

УДК 524.0

## СПЕКТР МАСС ПОЛЫХ СВЕРХМАССИВНЫХ ЧЁРНЫХ ДЫР С ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

<sup>1</sup>В.Г. Сапогин, <sup>2</sup>К.В.Сапогин

<sup>1</sup>Российская Академия Естествознания, [sapogin@mail.ru](mailto:sapogin@mail.ru)

<sup>2</sup>Department of Astronomy, University of Minnesota, 116 Church Street SE,  
Minneapolis, MN 55455, USA, [sapogin@msi.umn.edu](mailto:sapogin@msi.umn.edu)

При интегрировании *E*-уравнения Эмдена для плотности газового шара возникает математическая проблема выбора граничных условий. Полную систему уравнений, решаемую относительно гравитационного потенциала, удаётся свести к трёхмерному уравнению такого же вида. Фундаментальный закон сохранения полного давления, существующий в системе с плоской симметрией, формирует полевые граничные условия. Они заключаются в наличии эквипотенциальной поверхности, в которой давление самосогласованного поля обращается в нуль, а потенциал минимален. В сферической симметрии найдены два класса аналитических решений, описывающих распределения физических параметров в системах с потенциальной ямой и потенциальной щелью. Вычисления указывают на возможность существования полых скоплений высокотемпературных нейтронов, спектр масс которых для температур от  $10^{11}$  до  $10^{12}$  К попадает в диапазон масс объектов, обнаруженных в центрах галактик и названных «сверхмассивными чёрными дырами».

*Ключевые слова:* газовый шар, полевые граничные условия, гравитационный потенциал, закон сохранения полного давления, эквипотенциальная поверхность, сферическая симметрия, аналитические решения, потенциальная яма, потенциальная щель, полые скопления высокотемпературных нейтронов, центр галактики, сверхмассивные чёрные дыры, спектр масс.

## СПЕКТР МАСС ПОЛЫХ СВЕРХМАССИВНЫХ ЧЁРНЫХ ДЫР С ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

<sup>1</sup>В.Г. Сапогин, <sup>2</sup>К.В.Сапогин

<sup>1</sup>Российская Академия Естествознания, [sapogin@mail.ru](mailto:sapogin@mail.ru)

<sup>2</sup>Department of Astronomy, University of Minnesota, 116 Church Street SE,  
Minneapolis, MN 55455, USA, [sapogin@msi.umn.edu](mailto:sapogin@msi.umn.edu)

При интегрировании *E*-уравнения Эмдена для плотности газового шара возникает математическая проблема выбора граничных условий. Полную систему уравнений, решаемую относительно гравитационного потенциала, удаётся свести к трёхмерному уравнению такого же вида. Фундаментальный закон сохранения полного давления, существующий в системе с плоской симметрией, формирует полевые граничные условия. Они заключаются в наличии эквипотенциальной поверхности, в которой давление самосогласованного поля обращается в нуль, а потенциал минимален. В сферической симметрии найдены два класса аналитических решений, описывающих распределения физических параметров в системах с потенциальной ямой и потенциальной щелью. Вычисления указывают на возможность существования полых скоплений высокотемпературных нейтронов, спектр масс которых для температур от  $10^{11}$  до  $10^{12}$  К попадает в диапазон масс объектов, обнаруженных в центрах галактик и названных «сверхмассивными чёрными дырами».

*Ключевые слова:* газовый шар, полевые граничные условия, гравитационный потенциал, закон сохранения полного давления, эквипотенциальная поверхность, сферическая симметрия, аналитические решения, потенциальная яма, потенциальная щель, полые скопления высокотемпературных нейтронов, центр галактики, сверхмассивные чёрные дыры, спектр масс.

## 1. Введение

*E*-уравнение Эмдена, полученное в [1], относится к классу нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Вместе с уравнением Лэна-Эмдена оно играло важную роль на первом этапе решения задач о строении звезд, рассматриваемых как газовые образования, находящиеся в политропическом равновесии или в равновесии с однородной температурой [2]. Решая сферическую задачу распределения плотности вещества в системе с однородной температурой, Эмден не нашёл аналитического решения, которое давало бы максимум плотности в центре шара.

Независимо от исследований Эмдена, по-видимому, даже ничего не зная о них, Френкель в 1948 году вводит для систем с постоянной температурой аналогичный способ расчета полей гравитирующих частиц и называет макроскопические статические поля, создаваемые ими, самосогласованными [3]. Если Эмден записывал уравнения для плотности вещества звезды, то Френкель построил их для потенциала гравитационного поля, создаваемого коллективом скопления. Решая задачу распределения вещества в сферическом скоплении, он пришёл к неожиданному выводу, что найденное им точное решение приводит к результатам, лишённым физического смысла.

В заметке показано, что правильную физическую трактовку аналитических решений, существующих в сферической симметрии, можно получить только после детального анализа условий и причин равновесия вещества с самосогласованным полем в плоской симметрии.

## 2. Основные уравнения задачи

Обобщая работы Лэна, Эмдена [1,2] и, используя подход Френкеля [3], запишем трехмерные уравнения гравитационной газостатики, которые в современных обозначениях векторного анализа имеют вид

$$\rho \vec{g} + \vec{f} = 0; \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{g} = -4\pi\rho; \quad (2.2)$$

$$\vec{g} = -\operatorname{grad}(\varphi); \quad (2.3)$$

$$p = \rho kT / m; \quad (2.4)$$

$$\vec{f} = -\operatorname{grad}(p). \quad (2.5)$$

Здесь  $\rho$  – плотность массы в элементарном объеме,  $\bar{g}$  – напряженность макроскопического коллективного поля гравитации,  $p$  – газокINETическое давление внутри системы,  $T$  – абсолютная температура системы,  $\varphi$  – потенциал самосогласованного поля,  $\gamma$  – гравитационная постоянная,  $m$  – масса гравитирующей частицы,  $k$  – постоянная Больцмана,  $f$  – сила Бернулли.

Первое уравнение системы представляет собой условие равновесия элементарного объема системы гравитирующих частиц. Второе – дифференциальная форма закона Ньютона, позволяющая рассчитывать дивергентные статические поля размазанных масс. Уравнение (2.3) дает связь потенциала с напряженностью гравитационного поля, а (2.4) – уравнение состояния с однородной температурой. Уравнение (2.5) является определением газостатической силы Бернулли. ***Заметим, что связь напряженности с потенциалом (2.3) не применялась Эмденом при проведении исследования.***

Покажем, что полная система уравнений (2.1-2.5) отображает коллективное взаимодействие между гравитирующими частицами, в котором проявляется обратное действие поля на частицы, порождающие это поле.

### 3. Уравнение самосогласованной газостатики неизлучающих гравитирующих частиц

Подставляя (2.5) и (2.3) в (2.1), получим

$$\rho \text{grad}(\varphi) + \text{grad}(p) = 0. \quad (3.1)$$

Учитывая уравнение состояния (2.4) и однородность температуры приведем (3.1) к виду

$$\text{grad}\left(\frac{m\varphi}{kT} + \ln \rho\right) = 0. \quad (3.2)$$

Из (3.2) видно, что любое равновесие гравитирующих частиц с однородной температурой характеризуется скалярным интегралом

$$\frac{m\varphi}{kT} + \ln \rho = \frac{m\varphi_0}{kT} + \ln \rho_0 = \text{const}, \quad (3.3)$$

где  $\rho_0$  и  $\varphi_0$  – постоянные.

Из (3.3) следует показательная функция распределения Больцмана

$$\rho = \rho_0 \exp[-m(\varphi - \varphi_0)/kT]. \quad (3.4)$$

Она указывает на обратное действие поля на плотность распределения частиц.

