Sbírka příkladů do MATu

Michal Šrubař
xsruba03@stud.fit.vutbr.cz

5. února 2016

1 Proč

2 Logika

2.1 Důkazy výrokových formulí

2.1.1

Dokažte sestrojením důkazu, že pro libovolné formule B, C výrokové logiky platí

$$\vdash \neg B \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

Postupujte dle následujícího návodu:

1. $\neg B$ (předpoklad)
2. B (předpoklad)
3. $B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow B)$ (axiom A1)
4. $\neg B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$ (axiom A1)
5. pravidlo odloučení aplikované na formule 2,3
6. pravidlo odloučení aplikované na formule 1,4
7. axiom A3
8. pravidlo odloučení aplikované na 6,7
9. pravidlo odloučení aplikované na 2,8
10. formule 9 je dokazatelná z formulí 1,2
11. věta o dedukci
12. věta o dedukci.

2.1.2

Dokažte zapsáním formálního důkazu (s použitím věty o dedukci), že platí:

$$A \to B, B \to C \vdash A \to C$$

2.2 Důkazy predikátových formulí

2.2.1

Proveďte důkaz formule

$$\varphi, (\forall x \varphi \to \psi) \vdash \forall x \psi$$

dle následujícího návodu:

1. Vezměte formuli φ jako předpoklad
2. užijte pravidlo zobecnění
3. vezměte formuli $\forall x \varphi \to \psi$ jako předpoklad
4. užijte pravidlo odloučení (modus ponens)
5. užijte pravidlo zobecnění.

2.2.2

Napište důkaz věty $\vdash \forall x \neg\varphi \Rightarrow \forall x(\varphi \Rightarrow \psi)$. Návod:

a) Vezměte formuli $\forall x \neg\varphi$ jako předpoklad, pak užijte axiom substituce (ve formuli $\neg\varphi$ substituujte x za x) a pravidlo odloučení.

b) Vezměte axiom A1 výrokové logiky ve tvaru $\neg\varphi \Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi)$ a aplikujte na něj a na formuli získanou v kroku a) pravidlo odloučení.

c) Vezměte axiom A3 výrokové logiky a aplikujte na něj a na formuli získanou v kroku b) pravidlo odloučení, na výslednou formuli pak aplikujte pravidlo zobecnění.

d) Poslední získaná formule je teď dokazatelná z formule, která byla vzata jako předpoklad. Nyní užijte větu o dedukci.

Dokažte

$$\varphi(x) \to \forall x \psi(x) \vdash \forall x \varphi(x) \to (\neg\psi(x) \to \psi(y))$$

Návod:

1) Vezměte $\varphi(x) \to \forall x \psi(x)$ jako předpoklad.

2) Použijte axiom substituce.

3) Složení implikací.

4) Axiom substituce.

5) Složení implikací.

6) Výrokový axiom A1.

7) Složení implikací.

2.2.3

Dokažte větu $\exists x(\neg\varphi) \to (\forall x\varphi \to \psi)$ Postup:

1. Použijte tautologii $\varphi \to \neg\neg\varphi$.
2. Proveďte distribuci kvantifikátoru $\forall$.
3. Užijte třetí axiom výrokové logiky ve tvaru $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.
4. Aplikujte pravidlo odloučení.
5. Použijte tautologii $\neg(\forall x\varphi) \to (\forall x\varphi \to \psi)$.
6. Složte implikace ze (4) a (5).
7. Proveďte úpravu (nahraďte kvantifikátor $\forall x$ kvantifikátorem $\exists x$).

2.2.4

Napište důkaz věty $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$. Návod:

1. Vezměte formuli $\forall x\varphi$ jako předpoklad, pak užijte axiom substituce a následně pravidlo odloučení
2. Potom vezměte formuli $\forall x(\varphi \to \psi)$ jako předpoklad a opět užijte axiom substituce a následně pravidlo odloučení
3. Na formule získané v krocích 1) a 2) aplikujte pravidlo odloučení a na výslednou formuli pravidlo zobecnění
4. Poslední získaná formule je tedy dokazatelná z formulí, které byly vzaty jako předpoklady. Nyní užijte 2x větu o dedukci

2.2.5

Dokažte, že platí $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \psi)$. Zvolte si dva předpoklady. Na předpoklad aplikujte axiom substituce a potom metodu odloučení. Stejný postup aplikujte na druhý předpokla. Poté aplikujte metodu odloučení na předchozí výsledky a poté použijte dvakrát větu o dedukci.

