Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 3
(a.a. 23/24, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`lorenzo.carlucci@uniroma1.it`)

1 Combinazioni semplici

Esempio 1 *Quanti modi ho di comporre un panino (scegliendo come al solito tra pane bianco, pane al sesamo, piatto; manzo, maiale, pesce; ketchup, senape, maionese, bbq) mettendo due salse diverse (senza contare l'ordine)?*

Risulta piuttosto intuitivo procedere così: conto quante scelte ordinate ho di due salse diverse (4×3 per il PM) e mi accorgo che devo contare una volta sola coppie simmetriche del tipo (ketchup, maionese) e (maionese, ketchup). Dunque divido per 2.

Esempio 2 *Abbiamo contato i modi di inserire una P e una R (o in generale due lettere diverse) in una targa. Il conto era 4×3. Quanti sono i modi di inserire due P (o in generale due lettere identiche) in una targa? Risulta intuitivo ragionare così: contiamo le coppie ordinate di posizioni (come prima 4×3) e ci accorgiamo che posizioni simmetriche (del tipo $(1,3)$ e $(3,1)$) vanno contate una volta sola. Dunque divido per 2.*

Il metodo di ragionamento utilizzato qui sopra verrà meglio illustrato nel prossimo paragrafo. Si tratta della cosidetta Regola del Pastore.

Regola del Pastore

Per contare le pecore in un gregge, conta le zampe e dividi per 4.

Esempio 3 *Consideriamo di nuovo una gara con 8 atleti. Immaginiamo si tratti di una gara di qualificazione a una gara successiva, e la regola è che i primi 3 arrivati si qualificano. Quante sono le possibili qualificazioni?*

Nell'esempio di sopra ci interessano non le salite al podio (terne ordinate) bensì le qualificazioni: per esempio non vogliamo distinguere il caso in cui Gianni arriva primo, Pedro secondo e Marie terza dal caso in cui Marie arriva prima, Pedro secondo e Gianni terzo, in quanto in entrambi i casi gli atleti che passano il turno sono Gianni, Marie e Pedro.

In termini insiemistici il numero dei passaggi di turno nell'esempio corrisponde al concetto di *sottinsieme* di 3 elementi scelti dall'insieme degli 8 atleti. Il concetto di insieme formalizza per l'apunto l'idea di una collezione di elementi distinti, non ripetuti e non ordinati. In questi termini gli oggetti dell'insieme che vogliamo contare nell'esempio di sopra sono oggetti del tipo $\{Gianni, Marie, Pedro\}$. In quanto insiemi, si hanno le identità

$$\{Gianni, Marie, Pedro\} = \{Pedro, Gianni, Marie\} = \{Marie, Gianni, Pedro\} = \{Marie, Pedro, Gianni\} = \dots$$

che esprimono il fatto che l'ordine degli elementi di un insieme non conta.

Esempio 4 *Consideriamo l'insieme $A = \{a, b, c, d\}$. Vogliamo contare quanti sono i sottinsiemi di 3 elementi. Si vede facilmente che sono 4:*

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

Che idea possiamo usare per contarli? Confrontiamoli con le disposizioni semplici di ordine 3:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

$$abd, adb, bad, bda, dab, dba$$

$$adc, acd, dac, dca, cad, cda$$

$$dbc, dcb, bdc, bcd, cdb, cbd$$

Cosa si può osservare? Si può osservare che il sottinsieme $\{a, b, c\}$ corrisponde alle 6 sequenze abc, acb, bac, cab, cba formate con i suoi elementi; il sottinsieme $\{a, b, d\}$ corrisponde alle 6 sequenze abd, adb, bad, bda, dba formate con i suoi elementi, e analogamente per $\{a, c, d\}$ e $\{b, c, d\}$. Dunque ogni sottinsieme di 3 elementi corrisponde a 6 disposizioni semplici di lunghezza 3. Dato che sappiamo contare queste ultime, possiamo contare i sottinsiemi, usando la Regola del Pastore.

