БИВОЛНОВАЯ ПРИРОДА ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ-ЗАРЯДА

Сапогин В.Г., Сапогин К.В.

Исследуются биволновые свойства принципа наименьшего действия, описывающего релятивистское движение свободной заряженной материальной точки. Они следуют из анализа движения частицы-заряда в статических и переменных полях скалярного и векторного потенциалов с высокой симметрией. Две формы действия углубляют понятия: равноправие времени и координаты, равноправие изоэнергетического и изоимпульсного движений заряда. Анализ позволяет построить полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, который представляет собой малое локализованное возбуждение функции действия, обнаруженное ранее Г.Сивашинским.

Интеграл содержит в себе две плоские волны действия, связанные с движущейся частицей-зарядом. Одна из них совпадает с де Бройлевской волной (временная волна действия), имеющей фазовую скорость больше скорости света. Другая плоская волна (координатная волна действия) движется с фазовой скоростью меньше скорости света. Длина её волны зависит от скорости и при малых скоростях движения совпадает с комптоновской длиной волны.

Такое представление малого локализованного возбуждения функции действия имеет простой физический смысл. В системе отсчёта, в которой покоится частица-заряд, она отображается в «пространстве действия» отрезком дрожащей струны, вытянутой в направлении её движения. Участок струны имеет пространственный масштаб, который ограничен комптоновской длиной волны, зависящей от скорости, и временной масштаб, который также зависит от скорости движения частицы-заряда.

Введение

В 70 - е годы прошлого века достигнут существенный прогресс в описании взаимодействия плоских электромагнитных полей и заряженных частиц. Современные задачи теоретической физики, связанные с СВЧ – нагревом плазмы в токамаках, формированием релятивистской вакуумной и плазменной электроник, современной ускорительной техникой, мощными лазерными пучками и излучением околопульсарной плазмы, стимулировали интерес к изучению взаимодействия интенсивных полей с заряженными частицами и определили требования к методам описания такого взаимодействия: они должны быть применимы и тогда, когда электромагнитные поля становятся релятивистски сильными, а тепловая энергия электрона во много раз превышает энергию покоя.

Изучение взаимодействия сильных электромагнитных полей с заряженными частицами в бесстолкновительных системах привело к необходимости описания микроскопического движения отдельных частиц. Это обусловлено тем, что такое взаимодействие осуществляется через посредство общего электромагнитного поля и описывается уравнением движения, общим для всех частиц.

В электромагнитных полях с высокой симметрией, таких как плоские волны, описание движения заряженных частиц оказалось особенно простым, поскольку в таких полях существует достаточное количество сохраняющихся величин. Набор сохраняющихся величин, на котором обычно базируются работы семидесятых годов [1-9], включает один либо три релятивистских интеграла движения, возникающих как следствие плоского и волнового характера рассматриваемых полей.

В работах [1-4] было отмечено, что если плоская электромагнитная волна распространяется с фазовой скоростью, не равной скорости света в вакууме, то при $\omega < kc$ (фазовая скорость волны меньше скорости света в вакууме) существует выделенная инерциальная система отсчёта K_1', движущаяся с постоянной скоростью $V = \omega / k$, в которой фаза волны вырождается и зависит только от координаты.

При $\omega > kc$ (фазовая скорость плоской волны больше скорости света в вакууме) она вырождается и зависит только от времени в системе отсчёта K_2', имеющей постоянную скорость $V = kc^2 / \omega$. Обе системы отсчёта перемещаются вдоль направления распространения волны. Если же рассматривается электромагнитная волна с $\omega = kc$, то систем отсчёта, в которых возможно вырождение фазы плоской волны не существует.

Действительно, записывая фазу волны ψ в виде

$$\psi = \omega t - kx, \tag{1}$$

где ω – частота, k – волновое число, x – направление распространения, c – скорость света. Применяя к (1) преобразования Лоренца из лабораторной системы K в движущуюся систему K'

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}\ ;\ y = y';\ z = z';\ t = \frac{t' + Vx' / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \tag{2}$$

в системе K_1', движущейся со скоростью $V=\omega/k$<c, получим зависимость фазы волны только от координаты

$$\psi = -kx'\sqrt{1 - \omega^2 / k^2 c^2} = k'x', \tag{3}$$

а в системе K_2', движущейся со скоростью $V=kc^2/\omega$<c, получим зависимость фазы волны только от времени

$$\psi = \omega t'\sqrt{1 - k^2 c^2 / \omega^2} = \omega' t'. \tag{4}$$

Из (3) и (4) видно, что в системе K_1' у электромагнитной волны $\omega' = 0$ и она плоско неоднородна и статична, а у другой волны в системе K_2' – $k' = 0$ и фаза волны зависит только от времени, но не зависит от пространственных координат.

Отмеченным свойством вырождения обладают не только плоские электромагнитные волны, но и произвольные плоские волновые процессы, имеющие фазу (1) и $\omega \neq k$. Так, фаза де Бройлевской волны материи вырождается в системе отсчёта K_2' [10].

Приведём некоторые результаты из [1-9], представляющие интерес для дальнейшего изложения работы. Здесь и ниже принята гауссова система единиц, в которой длины и скорости разделены на скорость света в вакууме *c*, импульсы – на *mc*, энергия и действие – на mc^2, скалярный φ и векторный $\vec{A}$ потенциалы – на mc^2/e , где *m* и *e* – масса покоя и заряд частицы.

