Sbírka příkladů do MATu

Michal Šrubař
xsruba03@stud.fit.vutbr.cz

4. února 2016

1 Proč

2 Logika

2.1 Důkazy výrokových formulí

2.1.1

Dokažte sestrojením důkazu, že pro libovolné formule B, C výrokové logiky platí

$$\vdash \neg B \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

Postupujte dle následujícího návodu:

1. $\neg B$ (předpoklad)
2. B (předpoklad)
3. $B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow B)$ (axiom A1)
4. $\neg B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$ (axiom A1)
5. pravidlo odloučení aplikované na formule 2,3
6. pravidlo odloučení aplikované na formule 1,4
7. axiom A3
8. pravidlo odloučení aplikované na 6,7
9. pravidlo odloučení aplikované na 2,8
10. formule 9 je dokazatelná z formulí 1,2
11. věta o dedukci
12. věta o dedukci.

2.2 Důkazy predikátových formulí

2.2.1

Proveďte důkaz formule

$$\varphi, (\forall x\varphi \rightarrow \psi) \vdash \forall x\psi$$

dle následujícího návodu:

1. Vezměte formuli φ jako předpoklad
2. užijte pravidlo zobecnění
3. vezměte formuli $\forall x\varphi \rightarrow \psi$ jako předpoklad
4. užijte pravidlo odloučení (modus ponens)
5. užijte pravidlo zobecnění.

2.2.2

Dokažte větu $\exists x(\neg\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$ Postup:

1. Použijte tautologii $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$.
2. Proveďte distribuci kvantifikátoru $\forall$.
3. Užijte třetí axiom výrokové logiky ve tvaru $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.
4. Aplikujte pravidlo odloučení.
5. Použijte tautologii $\neg(\forall x\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$.
6. Složte implikace ze (4) a (5).
7. Proveďte úpravu (nahraďte kvantifikátor $\forall x$ kvantifikátorem $\exists x$).

2.2.3

Napište důkaz věty $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$. Návod:

1. Vezměte formuli $\forall x\varphi$ jako předpoklad, pak užijte axiom substituce a následně pravidlo odloučení
2. Potom vezměte formuli $\forall x(\varphi \rightarrow \psi)$ jako předpoklad a opět užijte axiom substituce a následně pravidlo odloučení
3. Na formule získané v krocích 1) a 2) aplikujte pravidlo odloučení a na výslednou formuli pravidlo zobecnění
4. Poslední získaná formule je tedy dokazatelná z formulí, které byly vzaty jako předpoklady. Nyní užijte 2x větu o dedukci

2.2.4

Dokažte, že platí $\vdash (\varphi \wedge \exists x\psi) \Rightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$. Návod:

1. Vezměte formuli $\neg(\exists x(\varphi \wedge \psi))$ jako předpoklad
2. axiom kvantifikátoru
3. pravidlo odloučení
4. získanou formuli převeďte do tvaru negace (formule)
5. poslddní formule je dokázána z formule předpokládané v 1, proto aplikujte na obě formule větu o dedukci
6. užijte třetí výrokový axiom
7. opět aplikujte větu o dedukci.

2.3 Realizace

2.3.1

Uvažujme jazyk L s jedním binárním predikátovým symbolem p a jedním binárním funkčním symbolem f.

1. Najděte nějakou realizaci jazyka L na množině $\{1, 2, 3\}$.
2. Nechť φ je následující formule jazyka L: $\forall z\forall y\exists zp(f(x, z), y)$

Uvažujme realizaci $\Re$ jazyka L s univerzem N, kde $p_\Re$ je relace uspořádání $\leq$ a $f_\Re$ je násobení přirozených čísel. Rozhodněte, zda $\Re$ je modelem teorie φ a svoje rozhodnutí odůvodněte.

2.3.2

Buď φ nasledující formule: $\forall x\forall y(x < y \Rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$. Bez použití spojky $\neg$ napiště negaci formule φ. Určete, zda je pravdiva formule φ nebo její negace, jestliže univerzem je množina $\mathbb{Z}$ (celých čísel).