Nel nostro caso gni pecora (sottinsieme di 3 elementi tra 6) ha 6 zampe (disposizioni semplici di lunghezza 3). Si nota che è fondamentale che l'associazione sopra descritta tra sottinsiemi di 3 elementi e disposizioni semplici soddisfi le seguenti condizioni: (1) a ogni sottinsieme di 3 elementi viene associato lo stesso numero (=6) di disposizioni semplici; (2) se due sottinsiemi di 3 elementi sono distinti allora l'insieme delle disposizioni semplici associate al primo non ha elementi in comune con l'insieme delle disposizioni semplici associato al secondo; (3) l'associazione esaurisce l'insieme delle disposizioni semplici di ordine 3 su 4, ossia ogni disposizione semplice di ordine 3 sui 4 elementi $\{a, b, c, d\}$ appartiene all'insieme di disposizioni semplici associato a un qualche sottinsieme di 3 elementi in $\{a, b, c, d\}$. Queste condizioni ci permettono di contare quante sono le combinazioni semplici di ordine 3 su $\{a, b, c, d\}$ se sappiamo contare quante sono le disposizioni semplici di ordine 3 su $\{a, b, c, d\}$: ogni volta che contiamo (o togliamo) un insieme di 3 elementi scelti in $\{a, b, c, d\}$ stiamo contando (o togliendo) 6 disposizioni semplici di ordine 3 su $\{a, b, c, d\}$. Il procedimento esaurisce l'insieme dei sottinsiemi di ordine 3 in $\{a, b, c, d\}$ esattamente quando è esaurito l'insieme delle disposizioni semplici di ordine 3 su $\{a, b, c, d\}$.

Abbiamo dunque che

$$C_{4,3} = \frac{D_{4,3}}{6}$$

Per ottenere una formula generale dobbiamo chiederci cosa è 6 come funzione di n o di k. Si vede facilmente che 6 è il numero delle permutazioni di 3 elementi $(6 = 3!)$ e che ogni sottinsieme corrisponde a tante disposizioni semplici quante sono le permutazioni dei suoi elementi: infatti ogni disposizione semplice di ordine 3 composta dagli elementi di un sottinsieme $\{x, y, z\}$ è determinata/determina/corrisponde a una permutazione di x, y, z.

Nel caso generale in cui vogliamo contare i sottinsiemi di k elementi scelti in un insieme A di n elementi, le nostre pecore saranno oggetti della forma $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ con $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ e ciascuna avrà un numero di zampe uguale al numero di permutazioni dei suoi elementi, ossia $k!$.

Applicando la Regola del Pastore come sopra otteniamo in generale una formula per contare il numero di sottinsiemi di k elementi scelti tra n (con $n \geq k$).

$$\frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}.$$

Per ricordarsi l'espressione è comodo pensare che ha k fattori partendo da n al numeratore e k fattori partendo da k al denominatore.

La quantità di sopra è molto importante in Combinatoria e si merita un nome – coefficiente binomiale (vedremo perché) – e una notazione a sé: $\binom{n}{k}$, (che leggiamo: n scegli k).

La lettera C sta per *combinazioni*. Diamo infatti la seguente definizione.

Definizione 1 (Combinazioni Semplici) *Le combinazioni semplici di ordine k su n sono i sottinsiemi di k elementi scelti in un insieme di n elementi. La loro quantità si denota con $C_{n,k}$.*

Esempio 5 *In un gruppo di 80 individui vogliamo scegliere un gruppo di 4 rappresentanti. In quanti modi posso farlo? Questo è il tipico esempio di applicazione diretta del concetto di combinazione semplice. Basta osservare che non ci interessa l'ordine dei rappresentanti (hanno tutti lo stesso titolo) ma ci interessa solo chi sono i componenti. La risposta è dunque $C_{80,4} = \binom{80}{4}$.*

Esempio 6 *Il numero di modi di scegliere due salse distinte tra quattro, senza che l'ordine conti è il numero di sottinsiemi di 2 elementi dell'insieme di 4 salse, ossia $C_{4,2} = \binom{4}{2}$.*

Esempio 7 *I modi di inserire due P in una targa, in una della 4 posizioni ammissibili per le lettere è il numero di sottinsiemi di 2 elementi dell'insieme degli indici di posizione delle targhe $\{1, 2, 3, 4\}$, ossia $C_{4,2} = \binom{4}{2}$.*

Esempio 8 *Il numero di possibili qualificazioni (primi tre posti) in una gara con 8 atleti è il numero di sottinsiemi di 3 elementi scelti nell'insieme degli 8 atleti, ossia $C_{8,3} = \binom{8}{3}$.*

2 Dimostrazioni per doppio conteggio

Esempio 9 *Quante sono le delegazioni di 4 individui tra cui un portavoce (o capogruppo)?*