В [1,4,7-9] было замечено, что движение заряженных частиц в плоских электромагнитных волнах, описываемых векторным и скалярным потенциалами, характеризуется полным набором, состоящих из трёх точных интегралов движения; два из них соответствуют циклическим поперечным координатам *x,y*

$$\vec{p}_{\perp} + \vec{A}_{\perp} = \vec{C}_{\perp} = const \tag{5}$$

и являются проекциями полного импульса частицы, а третий возникает, как следствие волнового характера поля

$$Y = k(\gamma + \varphi) - \omega(p_z + A_z) = const\,. \tag{6}$$

Впервые интеграл движения (6) был получен в [5-7], а в форме (6) представлен в [8,9]. В дальнейшем обобщённым 4-импульсом частицы, движущейся в полях векторного и скалярного потенциалов, будем называть 4-вектор $C^i = (\gamma + \varphi, \vec{p} + \vec{A})$, временная компонента которого есть полная энергия частицы, а пространственные компоненты образуют полный импульс частицы, состоящий из кинетической части $\vec{p}$ и потенциальной части $\vec{A}$.

С учётом лоренц-инвариантной калибровки

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + div\vec{A} = 0\,, \tag{7}$$

которая в плоской волне представима в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \text{ или } \omega\varphi = kA_z\,, \tag{8}$$

интеграл движения (6) в системе отсчёта K_1', превращается в полную механическую энергию заряда, которая сохраняется в статическом неоднородном поле

$$Y_1' = \gamma' + \varphi' = const\,, \tag{9}$$

а в системе отсчёта K_2' интеграл (6) переходит в продольную проекцию полного импульса частицы

$$Y_2' = p_z' + A_z' = const \tag{10}$$

Тогда в системе отсчёта K_2' получим три сохраняющиеся компоненты

$$\vec{p} + \vec{A} = \vec{C} = const\,. \tag{11}$$

Все три компоненты полного импульса будут сохраняться при движении заряда только в однородном нестатическом поле.

Поскольку в напряжённость электрического поля скалярный и векторный потенциалы входят равноправно, приведённые результаты позволяют выявить, не отмечавшуюся ранее, глубокую симметрию времени и координаты:

1. Из (9) видно, что в случае движения заряженной точки в неоднородном, но статическом электрическом поле скалярного потенциала сохраняется временная компонента обобщённого 4-импульса частицы $C^i = (\gamma + \varphi, \vec{p} + \vec{A})$ – её полная энергия.

2. Из (11) следует, что движение заряда в однородном, но переменном электрическом поле векторного потенциала характеризуется сохранением всех пространственных компонент $C^i = (\gamma + \varphi, \vec{p} + \vec{A})$ – полного импульса частицы.

Как будет показано ниже, эта симметрия оказывается связанной с существованием канонической формы релятивистского действия заряженной частицы в произвольном электромагнитном поле векторного и скалярного потенциалов. Из них следуют два возможных способа канонического описания релятивистского движения заряженной материальной точки, соответствующие двум интегралам движения полной энергии (9) и полного импульса (11).

Симметричные способы описания приводят к равноправию зависимости электромагнитных полей от времени и координат, к равноправию всех компонент обобщённого 4-импульса частицы и позволяют обосновать релятивистскую аналитическую динамику заряженной материальной точки.

Ниже показано, что отмеченной симметрии соответствуют две плоские волны действия, связанные с движущимся зарядом. Одна из них совпадает с де Бройлевской волной материи [10]

$$\omega = 2\pi E / h; \quad \vec{k} = 2\pi\vec{p} / h \tag{12}$$

(соотношения (12) и (13) в обычных единицах), а параметры другой выражаются через энергию E и импульс заряда p соотношениями:

$$K = 2\pi E / (hc); \quad \Omega = 2\pi pc / h. \tag{13}$$

Как видно из (13), её длина волны совпадает с комптоновской длиной волны при малых скоростях движения частицы. Этот параметр, присущий электрону, был обнаружен в экспериментах Комптона по рассеянию гамма-квантов на покоящемся электроне.

Отметим, что если когда-нибудь пойдёт речь о приоритете в этой области знаний, то исторически базовые соотношения для двух плоских волн действия были опубликованы в 1982 году в работе [16] одного из авторов этой заметки. Последующее развитие поднятой проблемы были опубликованы в работах [17, 19].

В 1983 году появилась работа Г.Сивашинского [12], которая была получена журналом *Nuova Cimento* 13 июля 1982 года. В ней он предложил модифицированное уравнение Гамильтона-Якоби и оригинальную интерпретацию заряженной частицы как малого возмущения функции действия, локализованного в пространстве в размерах комптоновской длины волны.

Точность существующих экспериментальных данных, служащих основанием волновой теории материи [11], не позволило в начале прошлого века выявить влияние второй волны действия на дифракцию нерелятивистских электронов. Причина этого заключалась в том, что длины волн, участвующие в дифракции электронов, отличаются друг от друга на несколько порядков, и влияние второй волны действия на дифракцию практически не проявляется.

1. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для заряженной материальной точки [19]

При решении модифицированного уравнения Гамильтона ─ Якоби в [12] функция действия с учетом малого локализованного возбуждения для свободной частицы была получена в виде

$$S = -Et + \vec{p}\vec{r} + s(E\vec{r}/c^2 - \vec{p}t).$$

Такое представление малого локализованного возбуждения функции действия имеет простой физический смысл. В системе отсчёта, в которой покоится массовая частица-заряд, она отображается в «пространстве действия» отрезком дрожащей струны, вытянутой в направлении её движения. Участок струны имеет пространственный масштаб, который ограничен комптоновской длиной волны, зависящей от скорости, и временной масштаб, который также зависит от скорости движения частицы-заряда.

Такое представление позволяет окончательно уточнить явление корпускулярно-волнового дуализма, открытого в физике в начале прошлого века, которое в этом случае переходит в явление корпускулярно-биволнового дуализма. То есть, при движении любой массовой частицы-заряда возникает не один плоский волновой процесс, как считалось ранее, а два. Каждый из них имеет свои пространственные и временные масштабы, зависящие от скорости его движения. Масштабы будут различны в разных инерциальных системах отсчёта.

Что поражает в этом явлении? Для описания нерелятивистского движения частицы-заряда в микромире достаточно использовать одну де Бройлевскую волну, забывая о существовании второй волны действия. В этом случае принцип наименьшего действия для частицы-заряда совпадает с принципом наименьшего времени. Они становятся эквивалентными. А вот при релятивистском движении частицы-заряда в микромире достаточно использовать одну Комптоновскую волну действия, забывая о существовании первой волны.

