ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ПРОБЛЕМЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕХНИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ
СИСТЕМ

УДК 530.1.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ И ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ *E* – УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА

В.Г.Сапогин

Таганрогский технологический институт Южного федерального университета
Россия, 347928, ГСП-17А, г.Таганрог 28, Некрасовский 44,
Естественно-гуманитарный факультет, кафедра физики, sapogin@mail.ru

При интегрировании E-уравнения Эмдена для плотности газового шара возникает математическая проблема выбора граничных условий. Полную систему уравнений, решаемую относительно потенциала, удаётся свести к трёхмерному уравнению такого же вида. Показано, что корректный выбор граничных условий в уравнении для потенциала при решении сферической задачи самосогласованной теории гравитации не может быть произволен, а диктуется первым интегралом полного давления, существующим в плоской системе. Полученное решение описывает распределение плотности вещества в астрофизических объектах.

1. Введение

E-уравнение Эмдена, полученное в [1], относится к классу нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Вместе с уравнением Лэна-Эмдена оно играло важную роль на первом этапе решения задач о строении звезд, рассматриваемых как газовые образования, находящиеся в политропическом равновесии или в равновесии с однородной температурой [2]. Решая сферическую задачу распределения плотности в системе с однородной температурой, Эмден не нашёл аналитического решения, которое давало бы максимум плотности в центре шара.

Независимо от исследований Эмдена, по-видимому, даже ничего не зная о них, Френкель в 1948 году вводит для систем с постоянной температурой аналогичный способ расчета полей гравитирующих частиц и называет макроскопические статические поля, создаваемые ими, самосогласованными [3]. Если Эмден записывал уравнения для плотности вещества звезды, то Френкель построил их для потенциала гравитационного поля, создаваемого коллективом скопления. Пытаясь решить задачу распределения вещества в сферическом скоплении, он пришёл к неожиданному выводу, что полученные решения приводят к результатам, лишённым физического смысла.

В предлагаемой заметке показано, что корректный выбор граничных условий при решении сферической задачи распределения вещества в самосогласованной системе не может быть произволен, а диктуется фундаментальным законом сохранения полного давления, существующим в плоской системе.

2. Основные уравнения задачи

Обобщая работы Лэна, Эмдена [2] и, используя подход Френкеля [3], запишем трехмерные уравнения гравитационной статики, которые в современных обозначениях векторного анализа имеют вид

$$\rho\vec{g} + \vec{f} = 0\,; \qquad (2.1)$$

$$div\vec{g} = -4\pi G\rho\,; \qquad (2.2)$$

$$\vec{g} = -grad(\varphi)\,; \qquad (2.3)$$

$$p = \rho kT / m\,; \qquad (2.4)$$

$$\vec{f} = -grad(p)\,. \qquad (2.5)$$

Здесь ρ – плотность массы в элементарном объеме, $\vec{g}$ – напряженность макроскопического поля гравитации, p – давление внутри системы, T – абсолютная температура системы, φ – потенциал самосогласованного поля, G – гравитационная постоянная, m – масса гравитирующей частицы, k – постоянная Больцмана.

Первое уравнение системы представляет собой условие равновесия элементарного объема системы гравитирующих частиц. Второе – дифференциальная форма закона Ньютона, позволяющая рассчитывать дивергентные статические поля размазанных масс. Уравнение (2.3) дает связь потенциала с напряженностью гравитационного поля, а (2.4) – уравнение состояния с однородной температурой. Уравнение (2.5) является определением газостатической силы Бернулли. ***Заметим, что связь напряженности с потенциалом (2.3) не применялась Эмденом при проведении исследования.***

Покажем, что полная система уравнений (2.1-2.5) отображает коллективное взаимодействие между гравитирующими частицами, в котором проявляется обратное действие поля на частицы, порождающие это поле.

3. Полевое уравнение самосогласованной теории гравитации

Подставляя (2.5) и (2.3) в (2.1), получим

$$\rho grad(\varphi)+grad(p)=0\,. \tag{3.1}$$

Учитывая уравнение состояния (2.4) и однородность температуры приведем (3.1) к виду

$$grad\left(\frac{m\varphi}{kT}+ln\frac{\rho}{\rho_0}\right)=0\,, \tag{3.2}$$

где ρ_0 – некоторая постоянная.