2.2.6

Dokažte (napsáním důkazu), že platí

$$\varphi \to (\forall x \psi \to \chi), \psi \vdash \forall x \varphi \to \chi$$

. Návod:

a) Zvolte tři vhodné formule jako předpoklady, označte je (1), (2) a (3) tak, aby formule (3) byla $\forall x \varphi$.

b) Z formule (3) pomocí vhodného axiomu, který označíte (4), a vhodného pravidla odvoďte formuli φ a označte ji (5).

c) Z formule (5), jedné z formulí (1),(2) a vhodného pravidla dostanete formuli (6).

d) Na další z formulí (1),(2) aplikujte pravidlo zobecnění, čímž dostanete formuli (7).

e) Z formulí (6) a (7) dostanete užitím vhodného pravidla poslední formuli, kterou označíte (8). Tato formule je tedy dokazatelná ze zvolených předpokladů. Nyní užijte větu o dedukci.

2.2.7

Dokažte, že platí $\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \Rightarrow \forall x \varphi(x, x)$, dle následujícího návodu:

(a) Formuli $\forall x \forall y \varphi(x, y)$ vezměte jako předpoklad

(b) Axiom substituce.

(c) Pravidlo odloučení.

(d) Axiom substituce.

(e) Pravidlo odloučení.

(f) Pravidlo zobecnění.

(g) Výsledek předchozích úvah ve vztahu dokazatelnosti formule z předpokladů.

(h) Věta o dedukci.

Jakou obdržíte formuli po provedení kroku (f)?

2.2.8

Dokažte sestrojením důkazu:

$$\vdash \forall x \varphi(x, x) \to (\forall x \forall y \varphi(x, y) \to \forall y \varphi(y, y))$$

Návod:

(1) Vezměte $\forall x \varphi(x, x)$ jako předpoklad.

(2) Použijte axiom substituce.

(3) Pravidlo odloučení.

(4) Pravidlo zobecnění.

(5) Větu o dedukci.

(6) Výrokový axiom A1.

(7) Složení implikací.

2.2.9

Dokažte, že platí $\vdash (\varphi \wedge \exists x\psi) \Rightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$. Návod:

1. Vezměte formuli $\neg(\exists x(\varphi \wedge \psi))$ jako předpoklad
2. axiom kvantifikátoru
3. pravidlo odloučení
4. získanou formuli převeďte do tvaru negace (formule)
5. poslední formule je dokázána z formule předpokládané v 1, proto aplikujte na obě formule větu o dedukci
6. užijte třetí výrokový axiom
7. opět aplikujte větu o dedukci.

2.3 Realizace

2.3.1

Buď L jazyk predikátové logiky 1. řádu a rovností, jedním binárním predikátovým symbolem p a jedním unárním funkčním symbolem f. Nechť T je teorie 1. řádu s jazykem L daná následujícími dvěma speciálními axiomy:

$$p(f(x), x)$$

$$f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow p(x, y)$$

Uvažujme realizaci $M = (\mathbb{Q}, \leq, h)$ jazkyka L, kde $\leq p_M$ a operace $h = f_M$ na množině $\mathbb{Q}$ je definována předpisem $h(a) = \frac{a}{2}$ pro libovolné $a \in \mathbb{Q}$. Rozhodněte, zda:

a) M je modelem teorie T

b) $f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow p(f(x), y)$ je důsledkem teorie T.

2.3.2

Buď φ nasledující formule: $\forall x \forall y(x < y \Rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$. Bez použití spojky $\neg$ napište negaci formule φ. Určete, zda je pravdivá formule φ nebo její negace, jestliže univerzem je množina $\mathbb{Z}$ (celých čísel).

2.3.3

Uvažujme jazyk L s jedním binárním predikátovým symbolem p a jedním binárním funkčním symbolem f.

1. Najděte nějakou realizaci jazyka L na množině $\{1, 2, 3\}$.
2. Nechť φ je následující formule jazyka L: $\forall z \forall y \exists z p(f(x, z), y)$

Uvažujme realizaci $\Re$ jazyka L s univerzem N, kde $p_{\Re}$ je relace uspořádání $\leq$ a $f_{\Re}$ je násobení přirozených čísel. Rozhodněte, zda $\Re$ je modelem teorie φ a svoje rozhodnutí odůvodněte.

2.3.4

Uvažujte jazyk L s rovností, jedním binárním predikátovým symbolem p a jedním funkčním symbolem f. Buď $\Re$ realizace jazyka L, jejimž univerzem je množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel a v niž platí: $p_{\Re}(a, b) \Leftrightarrow a \leq b$, $f_{\Re}(a, b) = a+b$. Uvažujte teorii $T = \{p(f(x, y), f(y, z)) \Rightarrow (p(x, z)), p(x, f(y,$ a formuli $\varphi = p(x, f(x, y))$.

1) Rozhodněte, zda $\Re \models T$, tj. zda $\Re$ je modelem teorie T.

2) Dokažte, že $T \models \varphi$, tj. že φ je důsledkem teorie T.

