УДК 524.0

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГРУЗА НА ПРУЖИНЕ В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Д.А.Дзюба[1)], Е.К.Сысоева[2)], А.К.Атаманченко[2)]

[1]*Институт нанотехнологий и электронного приборостроения ЮФУ, Таганрог, email:diemadsjuba@yandex.ru*
[2]*Автономное образовательное учреждение, лицей №4, Таганрог, sysoevaeva@gmail.com*

Исследуются вертикальные колебания груза на пружине, подвешенной в однородном поле силы тяжести. Решение задачи приводит к закону сохранения полной механической энергии маятника. Показано, что вертикальные колебания груза на пружине делятся на два класса: малые колебания с отрицательной полной энергией и колебания с положительной полной энергией. Получены законы смещения груза, скорости, ускорения, кинетической и потенциальной энергии в зависимости от времени. Амплитуда колебательной скорости груза зависит от ускорения свободного падения и отношения массы к жёсткости пружины. Вертикальные гармонические колебания груза на пружине совершаются на частоте, совпадающей с частотой колебаний пружинного маятника. Их период не зависит не только от амплитуды колебаний, как у математического маятника, но и ускорения свободного падения. Амплитуда вертикальных колебаний нелинейно зависит от полной энергии и возрастает с её увеличением. Получен адиабатический инвариант колебательной системы. При медленном изменении потенциальной энергии равновесного состояния груза, вызванной уменьшением коэффициента жёсткости, энергия колебаний груза уменьшается. Это приводит к тому, что амплитуда колебаний и амплитудные значения колебательной скорости груза также уменьшаются. Результаты представляют интерес для создания контрольно-измерительных методик качества изготовления витых пружин для железнодорожного и автомобильного транспорта.

Ключевые слова: колебания груза на пружине, однородное поле силы тяжести, полная энергия колебаний, частота колебаний, амплитуда, интеграл полной энергии, адиабатический инвариант.

THE VERTICAL OSCILLATIONS OF WEIGHT AT THE SPRING IN HOMOGENEOUS FIELD OF GRAVITY FORCE

Dsjuba D.A.[1)], E.K.Sysoeva[2)], A.K.Atamanchenko[2)]

[1]*Institute of nanotechnology and electronic instrumentation technology of Engineering SFU, Taganrog, email: diemadsjuba@yandex.ru*
[2]*Municipal separate educational institution, lyceum N 4, Taganrog, sysoevaeva@gmail.com*

In the report the vertical oscillations of weight at the spring, suspended in homogeneous field of gravity force, are investigated. The solution of problem leads to conservation law of pendulum's total mechanical energy. It is shown that vertical oscillations of weight at the spring are divided into two categories: 1) minor oscillations with negative total energy; and 2) oscillations with positive total energy. The displacement laws of weight, speed, acceleration, kinetic and potential energy at the dependence of time have been obtained. The amplitude of vibrational speed of weight depends on acceleration of gravity and mass-to-spring stiffness ratio. The vertical oscillations of weight at the spring are carried out on the frequency, coinciding with oscillation frequency of spring pendulum. Their period doesn't depend as on oscillations' amplitude, similarly to mathematical pendulum, so acceleration of gravity. The vertical oscillations' amplitude nonlinearly depends on total energy and increases with its enlargement. The adiabatic invariant of oscillating system has been obtained. At slow change of potential energy of weight's equilibrium, caused by stiffness coefficient's decrease, the energy of weight's oscillations is decreased. It leads to that the amplitude of oscillations and amplitude values of weight's vibrational speed are also decreased. The results represent the interest to control-measuring techniques of manufacture's quality of wrap springs for railway and automobile transport.

Key word: oscillations of weight at the spring, homogeneous field of gravity force, total energy of oscillations, oscillations' frequency, amplitude, total energy integral, adiabatic invariant.

Исследование гармонических колебаний груза на пружине обычно проводятся в предположении, что на груз действует только возвращающая сила пропорциональная смещению груза из положения равновесия. Решение такой задачи указывает на то, что колебания в такой системе гармонические и их частота не зависит от амплитуды колебаний.