Подставляя (3.4) в (2.2), выразим всё через  $\varphi$  и свернем систему уравнений (2.1) - (2.5) в одно уравнение (проведем согласование)

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho_0 \exp[-m(\varphi - \varphi_0)/kT]. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) представляет собой трёхмерный полевой аналог уравнения, имеющего вид  $E$ -уравнения Эмдена, описывающего распределение макроскопического потенциала в динамических системах частиц с однородной температурой, которые находятся в статическом равновесии с самосогласованным полем. Положительность правой части указывает на то, что система состоит из частиц с ньютоновским законом взаимодействия. Уравнение (3.5) приводится Френкелем в [3].

#### 4. Первый интеграл $E$ -уравнения Эмдена в плоской симметрии

Уравнение (3.5) для плоской симметрии имеет вид

$$\varphi'' = 4\pi\gamma\rho_0 \exp[-m(\varphi - \varphi_0)/kT], \quad (4.1)$$

где штрихи означают дифференцирование по координате  $x$ .

Уравнение (4.1) допускает понижение порядка. Оно имеет первый интеграл, соответствующий полному давлению системы [4]:

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi\gamma} + p(\varphi) = P = H(\varphi', \varphi) = \text{const}, \quad (4.2)$$

где  $p(\varphi) = p_0 \exp[-m(\varphi - \varphi_0)/kT]$  – давление гравитирующих частиц системы в плоскости с потенциалом  $\varphi$ , а  $p_0 = n_0 kT$  – газокINETическое давление гравитирующих частиц системы в плоскости с потенциалом  $\varphi = \varphi_0$ .

**Полное давление  $P$  системы в (4.2) состоит из двух слагаемых: первое слагаемое представляет собой давление самосогласованного поля системы, а второе – давление частиц.** Первый интеграл (4.2) совпадает с функцией Гамильтона  $H(\varphi', \varphi)$ , в которой канонически сопряженные величины: обобщенный импульс  $\varphi' / 4\pi\gamma$  и обобщенная координата  $\varphi$ . Роль обобщенного времени играет координата  $x$ .

Равенство (4.2) выполняется при отсутствии любых внешних статических полей гравитации, рассматриваемых по отношению к самосогласованному полю системы. Класс чётных функций пространственного распределения потенциала самосогласованного поля гравитации и их производных устанавливается всегда таким,

чтобы в любой плоскости, взятой внутри системы, оставалась неизменной сумма давлений поля и частиц системы.

Закон сохранения (4.2) означает также, что в любой плоскости рассматриваемой системы градиенты давлений самосогласованного поля и частиц системы равны между собой, но имеют различные направления. Объёмная плотность силы Бернулли (далее сила Бернулли) (2.5) противоположна градиенту давления частиц. В исследуемой задаче она получает новое математическое определение: **сила Бернулли совпадает по величине и направлению с градиентом давления самосогласованного поля, компенсирует силы тяготения и обеспечивает класс равновесий частиц с полем, которое они сами и создают.**

Подставляя в (2.1) плотность массы из уравнения (2.2), получим связь силы Бернулли с градиентом давления самосогласованного поля  $\vec{G}$

$$\vec{f} = -\rho \vec{g} = \frac{\vec{g}}{4\pi\gamma} \operatorname{div} \vec{g} = \vec{G}, \quad (4.3)$$

которое вместе с (2.5) даёт физическое условие удержания вещества самосогласованным полем

$$\vec{G} + \operatorname{grad}(p) = 0. \quad (4.4)$$

Если поле исследуемой системы однокомпонентное и плоское  $\vec{g} = [g_x(x), 0, 0]$ , то равенство (4.4) принимает вид

$$G_x + \frac{dp}{dx} = \frac{g_x}{4\pi G} \frac{dg_x}{dx} + \frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{g_x^2}{8\pi G} + p \right) = 0$$

и приводит к интегралу полного давления (4.2).

Равенство (4.4) указывает на неизвестное ранее свойство самосогласованного поля гравитации удерживать неоднородную систему частиц в ограниченной области пространства статическими силами полевого происхождения. Из него следует, что **система коллективного взаимодействия частиц находится в статическом равновесии с самосогласованным полем гравитации в том случае, если равенство нулю суммы градиентов давлений поля и частиц выполнено в любом элементарном объеме системы.**

## 5. Распределение физических параметров плоской системы

Интегрируя (4.2) при условии, что на значение  $\varphi_0$  приходится экстремум функции потенциала  $\varphi' = 0$  (реализуется, когда  $P = p_0$ ), и, помещая этот экстремум в начало координат  $x=0$ , получим закон распределения потенциала по длине системы

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_* \ln \left[ ch \left( \frac{x}{l} \right) \right], \quad (5.1)$$

где

$$l = \sqrt{kT / (2\pi\gamma m \rho_0)} = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{kT}{2\pi\gamma n_0}} \quad (5.2)$$

– пространственный масштаб системы, а  $\varphi_* = 2kT / m$  – масштаб потенциала.

*Как видно из (5.1), распределение потенциала по длине системы зависит от двух параметров: температуры  $T$  и потенциала  $\varphi_0$ . Они имеют вид потенциальных ям с бесконечными стенками, которые имеют минимум со значением  $\varphi_0$  в плоскости  $x=0$ .*

Проекция напряженности самосогласованного поля гравитации распределена по длине системы по закону:

$$g_x = -\varphi' = -g_0 th(x/l), \quad (5.3)$$

где  $g_0 = \varphi_* / l = 2kT / ml$  – масштаб напряжённости. Как видно из (5.3), напряжённость поля системы обращается в нуль в плоскости  $x=0$ , а при  $x/l \rightarrow \pm\infty$   $g_x \rightarrow \mp g_0$ . Система не имеет резких границ, поскольку плотность, концентрация и давление частиц имеют солитонное распределение с максимумом на дне ямы

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \frac{p}{p_0} = ch^{-2}(x/l). \quad (5.4)$$

Как видно из (5.3) и (5.4), поле выдавливает частицы в минимум потенциальной энергии системы. Его напряжённость остаётся однородной в тех местах, где вещество отсутствует.

Распределение давления поля по длине системы следует из (5.3):

$$D = (\varphi')^2 / 8\pi\gamma = D_0 th^2(x/l), \quad (5.5)$$

где  $D_0 = p_0 = g_0^2 / (8\pi\gamma)$  – масштаб давления.

Из соотношений (5.5) и (5.4) видно, что сумма давлений частиц и поля системы в любой плоскости пространства взаимодействия остается постоянной и равной полному давлению системы  $P=p_0$ , которое является интегралом системы. Результат дифференцирования (5.5) показывает, что градиент давления поля в любой плоскости системы противоположен градиенту давления частиц, следующему из (5.4), и равен ему по модулю:

$$dD/dx = -dp/dx = f_0 th(x/l)/ch^2(x/l), \quad (5.6)$$

где  $f_0 = 2p_0/l$  – масштаб градиента давления.

Направления градиентов позволяют выяснить направления объемных сил, удерживающих систему в равновесии. Силы тяготения, сжимающие систему частиц, направлены к плоскости  $x=0$  и совпадают с направлением вектора  $\vec{g}$ . Силы Бернулли, расширяющие систему, создаются градиентом давления самосогласованного поля (4.3), который компенсирует действие градиента давления частиц.

Математические равенства (2.5) и (4.3) указывают на двоякую роль самосогласованного поля, формирующего конфигурацию ловушки. С одной стороны, поле создает градиент давления в веществе, сонаправленный с вектором его напряженности (2.3). А с другой стороны, это же поле создает статическую силу (4.3), компенсирующую возникающий градиент.

***Полевые граничные условия, адекватные поставленной задаче, можно сформулировать так: в системе должна существовать поверхность, на которой давление самосогласованного поля обращается в нуль, а потенциал – минимален.***

В плоском случае эта поверхность лежит в плоскости  $x=0$ . В сферическом случае, как показано в следующем разделе, сформулированные граничные условия можно осуществить только на конечном расстоянии от центра системы.