2.3.5

Uvažujme jazyk L se dvěma konstantami k, l, jedním unárním funkčním symbolem f a jedním binárním predikátovým symbolem p. Nechť $\Re$ je realizace jazyka L, kde univerzem je množina všech bodů kulové plochy K se středem O s kulovou plochou K. Symbol f se realizuje v bodě x jako bod jemu protilehlý, tj. $f_{\Re}(x) \neq x$ je průsečík přímky procházející bodem x a středem O s kulovou plochou K. Realizace konstant jsou dva vzájemně protilehlé body: $k_{\Re} = S$ (severní pól) a $l_{\Re} = J$ (Jížní pól). Realizace symbolu p na bodech x, y je $p_{\Re}(x, y) \Leftrightarrow x, y$ leží na stejné (zeměpisné) rovnoběžce, tj. kružnicí vzniklé průnikem kulové plochy K a roviny kolmé na spojnici bodů S a J. Uvažujme následující formule:

(1) $\chi : p(x, f(x))$

(2) $\psi : p(l, x) \Leftrightarrow p(k, x)$

(3) $\theta : f(k) = l$

Určete ty z teorií $A = \{\psi, \theta\}$, $B = \{\neg\chi, \psi\}$, $C = \{\neg\chi, \theta\}$, $D = \{\psi, \theta\}$, jejichž je $\Re$ modelem.

2.3.6

Uvažujme jazyk L s rovností, jedním binárním funkčním symbolem f a predikátovými symboly p a q arit 1 a 3. Nechť $\Re$ je realizace jazyka L, kde univerzem je $P(\mathbb{N})$, tj. množina všech podmnožin množiny přirozených čísel, a symboly se realizují na množinách $A, B, C \subseteq N$ následovně:

$$f_{\Re}(A, B) = A \cap B$$

$$A \in P_{\Re} \Leftrightarrow A \neq \phi$$

$$(A, B, C) \in q_{\Re} \Leftrightarrow A \cap B \cap C$$

je konečná. Rozhodněte, zda jsou následující formule splněny v $\Re$:

1) $\forall x \forall y q(x, y f(x, y))$

2) $p(f(x, y)) \Rightarrow (p(x) \wedge p(y))$

3) $p(x) \wedge p(y) \Rightarrow \forall z q(x, y, z)$

4) $p(x) \Rightarrow q(x, f(x, x), x)$

2.3.7

Uvažujme jazyk L s rovností, jedním unárním predikátovým symbolem p a jedním binárním funkčním symbolem f. Nechť M je taková realizace jazyka L na množině $P(\mathbb{R}^2)$ všech podmnožin reálné roviny $\mathbb{R}^2$, kde $p_M(X)$ znamená, že X je neprázdná množina bodů ležících uvnitř a na hranici nějakého obdelníku v $\mathbb{R}^2$, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, $f_M(X, Y) = X \cap Y$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda

(1) $M \models (\exists x)(f(x, x) = x \Rightarrow p(x))$

(2) $M \models (p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow p(f(x, y))$

(3) $(p(x) \wedge p(y)) \models p(f(x, y))$

2.3.8

Uvažujme jazyk L s rovností a jedním binárním predikátovým symbolem p. Buď R realizace jazyka L, jejimž univerzem je množina $S(\mathbb{Z})$ všechpodgrup grupy $(\mathbb{Z}, +)$ a v niž platí $p_R(G, H) \Leftrightarrow$ existuje injektivní homomorfismus grup $G \to H$.

1. Rozhodněte, zda R je modelm teorie uspořádaných množin.

2. Uvažujme formuli $\varphi \equiv \forall y p(y, x)$. Popište všechna ohodnocení e proměnných jazyka L taková, že $R \models \varphi[e]$.

2.3.9

Uvažujme jazyk L s rovností, jedním unárním predikátovým symbolem p a jedním binárním funkčním symbolem f. Nechť M je taková realizace jazyka L na množině $P(\mathbb{R}^2)$ všech podmnožin reálné roviny $\mathbb{R}^2$, kde $p_M(X)$ znamená, že X je neprázdná množina bodů ležících uvnitř a na hranici nějakého obdelníku v $\mathbb{R}^2$, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, $f_M(X, Y) = X \cup Y$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda

(1) $M \models (\exists x)(p(x) \Rightarrow f(x, x) = x)$

(2) $p(f(x, y)) \models (p(x) \vee p(y))$

(3) $M \models p(f(x, y)) \Rightarrow (p(x) \vee p(y))$

2.3.10

Uvažujme jazyk L s jedním binárním predikátovým symbolem p. Nechť A je konečná množina a M je taková realizace jazyka L na množině $P(A)$ všech podmnožin množiny A, kde:

$$p_M(X,Y) \Leftrightarrow X \subseteq Y.$$

Uvažujme formule:

$$\varphi : \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow p(y,x))$$

$$\psi : \forall y (p(x,y) \Rightarrow p(y,x))$$

a teorii $T = \{\varphi, \psi\}$

(1) Najděte ohodnocení e volných proměnných formule φ tak, aby byla při tomto ohodnocení pravdivá, tedy aby platilo $M \models \varphi[e]$.