Может быть, в этом и заключается Великая Тайна Явления Релятивизма, которая позволяет понять, почему одиночные массовые частицы-заряды не могут двигаться со скоростью больше скорости света. При приближении скорости движения к скорости света между двумя волновыми процессами возникает своеобразный резонанс. Он и ограничивает предельную скорость движения массовой частицы-заряда.

Покажем, что такую же форму действия, которая предложена в [12], можно получить из полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби для свободной заряженной материальной частицы. Перед построением полного интеграла для свободной частицы проведем детальный анализ равноправия времени и координаты в канонических уравнениях Гамильтона и уравнении Гамильтона — Якоби.

Симметричную форму действия релятивистской частицы-заряда, совершающей движение в заданном поле электромагнитных потенциалов, можно представить в виде

$$S = \int \left[(\vec{p} + \vec{A}) d\vec{r} - (\gamma + \varphi) dt \right], \tag{14}$$

где $\vec{A}, \varphi$ – потенциалы электромагнитного поля; $\vec{p}, \gamma$ – релятивистские импульс и энергия частицы-заряда, связанные соотношениями

$$p^2 + 1 = \gamma^2, \gamma = (1 - u^2)^{-1/2}, \vec{u} = \vec{p} / \gamma, \tag{15}$$

где u – безразмерная скорость частицы-заряда.

Для получения уравнений движения заряженной материальной точки в поле скалярных потенциалов высокой симметрии применим к (14) принцип наименьшего действия $\delta S = 0$. Интегрируя по частям с учётом того, что $\delta \vec{p} d\vec{r} = \delta \gamma dt$ и считая вариации, исчезающими на концах, получим уравнения движения заряда в канонической форме, приводимой Я.Френкелем в [13]

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \nabla(\vec{u}\vec{A} - \varphi),$$
$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}\vec{A} - \varphi), \tag{16}$$

где

$$\vec{C} = \vec{p} + \vec{A} \tag{17}$$

полный релятивистский импульс ($\vec{p}$ – кинетический импульс, $\vec{A}$ – потенциальный импульс, согласно терминологии, принятой в [13]),

$$H = \gamma + \varphi \tag{18}$$

– полная релятивистская энергия частицы-заряда.

Отметим симметрию уравнений движения в форме (16):

1.В уравнении (16) все компоненты обобщённого 4-импульса частицы $p^i = (\gamma + \varphi, \vec{p} + \vec{A})$, переменные $\vec{r}, t$, потенциалы $\vec{A}, \varphi$ входят равноправно.

2.Если в некоторой инерциальной системе отсчёта неоднородное распределение потенциалов не зависит от времени, то сохраняется полная релятивистская энергия заряженной материальной точки.

3.Если в некоторой системе отсчёта неоднородные потенциалы не зависят хотя бы от одной координаты, то при движении точки помимо полной энергии будет сохраняться соответствующая компонента полного релятивистского импульса частицы-заряда.

4.Если в некоторой системе отсчёта потенциалы не зависят от координат, а зависят только от времени, то при движении точки будет сохраняться полный релятивистский импульс частицы-заряда.

Последний случай движения возможен только в динамике заряженной материальной точки. ***Получить такие же результаты в динамике материальной точки, движущейся в полях скалярного потенциала, не представляется возможным.***

Запишем канонические уравнения Гамильтона, в которых время играет роль независимой переменной. Представим действие (14) в виде

$$S = \int \left[\vec{C} d\vec{r} - H(\vec{C}, \vec{r}, t) dt \right]. \tag{19}$$

Его удобно назвать энергетическим.

Применяя к (19) принцип наименьшего действия, интегрируя по частям и считая, что вариации на концах исчезают, получим энергетическое представление канонических уравнений Гамильтона

$$d\vec{r} / dt = \partial H / \partial \vec{C};\ d\vec{C} / dt = -\partial H / d\vec{r};\ dH / dt = \partial H / \partial t, \tag{20}$$

в которых роль обобщённых импульсов играют компоненты полного релятивистского импульса частицы, а роль обобщённых координат – компоненты три радиуса вектора.

Уравнения (20) удовлетворяются тождественно, если в качестве функции Гамильтона выбрать энергию (18) выразить её через импульсы (17) с учётом (15), а при дифференцировании привлечь уравнения (16) [13].

Симметрию времени и координаты в интегральном инварианте Пуанкаре-Картана обнаружил Гантмахер [14]. Он заметил, что структура инварианта не изменяется, если время принять за координату, а энергию, взятую с противоположным знаком, – за импульс. Тогда роль гамильтоновой функции играет несохраняющаяся величина – компонента кинетического импульса частицы, взятая с противоположным знаком. Роль независимой переменной переходит к сопряжённой пространственной координате. Это далеко идущая аналогия, как показано ниже, позволяет построить полный интеграл релятивистского уравнения Гамильтона Якоби, описывающий движение заряженной материальной точки в потенциально-векторных полях с высокой симметрией.