Soluzione 1 *Scelgo i 4 membri della delegazione e tra essi un capogruppo (4 scelte di un capogruppo). Per il PM ho*

$$\binom{80}{4} \times 4.$$

Soluzione 2 *Scelgo 1 capogruppo tra gli 80 membri totali (80 scelte) e poi scelgo i rimanenti 3 membri della delegazione. Per il PM ho:*

$$80 \times \binom{79}{3}.$$

Dato che entrambe le soluzioni dell'ultimo esempio qui sopra sono corrette, posso dedurre:

$$\binom{80}{4} \times \binom{4}{1} = \binom{80}{1} \times \binom{79}{3},$$

come si verifica anche facendo i calcoli.

Proviamo a generalizzare, ponendo: n invece di 80, m invece di 4. Otteniamo

$$\binom{n}{m} \times m = n \times \binom{n-1}{m-1}.$$

Posso dire che questa equazione vale in generale (per $n \geq m > 0$)? Un modo di verificarlo è procedere all'inverso di quanto abbiamo fatto sopra, ossia mostrare che l'espressione a sinistra dell'= e quella a destra *contano la stessa quantità*. L'espressione a sinistra conta i modi di scegliere una delegazione di m tra n e in essa un capogruppo (scegliendo prima gli m membri della delegazione e poi il capogruppo tra essi). Ma anche l'espressione a destra conta i modi di scegliere una delegazioni di m tra n e in essa un capogruppo: si sceglie prima un capogruppo tra tutti gli individui e poi i tre restanti membri della commissione. Dunque le due espressioni sono identiche per tutte le scelte delle variabili. Vedremo più avanti che è un caso particolare di una identità ancora più generale.

Questo metodi di dimostrare una identità tra due formule dimostrando che contano la stessa quantità viene detta *dimostrazione per doppio conteggio*.

Abbiamo osservato che l'identità seguente può dimostrarsi per doppio conteggio.

$$\binom{n}{m} \times m = n \times \binom{n-1}{m-1}.$$

Riscriviamola come segue

$$\binom{n}{m} \times \binom{m}{1} = \binom{n}{1} \times \binom{n-1}{m-1}.$$

Proviamo a generalizzare ulteriormente sostituendo a 1 una variabile k. Otteniamo:

$$\binom{n}{m} \times \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{m-k}.$$

Questa identità è ancora vera (per $n \geq m \geq k > 0$?).

Esercizio: trovare una interpretazione tale che le due quantità a destra e a sinistra dell'equazione di sopra contino lo stesso insieme di oggetti (= dimostrare l'identità per doppio conteggio).

Promossi e bocciati Sappiamo già che $\binom{n}{k}$ conta il numero di sottinsiemi di k elementi scelti in un insieme di n elementi. Possiamo immaginare di contare i modi di promuovere k studenti in una classe di n.

Proviamo a contare in modo diverso questa collezione. Fissiamo A il nostro insieme di n elementi. Lo spazio (insieme) che vogliamo contare è quello che contiene tutti e soli i sottinsiemi di k elementi scelti in A. Voglio osservare che contare i sottinsiemi di k elementi scelti in A è equivalente a contare i sottinsiemi di $n-k$ elementi scelti in A. Nell'interpretazione di prima questo consiste nel contare tutti i bocciati in una classe di n se i promossi sono k.

Ci convinciamo facilmente, per esempio, che comunicare a un interlocutore un insieme di k studenti promossi è equivalente a comunicare a un interlocutore un insieme di $n-k$ bocciati.

L'idea intuitiva è che ogni sottinsieme di k elementi in A determina in modo univoco un sottinsieme di $n-k$ elementi in A: il suo complemento. Se $S \subseteq A$ e S ha k elementi allora il complemento di S in A, che denotiamo con $A \setminus S$ è un sottinsieme di A di $n-k$ elementi. Risulta piuttosto intuitivo dunque che le due quantità seguenti sono uguali:

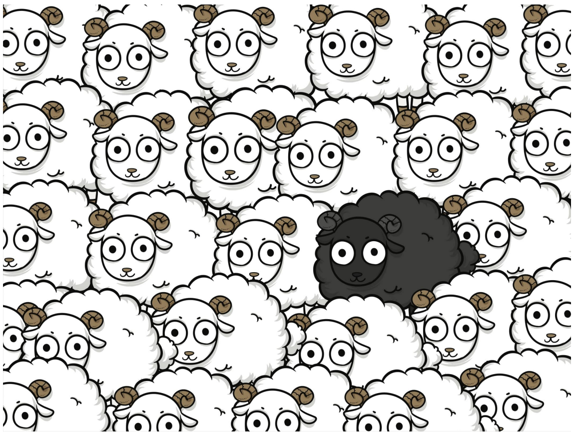
1. I sottinsiemi di A di k elementi.

