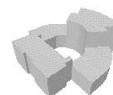




Sapienza, Università di Roma
Dipartimento di Matematica “G.Castelnuovo”



Note di base di

Analisi Matematica

versione 1.2 (7 ottobre 2015)

Lamberto LAMBERTI

Corrado MASCIA



Licenza © 2008 Lamberto Lamberti & Corrado Mascia

Distribuzione Creative Commons

Tu sei libero di riprodurre, stampare, inoltrare via mail, fotocopiare, distribuire questa opera alle seguenti condizioni:

- * Attribuzione: devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza,
- * Non commerciale: non puoi usare quest'opera per fini commerciali,
- * Non opere derivate: Non puoi alterare o trasformare quest'opera, né usarla per crearne un'altra.

(Licenza Creative Commons *Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 3.0*

Testo completo: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>)

CAPITOLO 1

I numeri reali

L'Analisi Matematica classica si basa sull'uso dei *numeri reali* ed ogni testo, nota, appunto che intenda presentare le prime nozioni di questa disciplina non può che iniziare dalla presentazione di tale insieme numerico. Nel corso dei secoli, la comprensione e la definizione del fondamento logico dell'insieme dei numeri reali, indicato con il simbolo \mathbb{R} , si è andata precisando e, attualmente, siamo in possesso di varie versioni assiomatiche, equivalenti tra loro, che definiscono in maniera formalmente inequivocabile l'oggetto numerico con cui lavoreremo. Partire dall'assiomatica, però, è una scelta didattica molto discutibile perché rischia di far perdere l'idea intuitiva su cui si basa la costruzione logico-formale. Per questo motivo, in questo Capitolo, viene presentato il concetto di numero reale in maniera “intuitivamente convincente” a partire dall'idea dell'associazione di un numero ad ogni punto di una retta di riferimento. Verranno richiamate le proprietà fondamentali dell'insieme dei numeri reali: operazioni di somma e moltiplicazione, ordinamento, struttura metrica. Successivamente, verrà dato qualche cenno agli assiomi necessari per definire in maniera rigorosa cosa sia la struttura di cui stiamo parlando, scegliendo, tra i vari punti di partenza possibili, quello che si basa sull'*assioma degli intervalli incapsulati* e sulla *proprietà di Archimede*. Per concludere, verranno introdotte le definizioni di massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore di un insieme di numeri reali, enunciando il risultato di esistenza degli estremo superiore ed inferiore, che è un punto cardine di tutto il materiale che sarà presentato nelle pagine a venire.

1. Numeri naturali, interi e razionali

Il percorso classico che porta alla definizione dell'insieme \mathbb{R} comincia dai numeri *naturali* \mathbb{N} , passa per gli *interi* \mathbb{Z} , si sofferma sui *razionali* \mathbb{Q} , ed arriva, infine, ai *reali* \mathbb{R} . Un ulteriore passo in avanti conduce ai *numeri complessi* \mathbb{C} che, per ora, non verranno introdotti.

Numeri naturali, \mathbb{N} . I numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ nascono da uno dei problemi primordiali dell'uomo (specie se insonne): il “conteggio”. In tale insieme sono definite le operazioni di addizione $+$ e moltiplicazione \cdot , per cui valgono sia le

leggi commutative che quelle *associative*: per ogni terna di numeri x, y, z ,

$$\begin{aligned}x + y &= y + x, & (x + y) + z &= x + (y + z) \\x \cdot y &= y \cdot x, & (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z)\end{aligned}$$

Con la scelta di considerare lo zero 0 un numero naturale (scelta non condivisa da tutti), in \mathbb{N} sono presenti gli *elementi neutri* rispetto alla somma e rispetto al prodotto: per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, $y \neq 0$,

$$x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x$$

Infine, vale anche la *legge distributiva*: per ogni terna di numeri x, y, z ,

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,$$

che descrive la relazione tra le due operazioni.

I numeri naturali hanno due difetti fondamentali, che costringono, in qualche modo, a guardare più in là, cercando nuovi insiemi di numeri.

1. *Difetto “algebrico”*. Le operazioni inverse, sottrazione e divisione, non sono sempre possibili nell’insieme dei numeri naturali: non è possibile sottrarre 2 da 1 o dividere 1 con 2 e ottenere un numero naturale. La soluzione “alla Salomone” (cioè dividere in due metà) nei naturali non è sempre praticabile: nel caso di un numero dispari, il concetto di “metà” non è rappresentato da nessun numero naturale.

2. *Difetto “metrico”*. Il secondo problema è collegato alla questione della *misura*. Il procedimento della misurazione si basa su due passi:

- scegliere un’unità di misura (ad esempio, il metro campione);
- contare il numero di copie del campione che ricoprono l’oggetto da misurare.

Nella maggior parte dei casi, la lunghezza del segmento da misurare non è pari ad multiplo intero del segmento unitario. Come fare? L’opzione di dividere in sottosegmenti il segmento unitario richiede il concetto di frazione, cioè di numero razionale e non è quindi praticabile nell’ambito naturale. Vedremo tra breve che bisognerà prendere atto della realtà delle cose: l’essere razionali non basta...

Numeri interi relativi. Per rendere possibili senza restrizioni le operazioni di sottrazione, si estende il concetto degli interi “negativi”, ottenendo l’insieme dei **numeri interi relativi** (o semplicemente **interi**):

$$\text{numeri interi:} \quad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

L’insieme \mathbb{Z} è una estensione insiemistica di \mathbb{N} , nel senso che contiene l’insieme dei numeri naturali, ed inoltre è possibile definire l’operazione di somma in \mathbb{Z} in modo che valgano le stesse proprietà che valevano in \mathbb{N} . C’è anche qualcosa in più: grazie all’introduzione dei numeri negativi, oltre a sommare, è sempre possibile sottrarre. In

maniera più precisa, possiamo affermare che ogni elemento di \mathbb{Z} ha un *elemento inverso* rispetto all'operazione di somma:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \exists h \in \mathbb{Z} \quad \text{tale che} \quad k + h = 0.$$

Il numero h è quello che si ottiene cambiando di segno k , cioè $h = -k$. La presenza in \mathbb{Z} di un'operazione di somma per cui vale la proprietà commutativa, l'esistenza di 0 e l'esistenza dell'elemento inverso, fanno di \mathbb{Z} un **gruppo commutativo** (o **gruppo abeliano**).

Numeri razionali. Non abbiamo ancora risolto completamente il difetto “algebrico” di \mathbb{N} , dato che anche nell'insieme \mathbb{Z} non è sempre possibile dividere. Per questo motivo, introduciamo un terzo insieme di numeri: l'insieme dei **numeri razionali**, cioè numeri che sono rapporto di numeri interi

$$\text{numeri razionali: } \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \right\}.$$

Attenzione! I numeri razionali possono essere scritti in molti modi diversi: ad esempio,

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{142}{71} = \dots$$

In genere si preferisce avere un'unica rappresentazione del numero e, per questo, si richiede che q sia positivo e che p e q abbiano massimo comune divisore pari a 1. Ci si riconduce sempre ad un'espressione di questo genere attraverso la “semplificazione” dei fattori comuni.

Per costruzione valgono le inclusioni insiemistiche

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Inoltre, nell'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} sono ben definite tutte le *operazioni razionali*, cioè addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione, eccetto la divisione per zero. La maniera precisa di formulare il fatto che sia possibile “dividere per un qualsiasi numero razionale non nullo” consiste nell'affermare che ogni elemento di \mathbb{Q} , tranne 0, ha un *elemento inverso* rispetto all'operazione di prodotto:

$$\forall x \in \mathbb{Q}, x \neq 0 \quad \exists y \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che} \quad x \cdot y = 1.$$

L'elemento y si indica con $\frac{1}{x}$ oppure con x^{-1} . Restano valide le stesse proprietà indicate in precedenza sia per la somma che per la moltiplicazione.

La presenza di somma e prodotto (e relative proprietà) fa di \mathbb{Q} un **campo**.

Come conseguenza delle proprietà delle operazioni di somma e prodotto, nell'insieme \mathbb{Q} vale la **legge di annullamento del prodotto**:

$$a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \text{oppure} \quad b = 0.$$

Infatti, se $a \neq 0$, allora moltiplicando l'uguaglianza $a \cdot b = 0$ per a^{-1} a destra e a sinistra dell'uguale, si ottiene $a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0$, da cui segue $b = 0$.

Operativamente, questa proprietà indica che, quando nella ricerca degli zeri di una data espressione, la fattorizzazione, cioè la riscrittura in termini di prodotto, è, generalmente, vantaggiosa.

Risolto il problema delle operazioni inverse, rimane il difetto “metrico”. È ragionevole sospettare che la definizione di \mathbb{Q} possa risolvere in un colpo solo sia il problema della divisione che quello della misurazione di lunghezze... ma è così?

Rappresentazione grafica dei razionali. Disegniamo una retta R (o *asse numerico*) e procediamo secondo questa scaletta.

(i) Scegliamo un punto di R come rappresentante di 0, che chiameremo **origine**, e un altro punto arbitrario come rappresentante del numero 1. Definiamo la direzione da 0 a 1 come **direzione positiva**, in questo modo, la retta R diviene una retta *orientata* (d'ora in poi, penseremo di aver scelto 1 alla destra di 0).

(ii) Replicando copie del segmento unitario nella direzione positiva di R (cioè alla destra di 1), otteniamo una famiglia di punti che indichiamo con $2, 3, \dots$. Detto in altre parole, rappresentiamo tutti i numeri naturali come punti sulla retta R .

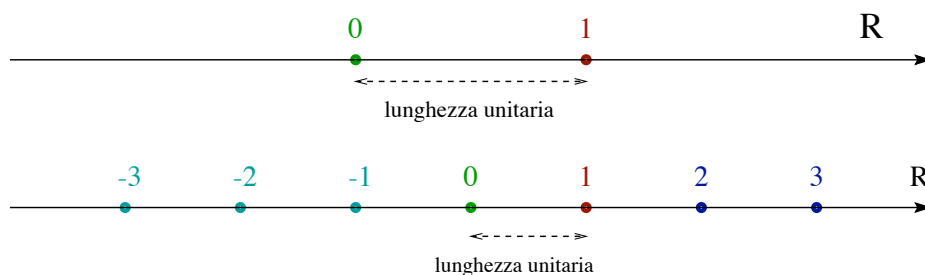


FIGURA 1. Dall'alto verso il basso: (a) i punti 0 e 1 sulla retta R determinano il segmento di lunghezza unitaria; (b) la rappresentazione dei numeri interi su R .

(iii) Ripetendo lo stesso procedimento nella direzione negativa (alla sinistra di 0), otteniamo, allo stesso modo, una rappresentazione per gli interi negativi. Con questo procedimento, insieme a quanto fatto in (ii), arriviamo ad una rappresentazione i numeri interi sulla retta R .

(iv) Rappresentiamo ora i numeri razionali $\frac{p}{q}$ su R per cui $p, q \in \mathbb{N}$ con p più piccolo di q . Dato che il numero $\frac{p}{q}$ è, moralmente, “ p volte $1/q$ ”, si divide l'intervallo unitario in q parti di uguale lunghezza e si prende come rappresentante di $\frac{p}{q}$ l'estremo destro del p -esimo intervallo.

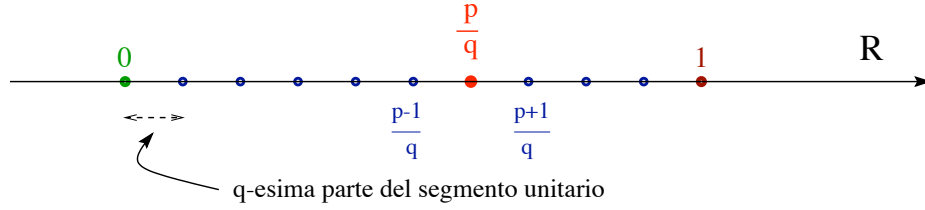


FIGURA 2. La rappresentazione su R di un numero razionale $\frac{p}{q}$ per cui $p, q \in \mathbb{N}$ e $p < q$.

(v) Nel caso di un qualsiasi numero razionale positivo p/q , si determinano p' e r positivi, con r più piccolo di q tali che

$$\frac{p}{q} = p' + \frac{r}{q},$$

e si ripete l'operazione spiegata nel passo precedente nel segmento di estremi p' e $p' + 1$. Analogamente per i numeri razionali negativi.

Il significato geometrico della somma di numeri razionali è facile: se $x, y \in \mathbb{Q}$, il punto in R che corrisponde a $x + y$ corrisponde al punto che si ottiene applicando una copia del segmento di estremi 0 e y sul punto x in modo da far coincidere la copia del punto 0 con x .

Ordine, modulo e distanza nei numeri razionali. Una volta rappresentati i numeri razionali su una retta R che è orientata, è possibile mettere ordine in \mathbb{Q} .

DEFINIZIONE 1.1. Ordinamento in \mathbb{Q} . Se $x, y \in \mathbb{Q}$, allora x è minore di y (o, equivalentemente, y è maggiore di x), se, nella rappresentazione su R , x si trova alla sinistra di y . In tal caso si scrive

$$x < y.$$

Se x è minore di y o uguale ad y , si scrive $x \leq y$

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad x < y \quad \text{oppure} \quad x = y.$$

Un numero $x \in \mathbb{Q}$ è **positivo**¹ se $x > 0$ ed è **negativo** se $x < 0$. Se x è positivo o è zero, si dice che è **non negativo** e si scrive $x \geq 0$ e, analogamente, se x è negativo o è zero, è **non positivo** e si scrive $x \leq 0$.

¹Qualcuno usa una terminologia leggermente diversa: con il termine “positivo” indica un numero alla destra di 0 , eventualmente anche 0 stesso, mentre un numero positivo, ma non zero, viene detto “strettamente positivo”. Analogo discorso per i numeri negativi e per la relazione d'ordine. Se y è alla destra di x ed eventualmente è x dice che “ y è maggiore di x ”; se y è alla destra di x , ma non coincide con x , dice che “ y è strettamente maggiore di x ”. Basta mettersi d'accordo.

Basandosi sull'idea grafica che abbiamo dei numeri razionali, è sensato assumere che la relazione d'ordine $<$ goda delle due proprietà seguenti: per ogni x, y, z ,

$$\begin{aligned} x < y, \quad y < z &\Rightarrow x < z, \\ x < y &\Rightarrow x + z < y + z, \\ x, y > 0 &\Rightarrow x \cdot y > 0. \end{aligned}$$

Infatti, la prima implicazione discende dal fatto che i numeri $x + z$ e $y + z$ sono traslazioni di z dei punti x ed y e quindi mantengono lo stesso ordinamento. La seconda si interpreta notando che, se $x = p/q$, il punto corrispondente al prodotto $x \cdot y$ si ottiene “incollando”, nella direzione dei numeri positivi, p copie di un segmento di lunghezza y/q .

A questo punto, si introduce un oggetto di fondamentale importanza: il *modulo*.

DEFINIZIONE 1.2. Modulo e distanza in \mathbb{Q} . Dato $x \in \mathbb{Q}$, il **modulo** di x (detto anche **valore assoluto** o **norma**) si indica con $|x|$ ed è definito da

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Dati due numeri razionali $x, y \in \mathbb{Q}$, si chiama **distanza** di x da y il numero $|x - y|$.

