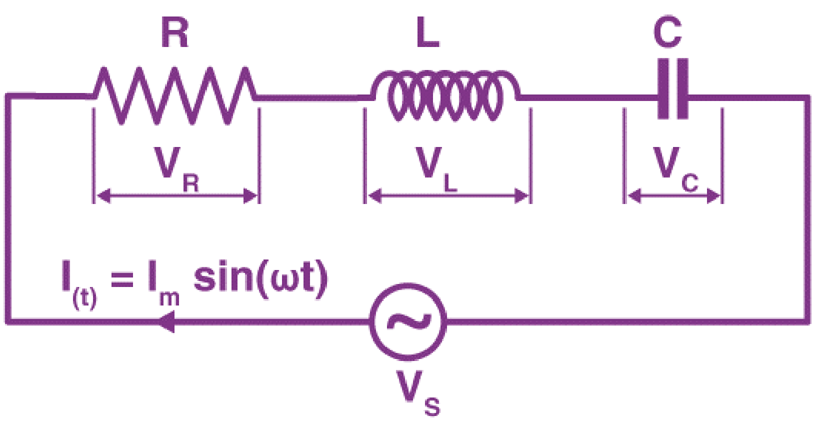
Éléments de Physique : Électromagnétisme

CHAPITRE 8 : CIRCUITS EN COURANT ALTERNATIF

Jérémy Brisbois – 2023-2024

Table des matières

- Valeurs efficaces et instantanées
- Diagrammes de Fresnel et réactance
- Circuits RLC, impédance et déphasage



Circuits en courant alternatif

Parmi les composants que nous avons vus, certains (C et L) ont une réponse qui dépend du temps.

En courant alternatif, leur **réponse** dépend donc de la **fréquence**.

$$\underbrace{\omega}_{\text{pulsation}} = 2\pi \underbrace{f}_{\text{fréquence}}$$

Pour les courants et les tensions dans un circuit, on distingue

- les **valeurs instantanées** : $V(t)$, $I(t)$
- les **valeurs efficaces** (moyennées dans le temps) : V_{eff}, I_{eff}

Puissance dissipée

En courant alternatif, la loi d'Ohm est toujours vérifiée : $V(t) = RI(t)$.

- La **puissance instantanée** s'écrit toujours $P(t) = V(t)I(t) = RI(t)^2$.
- Par contre, la **puissance moyenne** sur un intervalle de temps est

$$\bar{P} < RI_{\max}^2$$

Si on alimente R avec une tension sinusoïdale $\varepsilon(t) = \varepsilon_{\max}\sin(\omega t)$, le courant s'écrit $I(t) = I_{\max}\sin(\omega t)$ et est en moyenne nul sur une période du signal.

- Par contre, la puissance dissipée sur une période vaut

$$\bar{P} = \int_{\text{période}} RI(t)^2 = \frac{RI_{\max}^2}{2} = RI_{\text{eff}}^2,$$

où la **valeur efficace** (RMS) du courant est $I_{\text{eff}} = \dfrac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$.

Valeurs efficaces

Pour une **FEM sinusoïdale**, on obtient les relations suivantes :

- **Courant efficace** :

$$\boxed{I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}}$$

- **Tension efficace** :

$$\boxed{V_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{max}}}{\sqrt{2}}}$$

- La **loi d'Ohm** reste valable pour les valeurs efficaces :