Применим подход, изложенный в [14], к динамике частицы-заряда и получим канонические уравнения Гамильтона, в которых координата играет роль независимой переменной. Выберем ортогональную систему координат $q, \vec{r}_\perp$ и спроецируем на неё полный импульс (17) $C_q = p_q + A_q$; $\vec{C}_\perp = \vec{p}_\perp + \vec{A}_\perp$. В соответствии с [14] запишем импульсное представление действия (1) в виде

$$S = \int \left[\vec{C}_\perp d\vec{r}_\perp + h dt - C(\vec{C}_\perp, h, \vec{r}_\perp, t, q) dq \right], \tag{21}$$

где

$$h = -(\gamma + \varphi), \tag{22}$$

$$C = -C_q = -(p_q + A_q). \tag{23}$$

Варьируя (21) и интегрируя по частям, запишем

$$\delta S = \vec{C}_\perp \delta\vec{r}_\perp \big| + h\delta t \big| - C\delta q \big| + \int \Big\{ \delta\vec{C}_\perp \big[d\vec{r}_\perp - (\partial C / \partial\vec{C}_\perp) dq \big] +$$
$$+ \delta h \big[dt - (\partial C / \partial h) dq \big] - \delta\vec{r}_\perp \big[d\vec{C}_\perp + (\partial C / \partial\vec{r}_\perp) dq \big] -$$
$$- \delta t \big[dh + (\partial C / \partial t) dq \big] + \delta q \big[dC - (\partial C / \partial q) dq \big] = 0 . \qquad (24)$$

Считая вариации исчезающими на концах, получим импульсное представление уравнений Гамильтона

$$d\vec{r}_\perp / dq = \partial C / \partial\vec{C}_\perp ; \quad dt / dq = \partial C / \partial h;$$
$$d\vec{C}_\perp / dq = -\partial C / \partial\vec{r}_\perp ; \quad dh / dq = -\partial C / \partial t; \qquad (25)$$
$$dC / dq = \partial C / \partial q .$$

в которых роль независимой переменной «времени» играет координата q, а время t становится «координатой» [14]. Из (25) видно, что если $C = C(\vec{C}_\perp, h, \vec{r}_\perp, t)$ то сохраняется новая «энергия» C, совпадающая с компонентой полного релятивистского импульса частицы-заряда (23).

Уравнения (25) удовлетворяются тождественно, если (23) выразить через новые импульсы и координаты, воспользовавшись (15),(17) и (22):

$$C = -A_q - \big[(h + \varphi)^2 - (\vec{C}_\perp - \vec{A}_\perp)^2 - 1 \big]^{1/2} , \qquad (26)$$

а при дифференцировании учесть (16).

Действие (21) при сохранении (23) можно укоротить по произведению: новая энергия на новое время

$$S_q = \int \Big\{ \vec{C}_\perp d\vec{r}_\perp - \big[((C + A_q)^2 + (\vec{C}_\perp - \vec{A}_\perp)^2 + 1)^{1/2} + \varphi \big] dt \Big\} . \qquad (27)$$

Закон сохранения даёт связь между новым временем q и

$$dq = -(C + A_q) dt / \big[(C + A_q)^2 + (\vec{C}_\perp - \vec{A}_\perp)^2 + 1 \big]^{1/2} ,$$

координатами $\vec{r}_\perp$

$$(\vec{C}_\perp - \vec{A}_\perp) dq = -(C + A_q) d\vec{r}_\perp .$$

Для (27) будет справедлив вариационный принцип в форме Мопертюи – Лагранжа $\delta S_q = 0$, который означает следующее: укороченное действие стационарно на всех траекториях заряженной материальной точки, удовлетворяющих закону сохранения компоненты полного релятивистского импульса (23) и проходящих через конечную точку $t_2, \vec{r}_{\perp 2}$ в произвольный момент q.

Для реализации такого принципа в (24) нужно рассматривать только траектории заряженной частицы, для которых $\delta q_1 = 0$, $\delta q_2 = \delta q$, $h\delta t \big|_1^2 = 0$, $\vec{C}_\perp \delta\vec{r}_\perp \big|_1^2 = 0$, $\delta S = -C\delta q$ и сохраняется (23). Тогда вариационный принцип для действия (27) имеет вид

$$\delta S_q = \delta \int \left(\vec{C}_\perp d\vec{r}_\perp - h dt \right) = 0 \quad (28)$$

В (28) нижний $(t_1, \vec{r}_{\perp 1})$ и верхний $(t_2, \vec{r}_{\perp 2})$ пределы интегрирования фиксированы. Используя соотношения

$$\delta\vec{p}_\perp d\vec{r}_\perp + \delta p_q dq = \delta\gamma dt; \quad \delta p_q = -\delta A_q;$$

$$\delta\varphi = \nabla_\perp \varphi \delta\vec{r}_\perp + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta t; \quad \delta\vec{A} = \nabla_\perp \vec{A}\delta\vec{r}_\perp + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\delta t,$$

из (28) можно получить поперечную пространственную и временную части уравнений движения в форме (16).

Для решения системы (25) воспользуемся каноническим преобразованием, которое сводит решение (25) к решению уравнения Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial q} + C\left(\vec{C}_\perp, h, \vec{r}_\perp, t.q\right) = 0 \quad (29)$$

Подставляя в (29) импульсное представление гамильтоновой функции (26) с учётом того, что

$$\partial S / \partial t = h; \quad \partial S / \partial \vec{r}_\perp = \vec{C}_\perp$$

получим уравнение Гамильтона - Якоби

$$\left(\nabla S - \vec{A}\right)^2 - \left(\partial S / \partial t + \varphi\right)^2 + 1 = 0 \quad (30)$$

такое же, как и из энергетических представлений. Это говорит о том, что в уравнении (30) все переменные равноправны и они не несут физического смысла, заложенного в системах канонических уравнений (20), (25).

Полный интеграл уравнения (30) для заряженной материальной точки, движущейся вдоль оси x с импульсом p, может быть построен по частному интегралу, имеющему энергетическое и импульсное представления. Известным частным интегралом свободно движущейся частицы-заряда является функция действия

$$S_E = px - \gamma t, \quad (31)$$

соответствующая энергетическому представлению. Построим импульсное представление действия заряженной материальной точки. Для этого в (31), как и ранее, будем считать энергию, взятую с противоположным знаком, импульсом, а импульс, взятый с противоположным знаком, – энергией.

$$S_p = pt - \gamma x. \quad (32)$$

Выражение (32) с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией малого возмущения действия свободной частицы [12].