## 6. Сферические полевые ловушки первого рода

Запишем уравнение (3.5) в сферической симметрии, учитывая только радиальную зависимость потенциала:

$$\varphi'' + 2\varphi'/r = 4\pi mn_0 \exp[-m(\varphi - \varphi_0)/kT], \quad (6.1)$$

где  $n_0 = \rho_0/m$  – значение концентрации частиц системы на сфере  $\varphi = \varphi_0$ , а штрихи означают дифференцирование по  $r$ .

Переходя в (6.1) к функции  $y(x) = -2(\varphi - \varphi_0)/\varphi_*$  относительно переменной  $x=r/R$ , где  $R$  – радиус сферы, на которой задаются полевые граничные условия, приведем (6.1) к виду

$$xy'' + 2y' + \alpha^2 x \exp(2y) = 0, \quad (6.2)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{2\pi m^2 n_0 R^2}{kT} = \frac{T_*}{T} = \frac{R^2}{l^2} \quad (6.3)$$

– параметр состояния системы, а

$$T_* = \frac{2\pi m^2 n_0 R^2}{k} \quad (6.4)$$

– её масштаб температуры (штрихи означают дифференцирование по  $x$ ). Параметр состояния системы  $\alpha$  допускает двойную интерпретацию. С одной стороны, он позволяет сравнивать температуру системы с её масштабом, а, с другой стороны, сравнивать радиус сферы, на которой задаются граничные условия с пространственным масштабом системы  $l$  (5.2).

Уравнение (6.2) принадлежит к классу уравнений типа  $E$  – уравнения Эмдена [1], описывающего неоднородные распределения вещества в газовом шаре с однородной температурой, и является его полевым аналогом. Как известно, оно не имеет точных решений в элементарных функциях для граничных условий, представляющих физический интерес.

### 6.1. Приближённые решения задачи

Будем искать приближённые решения (6.2) для граничных условий  $x=1$ ,  $y(1)=0$ ,  $y'(1)=0$ , которые предполагают существование в кластере сферы нулевого давления поля. Эти решения описывают распределение физических параметров системы в полевых ловушках первого рода.

Переходя к новой функции

$$y(x) = \eta(\xi) - \xi, \quad y' = \frac{d\xi}{dx} \left( \frac{d\eta}{d\xi} - 1 \right), \quad \text{где } \xi = \ln x,$$

получим уравнение



$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{d\eta}{d\xi} = 1 - \alpha^2 \exp(2\eta) \quad (6.5)$$

с граничными условиями  $\xi=0$ ,  $\eta(0)=0$ ,  $\frac{d\eta}{d\xi}(0)=1$ , которое допускает понижение

порядка введением новой функции

$$p(\eta) = \frac{d\eta}{d\xi}; \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = p \frac{dp}{d\eta}.$$

Уравнение первого порядка

$$p \frac{dp}{d\eta} + p = 1 - \alpha^2 \exp(2\eta) \quad (6.6)$$

имеет граничные условия  $\eta=0$ ,  $p(0)=1$ . Его не удаётся проинтегрировать в элементарных функциях. В [5] проводилось численное решение уравнения (6.6) для семейства интегральных кривых, проходящих через точку граничного условия. Решение указывает на существование особой точки Эмдена при  $\eta=\eta_s>0$ , в которой  $p \rightarrow 0$ , а  $dp/d\eta \rightarrow -\infty$ .

На рис. 1 приведены четыре интегральные кривые в координатах  $p = p(z)$ , где  $z = \eta$ . Кривая 1 построена для  $\alpha=0.5$ ; кривая 2 – для  $\alpha=1.0$ ; кривая 3 – для  $\alpha=1.5$ ; кривая 4 – для  $\alpha=2.0$ .

Как видно из рис. 1, положение особой точки Эмдена  $\eta=\eta_s$  зависит от величины  $\alpha^2$ . Для малых  $\alpha^2$  она расположена далеко от начала координат  $z=\eta=0$ . Для значений  $\alpha^2 \gg 1$  особая точка приближается к началу координат справа. Это позволяет найти приближенное решение (6.6) при выполнении условия  $\alpha^2 \gg 1$ .

Разрешим (6.6) относительно производной:

$$\frac{dp}{d\eta} = \frac{1 - \alpha^2 \exp(2\eta)}{p} - 1. \quad (6.7)$$

При выполнении условия

$$\alpha^2 \exp(2\eta) / p \gg 1 / p - 1 \quad (6.8)$$

уравнение (6.7) может быть укорочено, приведено к виду

$$\frac{dp}{d\eta} = - \frac{\alpha^2 \exp(2\eta)}{p} \quad (6.9)$$

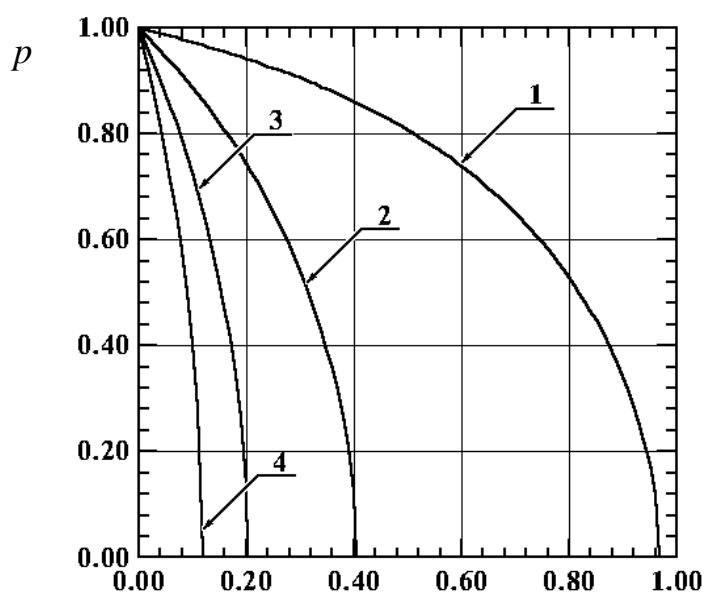
и проинтегрировано в элементарных функциях

$$p = \sqrt{1 - \alpha^2 [\exp(2\eta) - 1]}. \quad (6.10)$$

Определим значения параметра  $\alpha$ , для которых выполняется приближение (6.8). Для этого представим (6.8) в виде:  $\alpha^2 \gg (1-p)\exp(-2\eta) = f(\eta)$ . Наибольшее значение функции  $f(\eta)$ , стоящей в правой части неравенства, приходится на значение особой точки Эмдена  $\eta = \eta_s$ . Тогда приближение (6.8) выполнено при условии

$$\frac{1}{\alpha^2 + 1} \ll 1, \quad (6.11)$$

что удовлетворительно даже для  $\alpha = 3$  и улучшается с ростом  $\alpha$ .



z.

Рис. 1. Интегральные кривые  $p=p(z)$

Возвращаясь в (6.10) к функции  $\varphi(r)$ , получим семейство кривых, описывающих распределение потенциала по длине системы в случае, когда температура системы меньше масштаба (состояния холодного кластера):

$$\frac{\varphi}{\varphi_*} = \frac{\varphi_0}{\varphi_*} + \ln \left[ \frac{\alpha r}{R\sqrt{1+\alpha^2}} \operatorname{ch}(A) \right], \quad (6.12)$$

где

$$A = \operatorname{Arch} \left( \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \right) - \sqrt{1+\alpha^2} \ln \left( \frac{r}{R} \right),$$

$\alpha$  и  $\varphi_0$  — параметры распределения.

