Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 2 (a.a. 23/24, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (`lorenzo.carlucci@uniroma1.it`)

1 Principio Additivo

Esempio 1 *Torniamo ai panini: sappiamo contare i possibili panini composti scegliendo tra pane bianco, pane al sesamo e piatto; carne di manzo, carne di maiale e carne di pesce, e ketchup, maionese, senape e salsa bbq. Per il PM le possibilità sono* $3 \times 3 \times 4$.

Consideriamo ora la seguente proposta: dichiariamo tre tipi diversi di panino, in base a cosa viene scelto tra pane bianco, pane con sesamo e piatto.

1. *Tipo 1: Panini con pane bianco.*
2. *Tipo 2: Panini con pane al sesamo.*
3. *Tipo 3: Al piatto.*

Posso contare quante scelte di ciascun tipo usando il PM:

1. *I panini di Tipo 1 sono* 3×4 *(scelgo una farcitura e scelgo una salsa)*
2. *I panini di Tipo 2 sono* 3×4
3. *I panini di Tipo 3 sono* 3×4

In questo caso la numerosità di ogni tipo è identica (3×4) *e posso concludere che il numero di panini è*

$$3 \times 4 + 3 \times 4 + 3 \times 4.$$

La soluzione coincide con quella ottenuta usando il PM ma è stata ottenuta analizzando il problema in modo diverso.

Esempio 2 *Quante sono le targhe che contengono una unica* P *(ma non so in quale posizione)? Proviamo le targhe contenenti una unica* P *in tipi (o categorie) a seconda della posizione in cui appare l'unica* P*:*

1. *Tipo 1: Targhe con* P *in prima posizione e non altrove.*
2. *Tipo 2: Targhe con* P *in seconda posizione e non altrove.*
3. *Tipo 3: Targhe con* P *in terza posizione e non altrove.*
4. *Tipo 1: Targhe con* P *in quarta posizione e non altrove.*

Intuitivamente se so contare quante targhe esistono di ciascun tipo la loro somma mi darà la quantità desiderata. Posso contare quante targhe di ciascun tipo usando il PM:

1. *Le targhe di Tipo 1 sono* $25 \times 10^3 \times 25^2$
2. *Le targhe di Tipo 2 sono* $25 \times 10^3 \times 25^2$

3. *Le targhe di Tipo 3 sono* $25^2 \times 10^3 \times 25$

4. *Le targhe di Tipo 4 sono* $25^2 \times 10^3 \times 25$

In questo caso la numerosità di ogni tipo è identica a $25^3 \times 10^3$*, e posso concludere che il numero di targhe che contengono una unica* P *è*

$$25^3 \times 10^3 + 25^3 \times 10^3 + 25^3 \times 10^3 + 25^3 \times 10^3 = 25^3 \times 10^3 \times 4.$$

Cerchiamo di analizzare il ragionamento fatto sopra. La richiesta iniziale è quella di contare gli oggetti, scelti in un insieme ambiente (nel nostro caso l'insieme di tutte le targhe) che hanno una certa proprietà – o soddisfano un certo vincolo – nel nostro caso quello di contenere una unica P. Abbiamo ragionato distinguendo in 4 tipi gli oggetti che soddisfano il vincolo: un oggetto che soddisfa il vincolo ricade in uno dei tipi specificati e un oggetto di uno solo dei tipi specificati sicuramente soddisfa il vincolo.

I tipi specificati hanno due proprietà fondamentali. In primo luogo esauriscono lo spazio delle scelte che ci interessano (in questo caso lo spazio delle targhe con una sola P): diciamo che descrivono **esaustivamente** lo spazio delle scelte. In secondo luogo sono **mutualmente esclusivi**, nel senso che nessuna targa può essere di due tipi diversi tra quelli specificati. In questo caso siamo sicuri di poter contare tutte le soluzioni sommando il numero di elementi in ciascun tipo.

Possiamo formulare il seguente principio.

Principio Additivo Per contare gli oggetti che soddisfano un certo vincolo (o proprietà) posso suddividerli in tipi mutualmente esclusivi che descrivono esaustivamente la collezione degli oggetti che soddisfano il vincolo e sommare la quantità di oggetti di ciascun tipo.