Свойство аддитивности действия не изменяет функцию Лагранжа, поскольку она определена с точностью до прибавления к ней полной производной по времени от произвольной функции координат и времени [15]. Произвольная функция координат и времени, у которой полная производная по времени обращается в нуль, совпадает с (32)

$$\frac{dS_p}{dt}=\frac{\partial S_p}{\partial t}+\frac{\partial S_p}{\partial x}u=p-\gamma u=0.$$

Функцию (32) можно выбрать в качестве нового импульса $P=S_p$, сопряжённого с координатой Q. К переменным P и Q осуществляется точечное каноническое преобразование от величин p и x. Производящая функция такого преобразования

$$S=S_E+PQ+S_0, \tag{33}$$

где S_0 – аддитивная постоянная. Функция (33) и будет полным интегралом уравнения Гамильтона – Якоби, описывающего свободное движение релятивистской частицы-заряда.

Из (33) следует, что

$$p=\partial S/\partial x=\partial S_E/\partial x;\quad Q=\partial S/\partial P;$$

$$H'=H+\partial S/\partial t=H+\partial S_E/\partial t=\sqrt{p^2+1}-\gamma=0,$$

а канонические уравнения в новых переменных имеют вид

$$dP/dt=-\partial H'/\partial Q=0,\quad dQ/dt=\partial H'/\partial P=0,$$

откуда $P=const$, $Q=const$.

При релятивистском движении частицы-заряда производящая функция (33) осуществляет непрерывное каноническое преобразование от p и x к интегралам движения: импульсное представление действия – угол. Релятивистские и волновые свойства полного интеграла заряженной материальной точки (33), (32) исследованы в [19] и представлены ниже.

2.Формализм Лагранжа и укороченные формы действия

Продолжим исследование релятивистского действия в механике заряженной точки на примере функции Лагранжа и проведём оптико-механическую аналогию на укороченных формах действия. Как известно [18], действие заряженной частицы, совершающей движение в заданном электромагнитном поле, складывается из двух частей: действия свободной частицы и действия, описывающего взаимодействие частицы с полем

$$S=-\left(ds+A_i dx^i\right),\ \text{i=0,1,2,3,} \tag{34}$$

где $A^i=\left(\varphi,\vec{A}\right)$ – 4-вектор потенциала. Тогда из (34) следует известная форма записи функции Лагранжа для заряда в электромагнитном поле

$$L=-\sqrt{1-u^2}+\vec{A}\vec{u}-\varphi, \tag{35}$$

где $\vec{u}$ – безразмерная скорость частицы.

Покажем как (35) можно привести к симметричной форме записи и получить из неё канонические уравнения движения заряда. Для этого (35) представим в другой форме записи

$$L = \left(\vec{p} + \vec{A}\right)\vec{u} - (\gamma + \varphi). \qquad (36)$$

Последовательно учитывая в (36) релятивистские соотношения (15) замечаем, что (35) и (36) эквивалентны. Функция Лагранжа (36) позволяет записать каноническую форму релятивистского действия заряженной частицы в симметричном виде (совпадает с (14)):

$$S = \int \left[\left(\vec{p} + \vec{A}\right)d\vec{r} - (\gamma + \varphi)dt\right]. \qquad (37)$$

Если воспользоваться обозначением полного релятивистского импульса (11) и полной релятивистской энергии частицы

$$H = \gamma + \varphi, \qquad (38)$$

где $H = H\left(\vec{C}, \vec{r}, t\right)$ - релятивистская функция Гамильтона [17], то (37) представляет собой частный случай действия по Гамильтону (см., например, [14]).

Будем рассматривать движение одной частицы-заряда в электромагнитном поле потенциалов, которое имеет вид:

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t), \quad \varphi = \varphi(\vec{r}, t). \qquad (39)$$

Считая $L = L\left(\vec{u}, \vec{r}, t\right)$, из (36) получим соотношения

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{u}} = \vec{C} = \vec{p} + \vec{A}; \qquad (40)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \nabla L = grad\,(\vec{u}\vec{A}) - grad\,\varphi; \qquad (41)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u}\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \qquad (42)$$

Варьируя действие (37), выделим действительные траектории. При вариации подынтегрального выражения необходимо учесть, что

$$\delta A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k}\delta x^k; \text{ i,k=0,1,2,3;} \qquad (43)$$

а также связь

$$\delta\vec{p}\,d\vec{r} = \delta\gamma dt. \qquad (44)$$

Тогда система канонических уравнений движения примет симметричный вид

$$\frac{dC_q}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q} + \vec{u}\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial q}, \qquad (45)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{u}\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad (46)$$

который можно получить как частный случай из (16). В (45-46) координата q для декартовых прямоугольных координат последовательно принимает значения x,y,z.

Сравнивая (45) и (41), (46) и (42), приходим к соотношениям

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}; \quad \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{47}$$

С учетом того, что

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{A}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u}\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \tag{48}$$

первое уравнение в (47) даёт обычное уравнение движения, а второе – известное выражение для работы в электромагнитном поле.

Известно [18], что релятивистское движение частицы-заряда в статическом электромагнитном поле описывается укороченным действием

$$S_t = \int (\vec{p} + \vec{A}) d\vec{r}, \tag{49}$$

для которого формулируется вариационный принцип в форме Мопертюи-Лагранжа

$$\delta S_t = \delta \int (\vec{p} + \vec{A}) d\vec{r} = 0. \tag{50}$$

То есть укороченное действие S_t имеет минимум на всех траекториях движения заряженной частицы, удовлетворяющей закону сохранения энергии и проходящих через фиксированную конечную точку в произвольный момент времени.

Покажем, что изоимпульсное движение (движение, при котором сохраняется полный импульс частицы) допускает ещё одну форму укороченного действия – действия, укороченного по координатам, вследствие чего (49) можно назвать действием, укороченным по времени.

