Mathématiques pour l'informatique 1

Cours 1 - Logique propositionnelle

Émilie Charlier

Université de Liège

Il faut qu'on parle.

Les langues naturelles sont pleines d'ambiguïtés.

Voyons plutôt :

- Avez-vous vu l'écran de l'ordinateur que Simon a acheté hier ?
- Ce soir, Said ne doit pas manger.
- Le prof a mofflé son étudiant, à son grand déplaisir.
- Camille n'est pas méchante $\neq$ Camille est gentille.
- ...

Quelles sont les phrases acceptables pour un bon raisonnement ?

Appelons assertion ou proposition toute phrase d'un langage donné dont on peut déterminer sans ambiguïté sa vérité ou sa fausseté.

Pouvez-vous faire le tri entre les propositions et les non-propositions ?

- Je suis allée au cinéma hier soir.
- Combien d'étudiants sont présents au cours aujourd'hui ?
- Cette phrase est fausse.
- Je suis en train de mentir.
- Il a neigé ce matin.
- Il pleuvra demain.

En logique mathématique et en informatique, on souhaite formaliser ce qu'est une proposition.

1. On démarre avec des propositions atomiques, appelées variables propositionnelles.

   Ces variables sont notées par des symboles : a, b, c ou encore x_1, x_2, x_3, x_4. On peut en utiliser autant que souhaité.

2. Ensuite, on se donne des règles de formation de nouvelles propositions à partir d'anciennes.

   Ces règles, appelées des opérations logiques, sont
   - la négation ("non"), notée $\neg$;
   - la conjonction ("et") , notée $\wedge$;
   - la disjonction ("ou"), notée $\vee$;
   - l'implication ("implique"), notée $\Rightarrow$;
   - la bi-implication ("si et seulement si"), notée $\Leftrightarrow$.

Exemples

Notons a, b, c trois variables propositionnelles.

Voici deux propositions formées à partir de ces variables :

- $a \wedge (b \Rightarrow c)$
- $(a \vee c) \wedge (b \vee c)$

Petit exercice : essayer de former quelques propositions.

Remarques et conventions

Ainsi, une proposition sera toujours formée d'un nombre n, quelconque mais fini, de variables propositionnelles, qu'on pourra noter par exemple $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

On écrit $\varphi \equiv a \wedge (b \Rightarrow c)$ pour signifier que φ désigne la proposition $a \wedge (b \Rightarrow c)$.

On écrit aussi $\varphi(a, b, c)$ si l'on souhaite préciser que φ dépend des trois variables a, b, c.

Qui dit définition récursive dit... parenthèses.

Grâce à ces règles de formation de nouvelles propositions à partir d'anciennes, on peut construire des propositions de plus en plus compliquées.

Il conviendra donc d'utiliser des parenthèses pour indiquer l'ordre dans lequel s'effectuent ces opérations logiques.

Les deux propositions suivantes sont différentes :

- $a \wedge (b \Rightarrow c)$
- $(a \wedge b) \Rightarrow c$

Comment démêler le vrai du faux ?

Chaque variable propositionnelle peut prendre uniquement les deux valeurs de vérité "vrai" ou "faux", que l'on notera en général "1" ou "0" respectivement.

La construction récursive des propositions induit une notion de vérité des propositions qui dépend uniquement des valeurs de vérité prises par les variables propositionnelles qui les composent.

Mais comment déterminer si une proposition est vraie ou fausse ?

Tables de vérité

À chaque opération logique est associée une table de vérité répertoriant tous les cas possibles des valeurs de vérité de la nouvelle proposition ainsi créée en fonction des valeurs de vérités prises par les sous-propositions qui la composent.

Table de vérité de la négation

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

Si ce n'est pas vrai, c'est que c'est faux !

Table de vérité de la conjonction

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Table de vérité de la disjonction

Le "ou" de la langue française est ambigu en général. Deux interprétations sont possibles et on parle de "ou" exclusif et de "ou" non exclusif.

En logique propositionnelle, la **disjonction** désigne par définition le **"ou" non exclusif**, et il n'y a donc jamais d'ambiguïté.

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Table de vérité de l'implication

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Table de vérité de l'implication

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Table de vérité de la bi-implication

φ	ψ	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Remarquez que la bi-implication est commutative.

Un exemple

Construisons les tables de vérité de $\varphi \wedge (\psi \vee \theta)$ et de $(\varphi \wedge \psi) \vee \theta$ (en fonction des valeurs de vérités de φ, ψ, θ) :

φ	ψ	θ	$\psi \vee \theta$	$\varphi \wedge (\psi \vee \theta)$	$\varphi \wedge \psi$	$(\varphi \wedge \psi) \vee \theta$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Au passage, cet exemple illustre que les parenthèses sont importantes !