Из (3.2) видно, что любое равновесие гравитирующих частиц с однородной температурой характеризуется скалярным интегралом

$$\frac{m\varphi}{kT}+ln\frac{\rho}{\rho_0}=const\,, \tag{3.3}$$

из которого следует показательная функция распределения Больцмана

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{p}{p_0}=exp(-m\varphi/kT)\,. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (2.2) свернем систему уравнений (2.1) - (2.5) в одно уравнение (проведем согласование)

$$\Delta\varphi=4\pi G\rho_0\,exp(-m\varphi/kT)\,. \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) представляет собой трёхмерный полевой аналог уравнения, имеющего вид *E*-уравнения Эмдена, описывающего распределение макроскопического потенциала в динамических системах частиц с однородной температурой, которые находятся в статическом равновесии с самосогласованным полем. Положительность правой части указывает на то, что система состоит из частиц с ньютоновским законом междучастичного взаимодействия. Уравнение (3.5) впервые получено Френкелем в [3].

4. Первый интеграл *E*-уравнения Эмдена для плоской симметрии

Уравнение (3.5) для плоской симметрии преобразуем к виду (штрихи означают дифференцирование по координате *x*)

$$\varphi''=4\pi G\rho_0\,exp(-m\varphi/kT)\,. \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) допускает понижение порядка. Оно имеет первый интеграл, соответствующий полному давлению системы [4]:

$$\frac{(\varphi')^2}{8\pi G}+p_0\,exp(-m\varphi/kT)=P=H(\varphi'/4\pi,\varphi)=const\,, \tag{4.2}$$

где $p_0=n_0kT$ – давление гравитирующих частиц системы в плоскости $\varphi=0$.

Полное давление P системы в (4.2) состоит из двух слагаемых: первое слагаемое представляет собой давление самосогласованного поля системы, а второе – газокинетическое давление частиц. Первый интеграл (4.2) совпадает с функцией Гамильтона, в которой канонически сопряженные величины: обобщенный импульс $\varphi'/4\pi G$ и обобщенная координата φ. Роль обобщенного времени играет координата *x*.

Равенство (4.2) выполняется при отсутствии любых внешних статических полей гравитации, рассматриваемых по отношению к самосогласованному полю системы. Класс чётных функций пространственного распределения потенциала самосогласованного поля гравитации и их производных устанавливается всегда таким, чтобы в любой плоскости, взятой внутри системы, оставалась неизменной сумма давлений поля и частиц системы.

Закон сохранения (4.2) означает также, что в любой плоскости рассматриваемой системы градиенты давлений самосогласованного поля и частиц системы равны между собой, но имеют различные направления. Объёмная плотность силы Бернулли (далее сила Бернулли) (2.5) противоположна градиенту давления частиц. В исследуемой системе она получает новое математическое определение: сила Бернулли совпадает по величине и направлению с градиентом давления самосогласованного поля, компенсирует ньютоновские силы тяготения и обеспечивает класс равновесий частиц с полем, которое они сами и создают.

Подставляя в (2.1) плотность массы из уравнения (2.2), получим связь силы Бернулли с градиентом давления самосогласованного поля $\vec{G}_g$

$$\vec{f}=-\rho\vec{g}=\frac{\vec{g}}{4\pi G}div\vec{g}=\vec{G}_g\,, \tag{4.3}$$

которое вместе с (2.5) даёт физическое условие удержания вещества самосогласованным полем

$$\vec{G}_g+grad(p)=0\,. \tag{4.4}$$

Равенство (4.4) указывает на неизвестное ранее свойство самосогласованного поля гравитации удерживать неоднородную систему частиц в ограниченной области пространства статическими силами полевого происхождения.

Из него следует, что ***система коллективного взаимодействия частиц находится в статическом равновесии с самосогласованным полем гравитации в том случае, если равенство нулю суммы градиентов давлений поля и частиц выполнено в любом элементарном объеме системы.*** Условие (4.4) достаточно жесткое и позволяет отбросить нефизические решения, существующие у системы (2.1) – (2.5).