Geometricamente, il numero (non negativo) $|x|$ rappresenta la lunghezza del segmento in R che ha per estremi il punto x ed il punto 0; analogamente $|x - y|$ è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto x ed il punto y .

Non tutte le lunghezze sono razionali. Passiamo al collaudo di \mathbb{Q} (rappresentato sulla retta R), per la misurazione di lunghezze. Armiamoci di una fettuccia

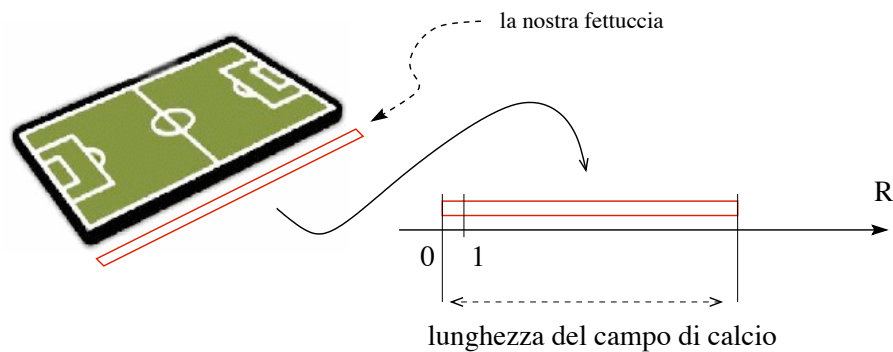


FIGURA 3. Il procedimento di misurazione: un campo di calcio.

di stoffa (o di fantasia) e procediamo nel modo più semplice possibile: se vogliamo misurare la lunghezza di un certo oggetto (un tavolo, un campo di calcio, quel che

sia...), fissiamo un estremo della fettuccia ad una estremità dell'oggetto da misurare ed estendiamo fino all'altro estremo, tagliamo la fettuccia in concomitanza con il secondo estremo e riportiamo la fettuccia lungo la retta R . Collochiamo il primo estremo in corrispondenza del punto 0, stendiamo la fettuccia in tutta la sua lunghezza nella direzione positiva e vediamo il secondo estremo dove va a finire. **Se** quest'ultimo finisce in corrispondenza di un numero razionale, quel numero è la lunghezza desiderata... Non è un errore di stampa il fatto che il “Se” sia scritto in neretto: questo procedimento non sempre funziona: alcune lunghezze non corrispondono a nessun numero razionale!

Già i matematici greci scoprirono che esistono segmenti la cui lunghezza non è un numero razionale, cioè esistono punti della retta R che non corrispondono a nessun numero razionale: in simboli, $R \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. L'esempio più elementare di lunghezza non razionale è la lunghezza ℓ della diagonale di un quadrato di lato unitario. Infatti, per

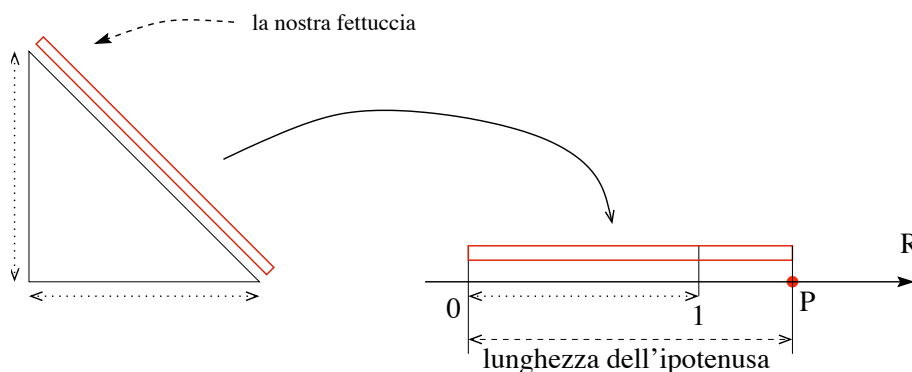


FIGURA 4. Il procedimento di misurazione dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di lato unitario: il punto P non corrisponde a nessun numero razionale.

il teorema di Pitagora, $\ell^2 = 2$, ma *nessun numero razionale elevato al quadrato dà per risultato il valore 2*.²

ESERCIZIO 1.3. *Dimostrare che \sqrt{p} non è razionale per ogni numero p primo. Lo stesso per $\sqrt[n]{p}$ con $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Quali altre classi di numeri irrazionali sai immaginare a partire da questo esempio?*

L'introduzione dei numeri razionali, che sembrava così promettente, non ha risolto il difetto “metrico” che avevamo già trovato in \mathbb{N} . Infatti è possibile costruire oggetti

²Per dimostrare questa affermazione, supponiamo, al contrario, che $\ell = p/q$ per opportuni p, q interi positivi. Senza restrizione, possiamo supporre che p e q non abbiano fattori comuni (altrimenti si possono semplificare). Allora si deve avere $p^2 = 2q^2$, quindi p^2 deve essere un numero pari. Dato che il quadrato di un numero dispari è dispari, anche p deve essere pari, cioè della forma $p = 2r$ con r intero positivo. Sostituendo, si ottiene $4r^2 = 2q^2$, e, semplificando il fattore 2, $2r^2 = q^2$. Ne segue che q^2 è pari e, di conseguenza, lo è anche q . Quindi p e q avrebbero un fattore comune in contraddizione con la nostra ipotesi. Pertanto ℓ non può essere razionale.

la cui lunghezza non è misurabile con un elemento di \mathbb{Q} . Prossima tappa: estendere \mathbb{Q} in modo da ottenere un insieme (con le stesse proprietà algebriche e metriche di \mathbb{Q}) in cui sia possibile misurare tutte le lunghezze possibili. Questa estensione è l'oggetto che chiamiamo *insieme dei numeri reali*.

2. Descrizione intuitiva dei numeri reali

Dato che i numeri razionali non sono sufficienti per le misurazioni, è necessario “inventare” nuovi numeri che permettano di misurare tutti i possibili segmenti. Prendiamo il toro per le corna e dichiariamo che: “ogni punto della retta R è un numero”, che chiameremo **numero reale**:

insieme dei numeri reali: $\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \{\text{punti di } R \text{ che non sono in } \mathbb{Q}\}.$

Un elemento di \mathbb{R} che non sia in \mathbb{Q} si dice **numero irrazionale**. I numeri reali quindi, per definizione, coincidono con quelli della retta reale R . Esattamente come detto e fatto in precedenza, pensiamo la retta \mathbb{R} con orientamento da sinistra verso destra. La scelta del simbolo \mathbb{R} (che sostituisce R) sta a ricordare che stiamo pensando i punti della retta come oggetti per cui sono definite operazioni di somma e prodotto.

Questa definizione di numero reale grida vendetta: è intuitiva e andrebbe precisata rigorosamente. A questo livello, però, ci accontentiamo di questa versione naïf.³

Si tratta ora di capire quale rappresentazione possiamo dare ad un qualsiasi numero reale, cosa significano le operazioni di somma e prodotto in \mathbb{R} e i concetti di ordine e distanza?

Per la somma (e quindi la differenza) basta ricordare il significato della somma di razionali come punti sulla retta. Se x, y sono due numeri reali, per determinare dove si trovi sulla retta \mathbb{R} il punto $x + y$, basta procedere come segue. Rappresentiamo y come una freccia che parte da 0 e arriva nel punto corrispondente y . Per ottenere $x + y$ basta fare un “cut’n’paste” della freccia da 0 a y : se ne fa una copia e si trasla in modo da far coincidere il punto di partenza della freccia con x . Il nuovo punto di arrivo della freccia determina la posizione di $x + y$. Nel caso della differenza $x - y$, bisogna invertire la freccia che rappresenta y .

Le operazioni di prodotto e divisione in \mathbb{Q} possono essere estese, per approssimazione, ad \mathbb{R} , ma non ci soffermeremo qui sulla questione. Ci limitiamo a comunicare che valgono le stesse proprietà elencate per i numeri razionali, che, per completezza, riportiamo qui di seguito:

leggi associative: $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a(bc) = (ab)c$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$;

³L'idea intuitiva di numero reale come punto dell'asse numerico è stata alla base della matematica per lunghissimo tempo. Solo più tardi, nel XIX secolo, tale ipotesi è stata giustificata in modo rigoroso.

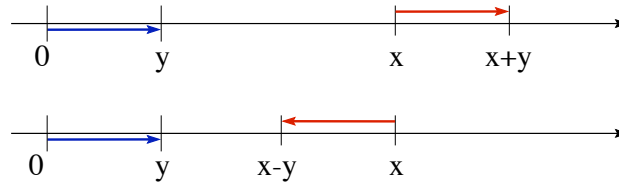


FIGURA 5. Somma e differenza di numeri reali.

leggi commutative: $a + b = b + a$ e $ab = ba$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$;

esistenza dell'elemento neutro per la somma: $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;

esistenza dell'elemento neutro per il prodotto: $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;

esistenza dell'opposto per la somma: $a + (-a) = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;

esistenza dell'inverso per il prodotto: $a \cdot a^{-1} = 1$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

legge distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Anche ordinamento e distanza si possono estendere da \mathbb{Q} ad \mathbb{R} .

DEFINIZIONE 2.1. Ordinamento in \mathbb{R} . Se $x, y \in \mathbb{R}$, allora x è minore di y (o y è maggiore di x), se x si trova alla sinistra di y . In tal caso si scrive $x < y$.

Per i simboli \leq e \geq , e per i termini positivo/negativo/non negativo/non positivo si utilizza lo stesso significato già visto per i numeri razionali.

DEFINIZIONE 2.2. Modulo e distanza in \mathbb{R} . Dato $x \in \mathbb{R}$, il modulo di x (detto anche valore assoluto o norma) si indica con $|x|$ ed è definito da

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Dati due numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, si chiama distanza di x da y il numero $|x - y|$.

Tutte le proprietà che abbiamo descritto fanno di \mathbb{R} (così come lo era \mathbb{Q}) un **campo totalmente ordinato dotato di metrica**... più qualcosa... Mentre \mathbb{Q} è, in un certo senso, “bucato”, \mathbb{R} non lo è... Cosa vuol dire rigorosamente che “ \mathbb{R} non ha buchi”? Ci dedicheremo tra una manciata di pagine a spiegare in maniera più precisa come trasformare questa idea intuitiva in un oggetto matematicamente chiaro.

M'approssimo in un denso. Sebbene i numeri razionali non coprano tutta la retta dei numeri reali \mathbb{R} per via della presenza di numeri irrazionali, è vero che ci vanno molto vicini... Comunque si fissa una soglia di errore ammissibile, è possibile approssimare un numero reale con un numero razionale commettendo un errore più piccolo della soglia consentita. Infatti, supponiamo (per semplicità) che la soglia sia della forma $1/q_0$ con $q_0 \in \mathbb{N}$ (ad esempio, per $q_0 = 1000$, l'errore ammesso è $1/1000$). Dividiamo la retta reale \mathbb{R} in segmenti di lunghezza $1/q_0$ e consideriamo i punti della

forma p/q_0 con $p \in \mathbb{Z}$. Dato che \mathbb{R} è l'unione dei segmenti con estremi p/q_0 e $(p+1)/q_0$ per $p \in \mathbb{Z}$, per ogni punto x di \mathbb{R} esiste p_0 tale che

$$\frac{p_0}{q_0} \leq x \leq \frac{p_0 + 1}{q_0}.$$

Quindi è possibile approssimare il punto x con un razionale p_0/q_0 commettendo un errore minore di $1/q_0$. Il fatto che i punti razionali siano arbitrariamente vicini ad ogni punto x di \mathbb{R} si esprime affermando che *l'insieme dei razionali è denso nell'insieme dei numeri reali* e si scrive, in simboli, come segue

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che} \quad |x - y| < \varepsilon,$$

Torneremo più avanti sulla validità di questa affermazione.

Dal punto di vista della misurazione concreta, la densità è una proprietà notevole: infatti, tenendo conto che ogni tipo di misurazione ha una precisione minima fissata, ogni misura può essere, in concreto, compiuta attraverso numeri razionali. Anche una qualsiasi calcolatrice è in grado di gestire solo (un sottoinsieme dei) numeri razionali: ad esempio, spingendo i tasti che forniscono il valore della radice quadrata del numero 2 si ottiene una risposta del tipo 1,4142136 che è una approssimazione razionale dell'effettivo valore del numero reale $\sqrt{2}$.

Intervalli limitati ed illimitati. Dati $a < b$, il segmento in \mathbb{R} di estremi a, b si chiama **intervallo**. Se gli estremi a, b sono inclusi nell'intervallo, l'intervallo si dice **chiuso**, se invece vengono esclusi si dice **aperto**:

$$\text{intervallo aperto:} \quad (a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$$\text{intervallo chiuso:} \quad [a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

In entrambi i casi il valore $b - a$ è la **lunghezza** dell'intervallo (o **misura** dell'intervallo).

Si possono considerare anche intervalli semiaperti (o semichiusi) includendo uno solo dei due estremi: $(a, b]$ oppure $[a, b)$. Anche le semirette sono usualmente considerate "intervalli" e si indicano con

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \quad [a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},$$

e varianti. Anche l'insieme \mathbb{R} può essere pensato come intervallo e, in tal caso, viene indicato con $(-\infty, +\infty)$. Se necessario, per distinguere il caso degli intervalli ad estremi in \mathbb{R} da quello delle semirette, si parla, nel primo caso, di *intervalli limitati*, nel secondo di *intervalli illimitati*.

Gli intervalli (limitati e illimitati) sono tutti e soli i sottoinsiemi I di \mathbb{R} che godono della proprietà seguente:

$$(x_1, x_2) \subset I \quad \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2.$$

Questa proprietà si esprime dicendo che *gli intervalli sono insiemi connessi*.

Il piano ed altre realtà. Dati due insiemi A e B si indica con $A \times B$ l'insieme prodotto cartesiano di A e B : $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$,

Ad esempio, a quale insieme appartiene l'oggetto "giorno dell'anno"? Due numeri lo individuano: il giorno del mese (che appartiene all'insieme $I := \{1, 2, 3, \dots, 31\}$) e il numero del mese (che appartiene all'insieme $J := \{1, 2, 3, \dots, 12\}$), quindi è un elemento del prodotto cartesiano $I \times J$. Ad esempio, la data 3 aprile corrisponde all'elemento $(3, 4)$ dell'insieme $I \times J$.

