bambini dando almeno 2 caramelle a ciascuno?*

Esercizio 2 *** Quanti modi ho di distribuire 11 caramelle tra 3 bambini in modo che nessun bambino abbia più di 4 caramelle?*

Combinazioni con ripetizioni

Esempio 4 *Consideriamo l'insieme $A = \{a, b, c, d\}$. Vogliamo contare i modi scegliere 6 elementi in A con possibili ripetizioni, senza contare l'ordine. Per esempio una scelta è: 2 copie di a, 3 copie di c, 1 copia di d (6 oggetti in tutto). Una rappresentazione tabulare è molto conveniente:*

a	b	c	d
2	0	3	1

Dove abbiamo $2 + 0 + 3 + 1 = 6$.

Definizione 1 *Chiamiamo combinazione con ripetizione di ordine* k *di* n *oggetti un raggruppamento di* k *oggetti scelti tra* n *con possibili ripetizioni. Denotiamo con* $C'_{n,k}$ *il loro numero.*

Vogliamo sapere quanto vale $C'_{n,k}$ in generale. Cominciamo osservando che è naturale usare una tabella come la seguente per rappresentare una combinazione di ordine k con ripetizione:

a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
m_1	m_2	$\dots$	m_{n-1}	m_n

Dobbiamo avere $k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

Scrivendo in forma tabulare una combinazione con ripetizione di k elementi scelti tra n ci accorgiamo che non si tratta di altro che di un problema di caramelle, o di scrittura additiva: il numero delle combinazioni con ripetizione di ordine k di n oggetti è esattamente il numero di modi di distribuire k caramelle tra n bambini, e il numero di modi di scrivere il numero k come somma di n addendi non-negativi. Dunque:

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

NB: per non confondervi ricordate che k sono le caramelle e n sono i bambini!

Esempio 5 *8 bambini vanno in gelateria e ciascuno prende un cono con un solo gusto scelto tra i 20 gusti disponibili. Quante sono le possibili ordinazioni? Ci interessa soltanto sapere quanti gelati di ogni tipo si devono preparare, non a chi sono destinati. Sappiamo che la somma dei gusti scelti è 8 perché i bambini sono 8 e ognuno prende un gusto. Questo mi suggerisce di impostare il problema come un problema additivo: devo contare i modi di sommare a 8 scegliendo i gusti. Ovviamente più di un bambino può scegliere lo stesso gusto. Si tratta quindi di un problema di combinazioni con ripetizioni: devo scegliere* $k = 8$ *oggetti con ripetizione in un insieme di* $n = 20$ *(i gusti disponibili). In forma tabulare:*

gusto 1	*gusto 2*	$\dots$	*gusto 19*	*gusto 20*
a_1	a_2	$\dots$	a_{19}	a_{20}

Dove $a_1 + a_2 + \cdots + a_{19} + a_{20} = 8$. *La risposta è dunque* $C'_{20,8} = \binom{20+8-1}{8}$. *Concettualizzando come problema delle caramelle: 8 caramelle tra 20 bambini, ossia* $\binom{8+20-1}{20-1} = \binom{27}{19}$ *oppure* $\binom{8+20-1}{‘8} = \binom{27}{8}$.

2 Anagrammi e Caramelle

Esempio 6 *Quanti sono gli anagrammi della parola PADRE? Per il PMG sono* $5! = 120$.

Esempio 7 *Quanti sono gli anagrammi della parola NONNA? In questo caso* $5! = 120$ *non è la quantità desiderata, perché sta contando le N come se fossero tutte distinte, ossia come se si trattasse degli anagrammi della parola* $N_1ON_2N_3A$, *dove* N_1, N_2, N_3 *vengono considerate lettere distinte. Ovviamente vogliamo invece considerare identici e contare una sola volta gli anagrammi* $N_1AN_2N_3O$, $N_2AN_1N_3O$, $N_1AN_3N_2O$, $N_2AN_3N_1O$, $N_3AN_1N_2O$ *e* $N_3AN_2N_1O$. *Per la Regola del Pastore devo quindi dividere per* $3!$ *ossia per il numero delle permutazioni di* $\{N_1, N_2, N_3\}$. *Ottengo quindi* $\frac{5!}{3!} = 20$ *anagrammi.*

Esempio 8 *Quanti sono gli anagrammi della parola NONNO? In questo caso non voglio contare né le 3 occorrenze di N né le 2 occorrenze di O come distinte. Ragionando per passi ho:* $5! = 120$ *permutazioni di* $\{N_1, O_1, N_2, N_3, O_3\}$, $\frac{5!}{3!} = 20$ *parole di 5 lettere nell'alfabeto* $\{N, O_1, O_2\}$ *e infine, ancora per la Regola del Pastore,* $\frac{5!}{3!2!} = 10$ *anagrammi di NONNO.*

Riassumendo: se voglio formare gli anagrammi di una parola formata da n occorrenze di lettere di cui n_1 sono identiche, ho $\frac{n!}{n_1!}$ possibilità. Se ci sono n_1 lettere identiche di un tipo e n_2 di un altro tipo, ho $\frac{n!}{n_1!n_2!}$ possibilità, etc. In generale: gli anagrammi di una parola lunga n in cui compaiono t gruppi di $n_1, \dots, n_t$ lettere ripetute, sono

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_t!}$$

Esempio 9 *Quante sono le sequenze lunghe 6 composte da due 0, tre 1 e un 2? Sono gli anagrammi di 110002. Dunque sono* $\frac{6!}{2!3!} = \frac{720}{12} = 60$.