(2) Rozhodněte a odůvodněte, zda platí $M \models \varphi$.

(3) Najděte jinou realizaci N na univerzu $P(A)$ takovou, aby platilo $N \models T$.

2.4 Prenexní tvar

2.4.1

Negaci formule

$$\exists x(\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\psi \wedge \neg\varphi)) \wedge (\forall x \chi)$$

převeďte do tvaru (ekvivalentní formule), ve kterém se nebude vyskytovat žádná ze spojek $\wedge$ a $\vee$.

2.4.2

Převeďte formuli $(\forall x p(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y q(x,x)) \Rightarrow \forall x(\exists x p(y,x) \Rightarrow q(y,x))$ do prenexního tvaru. Poté ji znegujte a převedte do tvaru, kde se spojka $\neg$ nebude vyskytovat u neatomických formulí.

2.4.3

Převeďte následující formuli do prenexního tvaru. Potom napište její negaci a upravte ji tak, aby se v ní nevyskytovala spojka $\Rightarrow$:

$$\forall x A(x) \Rightarrow (\forall x B(y) \Rightarrow \neg\forall x C(y,x))$$

2.4.4

Převeďte formuli

$$\forall x \varphi(x,y) \to \exists x(\psi(x) \vee \chi(y,z)))$$

do prenexního tvaru. K získané formuli (v prenexním tvaru) napište její negaci a upravte ji tak, aby se spojka negace vyskytovala jen před (některými) φ, ψ, χ.

2.4.5

Převeďte negaci formulce $\forall x \forall y \varphi(x,y) \Rightarrow \exists x(\psi(x) \Rightarrow \forall z \varphi(x,z))$ do prenexního tvaru.

2.4.6

Převeďte negaci formule $(\forall x p(x,y) \to \exists x \forall y q(x,y)) \wedge \exists y(\forall x p(y,y) \to \forall x p(x,y))$ do prenexního tvaru.

2.4.7

Převeďte negaci následující formule do prenexního tvaru:

$$\neg(\forall x(\Phi(x) \Rightarrow \forall y \psi(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists y \psi(x,y))$$

2.4.8

Rozhodněte, zda jsou formule $(x \vee (y \wedge z)) \Rightarrow (y \wedge (x \vee z))$ a $((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \Rightarrow y$ ekvivalentní.

2.4.9

Rozhodněte, zda jsou formule $(y \wedge z) \Rightarrow (x \vee (x \wedge y))$ a $(z \wedge \neg x) \Rightarrow (\neg y \wedge (x \vee \neg y))$ ekvivalentní.

2.4.10

Převeďte formuli

$$\forall x \exists y \varphi(x,y) \to (\varphi(x,x) \to \exists y \forall x \varphi(y,y))$$

do prenexního tvaru. Poté napište jeho negaci ve tvaru, kde se symbol $\neg$ bude vyskytovat pouze u atomických formulí.

3 Algebra

3.1 Grupy, podgrupy, cyklické grupy

3.1.1

Položme $P = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \exists a \in \mathbb{R} - \{0\} \forall x \in \mathbb{R} : f(x)) = ax\}$. Dokažte, že $(P, \circ)$, kde $\circ$ značí skládání zobrazení, je grupoid. Zjistěte, zda $(P, \circ)$ je dokonce grupa (svůj závěr odůvodněte).

3.1.2

Je dán grupoid s tří prvkovou množinou a s jednou operací $\circ$, která splňuje zákon o krácení. Sestavte tabulku pro tuto operaci. Zároveň grupoid není grupou, ukažte, že neplatí asociativní zákon.

3.1.3

Na množině $\mathbb{Z}$ všech celých čísel uvažujme binární operaci * definovanou takto: $x*y = xy+x+y$. Tato operace tvoří na množině $\mathbb{Z}$ -1 komutativní grupu, ve které inverzní prvek K danému prvku Je:

a) $\frac{1-x}{1+x}$

b) $\frac{1}{-1+x}$

c) $\frac{x}{-1+x}$

d) $\frac{1}{1+x}$

e) v jiném tvaru, než je uvedeno v (a)-(d).

Nechť $G = \left\{x + y\sqrt{7}; x, y \in \mathbb{Q}\right\}$. Zjistěte, zda $(G, +, \cdot)$ je těleso ($+$ a $\cdot$ značí obvyklé operace sčítání a násobení).

3.1.4

Buď $A = (\mathbb{Z}, f)$ algebra typu (1) ($\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel), kde $f(z) = |z| - 8$ pro každé $z \in \mathbb{Z}$. Popište:

1. podalgebru $B = \langle -4 \rangle$ algebry A,
2. přímý součin algeber $B \times (0, 1, 2, g)$, kde g je permutace $g = (1, 2)$ (v cyklickém zápisu).