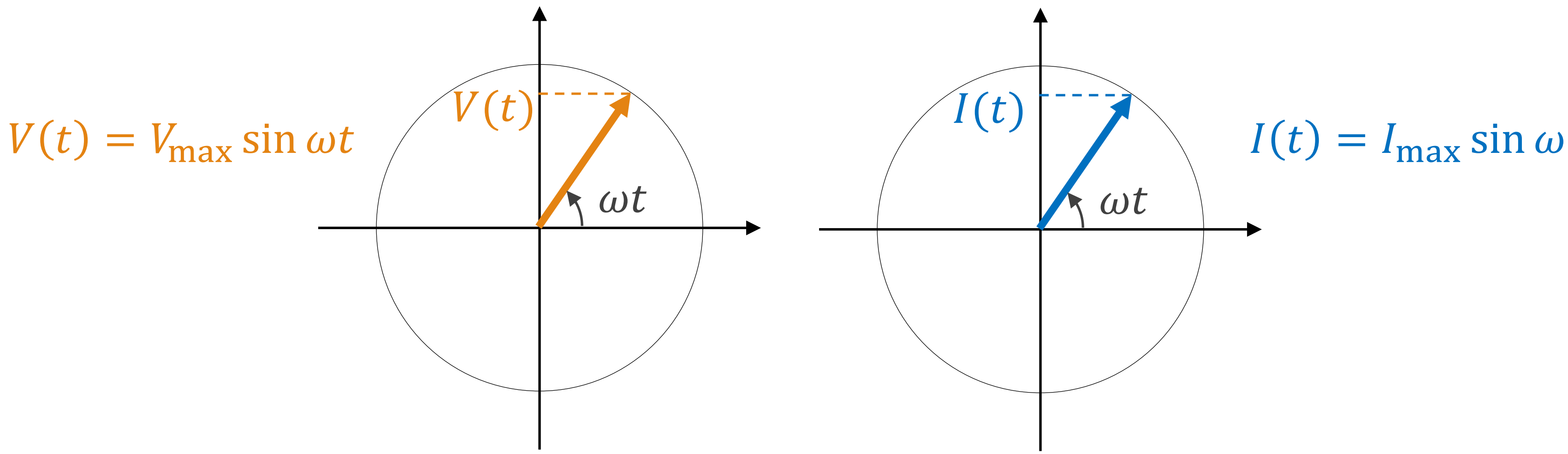
$$\boxed{V_{\text{eff}} = RI_{\text{eff}}}$$

Un circuit en courant alternatif avec les valeurs efficaces $V_{\text{eff}}, I_{\text{eff}}$, dissipe exactement la même énergie qu'un circuit en courant continu avec $V_{\text{eff}}, I_{\text{eff}}$.

Valeurs instantanées

À un instant t donné, quelle sera la valeur de $I(t)$ et $V(t)$ dans chacun des composants ?

- $V(t)$ et $I(t)$ varient de façon (co)sinusoïdale : leur évolution peut être représentée graphiquement dans un **diagramme de Fresnel**.

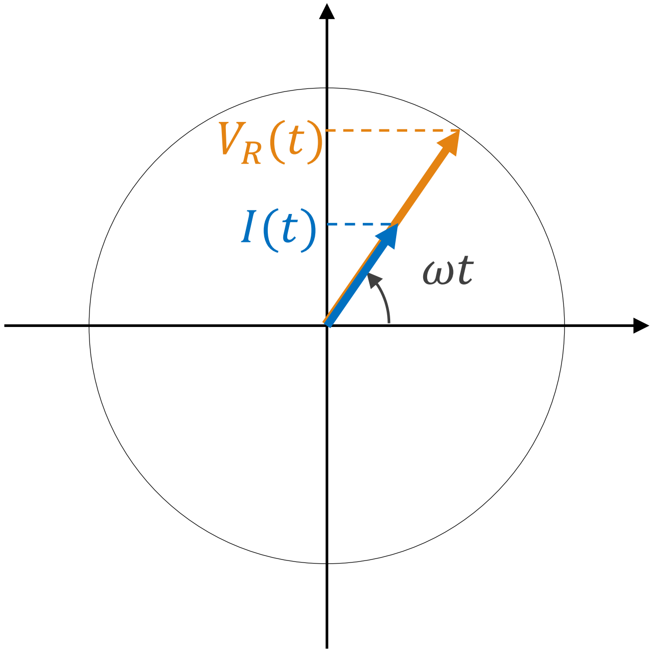


- Chaque grandeur est représentée par un vecteur tournant à une vitesse angulaire ωt autour de l'origine d'un cercle trigonométrique.
  - Le module du vecteur donne la valeur maximale $(I_{\max}, V_{\max})$.
  - La projection du vecteur sur l'axe vertical donne la valeur instantanée $(I(t), V(t))$.