Esempio 10 *Quanti sono gli anagrammi di MISSISSIPPI? Sono* $\frac{11!}{4!4!2!}$.

Esempio 11 *Quanti sono gli ordinamenti di 5 persone di cui 3 uomini e 2 donne se mi interessa soltanto distinguere tra uomini e donne? Mentre gli ordinamenti totali sono 5! gli ordinamenti che identificano gli uomini tra loro e le donne tra loro sono* $\frac{5!}{3!2!}$.

Per calcolare $C'_{n,k}$ abbiamo contato il numero delle parole di lunghezza $m+r-1$ composte di $r-1$ lettere $|$ e di m lettere $\odot$. Possiamo vedere il problema come un problema di anagrammi. Sappiamo già contare gli anagrammi della parola composta da $r-1$ lettere $|$ e m lettere $\odot$, e sono

$$\frac{(m+r-1)!}{m!(r-1)!}.$$

D'altra parte sappiamo che il numero delle espressioni in questione è esattamente $C'_{r,m}$, dunque possiamo concludere che

$$C'_{r,m} = \binom{m+r-1}{r-1} = \frac{(m+r-1)!}{m!(r-1)!}.$$

Abbiamo così dedotto una identità algebrica con un doppio conteggio combinatorio.

Per esempio,

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!},$$

come si può anche verificare svolgendo i calcoli.

Esempio 12 *Consideriamo il problema di distribuire 11 biscotti tra 3 bambini, con il vincolo aggiuntivo che nessun bambino riceve più di 4 biscotti. In termini di equazioni stiamo chiedendo il numero di soluzioni dell'equazione*

$$x + y + z = 11$$

con il vincolo $x, y, z \leq 4$.

In questo come in altri casi, per contare gli oggetti con una certa proprietà P*, conviene contare gli oggetti con la proprietà "non* P*". In questo caso*

$$P = \textit{ essere una soluzione in cui nessun bambino ha più di 4 biscotti}$$

e dunque

$$\textit{non } P = \textit{ essere una soluzione in cui almeno un bambino ha più di 4 biscotti.}$$

Proviamo a contare queste ultime, riformulandolo come un problema di unione. Poniamo

$$A = \{ \textit{ soluzioni in cui il primo bambino ha più di 4 biscotti} \}.$$

$$B = \{ \textit{ soluzioni in cui il secondo bambino ha più di 4 biscotti} \}.$$

$$C = \{ \textit{ soluzioni in cui il terzo bambino ha più di 4 biscotti} \}.$$

La risposta che ci interessa è data dal numero di elementi dell'unione

$$A \cup B \cup C.$$

Per applicare il PIE a 3 termini dobbiamo contare $\#A$, $\#B$, $\#C$, $\#(A \cap B)$, $\#(A \cap C)$, *e* $\#(B \cap C)$.

$\#A$*: diamo subito 5 biscotti al primo bambino. Per contare gli elementi in* A *ci resta da contare i modi di distribuire i restanti* $11-5 = 6$ *biscotti tra i 3 bambini (senza vincoli). Sappiamo che questi sono* $\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2}$.

$\#B$*: diamo subito 5 biscotti al secondo bambino. Per contare gli elementi in* A *ci resta da contare i modi di distribuire i restanti* $11 - 5 = 6$ *biscotti tra i 3 bambini (senza vincoli). Sappiamo che questi sono* $\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2}$.

$\#C$*: perfettamente identico.*

$\#(A \cap B)$*: diamo subito 5 biscotti al primo bambino e5 biscotti al secondo. Per contare gli elementi in* $A \cap B$ *ci resta da contare i modi di distribuire il restante biscotto tra i 3 bambini (senza vincoli). Ovviamente ci sono solo 3 modi. Usando la formula delle combinazioni con ripetizione abbiamo* $\binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$.

I conteggi di $\#(A \cap C)$ *e* $\#(B \cap C)$ *sono identici.*

$\#(A \cap B \cap C)$*: stiamo contando i modi di dare 11 biscotti a tre bambini dando a ciascun bambino più di 4 biscotti. Il vincolo è insoddisfacibile quindi queste soluzioni sono* 0.

Applicando il PIE a 3 termini abbiamo che le soluzioni che **non hanno** *la proprietà* P *sono:*

$$\binom{8}{2} + \binom{8}{2} + \binom{8}{2} - \binom{3}{2} - \binom{3}{2} - \binom{3}{2} + 0 = 75.$$

Per rispondere alla domanda iniziale sottraiamo questa quantità dal totale di tutte le soluzioni. Tutte le soluzioni possibili sono $\binom{11+3-1}{3-1} = \binom{13}{2} = 78$. *Dunque le soluzioni con la proprietà* P *sono*

$$78 - 75 = 3.$$

Il metodo sopra illustrato è generale per problemi su soluzioni di equazioni additive con un vincolo sul valore massimo delle variabili.