5. Распределение основных физических параметров плоской системы

Введём параметр состояния системы $\alpha=P/p_0>0$. Тогда из (4.2) следует распределение потенциала по длине системы

$$\varphi=\frac{2kT}{m}ln\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}}ch\left(\sqrt{\alpha}\,\frac{x}{l}\right)\right], \tag{5.1}$$

где

$$l=\sqrt{kT/(2\pi Gm\rho_0)} \tag{5.2}$$

– пространственный масштаб системы. Произвольная постоянная при интегрировании (4.2) выбрана из условия $\varphi \ge \varphi_0 = -\frac{2kT}{m} ln\sqrt{\alpha}$, где φ_0 – потенциал на дне ямы.

Как видно из (5.1), распределение потенциала по длине системы имеет вид потенциальных ям с бесконечными стенками. При $0<\alpha \le 1$ минимальное значение потенциала в яме принимает положительное значение, либо нуль, а стенки ямы для этих значений – пологие. Для значений $\alpha>1$ минимальное значение потенциала становится отрицательным, а стенки ямы с ростом α становятся всё более крутыми.

Изменение плотности, концентрации частиц, газокинетического давления системы по её длине описывается одним соотношением

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \frac{p}{p_0} = \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} ch\left(\sqrt{\alpha}\, \frac{x}{l} \right) \right]^{-2} . \qquad (5.3)$$

На рис. 1 представлено распределение приведённых значений плотности, концентрации, давления $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} = \frac{p}{p_0}$ от приведённой длины системы x/l, рассчитанное по (5.3) для различных значений параметра состояния $\alpha>0$. Кривая 1 соответствует значению $\alpha=0.5$, кривая 2 – $\alpha=1$, кривая 3 – $\alpha=2$, кривая 4 – $\alpha=5$. Как видно из (5.3) и рис. 1, система не имеет резких границ. Поле выдавливает частицы в минимум потенциальной энергии системы и остаётся однородным в тех местах, где вещество отсутствует, принимая значения напряженности $g_x = \pm g_*$, где $g_* = 2kT/ml = \sqrt{8\pi G p_0}$ – масштаб напряжённости поля.

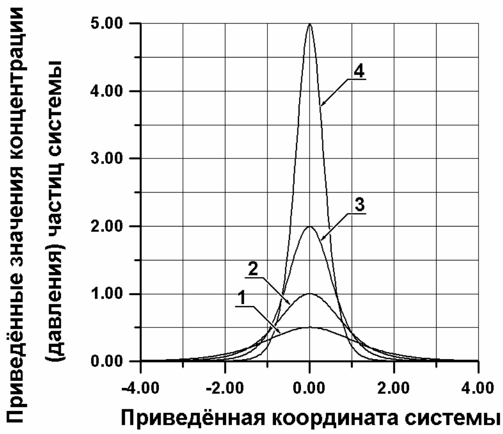

Рис.1 Распределение плотности частиц по длине системы

Из решения (5.1) легко рассчитать распределение всех физических параметров системы: напряжённости, давления поля, распределение компенсирующей силы Бернулли. Они все зависят от параметра состояния системы α.

Полевые граничные условия, адекватные поставленной задаче, можно сформулировать так: в системе должна существовать поверхность, на которой давление самосогласованного поля обращается в нуль, а потенциал минимален. В плоском случае эта точка выбрана в начале координат системы. В сферическом случае такой выбор оказывается затруднённым. Как показано в следующем параграфе, сформулированные граничные условия можно осуществить на конечном расстоянии от центра системы.

6. Решения *E*-уравнения Эмдена для сферической симметрии

Запишем уравнение (3.5) в сферической симметрии, учитывая только радиальную зависимость потенциала:

$$\varphi'' + 2\varphi'/r = 4\pi G m n_0\, exp(-m\varphi/kT) , \qquad (6.1)$$

где $n_0 = \rho_0/m$ – значение концентрации частиц системы на сфере нуля потенциала, а штрихи означают дифференцирование по r.