3.1.5

Udejte příklad tříprvkového komutativního grupoidu, který není grupou, ale platí v něm zákony o krácení. Zdůvodněte, proč tento grupoid není grupa.

3.1.6

Uvažujme univerzální algebru $A = (\mathbb{C}, +, conj, 1)$, kde $+$ je binární operace sčítání komplexních čísel, $conj$ je unární operace konjungace (komplexní sdruženost), tj. $conj(a+bi) = a-bi$, a 1 je nulární operace. Popište podalgebru $\langle\{i\}\rangle$ algebry A (tj. podalgebru generovanou jednoprvkovou množinou $\{i\}$). Na množině $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je dána binární relace $\odot$ vztahem $x \odot y = x + y - xy$. Pak $(\mathbb{Q}, \odot)$ tvoří:

(a) grupu

(b) komutativní monoid, který není grupou

(c) monid, který není komutativní

(d) pologrupu bez neutrálního prvku

(e) netvoří komutativní pologrupu

3.1.7 J

e dána grupa $(\mathbb{Z}, 1, 2, f)$, kde $\mathbb{Z}$ je množina celých čísel a 1,2 jsou konstanty a f je unární operace definována předpisem $f(x) = 3x$. Určte podgrupu $\langle 6 \rangle$ generovanou prvkem 6.

3.1.8

Popište:

a) podgrupu grupy $\Re$ s operací $+$ generovanou množinou $\{3, 11\}$,

b) podtěleso tělesa $\Re$ (s obvyklými operacemi sčítání a násobení) generované množinou $\{n\}$, kde n je celé nenulové číslo.

3.1.9

Buď S symetrická grupa na množině $\mathbb{R}-\{0,1\}$, tj. grupa všech permutací na množině $\mathbb{R}-\{0,1\}$ s operací skládání. Určete podgrupu grupy S generovanou permutací $\{f_1, f_2\}$, kde $f_1(x) = \frac{x}{x-1}$, $f_2(x) = \frac{x-1}{x}$.

3.2 Morfismy

3.2.1

Uvažujme univerzální algebru $A = (\mathbb{Z}^2, e, \delta, \oplus, \odot, \nabla)$, kde e je nulární operace, δ je unární operace, $\oplus, \odot$ jsou binární operace a ∇ je ternární operace. Tyto operace jsou dány následovně: $e = (0,1)$, $\delta(x,y) = (x, y+2)$, $\oplus(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$, $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1+y_2)$, $\nabla((x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)) = (x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3)$. Zjistěte a zdůvodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x,y) = (3x, x+y)$ je homomorfismus algebry A do A.

3.2.2

Na množině $\mathbb{C}$ komplexních čísel uvažujme operaci $+$ obvyklého sčítání. Buď $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zobrazení dané předpisem $f(a+ib) = a - ib$. Pak:

a) $(\mathbb{C}, +)$ není grupa

b) f je zobrazení grupy $(\mathbb{C}, +)$ do sebe, které není homomorfismem

c) f je homomorfismus grupy $(\mathbb{C}, +)$ do sebe, který není izomorfismem

d) f je izomorfismus grupy $(\mathbb{C}, +)$ na sebe (tedy automorfismus)

e) neplatí žádná z uvedených možností

Uvažujme univerzální alagebru $A = \left(\mathbb{Z}, ^*, ^{'}\right)$ typu $(1,1)$ na množině celých čísel $\mathbb{Z}$, kde odpovídající unární operace jsou dány vztahy: $a^{'} = |a|$ a $a^* = (-1)^a\, a$. Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi(a) = 4a^2$ je homomorfismus $A \to A$ a pokoud ano, popište jeho jádro.

3.2.3

Uvažujme aditivní grupu reálných čísel $(\mathbb{R}, \oplus)$, kde operace $\oplus$ je daná předpisem

$$a \oplus b = a + b - 1$$

1. Rozhodněte, zda grupoid $(\mathbb{R}, \oplus)$ je monoid.

2. Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = 2x + 1$ je homomorfismus grupidů $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, \oplus)$.

3.2.4

Nechť pro libovolné přirozené číslo $m > 0$ značí symbol Z_m okruh zbytkových tříd modulo m a pro libovolné $x \in Z$ nechť symbol $[x]_m$ značí tu třídu kongruence modulo m (tedy prvek množiny Z_m), která obsahuje prvek x. Jaký musí být vztak mezi přirozenými čisly $m, n > 0$, aby platilo $[x]_m \subseteq [x]_n$ pro všechna $z \in Z$? Je pak zobrazení $f : Z_m \to Z_n$ dané předpisem $f([x]_m) = [x]_n$ pro všechna $x \in Z$ homomorfismus?

