Metodi Matematici per l'Informatica - Dispensa 5
(a.a. 23/24, I canale)

Docente: Lorenzo Carlucci (lorenzo.carlucci@uniroma1.it)

1 PIE: Principio di Inclusione-Esclusione

Abbiamo usato diverse volte il principio additivo: se gli oggetti di una collezione sono di due tipi distinti e mutualmente esclusivi, allora il loro numero è la somma degli oggetti del primo tipo e degli oggetti del secondo tipo.

Esempio 1 *Quante targhe contengono una P in prima posizione o una R in ultima? Possiamo risolvere il problema per partizione o passando al complemento. Proviamo però un altro approccio. Consideriamo i seguenti insiemi:*

1. *A = insieme delle targhe che contengono una P in prima posizione.*
2. *B = insieme delle targhe che contengono una R in ultima posizione.*

Entrambi sono facili da contare (con il PM). Se stimiamo che la risposta al nostro problema sia la somma $\#A + \#B$ ci accorgiamo che stiamo sovra-contando la quantità desiderata. Infatti alcuni elementi tra quelli che vogliamo contare sono contati più di una volta.

In particolare, in $\#A$ vengono contate una volta tutte le targhe che hanno P in prima e non hanno R in ultima (chiamiamo X l'insieme di queste targhe) e una volta tutte le targhe che hanno P in prima e hanno R in ultima (chiamiamo Y l'insieme di queste targhe). Nella quantità $\#B$ vengono una volta tutte le targhe che hanno R in ultima e non hanno P in prima (chiamiamo Z l'insieme di queste targhe) e una volta tutte le targhe che hanno P in prima e hanno R in ultima. Quest'ultimo insieme coincide con quello che abbiamo già chiamato Y. Dunque gli elementi di Y e solo gli elementi di Y sono contati esattamente due volte nella somma $\#A + \#B$. Per ottenere la quantità corretta dobbiamo dunque sottrarre il numero di elementi in Y. Si osserva facilmente che $Y = A \cap B$.

L'insieme delle targhe con P in prima o R in ultima è dunque $\#A + \#B - \#(A \cap B)$.

In termini astratti, il numero di oggetti di tipo A oppure B (il totale) è dato dalla somma del numero di oggetti di tipo A più il numero di oggetti di tipo B meno il numero di oggetti di tipo A e B:

$$\#(A \text{ o } B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \text{ e } B).$$

In termini insiemistici possiamo scrivere il seguente Principio, giustificato esattamente come nell'esempio precedente.

Principio di Inclusione Esclusione (a due termini)

Siano A e B due insiemi finiti. Allora

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B).$$

Si osserva facilmente che la forma del Principio Additivo, in cui i tipi A e B sono esclusivi è un caso particolare della forma più generale, perché se i tipi sono esclusivi il termine $\#(A \text{ e } B)$ è uguale a 0.

Possiamo applicare il PIE a due termini ogni volta che dobbiamo contare l'unione tra due insiemi. Questo accade per esempio quando il problema è espresso direttamente in forma di disgiunzione o con l'espressione *almeno*.

Esempio 2 *Consideriamo una classe con* 24 *studenti, sottoposti a due test di valutazione. Supponiamo che*

- *18 studenti superano il primo test,*
- *15 studenti superano il secondo test,*
- *12 studenti superano entrambi i test.*

Vogliamo contare quanti studenti superano ***almeno un test****. Osserviamo subito che il costrutto almeno è parente stretto dell'oppure: almeno in questo caso significa superare il primo test oppure superare il secondo test. Possiamo quindi applicare il Principio Additivo. Gli studenti di tipo A sono quelli che superano il primo test, gli studenti di tipo B quelli che superano il secondo test. Nella somma* $18 + 15$ *stiamo contando esattamente due volte tutti e soli gli studenti che superano sia il primo che il secondo test, ossia gli studenti che sono simultaneamente di tipo A e di tipo B. Come visto sopra, dobbiamo sottrarti alla somma. In questo caso sappiamo esattamente quanti sono, ossia* 12*. Gli studenti di tipo A o di tipo B, ossia gli studenti che superano almeno un test, sono dunque*

$$18 + 15 - 12 = 21.$$

Il PIE risulta utile però anche in altre situazioni, in cui il problema non è direttamente un problema disgiuntivo o di unione, come esemplificato dagli esempi seguenti.