Con il simbolo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o con \mathbb{R}^2 si indica il prodotto cartesiano dell'insieme \mathbb{R} con sé stesso, ossia l'insieme costituito dalle coppie ordinate (x, y) dove $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

La sottolineatura della parola "ordinate" sta a segnalare che, in generale, l'elemento (x, y) è diverso da (y, x) . Ad esempio, $(1, 2) \neq (2, 1)$ (il primo febbraio è diverso dal 2 gennaio!). Per rappresentare l'insieme \mathbb{R}^2 si utilizza in genere un piano. Scegliete due rette orientate di riferimento, ortogonali fra loro e battezzatele, rispettivamente "asse x " e "asse y ". Per disegnare l'elemento (x_0, y_0) , si segna sull'asse x il punto H corrispondente al numero reale x_0 e sull'asse y quello K corrispondente al numero reale y_0 . Dopo di che si tracciano la retta per H e parallela all'asse y (quindi ortogonale all'asse x) e la retta per K e parallela all'asse x . Il punto intersezione rappresenta il punto (x, y) . I numeri x e y sono detti **coordinate** di (x, y) . Pensando $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come

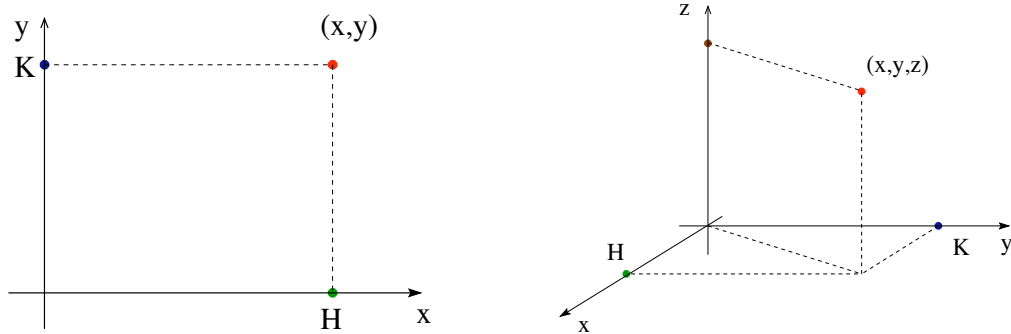
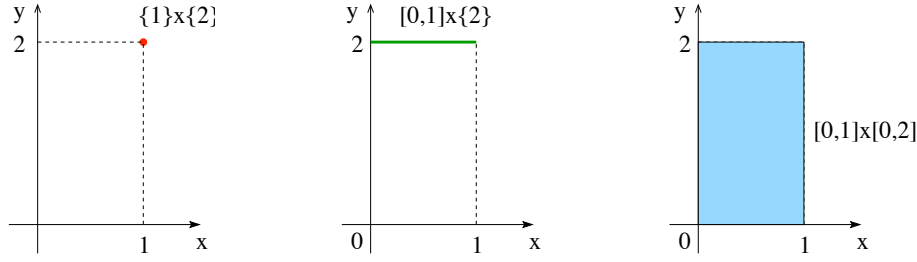


FIGURA 6. Il piano cartesiano \mathbb{R}^2 e lo spazio cartesiano \mathbb{R}^3 .

un piano, come si rappresentano gli insiemi $\{1\} \times \{2\}$, $[0, 1] \times \{2\}$ e $[0, 1] \times [0, 2]$? Rispettivamente, un punto, un segmento ed un rettangolo (Fig. 7).

Il piano reale \mathbb{R}^2 è dotato in maniera naturale dell'operazione di somma: si tratta della somma definita componente per componente:

$$(1) \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

FIGURA 7. Gli insiemi $\{1\} \times \{2\}$, $[0, 1] \times \{2\}$ e $[0, 1] \times [0, 2]$.

Non è evidente, al contrario, come dare una nozione di prodotto tra due punti⁴ del piano \mathbb{R}^2 . E' possibile, invece, introdurre la nozione di **prodotto per uno scalare**: dato $\lambda \in \mathbb{R}$, si definisce

$$(2) \quad \lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda y).$$

Con le definizioni (1) e (2), il piano \mathbb{R}^2 viene dotato della struttura di **spazio vettoriale** e i suoi elementi vengono detti **vettori**.

Analogamente $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o \mathbb{R}^3 , indica l'insieme di terne ordinate di numeri reali (x, y, z) . L'insieme \mathbb{R}^3 si rappresenta con lo spazio, tramite una scelta di tre assi coordinati ortogonali tra loro. In generale, \mathbb{R}^n (dove $n \in \mathbb{N}$) indica l'insieme delle n -ple del tipo (x_1, \dots, x_n) dove $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. In sintesi

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

I casi $n = 2$ e $n = 3$ possono essere rappresentati geometricamente come un piano e tutto lo spazio, rispettivamente. In questa rappresentazione, i valori della coppia/terna corrispondono alle coordinate cartesiane di un punto. Nel caso di \mathbb{R}^n , i valori della n -pla possono essere interpretati come coordinate cartesiane n -dimensionali, ma poco si può visualizzare a meno di non possedere dei superpoteri.

Nell'insieme \mathbb{R}^n sono definite le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare, dati $x = (x_1, \dots, x_n), \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(3) \quad x + \xi = (x_1, \dots, x_n) + (\xi_1, \dots, \xi_n) := (x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n).$$

$$(4) \quad \lambda(x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

In questo modo, \mathbb{R}^n acquisisce la struttura di **spazio vettoriale** e, anche in questo caso, i suoi elementi vengono detti **vettori**.

⁴Definire il prodotto componente per componente, non è una buona idea (perché?). Una possibilità per introdurre il concetto di prodotto nel piano è alla base della definizione di **numero complesso**, che verrà ripresa più avanti.

Anche in \mathbb{R}^n è possibile introdurre le nozioni di modulo e distanza. La versione che generalizza le corrispondenti definizioni date in \mathbb{R} è quella che segue.

DEFINIZIONE 2.3. *Modulo e distanza in \mathbb{R}^n .* Dato $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il modulo di x si indica con $|x|_n$ ed è definito da

$$(5) \quad |x|_n := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, si chiama distanza di x da y il numero $|x - y|_n$.

Queste definizioni sono state fornite per completezza. Nella quasi totalità di quel che segue, utilizzeremo quasi sempre solo il modulo e la distanza dell'insieme \mathbb{R} .

3. Ordinamento e struttura metrica dei numeri reali

Ordine e disuguaglianze. Nella pratica spesso è difficile determinare con precisione una quantità x . Ben più facile è ottenere una *stima di x* , cioè mostrare che x è compreso tra una certa quantità a e un'altra quantità b . e, in molte situazioni, una buona stima di x è un'informazione sufficiente per la soluzione del problema. Le disuguaglianze sono, perciò, un oggetto fondamentale nell'uso dei numeri reali.

Come eredità delle corrispondenti proprietà valide per i numeri razionali, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ valgono

$$\begin{array}{lll} \text{(proprietà transitiva)} & x < y, \quad y < z & \Rightarrow \quad x < z, \\ \text{(invarianza per traslazioni)} & x < y & \Rightarrow \quad x + z < y + z, \\ \text{(regola del segno)} & x, y > 0 & \Rightarrow \quad x \cdot y > 0. \end{array}$$

Da queste due implicazioni discendono alcune regole di uso quotidiano.

i. *Le disuguaglianze possono essere sommate*

$$w < x, \quad y < z \quad \Rightarrow \quad w + y < x + z.$$

Infatti, grazie all'invarianza per traslazioni, dalle ipotesi discendono $w + y < x + y$ e $x + y < x + z$. Quindi, per la proprietà transitiva, si ha $w + y < x + z$.

Sottrarre le disuguaglianze ottenendo $w - y < x - z$, invece, **non** è legittimo: ad esempio, $1 > 2$ e $1 > 3$, ma $1 - 1 = 0 > -1 = 2 - 3$.

ii. *Le disuguaglianze possono essere moltiplicate per un numero positivo*

$$x < y, \quad 0 < z \quad \Rightarrow \quad x \cdot z < y \cdot z.$$

Infatti, l'invarianza per traslazioni permette di dedurre la relazione $0 < y - x$ e quindi, per la regola dei segni, vale la relazione $0 < (y - x) \cdot z = y \cdot z - x \cdot z$. Una nuova applicazione dell'invarianza per traslazioni fornisce la conclusione.

Nel caso in cui x, y siano positivi, questa proprietà può essere interpretata come una *invarianza per dilatazioni/compressioni*, nel senso che se il segmento di estremi 0 e x è più corto di quello di estremi 0 ed y , allora anche le corrispondenti dilatazioni/compressioni di un fattore z (dilatazioni nel caso $z > 1$ e compressioni nel caso $z < 1$) mantengono la stessa relazione di ordine.

iii. *il prodotto $x \cdot y$ è positivo se e solo se x e y sono di segno concorde ed è negativo se e solo se sono di segno discorde.*

Basta infatti considerare tutti i casi possibili. Il caso di x ed y positivi è dato dalla regola del segno. Nel caso $y < 0 < x$, si ha $x \cdot y = x \cdot (-1) \cdot (-y) = -x \cdot (-y)$. Dato che $-y > 0$, ne segue $x \cdot (-y) > 0$ e quindi $x \cdot y < 0$. Gli altri casi si trattano analogamente.

Una parte dell'Analisi matematica consiste nel lavorare con disuguaglianza per stimare grandezze assolute e grandezze relative. Spesso e volentieri quindi ci si trova a voler controllare dall'alto o dal basso espressioni complicate con altre espressioni dalla struttura più semplice. Si tratta di un'arte non semplice che si impara nel corso degli anni. Vediamo qui qualche primo esempio di disequazione significativa.

Ad esempio, dimostriamo che *per ogni $x \geq 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale la stima*

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Utilizziamo il **metodo di induzione**: dato che l'affermazione da dimostrare consiste in una famiglia di disequazioni, una per ogni numero naturale n ,

1. dimostriamo l'affermazione nel caso $n = 1$;

2. supponiamo valida l'affermazione per n generico e dimostriamola per $n + 1$.

In questo modo, siamo garantiti che la proprietà vale per ogni intero n . Infatti, utilizzando il passo **2.** con la scelta $n = 1$, deduciamo la validità della disequazione nel caso $n = 2$; basandoci di nuovo sul passo **2.** con la scelta $n = 2$, otteniamo il risultato per $n = 3$, e così via...

Il primo passo è semplicissimo: infatti si ha $(1+x)^1 = 1+x$ e $1+1x = 1+x$, quindi i due termini coincidono per ogni scelta di x .

Supponiamo ora che la proprietà valga con n . Di conseguenza, utilizzando l'ipotesi induttiva, si hanno

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza discende dal fatto che nx^2 è non negativo. In quale punto è stata utilizzata la richiesta $x \geq 0$?

Oltre a sommare/moltiplicare disequazioni, è chiaro che si può ambire ad applicare altre operazioni. Vediamo il caso dell'elevazione a potenza.

Nel caso dell'elevazione al quadrato, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, vale $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$. Se $x, y > 0$, allora $y + x > 0$; quindi

$$\text{se } x, y > 0, \quad \text{allora} \quad x < y \iff x^2 < y^2.$$

Espresso in parole, *l'elevazione al quadrato preserva l'ordine dei numeri positivi*⁵. La stessa proprietà vale per qualsiasi potenza $n \in \mathbb{N}$: per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$(6) \quad \text{se } x, y > 0, \quad \text{allora} \quad x < y \iff x^n < y^n.$$

Vale infatti la fattorizzazione

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Dato che il secondo fattore a secondo membro è positivo se lo sono x ed y , $y^n - x^n$ ha lo stesso segno di $y - x$.

Se n è dispari, la conclusione di (6) vale per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Infatti, nel caso in cui entrambi i valori x ed y siano negativi, la relazione $x < y < 0$ equivale a $0 < -y < -x$ che, per quanto visto in precedenza, vale se e solo se $(-y)^n < (-x)^n$. Dato che $(-1)^n = -1$ per n dispari, ne segue $-y^n < -x^n$, cioè $x^n < y^n$. Se $x < 0 < y$, allora, per la regola dei segni, si ha $x^n < 0 < y^n$.

Il modulo. Ricordiamo che, dato $x \in \mathbb{R}$, il **modulo** di x è definito da

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Dalla definizione segue facilmente l'uguaglianza: $|x| = \max\{x, -x\}$.

L'innocuo simbolo $|\cdot|$ gode di tre proprietà che gli conferiscono poteri strabilianti.

PROPOSIZIONE 3.1 (Proprietà del modulo). *Valgono le seguenti proprietà:*

- (i) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- (ii) il prodotto dei moduli è il modulo del prodotto: $|xy| = |x||y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
- (iii) vale la disuguaglianza triangolare:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. La prima proprietà è banale. Per la seconda, basta tenere conto della regola dei segni per il prodotto di numeri reali: ad esempio, consideriamo il caso $x < 0 < y$, allora $xy < 0$ e quindi $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$. Analogamente per gli altri casi. Resta da dimostrare la disuguaglianza triangolare (iii). Distinguiamo i casi

⁵Attenzione, lo stesso NON è vero per numeri reali qualsiasi! Ad esempio, $-2 < -1$, ma $(-2)^2 = 4 > 1 = (-1)^2$.

$x + y \geq 0$ e $x + y < 0$. Nel primo caso, la disuguaglianza afferma $x + y \leq |x| + |y|$, che discende direttamente da $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$ e dalla somma di queste due disequazioni. Nell'altro caso, la disuguaglianza diviene $-(x + y) \leq |x| + |y|$, che discende dalla somma delle disequazioni $-x \leq |x|$ e $-y \leq |y|$. \square

Dato che il modulo è indipendente dal segno, cioè $|-x| = |x|$, la disuguaglianza triangolare vale anche con il segno $-$ al posto di $+$, cioè vale anche $|x - y| \leq |x| + |y|$. È facile trovare esempi che mostrano che per certe scelte di x e y la disuguaglianza $|x - y| \leq |x| - |y|$ è falsa.

Applicando due volte la disuguaglianza triangolare, si ottiene

$$|x + y + z| = |(x + y) + z| \leq |x + y| + |z| \leq |x| + |y| + |z|.$$

Allo stesso modo, si ottiene la disuguaglianza più generale

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

o, equivalentemente (tramite il simbolo di sommatoria)

$$(7) \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

Quindi, il modulo della somma è sempre minore o uguale della somma dei moduli.

Il ruolo fondamentale del modulo è di definire la distanza tra numeri reali: precisamente, dati $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\text{distanza di } x \text{ da } y: \quad |x - y|.$$

L'insieme dei punti che distano da un punto fissato meno di un dato valore fissato ricorrerà numerose volte nelle prossime pagine.

DEFINIZIONE 3.2. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, si chiama **intorno di x_0 di raggio r** l'insieme e si indica con $I_r(x_0)$

$$I_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$$

È evidente l'equivalenza

$$(8) \quad |x - x_0| < r \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 - r < x < x_0 + r,$$

quindi l'intorno di x_0 di raggio r è un intervallo aperto e, precisamente

$$I(x_0; r) = (x_0 - r, x_0 + r).$$

Dalla relazione (8) segue anche la stima

$$(9) \quad \left| |x| - |y| \right| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

che può essere interpretata come una stima di errore per il modulo: se si sostituisce il modulo del valore y con quello del valore x , l'errore commesso è sempre minore o uguale alla distanza tra i valori y ed x . Infatti, scegliendo x, x_0, r pari a $|x|, |y|$ e $|x - y|$, rispettivamente, si deduce che (9) è equivalente a

$$|y| - |x - y| \leq |x| \leq |y| + |x - y|,$$

ed entrambe le relazioni discendono dalla disuguaglianza triangolare (perché?).

4. La verità sui reali

È giunto il momento di riprendere la questione della *completezza* dei numeri reali. Partiamo da un esempio illustrativo che spiega la situazione: disegniamo due curve nel piano così come in Figura 8. La domanda è: *queste due curve si intersecano oppure*

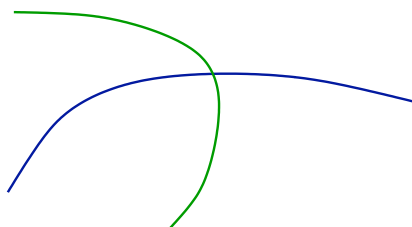


FIGURA 8. Due curve nel piano.

no? Un sondaggio del 2003 dà queste percentuali di risposta: il 78% degli intervistati dice “SI, SEMPRE”, il 5% dice “QUALCHE VOLTA”, il 3% dice “QUASI MAI”, il 10% risponde “NON SO” e il 4% fugge scappando per timore di fare brutta figura. Evidentemente la risposta è racchiusa in quello che succede vicino al punto di incrocio delle due curve. Proponiamo tre maniere diverse di ragionare.

