

Problemas Clássicos em grafos e suas dificuldades

Notas de aula da disciplina IME 04-11312
(Algoritmos em Grafos)

Paulo Eustáquio Duarte Pinto
(pauloedp at ime.uerj.br)

agosto/2021

0. Disposições Gerais

Disposições gerais:

1. Os alunos se comprometem a ter um comportamento ético e disciplinado ao longo do curso.
2. Os alunos implicitamente concordam com a gravação das aulas.
3. Os alunos só usarão os vídeos de aulas gravadas privadamente.

Usaremos alguns protocolos de comunicação nas aulas:

4. Os alunos manterão os microfones desligados após o início da aula.
5. Para falar durante a aula os alunos devem utilizar, preferencialmente o esquema de pedido de palavra do google meet (👋); se este esquema não estiver funcionando, solicitar a palavra pelo chat. O professor olhará esses pedidos em momentos apropriados.

Disposições gerais:

6. Os alunos manterão as câmeras ligadas durante avaliações, mediante aviso do professor.
7. Os alunos entregarão as avaliações nos prazos solicitados e não modificarão as soluções enviadas.
8. Os alunos se comunicarão com o monitor pela Sala de Monitoria, preferencialmente. Em princípio o horário de atendimento é nas tardes. O email do monitor é leocp2504@gmail.com.
9. Todo o material disponível deve ser acessado pelo Classroom.
10. As implementações apresentadas pelo professor serão em uma das linguagens: TuPy ou C++. Aquelas feitas pelos alunos serão, preferencialmente, nessas linguagens. Caso o aluno queira usar outra linguagem deve ter a permissão do professor.

Site do TuPy: <https://gvirtu.github.io/TuPyOnline/>

Disposições gerais:

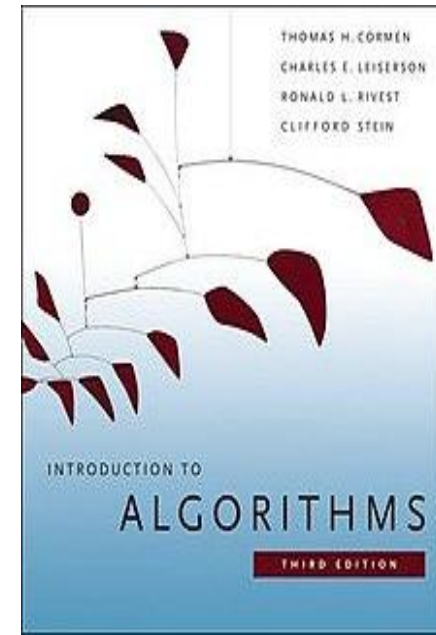
11. As avaliações constarão serão de 4 tipos: 2 provas(P1 e P2), exercícios em aula(ES), exercícios em casa(EC) e exercícios extra(EX).
12. A P1 será realizada em 24/09 e a P2 em 19/11.
13. O esquema de prova final e reposições será informado mais tarde.
14. Nota da disciplina: $NF = (P1+P2)*0,3 + EC*0,3 + ES*0,1 + EX$
15. Observe que:
 - a) Exercícios em casa são parte importante da nota e ajudam a acompanhar bem o curso.
 - b) Exercícios em sala tem influência na nota e só quase sempre só poderão ser feitos durante a aula.
 - c) Exercícios extra só aumentam a nota.

Bibliografia:

J. L. Szwarcfiter, Fabiano S. Oliveira, Paulo E. D. Pinto *Teoria Computacional de Grafos - Os Algoritmos*, Elsevier, 2018.



T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 3rd edition, MIT Press, 2009. (Algoritmos, Elsevier, 2012)



Ideia geral do curso:

Algoritmos são descrições dos passos para se resolver problemas, usando o computador para a solução.

Estruturas de Dados são técnicas para representação de dados, visando a solução computacional de algoritmos.

A representação de dados depende de quais operações serão realizadas.

Ideia geral do curso:

Em termos computacionais, grafos são a **estrutura de dados** mais geral existente. O estudo de **algoritmos** em grafos envolve a teoria de grafos e os aspectos computacionais.

Aspectos teóricos foram vistos na disciplina **Algoritmos em Grafos**, que, na reformulação curricular será chamada **Teoria de Grafos**. A disciplina atual, **Otimização em Grafos**, passará a ser chamada **Algoritmos em Grafos**.

O curso trabalha com as representações de grafos associadas às operações desejadas. Pense, por exemplo, como o Facebook **representa os usuários** para poder rapidamente reconhecer **grupos de amigos**, grupos de pessoas interessadas em questões específicas, havendo bilhões de usuários ?

Temas que serão abordados:

