TIN - Domáca úloha č. 3

Roman Dobiáš - xdobia11@stud.fit.vutbr.cz

29. decembra 2018

Úloha č.1

Identifikácia funkcie

Zjavne sa jedná o *Fibbonaciho postupnosť*. Páska č. 1 indikuje číslo N v zápise 1tiek, pre ktoré je funkcia Fib vypočítaná. Pásky 2 a 3 sľúžia na uchovanie predchádzajúcich dvoch hodnôt postupnosti.

Fibonačiho postupnosť je možné matematicky zadefinovať nasledujúco:

$$Fib(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ Fib(n-1) & n = 1 \\ Fib(n-1) \times Fib(n-2) & inak \end{cases} \tag{1}$$

Vyjadrenie funkcie pomocou primitívnej rekurzie

Jedným z riešení je zaviesť pomocnú funkciu $K(x)$, ktorej vyčíslenie bude zodpovedať dvojici $(F(x), F(x+1)$ kde F bude funkcia Fibbonaci.

Funkciu K definujeme pomocou primitívnej rekurzie nasledujúco:

$$K(0) = \xi \times (\sigma\, o\, \xi)()$$
$$K(x+1) = \pi_3^3 \times (plus\, o\, (\pi_2^3 \times \pi_3^3)(x, K(x))$$

Výsledná funkcia $F(x)$ má potom tvar:

$$F(x) = (\pi_2^2\, o\, K)(x)$$

Úloha č.2

Diagonalizáciou ukážeme, že počet ohodnotení unárneho predikátu *u* nad spočetným univerzom je nespočetný. Počet ohodnotení predikátu je totiž rovný $2^{\mathbb{N}}$, pretože pre každý prvok x z $\mathbb{N}$ prvkov univerza môžeme definovať $p(x)$ alebo $\neg p(x)$.

Dôkaz. Predpokladajme, že počet realizácii je spočetný. Potom existuje zobrazenie $f : \mathbb{N} \to$ Uvažujme nekonečnú maticu: $\square$

	1	2	3	4	...
p1	a10	a11	a13	a14	
p2	a20	a21	a23	a24	
p3	a30	a31	a33	a34	
p4	a40	a41	a43	a44	
...					

Úloha č.3

Dôkaz. $\mathcal{O}(3^{2n}) \subseteq \mathcal{O}(2^{3n})$
Z definície pre každú funkciu $f \in \mathcal{O}(3^{2n})$ platí, že $\exists c \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : f(n) \leq c \times 3^{2n}$. Na to, aby $\mathcal{O}(3^{2n}) \subseteq \mathcal{O}(2^{3n})$ stačí ukázať, že každá funkcia $f \in \mathcal{O}(3^{2n})$ je ohraničená v $\mathcal{O}(2^{3n})$.

Predpokladajme, že platí práve spomenutý vzťah. Potom pre každú funkciu f platí, že $\exists c, d \in \mathcal{R}^+ : c \times 3^{2n} \leq d \times 2^{3n}$.

Potom ale platia nasledujúce úpravy:

$$\begin{aligned}
c \times 3^{2n} &\leq d \times 2^{3n} \\
1 &\leq \frac{d \times 2^{3n}}{c \times 3^{2n}} \\
1 &\leq \frac{d}{c} \times \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \\
1 &\leq \frac{d}{c} \times (\frac{2^3}{3^2})^n \\
1 &\leq \frac{d}{c} \times (\frac{8}{9})^n
\end{aligned}$$

Platí, že $\lim_{n\to\infty}(\frac{8}{9})^n = 0$, teda platí, že $\lim_{n\to\infty} 1 \leq \frac{d}{c} \times (\frac{8}{9})^n = 1 < 0$, čo je spor. Preto neplatí $\mathcal{O}(3^{2n}) \subseteq \mathcal{O}(2^{3n})$. □

Dôkaz. $\mathcal{O}(2^{3n}) \subseteq \mathcal{O}(3^{2n})$
Z definície pre každú funkciu $f \in \mathcal{O}(2^{3n})$ platí, že $\exists c \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : f(n) \leq c \times 2^{3n}$. Na to, aby $\mathcal{O}(2^{3n}) \subseteq \mathcal{O}(3^{2n})$ stačí ukázať, že každá funkcia $f \in \mathcal{O}(2^{3n})$ je ohraničená v $\mathcal{O}(3^{2n})$.