2.3.3

Uvažujme jazyk L s rovností, jedním binárním funkčním symbolem f a predikátovými symboly p a q arit 1 a 3. Necht' $\Re$ je realizace jazyka L, kde univerzem je $P(\mathbb{N})$, tj. množina všech podmnožin množiny přirozených čísel, a symboly se realizují na množinách $A, B, C \subseteq N$ následovně:

$$f_\Re(A, B) = A \cap B$$

$$A \in P_\Re \Leftrightarrow A \neq \phi$$

$$(A, B, C) \in q_\Re \Leftrightarrow A \cap B \cap C$$

je konečná. Rozhodněte, zda jsou následující formule splněny v $\Re$:

1) $\forall x \forall y q(x, y f(x, y))$

2) $p(f(x, y)) \Rightarrow (p(x) \wedge p(y))$

3) $p(x) \wedge p(y) \Rightarrow \forall z q(x, y, z)$

4) $p(x) \Rightarrow q(x, f(x, x), x)$

2.3.4

Buď L jazyk predikátové logiky 1. řádu a rovností, jedním binárním predikátovým symbolem p a jedním unárním funkčním symbolem f. Nechť T je teorie 1. řádu s jazykem L daná následujícími dvěma speciálními axiomy:

$$p(f(x), x)$$
$$f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow p(x, y)$$

Uvažujme realizaci $M = (\mathbb{Q}, \leq, h)$ jazkyka L, kde $\leq p_M$ a operace $h = f_M$ na množině $\mathbb{Q}$ je definována předpisem $h(a) = \frac{a}{2}$ pro libovolné $a \in \mathbb{Q}$. Rozhodněte, zda:

a) M je modelem teorie T

b) $f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow p(f(x), y)$ je důsledkem teorie T.

2.4 Prenexní tvar

2.4.1

Převeďte negaci formulce $\forall x \forall y \varphi(x, y) \Rightarrow \exists x(\psi(x) \Rightarrow \forall z \varphi(x, z))$ do prenexního tvaru.

2.4.2

Převeďte následující formuli do prenexního tvaru. Potom napište její negaci a upravte ji tak, aby se v ní nevyskytovala spojka $\Rightarrow$:

$$\forall x A(x) \Rightarrow (\forall x B(y) \Rightarrow \neg \forall x C(y, x))$$

2.4.3

Převedte formuli
$$\exists x \varphi(x, y) \rightarrow \forall x(\psi(x) \vee \chi(y, z)))$$
do prenexního tvaru. K získané formuli (v prenexním tvaru) napište její negaci a upravte ji tak, aby se spojka negace vyskytovala jen před (některými) φ, ψ, χ.

2.4.4

Převeďte negaci formule $(\forall x p(x, y) \rightarrow \exists x \forall y q(x, y)) \wedge \exists y(\forall x p(y, y) \rightarrow \forall x p(x, y))$ do prenexního tvaru.

2.4.5

Převeďte negaci následující formule do prenexního tvaru:

$$\neg(\forall x(\Phi(x) \Rightarrow \forall y\psi(x,y)) \Rightarrow \forall x\exists y\psi(x,y))$$

2.4.6

Negaci formule

$$\exists x(\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\psi \wedge \neg\varphi)) \wedge (\forall x\chi)$$

převeďte do tvaru (ekvivalentní formule), ve kterém se nebude vyskytovat žádná ze spojek $\wedge$ a $\vee$.

3 Algebra

3.1 Grupy, podgrupy, cyklické grupy

3.1.1

Na množině $\mathbb{Z}$ všech celých čísel uvažujme binární operaci * definovanou takto: $x*y = xy+x+y$. Tato operace tvoří na množině $\mathbb{Z}$ -1 komutativní grupu, ve které inverzní prvek K danému prvku Je:

a) $\frac{1-x}{1+x}$

b) $\frac{1}{-1+x}$

c) $\frac{x}{-1+x}$

d) $\frac{1}{1+x}$

e) v jiném tvaru, než je uvedeno v (a)-(d).

3.1.2

Popiště:

a) podgrupu grupy $\Re$ s operací + generovanou množinou $\{3, 11\}$,

b) podtěleso tělesa $\Re$ (s obvyklými operacemi sčítání a násobení) generované množinou $\{n\}$, kde n je celé nenulové číslo.

3.1.3

Buď $A = (\mathbb{Z}, f)$ algebra typu (1) ($\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel), kde $f(z) = |z| - 8$ pro každé $z \in \mathbb{Z}$. Popište:

1. podalgebru $B = \langle -4 \rangle$ algebry A,
2. přímý součin algeber $B \times (0, 1, 2, g)$, kde g je permutace $g = (1, 2)$ (v cyklickém zápisu).

3.1.4

Uvažujme univerzální algebru $A = (\mathbb{C}, +, conj, 1)$, kde $+$ je binární operace sčítání komplexních čísel, $conj$ je unární operace konjungace (komplexní sdruženost), tj. $conj(a+bi) = a-bi$, a 1 je nulární operace. Popište podalgebru $\langle\{i\}\rangle$ algebry A (tj. podalgebru generovanou jednoprvkovou množinou $\{i\}$).