Переходя в (6.1) к функции $y(x) = -m\varphi(r)/2kT$ относительно переменной $x=r/R$, где R – радиус сферы, на которой задаётся полевое граничное условие, приведем (6.1) к виду

$$xy'' + 2y' + \beta^2 x\, exp(2y) = 0 , \qquad (6.2)$$

где

$$\beta^2 = \frac{2\pi G m^2 n_0 R^2}{kT} = \frac{T_*}{T} = \frac{R^2}{l^2} \qquad (6.3)$$

– новый параметр состояния системы, а

$$T_* = \frac{2\pi G m^2 n_0 R^2}{k} \qquad (6.4)$$

– её характеристическая температура (штрихи означают дифференцирование по x). Параметр состояния системы β допускает двойную интерпретацию. С одной стороны, он позволяет сравнивать температуру системы с характеристической, а, с другой стороны, сравнивать радиус сферы, на которой задаются граничные условия с пространственным масштабом системы l (5.2).

Будем искать решения (6.2) для граничных условий $x=1,\;\; y(1)=y_0,\;\; y'(1)=0,$ которые предполагают существование в кластере сферы нулевого давления поля (далее индексом «0» отметим значение функции y в экстремуме).

Переходя к новой функции

$$y(x) = \eta(\xi) - \xi, y' = \frac{d\xi}{dx}\left(\frac{d\eta}{d\xi} - 1 \right), \text{ где } \xi = ln\, x,$$

получим уравнение

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \frac{d\eta}{d\xi} = 1 - \beta^2 exp(2\eta) \qquad (6.5)$$

с граничными условиями $\xi=0$, $\eta(0)=\eta_0=y_0$, $\frac{d\eta}{d\xi}(0) = 1,$ которое допускает понижение порядка введением новой функции

$$p(\eta) = \frac{d\eta}{d\xi}; \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = p\frac{dp}{d\eta} .$$

Уравнение первого порядка

$$p\frac{dp}{d\eta}+p=1-\beta^2 exp(2\eta) \qquad (6.6)$$

имеет граничные условия $\eta=\eta_0=y_0$, $p(\eta_0)=1$. Его не удаётся проинтегрировать в элементарных функциях.

Численное решение уравнения (6.6) для семейства интегральных кривых, проходящих через точку граничного условия, указывает на существование особой точки Эмдена при $\eta=\eta_*>\eta_0$, в которой $p\to 0$, а $dp/d\eta\to-\infty$. На рис. 2 приведены четыре интегральные кривые в координатах $p=p(z)$, где $z=\eta-\eta_0$. Кривая 1 построена для β=0.5; кривая 2 – для β=1.0; кривая 3 – для β=1.5; кривая 4 – для β=2.0. Как видно из рис. 2, положение особой точки Эмдена зависит от величины β^2. Для $\beta^2<<1$ она расположена далеко от начала координат z=0. Для значений $\beta^2>>1$ она близко подходит к началу координат справа. Это позволяет найти приближенное решение (6.6) при выполнении условия $\beta^2>>1$.

Разрешим (6.6) относительно производной:

$$\frac{dp}{d\eta}=\frac{1-\beta^2 exp(2\eta)}{p}-1. \qquad (6.7)$$

При выполнении условия

$$\beta^2 exp(2\eta)/p>>1/p-1 \qquad (6.8)$$

уравнение (6.7) может быть укорочено

$$\frac{dp}{d\eta}=-\frac{\beta^2 exp(2\eta)}{p} \qquad (6.9)$$

и проинтегрировано

$$p=\sqrt{1-\beta^2\left[exp(2\eta)-exp(2\eta_0)\right]}\,. \qquad (6.10)$$

Определим для каких значений β выполняется приближение (6.8). Для этого представим его в виде: $\beta^2>>(1-p)exp(-2\eta)=f(\eta)$.

