TIN - Domáca úloha č. 3

Roman Dobiáš - xdobia11@stud.fit.vutbr.cz

1. januára 2019

Úloha č.1

Identifikácia funkcie

Zjavne sa jedná o *Fibbonaciho postupnosť*. Páska č. 1 indikuje číslo N v zápise 1tiek, pre ktoré je funkcia Fib vypočítaná. Pásky 2 a 3 sľúžia na uchovanie predchádzajúcich dvoch hodnôt postupnosti.

Fibonačiho postupnosť je možné matematicky zadefinovať nasledujúco:

$$Fib(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ Fib(n-1) & n = 1 \\ Fib(n-1) \times Fib(n-2) & inak \end{cases} \tag{1}$$

Vyjadrenie funkcie pomocou primitívnej rekurzie

Jedným z riešení je zaviesť pomocnú funkciu $K(x)$, ktorej vyčíslenie bude zodpovedať dvojici $(F(x), F(x+1)$ kde F bude funkcia Fibbonaci.

Funkciu K definujeme pomocou primitívnej rekurzie nasledujúco:

$$K(0) = \xi \times (\sigma \, o \, \xi)()$$
$$K(x+1) = \pi_3^3 \times (plus \, o \, (\pi_2^3 \times \pi_3^3)(x, K(x))$$

Výpočet $K(0)$ je ekvivalentný návratovej dvojici $(0, 1)$, ktorá zodpovedá hodnotám $(Fib(0), Fib(1))$. Následne pomocou primitívnej rekurzie má $K(x+1)$ sémantiku v tvare $K(x+1) = (Fib(x), Fib(x) + Fib(x-1))$, teda $K(x+1) = (K(x).r, K(x).r + K(x).l)$, kde l, r je ľavá, resp. práva hodnota dvojice.

Výsledná funkcia $F(x)$, ktorej hodnota je rovná Fibbonačiho postupnosti, má potom tvar:

$$F(x) = (\pi_2^2 \, o \, K)(x)$$

Úloha č.2

Diagonalizáciou ukážeme, že počet ohodnotení unárneho predikátu *u* nad spočetným univerzom je nespočetný. Počet ohodnotení predikátu je totiž rovný $2^{\mathbb{N}}$, pretože pre každý prvok x z $\mathbb{N}$ prvkov univerza môžeme definovať $p(x)$ alebo $\neg p(x)$. V dôkaze zároveň pracujeme s priradením, kde každej nulárnej funkcii a_i priradíme hodnotu $i \in \mathbb{N}$.

Dôkaz. Predpokladajme, že počet realizácii je spočetný. Potom existuje bijektívne zobrazenie $f : \mathbb{N} \to P$, kde P je množina realizácii. Jednotlivé realizácie môžeme vyjadriť ako nekonečný reťazec 0 a 1, ktorého jednotlivé symboly predstavujú ohodnotenie predikátu $p(i)$, kde $i \in \mathbb{N}$ je pozícia symbolu v reťazci, a teda ich môžeme usporiadať do nekonečnej postupnosti. Uvažujme nekonečnú maticu, kde a_{ij} je 1 ak a_j v realizácii p_i, alebo 0 ak $\neg a_j$ v realizácii p_i. Táto matica je znázornená v tabuľke č. 1.

Uvažujme realizáciu $p_c(x) = 1 - p_x(x)$. Táto realizácia sa od každej realizácie líši aspoň v jednom priradení a nenachádza sa teda medzi realizáciami $p_i, i \in \mathbb{N}$, ktoré sú uvedené v tabuľke, a zároveň, ktorých je spočetne. Zároveň táto realizácia je validnou realizáciou a patrí do množiny realizácii. To je spor, preto množina realizácii je nutne nespočetná. $\square$

	1	2	3	4	...
p_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	
p_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	
p_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	
p_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	
...					

Tabuľka 1: Nekonečná matica, znázorňujúca priradenie z $\mathbb{N}$ do P.

Úloha č.3

Dôkaz. $\mathcal{O}(3^{2n}) \subseteq \mathcal{O}(2^{3n})$
Z definície pre každú funkciu $f \in \mathcal{O}(3^{2n})$ platí, že $\exists c \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \times 3^{2n}$. Na to, aby $\mathcal{O}(3^{2n}) \subseteq \mathcal{O}(2^{3n})$ stačí ukázať, že každá funkcia $f \in \mathcal{O}(3^{2n})$ je ohraničená v $\mathcal{O}(2^{3n})$.