Esempio 3 *Quante targhe contengono almeno una T e almeno un 9?*

Una tipizzazione diretta è laboriosa. Passiamo al complemento: quante targhe non contengono una T o non contengono un 9? Di certo questo insieme di targhe è l'unione dei due insiemi seguenti:

1. *A = insieme delle targhe che non contengono una T.*
2. *B = insieme delle targhe che non contengono un 9.*

L'insieme $C = A \cup B$ è quello che ci interessa: l'insieme delle targhe che non contengo una T oppure non contengono un 9. Sappiamo inoltre contare la cardinalità di A e di B:

1. $\#A = 25^2 \times 10^3 \times 25^2$.
2. $\#B = 26^2 \times 9^3 \times 26^2$.

Provo a contare la cardinalità di $A \cup B$ sommando le due quantità:

$$\#A + \#B.$$

Nella quantità $\#A$ abbiamo contato anche le targhe senza T né 9 oltre a quelle senza T ma con 9. Anche in $\#B$ abbiamo contato le targhe senza T né 9 (oltre a quelle senza 9 ma con T). Risulta quindi che abbiamo contato due volte tutte e sole le targhe senza T né 9. Per avere la cardinalità corretta dell'unione dobbiamo quindi sottrarre questa quantità. In termini insiemisitici si tratta della cardinalità dell'intersezione $A \cap B$. Concludiamo quindi che il numero di targhe senza T o senza 9 è

$$\#A + \#B - \#(A \cap B).$$

In questo caso sappiamo contare agevolmente $\#(A \cap B)$: le targhe senza T né 9 sono $25^2 \times 9^3 \times 25^2$. Dunque il complemento che stiamo contando ha

$$25^2 \times 10^3 \times 25^2 + 26^2 \times 9^3 \times 26^2 - 25^2 \times 9^3 \times 25^2$$

elementi, e la soluzione dell'esercizio si ottiene sottraendo questa quantità dal numero totale di targhe, ossia:

$$26^2 \times 10^3 \times 26^2 - (25^2 \times 10^3 \times 25^2 + 26^2 \times 9^3 \times 26^2 - 25^2 \times 9^3 \times 25^2)$$

$$= 26^2 \times 10^3 \times 26^2 - 25^2 \times 10^3 \times 25^2 - 26^2 \times 9^3 \times 26^2 + 25^2 \times 9^3 \times 25^2.$$

Esempio 4 *In una città esistono solo due circoli: il circolo del Tennis, che conta 20 iscritti, e il circolo del Golf che ne conta 15. Sappiamo anche che il numero di persone iscritti a qualche circolo è 25. Quante persone sono iscritte sia al circolo del Tennis che a quello del Golf?*

Poniamo:

$$T = \{ \text{ persone iscritte al circolo del Tennis } \}$$

$$G = \{ \text{ persone iscritte al circolo del Golf } \}$$

Abbiamo che

$$T \cup G = \{ \text{ persone iscritte al circolo Tennis o al circolo Golf} \} = \{ \text{ persone iscritte ad almeno un circolo} \},$$

che sappiamo essere 25, *e*

$$T \cap G = \{ \text{ persone iscritte al circolo Tennis e al circolo Golf} \}$$

che è la quantità che ci interessa scoprire.

Sappiamo (per PIE) che:

$$\#(T \cup G) = \#T + \#G - \#(T \cap G),$$

dunque

$$25 = 20 + 15 - \#(T \cap G),$$

e dunque

$$\#(T \cap G) = 20 + 15 - 25 = 10.$$

PIE a 3 termini Consideriamo un caso in cui i nostri dati sono divisi in 3 tipi. Consideriamo una classe di studenti sottoposti a tre test di valutazione: Combinatoria (C), Induzione (I) e Logica (L). I risultati dei test a nostra disposizione sono i seguenti:

- 12 studenti superano I
- 5 studenti superano L
- 8 studenti superano C
- 2 studenti superano sia I che L
- 6 studenti superano sia I che C
- 3 studenti superano sia L che C
- 1 studente supera sia I che L che C

Si osserva che, come sopra, i dati vanno di norma interpretati così: il numero degli studenti che supera I conta quelli che superano solo I, I e anche L, I e anche C, I e L e C; e analogamente per gli altri dati.