Diagrammes de Fresnel : R

Résistance R

- Une résistance est un élément passif : la réponse ne dépend pas de la fréquence.



$$V_R(t) = V_{\max} \sin \omega t$$

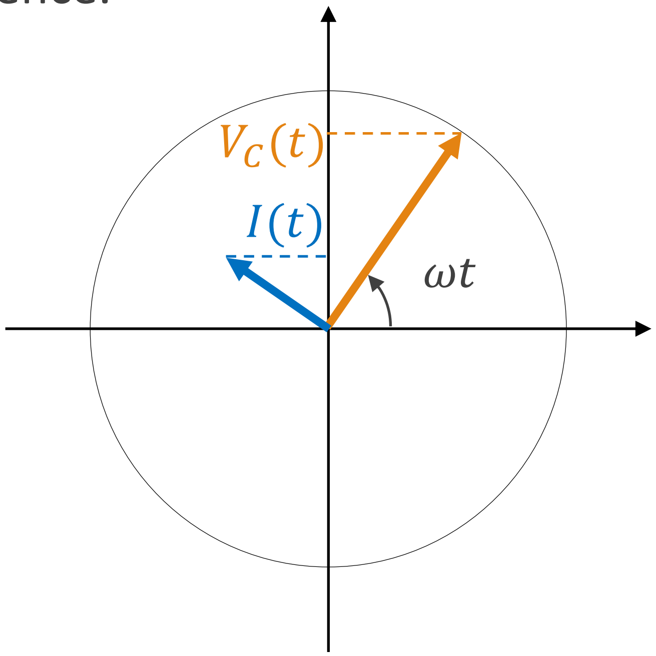
$$I(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_{\max}}{R} \sin \omega t$$

- La tension aux bornes de la résistance et le courant sont **en phase**.

Diagrammes de Fresnel : C

Capacité C

- Un condensateur est un élément actif : la réponse dépend de la fréquence.



$$V_C(t) = V_{\max} \sin \omega t$$

$$Q(t) = CV_C(t) = CV_{\max} \sin \omega t$$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \omega C V_{\max} \cos \omega t$$

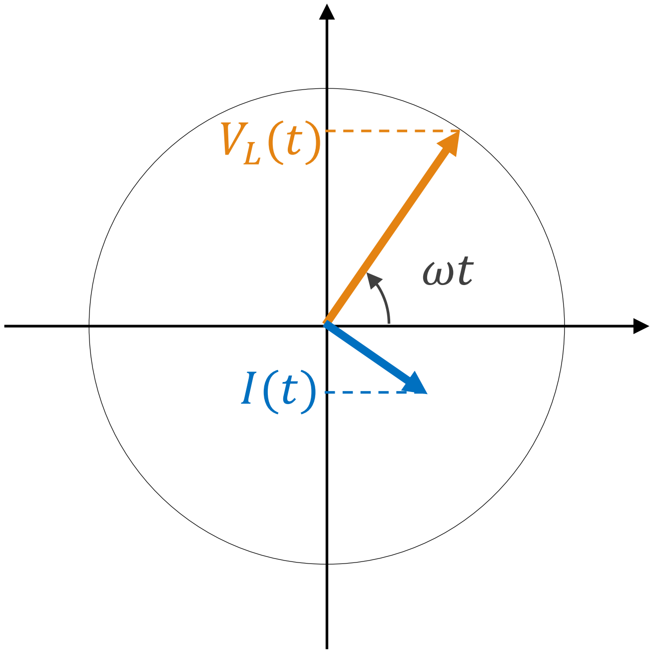
$$\cos \omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

- La **tension** aux bornes du condensateur est **en retard de $\frac{\pi}{2}$** (ou 90°) sur le **courant**. Réciproquement, I est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur V.

Diagrammes de Fresnel : L

Inductance L

➢ Une bobine est un élément actif : la réponse dépend de la fréquence.



$$V_L(t) = V_{\max} \sin \omega t$$

$$V_L(t) = L\frac{dI}{dt} \Leftrightarrow dI = \frac{V_{\max}}{L} \sin \omega t \, dt$$

$$I(t) = \int \frac{V_{\max}}{L} \sin \omega t \, dt = -\frac{V_{\max}}{\omega L} \cos \omega t$$

$$-\cos \omega t = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

➢ La **tension** aux bornes de la bobine est **en avance de $\frac{\pi}{2}$** (ou 90°) sur le **courant**. Réciproquement, I est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur V.

Réactance

La résistance R relie V à I (à travers la loi d'Ohm) :

$$V_R(t) = RI(t)$$

Dans le cas de L et C, on peut écrire une relation similaire en définissant une grandeur analogue à la résistance : la **réactance** X.