Versione “atomistica” (o “alla Democrito”). In questa versione, si immagina che le curve siano costituite da punti equidistanti (a distanza tanto piccola che l’occhio non è in grado di distinguerli, e vede solo un linea apparentemente continua). Con un ingrandimento di scala si vede bene che (a meno di casi particolarmente fortunati) le due curve, discretizzate in tanti atomi, non si incontrano. La risposta in questo caso è “(QUASI) MAI”.

Versione “razionale”. Questa volta, immaginiamo le curve come rette, formate dall’unione di soli punti razionali, deformate. Qui il disegno non è facile: dato che in ogni intervallo cadono infiniti punti di \mathbb{Q} , nessun ingrandimento permette di riconoscere “a occhio” se ci sia intersezione oppure no. Però sappiamo già che in alcuni casi non c’è intersezione: ad esempio, non esistono numeri razionali x tali che $x^2 = 2$, cioè le

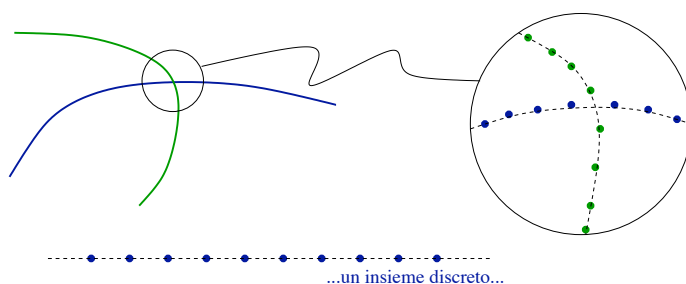


FIGURA 9. Versione “quantizzata”: una retta è un’unione di punti a distanza fissata.

curve nel piano (x, y) (con x, y razionali) definite da $y = x^2$ e $y = 2$ non si intersecano. Il seguace di questa corrente di pensiero risponde “QUALCHE VOLTA”.

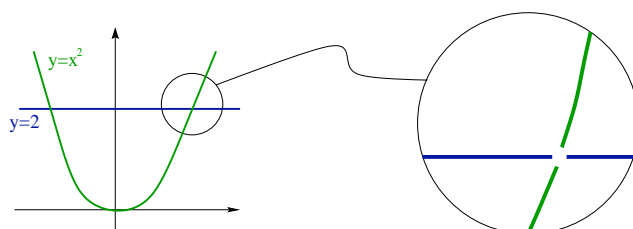


FIGURA 10. Versione “razionale”: la parabola $y = x^2$ e la retta $y = 2$ nel piano (x, y) con $x, y \in \mathbb{Q}$ non si intersecano mai.

Versione “reale”. Infine c’è la versione reale: rette e curve costituiscono un “continuo” di punti senza interruzione. Dunque le due curve si intersecano sempre. Ogni ingrandimento del punto di incontro delle curve dà sempre e comunque lo stesso tipo di figura.

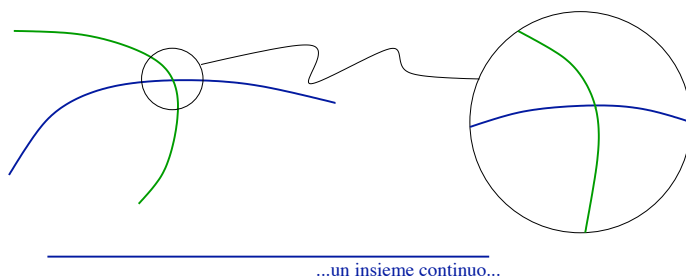


FIGURA 11. Versione “reale”: l’idea intuitiva di “continuo”.

Qual’è la risposta “esatta”? Tutte allo stesso tempo... Quello che conta, infatti, è decidere fin dall’inizio qual’è il tipo di visione che vogliamo prediligere e seguirla con coerenza e chiarezza. Scegliere una strada significa decidere qual’è l’ambiente base

(discreto, razionale, continuo) con cui lavoriamo chiarendo bene quali siano le proprietà di cui gode. Tali proprietà vengono tradotte in *assiomi* (o *postulati*) che si dichiarano veri al principio. *La nostra scelta è di lavorare con l'insieme dei numeri reali*. I motivi sono tanti, primo fra tutti il fatto che la percezione del “continuo”, cioè di un universo “senza buchi” (seppure sbagliata a livello microscopico!), è estremamente naturale.

Occorre ora chiarire il significato preciso della frase “l'insieme dei numeri reali non ha buchi”. Ci sono vari modi per esprimere la *completezza dei numeri reali*; qui scegliamo come assiomi di partenza

- la *proprietà di Archimede*,⁶
- e il *postulato degli intervalli incapsulati*,

Analizziamo il contenuto dei due principi separatamente.

Proprietà di Archimede. *Per ogni numero x , esiste un numero naturale n più grande di x : in simboli,*

$$\forall x, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \text{tale che } x < n.$$

La proprietà di Archimede è vera nell'insieme \mathbb{Q} . Infatti, se $x \in \mathbb{Q}$, allora esso è della forma $x = \frac{p}{q}$ con p, q interi. Se supponiamo, senza perdere in generalità, $x > 0$, allora p e q possono essere scelti naturali. Se $p < q$, x è minore di 1; altrimenti, è possibile utilizzare l'algoritmo della divisione per scrivere $x = m + \frac{r}{q}$ con $r < q$. Allora, per il numero naturale $m + 1$ si ha

$$x = m + \frac{r}{q} < m + 1.$$

e il numero naturale $m + 1$ è quanto richiesto dalla proprietà.

L'esistenza di numeri naturali più grandi di una qualsiasi numero dato ammette come formulazione equivalente l'esistenza di intervalli di lunghezza razionale arbitrariamente piccola. Espresso in altri termini, si richiede di poter effettuare ingrandimenti arbitrariamente forti in scala razionale di una piccola zona della retta reale a cui si è interessati. In effetti, vale la seguente implicazione

$$(10) \quad x \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 0.$$

Infatti, se, per assurdo fosse $x > 0$, per la proprietà di Archimede, esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > 1/x$. Dato che $x > 0$, anche $1/x > 0$, quindi n è diverso da zero. Moltiplicando per x/n , si dedurrebbe $x > 1/n$ in contraddizione con l'ipotesi.

⁶In letteratura, la proprietà di Archimede è talvolta attribuita ad Eudosso di Cnido, che, probabilmente, ne è stato il primo ideatore. Attenzione, inoltre, a non confondere la proprietà di Archimede con il *principio di Archimede* che riguarda la galleggiabilità dei corpi e, quindi, pertiene a tutt'altro contesto.

Una conseguenza notevole dell'assioma di Archimede afferma, sostanzialmente, che, ovunque ci si trovi lungo la retta reale, si trovano sempre numeri razionali.

PROPOSIZIONE 4.1. *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $x < r < y$.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il caso $0 < x < y$. Dato che $1/(y - x) \in \mathbb{R}$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $N \geq 1/(y - x)$. Consideriamo il sottoinsieme di \mathbb{N} definito da

$$K := \{k \in \mathbb{N} : k \leq Nx\},$$

che è composto di un numero finito di elementi e indichiamo con h il più grande degli elementi di K . Allora, il numero razionale $r := (h + 1)/N$ verifica la tesi. Infatti, dato che h è il più grande degli elementi di K , $h + 1 \notin K$, cioè $h + 1 > Nx$. Inoltre, si ha

$$y - r = y - \frac{h}{N} - \frac{1}{N} \geq y - \frac{Nx}{N} - \frac{1}{N} = y - x - \frac{1}{N} \geq (y - x) - (y - x) = 0,$$

dato che $N \geq 1/(y - x)$. □

Passiamo al secondo assioma alla base della definizione dell'insieme dei numeri reali.

Postulato degli intervalli incapsulati. *Per ogni successione di intervalli $I_0, I_1, \dots, I_n, \dots$ chiusi e limitati che siano incapsulati, cioè tali che*

$$I_{n+1} \subseteq I_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

esiste sempre almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 \in I_n$ per ogni n .

Questo postulato, detto anche *principio di Cantor*, esprime il fatto che l'intersezione di una sequenza di intervalli chiusi e limitati in \mathbb{R} è non vuota. Euristicamente, si può immaginare che il passaggio da un intervallo al successivo corrisponda ad un ingrandimento, in senso fotografico, di un segmento di numeri reali. L'assioma si traduce nel fatto che comunque si compiano queste successive zoomate, si riesce sempre a “vedere qualcosa”, cioè c'è sempre almeno un punto che cade in tutti gli intervalli.

Nell'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} , questo postulato non vale. Per convincersi di questo fatto, costruiamo un esempio di successione di intervalli incapsulati la cui intersezione è costituita dal solo numero $\ell = \sqrt{2}$ ed è quindi vuota in \mathbb{Q} . Consideriamo come I_0 l'intervallo $[1, 2]$. Dato che

$$1^2 = 1 < \ell^2 = 2 < 4 = 2^2$$

il numero ℓ è compreso in I_0 . Per costruire l'intervallo I_1 consideriamo il punto medio di I_0 , dato da $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ e notiamo che il suo quadrato è maggiore di 2. Quindi, si ha

$$1^2 = 1 < \ell^2 = 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Scegliendo $I_1 = [1, 3/2]$, otteniamo un secondo intervallo, contenuto nel primo e che contiene il valore ℓ . Iteriamo il procedimento: individuato il punto medio di I_1 , cioè $\frac{1 + 3/2}{2} = \frac{5}{4}$, calcoliamone il quadrato e stabiliamone la posizione rispetto a 2. Dato che

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} < \ell^2 = 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

scegliamo $I_2 = [5/4, 3/2]$. Il procedimento dovrebbe essere chiaro: ad ogni passo, consideriamo il punto medio dell'intervallo I_n e determiniamone la sua collocazione rispetto a $\ell = \sqrt{2}$ attraverso il calcolo del suo quadrato. In base a tale posizione, scegliamo l'intervallo I_{n+1} come l'unico intervallo che si ottiene bisecando I_n tramite il punto medio e che contiene $\sqrt{2}$. La successione

$$\cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots \subseteq I_3 = \left[\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right] \subseteq I_2 = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right] \subseteq I_1 = \left[1, \frac{3}{2}\right] \subseteq I_0 = [1, 2]$$

è una successione di intervalli incapsulati in cui l'intervallo n -esimo ha lunghezza 2^{-n} . L'intersezione di tutti questi intervalli contiene, per costruzione, il valore $\ell = \sqrt{2}$. Allo stesso tempo, non può contenere altri punti: infatti, dato $x \in I_n$ per ogni n , si ha

$$|x - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Per quanto visto in precedenza, durante la discussione della proprietà di Archimede, si ha $|x - \sqrt{2}| \leq 0$. Dato che il modulo fornisce sempre un valore non-negativo, $|x - \sqrt{2}| = 0$ cioè $x = \sqrt{2}$. Quindi, se considerata in \mathbb{R} la successione di intervalli I_n ha intersezione non vuota, ma, se considerata in \mathbb{Q} la successione ha intersezione vuota.

5. Estremo superiore ed estremo inferiore

Nel lavorare con l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} , ricorre frequentemente il problema di determinare la collocazione di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$, cioè di stabilire, casomai in maniera approssimativa, dove giaccia tale sottoinsieme. Una prima distinzione riguarda la proprietà di un insieme di possedere o non possedere numeri arbitrariamente grandi.

DEFINIZIONE 5.1. *Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è:*

- **limitato superiormente** se esiste un valore $\Lambda \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq \Lambda$ per ogni $x \in E$;
- **limitato inferiormente** se esiste un valore $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda \leq x$ per ogni $x \in E$;
- **limitato** se è limitato superiormente ed inferiormente.

Equivalentemente, si può affermare che un insieme è limitato se e solo se è contenuto in intervallo limitato. Analogamente, un insieme è limitato superiormente (inferiormente) se e solo se è contenuto in una semiretta del tipo $(-\infty, \Lambda]$ (del tipo $[\lambda, +\infty)$).

I valori Λ e λ espressi nella Definizione 5.1 sono rilevanti perché stimano la collocazione degli elementi di E .

DEFINIZIONE 5.2. *Un valore $\Lambda \in \mathbb{R}$ è un **maggiorante** di E se si ha $x \leq \Lambda$ per ogni $x \in E$; un valore $\lambda \in \mathbb{R}$ è un **minorante** di E se si ha $\lambda \leq x$ per ogni $x \in E$.*

In sostanza, un maggiorante Λ è una stima per eccesso di tutti gli elementi dell'insieme E e un minorante λ ne è una stima per difetto. Se, in qualche modo, siamo in grado di procurarci un minorante λ ed un maggiorante Λ , sappiamo già che l'insieme E è un sottoinsieme dell'intervallo chiuso $[\lambda, \Lambda]$.

Per uno stesso insieme E , è possibile fornire stime diverse. Ad esempio, se

$$E := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \dots \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \right\},$$

sono vere le inclusioni

$$E \subset [-2, 3], \quad E \subset [0, 1], \quad E \subset [-100, 100],$$

ovvero $-2, 0, -100$ sono minoranti di E e $3, 1, 100$ ne sono maggioranti. Tra le tre, la seconda inclusione fornisce una informazione migliore delle altre, perché più precisa. Nell'Esempio specifico, è possibile migliorare ulteriormente la stima? E, in generale, dato un insieme, in quali casi è possibile trovare una stima ottimale?

DEFINIZIONE 5.3. *Il valore $M \in \mathbb{R}$ è il **massimo** di E , e si scrive $M = \max E$, se*
(i) M è un maggiorante di E ; (ii) M è un elemento di E .

*Analogamente, il valore $m \in \mathbb{R}$ è il **minimo** di E , e si scrive $m = \min E$, se*
(i) m è un minorante di E ; (ii) m è un elemento di E .

Ad esempio, il valore 1 è il massimo dell'insieme $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ dato che maggiore di tutti gli elementi dell'insieme ed è della forma $1/n$ con $n = 1$. Se un insieme E ammette massimo M , tale valore è il migliore dei maggioranti, nel senso che è il più piccolo di questi: se M' è un altro maggiorante di E , vale $M \leq M'$. In definitiva, quindi, una stima ottimale dal basso e dall'alto di un sottoinsieme limitato di \mathbb{R} esiste nel caso in cui l'insieme ammetta massimo e minimo. Ad esempio, l'insieme

$$E := \{\sin x : x \in [0, 2\pi]\}$$

ha come massimo il valore 1 e come minimo il valore -1 . Infatti, da un lato, si tratta sicuramente di un maggiorante e di un minorante, rispettivamente; dall'altro, entrambi appartengono all'insieme in quanto $1 = \sin(\pi/2)$ e $-1 = \sin(3\pi/2)$.

Esistono però anche sottoinsiemi di \mathbb{R} che, pur ammettendo maggioranti e minoranti, non hanno massimo o minimo, o nessuno dei due. Il caso più semplice è quello di un qualsiasi intervallo aperto (a, b) che non ha né massimo né minimo. In alternativa, si

pensi all'insieme $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ che ha massimo, ma che non ha minimo. Quindi, dato un generico sottoinsieme limitato di \mathbb{R} non è detto che abbia senso scrivere $\max E$ e/o $\min E$. Bisogna, perciò, introdurre dei nuovi oggetti che siano ben definiti anche quando il massimo e/o il minimo non esistono.