При изоимпульсном движении действие, укороченное по координатам, принимает вид

$$S_r = \int (\gamma + \varphi) dt. \tag{51}$$

Рассматривая в (51) только такие движения заряженной частицы, при которых выполняется закон сохранения полного импульса, придём к вариационному принципу

$$\delta S_r = \delta \int_{t_0}^{t} (\gamma + \varphi) dt = 0. \tag{52}$$

Из (52) следует, что укороченное по координатам действие стационарно на всех траекториях заряженных частиц, удовлетворяющих закону сохранения полного импульса и проходящих в конечный фиксированный момент времени через произвольную точку в пространстве.

Укороченное по координатам действие можно представить в виде

$$S_r = \int\left(\sqrt{(C-A_c)^2 + A_{\perp c}{}^2 + 1} + \varphi\right)dt. \qquad (53)$$

При получении (53) импульс частицы $\vec{p}$ и векторный потенциал $\vec{A}$ спроецированы на направление постоянного вектора $\vec{C}$ (его направление в пространстве совпадает с обобщённой координатой q (см. рис. 1)) и

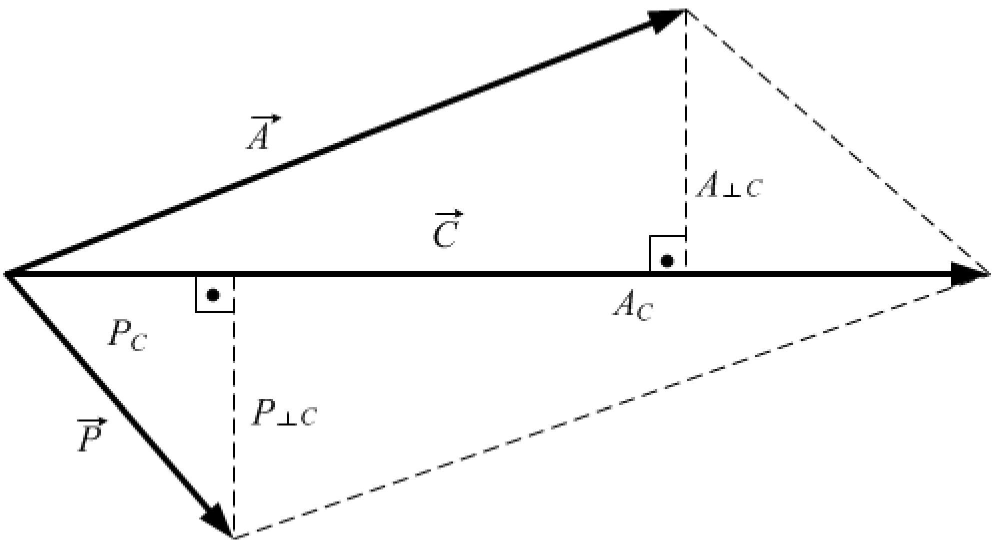

Рис. 1. Ориентации векторов $\vec{p}, \vec{A}$ и $\vec{C}$ в пространстве для фиксированного момента времени

направление поперечное вектору $\vec{C}$. В (53) все величины нужно выразить через время и его дифференциал. При этом дифференциал сопряжённой полному импульсу обобщённой координаты dq необходимо связать с дифференциалом времени

$$dq = \frac{(C-A_c)dt}{\sqrt{(C-A_c)^2 + A_{\perp c}^2 + 1}}. \qquad (54)$$

Принцип (52), переписанный в виде

$$\delta S_r = \delta\int\left(\sqrt{\left((C-A_c)^2 + A_{\perp c}{}^2 + 1\right)} + \varphi\right)dt = 0, \qquad (55)$$

приводит к следствию: свободное движение заряда $\left(A_c = 0, \quad \vec{A}_{\perp c} = 0, \quad \varphi = 0\right)$ происходит таким образом, что за фиксированное время он проходит кратчайшее расстояние (то есть он движется по прямой).

С вариационным принципом (55) можно провести очень простую оптическую аналогию. Для этого сформулируем ещё один оптический принцип, который подсказывает выявленная симметрия действия. Свет в среде с однородным, но переменным во времени, показателем преломления $n = n(t)$ распространяется по кратчайшему пути – по прямой.

$$\delta\int ds = \delta\int u dt = \delta\int dt / n = 0. \qquad (56)$$

Из вариации (56) следует, что необходимым и достаточным условием реализации такого оптического принципа является условие отсутствия зависимости показателя преломления от координат

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t}$$

.

Сформулированный оптический принцип и принцип наименьшего времени Ферма совпадают в среде, показатель которой не зависит от времени и координат.

Принцип (56) позволяет провести аналогию с (55). Заряженная частица совершает прямолинейное движение в переменном однородном электрическом поле $A_c = A_c(t), \quad \vec{A}_{\perp c} = \vec{A}_{\perp c}(t), \quad \varphi = \varphi(t)$, как и световой луч в среде с однородным, но переменным показателем преломления.

3.Релятивистское уравнение Гамильтона-Якоби и волны действия

Отмеченная выше симметрия канонических способов описания движения заряженной материальной точки приводит к существованию двух решений релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби в виде полного интеграла свободной частицы-заряда. Покажем, что эти решения для свободной заряженной материальной точки обладают отмеченным во введении свойством вырождения, характерным для фазы плоских волновых процессов.

Релятивистскую форму уравнения Гамильтона-Якоби берём из (30)

$$\left(\nabla S - \vec{A}\right)^2 - \left(\partial S / \partial t + \varphi\right)^2 + 1 = 0 \tag{57}$$

Её интеграл для прямолинейного движения свободной заряженной материальной точки (31):

$$S_E = px - \gamma t \tag{58}$$

является первой канонической формой действия для свободного заряда.

Преобразуя (58) в систему отсчета, движущуюся со скоростью частицы $u = p / \gamma$, получим

$$S'_E = -t' . \tag{59}$$

То есть первая каноническая форма действия свободного заряда в инерциальной системе отсчёта, где последний покоится, обладает свойством вырождения, характерным для волнового процесса, фазовая скорость которого больше скорости света в вакууме и равна $\omega / k = 1 / u = \gamma / p$.