Unités : ohm (Ω)

- Capacité C : $I(t) = \omega C V_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega C\, V\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$

$$V_C\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{I(t)}{\omega C} = X_c I(t)$$

$$\boxed{X_c = \frac{1}{\omega C}}$$

- Inductance L : $I(t) = \frac{V_{\max}}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\omega L} V\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$V_L\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \omega L\, I(t) = X_L I(t)$$

$$\boxed{X_L = \omega L}$$

Réactance

Propriétés

- X dépend de la fréquence f (de la pulsation $\omega = 2\pi f$) :
  - lorsque $\omega \to +\infty$: $X_C \to 0, X_L \to +\infty$
  - lorsque $\omega \to 0$ (courant continu) : $X_C \to +\infty, X_L \to 0$

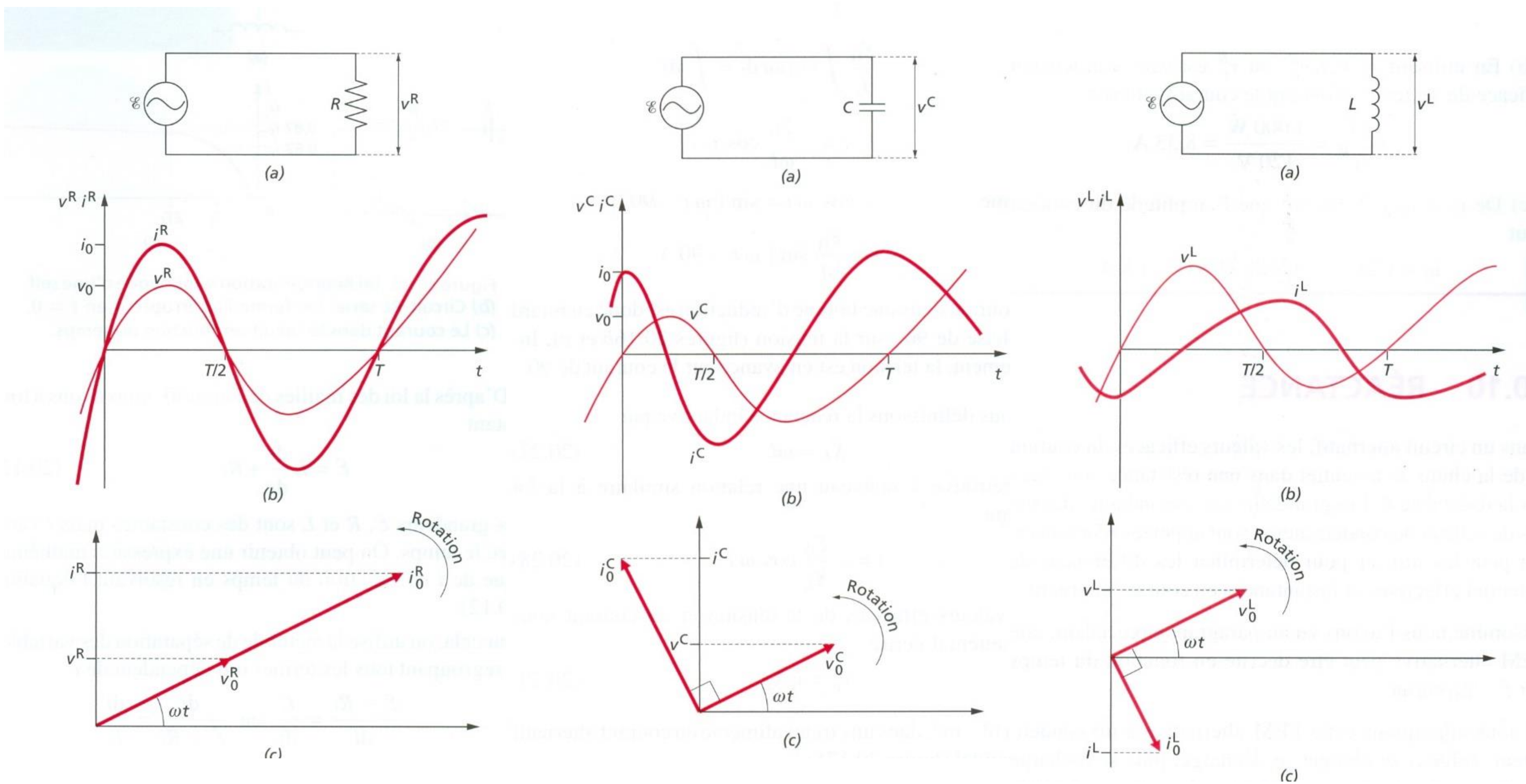
- La valeur absolue de X relie I_{eff} et V_{eff} :

$$V_{C,\text{eff}} = X_C I_{\text{eff}} \qquad V_{L,\text{eff}} = X_L I_{\text{eff}}$$