Quanti studenti hanno superato **almeno** un test?

Ponendo

$$I = \{\text{ studenti che superano Induzione}\}$$

$$L = \{\text{ studenti che superano Logica}\}$$

$$C = \{\text{ studenti che superano Combinatoria}\}$$

possiamo vedere il problema come un problema di unione. Denotiamo, generalizzando la notazione per l'unione, con $I \cup L \cup C$ l'insieme degli studenti che sono in I o in C o in L, detto unione di I, C, L.

Proviamo a procedere così: consideriamo la somma

$$\#I + \#L + \#C$$

In questa somma stiamo contando due volte gli studenti che superano almeno due esami. Infatti in $\#I$ stiamo contando quelli che superano solo I e anche quelli che superano I e L; in $\#L$ contiamo quelli che superano solo L ma anche quelli che superano I e L – risulta così che gli studenti che superano I e L sono stati contati due volte. Dobbiamo quindi sottrarli.

Stessa cosa se consideriamo gli studenti che superano L e C, che sono contati una volta in $\#L$ e una in $\#C$ quindi due volte; o gli studenti che superano I e C, contati una volta in $\#I$ e una volta in $\#C$.

Abbiamo che dobbiamo sottrarre le quantità $\#(I \cap L)$, $\#(I \cap C)$ e $\#(L \cap C)$.

Otteniamo così

$$\#I + \#L + \#C - \#(I \cap L) - \#(I \cap C) - \#(L \cap C)$$

Dobbiamo ancora aggiustare il risultato: in ciascuno dei primi tre addendi abbiamo infatti contato una volta gli studenti che superano tutti e tre i test. Ma questi ultimi sono stati anche sottratti in ciascuno dei tre sottraendi. Infatti in $\#(I \cap C)$ contiamo sia gli studenti che superano solo I e C ma anche quelli superano I e C e L. Analogamente in $\#(I \cap L)$ e in $\#(L \cap C)$. Generalizzando la notazione per l'intersezione, denotiamo con $I \cap L \cap C$ l'insieme degli elementi che sono sia in I che in C che in L. Risulta che dobbiamo aggiungere la quantità $\#(I \cap C \cap L)$ perché non l'abbiamo contata.

Otteniamo così l'espressione:

$$\#I + \#L + \#C - \#(I \cap L) - \#(I \cap C) - \#(L \cap C) + \#(I \cap C \cap L)$$

Il ragionamento di sopra è del tutto generale e possiamo formulare il seguente principio:

Principio di Inclusione Esclusione (a tre termini)

Siano A, B, C tre insiemi finiti. Allora

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$

Esempio 5 *Per contare le targhe che contengono almeno uno* 0 *possiamo procedere così: dichiariamo i seguenti insiemi*

$$A = \{ \text{ targhe con } 0 \text{ in prima posizione } \}$$

$$B = \{ \text{ targhe con } 0 \text{ in seconda posizione } \}$$

$$C = \{ \text{ targhe con } 0 \text{ in terza posizione } \}$$

L'insieme che vogliamo contare (targhe con almeno *uno* 0*) è l'unione* $A \cup B \cup C$*. Possiamo applicare direttamente il PIE a* 3 *termini.*

Esercizio 1 *In un gruppo di individui di 80 individui formato da 50 cristiani, 20 ebrei e 10 musulmani. Quante sono le delegazioni di 5 contenenti almeno un rappresentante di ogni religione?*
Approccio diretto. *Possiamo dichiarare i seguenti insiemi.*

1. C = *insieme delle delegazioni di* 5 *contenenti almeno un Cristiano.*

2. E = *insieme delle delegazioni di* 5 *contenenti almeno un Ebreo.*

3. M = *insieme delle delegazioni di* 5 *contenenti almeno un Musulmano.*

Con questo approccio l'insieme che vogliamo contare è l'intersezione $C \cap E \cap M$ *che contiene tutte e sole le delegazioni di* 5 *contenenti almeno un Cristiano e almeno un Ebreo e almeno un Musulmano. Si noti che la congiunzione/intersezione in questo caso traduce il* per ogni... *che appare nel problema. Ciascuno degli insiemi* C, E, M *è definito con un* ...almeno....