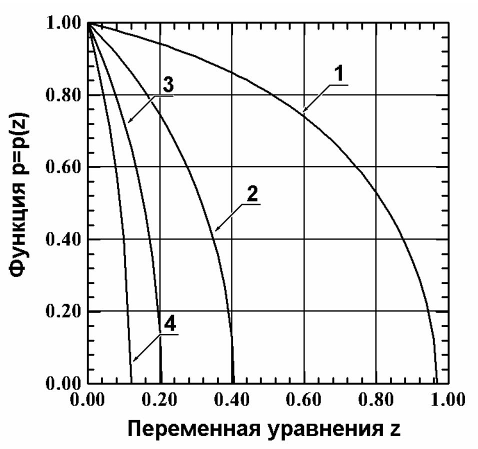

Рис. 2 Интегральные кривые $p=p(z)$

Наибольшее значение функции $f(\eta)$, стоящей в правой части, приходится на значение $\eta=\eta_*$. Тогда приближение (6.8) выполнено при условии

$$\beta^2 exp(2\eta_0)>>1, \qquad (6.11)$$

что накладывает ограничения на возможные значения двух независимых параметров задачи β и η_0.

Возвращаясь в (6.10) к функции $\varphi(r)$, получим двухпараметрическое семейство кривых, описывающих распределение потенциала по длине системы в случае когда температура системы меньше характеристической (холодный кластер):

$$\frac{\varphi}{\varphi_*}=ln\left[\frac{\beta r}{R\sqrt{\beta^2 exp(-2\varphi_0/\varphi_*)+1}}ch(A)\right], \qquad (6.12)$$

где $\varphi_*=2kT/m$ – масштаб потенциала, параметры β и φ_0,

$$A=Arch\left(\frac{\sqrt{\beta^2+exp(2\varphi_0/\varphi_*)}}{\beta}\right)-$$

$$-ln\left(\frac{r}{R}\right)\sqrt{\beta^2 exp(-2\varphi_0/\varphi_*)+1}\,,$$

при выполнении условия

$$\beta^2 exp(-2\varphi_0/\varphi_*)>>1\,. \qquad (6.13)$$

Как видно из (6.12), потенциал самосогласованного поля, создаваемый частицами кластера, представляет собой потенциальную яму с бесконечными стенками и с минимумом $\varphi=\varphi_0$ на сфере нулевого давления поля. Сфера нулевого давления поля делит все пространство взаимодействия кластера на две области – внутреннюю $0<r/R<1$ и внешнюю $r/R\ge 1$. Во внутренней области напряженность самосогласованного поля сонаправлена с радиус-вектором. В ней с ростом r потенциал убывает, а давление и концентрация частиц растут.

Во внешней области направление вектора напряженности поля противоположно направлению радиус-вектора. В ней с ростом r потенциал возрастает, а давление и концентрация частиц убывают. На границах внутренней и внешней областей концентрация частиц убывает плавно, в связи с чем, резких границ у системы нет. ***Поскольку поле выдавливает вещество в минимум потенциальной энергии, при больших β^2 внутри холодного кластера образуется полость, в которой вещество практически отсутствует.*** Полученные результаты уточняют решение, найденное в [5]. Точные решения E-уравнения Эмдена для цилиндрической симметрии можно найти в [6].

Проводилось численное моделирование точного уравнения (6.1) с граничными условиями $\varphi(r=R)=0, \varphi'(r=R)=0$. На рис. 3 представлены распределения по длине системы приведённой концентрации частиц шарового кластера с однородной температурой. Кривая 1 рассчитана для значения β=0.5; кривая 2 – для β=0.7; кривая 3 – для β=1.0; кривая 4 – для β=3.0. Из рис. 3 видно, как изменяется заполнение кластера частицами при изменении его температуры в окрестности значения T~T_*. Кривая 4 отображает существование полости, а кривые 3,2,1 указывают на тот факт, что при увеличении температуры все пространство взаимодействия кластера в основном заполнено частицами. ***Для всех***

кривых концентрация частиц в центре газового шара обращается в нуль.