*Как видно из (6.12), радиальные распределения потенциала зависят от двух параметров. Они имеют вид потенциальных ям с бесконечными стенками, которые имеют минимум  $\varphi = \varphi_0$  на сфере нулевого давления поля.*

Выражение (6.12) позволяет получить в аналитическом виде основные гравистатические и кинетические характеристики кластера для случая  $\alpha^2 \gg 1$ . Проекция  $r$ -й компоненты напряженности самосогласованного поля находится из (6.12) и имеет вид

$$\frac{g_r}{g_*} = \frac{RB}{r}, \quad (6.13)$$

где  $g_* = \frac{2kT}{mR}$  - новый масштаб напряженности;  $B = \sqrt{1 + \alpha^2} \operatorname{th}(A) - 1$ .

Распределение плотности, концентрации и давления частиц в кластере:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} = \frac{n}{n_0} = \left[ \frac{\alpha r}{R\sqrt{1 + \alpha^2}} \operatorname{ch}(A) \right]^{-2}. \quad (6.14)$$

Давление самосогласованного поля внутри кластера изменяется по закону:

$$D = \frac{g_r^2}{8\pi\gamma} = D_* \frac{R^2 B^2}{r^2}, \quad (6.15)$$

где  $D_* = p_0 / \alpha^2 = g_*^2 / (8\pi\gamma)$  - новый масштаб давления поля.

Проекция радиальной компоненты компенсирующей силы Бернулли имеет вид

$$f_r = -\frac{dp}{dr} = -\frac{f_* R^3 (1 + \alpha^2) B}{\alpha^2 r^3 \operatorname{ch}^2(A)}, \quad (6.16)$$

где  $f_* = 2p_0 / R$  - новый масштаб градиента давления.

Радиальная проекция градиента давления поля распределена по закону

$$G_r = \frac{g_r}{4\pi\gamma r^2} \left[ \frac{d}{dr} (r^2 g_r) \right] = \frac{4D}{r} + \frac{dD}{dr} = \frac{f_* R^3 B}{\alpha^2 r^3} \left( B - \frac{1 + \alpha^2}{\operatorname{ch}^2 A} \right). \quad (6.17)$$

Условие удержания вещества самосогласованным полем (4.4) принимает вид

$$G_r + \frac{dp}{dr} = \frac{f_* R^3 B^2}{\alpha^2 r^3} = 0 \quad (6.18)$$

Как видно из (6.12) – (6.16), сфера нулевого давления поля делит все пространство взаимодействия кластера на две области – внутреннюю  $0 < r/R < 1$  и внешнюю  $r/R \geq 1$ . Во внутренней области напряженность самосогласованного поля сонаправлена с радиус-вектором. В ней с ростом  $r$  потенциал убывает, а давление и

концентрация частиц растут. Во внешней области направление вектора напряженности поля противоположно направлению радиус-вектора. В ней с ростом  $r$  потенциал возрастает, а давление и концентрация частиц убывают. Система не имеет резких границ. Поскольку поле выдавливает вещество в минимум потенциальной энергии, внутри холодного кластера образуется полость, в которой вещество практически отсутствует.

Для анализа поведения системы вблизи дна потенциальной ямы введём ось  $\xi$ , направленную по радиус-вектору, с началом в точке  $r=R$ :  $r=R+\xi$ . Разлагая (6.12) в ряд Тейлора по малому параметру  $\xi/R \ll 1$  с точностью до квадратичных членов, получим зависимости физических параметров, похожие на плоскую симметрию:

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &\approx \varphi_0 + \varphi_* \alpha^2 \xi^2 / (2R^2); & g_\xi &\approx -g_* \alpha^2 \xi / R; \\ D(\xi) &\approx D_* \alpha^4 \xi^2 / R^2; & p(\xi) &\approx p_0 (1 - \alpha^2 \xi^2 / R^2); \\ P = D(\xi) + p(\xi) &= p_0 = \text{const}; & \frac{d}{d\xi} [D(\xi) + p(\xi)] &= 0.\end{aligned}$$

Условие удержания в виде (6.18) хорошо выполняется в тонких квазиплоских слоях, находящихся у дна потенциальной ямы ( $B^2 \approx 0$ ). В особой точке системы при  $r \rightarrow \infty$  условие удержания также выполняется поскольку (6.18) стремится к нулю по закону  $\sim r^{-3}$ :

$$G_r + \frac{dp}{dr} \approx \frac{f_* R^3}{\alpha^2 r^3} \left(1 + \sqrt{1 + \alpha^2}\right)^2.$$

В другой особой точке системы условие удержания выполняется плохо, поскольку при  $r \rightarrow 0_+$

$$G_r + \frac{dp}{dr} \approx \frac{f_* R^3}{\alpha^2 r^3} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} - 1\right)^2 \rightarrow \infty.$$

Это указывает на ограниченную область применимости приближённого решения, дающего правильные качественные результаты. В работе [6] показано, что полученное приближённое решение (6.12) оказывается точным для любых  $\alpha$  в цилиндрической симметрии.

Оценка числа частиц кластера, удерживаемых самосогласованным полем, получается после интегрирования выражения

$$N_I = \int_0^\infty n(r) 4\pi r^2 dr = \frac{3n_0 V (1 + \alpha^2)}{\alpha^2 R} \int_0^\infty dr / \text{ch}^2(A), \quad (6.19)$$

в которое подставлено (6.14). В (6.19)  $V = 4\pi R^3 / 3$  – объём сферы нулевого давления поля, а значение  $A$  определено в (6.12). Заменой переменных в (6.19) интегрирование, с учётом существования интегралов [8]

$$\beta(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1} dt}{1+t},$$

$$I(\mu) = \int_0^\infty \frac{\exp(\pm \mu t) dt}{ch^2 t} = \mp \mu \beta(\mp \mu / 2) - 1,$$

$$\beta(z) = \frac{1}{2} \left[ \psi\left(\frac{z+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{z}{2}\right) \right],$$

может быть сведено к вычислению значений  $\Psi$ - функции, где  $\Psi(z) = \Gamma'(z) / \Gamma(z)$  – производная логарифма гамма-функции.

Чтобы не нарушалась сходимость приводимых интегралов, должно выполняться условие  $-2 < \mu < 2$ , где  $\mu = (1 + \alpha^2)^{-1/2} > 0$ . Это условие выполняется для всей области изменения параметра  $3 \leq \alpha < \infty$ . Тогда число частиц (6.19) можно оценить из следующего соотношения

$$N_I = \frac{N_*}{2\alpha^2} \exp(\mu d) [\psi(1/2 + \mu/4) - \psi(\mu/4) - \psi(1/2 - \mu/4) + \psi(1 - \mu/4)], \quad (6.20)$$

где  $N_* = 3n_0 V$  – масштаб числа частиц,  $d = \text{Arch}\left(\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\right)$ .

Применяя рекуррентную формулу  $\psi(z+1) = \psi(z) + 1/z$ , преобразуем (6.20) к виду

$$N_I = \frac{N_*}{2\alpha^2} \exp(\mu d) [\psi(3/2 + \mu/4) + \psi(2 - \mu/4) - \psi(1 + \mu/4) - \psi(3/2 - \mu/4) + \frac{8\mu}{4 - \mu^2} + \frac{8(2 - \mu)}{\mu(4 - \mu)}]. \quad (6.21)$$

В (6.21) можно использовать табличные значения  $\Psi$ - функции, заданные в интервале от 1 до 2 (см. [9]). Из (6.21) видно, что при  $\alpha \rightarrow \infty$  приведённое число частиц, удерживаемых полем, уменьшается по закону  $\frac{N_I}{N_*} \approx \frac{2}{\alpha}$ .