- Remarque : $I(t)$ et $V(t)$ sont déphasés, donc X peut être traité comme un nombre complexe :

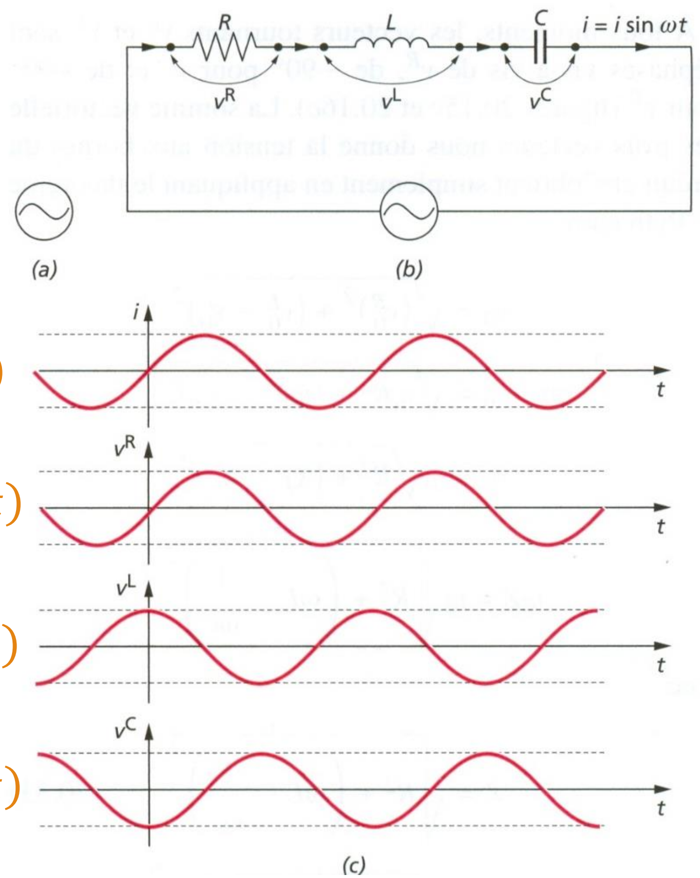
$$X_c = \frac{i}{\omega C} \qquad X_L = -i\omega L$$

Résumé : diagrammes de Fresnel



Circuit RLC

Les lois de Kirchhoff sont toujours valables instantanément, mais pas en valeur efficace !



$I(t)$

$V_R(t)$

$V_L(t)$

$V_C(t)$

Exemple :

$I_{\max} = 0.5$ A et $\omega = 1000$ Hz

$R = 10\ \Omega,\ X_L = X_C = 20\ \Omega$

- En $t = 0$: $V_R = 0$, $V_L = 10$ V, $V_C = -10$ V
- En t quelconque : $V_L(t) = -V_C(t)$,

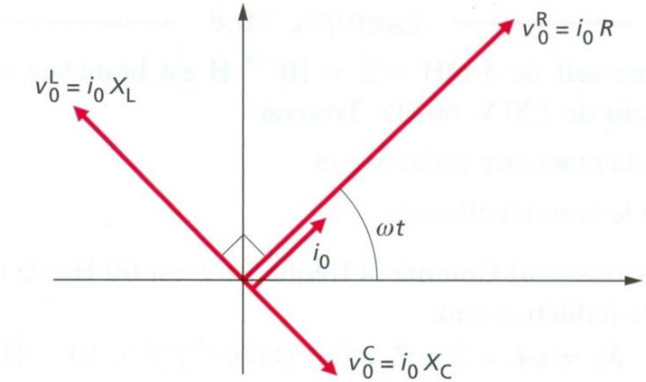
  donc $V(t) = V_R(t) = 5\sin(1000\ t)$
- $V_{R,\text{eff}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$ V et $V_{L,\text{eff}} = V_{C,\text{eff}} = \frac{10}{\sqrt{2}}$ V

Impédance

Jusqu'à présent, nous avons considéré chacun des éléments séparément. Qu'en est-il lorsqu'on veut décrire un circuit ?

