ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА

В.Г.Сапогин

E-уравнение Эмдена, полученное в [1], относится к классу нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Вместе с уравнением Эмдена-Фаулера оно играло важную роль на первом этапе решения задач о строении звезд, рассматриваемых как газовые образования, находящиеся в политропическом или изотермическом равновесиях [2].

В [3] уравнением Эмдена называют уравнение более общего вида

$$xy'' + ay' + bx\,\boldsymbol{exp}(y) = 0, \qquad (1)$$

которое переходит в *E*-уравнение Эмдена [1] при условии, что $a=2$ (сферическая симметрия) и $b>0$.

В последние годы возрос интерес к поиску точных решений уравнения (1). Этот интерес обусловлен тем, что решения некоторых задач статического равновесия вещества с самосогласованным полем, полученные в [4], также сводятся к решению уравнения (1).

Покажем, что уравнение (1) имеет класс точных решений в случае $a=1$ (цилиндрическая симметрия). Подстановка $y = \eta(\xi) - 2\xi$, где $\xi = \boldsymbol{ln}(x)$ приводит к уравнению (штрихи означают дифференцирование по ξ)

$$\eta'' + \beta^2\,\boldsymbol{exp}(\eta) = 0, \qquad (2)$$

где $\beta^2 = b > 0$. Уравнение (2) допускает понижение порядка и имеет первый интеграл

$$(\eta')^2/2 + \beta^2\,\boldsymbol{exp}(\eta) = C(\eta', \eta, 0) = const > 0. \qquad (3)$$

Интегрируя (3) второй раз, получаем

$$\eta = -2\,\boldsymbol{ln}\left\{\sqrt{\frac{b}{C}}\,\boldsymbol{ch}\left[(\xi_0 - \xi)\sqrt{\frac{C}{2}}\right]\right\},$$

где ξ_0 – произвольная постоянная. Переходя к функции *y*, имеем первое точное общее решение

$$y = -\boldsymbol{ln}\left\{\frac{bx^2}{C}\,\boldsymbol{ch}^2\left[\boldsymbol{ln}(x_0/x)\sqrt{\frac{C}{2}}\right]\right\}, \qquad (4)$$

где x_0 – новая произвольная постоянная ($x_0 = \boldsymbol{exp}(\xi_0)$).

Если $b<0$, то вводя обозначение $\alpha^2 = -b > 0$, запишем первый интеграл (3) в виде

$$(\eta')^2/2 - \alpha^2\,\boldsymbol{exp}(\eta) = H(\eta', \eta, 0) = const. \qquad (5)$$

Заметим, что уравнение (1) при *a=0* (плоская симметрия) также допускает понижение порядка и имеет при *b>0* и *b<0* первые интегралы, похожие на интегралы (3) и (5) по структуре. Интегралы плоской симметрии совпадают с полным давлением исследуемых систем, состоящим из давления поля и давления частиц (либо зарядов) системы, и позволяют выявить механизмы удержания вещества самосогласованным полем [4–6].

Уравнение (5) имеет три типа решений. Первое из них получается из условия $H = P_1^2 > 0$. В этом случае квадратуру в (5) представим в виде

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{2\left(P_1^2 + \alpha^2 \exp(\eta)\right)}} = \sigma(\xi - \xi_0), \tag{6}$$

где $\sigma = sign(\eta')$. Результат интегрирования (6)

$$\exp(-\eta/2) = \frac{\alpha\sigma}{P_1} sh\left[\frac{P_1}{\sqrt{2}}(\xi_0 - \xi)\right] \tag{7}$$

позволяет определить знаковую функцию σ в виде

$$\sigma = \begin{cases} +1 \text{ при } \xi < \xi_0, \\ 0 \text{ при } \xi = \xi_0, \\ -1 \text{ при } \xi > \xi_0. \end{cases}$$

Переходя в (7) к функции *y*, имеем второе точное общее решение

$$y = -\ln\left\{-\frac{bx^2}{P_1^2} sh^2\left[\frac{P_1}{\sqrt{2}} \ln(x_0 / x)\right]\right\}, \tag{8}$$

Третье точное решение получается из условия *H=0* и имеет вид

$$y = -\ln\left[-\frac{bx^2}{2} \ln^2(x_0 / x)\right]. \tag{9}$$

Из условия $H = -P_2^2 < 0$ получаем последнее точное решение

$$y = -\ln\left\{-\frac{bx^2}{P_2^2} \sin^2\left[\frac{P_2}{\sqrt{2}} \ln(x_0 / x)\right]\right\}. \tag{10}$$

Решения (4),(8),(9),(10) позволяют исследовать свойства равновесий вещества с самосогласованным полем цилиндрической симметрии в системах с однородной температурой. Частные случаи общих решений (8) – (10), у которых произвольные постоянные находят из граничных условий $y(1) = y'(1) = 0$, описывают статические равновесия цилиндрического пучка зарядов с самосогласованным полем [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Emden R. Gaskugeln. Leipzig und Berlin. 1907.
2. Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. М.: ИЛ, 1950. 476 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. Наука, 1971. 576 с.
4. Сапогин В.Г. Механизмы удержания вещества самосогласованным полем. Таганрог, ТРТУ, 2000. 254 с. http://www.viewcade.com/sapogin/
5. Сапогин В.Г. Плоские самосогласованные гамильтоновы системы гравитирующих частиц//Изв. высш. учеб. зав. Северо−Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 1996. №3. С.72−78.
6. Сапогин В.Г. Плоские самосогласованные гамильтоновы системы равновесных одноименных зарядов//Изв. высш. учеб. зав. Северо−Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 1996. №4. С.63−68.
7. Sapogin V.G. On Compensation of Coulomb Interaction of Charges by Beam’s Self-Consistent Field (Model of isothermal equilibrium with homogeneous temperature). Proceedings 1-st IEEE International Conference on Circuits and Systems for Communications. 26-28 June, 2002. St.Petersburg, Russia, p.408-411.