TIN - Domáca úloha č. 1

Roman Dobiáš - xdobia11@stud.fit.vutbr.cz

14. januára 2019

Úloha č.1

1. *Dôkaz.* Nech $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3$. Pomocou axiomu doplnku z teórie množín je možné previesť nasledujúcu úpravu:

$$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$$

Z vety 3.23 (skripta, str. 50) vieme, že trieda jazykov $\mathcal{L}_3$ je uzavretá voči $\cup$ a $\cap$ voči triede $\mathcal{L}_3$, a doplnku ku Σ^*. Nakoľko doplnok aj prienik sú uzavreté operácie v $\mathcal{L}_3$, potom $L_1 \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$,a vzhľadom na úpravu potom aj $L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_3$. □

2. *Dôkaz.* Nech $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D$. Z vety 4.27 (skriptá) vieme, že trieda $\mathcal{L}_2^D$ je uzavretá voči prieniku s jazykom triedy $\mathcal{L}_3$ a voči doplnku. Preto $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$ a zrejme $L_1 \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$. Zároveň vieme, že L_1 aj L_2 sú množiny a platí pre ne vzťah $L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$. Preto nutne $L_1 \setminus L_2 \in L_2^D$. □

3. *Dôkaz.* Nech je daná ľubovoľná abeceda Σ a jazyk $L_1 = \Sigma^*$. Zjavne $L_1 \in \mathcal{L}_3$, kedže pre neho existuje deterministický konečný automat $M = (\{q_0\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_0\})$, kde $\forall a \in \Sigma : \delta(q_0, a) = q_0$ taký, že $L(M) = L_1$. Zároveň nech $L_2 \in \mathcal{L}_2$. Predpokladajme, že $\Sigma^* \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2$. Potom nasledujúcou úpravou z definície operácie $\setminus$ a definície doplnku dostávame:

$$\Sigma^* \setminus L_2 = \{w | w \in \Sigma^* \wedge w \notin L_2\} = \overline{L_2}$$

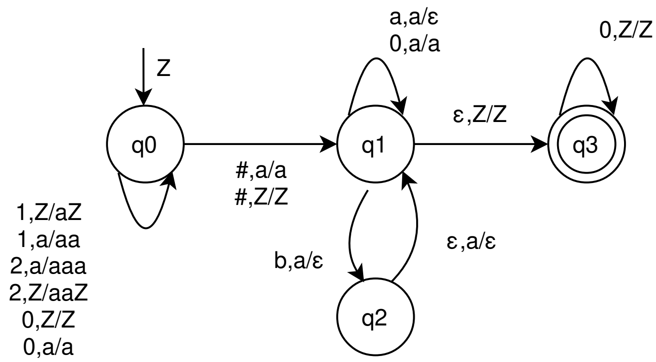
Z predpokladu $\Sigma^* \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2$ dostávame $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$, čo je spor, pretože z uzáverových vlastností bezkontextových jazykov vieme, že operácia doplnku nie je uzavretá (napr. doplnok ku jazyku $\overline{\{a^n b^n c^n | n \geq 1\}}$ je kontextový jazyk). Preto neplatí predpoklad a obecne neplatí, že $L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2$. □

Úloha č.2

Nech $P = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1, 2\}, \{a, Z\}, \delta, q_0, Z, \{q_3\})$ je deterministický zásobníkový automat, kde δ je definované nasledovne:

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, 1, Z) = (q_0, aZ) & \delta(q_0, 1, a) = (q_0, aa) \\
\delta(q_0, 2, Z) = (q_0, aaZ) & \delta(q_0, 2, a) = (q_0, aaa) \\
\delta(q_0, 0, Z) = (q_0, Z) & \delta(q_0, 0, a) = (q_0, a) \\
\delta(q_0, \#, a) = (q_1, a) & \delta(q_0, \#, Z) = (q_1, Z) \\
\delta(q_1, a, a) = (q_1, \epsilon) & \delta(q_1, b, a) = (q_2, \epsilon) \\
\delta(q_1, 0, a) = (q_1, a) & \delta(q_2, \epsilon, a) = (q1, \epsilon) \\
\delta(q_1, \epsilon, Z) = (q_3, Z) & \delta(q_3, 0, Z) = (q_3, Z)
\end{array}$$

Diagram výsledného automatu je znázornený na obrázku . Výsledný DZA prijíma reťazec prechodom do koncového stavu a prečítaním celého vstupného reťazca.