Representações computacionais de grafos

Busca em grafos

Digrafos

Caminhos Mínimos em digrafos

Árvores geradoras mínimas

Fluxo em Redes

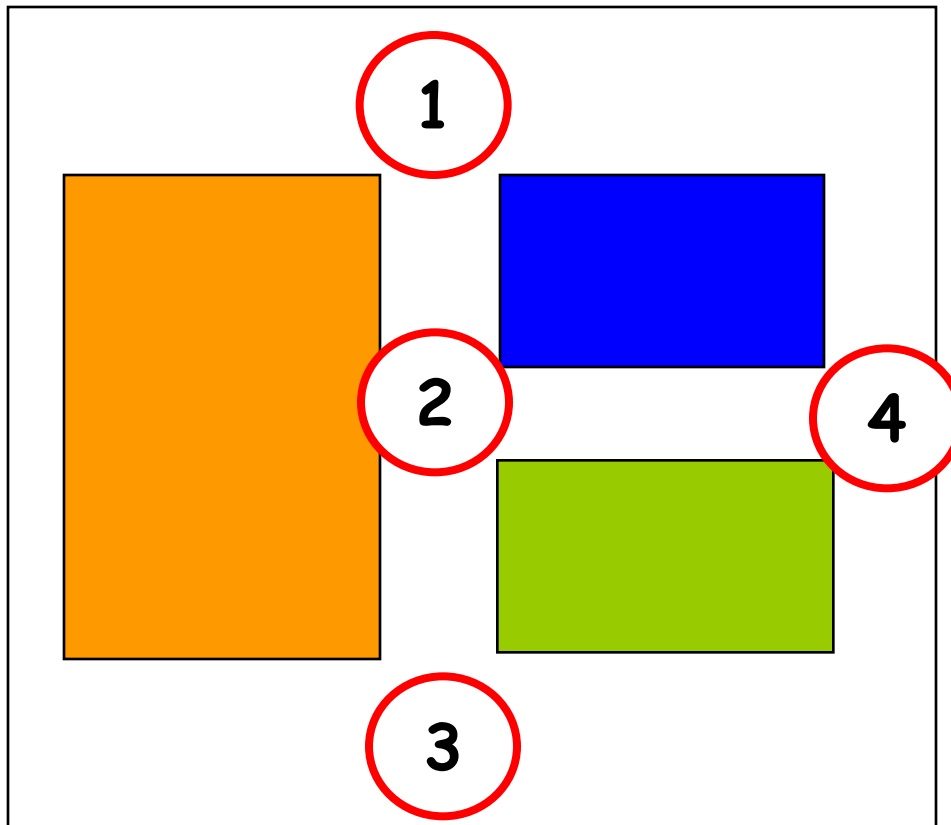
Complementos

Algoritmos em Grafos

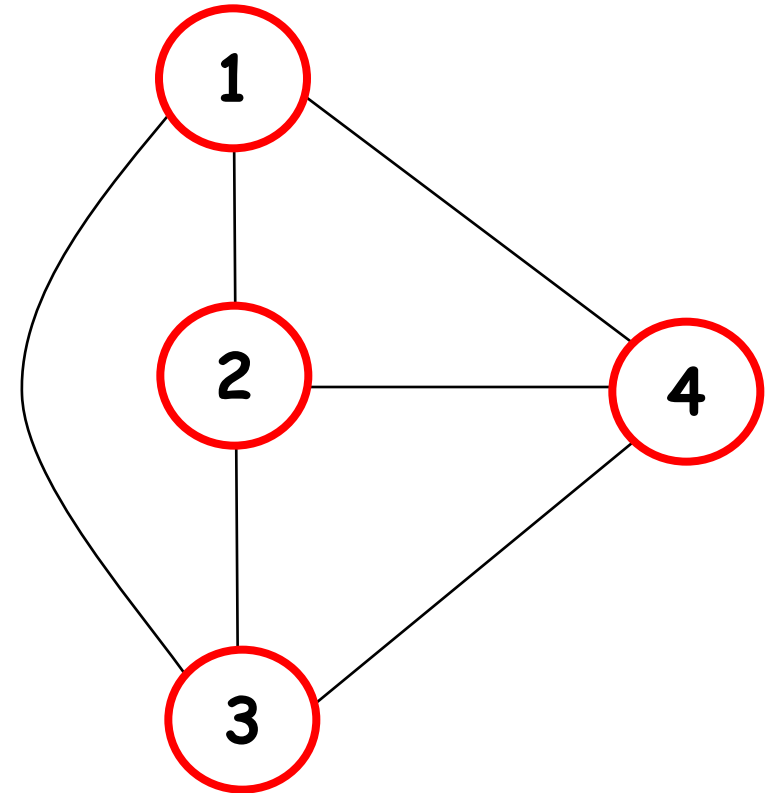
1. Motivação

Grafos - Problemas clássicos em grafos

Estudos de trânsito - orientação de grafo



Mapa de ruas



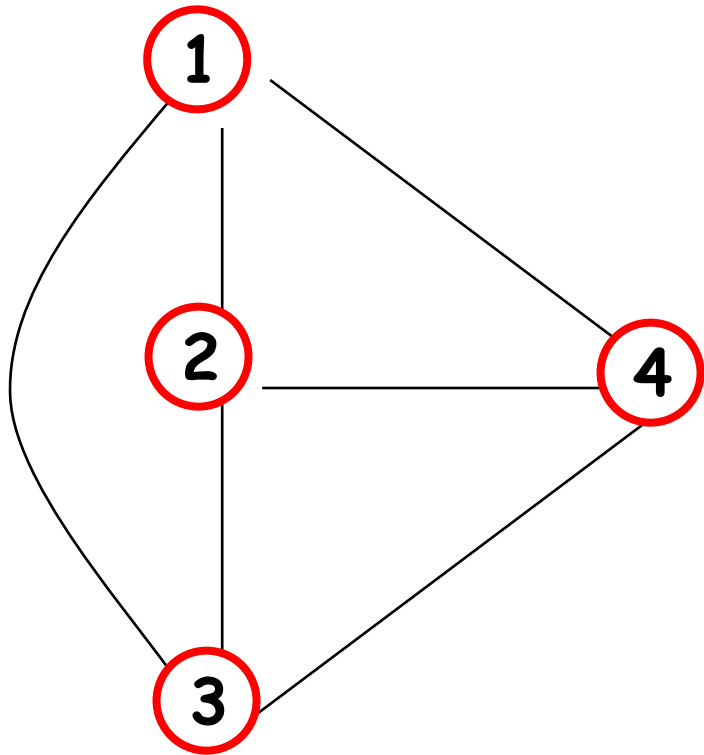
Grafo associado

É possível atribuir mão única a todas as ruas da cidade?

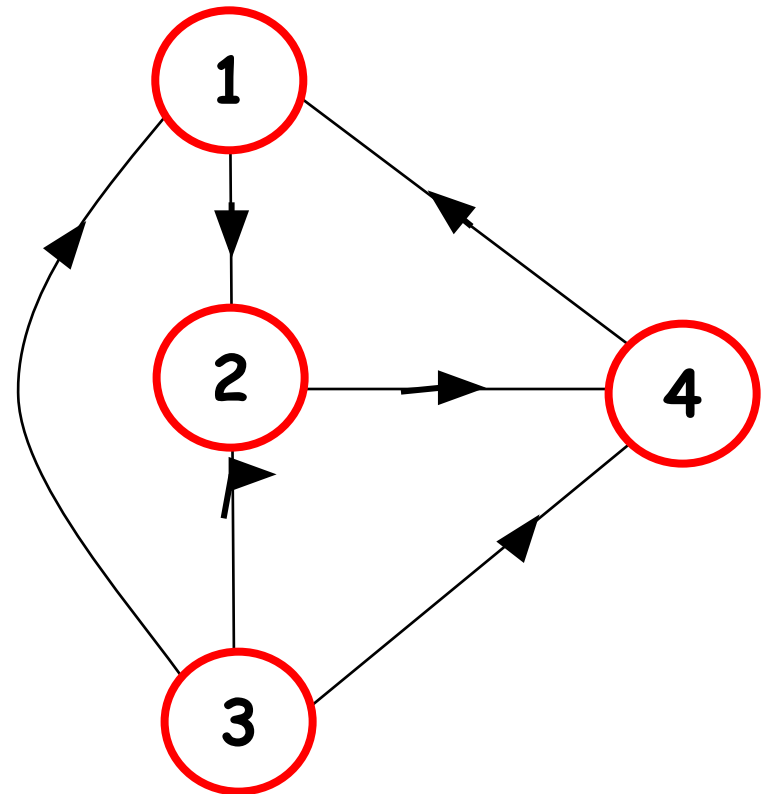
Grafos - Problemas clássicos em grafos

Estudos de trânsito - Alcançabilidade

O Departamento de Trânsito quer mudar o trânsito devido a obras que irão começar. Com a nova configuração algum ponto da cidade ficará inacessível a partir de algum outro?



Grafo associado

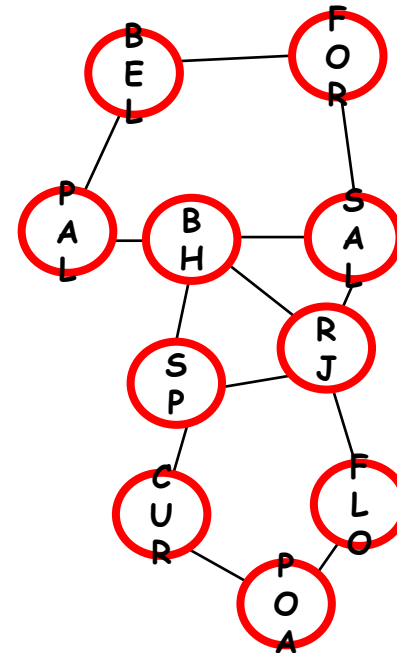
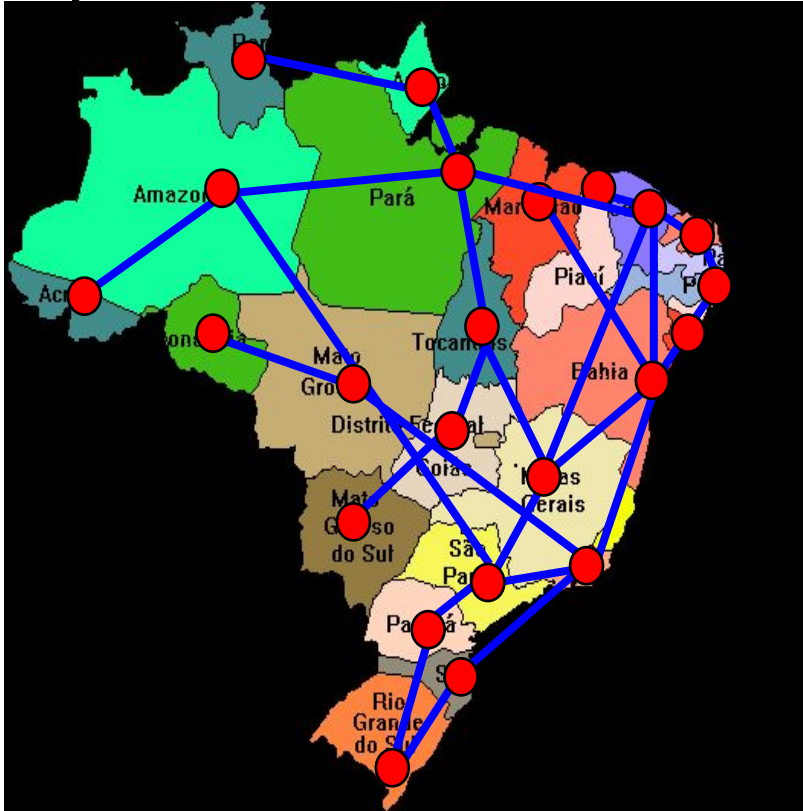