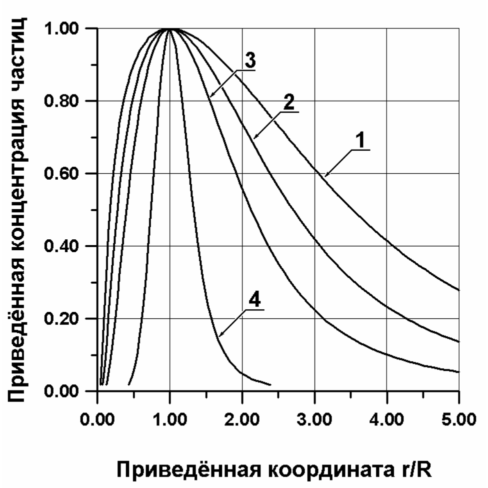

Рис. 3 Распределение концентрации частиц в шаровом кластере

7. Заключение

В заключение покажем, что решённая задача имеет отношение к астрофизическим объектам. Сделаем оценки для полого газового шара, состоящего из кислорода, при максимальной плотности на сфере нулевого давления поля ρ_0 =1,33 кг/м^3, находящегося при температуре T=293 К с соответствующим давлением 10^5 Па. Предположим, что масса гравитирующей частицы m совпадает с массой молекулы кислорода $5{,}32\cdot10^{-26}$ кг.

Для этих значений пространственный масштаб системы (5.2) l=$1{,}2\cdot10^7$ м. Для параметра состояния β=3 радиус сферы нулевого давления поля R=$3{,}6\cdot10^7$ м превышает радиус Земли примерно в 5 раз. Радиус полости (для оценки обрываем распределение на сфере n=0,2n_0 см. рис. 3) $r_1 = 0{,}6R = 2{,}16\cdot10^7$ м. Внешний радиус газового шара $r_2 = 1{,}6R = 5{,}76\cdot10^7$ м. При средней плотности газа в слое $<\rho>$=0,133 кг/м^3 оценочная масса полого газового шара достигает значения 10^{23} кг и несколько превышает массу Луны.

Сделаем оценки для полого газового шара, состоящего из ледяных нанопылинок диаметром 40 нанометров с массой пылинки m=$3\cdot10^{-20}$ кг, при максимальной плотности на сфере нулевого давления поля ρ_0 =80 кг/м^3, находящегося при температуре T=250 К с концентрацией $n_0 = 2{,}7\cdot10^{21}$ м$^{-3}$.

Пространственный масштаб системы (5.2) l=$1{,}85\cdot10^3$ м. Радиус сферы нулевого давления поля R=$5{,}6\cdot10^3$ м для параметра состояния β=3. Радиус полости $r_1 = 0{,}6R = 3{,}3\cdot10^3$ м. Внешний радиус шара $r_2 = 1{,}6R = 8{,}9\cdot10^3$ м. При средней плотности слоя $<\rho>$=8 кг/м^3 оценочная масса шара достигает значения 22 миллиарда тонн. ***Такой космический «снежок» с поперечником ~ 20 км при падении не может взорваться.*** Опускаясь со скоростью ~ 40 км/с на поверхность Земли, он может произвести огромные разрушения, очень похожие на разрушения, вызванные Тунгусским феноменом. ***Из-за наличия внутренней полости, в которой нанопылинки отсутствуют, плотность потока частиц, налетающих на поверхность, в центре падения будет существенно меньше, чем в соседних слоях [5]. Это приведёт к тому, что в эпицентре падения производимые разрушения будут минимальны.***

Литература

1. Emden R. Gaskugeln. Leipzig und Berlin. 1907.
2. Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. М.: – Изд-во ИЛ, 1950.
3. Френкель Я.И. Статистическая физика. М.-Л.: – Изд-во АН СССР, 1948.
4. Сапогин В.Г. Плоские самосогласованные гамильтоновы системы гравитирующих частиц//Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 1996. №3.
5. Сапогин В.Г. Механизмы удержания вещества самосогласованным полем. Таганрог: – Изд-во ТРТУ, 2000. Монографию можно найти на сайте: egf.tsure.ru
6. Сапогин В.Г. Об одном классе точных решений уравнения Эмдена//Изв. высш. учеб. зав. Северо–Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2003. №3.