В этой системе отсчёта $k' = 0$ и действие зависит только от времени. Этот же результат можно получить из (58) другим способом. Учитывая соотношения (15), представим (58) в виде

$$S_E = -\gamma\left(t - px/\gamma\right) = -\gamma(t - ux) = -\frac{t - ux}{\sqrt{1-u^2}} = -t' \quad . \tag{60}$$

Как видно из (60), в нём сформировалось одно из соотношений обратного преобразования Лоренца. Равенство $S_E = S'_E$ выражает собой известный факт, что релятивистское действие свободной заряженной материальной точки совпадает, с точностью до констант, с четырёхмерным интервалом. Отсюда следует, что применение релятивистских соотношений автоматически приводит к первому выражению преобразований Лоренца, которые естественным образом связаны с действием свободного заряда.

Заметим, что свойством вырождения фазы не обладает нерелятивистская форма действия свободной частицы, записанная в обычных единицах

$$S = \vec{p}\vec{r} - Et \text{, где } E = p^2/(2m)\text{,}$$

поскольку в системе отсчёта, движущейся со скоростью частицы, оно обращается в нуль ($\vec{p} = 0$).

Поскольку в системе отсчёта, где частица-заряд покоится, действие зависит только от времени, первый волновой процесс, возникающий при движении заряженной материальной точки, назовём временной волной действия. Покажем, что она совпадает с де Бройлевской волной материи.

Для этого найдём зависимость временного периода T_b первой волны действия от скорости частицы. Для этого поделим (59) на время $T_0 = h/(mc^2)$ и запишем (59) с учётом (15)

$$\frac{S'_E}{T_0} = -\frac{1}{T_0}\left(\frac{t - ux}{\sqrt{1-u^2}}\right) = -\left(\gamma\frac{t}{T_0} - p\frac{x}{T_0}\right). \tag{61}$$

Сравнивая (61) с фазой плоской волны (1) приходим к известным зависимостям временного и пространственного периодов первой волны действия от скорости движения частицы-заряда

$$T_b = T_0/\gamma = T_0\sqrt{1-u^2}; \quad \lambda_b = T_0/p = T_0\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}. \tag{62}$$

Из (62) видно, что в системе отсчёта, движущейся со скоростью заряда, реализуются равенства

$$p = 0, \quad \gamma = 1, \quad k' = 2\pi/\lambda_b = 0, \quad \omega' = 2\pi/T_0 = \omega_0 .$$

Существующая нормальная дисперсия де Бройлевской волны действия, как известно, связана с первым соотношением в (15) и имеет вид

$$\omega = \sqrt{k^2 + \omega_0^2} . \tag{63}$$

Если предположить, что временной период T_b первой волны действия характеризует период поперечного шредингеровского дрожания частицы-струны, то частица-заряд уменьшает свой период дрожания с ростом скорости его движения по отношению к лабораторной системе отсчёта. Парадоксально, но с периодом дрожания заряда происходит «сокращение Лоренца»

$$T_b = T_0\sqrt{1-u^2}\,. \tag{71}$$

Вторая каноническая форма действия свободной заряженной частицы записана в (32)

$$S_p = pt - \gamma x\,. \tag{65}$$

Преобразуя (65) в систему отсчёта, движущуюся со скоростью частицы-заряда, получим

$$S'_p = -x'\,. \tag{66}$$

То есть вторая каноническая форма действия свободной заряженной материальной точки в системе отсчёта, где заряд покоится, обладает свойством вырождения, характерным для плоского волнового процесса, фазовая скорость которого меньше скорости света в вакууме

$$\Omega / K = p/\gamma = u\,. \tag{67}$$

В этой системе отсчёта $\Omega' = 0$ и действие зависит только от координаты. Тот же результат можно получить из (65), учитывая соотношения (15)

$$S_p = -\gamma(x - pt/\gamma) = -\gamma(x - ut) = -\frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2}} = -x'\,, \tag{68}$$

где

$$S_p = S'_p\,.$$

Так как в системе отсчёта, в которой частица-заряд покоится, действие зависит только от продольной координаты, то второй волновой процесс, связанный с движущейся частицей-зарядом, по аналогии с (58) назовём координатной волной действия.

Импульс и энергию частицы-заряда можно связать с параметрами Ω и K координатной волны действия. Для этого обе части (68) поделим на время

$$T_0 = h/(mc^2)$$

и, сравнивая с фазой (1), получим искомые зависимости временного и пространственного периода второй волны действия от скорости в виде

$$T_k = T_0 / p = T_0 \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}; \quad \Lambda_k = T_0 \sqrt{1-u^2} \quad . \qquad (69)$$

Из (69) следует, что в системе отсчёта, движущейся с частицей-зарядом

$$\Omega' = 0, K' = 2\pi / \Lambda_0 = 2\pi / T_0 = \omega_0 \quad .$$

Координатная волна действия, как и временная, обладает дисперсией

$$\Omega = \sqrt{K^2 - \omega_0^2} \quad . \qquad (70)$$

Если предположить, что пространственный период координатной волны действия Λ характеризует продольный размер заряженной частицы-струны, то заряд изменяет свой размер «продольной части» области локализации в зависимости от скорости её движения по отношению к лабораторной системе отсчёта. Нетрудно видеть, что с продольным размером заряда происходит сокращение Лоренца

$$\Lambda = \Lambda_0 \sqrt{1-u^2} \quad . \qquad (71)$$

Этот факт следует учитывать при построении квазиклассических релятивистских уравнений движения электрона в центральном поле и записи адекватных условий квантования такого движения. Нетрудно видеть, что покоящийся электрон имеет продольный размер, совпадающий с комптоновской длиной волны.

Выводы

1.Анализ релятивисткого движения частицы-заряда в статических и переменных полях скалярного и векторного потенциалов с высокой сmметрией углубляет понятия: равноправие времени и координаты, равноправие изоэнергетического и изоимпульсного движений.