Grafo associado

Grafos - Problemas clássicos em grafos

Caminhos em grafos simples-

Dado um grafo simples, qual o menor e o maior caminho simples entre dois pontos?



Trecho do grafo associado mostrando as estradas

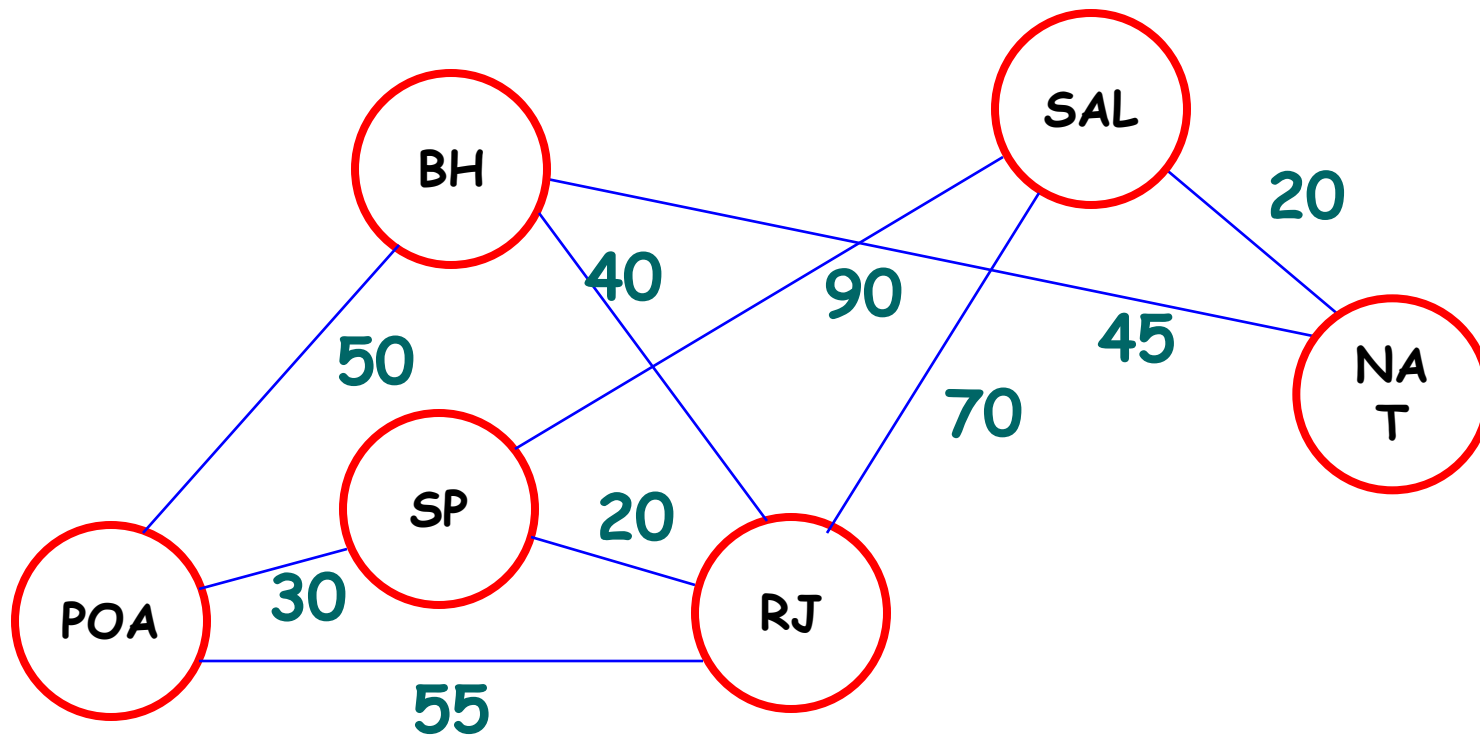
De SP para FLO o menor número de capitais visitadas é 2 e o maior (sem repetir) é 7.

Grafos - Problemas clássicos em grafos

Caminhos em grafos ponderados-

Dado um grafo simples ponderado, qual o caminho de menor custo entre dois pontos?

Escolha de Transporte



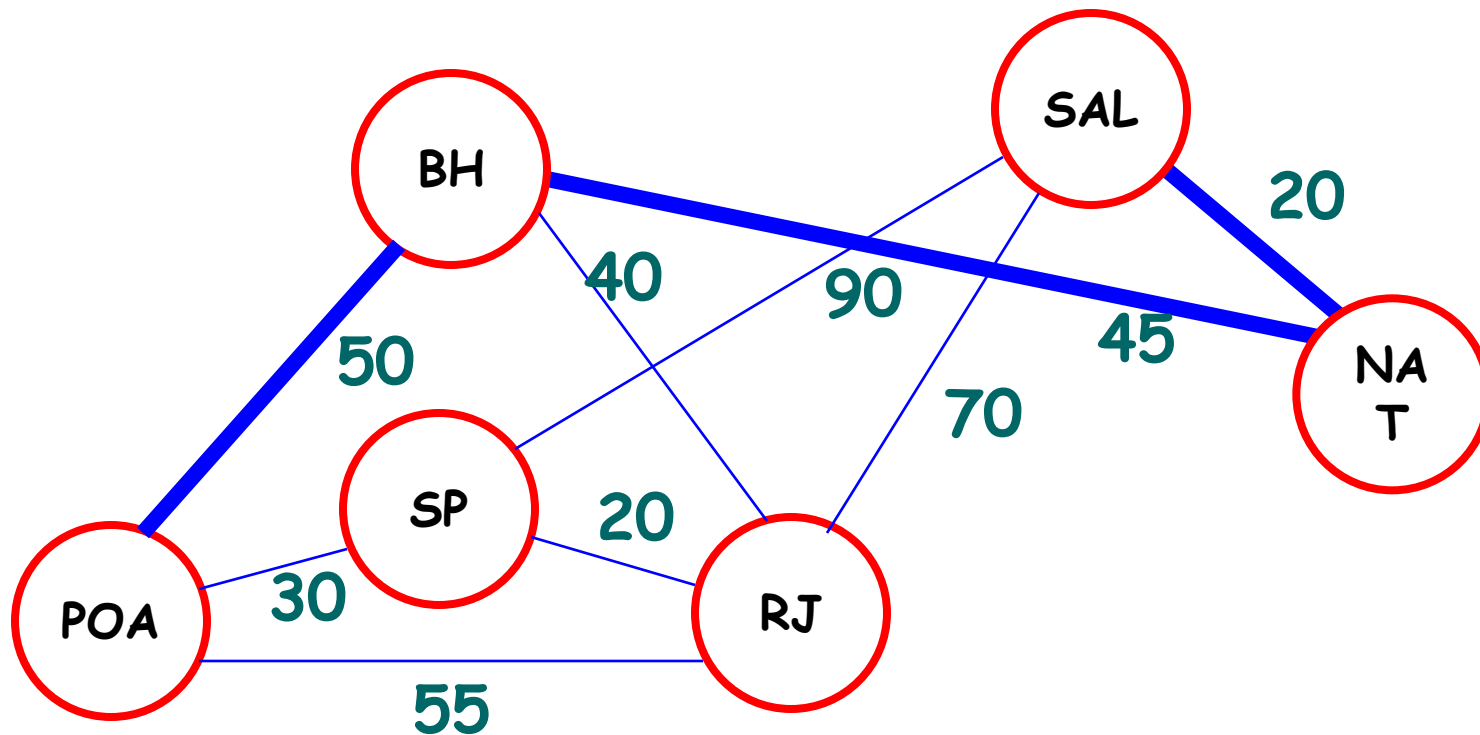
Qual a maneira mais barata de ir de POA a NAT?