Predpokladajme, že platí práve spomenutý vzťah. Potom pre každú funkciu f platí, že $\exists c, d \in \mathcal{R}^+ : c \times 3^{2n} \leq d \times 2^{3n}$.

Potom ale platia nasledujúce úpravy:

$$\begin{aligned} c \times 3^{2n} &\leq d \times 2^{3n} \\ 1 &\leq \frac{d \times 2^{3n}}{c \times 3^{2n}} \\ 1 &\leq \frac{d}{c} \times \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \\ 1 &\leq \frac{d}{c} \times (\frac{2^3}{3^2})^n \\ 1 &\leq \frac{d}{c} \times (\frac{8}{9})^n \end{aligned}$$

Platí, že $\lim_{n\to\infty}(\frac{8}{9})^n = 0$, teda platí, že $\lim_{n\to\infty} 1 \leq \frac{d}{c} \times (\frac{8}{9})^n = 1 < 0$, čo je spor. Preto neplatí $\mathcal{O}(3^{2n}) \subseteq \mathcal{O}(2^{3n})$. □

Dôkaz. $\mathcal{O}(2^{3n}) \subseteq \mathcal{O}(3^{2n})$
Z definície pre každú funkciu $f \in \mathcal{O}(2^{3n})$ platí, že $\exists c \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \times 2^{3n}$. Na to, aby $\mathcal{O}(2^{3n}) \subseteq \mathcal{O}(3^{2n})$ stačí ukázať, že každá funkcia $f \in \mathcal{O}(2^{3n})$ je ohraničená v $\mathcal{O}(3^{2n})$.

Predpokladajme, že platí práve spomenutý vzťah. Potom pre každú funkciu f platí, že $\exists c, d \in \mathcal{R}^+ : c \times 2^{3n} \leq d \times 3^{2n}$.

Potom ale platia nasledujúce úpravy:

$$\begin{aligned} c \times 2^{3n} &\leq d \times 3^{2n} \\ 1 &\leq \frac{d \times 3^{2n}}{c \times 2^{3n}} \\ 1 &\leq \frac{d}{c} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} \\ 1 &\leq \frac{d}{c} \times (\frac{3^2}{2^3})^n \\ 1 &\leq \frac{d}{c} \times (\frac{9}{8})^n \end{aligned}$$

Ak zvolíme $d = c$, potom už pre $n = 0$ platí, že $1 \leq (\frac{9}{8})^n$. Ukázali sme teda, že pre každú $f \in \mathcal{O}(2^{3n})$ sme schopný nájsť danú konštantu d tak, aby f bola ohraničená funkciou $\mathcal{O}(3^{2n})$. Platí teda $\forall f \in \mathcal{O}(2^{3n}) : f \in \mathcal{O}(3^{2n})$, teda platí $\mathcal{O}(2^{3n}) \subseteq \mathcal{O}(3^{2n})$. □

Záver

Platí $\mathcal{O}(2^{3n}) \subseteq \mathcal{O}(3^{2n})$, zároveň neplatí $\mathcal{O}(3^{2n}) \subseteq \mathcal{O}(2^{3n})$, preto neplatí ani $\mathcal{O}(3^{2n}) = \mathcal{O}(2^{3n})$

Úloha č.4

Aby ste dokázali, že problém Tety Kvety je NP-úplný, ukážeme najskorej, že je možné skonštruovať NTS, ktorý overí, či inštancia problému Tety Kvety je platná. Zároveň ukážeme, že existuje redukcia z problému farbenia grafov, ktorý patrí do NP, na problém tety Kvety.

Problém tety kvety je možné charakterizovať ako jazyk Kveta = { w1 # w2 # k | w1 je postupnosť množstva nakúpených surovín, w2 je postupnosť jednotlivých pečív a množstva pre upečenie jedného kusu a K je počet priateľok a zároveň je možné upiecť aspoň k pečiv z dostupných surovín}.

Prítomnosť Kveta v triede NP

Pre problém tety Kvety existuje 3 páskový NTS M, ktorý v polynomiálnom čase uhádne riešenie a následne ho overí. TS M bude pracovať nasledujúco:

- TS M overí, či vstup w = w1#w2#k je validná inštancia jazyka *Kveta*. Ak nie, TS M zamietne. Validnosť vstupu je možné vykonať konečným automatom, ktorého časová zložitosť je v $O(n)$.
- TS M na pomocnú pásku nedeterministicky úhadne k indexov, ktoré zodpovedajú jednotlivým pečivám, ktoré budú upečené. $O(n)$.
- TS M na ďalšiu pomocnú pásku skopíruje počet surovín $w1$ (v čase $O(n)$)
- TS M následne prechádza jednotlivé indexy pečív ($O(n)$) a pre každý z nich prechádza zoznam ingrediencii a postupne odčitáva ingrediencie od počtu dostupných surovín, ktoré má na pomocnej páske. Počet surovín pre dané pečivo je nejaké M, teda prejdenie zoznamu ingrediencii trvá $O(m)$. Dokopy trvá tento krok $O(m \times n)$. V prípade, že by pri odčítaní vzniklo záporné číslo, TS M odmietne.
- Nakoniec TS M prijme (ak nedošlo ku vzniku záporného čísla).