Из (6.21) следует аддитивная масса кластера

$$M_I = mN_I = M_0 f(\alpha), \quad (6.22)$$

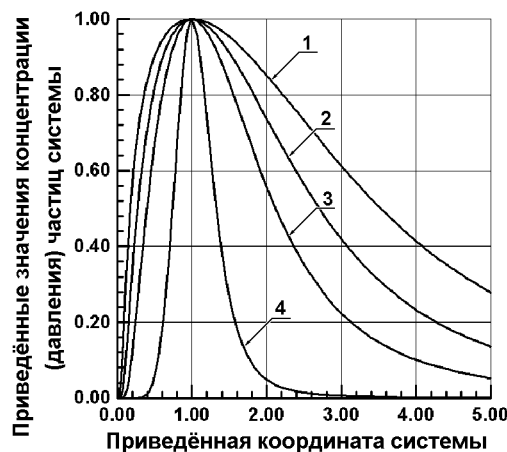
где  $M_0 = mN_*$  – масштаб массы полевых ловушек первого рода.

## 6.2. Результаты численного моделирования

Численное моделирование уравнения (6.1) (подробности в [10]) проводилось с шагом  $10^{-4}$  для полевых граничных условий  $\varphi(R) = \varphi_0 = 0$ ,  $\varphi'(R) = 0$ . Для этого были выбраны специальные формулы метода Рунге-Кутты четвёртого порядка точности [11]. При моделировании условие равенства нулю суммы градиента давлений поля и частиц (4.4) выполнялось автоматически. Это обстоятельство связано с тем, что при радиальной зависимости это условие, выраженное через производную потенциала и потенциал, после сокращения на производную от потенциала приводится к уравнению (6.1).

На рис. 2 представлены радиальные распределения приведённой концентрации частиц  $n/n_0$  шарового кластера для различных параметров состояния. Кривая 1 рассчитана для значения  $\alpha=0.5$ ; кривая 2 – для  $\alpha=0.7$ ; кривая 3 – для  $\alpha=1.0$ ; кривая 4 – для  $\alpha=3.0$ .

Из рис. 2 видно, как изменяется заполнение кластера частицами при изменении его температуры в окрестности значения масштаба температуры  $T \sim T_*$ . Кривая 4 отображает существование полости, а кривые 1, 2, 3 указывают на тот факт, что при увеличении температуры всё пространство взаимодействия кластера, в основном, заполнено частицами. Для всех кривых функция распределения концентрации частиц и её производная в центре гравитационного кластера обращаются в нуль.



*Рис. 2 Радиальные распределения приведённой концентрации частиц в полевой ловушке первого рода*

Подробности численного моделирования радиальных распределений важнейших физических параметров полых кластеров можно найти в [10].

В сравнительной таблице 1 представлены приведённые значения  $r_l/R$  (полости) и  $r_2/R$  (внешней границы) кластера, которые определялись по приближённым решениям и численному моделированию из условия  $n=0,01n_0$ . Значения функции  $\frac{N_l}{N_*} = f(\alpha)$  для тех же значений параметра состояния  $\alpha$  представлены в таблице 1. Нижние три строки содержат результаты численного моделирования с точностью до  $1 \cdot 10^{-3}$ , а три строки над ними – результаты, даваемые приближённым решением.

Таблица 1

$\alpha$	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_l/R$	0,284	0,411	0,503	0,572	0,624	0,665	0,699	0,726
$r_2/R$	2,244	1,891	1,692	1,564	1,476	1,412	1,362	1,323
$N_l/N_*$	0,812	0,561	0,431	0,351	0,297	0,257	0,227	0,204
$r_l/R$	0,399	0,494	0,564	0,618	0,660	0,694	0,722	0,746
$r_2/R$	2,689	2,123	1,831	1,656	1,541	1,460	1,400	1,353
$N_l/N_*$	1,220	0,640	0,463	0,368	0,307	0,264	0,232	0,207

## 7. Сферические полевые ловушки второго рода

Точное решение (6.2), найденное Френкелем [3], имеет вид

$$y(x) = -\ln(\alpha x). \quad (7.1)$$

Переходя к потенциалу, получим однопараметрический закон распределения  $\varphi(r)$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_* \ln\left(\frac{r}{l}\right), \quad (7.2)$$

где  $l$  – пространственный масштаб (5.2), а  $\varphi_0$  – параметр распределения.

Как видно из (7.2), разность потенциалов и эквивалентная ей потенциальная энергия системы  $U = m(\varphi - \varphi_0)$  имеют два знака. Они отрицательны для вещества, находящегося в области  $r/l < 1$ , и положительны – в области  $r/l \geq 1$ . Распределение потенциала имеет две особые точки  $r=0$  и  $r=\infty$ . Значение потенциала  $\varphi = \varphi_0$  приходится на сферу радиусом  $r=l$ , а потенциальная энергия не имеет привычного минимума.

Из (7.2) следуют основные гравистатические и кинетические характеристики кластера второго рода. Проекция  $r$ -й компоненты напряженности поля имеет вид

$$\frac{g_r}{g_0} = -\frac{l}{r}, \quad (7.3)$$

где  $g_0 = \varphi_* / l$  – совпадает с масштабом напряжённости поля в плоском случае. Напряжённость самосогласованного поля ловушки всегда направлена к центру системы и имеет особенность вида  $\sim -r^{-1}$  в нуле.

Система в пространстве не ограничена. Плотность, концентрация и давление частиц имеют распределение с особенностью  $\sim r^{-2}$  в нуле

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \frac{p}{p_0} = \frac{l^2}{r^2}. \quad (7.4)$$

Как видно из (7.4), в ловушках второго рода поле выдавливает частицы в бесконечно глубокую щель, образованную потенциальной энергией системы в начале координат.

Вещество кластера исчезает только на бесконечно большом расстоянии от центра системы. Это указывает на принципиальное отличие состояний второго рода от состояний, исследованных ранее. *В полевых ловушках второго рода концентрация частиц – убывающая функция растущего радиуса.*

Давление поля имеет особенность  $\sim r^{-2}$  в нуле

$$\frac{D}{D_0} = \frac{l^2}{r^2}, \quad (7.5)$$

где  $D_0 = p_0 = g_0^2 / (8\pi\gamma)$  – совпадает с масштабом давления поля в плоском случае. Полное давление системы уже не является интегралом уравнения, поскольку оно изменяется по закону

$$P = D + p = 2p_0 l^2 / r^2 \neq const. \quad (7.6)$$

Градиент давления частиц всегда направлен по напряжённости самосогласованного поля системы и имеет особенность вида  $\sim -r^{-3}$  в нуле

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{f_0 l^3}{r^3}, \quad (7.7)$$

где  $f_0 = 2p_0 / l$  – совпадает с масштабом градиента давления в плоском случае.

Радиальная компонента градиента давления самосогласованного поля (компенсирующая сила Бернулли) направлена против напряжённости и имеет особенность вида  $\sim r^{-3}$  в нуле



$$G_r = \frac{4D}{r} + \frac{dD}{dr} = \frac{f_0 l^3}{r^3}. \quad (7.8)$$

Из (7.7) и (7.8) видно, что условие удержания произвольного элементарного объёма в полевой ловушке второго рода

$$G_r + \frac{dp}{dr} = 0 \quad (7.9)$$

выполнено во всех точках, кроме особой, при  $r \rightarrow 0_+$ . В связи с этим, систему, занимающую бесконечный объём, можно искусственно ограничить, выбрав радиус системы  $r_1$ , внутри которого вещество отсутствует (радиус полости) и внешний радиус системы, за которым вещество также отсутствует,  $-r_2$ .