3.1.5

Položme $P = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \exists a \in \mathbb{R} - \{0\}\, \forall x \in \mathbb{R} : f(x)) = ax\}$. Dokažte, že $(P, \circ)$, kde $\circ$ značí skládání zobrazení, je grupoid. Zjistěze, zda $(P, \circ)$ je dokonce grupa (svůj závěr odůvodnětě).

3.2 Morfismy

3.2.1

Na množině $\mathbb{C}$ komplexních čísel uvažujme operaci $+$ obvyklého sčítání. Buď $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zobrazení dané předpisem $f(a + ib) = a - ib$. Pak:

a) $(\mathbb{C}, +)$ není grupa

b) f je zobrazení grupy $(\mathbb{C}, +)$ do sebe, které není homomorfismem

c) f je homomorfismus grupy $(\mathbb{C}, +)$ do sebe, který není izomorfismem

d) f je izomorfismus grupy $(\mathbb{C}, +)$ na sebe (tedy automorfismus)

e) neplatí žádná z uvedených možností

3.2.2

Uvažujme aditivní grupu reálných čísel $(\mathbb{R}, \oplus)$, kde operace $\oplus$ je daná předpisem

$$a \oplus b = a + b - 1$$

1. Rozhodněte, zda grupoid $(\mathbb{R}, \oplus)$ je monoid.
2. Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = 2x + 1$ je homomorfismus grupidů $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, \oplus)$.

3.2.3

Nechť pro libovolné přirozené číslo $m > 0$ značí symbol Z_m okruh zbytkových tříd modulo m a pro libovolné $x \in Z$ nechť symbol $[x]_m$ značí tu třídu kongruence modulo m (tedy prvek množiny Z_m), která obsahuje prvek x. Jaký musí být vztak mezi přirozenými čisly $m, n > 0$, aby platilo $[x]_m \subseteq [x]_n$ pro všechna $z \in Z$? Je pak zobrazení $f : Z_m \to Z_n$ dané předpisem $f([x]_m) = [x]_n$ pro všechna $x \in Z$ homomorfismus?

3.2.4

Mějme grupu $M(n, \mathbb{R})$ všech čtvercových matic řádu $n(n \in \mathbb{N} - \{0\})$ nad $\mathbb{R}$ s operací sčítání a grupu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel s operací sčítání. Definujeme zobrazení $f : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ předpisem $f(A) = tr(A)$ pro všechna $A \in M(n, \mathbb{R})$ (kde $tr(A)$ značí stopu matice A, tj. součet prvků na hlavní diagonále matice A). Dokažte, že j je homomorfismus, popište třídy jádra $M(n, \mathbb{R})/f$ a určete normální podgrupu grupy $M(n, \mathbb{R})$ odpovídající jádru $M(n, \mathbb{R})/f$. Zjistěte, zda grupy $M(n, \mathbb{R})/f$ a $\mathbb{R}$ jsou izomorfní.

3.3 Kongruence

3.3.1

Nechť $\mathbb{C}^*$ značí multiplikativní grupu všech nenulových komplexních čísel a G její podgrupu všech komplexních čísel s absolutní hodnotou 1. Nechť $f : \mathbb{C}^* \to G$ je zobrazeni dane vztahem $f(z) = \frac{z}{|z|}$. Popište kongruenci na $\mathbb{C}^*$ danou jádrem zobrazení f a určete jí odpovídající normální podgrupu grupy $\mathbb{C}^*$.

3.3.2

Mějme grupu regulárních matic řádu 2 nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ spolu s operací násobení matic, označíme ji $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$. Uvažujme binární relaci $\sim$ na $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$ definovanou předpisem $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$ (kde $||$ značí determinant). Dokažte, že

1. $\sim$ je kongurence na grupě $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$ a
2. faktorová grupa $(GL(2, \mathbb{R})/ \sim, \cdot)$ je izomorfní s grupou $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ všech nenulových reálných čísel s násobením.
3. Definujte normální podgrupu grupy $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$, která odpovídá kongruenci $\sim$.

3.3.3

Na multiplikativní grupě $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ všech nenulových komplexních čísel nechť jsou dva prvky v relaci $\sim$ právě tehdy, když mají stejnou absolutní hodnotu. Dokažte, že relace $\sim$ je kongruence na uvedené grupě, a graficky znázorňtě třídy kongruence $\sim$ a také normální podgrupu určenou kongruencí $\sim$.