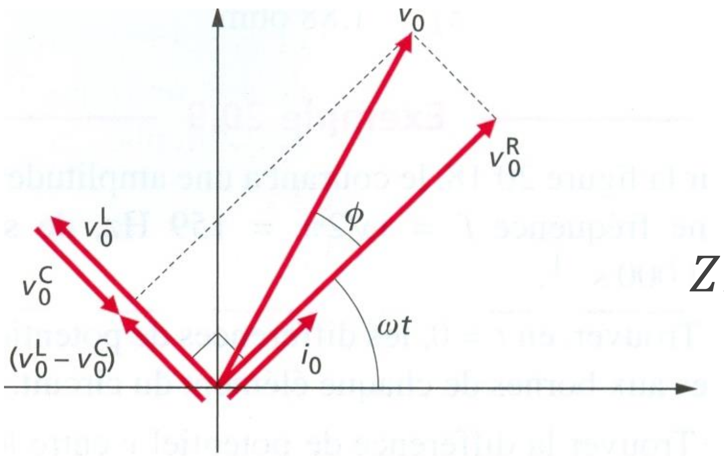
- En **courant continu** (source de FEM constante), on obtient I en calculant la **résistance équivalente** du circuit.
- En **courant alternatif** (source de FEM variable), on obtient I en calculant l'**impédance équivalente** du circuit.

On fixe le courant et on cherche le vecteur représentant la tension aux bornes du circuit = somme vectorielle des tensions aux bornes des éléments du circuit (loi des mailles : $\Delta V = 0$).



Impédance

Pour calculer $V_{\max}$, on somme les vecteurs dans le diagramme de Fresnel :



$$V_{\max} = \sqrt{V_{R,\max}^2 + (V_{L,\max} - V_{C,\max})^2}$$

$$ZI_{\max} = \sqrt{R^2 I_{\max}^2 + (X_L I_{\max} - X_C I_{\max})^2}$$

On obtient l'**impédance** totale du circuit : $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$

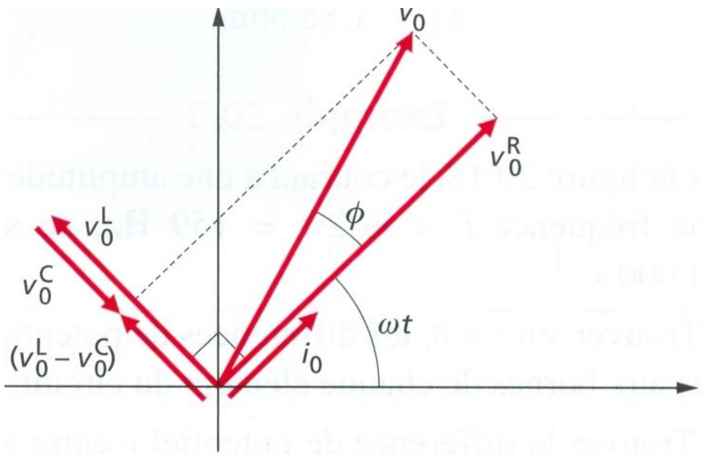
Unités : ohms (Ω)

L'impédance donne la relation entre le courant (max ou effectif) et la tension (max ou effective) :

$\boxed{V_{\max} = ZI_{\max}}$ $\boxed{V_{\text{eff}} = ZI_{\text{eff}}}$

Déphasage total

Sur base de la même figure, on calcule l'angle de phase ϕ entre la tension aux bornes du circuit et le courant :



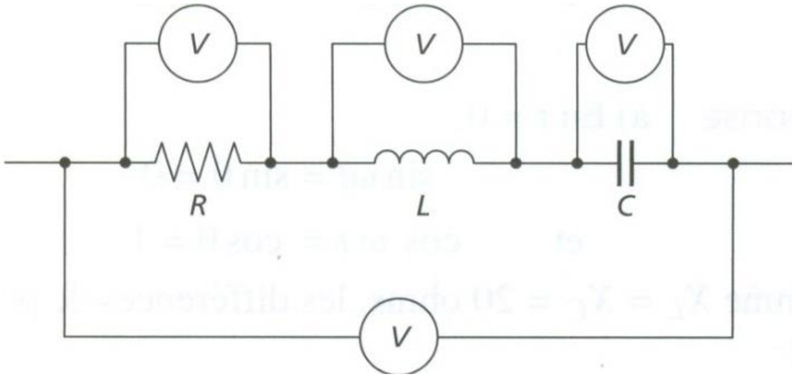
$$\boxed{\tan\phi = \frac{V_{L,\max} - V_{C,\max}}{V_{R,\max}} = \frac{X_L - X_C}{R}}$$

$$\boxed{\cos\phi = \frac{V_{R,\max}}{V_{\max}} = \frac{R}{Z}}$$

- Si $\phi > 0$, la tension est **en avance** sur le courant.
- Si $\phi < 0$, la tension est **en retard** sur le courant.
- Si $\phi = 0$, la tension et le courant sont **en phase**.