Grafos - Problemas clássicos em grafos

Caminhos em grafos ponderados-

Dado um grafo simples ponderado, qual o caminho de menor custo entre dois pontos?

Escolha de Transporte

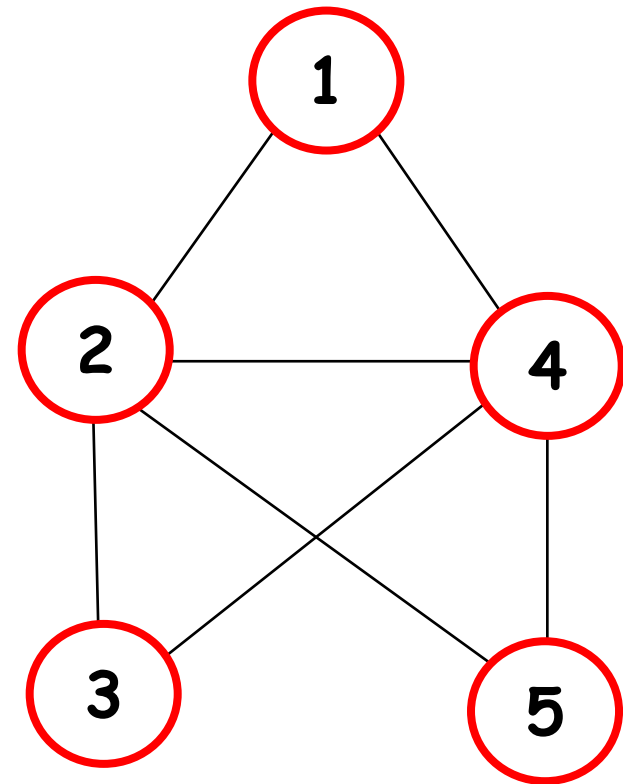
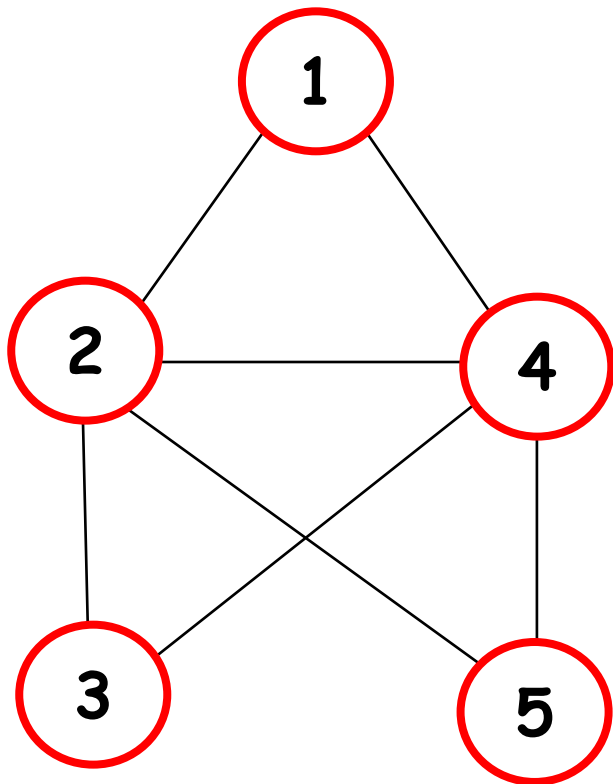


Qual a maneira mais barata de ir de POA a NAT?

Grafos - Problemas clássicos em grafos

Circuito euleriano-

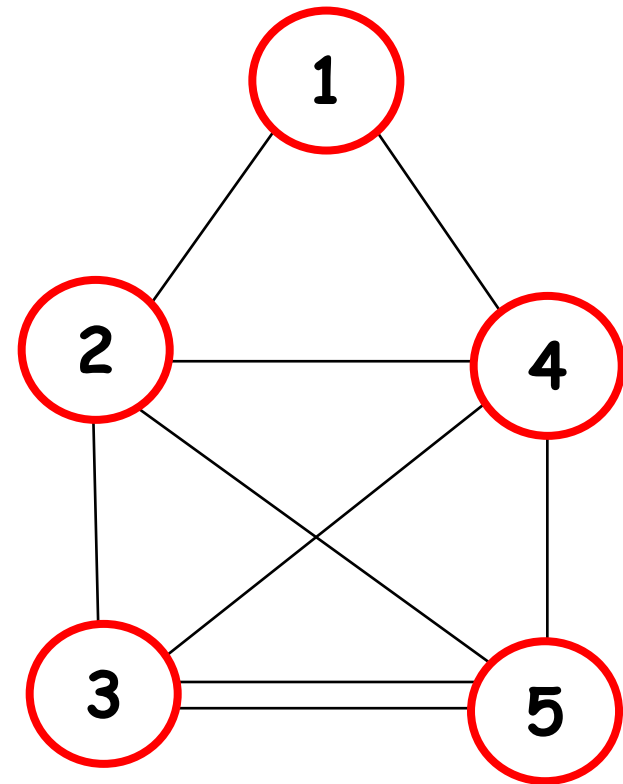
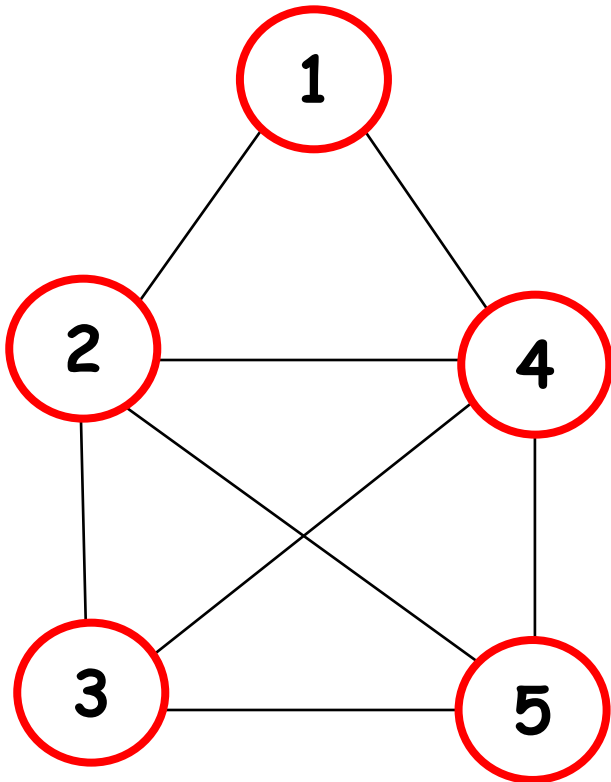
Dado um grafo que representa um trecho de cidade, é possível que um carteiro comece seu trabalho em dado ponto e percorra todos os trechos de rua uma única vez, retornando ao ponto inicial? Como?