3.3.4

Uvažujme algebru $A = (\mathbb{Z}, t)$ s jednou unární operací t definovanou pro libovolné $x \in \mathbb{Z}$ předpisem $t(x) = x + 1$.

a) Popište všechny podalgebry algebry A.

b) Uvažujme rozklad množiny $\mathbb{Z}$, jehož třídy jsou všechny dvouprvkové množiny tvaru $\{2k, 2k + 1\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Je příslušná ekvivalence kongruencí na algebře A?

3.4 Zbytkové třídy

3.4.1

Vypočtěte v tělese $(\mathbb{Z}_5, \cdot, +)$

$$(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{4}$$

3.4.2

V tělese $\mathbb{Z}_7$ vypočtěte $\frac{4}{3}(2 - \frac{3}{4} - \frac{5}{3})$.

3.4.3

Vypočtěte v tělese $\mathbb{Z}_7$ zbytkových tříd modulo 7:

$$\frac{4(3+5)}{6} - \frac{2}{3}$$

4 Funkcionalni analýza

4.1 Metrické prostory

4.1.1

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3$ s euklidovskou metrikou p definujeme vzdálenost libovolných dvou množin A a B vztahem $\delta(A, B) = inf\,\{(p(a, b)|a \in A, b \in B)\}$. Rozhodněte, zda $(P(\mathbb{R}_3), \delta)$ tvoří metrický prostor (symbol $P(\mathbb{R}_3)$ značí množinu všech podmnožin množiny $\mathbb{R}_3$).

4.1.2

Na $\mathbb{Z}^2$ definujeme metriku δ následovně: $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Zakreslete kružnici určenou touto metrikou a poloměru 2 se středem v bodě $(0, 0)$, tj. množinu

$$S_\delta(2) = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : \delta((x, y), (0, 0)) = 2\right\}$$

. Určete počet prvků množiny $S_\delta(2)$ a tyto prvky vypiště.

4.2 Normované prostory

4.2.1

V lineárním prostoru $C\,[-1, 1]$ všech (reálných) spojitých funkcí na intervalu $[-1, 1]$ uvažujme normu $\|f\| = max\,\{|f(t))|\,; t \in [-1, 1]\}$ a funkci $h \in C\,[-1, 1]$ danou vztahem $h(t) = 1 - |t|$ pro všechna $t \in [-1, 1]$. Určete všechny konstantní funkce $g \in C\,[-1, 1]$ s vlastností $p\,(g, h) = 1$, kde p je metrika indukovaná danou normou. (Návod: Úlohu řeště graficky.)

4.3 Unitární prostory

4.3.1

Na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ definujme skalární součin vztahem $(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi podprostoru prostoru $\mathbb{R}^3$ generovaného vektory $1, 2, -1)$, $(1, 2, -3)$, $(4, 8, -8)$, $(3, 6, -9)$.

5 Grafy

5.1 Nazelezeni grafu

5.1.1

Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{1, 2, \ldots, 2n\}$, $n > 0$ přirozené číslo a H má 15 prvků. Pro každé číslo $i = 1, 2, \ldots, n$ mají uzly i a $n + i$ tentýž stupeň i. Určete hodnotu čísla n a pak graf G přehledně nakreslete.

5.1.2

Nakreslete všechny navzájem neizomorfní stromy se 6 uzly.

5.2 Nazeteni minimální kostry

5.2.1

Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ a H má 15 prvků s oceněním $v : H \to N$ takovým, že $v\{a, b\} = 2, v\{a, c\} = 1, v\{a, d\} = 1, v\{b, c\} = 1, v\{b, d\} = 2, v\{c, d\} = 3, v\{b, e\} = 4, v\{d, e\} = 3, v\{d, g\} = 2, v\{e, f\} = 4, v\{e, g\} = 3, v\{e, h\} = 2, v\{f, g\} = 3, v\{f, h\} = 1, v\{g, h\} = 1$. Nakreslete tento graf tak, že každá z následujících čtveřic (a, b, c, d), (b, d, e, g) a (e, f, g, h) tvoří vrcholy čtveřice a hrany jsou znázorněny úsečkami spojujícími příslušné vrcholy. Určete cenu minimální kostry tohoto grafu a jednu jeho minimální kostru nakreslete do obrázku.

5.2.2

Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ a H má 13 prvků s oceněním $v : H \to N$ takovým, že $v\{a, b\} = 2, v\{a, d\} = 5, v\{a, f\} = 1, v\{b, c\} = 0, v\{c, d\} = 5, v\{c, e\} = 1, v\{d, e\} = 10, v\{d, f\} = 0, v\{e, g\} = 3, v\{e, h\} = 3, v\{f, g\} = 1, v\{f, h\} = 2, v\{g, h\} = 6$. Určete cenu minimální kostry tohoto grafu a jednu jeho minimální kostru nakreslete.