Exemple

Calculer l'impédance pour le circuit RLC série ci-dessous alimenté par une FEM sinusoïdale ($\varepsilon_{\max} = 100$ V, $\omega = 1000$ Hz), avec $R = 400\ \Omega$, $L = 0{,}4$ H et $C = 10^{-5}$ F.



$$X_c = \frac{1}{\omega C} = 100\ \Omega$$

$$X_L = \omega L = 400\ \Omega$$

$$\rightarrow\ Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{400^2 + (400 - 100)^2} = 500\ \Omega$$

Que vaut le courant efficace ?

$$\varepsilon_{\text{eff}} = Z I_{\text{eff}} \qquad \rightarrow I_{\text{eff}} = \frac{\varepsilon_{\text{eff}}}{Z} = \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{2}\, Z} = \frac{100}{\sqrt{2}\, 500} = 0{,}14\ \text{A}$$

Puissance dissipée

Quelle est la puissance consommée par le circuit ?

Dans un circuit en courant alternatif, l'énergie est accumulée puis rendue par les bobines et condensateurs :

- charge accumulée, puis rendue (C)
- champ magnétique emmagasiné, puis rendu (L)

L'énergie est uniquement dissipée dans les résistances sous forme de chaleur.

La puissance moyenne dissipée s'écrit :

$$\boxed{\bar{P} = RI_{\mathrm{eff}}^2}$$

$$\boxed{\bar{P} = I_{\mathrm{eff}} V_{\mathrm{eff}} \frac{R}{Z} = I_{\mathrm{eff}} V_{\mathrm{eff}} \cos\phi}$$

Dépendance en fréquence

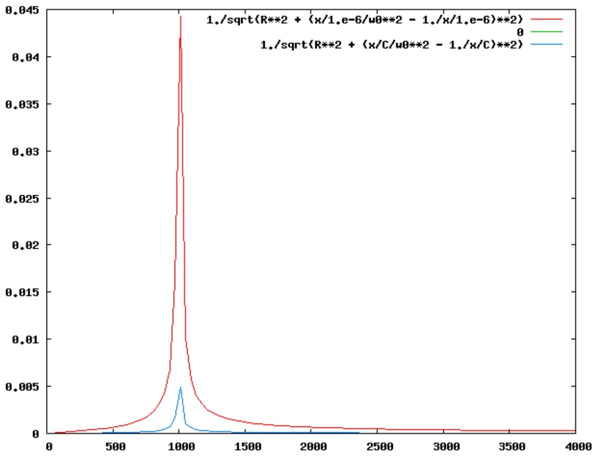
Que se passe-t-il si on change ω ?

La réactance, et donc l'impédance, a un minimum pour

$$X_L - X_C = 0 \qquad \leftrightarrow \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

