Řešení

[editovat]

Vyberme ľubovoľné dva prvky: $f(x) = \frac{x}{1+ax}$, $g(x) = \frac{x}{1+bx}$.

Potom

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{1+ag(x)} = \frac{\frac{x}{1+bx}}{1+a\frac{x}{1+bx}} = \frac{\frac{x}{1+bx}}{\frac{1+bx+ax}{1+bx}} = \frac{x}{1+bx+ax} = \frac{x}{1+(a+b)x},\ a+b\in\mathbb{Z}.$$

f(x) nemôže byť definované pre $-\frac{1}{a}$, g(x) pre $-\frac{1}{b}$, f(g(x)) pre $-\frac{1}{a+b}$, čo sú však všetko racionálne čísla, takže f(x), g(x) aj f(g(x)) sú definované pre všetky iracionálne čísla.

Teda $f\circ g\in M$.

Operácia zloženia zobrazení je vždy asociatívna (pre tento konkrétny prípad ľahko dokázateľné - zvolíme tri funkcie, a bez ohľadu na zátvorkovanie nám vyjde $\frac{x}{1+(a+b+c)x}$. Teda $(M,\circ)$ je pologrupa.

V tomto konkrétnom prípade je operácia aj komutatívna - $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x) = \frac{x}{1+(a+b)x}$, teda $(M,\circ)$ je komutatívna pologrupa.

Prvok $e(x) = \frac{x}{1+0x} = x$ je neutrálny prvok, teda $(M,\circ)$ je (komutatívny) monoid.

Pre ľubovoľný prvok $\frac{x}{1+ax}$ je zrejme $\frac{x}{1+(-a)x}$ inverzný prvok, teda $(M,\circ)$ je (komutatívna) grupa.

$(M,\circ)$ má teda všetky z uvedených vlastností.