Представляет интерес выяснить физические свойства вертикальных колебаний груза на пружине, помещённой в однородное поле силы тяжести. На рис. 1 представлена система координат, в которой будут исследован этот процесс в системе без трения.

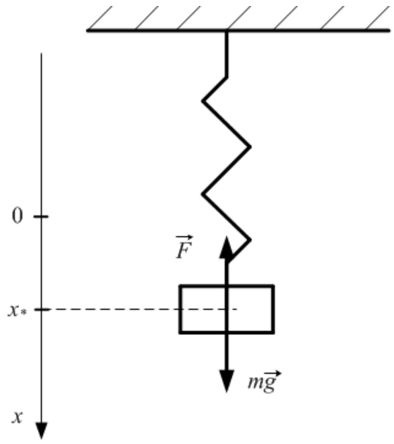

Рис. 1. Система координат

Второй закон Ньютона для периодического движения груза под действием двух сил возвращающей $\vec{F}$ и силы тяжести $m\vec{g}$ запишем в виде

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}. \tag{1}$$

Проецируя уравнение (1) на ось x, получим

$$ma = -kx + mg, \tag{2}$$

где m – масса груза, a – его ускорение, k – жёсткость пружины, g – ускорение свободного падения. Из (2) после деления на массу груза следует дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x - g = 0 \tag{3}$$

где $\omega_0^2 = k/m$ – масштаб частоты исследуемой колебательной системы. Он совпадает с квадратом частоты колебаний груза под действием одной возвращающей силы.

Введём в (3) новые переменные: безразмерное время $x=\omega_0 t$ и безразмерную координату $y=x/x_*$, где $x_*=mg/k$ – пространственный масштаб колебаний, совпадающий с положением равновесия неподвижного груза.

Приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y''+y-1=0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) имеет вид $y''=f(y)=1-y$, допускает понижение порядка и приводит к «интегралу живых сил» [1], совпадающему с законом сохранения полной механической энергии системы

$$\frac{(y')^2}{2}+U(y)=\varepsilon=const\,. \qquad (5)$$

Полная энергия (5) состоит из кинетической энергии и эффективной потенциальной, $\varepsilon=E/E_*$ – приведённая полная энергия колебаний, $E_*=m^2g^2/k$ – масштаб энергии системы. Эффективную потенциальную энергию системы можно определить из интегрирования степенных функций $U(y)=-\int f(y)dy=y^2/2-y$. Схематично она представлена на рис. 2.

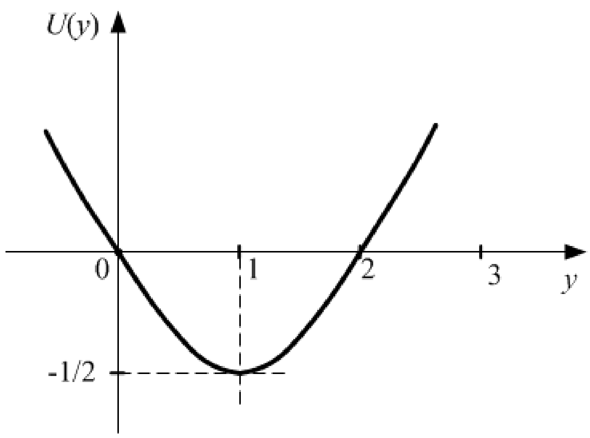

Рис. 2. Эффективная потенциальная энергия вертикальных колебаний пружины

Эффективная потенциальная энергия колебаний маятника имеет минимум $U(y_0)=-1/2$, приходящийся на точку $y_0=1$. Из вида потенциальной энергии видно, что вертикальные колебания груза на пружине в однородном поле силы тяжести разделены на два класса: малые колебания с отрицательной полной энергией (энергия изменяется в диапазоне $-1/2 < \varepsilon \le 0$) и колебания с положительной полной энергией. Значение $\varepsilon = -1/2$ соответствует состояниям покоящегося груза.