Il Principio si presta a una riformulazione in termini di insiemi. Gli *insiemi* sono collezioni di oggetti per cui non conta l'ordine né la molteplicità di ciascun oggetto (ogni oggetto può comparire solo una volta in un insieme). Tradizionalmente indichiamo con $\{a, b, c, d\}$ l'insieme i cui elementi sono a, b, c, d. Lo stesso insieme si può scrivere $\{a, c, b, d\}$, dato che l'ordine non conta. Quando dichiariamo un insieme in base alla proprietà comune dei suoi elementi scriviamo espressioni del tipo $A = \{a$ tali che a è un naturale pari $\}$, che scriviamo anche come $\{a : a$ è un naturale pari $\}$; questo insieme coincide con l'insieme di tutti e soli i numeri pari, che possiamo scrivere anche come $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$.

Vogliamo contare il numero di elementi (la numerosità o cardinalità) di un insieme di oggetti A, nell'esempio le targhe contenenti una unica P. Individuiamo dei sottinsiemi di A:

1. $T_1 = \{$Targhe con P solo in prima posizione$\}$

2. $T_2 = \{$Targhe con P solo in seconda posizione$\}$

3. $T_3 = \{$Targhe con P solo in terza posizione$\}$

4. $T_4 = \{$Targhe con P solo in quarta posizione$\}$

In termini insiemistici T_1, T_2, T_3, T_4 sono *sottinsiemi* di A, e scriviamo

$$T_1 \subseteq A, T_2 \subseteq A, T_3 \subseteq A, T_4 \subseteq A.$$

La notazione $X \subseteq Y$ dove X, Y sono insiemi significa: che ogni elemento di X è anche elemento di Y e si legge X è *sottinsieme* di Y, o anche: X *è incluso* in Y. La definizione ufficiale di *sottinsieme* contiene una quantificazione universale e una implicazione: $X \subset Y$ se e solo se *per ogni* x, se $x \in X$ allora $x \in Y$.

Il fatto che i tipi scelti sono **esaustivi** si traduce nel fatto che l'insieme A coincide con l'unione degli insiemi T_1, T_2, T_3, T_4. L'*unione* di due insiemi X e Y è l'insieme di tutti e soli gli elementi che appartengono a X, a Y oppure a entrambi (diremo: che appartengono a X o a Y intendendo la disgiunzione come inclusiva) e si denota con $X \cup Y$. La definizione ufficiale è $X \cup Y = \{a : a \in X \text{ o } a \in Y\}$. Possiamo esprimere l'identità di A con l'unione degli insiemi corrispondenti ai tipi con la formula:

$$A = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4.$$

(dove l'unione ripetuta si può scrivere senza parentesi in quanto si tratta di una operazione associativa: $(X \cup Y) \cup W = X \cup (X \cup W))$. Si nota che per verificare l'identità tra due insiemi A e B, in generale, occorre stabilire che il primo è sottinsieme del secondo e che il secondo è sottinsieme del primo, ossia che $A \subseteq B$ e che $B \subseteq A$.

Il fatto che i tipi scelti sono **mutualmente esclusivi** si esprime in termini insiemistici dicendo che gli insiemi T_1, T_2, T_3, T_4 sono *due a due disgiunti*, dove X e Y sono *disgiunti* se la loro intersezione è vuota L'*intersezione* di due insiemi X, Y è l'insieme di tutti e soli gli elementi che appartengono sia a X che a Y e viene denotata con $X \cap Y$. La condizione di mutua esclusività dei tipi si traduce in simboli come segue:

$$T_1 \cap T_2 = \emptyset, T_1 \cap T_3 = \emptyset, T_1 \cap T_4 = \emptyset, T_2 \cap T_3 = \emptyset, T_3 \cap T_4 = \emptyset$$

dove il simbolo $\emptyset$ denota l'*insieme vuoto* (l'insieme che non ha elementi). Abbrevieremo talvolta la condizione richiedendo che per ogni $i \neq j$ per i, j che variano in $\{1, 2, 3, 4\}$ valga

$$T_i \cap T_j = \emptyset.$$

Generalizzando dal caso dell'esempio possiamo formulare il Principio Additivo nella sua veste formale come segue. Se A è un insieme usiamo la notazione $\#A$ per indicare il numero di elementi di A (anche detto *numerosità* di A o *cardinalità* di A).

Principio Additivo

Sia A un insieme. Siano $T_1, T_2, \ldots, T_k$ sottinsiemi di A mutualmente disgiunti e tali che

$$A = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k.$$

Allora

$$\#A = \#T_1 + \#T_2 + \cdots + \#T_k.$$

Una descrizione di un insieme A come unione di k insiemi mutualmente disgiunti viene detta una *partizione* di A in k parti.

Consideriamo ora il seguente quesito:

Quesito: Quante targhe contengono una P ma non sappiamo dove e se sia unica? La domanda si riformula brevemente così: Quante targhe contengono almeno una P?.