Ukázali sme, že existuje NTS, ktorý v polynomiálnom čase overí náležitosť w do problému Tety Kvety. Problém Tety Kvety teda patrí do triedy NP.

Redukcia z Farbenia grafov na problém tety Kvety

Rozhodovací problém farbenia grafov je jazyk ColorGraph = { (<V>,<E>#k) | G = (<V>, <E>) je graf ofarbitelný k farbami }. Redukcia z farbenia grafov na problem tedy Kvety je funkcia σ, pre ktorú existuje úplný DTS.

Algoritmus prevodu

Každú inštanciu jazyka ColorGraph sme schopný previesť na problém Tety Kvety nasledujúco:

- Pre každý uzol E vygenerujeme K+1 surovín, kde K je počet farieb a kde každá surovina má kapacitu 1 (teda, Teda Kveta má práve 1 inštanciu tejto suroviny). K surovín reprezentuje jednotlivé z K farieb a K+1 surovina je použitá pre detekovanie, či už je vrchol ofarbený. Jednotlivé z K+1 surovín označme ako $E_i, 0 \leq i \leq k$.
- Pre každé ofarbenie uzla E farbou F
  - vypočítame množinu vrcholov I takých, že existuje hrana medzi vrcholom E a vrcholom z I a prizjednotíme vrchoľ E

– vytvoríme "pečivo"E_F, ktorého ingrediencie sú suroviny $a_i, a \in I, i = F$ a surovina E_k.

- Pre takto zakódovaný problém riešime problém Tety Kvety pre počet priateľok k, kde $k = |V|$.
- Graf je ofarbiteľný práve vtedy, ak môžeme každý vrchol ofarbiť farbou tak, že priliehajúce vrcholy nemaju tú istú farbu.
- Zrejme platí, že ak upečiem pečivo E_F, potom toto pečivo bude pre daný vrchol jediné (vďaka surovine K+1, ktorá je dostupná pre daný vrchol len v jednej inštancii) a zároveň priliehajúce vrcholy nebudú mať rovnaké pečivo (farbu), pretože surovina ich farby už bola vyčerpaná pri pečení E_F.
- Teda platí, že ak je možné upiecť N rôznych pečív, kde N je počet vrcholov a zároveň platia tézy vyššie, potom graf je K-ofarbiteľný.

Platí, že graf G je K-ofarbiteľný $\iff$ ku každému vrcholu V môžem priradiť farbu tak, že vrcholy na incidenčných hranách budú mať inú farbu $\iff$ môžem upiecť pečivo pre daný vrchol a počet upečených pečív je $|V|$.

Príklad

Uvažujme graf A-B, B-C, C-D, D-A. Tento graf má chromatické číslo $k = 2$. Reprezentáciu úlohy môžeme vyjadriť tabulkou č.2. Hlavička predstavuje jednotlivé suroviny (pričomž z každej má teta Kveta len jednu inštanciu). Každému vrcholu grafu G zodpovedá 2+1 surovín. V hlavičke stĺpcov sú uvedené jednotlivé pečivá, ktoré odpovedajú ofarbeniu daného vrcholu.

Zjavne jedným s riešením problému Tety Kvety je napiecť pečivá A_0, B_1, C_0, D_1, čo zodpovedá farbe 0 pre vrchol A, 1 pre B, 0 pre C a 1 pre D.

	A_0	A_1	A_2	B_0	B_1	B_2	C_0	C_1	C_2	D_0	D_1	D_2
A_0	X		X	X						X		
A_1		X	X		X						X	
B_0	X			X		X	X					
B_1		X			X	X		X				
C_0				X			X		X	X		
C_1					X			X	X		X	
D_0	X						X			X		X
D_1		X						X			X	X

Tabuľka 2: Príklad definície ingrediencii pre jednotlivé pečívá pre riešenie grafu G s k = 2

Úloha č.5

Nasledujúca PT Petriho sieť generuje jazyk $L = \{a^k(b^l)c^l | k \geq l\}$.