Фазовые траектории системы представляют собой окружности радиусом $\sqrt{\varepsilon + 2}$, центр которых лежит в точке ($y'=0,\ y=1$).

$$\frac{(y')^2}{\varepsilon + 2} + \frac{(y-1)^2}{\varepsilon + 2} = 1. \qquad (6)$$

Координаты точек возврата груза, в которых его кинетическая энергия обращается в нуль, находятся из квадратного уравнения

$$y^2 - 2y - 2\varepsilon = 0, \qquad (7)$$

имеющего решения

$$y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 2\varepsilon}. \qquad (8)$$

Интегрирование в (5) приводится к табличному интегралу

$$\int \frac{d(y-1)}{\sqrt{(\sqrt{1+2\varepsilon})^2 - (y-1)^2}} = arcsin\left(\frac{y-1}{\sqrt{1+2\varepsilon}}\right) + const. \qquad (9)$$

Из него получаем зависимость $x = x(t)$ в явном виде

$$y = \frac{x}{x_*} = 1 + \sqrt{1+2\varepsilon} \cdot sin(\omega_0 t + \alpha). \qquad (10)$$

Решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, имеющих интеграл живых сил, всегда приводят к зависимости полученного решения от двух произвольных постоянных ε, α, одна из которых ε является интегралом движения. Эти же решения описывают движение груза, закреплённого сверху пружины. Такие случаи встречаются в железнодорожных вагонах и автомобилях при использовании пружинных подвесок на оси колёс.

Из (10) видно, что амплитуда вертикальных колебаний маятника зависит от значения его полной механической энергии ε по закону $A = \sqrt{1+2\varepsilon}$. На рис.

3 представлена такая зависимость при изменении полной механической энергии в диапазоне от $\varepsilon = -0,5$ до $\varepsilon = +1$.

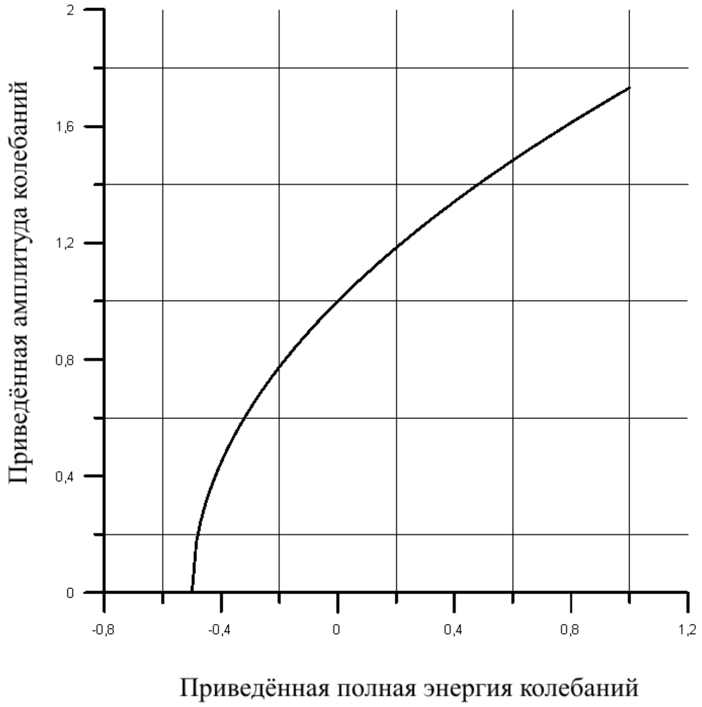

Рис. 3. Зависимость амплитуды колебаний от полной энергии

Из (10) можно получить зависимость скорости колеблющегося груза от времени

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \omega_0 x_* \sqrt{1+2\varepsilon} \cos(\omega_0 t + \alpha) = g\sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{1+2\varepsilon}\cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (11)$$

Из (11) следует закон уменьшения амплитуды колебательной скорости пружины при уменьшении отношения m/k для любых полных энергий колебаний. Закон представляет практический интерес при проектировании и изготовлении витых пружинных подвесок с малой колебательной скоростью движения.