Из (7.4) рассчитаем полное число частиц, удерживаемое системой

$$N_2 = \int_{r_1}^{r_2} n(r) 4\pi r^2 dr = \frac{2kTd}{m^2 \gamma}, \quad (7.10)$$

где  $d = r_2 - r_1$  – толщина слоя, занятого частицами. Из (7.10) видно, что чем меньше масса гравитирующей частицы, тем больше число частиц, которое удерживается полем полого кластера при прочих равных условиях. Аддитивная масса кластера получается из (7.10)

$$M_2 = mN_2 = \frac{2kTd}{m\gamma}. \quad (7.11)$$

Она растёт с ростом температуры, толщины слоя и оказывается тем больше, чем меньше масса гравитирующей частицы. Оценки, выполненные для состояний первого рода, дают похожие количественные результаты.

## 8. Соотношения подобия в полевых ловушках

Исследуем свойства подобия полевых ловушек, состоящих из гравитирующих частиц с одинаковой массой. Представим пространственный масштаб длины (5.2) в виде

$$l = C(T / n_0)^{1/2}, \quad (8.1)$$

где

$$C = m^{-1}(k / 2\pi\gamma)^{1/2} = \text{const}_1. \quad (8.2)$$

Введём масштаб массы полевой ловушки

$$M_* = \frac{2kTl}{m\gamma} = F \frac{T^{3/2}}{n_0^{1/2}}, \quad (8.3)$$

где

$$F = m^{-2} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left( \frac{k}{\gamma} \right)^{3/2} = \text{const}_2. \quad (8.4)$$

Исключая из (8.1), (8.3) концентрацию, придём к линейной связи между масштабом массы и пространственным масштабом при заданном значении температуры  $T$ :

$$l = E \frac{M_*}{T}, \quad (8.5)$$

где  $E = C/F = m\gamma / (2k) = \text{const}_3$ .

Из (8.5) следуют законы подобия:

- а) для систем, имеющих одинаковую температуру, отношение масштаба массы к масштабу длины одинаково, а стало быть, чем больше масштаб массы кластера, тем больше его масштаб длины. Обратное также верно.
- б) если масштабы масс объектов одинаковы, то более горячий объект имеет меньший пространственный масштаб. Обратное также верно
- с) если объекты имеют одинаковый пространственный масштаб, то у них одинаково отношение масштаба массы к температуре.

Исключая из (8.1), (8.3) температуру объекта, получим, что масштаб массы объекта всегда пропорционален масштабу его числа частиц  $n_0 l^3$ :

$$M_* = \frac{F}{C^3} n_0 l^3. \quad (8.6)$$

Привлечём значение масштаба массы  $M_0$  в полевых ловушках первого рода из (6.22)

$$M_0 = mN_* = 3n_0 mV = 4\pi R^3 m n_0. \quad (8.7)$$

Найдём отношение этого масштаба к масштабу массы

$$\frac{M_0}{M_*} = \frac{2\pi R^3 m^2 n_0 \gamma}{kTl} = \alpha^3 \quad (8.8)$$

и запишем массу ловушки с учётом (8.8)

$$\frac{M_l}{M_*} = \alpha^3 \frac{N_l}{N_*}. \quad (8.9)$$

Из (8.9) видно, что полевые ловушки с потенциальной ямой обладают большей ёмкостью. Их масса может превышать масштаб массы при прочих равных условиях на

один-два порядка при изменении параметра состояния в диапазоне  $3 \leq \alpha \leq 10$  (см. табл. 1).

Выделим три типа состояний, в которых может пребывать полевая ловушка второго рода. Первое состояние – состояние с отрицательной потенциальной энергией  $U = m(\varphi - \varphi_0) < 0$ . В этом состоянии её внешний радиус  $r_2 < l$ . Радиус внутренней полости  $r_1$  можно найти из наибольших средних значений концентрации частиц, известных в природе и достигаемых в ядре  $n_l \approx n_n \approx 10^{38} \text{ см}^{-3}$ . Тогда массу такого плотно упакованного объекта можно представить в виде

$$M_2 = M_*(\chi - \zeta), \quad (8.10)$$

где  $\zeta = r_1 / l = \sqrt{n_0 / n_n}$  – приведённый радиус полости, а  $\chi = r_2 / l < 1$  – приведённый внешний радиус. Из (8.10) видно, что в таких состояниях  $M_2 < M_*$ .

Состояния с положительной потенциальной энергией, имеющие большую полость, реализуются при условии  $\zeta \geq 1$ . В таких состояниях при  $\chi > 1 + \zeta$  масса  $M_2 \geq M_*$ , а при  $0 < \chi < 1 + \zeta$  масса  $M_2 \leq M_*$ .

В промежуточных состояниях при выполнении неравенств  $0 < \zeta < 1$ , а  $\chi > 1$  соотношение масс может быть любым. При наличии плотной упаковки  $\zeta \rightarrow 0$  в промежуточных состояниях масса объекта будет большой при выполнении условия  $\chi \gg 1$ :

$$M_2 = M_* \chi. \quad (8.11)$$

Когда толщина слоя, занятого частицами, равна пространственному масштабу  $d=l$ , то  $\chi = 1 + \zeta$ , а  $M_2 = M_*$ .

## 9. Параметры полевых ловушек, состоящих из нейтронов с высокой температурой

Для полевой ловушки, удерживающей нейтроны, значения постоянных коэффициентов:  $C=1,0837 \cdot 10^{19} (\text{см} \cdot \text{K})^{-1/2}$ ;  $F=2,6785 \cdot 10^{34} \text{ г} (\text{см} \cdot \text{K})^{-3/2}$ ;  $E=4,0459 \cdot 10^{-16} \text{ см} \cdot \text{K}/\text{г}$ . Из (8.5) следует, что для нейтронов, находящихся при температуре  $T=10^{12} \text{ K}$  и изменении масштаба массы  $M_*$  от  $2 \cdot 10^{39} \text{ г}$  до  $2 \cdot 10^{42} \text{ г}$ , пространственный масштаб  $l$  изменяется в пределах от  $8 \cdot 10^{11} \text{ см}$  до  $8 \cdot 10^{14} \text{ см}$ . Неравенства ограничивают интервал возможных изменений величины  $n_0$  в диапазоне от  $1,8 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$  до  $1,8 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$ . Они далеки от

средней ядерной плотности вещества  $n_n$ . Оценки, полученные из соотношений подобия, позволяют провести корректные вычисления.

В таблице 2 приведены зависимости масштабов полевых ловушек от  $n_0$  в предположении, что они состоят из нейтронов, нагретых до температуры  $T=10^{11}$  K (на порядок больше, чем в нейтронных звёздах [12]), а величина  $n_0$  может изменяться в диапазоне от  $2,0 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$  до  $2,0 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$ .

Таблица 2

$n_0 (\text{см}^{-3})$	$M_*(z)$	$l (\text{см})$
$0,2 \cdot 10^{21}$	$0,599 \cdot 10^{41}$	$0,242 \cdot 10^{15}$
$0,2 \cdot 10^{22}$	$0,189 \cdot 10^{41}$	$0,766 \cdot 10^{14}$
$0,2 \cdot 10^{23}$	$0,599 \cdot 10^{40}$	$0,242 \cdot 10^{14}$
$0,2 \cdot 10^{24}$	$0,189 \cdot 10^{40}$	$0,766 \cdot 10^{13}$
$0,2 \cdot 10^{25}$	$0,599 \cdot 10^{39}$	$0,242 \cdot 10^{13}$
$0,2 \cdot 10^{26}$	$0,189 \cdot 10^{39}$	$0,766 \cdot 10^{12}$
$0,2 \cdot 10^{27}$	$0,599 \cdot 10^{38}$	$0,242 \cdot 10^{12}$

В таблице 3 размещены результаты численного моделирования параметров сверхмассивных скоплений для ловушек первого и второго родов, находящихся при тех же условиях. Был принят следующий алгоритм моделирования:

1. По заданному  $n_0$  и  $T$  рассчитываем пространственный масштаб (5.2).
2. Для заданного  $\alpha$  из формулы (6.3) определяем радиус  $R$  - сферы нулевого давления поля.
3. Для полевых ловушек первого рода обрываем распределение концентрации в точках, где  $n = 0,01n_0$  и находим приведённые значения полости  $r_1/R$  и внешней границы  $r_2/R$ , зависящие от параметра состояния  $\alpha$  (вторая и третья строки снизу в табл. 1).
4. Вычисляем  $N_* = 4\pi R^3 n_0$ .
5. Из табл. 1 (нижняя строка) находим значения приведённого числа частиц  $N_1(3)/N_* = 1,220$  при  $\alpha=3$  и  $N_1(10)/N_* = 0,207$  при  $\alpha=10$ .
6. Рассчитываем аддитивную массу полевой ловушки первого рода из (6.22).
7. Для полевой ловушки второго рода считаем, что радиус её полости совпадает с  $r_1$ , а её внешний радиус – с  $r_2$ .
8. Число частиц и массу полевой ловушки второго рода находим из соотношений (7.10), (7.11).