DEFINIZIONE 5.4. Sia $E \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R} .

Il valore $\Lambda \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di E , e si scrive $\Lambda = \sup E$, se

(i) Λ è un maggiorante di E , (ii) ogni maggiorante L di E verifica $\Lambda \leq L$.

Analogamente, il valore $\lambda \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di E , e si scrive $\lambda = \inf E$, se

(i) λ è un minorante di E , (ii) ogni minorante ℓ di E verifica $\ell \leq \lambda$.

La proprietà (ii) dell'estremo superiore Λ garantisce che *non esiste una stima per eccesso migliore di Λ* : ogni altro possibile maggiorante dell'insieme, necessariamente è maggiore (o uguale) a Λ . Similmente, la proprietà (ii) dell'estremo inferiore λ garantisce che *non esiste una stima per difetto migliore di λ* . In altre parole, l'estremo superiore è il più piccolo dei maggioranti e l'estremo inferiore è il più grande dei minoranti.

Dalle definizioni precedenti segue immediatamente che, se E ammette massimo M (o minimo m), questo valore è anche l'estremo superiore (o estremo inferiore) di E . Infatti, se $M = \max E$, dato che $M \in E$, si ha $M \leq L$ per ogni L maggiorante di E e quindi la condizione (ii) dell'estremo superiore è soddisfatta.

ESEMPIO 5.5. L'insieme $E := \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ non ammette minimo, ma ammette estremo inferiore: $\inf E = 0$. Infatti, 0 è chiaramente un minorante. Inoltre, se consideriamo un reale positivo $x > 0$, per la proprietà di Archimede, esiste $1/x < n$, cioè $1/n < x$. In particolare, nessun numero strettamente positivo è minorante di E e, di conseguenza, 0 è il più grande dei minoranti.

ESEMPIO 5.6. L'estremo superiore dell'insieme

$$E := \left\{ \frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

è 1. Infatti, dato che $n-1 < n+1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $\frac{n-1}{n+1} < 1$, cioè 1 è un maggiorante di E . Inoltre, per $\Lambda < 1$ si ha

$$\frac{n-1}{n+1} \leq \Lambda \quad \Longleftrightarrow \quad (1-\Lambda)n \leq 1+\Lambda \quad \Longleftrightarrow \quad n \leq \frac{1+\Lambda}{1-\Lambda}$$

Quindi, nessun numero strettamente minore di 1 è un maggiorante.

A prima vista passare dalla definizione di massimo/minimo a quella di estremo superiore/inferiore potrebbe somigliare ad un circolo vizioso. Infatti, la definizione di estremo superiore discende da questa strategia:

- dato l'insieme E , costruirne l'insieme F dei maggioranti,
- dichiarare $\sup E = \min F$.

Ma dato che non c'è garanzia che un sottoinsieme di \mathbb{R} abbia minimo, chi assicura l'esistenza di $\min F$ (cioè di $\sup E$)?

Una conseguenza fondamentale degli assiomi di continuità dei numeri reali è che se esiste almeno un maggiorante (o minorante) dell'insieme E , allora *esiste sempre l'estremo superiore* (o *inferiore*). Lo stesso non vale nel caso dei numeri razionali: l'insieme $E := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ non ammette né estremo superiore né estremo inferiore in \mathbb{Q} .

TEOREMA 5.7. Esistenza degli estremi superiore e inferiore. *Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Allora*

- (i) *se E è limitato superiormente, esiste $\Lambda = \sup E \in \mathbb{R}$;*
- (ii) *se E è limitato inferiormente, esiste $\lambda = \inf E \in \mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE. Limitiamoci a considerare il caso dell'estremo superiore e supponiamo che l'insieme E non abbia massimo (in caso contrario, tale massimo sarebbe l'estremo superiore richiesto). Indichiamo con F l'insieme dei maggioranti di E .

Costruiamo una successione I_n di intervalli incapsulati costruiti iterando un procedimento di bisezione analogo a quello presentato in precedenza. Scelti $a_0 \notin F$ e $b_0 \in F$, siano

$$I_0 := [a_0, b_0] \quad \text{e} \quad \ell := b_0 - a_0.$$

Consideriamo il punto medio di I_0 , cioè il numero $\xi_0 := \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ e poniamo

$$I_1 = [a_1, b_1] := \begin{cases} [a_0, \xi_0] & \xi_0 \in F, \\ [\xi_0, b_0] & \xi_0 \notin F, \end{cases}$$

In questo modo, l'intervallo I_1 , di lunghezza $\ell/2$, ha il primo estremo fuori da F e il secondo estremo in F . Iterando la procedura, si ottiene una successione di intervalli incapsulati $I_n = [a_n, b_n]$, ciascuno di lunghezza $\ell/2^n$ e con la proprietà $a_n \notin F$, $b_n \in F$.

Per l'assioma degli intervalli incapsulati, l'intersezione di tali intervalli è non vuota, e per la proprietà di Archimede, tale intersezione è formata da un unico elemento, nel seguito indicato con η . Vogliamo mostrare che η è l'estremo superiore cercato.

- (i) η è un maggiorante. Infatti, per ogni $x \in E$, si ha $x < b_n$ e, di conseguenza,

$$x - \eta \leq b_n - \eta < \frac{\ell}{2^n} \quad \forall n.$$

Procedendo come nella dimostrazione dell'implicazione (10), ne segue la disuguaglianza $x - \eta \leq 0$, cioè $x \leq \eta$.

(ii) η è il più piccolo dei maggioranti. Per ogni maggiorante θ , dato che $a_n \notin F$, si ha $a_n < \theta$ per ogni n . Quindi, valgono

$$\eta - \theta \leq \eta - a_n < \frac{\ell}{2^n} \quad \forall n,$$

da cui si deduce $\eta \leq \theta$. □

Nel caso in cui l'insieme dei maggioranti e/o quello dei minoranti sono vuoti, convenzionalmente, si estende la nozione di estremo superiore ed inferiore:

- se non esistono maggioranti, E è illimitato superiormente, si scrive $\sup E = +\infty$;
- se non esistono minoranti E è illimitato inferiormente, si scrive $\inf E = -\infty$.

I simboli $+\infty$ e $-\infty$ non corrispondono a nessun numero reale; bisogna quindi notare che le espressioni $\sup E = +\infty$ e $\inf E = -\infty$ hanno un significato ben diverso rispetto alle usuali uguaglianze di numeri reali.

Le definizioni di maggiorante, minorante, massimo, minimo, estremo superiore/inferiore, limitato superiormente/inferiormente, illimitato superiormente/inferiormente si basano sull'ordinamento di \mathbb{R} , cioè sul simbolo \leq (e varianti). Quindi non hanno estensioni ai sottoinsiemi del piano \mathbb{R}^2 , dello spazio \mathbb{R}^3 o di qualsivoglia altro oggetto privo di ordine!

Altre partenze (ma con lo stesso punto di arrivo). Come si è visto, assumendo il Postulato degli intervalli incapsulati e la proprietà di Archimede, si dimostra la validità del Teorema 5.7, relativo all'esistenza dell'estremo superiore ed inferiore.

Si può anche scegliere una strada diversa, non supporre valide *a priori* le affermazioni relative agli intervalli incapsulati e la proprietà archimedea e considerare direttamente la tesi del Teorema 5.7 come un assioma

Postulato dell'estremo superiore. *Ogni insieme superiormente limitato, ammette estremo superiore.*

In questo caso, è possibile dedurre il Postulato degli intervalli incapsulati e l'Assioma di Archimede come conseguenza dell'assunzione dell'esistenza dell'estremo superiore. Infatti, se non valesse la proprietà di Archimede, l'insieme \mathbb{N} sarebbe superiormente limitato ed ammetterebbe quindi un estremo superiore Λ , che dovrebbe necessariamente essere naturale. Quindi, esisterebbe $\Lambda \in \mathbb{N}$ tale che $n \leq \Lambda$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, in contraddizione con il fatto che $\Lambda + 1$ è naturale ed è più grande di Λ .

Per dimostrare la proprietà relativa agli intervalli incapsulati, si consideri una sequenza di intervalli chiusi e limitati $I_n = [a_n, b_n]$ tali che

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

Gli insiemi $A = \{a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots\}$ e $B = \{b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq b_{n+1} \leq \cdots\}$ sono limitati e quindi ammettono estremo superiore ed inferiore. Dato che tutti gli elementi di A sono minori o uguali di tutti gli elementi di B , si ha $\sup A \leq \inf B$. Inoltre, dalle definizioni di estremo superiore ed inferiore, si deduce

$$[\sup A, \inf B] \subseteq I_n \quad \forall n.$$

Quindi, l'intersezione degli intervalli incapsulati è non vuota.

In quello che segue, quindi, possiamo fare riferimento al Postulato degli intervalli incapsulati e l'Assioma di Archimede o al Postulato dell'estremo superiore in maniera del tutto equivalente. A seconda del problema considerato, potremo utilizzare uno o l'altro come punto di partenza per dedurre nuove proprietà relative all'insieme dei numeri reali \mathbb{R} . Senza offesa per nessuno.

CAPITOLO 2

Funzioni: anno zero

1. Ingredienti di base

In tutti i campi della scienza compaiono, in modo del tutto naturale, oggetti chiamati *funzioni*: la pressione di un gas ideale è funzione della densità e della temperatura, la posizione di una particella in movimento è funzione del tempo, il volume e la superficie di un cilindro sono funzioni del raggio e dell'altezza, etc. etc.. In generale, quando certe quantità a, b, c, \dots , dette *variabili dipendenti*, sono determinate da altre quantità x, y, z, \dots , dette *variabili indipendenti*, si dice che a, b, c, \dots “sono funzioni di” x, y, z, \dots o, in modo equivalente che a, b, c, \dots “dipendono da” x, y, z, \dots . L'idea è semplice: cambiando il valore delle variabili indipendenti, cambia il valore delle variabili dipendenti.

Ecco alcuni esempi tanto per cominciare.

- i. L'area A di un quadrato di lato ℓ è data da $A = \ell^2$, quindi la variabile dipendente *area* A è funzione della variabile indipendente *lato* ℓ .
- ii. Il Teorema di Pitagora afferma: *la lunghezza ℓ dell'ipotenusa è pari alla radice quadrata della somma dei quadrati delle lunghezze a e b dei cateti*, o, in formule, $\ell = \sqrt{a^2 + b^2}$. In questo caso, la lunghezza dell'ipotesa è una funzione delle lunghezze dei cateti: la variabile dipendente è ℓ , mentre le variabili indipendenti sono a e b .
- iii. Esistono anche oggetti che associano ad una sola variabile indipendente t , due variabili dipendenti x e y . Ad esempio, la funzione

$$x = t + 1, \quad y = 2 - t^3.$$

Interpretando x e y come coordinate di un punto P nel piano e t come il tempo, queste equazioni descrivono la posizione di P al tempo t , cioè il *moto* del punto P .

In generale, una **funzione** è una legge che associa ad ogni dato valore di una variabile (indipendente) un unico valore di un'altra variabile (dipendente). In termini più informatici, si può pensare alla variabile indipendente come **Input** della funzione e alla variabile dipendente come **Output**.

$$\text{Input} \longrightarrow \boxed{\text{Funzione}} \longrightarrow \text{Output}$$

Nella prima parte di queste Note, approfondiremo il caso delle *funzioni che associano ad un numero reale un altro numero reale* (vedi esempio **i.**). In questa situazione, si usa la notazione

$$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

che esprime che la funzione f è definita per valori $x \in I$ dove I è un assegnato sottoinsieme della retta reale \mathbb{R} e che la f trasforma x nel valore $y = f(x)$ di \mathbb{R} . Quindi, per definire una funzione occorre conoscere:

- i valori della variabile indipendente per cui la funzione f è considerata (l'insieme I);
- in quale insieme “vive” la variabile dipendente (qui l'insieme dei numeri reali);
- la regola definita dalla funzione f .

Volete qualche altro esempio? Eccovene un paio:

$$f(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Frequentemente useremo i seguenti vocaboli, con cui ci si familiarizza col tempo.

Piccolo glossario per le funzioni

- x : variabile indipendente
- y : variabile dipendente
- I : dominio di definizione (o campo di esistenza)
- \mathbb{R} (di arrivo): codominio
- $f(x)$: immagine di x (o trasformato di x)
- x : (una) pre-immagine, o contro-immagine, di $f(x)$
- $f(I) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ per qualche } x \in I\}$:
insieme immagine o immagine (di I tramite f)¹

OSSERVAZIONE 1.1. L'assegnazione di una funzione include anche la definizione del dominio della funzione. Funzioni con la stessa espressione analitica, ma differente dominio di definizione sono da considerarsi funzioni diverse! Ad esempio, la funzione $f(x) = x^2$ per $0 < x < 2$ non coincide con la funzione $g(x) = x^2$ per $x \in \mathbb{R}$, dato che il loro dominio di definizione è diverso.

Nell'esempio appena descritto, però, le funzioni f e g coincidono in $(0, 2)$, cioè nell'insieme in cui è definita la funzione f . In questo caso, si utilizza la definizione seguente.

DEFINIZIONE 1.2. Restrizione ed estensione. La funzione $f : I_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una restrizione della funzione $g : I_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (e g è una estensione di f) se l'insieme di

¹In inglese, si parla di *range* della funzione f .

definizione di g contiene quello di f e le due funzioni coincidono dove sono definite entrambe, cioè se

$$I_f \subset I_g \quad e \quad f(x) = g(x) \quad \forall x \in I_f.$$

Usualmente, se una funzione viene assegnata dandone l'espressione analitica, ma senza specificarne l'insieme di definizione, si intende che la funzione è considerata nell'insieme più grande in cui le operazioni richieste sono lecite. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3 + 1$ si considera definita in $I = \mathbb{R}$, mentre la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è definita in $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Grafico di funzioni. Per individuare proprietà delle funzioni è utile realizzarne una rappresentazione grafica: il **grafico della funzione** f è il sottoinsieme del piano

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y = f(x)\}.$$

Per iniziare, vediamo alcuni esempi.

(i) y è una “funzione affine” di x , cioè la funzione f è un polinomio di grado 1:

$$f(x) = ax + b \quad \text{per qualche } a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Come è noto dalla geometria elementare, il grafico è una retta nel piano.

(ii) y è inversamente proporzionale a x ,

$$y = \frac{1}{x}.$$

Questa funzione è definita per $x \neq 0$ dato che la divisione per zero non ha senso. Il grafico rappresenta una *iperbole (rettangolare)*.

(iii) y è il quadrato di x ,

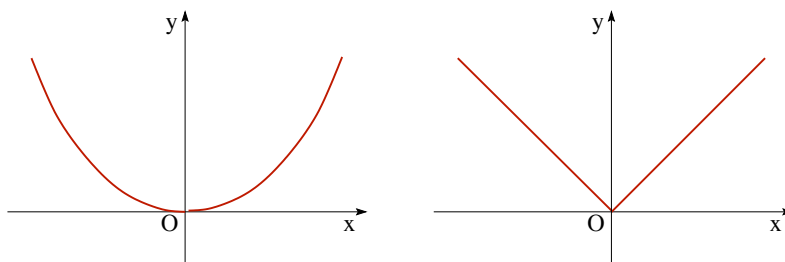
$$f(x) = x^2$$

come è ben noto questa funzione ha per grafico una parabola (vedi Fig.1(a)). Lo stesso vale per le funzioni del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(iv) y è uguale a $|x|$. Dato che, per definizione

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

il grafico della funzione è composto da due semirette (vedi Fig.1(b)).