Grafos - Problemas clássicos em grafos

Circuito euleriano- Problema do carteiro chinês

quando o grafo não tem circuito euleriano, qual o número mínimo de repetições de arestas para se construir um circuito euleriano?



Grafos - Problemas clássicos em grafos

Circuito hamiltoniano-

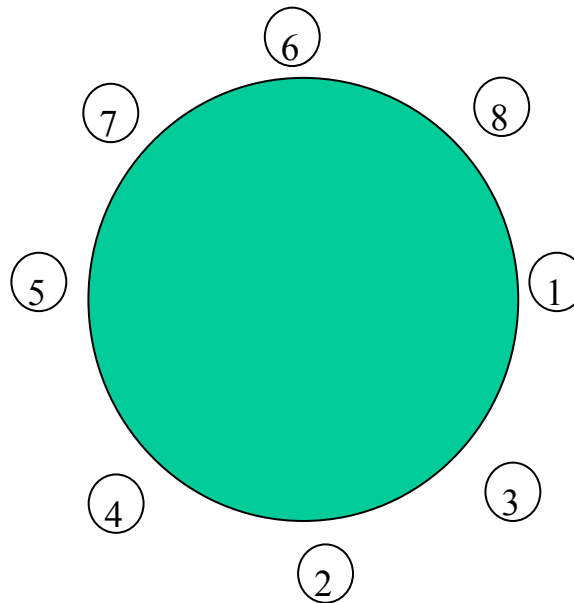
Dado um grafo que representa as amizades entre pessoas, é possível distribuí-las em uma mesa circular tal que inimigos não fiquem um ao lado do outro? Como?

Convidados:

- Dilma
- Aécio
- Pelé
- Maradona
- Obama
- Putin
- ...

Inimizados:

- Dilma x Aécio
- Pelé x Maradona
- Obama x Putin
- ...



Solução do problema:

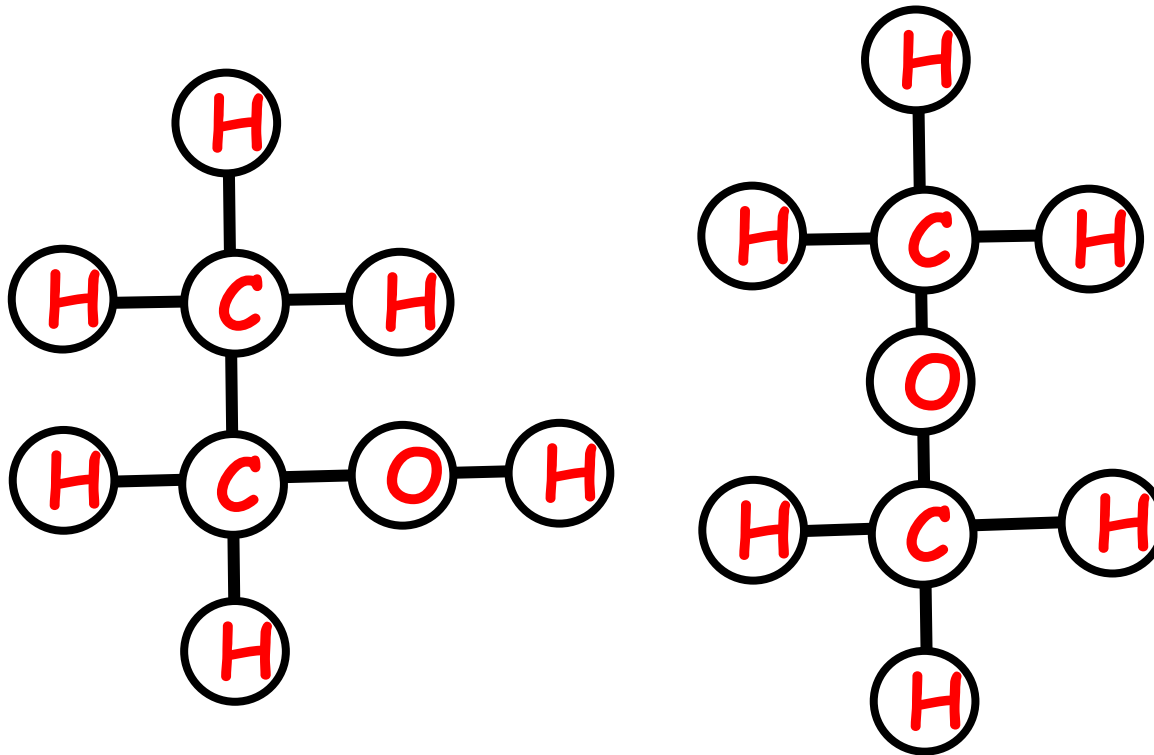
Criar um grafo completo dos convidados, eliminar as arestas das inimizades e procurar um ciclo Hamiltoniano no mesmo

Grafos - Problemas clássicos em grafos

Isomorfismo de grafos -

Dados dois grafos eles são isomorfos?