3.2.5

Uvažujme univerzální algebru $A = (\mathbb{Z}^2, e, \delta, \oplus, \odot, \nabla)$, kde e je nulární operace, δ je unární operace, $\oplus, \odot$ jsou binární operace a ∇ je ternární operace. Tyto operace jsou dány následovně: $e = (0, 1)$, $\delta(x, y) = (x+1, y)$, $\oplus(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2)$, $\nabla((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$. Zjistěte a zdůvodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ určené předpisem $\varphi(x, y) = (x + y, 2y)$ je homomorfismus algebry A do A.

3.2.6

Mějme grupu $M(n, \mathbb{R})$ všech čtvercových matic řádu $n(n \in \mathbb{N} - \{0\})$ nad $\mathbb{R}$ s operací sčítání a grupu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel s operací sčítání. Definujeme zobrazení $f : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ předpisem $f(A) = tr(A)$ pro všechna $A \in M(n, \mathbb{R})$ (kde $tr(A)$ značí stopu matice A, tj. součet prvků na hlavní diagonále matice A). Dokažte, že j je homomorfismus, popište třídy jádra $M(n, \mathbb{R})/f$ a určete normální podgrupu grupy $M(n, \mathbb{R})$ odpovídající jádru $M(n, \mathbb{R})/f$. Zjistěte, zda grupy $M(n, \mathbb{R})/f$ a $\mathbb{R}$ jsou izomorfní.

3.3 Kongruence

3.3.1

Nechť $\mathbb{C}^*$ značí multiplikativní grupu všech nenulových komplexních čísel a G její podgrupu všech komplexních čísel s absolutní hodnotou 1. Nechť $f : \mathbb{C}^* \to G$ je zobrazeni dane vztahem $f(z) = \frac{z}{|z|}$. Popište kongruenci na $\mathbb{C}^*$ danou jádrem zobrazení f a určete jí odpovídající normální podgrupu grupy $\mathbb{C}^*$.

3.3.2

Mějme grupu regulárních matic řádu 2 nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ spolu s operací násobení matic, označíme ji $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$. Uvažujme binární relaci $\sim$ na $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$ definovanou předpisem $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$ (kde $||$ značí determinant). Dokažte, že

1. $\sim$ je kongurence na grupě $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$ a
2. faktorová grupa $(GL(2, \mathbb{R})/\sim, \cdot)$ je izomorfní s grupou $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ všech nenulových reálných čísel s násobením.
3. Definujte normální podgrupu grupy $(GL(2, \mathbb{R}), \cdot)$, která odpovídá kongruenci $\sim$.

3.3.3

Uvažujme algebru $A = (\mathbb{Z}, t)$ s jednou unární operací t definovanou pro libovolné $x \in \mathbb{Z}$ předpisem $t(x) = x + 1$.

a) Popište všechny podalgebry algebry A.

b) Uvažujme rozklad množiny $\mathbb{Z}$, jehož třídy jsou všechny dvouprvkové množiny tvaru $\{2k, 2k+1\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Je příslušná ekvivalence kongruencí na algebře A?

3.3.4

Na multiplikativní grupě $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ všech nenulových komplexních čísel nechť jsou dva prvky v relaci $\sim$ právě tehdy, když mají stejnou absolutní hodnotu. Dokažte, že relace $\sim$ je kongruence na uvedené grupě, a graficky znázorněte třídy kongruence $\sim$ a také normální podgrupu určenou kongruencí $\sim$.

3.3.5

Uvažujeme algebru $A = (\Sigma^*, \mu, \delta_a, b)$ typu $(3, 1, 0)$, kde Σ^* je množina všech konečných řetězců (slov) vytvořených z prvků (písmen) konečné množiny (abecedy) Σ. Symbol μ označuje ternární operaci zřetězení tří slov v daném pořadí, nulární operace b je dána vybraným prvkem $b \in \Sigma$, $a \in \Sigma$ je pevně daný prvek $a \neq b$ a δ_a je unární operace, která nahrazuje všechny výskyty prvku b v daném řetězci řetězce ab. Definujme binární relaci $\sim$ na Σ^* takto: $u \sim v \Leftrightarrow |u| = |v|$, kde $|u|$ je počet prvků řetězce u. Rozhodněte, zda $\sim$ je kongruencí na algebře A, a pokud ano, popište třídy příslušného rozkladu. Pokud ne, pak najděte takovou podalgebru algebry A, pro kterou příslušné zúžení relace $\sim$ kongruencí je.

3.3.6

Najděte všechny rozklady množiny $\{x, y, z\}$ takové, že jim odpovídající ekvivalence jsou kongruence na algebře $A = (\{x, y, z\}, b)$, kde $f(x) = y$, $f(y) = f(z) = z$.

3.3.7

Mějme algebru $A = (\mathbb{R}^2, a, b, c)$ typu $(2, 1, 0)$, kde operace $\{a, b, c\}$ jsou dány vztahy:

$$a((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 y_1 + x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$b(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$$

$$c = (0, 0)$$

Definujeme relaci ekvivalence $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$. Rozhodněte, zda $\sim$ je či není kongruence na A (odůvodněte).