2. I sottinsiemi di A di $n-k$ elementi.

La prima quantità so già che è $\binom{n}{k}$. La seconda è $\binom{n}{n-k}$. Posso dunque concludere, per doppio conteggio, la seguente identità notevole:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

L'identità è anche utile per la computazione: invece di svolgere il lungo prodotto $\binom{100}{98}$ posso calcolare $\binom{100}{2} = \frac{100\times 99}{2}$.



Greggi con pecora nera Consideriamo ora un altro modo di contare i sottinsiemi di k elementi di un insieme A di n elementi, con $n > 0$ (ossia $A \neq \emptyset$). Immaginiamo il nostro insieme A come un gregge di n pecore. Vogliamo contare tutti i possibili sotto-greggi di k pecore scelte nel gregge. Il gregge contiene una pecora nera, denotiamola con p. Ovviamente ogni sottinsieme di k pecore scelte in A può essere di uno tra i seguenti due tipi:

1. Tipo 1 (gruppi tolleranti): contiene la pecora nera,
2. Tipo 2 (gruppi intolleranti): non contiene la pecora nera.

I gruppi del primo tipo contengono la pecora nera p e altre $k-1$ pecore scelte tra le restanti $n-1$. Il loro numero è dunque dato da $\binom{n-1}{k-1}$, ossia le scelte di $k-1$ elementi tra $n-1$. I gruppi del secondo tipo contengo k pecore scelte tra le $n-1$ pecore (tutte le pecore tranne la pecora nera). Il loro numero è dato da $\binom{n-1}{k}$ ossia le scelte di k elementi tra $n-1$. La tipizzazione è ovviamente esaustiva ed esclusiva. I due casi sopra considerati sono, tecnicamente, una partizione in due parti dell'insieme dei sottinsiemi di k elementi in A in due parti. Posso dunque concludere che:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Questa identità permette di calcolare il valore di un coefficiente binomiale ricorsivamente usando valori più piccoli.

Osservazione 1 *Su questa identità si basa il famoso Triangolo di Pascal-Tartaglia, costituito dai valori*

$$\binom{0}{0}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}, \binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}, \binom{3}{0}, \binom{3}{2}, \ldots$$

ordinati in un triangolo dall'alto verso il basso. Si invita il lettore a informarsi su questo interessante oggetto, dal quale è possibile evincere interessanti proprietà dei coefficienti binomiali.

Tutti i sottinsiemi Con la formula per $C_{n,k}$ posso contare quanti sono i sottinsiemi contenenti esattamente k elementi, per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$. Ovviamente un sottinsieme arbitrario di un insieme A di n elementi avrà $0, 1, 2, \ldots, n-1$ oppure n elementi. Suddividere l'insieme di tutti i sottinsiemi di A in base alla loro numerosità (sottinsiemi di 0 elementi, di 1 elemento, di 2 elementi etc.) è ovviamente una partizione dell'insieme di tutti i sottinsiemi di A. Dunque, per il principio additivo, so che la seguente somma conta esattamente il numero di tutti i sottinsiemi di un insieme di n elementi.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Intuitivamente stiamo contando i sottinsiemi di un insieme di n elementi suddividendoli in gruppi distinti, ossia i sottinsiemi di 0 elementi, di 1 elemento, di 2 elementi, etc, fino ai sottinsiemi di n elementi. In linguaggio insiemistico l'insieme di tutti i sottinsiemi di un insieme A viene detto *insieme potenzza di* A viene denotato con $P(A)$. La definizione ufficiale, per un insieme A arbitrario, è la seguente:

$$P(A) = \{S \, : \, S \subseteq A\}.$$

Si noti che gli elementi di $P(A)$ sono sottinsiemi di A e che tra di essi ci sono l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'insieme A stesso. Con questa notazione abbiamo

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \#P(A).$$

Possiamo contare $\#P(A)$ in un altro modo?