В первую колонку табл. 3 заносим значение  $n_0$ , во вторую – радиус полости, в третью – внешний радиус скопления, в четвёртую – число частиц в ловушке первого рода, в пятую – число частиц в ловушке второго рода, в шестую – массу скопления в ловушке первого рода, отнесённую к массе Солнца, а в седьмую – массу скопления в ловушке второго рода, отнесённую к массе Солнца.

Таблица 3

Параметр состояния $\alpha=3$						
$n_0, \text{см}^{-3}$	$r_1, \text{см}$	$r_2, \text{см}$	$N_1$	$N_2$	$M_1/M_s$	$M_2/M_s$
$0,2 \cdot 10^{21}$	$0,290 \cdot 10^{15}$	$0,195 \cdot 10^{16}$	$0,118 \cdot 10^{67}$	$0,246 \cdot 10^{66}$	$0,991 \cdot 10^9$	$0,207 \cdot 10^9$
$0,2 \cdot 10^{22}$	$0,918 \cdot 10^{14}$	$0,618 \cdot 10^{15}$	$0,373 \cdot 10^{66}$	$0,777 \cdot 10^{65}$	$0,314 \cdot 10^9$	$0,654 \cdot 10^8$
$0,2 \cdot 10^{23}$	$0,290 \cdot 10^{14}$	$0,195 \cdot 10^{15}$	$0,118 \cdot 10^{66}$	$0,246 \cdot 10^{65}$	$0,991 \cdot 10^8$	$0,207 \cdot 10^8$
$0,2 \cdot 10^{24}$	$0,918 \cdot 10^{13}$	$0,618 \cdot 10^{14}$	$0,373 \cdot 10^{65}$	$0,777 \cdot 10^{64}$	$0,314 \cdot 10^8$	$0,654 \cdot 10^7$
$0,2 \cdot 10^{25}$	$0,290 \cdot 10^{13}$	$0,195 \cdot 10^{14}$	$0,118 \cdot 10^{65}$	$0,246 \cdot 10^{64}$	$0,991 \cdot 10^7$	$0,207 \cdot 10^7$
$0,2 \cdot 10^{26}$	$0,918 \cdot 10^{12}$	$0,618 \cdot 10^{13}$	$0,373 \cdot 10^{64}$	$0,777 \cdot 10^{63}$	$0,314 \cdot 10^7$	$0,654 \cdot 10^6$
$0,2 \cdot 10^{27}$	$0,290 \cdot 10^{12}$	$0,195 \cdot 10^{13}$	$0,118 \cdot 10^{64}$	$0,246 \cdot 10^{63}$	$0,991 \cdot 10^6$	$0,207 \cdot 10^6$
Параметр состояния $\alpha=10$						
$n_0, \text{см}^{-3}$	$r_1, \text{см}$	$r_2, \text{см}$	$N_1$	$N_2$	$M_1/M_s$	$M_2/M_s$
$0,2 \cdot 10^{21}$	$0,181 \cdot 10^{16}$	$0,328 \cdot 10^{16}$	$0,740 \cdot 10^{67}$	$0,217 \cdot 10^{66}$	$0,623 \cdot 10^{10}$	$0,183 \cdot 10^9$
$0,2 \cdot 10^{22}$	$0,571 \cdot 10^{15}$	$0,104 \cdot 10^{16}$	$0,234 \cdot 10^{67}$	$0,687 \cdot 10^{65}$	$0,197 \cdot 10^{10}$	$0,578 \cdot 10^8$
$0,2 \cdot 10^{23}$	$0,181 \cdot 10^{15}$	$0,328 \cdot 10^{15}$	$0,740 \cdot 10^{66}$	$0,217 \cdot 10^{65}$	$0,623 \cdot 10^9$	$0,183 \cdot 10^8$
$0,2 \cdot 10^{24}$	$0,571 \cdot 10^{14}$	$0,104 \cdot 10^{15}$	$0,234 \cdot 10^{66}$	$0,687 \cdot 10^{64}$	$0,197 \cdot 10^9$	$0,578 \cdot 10^7$
$0,2 \cdot 10^{25}$	$0,181 \cdot 10^{14}$	$0,328 \cdot 10^{14}$	$0,740 \cdot 10^{65}$	$0,217 \cdot 10^{64}$	$0,623 \cdot 10^8$	$0,183 \cdot 10^7$
$0,2 \cdot 10^{26}$	$0,571 \cdot 10^{13}$	$0,104 \cdot 10^{14}$	$0,234 \cdot 10^{65}$	$0,687 \cdot 10^{63}$	$0,197 \cdot 10^8$	$0,578 \cdot 10^6$
$0,2 \cdot 10^{27}$	$0,181 \cdot 10^{13}$	$0,328 \cdot 10^{13}$	$0,740 \cdot 10^{64}$	$0,217 \cdot 10^{63}$	$0,623 \cdot 10^7$	$0,183 \cdot 10^6$

Из таблицы 3 видно, что масса полевой ловушки первого рода при тех же параметрах всегда больше чем масса полевой ловушки второго рода. С ростом  $\alpha$  это отличие возрастает. Причину этого объясняет соотношение (8.9). Масса полевой ловушки первого рода увеличивается с ростом параметра состояния  $\alpha$ . При постоянном  $\alpha$  увеличение концентрации  $n_0$  приводит к уменьшению массы ловушки и её геометрических размеров (см. 8.5). Обратное также верно.

Моделирование показывает, что увеличение температуры скопления на порядок (для тех же параметров состояния) приводит к увеличению массы полевых ловушек второго рода больше, чем на порядок, и диапазон их массы превышает диапазон масс полевых ловушек первого рода при исходной температуре с незначительным изменением геометрических размеров. Внешние размеры скоплений при нижних значениях  $n_0$  превышают средний радиус солнечной системы всего от 10-и до 18-ти раз

(в качестве среднего радиуса принималось значение большей полуоси орбиты Плутона  $\sim 0,6 \cdot 10^{15}$  см [13]).

Поскольку в принятом алгоритме расчетов оказалось, что величина  $\zeta = r_1 / l > 1$ , то в таблицу вошли только массы полевых ловушек второго рода с положительной потенциальной энергией. При температуре  $T = 10^{11}$  К при наличии плотной упаковки в промежуточных состояниях радиус полости  $r_1 = 3,42 \cdot 10^5$  см, а параметр  $\zeta = 1,41 \cdot 10^{-6} < 1$  на верхнем значении  $n_0$ . Тогда массы ловушек второго рода попадают в диапазон  $10^6 M_s < M_2 < 10^9 M_s$ , имея внешний радиус  $r_2$ , лежащий в диапазоне от  $8 \cdot 10^{12}$  см до  $8 \cdot 10^{15}$  см. При тех же условиях на нижнем значении  $n_0$  параметр  $\zeta = 1,41 \cdot 10^{-9} < 1$ , а радиус  $r_2$ , лежит в том же диапазоне.