Passaggio al complemento. *Passando al complemento vogliamo contare le delegazioni di 5 che violano il vincolo. Il complemento dell'insieme delle delegazioni di 5 con almeno un rappresentante di ogni religione è ottenuto come unione dei seguenti tre insiemi:*

1. A = *insieme delle delegazioni di* 5 non *contenenti un Cristiano (sono* $\binom{20+10}{5}$*).*

2. B = *insieme delle delegazioni di* 5 non *contenenti un Ebreo (sono* $\binom{50+10}{5}$*).*

3. C = *insieme delle delegazioni di* 5 non *contenenti un Musulmano (sono* $\binom{50+20}{5}$*).*

Si tratta quindi di un problema di unione e possiamo applicare il PIE a tre termini.

2 Approfondimenti su PIE e Combinazioni

PIE a 4 termini (approfondimento Con ragionamenti analoghi a quelli sopra si può formulare il Principio di Inclusione-Esclusione per unione di un numero $n = 4, 5, 6, \ldots$ di insiemi arbitrari. Per esempio, per $n = 4$ abbiamo quanto segue:

$$\#(A \cup B \cup C \cup D) = \#A + \#B + \#C + \#D$$
$$-\#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) - \#(B \cap D) - \#(A \cap D) - \#(C \cap D)$$
$$+\#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap B \cap D) + \#(A \cap C \cap D) + \#(B \cap C \cap D)$$

$$-\#(A \cap B \cap C \cap D).$$

L'equazione può giustificarsi in modo perfettamente analogo a quanto visto nel caso di tre termini, individuando, nelle approssimazioni progressive, quante volte sono contati gli elementi dei vari insiemi. Per esempio, l'intersezione $(A \cap B \cap C \cap D)$ è contata 4 volte nella prima riga (perché è contenuta in ciascuno dei 4 addendi), sottratta 6 volte nella seconda riga (perché contenuta in ciascuno dei 6 addendi), aggiunta 4 volte nella terza riga (perché contenuta in ciascuno dei 4 addendi). Dunque,fino alla terza riga inclusa, gli elementi dell'intersezione $(A \cap B \cap C \cap D)$ sono stati contati due volte. Vanno dunque sottratti una volta. Questo giustifica il termine nella quarta riga dell'equazione precedente.

Lo schema generale è il seguente:

1. Includo (sommo) le cardinalità dei singoli.

2. Escludo (sottraggo) le cardinalità delle intersezioni a due a due.

3. Includo (sommo) le cardinalità delle intersezioni a tre termini.

4. Escludo (sottraggo) le cardinalitù delle intersezioni a quattro termini.

Esercizio 2 *Consideriamo il seguente problema delle madri degeneri. Abbiamo 4 madri ciascuna con un neonato, decisamente stufe del proprio pargolo. In quanti modi le madri degeneri possono scambiarsi i figli in modo che a nessuna madre capiti il proprio figlio?*

PIE a n termini (approfondimento) La forma generale del Principio di Inclusione-Esclusione è la seguente:

1. Includo (sommo) le cardinalità dei singoli.

2. Escludo (sottraggo) le cardinalità delle intersezioni a due a due.

3. Includo (sommo) le cardinalità delle intersezioni a tre termini.

4. Escludo (sottraggo) le cardinalitù delle intersezioni a quattro termini.

5. ...

6. ...

Si evince dal caso di sopra che si può sviluppare una formula per il PIE per unioni di 4 insiemi. Con analogo ragionamento si ottiene una formula per unioni arbitrarie di n insiemi.

Teorema 1 *Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ insiemi finiti. La loro unione contiene esattamente*

$$\sum_{i=1}^{n} \#A_i - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \cdots + (-1)^{n-1} \#(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Alcune considerazioni sulla formula: la sommatoria $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2})$ è un'espressione sintetica per variare su tutte le possibili coppie di due insiemi scelte tra gli n a disposizione. Va letta così: per ogni scelta di i_1 e i_2 cha variano tra 1 e n e tali che $i_1 < i_2$ ho un certo addendo dipendente da i_1 e i_2, in questo caso è il numero di elementi nell'intersezione di A_{i_1} con A_{i_2}. In termini informatici può leggersi come un doppio *for*. Analogo discorso per $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$, che va letta come: per ogni scelta di $i_1 < i_2 < i_3$ che variano tra 1 e n ho l'addendo $\#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$, ossia come un triplo *for*. Il termine $(-1)^{n-1}$ non è che un trucchetto per scrivere uniformemente il segno dell'ultiomo termine della formula che è un - se n è pari (cfr. caso $n = 2$) e un + se n è dispari (cfr. caso $n =$). Diamo ora una dimostrazione combinatoria del Teorema.