Predpokladajme, že platí práve spomenutý vzťah. Potom pre každú funkciu f platí, že $\exists c, d \in \mathcal{R}^+ : c \times 2^{3n} \leq d \times 3^{2n}$.

Potom ale platia nasledujúce úpravy:

$$\begin{aligned}
c \times 2^{3n} &\leq d \times 3^{2n} \\
1 &\leq \frac{d \times 3^{2n}}{c \times 2^{3n}} \\
1 &\leq \frac{d}{c} \times \frac{3^{2n}}{2^{3n}} \\
1 &\leq \frac{d}{c} \times (\frac{3^2}{2^3})^n \\
1 &\leq \frac{d}{c} \times (\frac{9}{8})^n
\end{aligned}$$

Ak zvolíme $d = c$, potom už pre $n = 0$ platí, že $1 \leq (\frac{9}{8})^n$. Ukázali sme teda, že pre každú $f \in \mathcal{O}(2^{3n})$ sme schopný nájsť danú konštantu d tak, aby f bola ohraničená funkciou $\mathcal{O}(3^{2n})$. Platí teda $\forall f \in \mathcal{O}(2^{3n}) : f \in \mathcal{O}(3^{2n})$, teda platí $\mathcal{O}(2^{3n}) \subseteq \mathcal{O}(3^{2n})$. □

Úloha č.4

Rozhodovací problém farbenia grafov je jazyk ColorGraph = { (<V>,<E>#k) | G = (<V>, <E>) je graf ofarbitelný k farbami }. Redukcia z farbenia grafov na problem tedy Kvety

Algoritmus prevodu

Každú inštanciu jazyka ColorGraph sme schopný previesť na problém Tety Kvety nasledujúci:

- Pre každý uzol E vygenerujeme K+1 surovín, kde každá surovina má kapacitu 1 (teda, Teda Kveta má práve 1 túto surovinu). K surovín reprezentuje jednotlivé z K farieb a K+1 surovina je použitá pre detekovanie, či už je vrchol ofarbený. Jednotlivé z K+1 surovín označme ako $E_i, 0 \leq i < k$.
- Pre každé ofarbenie uzla E farbou F
  - vypočítame množinu vrcholov I takých, že existuje hrana medzi vrcholom E a vrcholom z I a prizjednotíme vrchoľ E
  - vytvoríme "pečivo"E_F, ktorého ingrediencie sú suroviny $a_i, a \in I, i = F$ a surovina E_F.
- Pre takto zakódovaný problém riešime problém Tety Kvety pre počet priateľok k, kde $k = |V|$.
- Graf je ofarbiteľný práve vtedy, ak môžeme každý vrchol ofarbiť farbou tak, že priliehajúce vrcholy nemaju tú istú farbu.
- Zrejme platí, že ak upečiem pečivo E_F, potom toto pečivo bude pre daný vrchol jediné (vďaka surovine K+1) a zároveň priliehajúce vrcholy nebudú mať rovnaké pečivo (farbu), pretože surovina ich farby už bola vyčerpaná pri pečení E_F.
- Teda platí, že ak je možné upiecť N rôznych pečív, kde N je počet vrcholov a zároveň platia tézy vyššie, potom graf je K-ofarbiteľný.

Príklad

Uvažujme graf A-B, B-C, C-D, D-A. Reprezentáciu úlohy môžeme vyjadriť tabulkou: TODO suroviny ako hlavička, pečio ako riadky, Y osa ako vybrané pečivá

Úloha č.5