Grafo de Moléculas

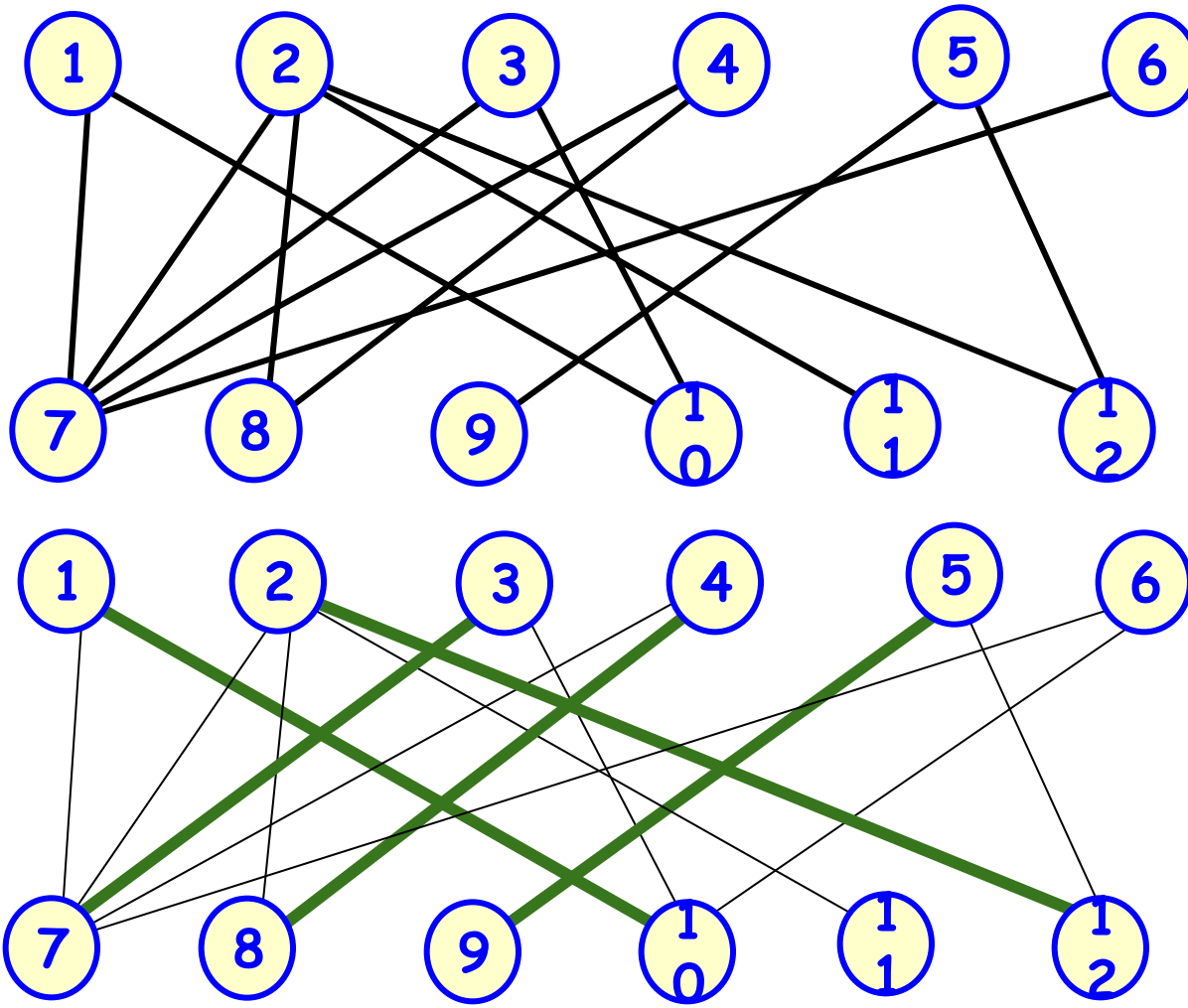


Os isômeros C_2H_6O são o mesmo produto?

Grafos - Problemas clássicos em grafos

Emparelhamento máximo em grafo bipartido -

Casamento ótimo: Dados n rapazes e m garotas e os interesses, determinar o maior número de casais que podem ser formados

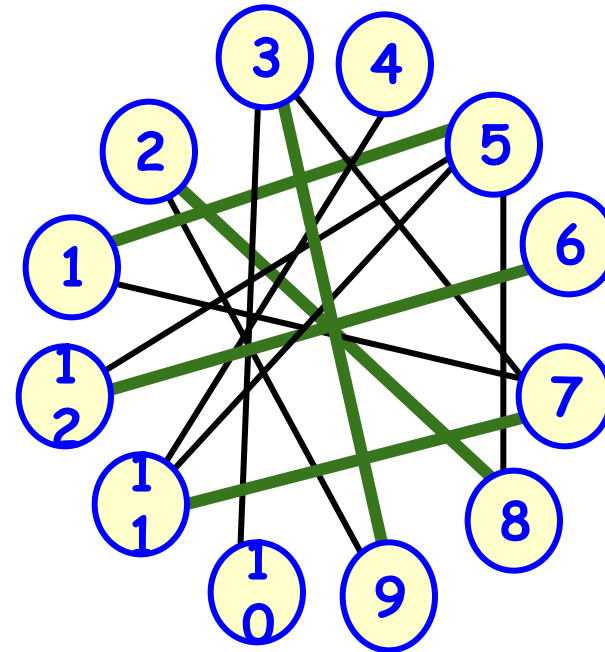
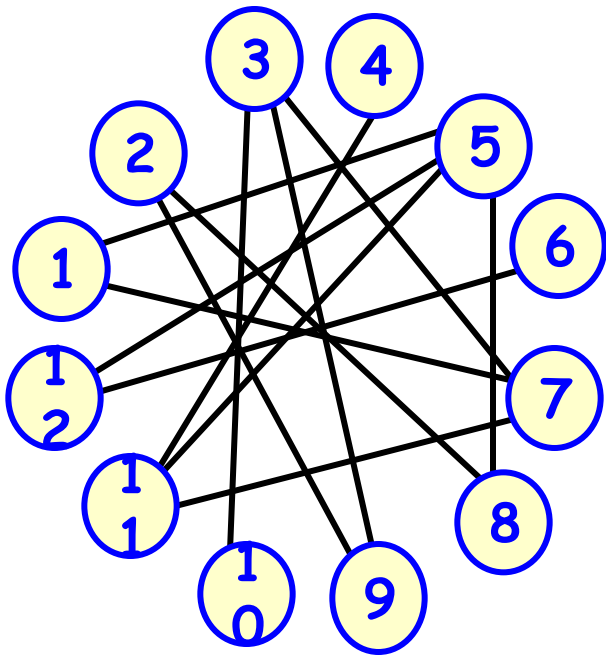


**Solução
ótima:
5**

Grafos - Problemas clássicos em grafos

Emparelhamento máximo em grafo qualquer -

Jogo de recrutamento: Dadas n candidatos e seus conhecimentos, determinar o maior número de duplas de desconhecidos que podem ser formadas.



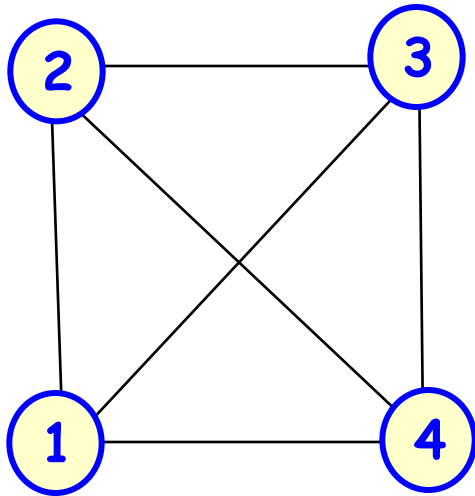
**Solução
ótima
5**

Obs: fez-se o grafo dos "desconhecimentos"

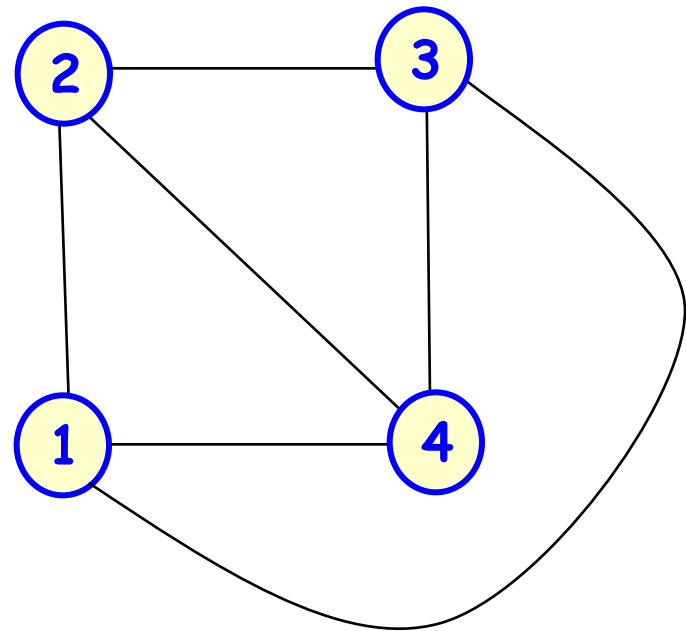
Grafos - Problemas clássicos em grafos

Planaridade-

Dado o grafo de um circuito eletrônico, ele é planar? Se for significa que o circuito pode ser implementado apenas com uma placa.