Dimostrazione (extra) Consideriamo un arbitrario elemento a nell'unione $A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Questo elemento ovviamente contribuisce una unità al conto del numero di elementi dell'unione (termine sinistro dell'identità da dimostrare). Chiediamoci ora quanto contribuisce al termine destro dell'identità. In altre parole: in quante delle intersezioni che compaiono nella parte destra dell'identità nel Teorema viene contato il termine a. Ovviamente in tutte e sole quelle che coinvolgono insiemi ai quali a appartiene! Sia dunque i il numero degli insiemi in $A_1, \ldots, A_n$ di cui a è un elemento. Rinominiamo per comodità la nostra lista di insiemi in modo che gli i insiemi che contengono a compaiano per primi, ossia in modo tale che a sia in $A_1, A_2, \ldots, A_i$ e in nessun insieme con indice più grande. L'elemento a compare nelle intersezioni di ogni k-pla di insiemi scelti tra questi. Dunque compare in $\binom{i}{k}$ intersezioni. Queste intersezioni vengono aggiunte o sottratte a seconda della parità di k: infatti vengono contate con segno $(-1)^{k-1}$ nella formula a destra dell'identità del PIE. Dunque il contributo dell'elemento a alla parte destra dell'identità è di

$$\binom{i}{1} - \binom{i}{2} + \binom{i}{3} - \cdots + (-1)^{i-1}\binom{i}{i}.$$

Per concludere basta osservare che questa espressione vale esattamente 1. Dunque un arbitrario elemento a contribuisce una unità a sinistra e una unità a destra dell'identità e il Teorema è dimostrato.

Basta quindi dimostrare che

$$\binom{i}{1} - \binom{i}{2} + \binom{i}{3} - \cdots + (-1)^{i-1}\binom{i}{i} = 1.$$

Si può dimostrare ovviamente mostrando che:

$$\binom{i}{0} - \binom{i}{1} + \binom{i}{2} - \cdots + (-1)^{i}\binom{i}{i} = \sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j} = 0,$$

Per dimostrare quest'ultima identità possiamo ricorrere alla relazione tra la quantità $\binom{i}{j}$ e lo sviluppo di un binoio $(a+b)^n$ (per una scelta opportuna di a e b reali non necessariamente positivi).

Combinazioni e sviluppo di un binomio Tra le combinazioni e lo sviluppo di un binomio c'è una stretta relazione (per questo la quantità $\binom{n}{k}$ si chiama anche coefficiente binomiale).

Consideriamo l'identità

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

e

$$(a+b)^3 = a^3 + a^2b + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ci interessa contare il numero di occorrenze dei termini di questa somma, o in altre parole i coefficienti moltiplicativi, che nell'ultimo esempio sono 1 per il termine a^3 e b^3, e 3 per i termini a^2b e ab^2.

In generale vale il seguente Teorema.

Teorema 2 *Siano a, b numeri reali, e sia n un intero positivo. Allora*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}.$$

Si ricorda che la sommatoria qui sopra è un'abbreviazione per la somma seguente:

$$\binom{n}{0}a^0b^{n-0} + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b^{n-(n-1)} + \binom{n}{n}a^ib^{n-n}.$$

Dimostrazione. La potenza $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n}$ si ottiene sommando tutti i possibili prodotti di n fattori $p_1 \times \cdots \times p_n$ dove ogni p_i è uguale ad a o a b.

Applicando distributività e commutatività posso dire che ogni addendo ha la forma $a^i b^{n-i}$, corrispondente allo scegliere i volte a e le restanti volte b nel fattore $(a+b)$ di $(a+b)^n$.

Fissiamo $i \in [0, n]$. Gli addendi di forma $a^i b^{n-i}$ sono tutti e soli i prodotti $p_1 \dots p_n$ in cui l'insieme $\{j : p_j = a\}$ è un sottinsieme di i elementi di $\{1, \dots, n\}$. Dunque sono in quantità di $\binom{n}{i}$. **QED**