3.4 Zbytkové třídy

3.4.1

Najděte všechny generátory cyklické grupy $(\mathbb{Z}_7, +)$.

3.4.2

Najděte všechny generátory cyklické grupy $(\mathbb{Z}_5, +)$.

3.4.3

Vypočtěte v tělese $(\mathbb{Z}_5, \cdot, +)$

$$(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{4}$$

3.4.4

V tělese $\mathbb{Z}_7$ vypočtěte $\frac{4}{3}(2 - \frac{3}{4} - \frac{5}{3})$.

3.4.5

Vypočtěte v tělese $\mathbb{Z}_7$ zbytkových tříd modulo 7:

$$\frac{4(3+5)}{6} - \frac{2}{3}$$

3.4.6

Najděte největší společný dělitel polynomů $x^4 + x^3 + 3x + 3$ a $x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ nad okruhem $(\mathbb{Z}_5, \cdot, +)$. Během výpočtu používejte jen reprezentanty prvků $\mathbb{Z}_5$ z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

4 Funkcionalni analýza

4.1 Metrické prostory

4.1.1

Nad abecedou $\Gamma = \{x, y, z\}$ uvažujeme jazyk $\Sigma = x^* y^+ z^*$. Buď $\mu(u, v) = n$, kde n je nejmenší počet změn řetězce u, které je potřeba provést, aby se tento řetězec transformoval na řetězec v. Přitom změnou řetězce rozumíme vypuštění či vložení symbolu nebo nahrazení symbolu jiným symbolem v tomto řetězci. Ověřte (dokažte), zda μ je či není metrika na Σ a v kladném případě určete všechny prvky množiny Σ, které leží v otevřené kouli o poloměru 2 se středem v prvku xyz.

4.1.2

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3$ s euklidovskou metrikou p definujeme vzdálenost libovolných dvou množin A a B vztahem $\delta(A, B) = inf\,\{(p(a, b)|a \in A, b \in B)\}$. Rozhodněte, zda $(P(\mathbb{R}_3), \delta)$ tvoří metrický prostor (symbol $P(\mathbb{R}_3)$ značí množinu všech podmnožin množiny $\mathbb{R}_3$).

4.1.3

Definujeme zobrazení $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \frac{|x_1 - x_2|}{2} + 3\,|y_1 - y_2|$$

Rozhodněte, zda zobrazení δ definuje metriku na množině $\mathbb{R}^2$ (využijte skutečnost, že vztahem $d(x, y) = |x - y|$ je definována metrika na $\mathbb{R}$). V kladném případě zakreslete v rovině $\mathbb{R}^2$ jednotkovou kružnici vzhledem k této metrice, tj. množinu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \delta((x, y), (0, 0)) = 1\}$.

4.1.4

Na $\mathbb{Z}^2$ definujeme metriku δ následovně: $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Zakreslete kružnici určenou touto metrikou a poloměru 2 se středem v bodě $(0, 0)$, tj. množinu

$$S_\delta(2) = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : \delta((x, y), (0, 0)) = 2\right\}$$

. Určete počet prvků množiny $S_\delta(2)$ a tyto prvky vypište.

4.1.5

Na množině $\mathbb{Z}^2$ je definovaná metrika δ vztahem $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = max\,\{|x_1 - x_2|\,, |y_1 - y_2|\}$. Zjistěte, pro které body $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ platí současně $\delta((1, -1), (x, y)) = 3$ a $\delta((2, 3), (x, y)) = 2$.

4.1.6

Na množině $\mathbb{Z}^2$ je definovaná metrika δ vztahem $\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = max\,\{|x_1 - x_2|\,, |y_1 - y_2|\}$. Zjistěte, pro které body $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ platí současně $\delta((-1, 1), (x, y)) = 3$ a $\delta((3, 0), (x, y)) = 2$.

4.2 Normované prostory

4.2.1

V lineárním prostoru $C\,[-1, 1]$ všech (reálných) spojitých funkcí na intervalu $[-1, 1]$ uvažujme normu $\|f\| = max\,\{|f(t))|\,; t \in [-1, 1]\}$ a funkci $h \in C\,[-1, 1]$ danou vztahem $h(t) = 1 - |t|$ pro všechna $t \in [-1, 1]$. Určete všechny konstantní funkce $g \in C\,[-1, 1]$ s vlastností $p\,(g, h) = 1$, kde p je metrika indukovaná danou normou. (Návod: Úlohu řešte graficky.)

4.2.2

V reálné rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme normu danou vztahem $\|(x, y)\| = |x| + |y|$ a nechť p je metrika v $\mathbb{R}^2$ inkludovaná touto normou. Načrtněte množinu všech bodů $[x_0, x_1]$ v $\mathbb{R}^2$, pro než platí $p([x_0, x_1]\,, [0.0]) \leq 1$. Jaký je rovinný obsah této množiny?