K_4 é planar?

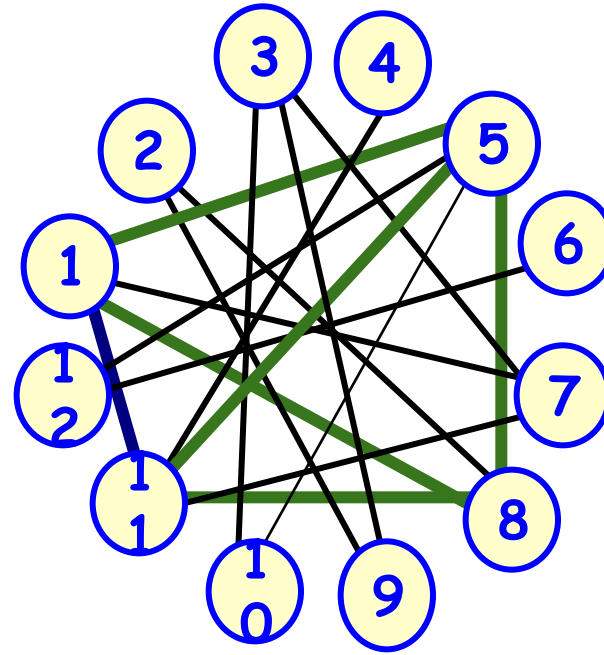
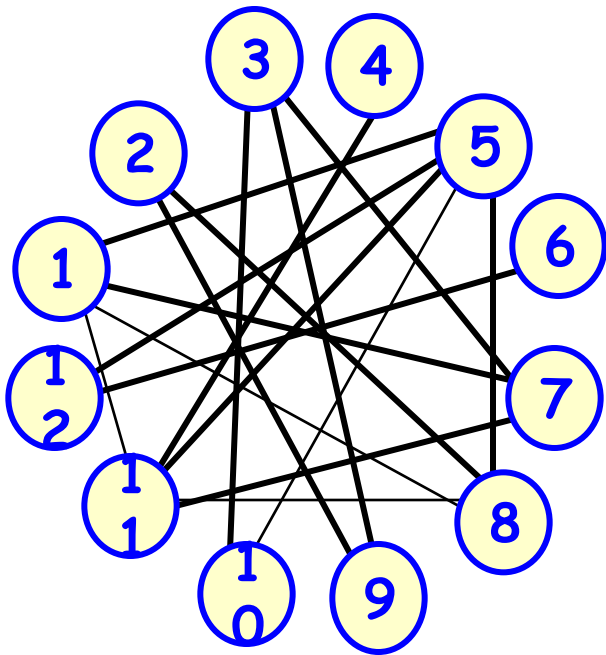


R: Sim

Grafos - Problemas clássicos em grafos

Clique máxima-

Redes sociais: Dados os relacionamentos numa rede social, qual o maior grupo de pessoas onde todos são relacionados dois a dois?

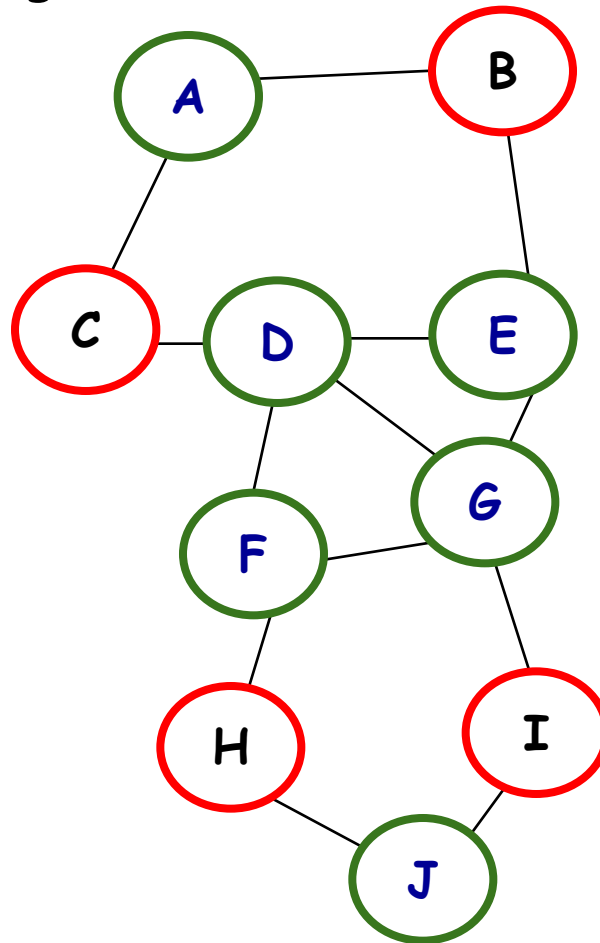
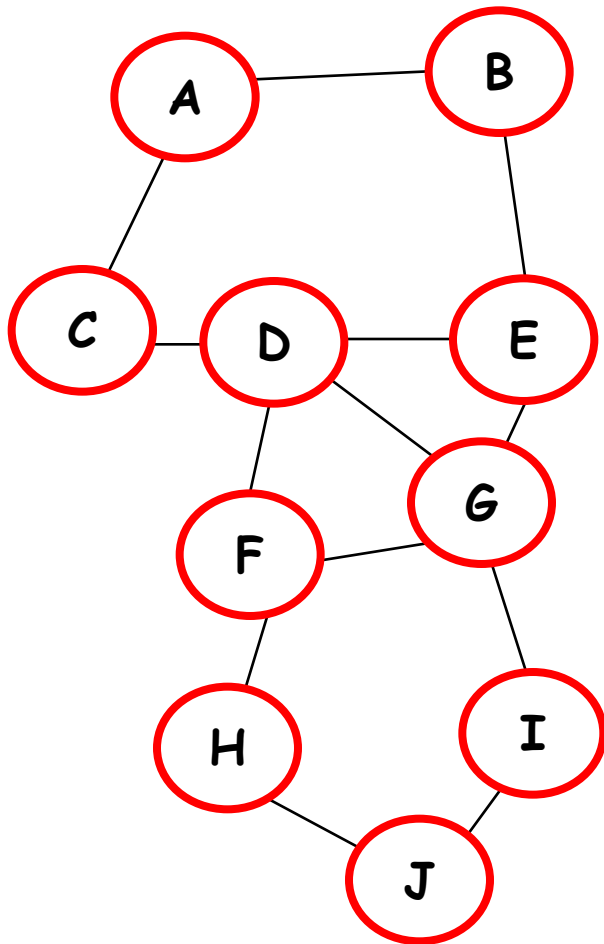


**Clique
máxima:
4**

Grafos - Problemas clássicos em grafos

Cobertura mínima de vértices-

Segurança: Dado o mapa de um trecho de cidade, qual o número mínimo de cabines de polícia a serem colocadas tal que todos os trechos de rua possam ser vigiados das cabines?