FIGURA 1. (a) La parabola $y = x^2$; (b) Il modulo: $y = |x|$.

Polinomi. Il tipo più semplice di funzione si ottiene utilizzando le sole operazioni di somma e moltiplicazione: un **polinomio** (di grado n) è una funzione della forma

$$y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad a_n \neq 0.$$

dove a_0, a_1, \dots, a_n (con $a_n \neq 0$) sono $n+1$ numeri reali assegnati. Quindi $y = 3x+1$, $y = x^2 - 2x + 5$, $5x^{47} + 47x^5$ sono esempi di polinomi.

ESERCIZIO 1.3. *Disegnare i grafici delle seguenti funzioni*

$$f(x) = 1, \quad f(x) = x, \quad f(x) = 2x + 1, \quad f(x) = 2x^2 + x + 1.$$

E' una buona idea quella di sperimentare al calcolatore come siano fatti i grafici di polinomi. In particolare è interessante contare il “numero di oscillazioni” delle funzioni al variare del grado, dove per “numero di oscillazioni” si intende il numero delle zone in cui il grafico “sale” e di quelle in cui “scende”. Qual è la regola generale?

Funzioni razionali. I rapporti di polinomi sono dette **funzioni razionali**

$$y = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m} \quad \text{con } a_i, b_j \in \mathbb{R}, \quad (b_j \text{ non tutti nulli})$$

e sono definite per tutti i valori di x per cui il denominatore è diverso da zero. Per quanto riguarda gli zeri della funzione, questi sono tutti e soli gli zeri del polinomio a numeratore (l'unico modo per ottenere zero da un rapporto è che il numeratore sia zero). Lo studio del segno si traduce invece in un sistema di disequazioni.

Una buona classe per iniziare lo studio delle funzioni razionali è

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Ad esempio, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}.$$

L'insieme di definizione è $I = \{x : x \neq -1\}$, inoltre la funzione è positiva per $x > 1$ e per $x \leq -3/2$ e negativa nel resto dell'insieme. Il grafico è in Figura 2(a).

Un altro esempio di funzione razionale facile è $f(x) = 1/x^2$ (vedi Figura 2(b)).

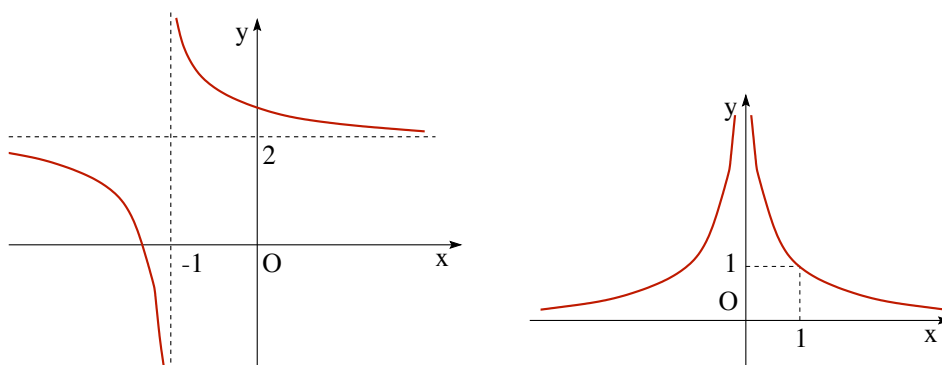


FIGURA 2. (a) La funzione $y = (2x + 3)/(x + 1)$; (b) la funzione $y = 1/x^2$.

Funzioni trigonometriche. Non è possibile in poche righe ricordare tutto il necessario sulle funzioni trigonometriche. Qui ci limitiamo alle proprietà principali. Le funzioni trigonometriche di base sono $\sin x$ e $\cos x$ le cui proprietà fondamentali sono:

- entrambe sono definite per ogni valore reale x ;
- $\cos 0 = 1$ e $\sin 0 = 0$;
- per ogni $x \in \mathbb{R}$, si hanno $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ e $\sin(x + 2\pi) = \sin x$;
- per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale la relazione $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
- per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valgono le formule di somma e sottrazione

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

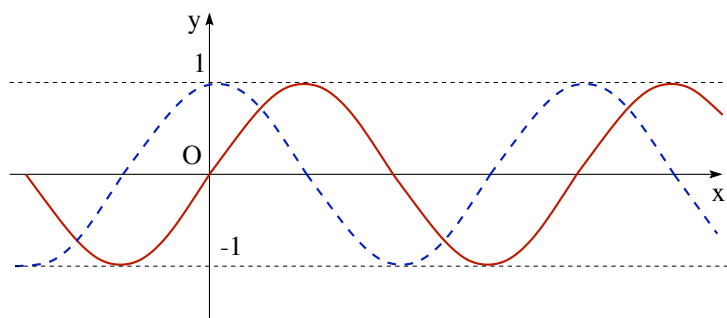


FIGURA 3. Il grafico della funzione $\sin x$ (linea continua) e della funzione $\cos x$ (linea tratteggiata).

Dato che $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, è sempre vero che $|\sin^2 x|, |\cos^2 x| \leq 1$ e quindi

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 1.4. Dimostrare che $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 1.5. Dedurre, dalle formule di somma e sottrazione, la formula

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right).$$

Soluzione. Poniamo $\xi = \frac{x+y}{2}$ e $\eta = \frac{x-y}{2}$. Allora $x = \xi + \eta$ e $y = \xi - \eta$. Dunque $\sin x - \sin y = \sin(\xi + \eta) - \sin(\xi - \eta) = \sin \xi \cos \eta + \cos \xi \sin \eta - \sin \xi \cos \eta + \cos \xi \sin \eta = 2 \cos \xi \sin \eta$, e ricordando la definizione di ξ ed η si giunge alla conclusione.

Tramite le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ si definiscono le funzioni **tangente** e **cotangente**:

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{e} \quad \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Dalla definizione e dalle proprietà di seno e coseno, discende che $\tan x$ è definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ e $\cot x$ è definita per $x \neq k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$.

2. Operazioni elementari su grafici

Una volta noto il grafico di una funzione f è possibile, a partire da questo, ricostruire il grafico di altre funzioni g che si ottengano dalla prima per via elementare. Vediamo alcuni esempi significativi, tenendo conto che, qui, l'unica maniera per capire è *sperimentare* (anche usando un computer o una calcolatrice grafica, se possibile).

(i) *Traslazioni.* Il grafico di $g(x) = f(x) + c$ dove $c \in \mathbb{R}$ è dato da una traslazione in verticale del grafico di f della quantità c (la traslazione sarà quindi verso l'alto se $c > 0$ e verso il basso se $c < 0$).

Il grafico di $g(x) = f(x + c)$ dove $c \in \mathbb{R}$ è dato da una traslazione in orizzontale di $-c$ del grafico di f . Nota bene! La traslazione è di $-c$, quindi è verso sinistra se $c > 0$ e verso destra se $c < 0$.

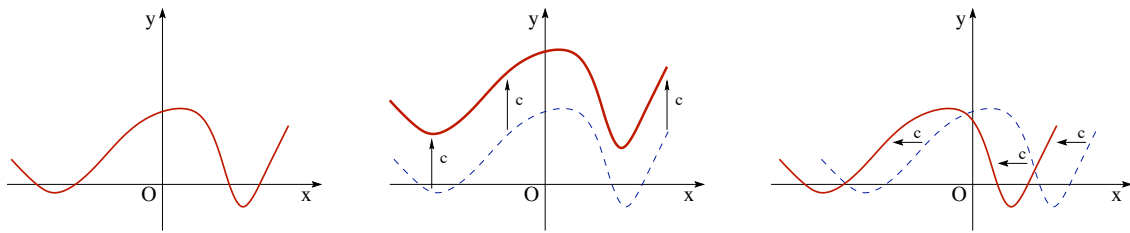


FIGURA 4. I grafici di (a) $y = f(x)$, (b) $y = f(x) + c$; e (c) $y = f(x + c)$.

(ii) *Dilatazioni/Compressioni.* Il grafico di $g(x) = kf(x)$ è ottenuto dilatando la variabile dipendente di un fattore k , il grafico è pertanto dilatato nella direzione verticale. Il grafico di $g(x) = f(kx)$ è ottenuto dilatando la variabile indipendente di un fattore

$1/k$, quello che per la funzione f accadeva in x ora per la funzione g accade in x/k . Questo vuol dire che se $k > 1$ il grafico risulta compresso in orizzontale verso l'asse y , mentre se $k < 1$ il grafico risulta dilatato. Un esempio? Fate il grafico di

$$f(x) = |x| - 1, \quad g(x) = |2x| - 1, \quad h(x) = \left| \frac{x}{2} \right| - 1.$$

Visto che ci siete, fate anche $l(x) = 2||x| - 1|$ e $m(x) = \frac{1}{2}||x| - 1|$.

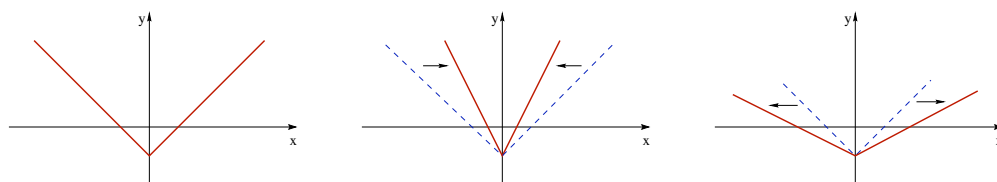


FIGURA 5. I grafici di (a) $y = f(x) = |x| - 1$, (b) $g(x) = |2x| - 1$, (c) $h(x) = \left| \frac{x}{2} \right| - 1$.

ESERCIZIO 2.1. Disegnare i grafici delle funzioni

$$f(x) = ||x| - 1|, \quad g(x) = ||3x| - 1|, \quad h(x) = \frac{1}{3}||x| - 1|.$$

(iii) *Somma/Sottrazione*. Dati i grafici di f e g è possibile stabilire un andamento qualitativo anche delle funzioni $h = f + g$ e $l = f - g$. Basta disegnare i due grafici di f e g sullo stesso piano (x, y) e poi calcolare punto per punto la somma e la differenza. Nel caso della differenza, il significato del grafico è di “distanza” con segno (cioè l è positiva se f è sopra g e negativa se f è sotto g) tra i punti, aventi stessa ascissa, dei grafici delle due funzioni. Quindi la “distanza” qui è calcolata in verticale (non è la distanza nel piano...).

(iv) *Passaggio al reciproco*. Dato il grafico della funzione f è possibile anche determinare i grafici delle funzioni $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ e $h(x) = f(1/x)$. Come si dovrebbe essere capito dai casi precedenti, nel primo caso si ottiene una trasformazione “in verticale” (nel senso della variabile dipendente y), mentre nel secondo “in orizzontale” (nel senso della variabile dipendente x).

Il grafico di g si ottiene dalla f notando che i valori che vengono mandati da f vicino a zero sono trasformati per g in valori grandi, mentre i valori che la f trasforma in valori grandi, sono mandati da g in zero. I valori che vanno in ± 1 rimangono gli stessi. Un grafico di quel che fa la trasformazione $t \rightarrow s = 1/t$ dall'asse t all'asse s aiuta a capire cosa sta succedendo.

Per quanto riguarda il grafico della funzione h , questa volta l'inversione è compiuta sulla variabile indipendente x , quindi l'inversione è in orizzontale.

(v) *Modulo di una funzione.* Una classe significativa è quella delle funzioni della forma $g(x) = |f(x)|$ dove si suppone noto il grafico della funzione f . Dato che il modulo $|\cdot|$ trasforma un numero in sé stesso se è positivo, e nel suo opposto se è negativo, per fare il grafico di g basta lasciare invariata la parte del grafico di f che corrisponde a valori positivi della variabile dipendente, cioè la parte che è sopra l'asse delle x , e ribaltare attorno all'asse x la parte del grafico che si trova al di sotto.

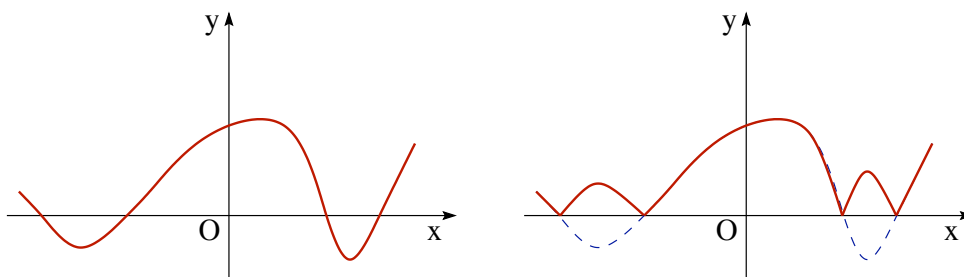


FIGURA 6. I grafici di (a) $y = f(x)$, (b) $y = |f(x)|$.

(vi) *Parte positiva e parte negativa di una funzione.* Data una funzione f , la funzione $\max\{f(x), 0\}$ è detta **parte positiva** di f e la funzione $\max\{-f(x), 0\}$ è detta **parte negativa** di f . Il grafico della prima delle due si ottiene molto facilmente a partire da quello della f : coincide con quest'ultimo dove $f(x) \geq 0$ e, in quel che resta, coincide con l'asse delle x . Il grafico della parte negativa richiede un piccolo sforzo in più: prima si ribalta il grafico della funzione f attorno all'asse x (cioè si disegna il grafico della funzione $-f$) e poi si procede come per la parte positiva. Si noti, in particolare, che sia il grafico della parte positiva che quello della parte negativa giacciono nel semipiano $y \geq 0$.

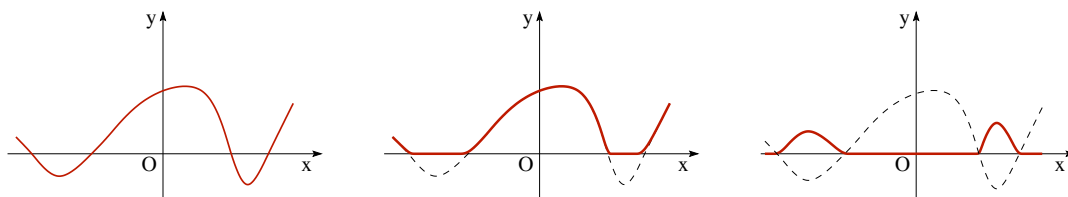


FIGURA 7. I grafici di (a) $y = f(x)$, (b) $y = \max\{f(x), 0\}$, (c) $y = \max\{-f(x), 0\}$.

Simmetrie di grafici. Capita spesso che le funzioni che si studiano abbiano della *simmetrie*, cioè abbiano la proprietà che il loro grafico rimane immutato quando vengono compiute certe trasformazioni. Ad esempio, il grafico di una funzione costante, dato che è una retta orizzontale, rimane invariato se viene traslato in orizzontale. Se si riconosce una simmetria di una funzione, lo studio è in genere semplificato, perché il

grafico può essere determinato studiandone semplicemente una parte e poi applicando una trasformazione opportuna. Vediamo rapidamente i principali tipi di simmetria.