2.Углубление понятий позволяет построить полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, который представляет собой малое локализованное возбуждение функции действия, обнаруженное Г.Сивашинским в 1983 году.

3.Интеграл содержит в себе две плоские волны действия, связанные с движущейся частицей-зарядом и указывает на биволновую природу принципа наименьшего действия.

4.Одна из плоских волн действия совпадает с дебройлевской волной материи, которая в силу своих свойств названа «временной волной действия».

5.В системе отсчёта, где частица-заряд покоится фаза «временной волны действия» вырождается и зависит только от времени.

6.Получены зависимости временного и пространственного периодов первой волны действия от скорости движения частицы-заряда. С

временным периодом дрожания частицы-заряда происходит сокращение Лоренца.
7.Фаза второй плоской волны действия вырождается в системе отсчёта, где частица-заряд покоится и зависит только от координаты.
8.Вследствие этого свойства вторая волна действия названа «координатной волной действия».
9.Получены зависимости временного и пространственного периодов второй волны действия от скорости движения частицы-заряда. Показано, что с её пространственным периодом происходит сокращение Лоренца. У покоящейся частицы-заряда продольный размер совпадает с комптоновской длиной волны.
10.Предложенное представление малого локализованного возбуждения функции действия имеет физический смысл. В системе отсчёта, в которой покоится частица-заряд, она отображается в «пространстве действия» отрезком дрожащей струны, вытянутой в направлении её движения. Участок струны имеет длину, которая ограничена комптоновской длиной волны, зависящей от скорости, и временной масштаб, который также зависит от скорости движения частицы-заряда.
11.Биволновая природа принципа наименьшего действия будет выполняться только при движениях частицы-заряда на расстояниях больших её «продольного размера» порядка комптоновской длины волны.
12.Принцип не будет выполняться при ядерных и субядерных размерах пространственного движения частицы-заряда. По-видимому, в этом случае будет доминировать модель «волнового пакета из дебройлевских волн», предложенная в [20,21].
13.Модель частицы-заряда в виде малого локализованного возмущения функции действия находит многолетнее экспериментальное подтверждение в известном явлении распада свободного нейтрона. В момент освобождения нейтрона из ядра электрон прижимается к протону силой около 300 Н. И кажется, что электрон никогда не сможет выбраться из потенциальной ямы глубиной 1,44 Мэв. Освобождает электрон непрерывное дрожание его струны, которое приводит к осцилляции его заряда [20,21]. Дрожание увеличивает полную энергию электрона до тех пор, пока электрическое взаимодействие электрона с протоном не прекращается, и электрон становится свободным.
14. Картина дифракции релятивистской биволновой частицы-заряда, падающей на щель шириной десятки пикометров, пока не известна. И не понятно, как создать для проведения дифракционных опытов естественную преграду таких размеров?

Литература

1.Давыдовский В.Я., Якушев Е.М. ЖЭТФ, 52, 1068, 1967.
2.Best R.W.B. Physica, 40, 182, 1968.
3.Clemmov P.S. J. Plasma Phys. 12, 297, 1974.
4.Давыдовский В.Я., Филиппов Ю.С. ЖТФ, 46, 1749, 1976.
5.Гилинский И.А. ДАН СССР, 134, 1055, 1960.
6.Коломенский А.А., Лебедев А.Н. ДАН СССР, 145, 1259, 1962.
7.Давыдовский В.Я. ЖЭТФ, 43, 886, 1962.
8.Давыдовский В.Я., Сапогин В.Г., Филиппов Ю.С. Депонирована в ВИНИТИ, рег. № 1557-79, 1979.
9. Давыдовский В.Я. ЖЭТФ, 77, 519, 1979.
10.Л. де Брогль. *Введение в волновую механику*. ГНТИ Украины. Харьков-Киев. 1934 г.
11.Тартаковский П.С. *Экспериментальные основания волновой теории материи.* ГТТИ. Л-М., 1932.
12.Sivashinsky G.I. *Elementary Particle as a Lokalized Excitation of the Action Function*. Nuovo cimento, 1983, 77a, 1, 21.
13.Френкель Я.И. *Собрание научных трудов. Т.1. Электродинамика*. М.: Л., 1956, 370 с.
14.Гантмахер Ф.Р. *Лекции по аналитической механике*. М.:, 1966, 300 с.
15.Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. *Механика*. М.:, 1965, 203 с.
16.Сапогин В.Г. *Релятивистская аналитическая динамика заряженных частиц в векторных полях.1*, Таганрог. радиотех. ин-т, 1982. 27 с. Депонирована в ВИНИТИ №3626-82;
17.Сапогин В.Г. *О двух волновых процессах, связанных с действием свободной заряженной частицы*. Таганрог. радиотех. ин-т, 1984. 21 с. Депонирована в ВИНИТИ. №18-84.
18.Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля. Т.2. Наука. М.:, 1973, 350 с.
19.Сапогин В.Г. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для свободной частицы. Изв. СКНЦ ВШ, сер. естеств. науки, №1, с.45, 1987 г.
20.Leo Sapogin, Yuri Ryabov and Victor Boichenko. *Unitary Quantum Theory And A New source of Energy*, 2005. Archer Enterprises, 2938 Ferguson Crs. Rd. Geneva, NY 14456, ISBN 0-9713727-1-3-paperback.
21.Сапогин Л.Г., Рябов Ю.А., Бойченко В.А. *Унитарная квантовая теория и новые источники энергии*. Под редакцией проф. Сазонова Ю.И. Москва, «САЙНС ПРЕСС», 2008, ISBN 978-588070-160-5.

Сапогин Владимир Георгиевич
кандидат физико-математических наук,
профессор Российской Академии Естествознания
sapogin@mail.ru

Сапогин Константин Владимирович
konstantin.v.sapogin@gmail.com
Россия, Таганрог, август 2021 г.