Potremmo provare a procedere usando la tipizzazione ossia il PA. Consideriamo i seguenti tipi, a seconda della posizione di una P nella targa:

1. Tipo 1: Targhe con P in prima posizione.
2. Tipo 2: Targhe con P in seconda posizione.
3. Tipo 3: Targhe con P in terza posizione.
4. Tipo 4: Targhe con P in quarta posizione.

Dobbiamo chiederci: questa tipizzazione rispetta i vincoli di applicabilità del PA? Ossia: i sottinsiemi T_1, T_2, T_3, T_4 corrispondenti ai tipi dichiarati sopra sono esaustivi ed esclusivi?

Prima di tutto chiariamo meglio i tipi. In una prima lettura intediamo le targhe con una sola P e quella P in posizione 1,2,3 o 4. In una seconda lettura intendiamo le targhe con una P in 1, 2, 3, o 4 posizione ma non escludiamo che vi siano altre P.

Si vede facilmente che, nella seconda lettura, i tipi sono esaustivi: ogni targa che contiene almeno una P ricade sicuramente in almeno uno dei tipi specificati e, viceversa, ogni targa di uno dei tipi specificati è una targa che contiene almeno una P. Il problema è però che i tipi dichiarati non sono esclusivi: per esempio la targa $PP103SY$ è sia del tipo 1 che del tipo 2; la targa $TP556FP$ è sia del tipo 2 che del tipo 4. Questo è sufficiente per riconoscere che non possiamo applicare il PA come lo abbiamo formulato.

Nella prima lettura (Tipo i = Targhe con P solo in posizione i) i tipi sono esclusivi ma non esaustivi: la targa $PP103SY$ non è di nessun tipo. Anche in questo caso non possiamo applicare il Principio Additivo.

Si invita il lettore a ragionare su quale problema incontriamo se sosteniamo che la soluzione è data dalla somma del numero di elementi dei quattro tipi specificati.

Possiamo però proporre altre tipizzazioni – la dichiarazione dei tipi per un problema non è mai unica e non si trova con un procedimento meccanico! Serve un po' di intuizione e di immaginazione. (Esercizio).

Soluzione alternativa: Posso contare la quantità desiderata contando quante targhe non soddisfano il vincolo e sottraendo il loro numero dal totale delle targhe possibili. Il vincolo è: contenere almeno una P. Le targhe che non lo soddisfano sono quelle che non contengo nessuna P. Il loro numero si conta facilmente con il PM: è $25^2 \times 10^3 \times 25^2$. Il totale delle targhe è come sappiamo: $26^2 \times 10^3 \times 26^2$. Dunque il risultato richiesto è

$$26^2 \times 10^3 \times 26^2 - 25^2 \times 10^3 \times 25^2.$$

L'ultima soluzione qui sopra è elegante ed economica. La chiamiamo soluzione per *passaggio al complemento*. Si osserva che altro non è che un caso particolare del PA. Equivale infatti a dividere tutte le targhe possibili (insieme A) in due tipi: quelle che soddisfano il vincolo (chiamiamolo insieme V) e quelle che non lo soddisfano (chiamiamolo insieme *non* V). Si vede facilmente che abbiamo così definito una partizione in 2 parti di A. Dunque per il PA

$$\#A = \#V + \#(\text{ non } V)$$

e così

$$\#V = \#A - \#(\text{ non } V).$$

In termini insiemistici l'insieme che abbiamo chiamato *non* V viene detto il complemento di V in A e viene denotato con $(A \setminus V)$ (l'insieme degli elementi di A che non appartengono a V). La sua definizione ufficiale è la seguente: se $V \subseteq A$, il complemento di V in A è $(A \setminus V) = \{a \mid a \in A \text{ e } a \notin V\}$.

Ogni sottinsieme X di un insieme A determina una partizione di A in due parti: X stesso e il suo complemento $(A \setminus X)$. Si tratta di una partizione perché, ovviamente, abbiamo che $A = X \cup (A \setminus X)$ (ogni elemento di A è in X o non è in X – dunque è in $(A \setminus X)$) e $X \cap (A \setminus X) = \emptyset$ (X e il suo complemento sono disgiunti).

Diamo a questo procedimento la dignità di un principio o metodo.

Passaggio al Complemento

Sia A un insieme e sia $B \subseteq A$. Allora

$$\#B = \#A - \#(A \setminus B).$$

Esempio 3 *In una gara di 8 atleti di cui 2 italiani, 3 francesi e 3 spagnoli, quanti sono gli ordini di arrivo in cui i primi tre atleti hanno nazionalità diverse? (Esercizio: usare il Principio Additivo)*