В заключение для параметра состояния  $\alpha = 3$  и  $n_0 = 0,2 \cdot 10^{21}$  см<sup>-3</sup> приведём масштабы физических величин, описывающих состояние равновесия нейтронного кластера: масштаб температуры  $T^* = 9,0 \cdot 10^{11}$  К; масштаб потенциала  $\varphi^* = 1,65 \cdot 10^{19}$  (см/с)<sup>2</sup>; масштаб напряжённости  $g^* = 2,27 \cdot 10^4$  см/с<sup>2</sup>; максимальное давление на дне ямы  $p_0 = 2,76 \cdot 10^{15}$  дина/см<sup>2</sup>; масштаб давления поля  $D^* = 3,07 \cdot 10^{14}$  дина/см<sup>2</sup>; масштаб градиента давления  $f^* = 7,6$  дина/см<sup>3</sup>. Увеличение значения  $n_0$  на шесть порядков приводит к увеличению масштаба напряжённости на три порядка, давления – на шесть порядков, а масштаба градиента давления – на девять порядков.

## 10. Выводы

Предложена полная система уравнений, которая описывает класс статических равновесий неизлучающих, взаимодействующих между собой гравитирующих частиц, взвешенных в самосогласованном поле.

При решении задачи компенсирующая силу тяготения сила Бернулли получает новое математическое определение: она создаётся силой полевого происхождения, совпадающей по направлению и величине с градиентом давления самосогласованного поля гравитации системы.

Равновесная функция распределения системы совпадает с больцмановской и указывает на обратное действие поля на частицы, которые это поле создают.

Самосогласованное поле, формирующее конфигурацию ловушки, играет двоякую роль. С одной стороны, поле создает градиент давления частиц,

сонаправленный с вектором его напряженности. А с другой стороны, это же поле создает статическую силу, компенсирующую создаваемый градиент.

В связи с этим, каждый элементарный объем системы, рассматриваемой как элемент сплошной среды, находится в равновесии под действием двух сил: объемной плотности сил ньютоновского притяжения и объёмной плотности сил расталкивания Бернулли.

Фундаментальный закон сохранения полного давления, существующий в системе с плоской симметрией, формирует полевые граничные условия. Они соответствуют наличию в системе эквипотенциальной поверхности, на которой давление самосогласованного поля обращается в нуль, а потенциал – минимален.

В сферической симметрии найдены аналитические решения: один класс приближённых решений (полевые ловушки первого рода) и один класс точных решений (полевые ловушки второго рода). Они описывают распределение физических параметров в системах с потенциальной ямой и потенциальной щелью.

В ловушках первого рода, для больших значений параметра состояния, поле выдавливает частицы в минимум потенциальной энергии системы таким образом, что внутри холодного сферического кластера образуется полость, в которой вещество практически отсутствует.

В ловушках второго рода поле выдавливает частицы в бесконечно глубокую логарифмическую щель, образованную потенциальной энергией системы в её центре.

Для полевых ловушек получены соотношения подобия, в которых обнаружена однозначная связь масштаба длины, масштаба массы и абсолютной температуры системы между собой.

При прочих равных условиях полевые ловушки с потенциальной ямой удерживают частиц больше, чем ловушки с потенциальной щелью.

В полевых ловушках выделено три типа состояний: состояния с отрицательной потенциальной энергией, состояния с положительной потенциальной энергией и промежуточные состояния.

Численное моделирование указывает на возможность существования скоплений нейтронов с температурой от  $10^{11}$  до  $10^{12}$  K, диапазон масс которых попадает в диапазон масс объектов, обнаруженных в центрах галактик и названных «сверхмассивные чёрные дыры».

Равновесные состояния частиц с полем, в которых могут пребывать неизлучающие высокотемпературные нейтроны следует отнести к пассивным состояниям ядер галактик.

Известные методы измерения массы чёрных дыр в центрах галактик по скорости близлежащих звёзд [14,15] не могут ответить на вопрос о том, в каких состояниях полевой ловушки эти объекты находятся.

Самосогласованная теория полых газовых шаров предсказывает существование низкотемпературных скоплений нейтронов малых размеров. Имея масштаб длины  $\sim 10^5$  см при температуре 100 K, они обладают масштабом массы  $\sim 2,5 \cdot 10^{22}$  г, что на три порядка меньше массы Луны. Такие лёгкие холодные нейтронные пузыри с тонкой стенкой оставили свой след при падении на поверхность Луны. Они сформировали определённый класс кратеров, в которых есть внешний валик вещества, выплавленный в виде кольца, и гладкая текстура поверхности внутри валика (см. рис. 3).

Из теории следует, что Тунгусский феномен представлял собой полый, рыхлый космический «снежок» огромной массы, состоящий из ледяных пылинок наноскопических размеров (подробности в [7,10]). Он был выброшен ледяными гейзерами из недр Энцелада – 61 спутника Сатурна. Плотность потока частиц при падении такого «пузыря» на землю будет существенно меньше в центре, чем в соседних слоях. Тогда в эпицентре падения производимые разрушения будут минимальны, что совпадает с наблюдениями экспедиции Кулика. Память о падении космического «снежка» до сих пор хранит мачтовый, не вываленный лес, оказавшийся в эпицентре падения.

## 11. Благодарности

Автор выражает благодарность директору института магнетизма Национальной академии наук и Министерства образования Украины (г. Киев) академику НАН Украины В.Г. Барьяхтару за неподдельный интерес и моральную поддержку развития нового научного направления: кластерные состояния материи, удерживаемые самосогласованным полем.

Автор признателен директору Института высоких технологий и пьезотехники Южного Федерального университета академику РИА Паничу А.Е. за плодотворное обсуждение результатов, полученных в работе.





*Рис. 3. Следы от падения полых холодных скоплений нейтронов  
с тонкой стенкой на поверхности Луны*

## **12. Литература**

1. Emden R. Gaskugeln. Leipzig und Berlin. 1907.
2. Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. М.: – Изд-во ИЛ, 1950.
3. Френкель Я.И. Статистическая физика. М.-Л.: – Изд-во АН СССР, 1948.
4. Сапогин В.Г. Плоские самосогласованные гамильтоновы системы гравитирующих частиц//Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 1996. №3. – С. 72-79.
5. Сапогин В.Г. Механизмы удержания вещества самосогласованным полем. Таганрог: – Изд-во ТРТУ, 2000.
6. Сапогин В.Г. Об одном классе точных решений уравнения Эмдена//Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2003. №3. – С. 55-56.
7. Сапогин В.Г. Об одном классе точных и приближённых решений  $E$  – уравнения Эмдена для потенциала. Ежегодный сборник научных трудов «Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем», вып. 12, Под редакцией Л.А.Уваровой. Том 2. – М.: Янус-К, 2009, с. 461– 470.

8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – С. 799.
9. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами/Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – С. 830.
10. Сапогин В.Г. Газовые шары Эмдена в самосогласованной теории гравитации. Таганрог: – Изд-во ТИ ЮФУ, 2009. – С. 99.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. – М.: Изд-во «Наука», 1974. – С. 831
12. Тер Хаар Д. Нейтронные звёзды и пульсары. – М.: Мир, 1973.
13. Маленькая энциклопедия. Физика космоса/Под ред. С.Б. Пикельнера. – М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1976. – С. 655.
14. Ghez A.M., Morris M., Becklin E.E., Tanner A. & Kremenek T. The Accelerations of Stars Orbiting the Milky Way's Central Black Hole. *Nature*, **407**, number 6802, p. 349-351 (21 September 2000).
15. Ghez A.M., Salim S., Weinberg Ni et al. Measuring Distance and Properties of the Milky Way's Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits. *ApJ* **689**, 1044, 2008, December.