Obr. 1: Diagram DZA z úlohy č.2. Automat prijíma prechodom do koncového stavu.

Úloha č.3

Dôkaz je prevedený pomocou Pumping Lemma.

Dôkaz. Predpokládajme, že jazyk L je nekonečným regulárnym jazykom. Potom existuje $k > 0$ a reťazec $w = a^k\#a^k$ z jazyka L, pre ktorý platí $|w| = 2k + 1$, teda $|w| \geq k$, a platí nasledujúce tvrdenie:

$$\exists x, y, z \in (N \cup \Sigma)^* : w = xyz \wedge |xy| \leq k \wedge y \neq \epsilon : \forall i \in \mathbb{N}_0 : xy^iz \in L$$

Zvoľme ľubovoľné $l, n \in \mathbb{N}_0$ také, že platí $x = a^n \wedge y = a^l \wedge z = a^{k-l-n}\#a^k \wedge l > 0 \wedge n \geq 0 \wedge l + n \leq k$. Potom musí platiť, že $\forall i \in \mathbb{N}_0 : xy^iz \in L$.

Uvažujme prípad $i = 0$. Potom by podľa prepokladu malo platiť $xz \in L$, lenže zjavne platí $a^na^{k-l-n}\#a^k = a^{k-l}\#a^k \notin L$, čo je v spore s predpokladom, že L je regulárny jazyk. Preto L nie je regulárny jazyk. □

Úloha č.4

Neformálna idea (myšlienka) algoritmu spočíva v generovaní reťazcov „odzadu“. Namiesto budovania prefixu z terminálov, ako to pomyslene robí pravá lineárna gramatika, vybudujeme terminálový suffix prijímaného reťazca.

Algoritmus prevodu PLG na LLG

Vstup: Pravá lineárna gramatika $G_P = (N, \Sigma, P, S)$ taká, že P obsahuje len pravidlá typu $A \rightarrow xB, x \in \Sigma^*, A, B \in N$ a typu $A \rightarrow x, x \in \Sigma^*, A \in N$
Výstup: Ľavá lineárna gramatika $G_L = (N_1, \Sigma, P_1, S_1)$ taká, že P_1 obsahuje len pravidlá typu $A \rightarrow Bx, x \in \Sigma^*, A, B \in N$ a typu $A \rightarrow x, x \in \Sigma^*, A \in N$
Metóda:

1. $N_1 = N \cup \{S_1\}$
2. Pre každé pravidlo z množiny P typu $A \rightarrow xB, A, B \in N, x \in \Sigma^*$ pridaj do množiny pravidiel P_1 pravidlo:

$$B \rightarrow Ax$$

3. Pre každé pravidlo z množiny P typu $A \rightarrow x, A \in N, x \in \Sigma^*$ pridaj do množiny pravidiel P_1 pravidlo:

$$S_1 \rightarrow Ax$$

4. $P_1 = P_1 \cup \{S \rightarrow \epsilon\}$

Demonštrácia algoritmu

Pomocou vyžšie definovaného algoritmu predvedieme príklad transformácie gramatiky $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), P = \{S \to abA|bS, A \to bB|S|ab, B \to \epsilon|aA\}$:

1. $N_1 = \{S, A, B\} \cup \{S_1\}$
2. Do množiny P_1 pridáme nasledujúce pravidlá (konvencia $p \in P \implies p \in P_1$):

$$
\begin{array}{cc}
S \to abA \implies A \to Sab & S \to bS \implies S \to Sb \\
A \to bB \implies B \to Ab & A \to S \implies S \to A \\
B \to aA \implies A \to Ba &
\end{array}
$$

3. P_1:

$$
\begin{array}{cc}
A \to ab \implies S_1 \to Aab & B \to \epsilon \implies S_1 \to B\epsilon
\end{array}
$$