В табл. 1 представлены расчёты амплитуды υ_0 колебательной скорости движения груза для различного отношения массы груза к коэффициенту жёсткости для случая, когда полная энергия груза равна нулю.

Таблица 1. *Зависимость амплитуды скорости от различных отношений масс грузов и коэффициентов жёсткости.*

m/k (c^2)	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
υ_0 (м/с)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}

Зависимость ускорения движения груза *a* от времени имеет вид

$$a = -g\sqrt{1+2\varepsilon}\,\sin(\omega_0 t + \alpha) = g(1 - \frac{x}{x_*})\,. \tag{12}$$

Как видно из (12), ускорение движения груза с нулевой полной энергией совпадает с ускорением свободного падения и не зависит от массы груза и коэффициента жёсткости пружины.

Зависимости кинетической и потенциальной энергий движения груза от времени имеют вид

$$\frac{E_k}{E_*} = (1+2\varepsilon)\cos^2(\omega_0 t + \alpha)/2\,, \tag{13}$$

$$\frac{U(t)}{E_*} = \left[(1+2\varepsilon)\sin^2(\omega_0 t + \alpha) - 1\right]/2\,. \tag{14}$$

Как видно из (13), (14), полная механическая энергия движения груза не зависит от времени и является интегралом движения.

Площадь эллипса в (6) представляет собой адиабатический инвариант *J=invariant* движения груза в случае, когда в системе происходят медленные изменения во времени её параметров: массы груза или коэффициента жёсткости. Для этого случая инвариант может быть представлен в трёх формах

$$\frac{J}{\pi} - 2 = \varepsilon = \frac{E}{kx_*^2} = \frac{E}{mgx_*} = \frac{E\omega_0^2}{mg^2}\,. \tag{15}$$

Из (15) видно, что при медленном изменении потенциальной энергии равновесного состояния груза, вызванной уменьшением коэффициента жёсткости, полная энергия колебаний груза уменьшается. Это приводит к тому, что амплитуда колебаний и амплитудные значения колебательной скорости груза также уменьшаются.

Экспериментальные исследования независимости периода колебаний исследуемой системы от ускорения свободного падения были проведены Атаманченко А.К. в работе [2]. Полученные результаты представляют интерес для создания контрольно-измерительных методик качества изготовления витых пружин для железнодорожного и автомобильного транспорта.

Авторы выражают благодарность профессору кафедры физики Института нанотехнологий и электронного приборостроения Южного федерального университета Сапогину В.Г. за предложенную идею методики расчёта.

Выводы

1.Вертикальные гармонические колебания груза на пружине в однородном поле силы тяжести совершаются на частоте, совпадающей с частотой колебаний пружинного маятника. Она не зависит от ускорения свободного падения.

2.Период вертикальных колебаний также не зависит от амплитуды колебаний маятника на пружине. Это отличает их от немалых колебаний математического маятника в однородном поле силы тяжести.

3.Амплитуда вертикальных колебаний зависит от интеграла движения, совпадающего с полной механической энергией колеблющегося груза, и нелинейно возрастает с её увеличением.

4.Проведённые эксперименты по исследованию независимости периода вертикальных колебаний груза от ускорения свободного падения указывают на удовлетворительное совпадение результатов с полученными расчётами.

5.В системе с медленно изменяющимися параметрами сохраняется приведённая энергия системы, играющая роль адиабатического инварианта. При медленном изменении потенциальной энергии равновесного состояния груза, вызванной уменьшением коэффициента жёсткости, энергия колебаний груза уменьшается. Это приводит к тому, что амплитуда колебаний и амплитудные значения колебательной скорости груза также уменьшаются.

Литература

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд-во «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. М. 1971 г. с. 576.
2. Атаманченко А.К. «Лабораторные работы по физике 10-11 кл.». Таганрог: Изд-во «Нюанс», 2007 год , 102 стр.