4.3 Unitární prostory

4.3.1

Na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ definujme skalární součin vztahem $(x_1, x_2, x_3)\cdot(y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi podprostoru prostoru $\mathbb{R}^3$ generovaného vektory $1, 2, -1)$, $(1, 2, -3)$, $(4, 8, -8)$, $(3, 6, -9)$. Na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ definujeme skalární součin vztahem

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte orotnormální bázi podprostoru prostoru $\mathbb{R}^3$ generovaného vektory $(2, -1, 3)$, $(-1, 2, -3)$, $(3, 0, 3)$ a $(8, 2, 6)$.

4.3.2

V Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte ortonormální bázi podprostoru W generovaného vektory $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 1, -1, 1)$ a $u_4 = (-1, 1, 1, 1)$.

5 Grafy

5.1 Nazelezeni grafu

5.1.1

Uvažujme obyčejný graf G, který má 19 hraf a součet stupňů lichých uzlů je menší nebo roven součtu stupňů sudých uzlů. Kolik má graf G lichých uzlů, víte-li, že jich je více než 2 a všechny mají stejný stupeň větší než 1?

5.1.2

V obci Skorošice se koná amatérský fotbalový turnaj, kterého se účastní 9 týmů. V dopolední části turnaje každý tým odehrál 2 zápasy. Kolik zápasů v odpolední části musí každý tým odehrát, aby si zahráli co nejvíce zápasů, avšak celkový počet odehraných zápasů musí být menší jak 32.

5.1.3

Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{1, 2, \ldots, 2n\}$, $n > 0$ přirozené číslo a H má 15 prvků. Pro každé číslo $i = 1, 2, \ldots, n$ mají uzly i a $n+i$ tentýž stupeň i. Určete hodnotu čísla n a pak graf G přehledně nakreslete.

5.1.4

Kolik hran má patnáctistěn s 26 vrcholy? Nápověda: Uvažujte planární graf odpovídající danému mnohostěnu.

5.1.5

Nakreslete všechny navzájem neizomorfní stromy se 6 uzly.

5.1.6

Každá ze 13 zemí má uzavřenou bilaterální smlouvu o hospodářské spolupráci s právě n ostatními zeměmi (z těchto 13ti). Jakých hodnot může nabývat n, jestliže víme, že $n > 2$ a n není dělitelné číslem 4 ani číslem 5.

5.1.7

Kolik hran má sedmnáctistěn s 30 vrcholy? Nápověda: Uvažujte planární graf odpovídající danému mnohostěnu.

5.1.8

Uzel obyčejného grafu se nazývá artikulace, pokud se po jeho odstranění a odstranění s ním incidentních hran zvýší počet komponent grafu. Kolik existuje navzájem neizomorfních lesů o 6 uzlech s právě 1 artikulací? Nakreslete je.

5.1.9

Graf G má 11 uzlů, která mají všechny stejný stupeň n. Určete počet h hran grafu G, víte-li, že $n > 2$ a že G je nesouvislý. Pokuste se graf G přehledně nakreslit.

5.1.10

Jaký je nejmenší počet hran grafu se 7 uzly, jehož každý uzel má stupeň 2,4 nebo 6 a každý z těchto stupňů je zastoupen? Nakreslete takový graf.

5.2 Nazeteni minimální kostry

5.2.1

Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ a H má 15 prvků s oceněním $v : H \to N$ takovým, že $v\{a, b\} = 2, v\{a, c\} = 1, v\{a, d\} = 1, v\{b, c\} = 1, v\{b, d\} = 2, v\{c, d\} = 3, v\{b, e\} = 4, v\{d, e\} = 3, v\{d, g\} = 2, v\{e, f\} = 4, v\{e, g\} = 3, v\{e, h\} = 2, v\{f, g\} = 3, v\{f, h\} = 1, v\{g, h\} = 1$. Nakreslete tento graf tak, že každá z následujících čtveřic (a, b, c, d), (b, d, e, g) a (e, f, g, h) tvoří vrcholy čtveřice a hrany jsou znázorněny úsečkami spojujícími příslušné vrcholy. Určete cenu minimální kostry tohoto grafu a jednu jeho minimální kostru nakreslete do obrázku.

5.2.2

V grafu $G = \{U, H\}$, kde H=

5.2.3

Je dán graf $G = (U, H)$, kde $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ a H má 13 prvků s oceněním $v : H \to N$ takovým, že $v\{a, b\} = 2, v\{a, d\} = 5, v\{a, f\} = 1, v\{b, c\} = 0, v\{c, d\} = 5, v\{c, e\} = 1, v\{d, e\} = 10, v\{d, f\} = 0, v\{e, g\} = 3, v\{e, h\} = 3, v\{f, g\} = 1, v\{f, h\} = 2, v\{g, h\} = 6$. Určete cenu minimální kostry tohoto grafu a jednu jeho minimální kostru nakreslete.