4. $P_1 = P_1 \cup \{S \to \epsilon\}$
5. $G_L = (N_1, \{a, b\}, P_1, S_1)$

Demonštráčná derivácia

Uvažujme reťazec $abbab$. V gramatikách G a G_1 je možné vygenerovať uvažovaný reťazec v nasledujúcich deriváciach:

$$
\begin{aligned}
S \Rightarrow_G abA \Rightarrow_G abbB \Rightarrow_G abbaA \Rightarrow_G abbabB \Rightarrow_G abbab \\
S_1 \Rightarrow_{G_L} B \Rightarrow_{G_L} Ab \Rightarrow_{G_L} Bab \Rightarrow_{G_L} Abab \Rightarrow_{G_L} Sabbab \Rightarrow_{G_L} abbab
\end{aligned}
$$

Úloha č.5

Podľa Myhill-Nerudovej vety (veta 3.20, skriptá, str. 48) pre jazyk L existuje deterministický konečný automat M taký, že $L(M) = L$, práve vtedy ak prefixová ekvivalencia $\sim_L$ má konečný index. Budeme sa teda snažiť dokázať, že jazyk L má $\sim_L$ s konečným indexom.

Dôkaz. Vzhľadom na predikát, ktorý určtuje príslušnosť daného reťazca do jazyka L, je možné definovať reláciu prefixovej ekvivalencie na jazyku L nasledovne:

$$u \sim_L v \iff \#_a(u) \bmod 3 = \#_a(v) \bmod 3 \wedge ((\#_b(u) > 0 \wedge \#_b(v) > 0) \vee (\#_b(u) = 0 \wedge \#_b(v) = 0))$$

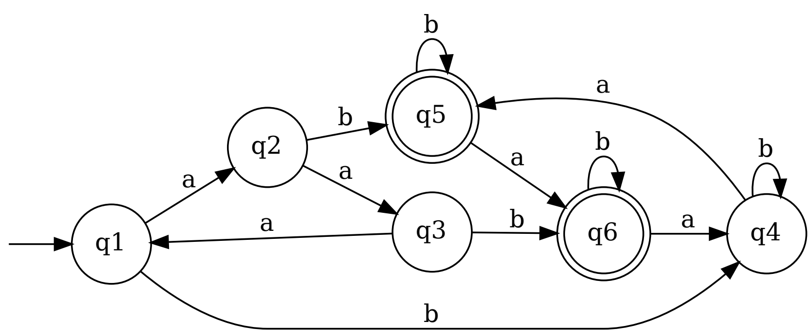
Relácia $\sim_L$ nám definuje nasledujúce triedy rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$:

$$
\begin{array}{ll}
C_1 = \{w \in \Sigma^* | \#_a(w) \bmod 3 = 0 \wedge \#_b(w) = 0\} & C_4 = \{w \in \Sigma^* | \#_a(w) \bmod 3 = 0 \wedge \#_b(w) > 0\} \\
C_2 = \{w \in \Sigma^* | \#_a(w) \bmod 3 = 1 \wedge \#_b(w) = 0\} & C_5 = \{w \in \Sigma^* | \#_a(w) \bmod 3 = 1 \wedge \#_b(w) > 0\} \\
C_3 = \{w \in \Sigma^* | \#_a(w) \bmod 3 = 2 \wedge \#_b(w) = 0\} & C_6 = \{w \in \Sigma^* | \#_a(w) \bmod 3 = 2 \wedge \#_b(w) > 0\}
\end{array}
$$

Relácia $\sim_L$ rozdelí množinu Σ^* na **6 tried ekvivalencie**. Počet tried vyplýva z počtu rôznych možností ohodnotenia funkcie $\#_a(x) \bmod 3$, ktorých je konečne, konkrétne 3, a faktu, že buď pre reťazec platí $\#_b(x) = 0$ alebo neplatí. Výsledný počet tried je daný počtom kombinácii oboch podmienok.

Jazyk L je zjednotením tried C_5 a C_6, pretože reťazce týchto tried spĺňajú logickú formulu z definície jazyka L, a teda náležia jazyku L. Zároveň má rozklad $\Sigma^*/\sim_L$ konečný počet tried, teda relácia $\sim_L$ má konečný index a pre jazyk L nutne existuje nejaký DKA taký, že $L(M) = L$, teda jazyk L je regulárny. □

Poznámka. *DKA automat pre tento jazyk je znázornený na obrázku 2. Jednotlivé stavy automatu odpovedajú triedam rozkladu* $\Sigma^*/\sim_L$.



Obr. 2: Diagram DKA z úlohy č.5.