Commutativité et non-commutativité des opérations logiques

A-t-on les mêmes tables de vérité pour

- $\varphi \vee \psi$ et $\psi \vee \varphi$? OUI
- $\varphi \wedge \psi$ et $\psi \wedge \varphi$? OUI
- $\varphi \Rightarrow \psi$ et $\psi \Rightarrow \varphi$? NON
- $\varphi \Leftrightarrow \psi$ et $\psi \Leftrightarrow \varphi$? OUI

Équivalence logique

Définition

Deux propositions φ et ψ sont dites logiquement équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes tables de vérité, ce que nous noterons $\varphi \equiv \psi$. Dans le cas contraire, nous notons $\varphi \not\equiv \psi$.

Exemples

- $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$
- $\varphi \Rightarrow \psi \not\equiv \psi \Rightarrow \varphi$
- $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \not\equiv (\varphi \wedge \psi) \vee \theta$

Proposition

Soient φ, ψ, θ des propositions. Alors on a les équivalences logiques suivantes.

1. $\varphi \equiv \neg(\neg\varphi)$
2. $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$
3. $\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$
4. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$
5. $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$
6. $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$
7. $\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$
8. $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$
9. $\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$

10. $\varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$
11. $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
12. $\neg(\varphi \Rightarrow \psi) \equiv \varphi \wedge \neg\psi$
13. $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$
14. $\varphi \equiv \neg\varphi \Rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$
15. $\varphi \Rightarrow (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow \theta$
16. $(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \theta \equiv (\varphi \Rightarrow \theta) \wedge (\psi \Rightarrow \theta)$.

Pour démontrer ces équivalences, il suffit de comparer des tables de vérité.

Faisons maintenant l'exercice pour l'équivalence 11 : $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$	$\neg\varphi$	$\neg\varphi \vee \psi$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Faisons maintenant l'exercice pour l'équivalence 15 :
$\varphi \Rightarrow (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow \theta$

φ	ψ	θ	$\psi \vee \theta$	$\varphi \Rightarrow (\psi \vee \theta)$	$\neg\psi$	$\varphi \wedge \neg\psi$	$(\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow \theta$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1

Seuls suffisent $\neg$ et $\vee$.

Proposition

Les connecteurs $\wedge$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ s'obtiennent à partir de $\neg$ et de $\vee$.

Preuve

Partie 1 : Le connecteur $\wedge$ s'obtient à partir de $\neg$ et de $\vee$.

En utilisant les équivalences logiques

1. $\varphi \equiv \neg(\neg\varphi)$
4. $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

nous avons successivement $\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg(\varphi \wedge \psi)) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

Partie 2 : Le connecteur $\Rightarrow$ s'obtient à partir de $\neg$ et de $\vee$.

Ceci vient directement de l'équivalence logique 11. $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$.

Partie 3 : Le connecteur $\Leftrightarrow$ s'obtient à partir de $\neg$ et de $\vee$.

Ceci découle des parties 1 et 2 de la preuve combinées avec l'équivalence logique 10. $\varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$. $\square$

Exercice

Bien que complète, la preuve de la proposition 23 ne fournit pas explicitement de proposition équivalente à $\varphi \Leftrightarrow \psi$ utilisant uniquement les connecteurs $\neg$ et de $\vee$.

Pouvez-vous en donner une ?

Propositions particulières

Définition

Une tautologie est une proposition toujours vraie, quelles que soient les valeurs de vérité attribuées aux variables qui la composent.

Autrement dit, la dernière colonne de la table de vérité d'une tautologie ne contient que la valeur 1.

Si $\varphi \equiv \psi$, alors $\varphi \Leftrightarrow \psi$ est une tautologie.

Les équivalences 1-16 nous fournissent donc une liste de 16 tautologies.

Par exemple, l'équivalence 1. $\varphi \equiv \neg(\neg\varphi)$ nous donne la tautologie $\varphi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi)$.

Il existe d'autres types de tautologies.

Proposition

Soient φ, ψ, θ des propositions. Alors les propositions suivantes sont des tautologies.

1. $\big((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \varphi\big) \Rightarrow \psi$
2. $\big((\varphi \vee \psi) \wedge \neg\varphi\big) \Rightarrow \psi$
3. $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$
4. $\varphi \vee \neg\varphi$
5. $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$
6. $\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$
7. $\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$
8. $(\varphi \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \psi$
9. $\big(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)\big) \Rightarrow \big((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta)\big)$

Jamais jamais

Définition

La négation d'une tautologie est appelée une contradiction ou une absurdité. Il s'agit donc d'une proposition toujours fausse, quelles que soient les valeurs de vérité attribuées aux variables qui la composent.

Autrement dit, la dernière colonne de la table de vérité d'une contradiction ne contient que la valeur 0.

Et entre les deux ?

Définition

Une proposition est dite satisfaisable si la dernière colonne de la table de vérité contient au moins un 1.

Autrement dit, il doit exister au moins une distribution des valeurs de vérité la composant qui la rende vraie.

Petit exercice pour voir si on a bien compris

- Une proposition qui n'est pas une contradiction est une proposition satisfaisable.
- La négation d'une contradiction est une tautologie.
- Une proposition non satisfaisable est une contradiction.
- La négation d'une tautologie est une contradiction.