Se il grafico di una funzione f è simmetrico rispetto all'asse y si dice che la funzione è **pari**. Analiticamente, questa proprietà corrisponde a

$$\text{funzione pari:} \quad f(-x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Ad esempio le funzioni $y = x^2$, $y = |x|$ sono funzioni pari.

Se il grafico è simmetrico rispetto all'origine, la funzione è **dispari**

$$\text{funzione dispari:} \quad f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in I.$$

Ad esempio, le funzioni $y = x^3$ e $y = 1/x$ sono dispari.

Le funzioni pari più semplici sono i polinomi che includano solo potenze pari di x . Le funzioni dispari più semplici sono i polinomi che includano solo potenze dispari di x . La funzione $\cos x$ è pari: sono pari quindi somme, differenze e prodotti di $\cos x$. La funzione $\sin x$ è dispari. E' vero che somme/prodotti di $\sin x$ sono dispari?

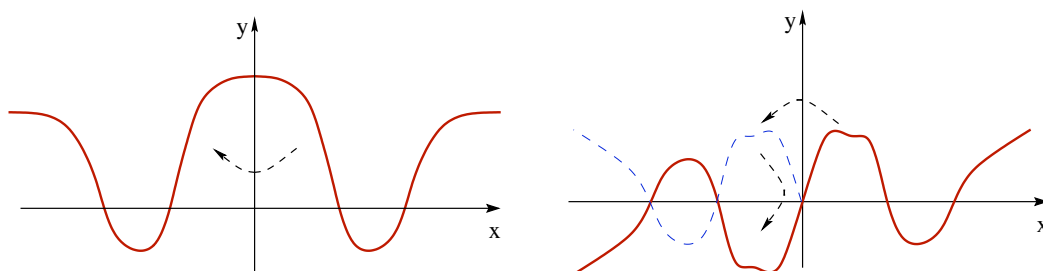


FIGURA 8. (a) una funzione pari, (b) una funzione dispari.

Una funzione $y = f(x)$ si dice **periodica** se

$$\text{funzione periodica:} \quad \exists T > 0 \text{ tale che } \forall x \quad f(x + T) = f(x).$$

Qualora esista, il più piccolo valore T per cui vale questa proprietà è il **periodo** della funzione f . Graficamente questa proprietà corrisponde al fatto che il grafico può essere ricostruito con “copia/incolla”: si determina il grafico della funzione in un intervallo di lunghezza T e poi lo si riproduce a destra e a sinistra dell'intervallo. Esempi di funzioni periodiche sono le funzioni trigonometriche: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x,$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \cot(x + \pi) = \cot x.$$

Tanto per provare, verifichiamo la periodicità di $\tan x$:

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi}{\cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

ESERCIZIO 2.2. *Qualcuna delle funzioni seguenti è pari/dispari/periodica?*

$$\cos(x^2), \quad |\cos x|, \quad x|x|.$$

Soluzione. La prima funzione è pari, infatti $f(-x) = \cos((-x)^2) = \cos(x^2) = f(x)$. Anche la seconda è pari (verificare!). E' anche periodica di periodo π , infatti

$$|\cos(x + \pi)| = |\cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi)| = |-\cos(x)| = |\cos x|.$$

La terza funzione è dispari: $f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x)$.

Un altro esempio (meno frequente) di funzione periodica è la *parte frazionaria*. Sia

$$\text{parte intera di } x: \quad [x] := z \in \mathbb{Z},$$

dove z è l'unico intero per cui $z \leq x < z + 1$. Allora la funzione

$$\text{parte frazionaria (o mantissa) di } x: \quad \{x\} := x - [x]$$

è una funzione periodica, con periodo 1 (verificare!).

3. Funzioni invertibili e funzioni monotone

Data $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e dato $y \in \mathbb{R}$, un problema tipico è determinare se ci sono (e quante) soluzioni di $f(x) = y$. In altri termini, data y si vuole sapere quante sono le sue pre-immagini tramite f . Per definizione di insieme immagine (vd. il “Piccolo Glossario per Funzioni”), il problema ammette almeno una soluzione se e solo se $y \in f(I)$.

Problema: sia $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione assegnata,

dato $y \in \mathbb{R}$, quante soluzioni esistono dell'equazione $f(x) = y$?

DEFINIZIONE 3.1. *Una funzione f è iniettiva se manda valori di x diversi in valori y diversi, ossia*

$$f \text{ è iniettiva se } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

In parole povere, se l'equazione $f(x) = y$ ammette sempre non più di una soluzione la funzione f si dice *iniettiva* (o *uno a uno*). Potrebbero però esserci dei valori y per cui il problema non ha soluzione.

Graficamente, l'iniettività corrisponde al fatto che *rette parallele all'asse delle x intersecano il grafico della funzione f al più una volta*. Ad esempio, la funzione x è iniettiva, mentre le funzioni x^2 e $|x|$ non lo sono.

Vediamo, in alcuni esempi concreti, come verificare se una funzione è iniettiva. La strategia pratica è supporre che valga l'uguaglianza $f(x_1) = f(x_2)$ per x_1, x_2 generici, e domandarsi se ne segue $x_1 = x_2$:

$$f(x_1) = f(x_2) \stackrel{?}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

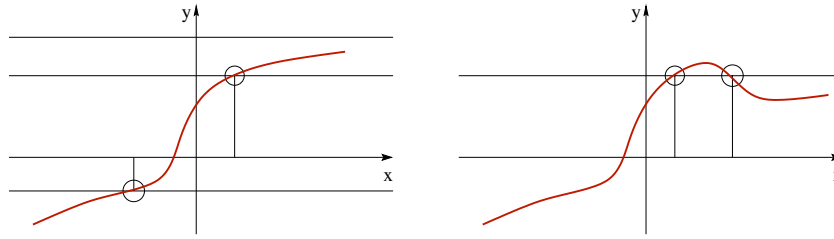


FIGURA 9. (a) una funzione iniettiva, (b) una funzione non iniettiva.

ESEMPIO 3.2. Consideriamo la funzione $f(x) = 3x - 2$ e supponiamo che esistano x_1, x_2 tale che $f(x_1) = f(x_2)$. Allora

$$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \iff 3x_1 = 3x_2 \iff x_1 = x_2,$$

quindi la funzione è iniettiva. Alla stessa conclusione si giunge disegnando il grafico della retta $y = 3x - 2$ e osservando che, dato che la retta è obliqua, la proprietà geometrica dell'iniettività è soddisfatta.

ESEMPIO 3.3. Consideriamo

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2} \quad I = \{x \neq -2\}.$$

Studiamone l'iniettività: siano $x_1, x_2 \in I$ tali che

$$\begin{aligned} \frac{x_1+1}{x_1+2} = \frac{x_2+1}{x_2+2} &\iff (x_2+2)(x_1+1) = (x_2+1)(x_1+2) \\ &\iff 2x_1 + x_2 = 2x_2 + x_1 \iff x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Quindi la funzione è iniettiva.

ESEMPIO 3.4. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 + x$. Pensando al suo grafico, è evidente che non si tratta di una funzione iniettiva, ma come si può riconoscere questo fatto direttamente dai conti algebrici? Procediamo come in precedenza:

$$x_1^2 + x_1 = x_2^2 + x_2 \iff (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) = 0.$$

Se supponiamo $x_1 \neq x_2$, allora otteniamo $x_1 + x_2 + 1 = 0$, da leggersi come una condizione su x_1 e x_2 che garantisce $f(x_1) = f(x_2)$. Ad esempio, scegliendo $x_1 = -1$ e $x_2 = 0$, otteniamo

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0 \implies f(x_1) = f(x_2) = 0,$$

quindi la funzione non è iniettiva.

Se una funzione è iniettiva, per tutti i valori y per cui l'equazione $y = f(x)$ ha soluzione è possibile associare un unico valore x dato proprio dalla soluzione dell'equazione $f(x) = y$. In altre parole, se una funzione è iniettiva è possibile definire

una nuova funzione che permette di “tornare indietro”, cioè che associa ad ogni y dell’insieme immagine, l’unico valore x di cui è immagine.

DEFINIZIONE 3.5. *Data una funzione f iniettiva, la funzione $f^{-1} : f(I) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che gode della proprietà*

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall y \in f(I), x \in I,$$

si dice funzione inversa di f . La funzione f si dice invertibile.

Per determinarne l’inversa f^{-1} dobbiamo, sostanzialmente, esplicitare la funzione in termini della variabile y , cioè, a partire dall’espressione $y = f(x)$, arrivare ad una espressione *equivalente* della forma $x = f^{-1}(y)$.

ESEMPIO 3.6. Nel caso della funzione $f(x) = 3x - 2$, si ha

$$y = 3x - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x = y + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{y + 2}{3}.$$

La funzione inversa è $f^{-1}(y) = \frac{y + 2}{3}$.

ESEMPIO 3.7. Per la funzione

$$f(x) = \frac{x + 1}{x + 2} \quad I = \{x \neq -2\}.$$

si ha

$$y = \frac{x + 1}{x + 2} \quad \Longleftrightarrow \quad xy + 2y = x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x(y - 1) = 1 - 2y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1 - 2y}{y - 1}.$$

Tale espressione ha senso solo per $y \neq 1$. In effetti, nel caso $y = 1$, si trova la relazione $x + 1 = x + 2$ cioè $1 = 2$ che è falsa, quindi $1 \notin f(I)$. La funzione inversa è definita in $\{y \neq 1\}$ ed è data da

$$f^{-1}(y) = \frac{1 - 2y}{y - 1}.$$

Conoscendo il grafico di una funzione f , si può sempre ottenere il grafico dell’inversa f^{-1} . Infatti, dato che $y = f(x)$ se e solo se $x = f^{-1}(y)$, si ha $(x, f(x)) = (f^{-1}(y), y) \in \Gamma$; quindi il grafico della funzione inversa si ottiene scambiando il ruolo dell’asse x e dell’asse y , ossia ribaltando il grafico attorno alla retta $y = x$ (vedere Figura 10).

Funzioni monotone. Una funzione $y = f(x)$ il cui valore immagine cresce se cresce la variabile indipendente, cioè tale che, per ogni $x, x' \in I$,

$$x < x' \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) < f(x')$$

si dice **monotona strettamente crescente** in I o, più semplicemente, **strettamente crescente** in I . Analogamente, se, per ogni $x, x' \in I$,

$$x < x' \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) > f(x'),$$

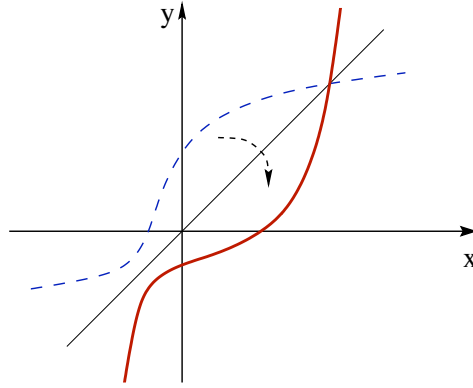


FIGURA 10. Il grafico della funzione inversa di una funzione assegnata.

la funzione è **monotona strettamente decrescente** o semplicemente **strettamente decrescente**. Equivalentemente, si può scrivere

$$f \text{ strettamente crescente} \iff [f(x) - f(x')](x - x') > 0 \quad \forall x \neq x'$$

$$f \text{ strettamente decrescente} \iff [f(x) - f(x')](x - x') < 0 \quad \forall x \neq x'$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $y = x^n$ ristretta a $x \geq 0$ è una funzione monotona strettamente crescente (come si è visto nella sezione delle disequazioni). Più precisamente, per n dispari, la funzione x^n è strettamente crescente in \mathbb{R} (quindi anche per i negativi), mentre per n pari la funzione x^n non è monotona in \mathbb{R} .

ESERCIZIO 3.8. *Dimostrare che se f e g sono funzioni strettamente crescenti allora anche la funzione $f + g$ è strettamente crescente. E' vero che anche la funzione fg è strettamente crescente?*

Soluzione. Per ipotesi, se $x < y$, allora $f(x) < f(y)$ e $g(x) < g(y)$. Quindi, sommando i termini di destra e i termini di sinistra, si ottiene

$$f(x) + g(x) < f(y) + g(y) \quad \forall x, y \quad x < y.$$

La risposta alla domanda finale è “NO”. Basta infatti considerare $f(x) = g(x) = x$, che è strettamente crescente, mentre $f(x)g(x) = x^2$ non lo è. Quale ipotesi aggiuntiva occorre per dedurre che il prodotto di funzioni strettamente crescenti è crescente?

Chiaramente valgono le implicazioni

$$f \text{ strettamente monotona} \implies f \text{ iniettiva} \iff f \text{ invertibile}$$

Ad esempio, le funzioni x^n per $x \geq 0$ e n pari e x^n per $x \in \mathbb{R}$ e n dispari sono funzioni invertibili.

OSSERVAZIONE 3.9. La monotonia di una funzione f ne garantisce l'invertibilità senza passare per la determinazione della formula per la funzione inversa: la funzione

f^{-1} c'è, ma non si vede! Ad esempio, per ogni n dispari, la funzione $f(x) = x + x^n$ è una funzione strettamente crescente, dato che è somma di funzioni strettamente crescenti. Quindi è anche una funzione invertibile.

Se la funzione f è strettamente crescente/decrescente, anche la sua inversa lo è. Infatti, siano $y = f(x)$ e $y' = f(x')$, allora $x = f^{-1}(y)$ e $x' = f^{-1}(y')$ e quindi

$$[f(x) - f(x')](x - x') = (y - y')[f^{-1}(y) - f^{-1}(y')].$$

Quindi il segno del secondo membro è lo stesso del primo, ossia le funzioni f e f^{-1} hanno lo stesso tipo di monotonia.

Nel caso in cui, nella definizione di monotonia, il simbolo di disequazione $<$ venga sostituito con la versione indebolita \leq e $>$ con \leq si parla di funzioni **non decrescenti** o **non crescenti**: Attenzione però al fatto che le funzioni non crescenti e quelle non decrescenti possono essere non iniettive, e quindi non invertibili (ad esempio, le funzioni costanti!).

4. Classi di funzioni più o meno comuni

Radici n -esime. Sia n un numero naturale $n \geq 2$. Dato che $y = x^n$ è strettamente crescente per $x \geq 0$, essa è iniettiva e quindi invertibile. La sua inversa si indica con

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}.$$

Per definizione questa radice è sempre non negativa.

Per n dispari, però, la funzione x^n è strettamente crescente per tutti i valori $x \in \mathbb{R}$ (quindi anche per i negativi) e, di conseguenza, *per n dispari, $\sqrt[n]{x}$ è definita per tutti i valori della x* ; in questo caso $\sqrt[n]{x}$ è negativa per x negativa.

Più in generale, data una funzione g , possiamo considerare funzioni della forma

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}.$$

Nel caso in cui n sia pari, una funzione di questo genere è definita solo per i valori della x per cui $g(x) \geq 0$. Ad esempio, dove è definita la funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$? Facile. Basta imporre la condizione $1 - x^2 \geq 0$, quindi per $x \in [-1, 1]$. Invece la funzione $h(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$ è definita per ogni valore x .

Inverse delle funzioni trigonometriche. Le funzioni trigonometriche sono periodiche, quindi non iniettive e non invertibili se considerate in tutto l'insieme in cui sono definite. Opportune restrizioni di queste funzioni sono però monotone e quindi invertibili. Vediamole in dettaglio.