**Cobertura
mínima: 6**

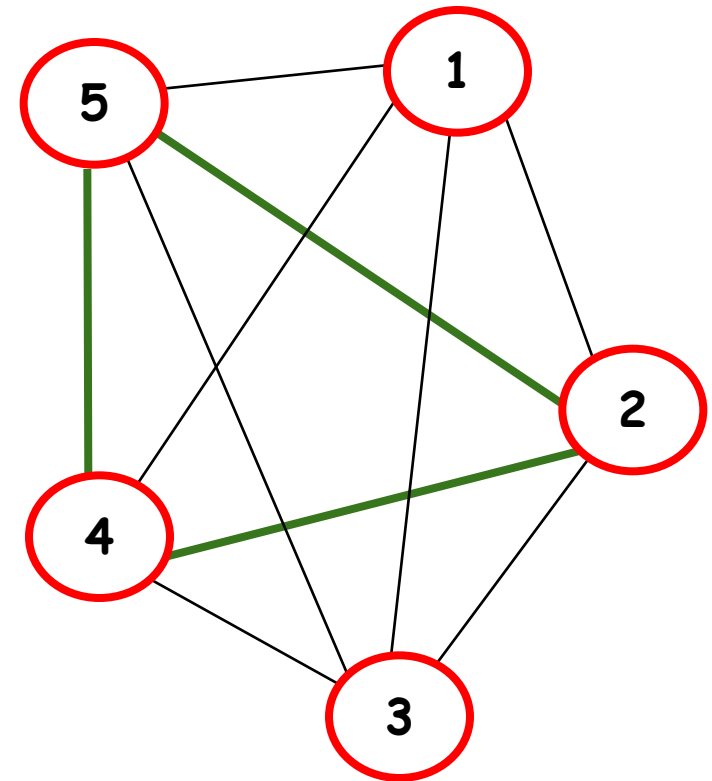
Grafos - Problemas clássicos em grafos

Busca de ciclos negativos-

Arbitragem: Dadas as taxas de conversão de moedas existe uma oportunidade de ganhar dinheiro sucessivamente fazendo câmbios de diversas moedas?

	USD	EUR	GPH	CHF	CAD
USD	1	0.741	0.657	1.061	1.011
EUR	1.350	1	0.888	1.433	1.366
GPH	1.521	1.126	1	1.614	1.538
CHF	0.943	0.698	0.620	1	0.953
CAD	0.995	0.732	0.650	1.049	1

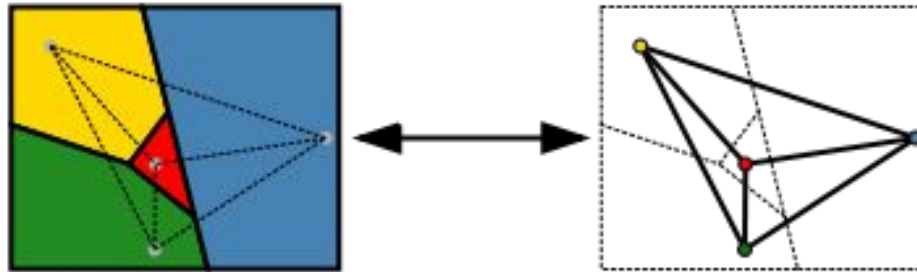
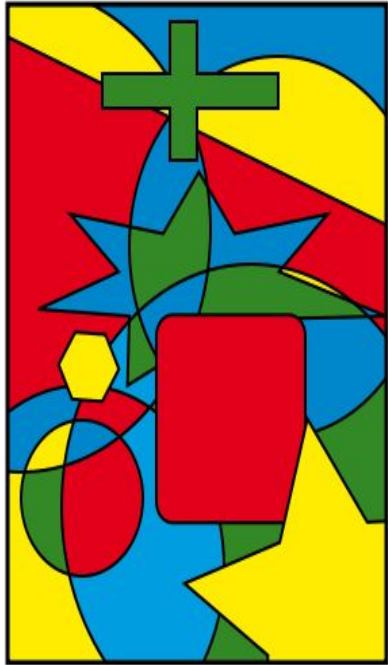
Observe que $\text{USD} \times \text{EUR} \times \text{CAD} \times \text{USD} =$
 $1 \times 0.741 \times 1.366 \times 0.995 = 1.00714497.$



O problema é resolvido criando-se um grafo adequado e procurando ciclos negativos no mesmo.

Grafos - Problemas clássicos em grafos

Coloração de mapas:



Teorema "provado" em 1976, por Appel e Hacken.

Todo grafo planar pode ser colorido com 4 cores, no máximo, através de um algoritmo polinomial.

P: Dado um grafo planar, ele pode ser colorido com apenas 3 cores?

R: A resposta é difícil, pois o problema é NP-Completo

P: Poderia também ser colorido com apenas 2 cores?

R: Resposta fácil, com um algoritmo linear

Grafos - Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

Dificuldades consideradas para os problemas:

- F** - tem algoritmo polinomial fácil de implementar
- T** - tem algoritmo polinomial difícil de implementar
- I** - provavelmente só tem algoritmos exponenciais
- ?** - dificuldade desconhecida

Problemas considerados:

Conectividade - determinar se o grafo é conexo.

Circuito Euleriano - apresentar um circuito euleriano para o grafo

Ciclo Hamiltoniano - apresentar um ciclo hamiltoniano para o grafo

Emparelhamento bipartido - apresentar um emparelhamento máximo em um grafo bipartido

Emparelhamento máximo - apresentar um emparelhamento máximo em um grafo qualquer

Planaridade - determinar se dado grafo é planar

Clique máxima - determinar a maior clique do grafo

Grafos - Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

2-colorabilidade - determinar se o grafo pode ser colorido com 2 cores

3-colorabilidade - determinar se o grafo pode ser colorido com 3 cores

Menores caminhos - encontrar o menor caminho entre dois vértices dados

Maiores caminhos - encontrar o maior caminho entre dois vértices dados

Cobertura de vértices - encontrar uma cobertura mínima de vértices

Isomorfismo - determinar se dois grafos dados são isomorfos

Fechamento transitivo - determinar a alcançabilidade em um digrafo

Conectividade forte - determinar os componentes fortemente conexos

Ciclo de tamanho par - encontrar um ciclo de tamanho par num digrafo

Ciclo de tamanho ímpar - encontrar um ciclo de tamanho ímpar num digrafo

Árvore Geradora Mínima - encontrar a árvore geradora de custo mínimo de um grafo ponderado

Grafos - Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

Caixeiro Viajante - encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo em um grafo ponderado

Menores caminhos (pesos positivos) - encontrar o caminho de custo mínimo entre um par de vértices em um grafo ponderado com pesos positivos

Menores caminhos (pesos negativos) - encontrar o caminho de custo mínimo entre um par de vértices em um grafo ponderado com pesos negativos

Fluxo máximo - determinar o fluxo máximo em uma rede, dadas as capacidades das arestas

Alocação - apresentar um emparelhamento máximo em um grafo ponderado

Fluxo máximo/custo mínimo - determinar o fluxo máximo em uma rede, dadas as capacidades das arestas considerando custos nas arestas

Grafos - Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

GRAFOS SIMPLES	F	T	I	?
Conectividade	X			
Circuito Euleriano	X			
Ciclo Hamiltoniano			X	
Emparelhamento bipartido	X			
Emparelhamento máximo		X		
Planaridade		X		
Clique máxima			X	
2-colorabilidade	X			
3-colorabilidade			X	
Coloração de mapas		X		
Menores caminhos	X			
Maiores caminhos			X	
Cobertura de vértices			X	
Isomorfismo				X

Grafos - Problemas clássicos em grafos e suas dificuldades

DIGRAFOS	F	T	I	?
Fechamento transitivo	X			
Conectividade forte	X			
Ciclo de tamanho par	X			
Ciclo de tamanho ímpar		X		
GRAFOS PONDERADOS				
Árvore Geradora Mínima	X			
Caixeiro Viajante			X	
REDES				
Menores caminhos (pesos positivos)	X			
Menores caminhos (pesos negativos)			X	
Fluxo máximo	X			
Alocação		X		
Fluxo máximo/custo mínimo		X		

FIM