Dès lors, lorsqu'on se trouve à la **pulsation de résonance**

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

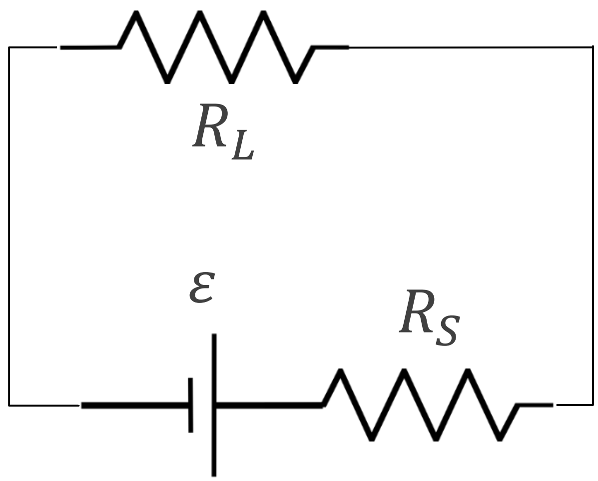


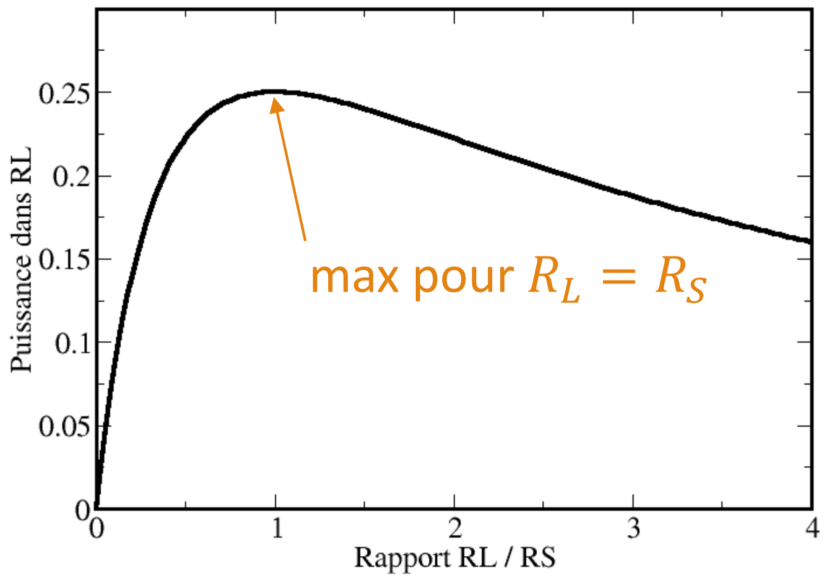
le courant dans le circuit est maximal.

Transfert de puissance

Circuit en courant continu

Soit une source de FEM avec une résistance interne R_S donnée. Sous quelle condition la puissance transférée à une résistance externe R_L sera-t-elle maximale ?





$$I = \frac{\varepsilon}{R_S + R_L}$$

$$P_L = \frac{R_L}{(R_S + R_L)^2} \varepsilon^2$$

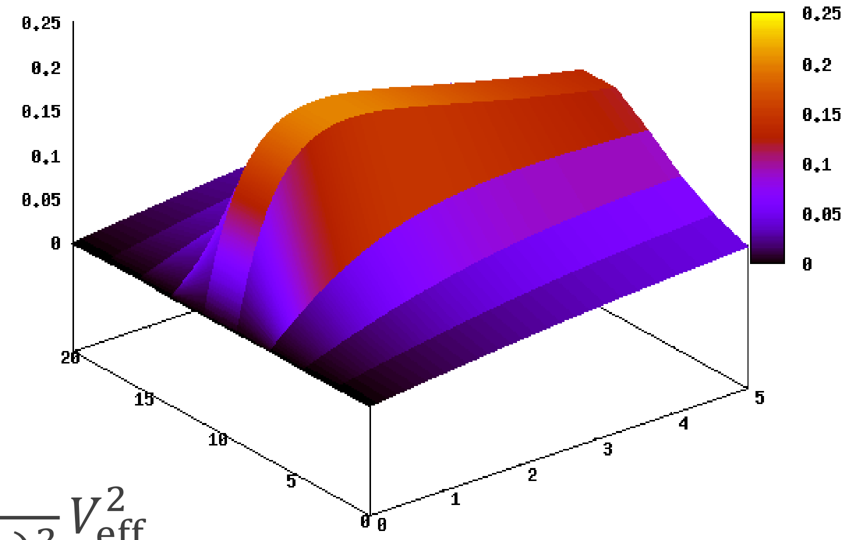
Transfert de puissance

Circuit en courant alternatif

On fait le même raisonnement, mais cette fois en utilisant une source de résistance R_S et réactance X_S avec une charge de résistance R_L et réactance X_L.

Courant :

$$I_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{eff}}}{Z}$$



Puissance dans R_L :

$$P_L = \frac{R_L}{Z^2} V_{\text{eff}}^2 = \frac{R_L}{(R_L + R_S)^2 + (X_L + X_S)^2} V_{\text{eff}}^2$$

Maximum pour $R_L = R_S$ et $X_L = -X_S$.

Adaptation d'impédance

En pratique

- Transfert de puissance
- Minimiser les pertes et réflexions

Quelques exemples (conventions) :

- Téléphone (signaux audio) : $Z = 600\ \Omega$
- Signaux RF : $Z = 50\ \Omega$
- Baffles : $Z = 4\ \Omega$