Funzione arcoseno. La funzione $f(x) = \sin x$ è una funzione periodica su \mathbb{R} , quindi ad ogni elemento della sua immagine corrispondono infinite pre-immagini. Ad esempio,

$f^{-1}(1) = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Perciò la funzione $\sin x$ non è invertibile. Invece, la restrizione di $\sin x$ all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è una funzione crescente e quindi anche invertibile. Questa inversa si chiama **(funzione) arcoseno** e si indica con $\arcsin x$. Il dominio dell'arcoseno è $[-1, 1]$ e l'insieme immagine è $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Infine, dato che la funzione $\sin x$ è crescente nell'intervallo in cui la stiamo considerando, anche $\arcsin x$ è crescente.

Allo stesso modo si sarebbe potuto decidere di invertire la restrizione della funzione $\sin x$ ad un altro intervallo, ad esempio in $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$. La scelta dell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è puramente convenzionale, per questo, qualche volta, si dice che $\arcsin x$ è il *valore principale dell'arcoseno*.

Funzione arcocoseno. In modo analogo, considerando la restrizione della funzione $\cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$ e osservando che tale funzione è decrescente, è possibile definire la sua funzione inversa

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

detta **(funzione) arcocoseno** (o anche *valore principale dell'arcocoseno*). Dalla monotonia di $\cos x$ in $[0, \pi]$ discende che la funzione $\arccos x$ è decrescente nel suo insieme di definizione.

Funzione arcotangente. La funzione $\tan x$ ristretta all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è crescente e quindi invertibile, con inversa crescente. La sua inversa si indica con $\arctan x$ ed è detta **(funzione) arcotangente**:

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Anche per l'arcotangente (come per arcoseno e arcocoseno) si sarebbe potuto decidere di invertire $\tan x$ in un altro intervallo.

Esponenziali e logaritmi (costruzione naïf). Oltre alle funzioni elementari sono importanti le funzioni esponenziali con base $a > 0$ e le loro inverse, i logaritmi in base $a > 0$:

$$y = a^x \quad \text{e} \quad y = \log_a x.$$

Diamo qui solo una definizione “leggera” (non rigorosa) delle funzioni esponenziali. Fissiamo $a > 0$, se $x = p/q \in \mathbb{Q}$ è possibile definire a^x

$$\text{fissato } a > 0, \quad a^x := \sqrt[q]{a^p} \quad \forall x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},$$

dove la radice (come sempre) è scelta positiva. Per definire il valore a^x anche nel caso in cui x sia un numero irrazionale, è naturale approssimare $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con numeri razionali sempre più vicini.

Per le funzioni esponenziali valgono le proprietà

- (i) $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
- (ii) $a^0 = 1$,
- (iii) $a^x a^y = a^{x+y}$,
- (iv) $(a^x)^y = a^{xy}$
- (v) a^x è $\begin{cases} \text{decrescente} & \text{se } 0 < a < 1 \\ \text{crescente} & \text{se } a > 1. \end{cases}$

Dato che a^x è monotona per $a \neq 1$, essa è invertibile. La funzione inversa è $y = \log_a x$: è definita sull'insieme immagine dell'esponenziale, quindi solo per $x > 0$ ed associa ad x l'unico valore y che verifica $a^y = x$. Per i logaritmi valgono le proprietà

- (i) $\log_a x$ è definito per $x > 0$,
- (ii) $\log_a 1 = 0$,
- (iii) $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$,
- (iv) $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$
- (v) $\log_a x$ è $\begin{cases} \text{decrescente} & \text{se } 0 < a < 1 \\ \text{crescente} & \text{se } a > 1 \end{cases}$

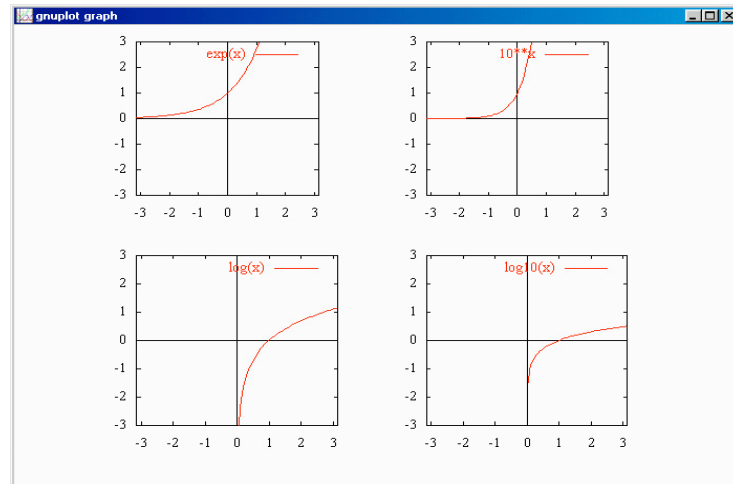


FIGURA 11. (a) $y = e^x$, (b) $y = 10^x$, (c) $y = \ln x$, (d) $y = \log_{10} x$

OSSERVAZIONE 4.1. Perché non si può definire “ a elevato ad x ” per a negativi? In effetti, se $a < 0$, l’espressione a^x ha senso per x del tipo p/q con p e q interi e q dispari. Quindi si potrebbe sperare di estendere questa strana funzione in modo da definire a^x anche per tutti gli altri valori di $x \in \mathbb{R}$. Ma non esiste una estensione che preservi le belle proprietà che abbiamo elencato per l’esponenziale. Ecco un esempio: supponiamo per un attimo che a^x sia ben definita per ogni a e per ogni x , allora $-1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = [(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$. Ops!

Funzioni composte. Si possono generare funzioni anche con la *composizione di funzioni*: se $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, allora la formula

$$f(x) := g(\phi(x))$$

definisce una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ad esempio,

$$f(x) = \sin(1 + x^2) = g(\phi(x)) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \phi(x) = 1 + x^2, \\ g(u) = \sin u. \end{cases}$$

Analogamente

$$f(x) = 2^{\cos x} = g(\phi(x)) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \phi(x) = \cos x, \\ g(u) = 2^u. \end{cases}$$

Spesso la funzione composta $f(x) = g(\phi(x))$ si indica con $f = g \circ \phi$ (che si legge “ g composto ϕ ” o anche “ g dopo ϕ ”)².

La composizione di funzioni non è un’operazione commutativa: in generale, $g \circ \phi$ e $\phi \circ g$ non sono la stessa funzione. L’ordine con cui si fanno le operazioni è importante! Se, per esempio, l’operazione ϕ sta per “sommare 1” e g per “moltiplicare per 2”, allora

$$g(\phi(x)) = g(x + 1) = 2x + 2, \quad \phi(g(x)) = \phi(2x) = 2x + 1.$$

Nel contesto delle funzioni composte, la nozione di funzione inversa diviene ancora più chiara. La funzione $Id(x) = x$, si chiama **identità** (è una funzione affine che ha per grafico la bisettrice del primo e terzo quadrante). Se la funzione ϕ è iniettiva su \mathbb{R} e la sua funzione inversa ϕ^{-1} è anch’essa definita su tutto \mathbb{R} , ϕ^{-1} è l’unica funzione che gode delle proprietà $\phi^{-1} \circ \phi = Id$ e $\phi \circ \phi^{-1} = Id$, cioè

$$(\phi^{-1} \circ \phi)(x) = x \quad (\phi \circ \phi^{-1})(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

La composizione ha senso anche per funzioni non definite in tutto \mathbb{R} . Sia $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, allora $f(x) := g(\phi(x))$ è ben definita per ogni $x \in I$ per cui $\phi(x) \in J$. Ad esempio, la funzione $f(x) = \ln(1 + x)$ è la composizione della funzione $\phi(x) = 1 + x$, definita in $I = \mathbb{R}$, e della funzione $g(u) = \ln u$, definita in $J = (0, +\infty)$.

²Alle volte si omette il simbolo \circ e si scrive semplicemente $f = g\phi$, ma bisogna stare attenti a non fare confusione con la funzione prodotto.

La composizione f è definita per tutte i valori $x \in \mathbb{R}$ tali che $1 + x \in J$, cioè per $x \in (-1, +\infty)$.

Per poter comporre due funzioni ϕ e g e definire una nuova funzione $g \circ \phi$, il dominio di g deve includere almeno una parte dell'immagine di ϕ . Ad esempio, non possiamo formare la funzione $g \circ \phi$ quando $g(u) = \sqrt{u}$ e $\phi(x) = -1 - x^2$, dato che il dominio di g è $[0, +\infty)$ e l'immagine di ϕ è $(-\infty, -1)$.

Chiaramente è possibile comporre più di due funzioni. Ad esempio,

$$f(x) = \frac{1}{1 + \tan(x^2)}$$

può essere ottenuta componendo (nell'ordine) $\phi(x) = x^2$, $\psi(\phi) = 1 + \tan \phi$, $g(\psi) = \frac{1}{\psi}$. Quindi $f = g \circ \psi \circ \phi$.

Funzioni meno comuni. Esistono infiniti modi per definire funzioni. Una possibilità (vagamente esotica) è di decomporre l'insieme di definizione in un certo numero di sottoinsiemi disgiunti ed associare una opportuna regola di calcolo per ciascuno di tali sottoinsiemi.

(i) Sia $I \subset \mathbb{R}$, allora si definisce

$$\text{funzione caratteristica di } I: \quad \chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I, \\ 0 & \text{se } x \notin I. \end{cases}$$

La funzione $\chi_{\mathbb{R}}$ vale identicamente 1, mentre χ_{\emptyset} vale sempre 0, la funzione $\chi_{[0,1]}$ vale 1 nell'intervallo $[0, 1]$ e 0 nel complementare.

(ii) E' possibile anche fare scelte più originali: ad esempio,

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(iii) Un altro modo per generare nuove funzioni è tramite i "comandi" max e min. Ad esempio, si è già visto che

$$\max\{-x, x\} = |x|.$$

Più in generale, date f e g ,

$$\begin{aligned} \max\{f, g\}(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{se } g(x) \leq f(x), \\ g(x) & \text{se } f(x) \leq g(x) \end{cases} \\ \min\{f, g\}(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq g(x), \\ g(x) & \text{se } g(x) \leq f(x) \end{cases} \end{aligned}$$

5. Problemi di massimo e minimo

Molti problemi pratici conducono a problemi di massimo e di minimo di funzioni: qual è il carico massimo sopportato da una trave? Qual è l'energia minima che occorre perchè un satellite sfugga dall'attrazione gravitazionale di un pianeta? Qual è il minimo sforzo che bisogna compiere per passare l'esame? Diamo perciò una definizione rigorosa di cosa si intenda per massimo e minimo di una funzione.

DEFINIZIONE 5.1. *Sia $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se esiste $x_0 \in I$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in I$, la funzione ammette (valore) minimo in I e x_0 è un punto di minimo. Si scrive*

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x) \quad (\text{valore) minimo di } f.$$

Analogamente se esiste un punto $x_1 \in I$ tale che $f(x) \leq f(x_1)$ per ogni $x \in I$, si dice che la funzione ammette (valore) massimo in I e x_1 è un punto di massimo. Si scrive

$$f(x_1) = \max_{x \in I} f(x) \quad (\text{valore) massimo di } f.$$

Il massimo ed il minimo dipendono dall'insieme di definizione I . In generale una restrizione di una funzione, se ammette massimo, ha un massimo minore o uguale a quello della funzione di partenza e, se ammette minimo, questo è maggiore o uguale di quello della funzione di partenza.

In effetti il massimo ed il minimo della funzione non sono altro che il massimo ed il minimo dell'insieme immagine $f(I)$:

$$\begin{aligned} \min_{x \in I} f(x) &= \min f(I) = \min\{f(x) : x \in I\}, \\ \max_{x \in I} f(x) &= \max f(I) = \max\{f(x) : x \in I\}. \end{aligned}$$

Come si fa a determinare il massimo o il minimo di una funzione di una variabile reale a partire dal grafico? Il significato geometrico di un punto di massimo è chiaro: il grafico della funzione f è al di sotto della retta di equazione $y = f(x_0) = \text{costante}$. Quindi per determinare il massimo a partire dal grafico, basta stabilire se esista una retta con tale proprietà.

Come si vede a partire da alcuni esempi, *non tutte le funzioni ammettono massimo e/o minimo nel loro insieme di definizione!* Per superare questo ostacolo si introducono i concetti di *estremo superiore* e di *estremo inferiore*. L'estremo superiore ed inferiore di una funzione f sono l'estremo superiore ed inferiore dell'insieme immagine $f(I)$

$$\begin{aligned} \inf_{x \in I} f(x) &= \inf f(I) = \inf\{f(x) : x \in I\}, \\ \sup_{x \in I} f(x) &= \sup f(I) = \sup\{f(x) : x \in I\}. \end{aligned}$$

Il risultato sull'esistenza di estremo superiore ed inferiore garantisce che se esiste almeno un maggiorante allora esiste l'estremo superiore. Quindi, dato il grafico della funzione f ci sono solo due possibilità: o esiste almeno una retta orizzontale di equazione $y = c \in \mathbb{R}$ che sia completamente sopra il grafico di f o non ne esiste nessuna. Nel primo caso, l'estremo superiore di f è il valore minimo che si può dare al valore c facendo sempre in modo che la retta $y = c$ sia sopra il grafico di f (tale retta può anche non intersecare il grafico). Nel secondo caso, la funzione f è **illimitata superiormente** e $\sup_I f = +\infty$. Analogamente per l'estremo inferiore.

DEFINIZIONE 5.2. Una funzione $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\inf_{x \in I} f(x) \in \mathbb{R}$ e $\sup_{x \in I} f(x) \in \mathbb{R}$ (quindi non sono $\pm\infty$) si dice **limitata**.

Il significato geometrico della limitatezza di una funzione è immediato: una funzione è limitata se e solo se il suo grafico è interamente contenuto in una striscia orizzontale $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d\}$ per qualche $c, d \in \mathbb{R}$.

La lattina più conveniente. Supponiamo che si voglia progettare una scatola di latta di forma cilindrica (altezza h e raggio di base r). Il problema è: fissato il volume della scatola, esiste una scelta di r e h che minimizzi il quantitativo di latta da utilizzare (cioè la superficie totale del cilindro)? Sia V il volume della scatola e S la sua superficie

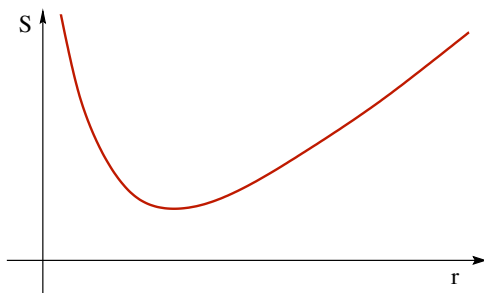


FIGURA 12. Il grafico di $S(r) = 2\pi \left(r^2 + \frac{V}{\pi r} \right)$.

totale. Allora $S = 2\pi r^2 + 2\pi hr = 2\pi(r^2 + hr)$ e $V = \pi r^2 h$. Fissare il volume V e minimizzare S , vuol dire scegliere $V = \text{costante}$. Quindi $h = V/\pi r^2$, e, sostituendo in S ,

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad S = 2\pi \left(r^2 + \frac{V}{\pi r} \right).$$

Dal grafico della funzione S (che si può ottenere sommando i grafici $s = r^2$ e $s = V/\pi r$) si vede che tale minimo esiste. Il calcolo esplicito di quanto valga non è possibile per via elementare (ma con un minimo di cognizione di derivate, si può fare!).