Éléments de Physique : Mécanique

CHAPITRE 6 : TRAVAIL, ÉNERGIE ET PUISSANCE

Jérémy Brisbois – 2023-2024

Table des matières

1. Travail
2. Energie cinétique et énergie potentielle
3. Forces (non) conservatives et conservation de l’énergie
4. Puissance

Introduction

La mécanique de Newton est déterministe.

Si nous connaissons au temps t :

- les **forces** agissant sur un corps
- la **position initiale**
- la **vitesse initiale**

Alors nous sommes en mesure de déterminer son **mouvement**, c'est-à-dire de prédire où le corps se trouve en $t + \Delta t$.

En pratique : résolution parfois fastidieuse (numérique !)

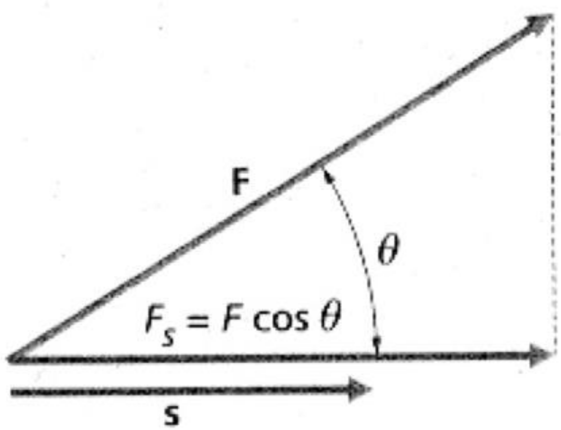
$\rightarrow$ Solution : utilisation de notions globales + lois de conservation

Force = cause de l'accélération

Energie (ou potentiel) = **origine de la force**

Variation d'énergie = **travail** effectué par une force

Travail



Intuitivement : seule la composante de la force dans la direction du déplacement peut effectuer un travail.

Le **travail d'une force** est l'énergie fournie par cette force lorsque son point d'application se déplace.

Travail W : $W = F_s s = Fs\cos\theta$

unité : Joule [N.m = kg.m²/s²]

Le travail s'exprime sous la forme d'un produit scalaire :

$$W = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}.\boldsymbol{F} = Fs\cos\theta$$

Opérations sur les vecteurs

Produit d'un **vecteur par un scalaire** → **vecteur**

$$\mathbf{B} = \alpha.\mathbf{A} = \alpha A_x \hat{\mathbf{x}} + \alpha A_y \hat{\mathbf{y}} + \alpha A_z \hat{\mathbf{z}}$$

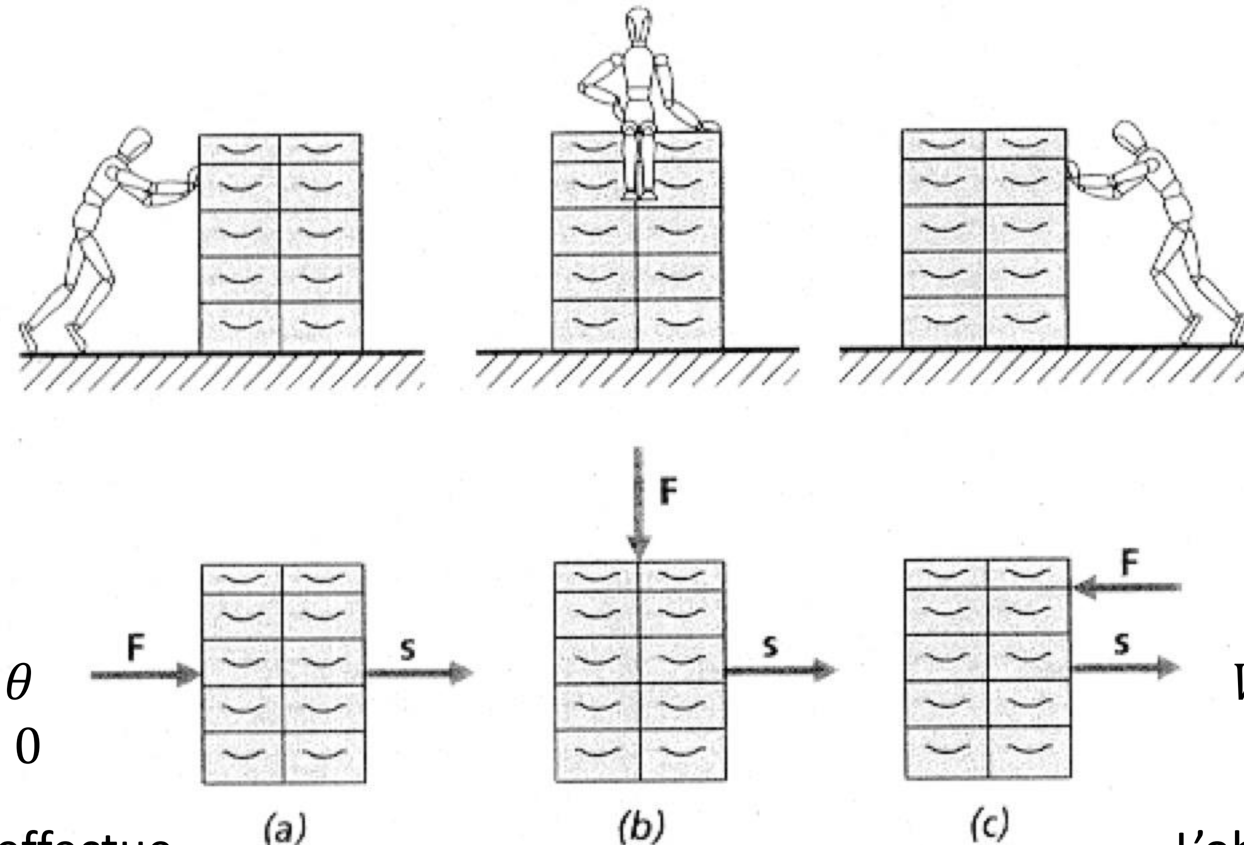
Produit vectoriel entre deux vecteurs → **vecteur**

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB\sin\theta)\hat{\mathbf{u}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Produit scalaire entre deux vecteurs → **scalaire**

$$\alpha = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Travail



$$W = Fs\cos\theta$$
$$= +Fs \geq 0$$

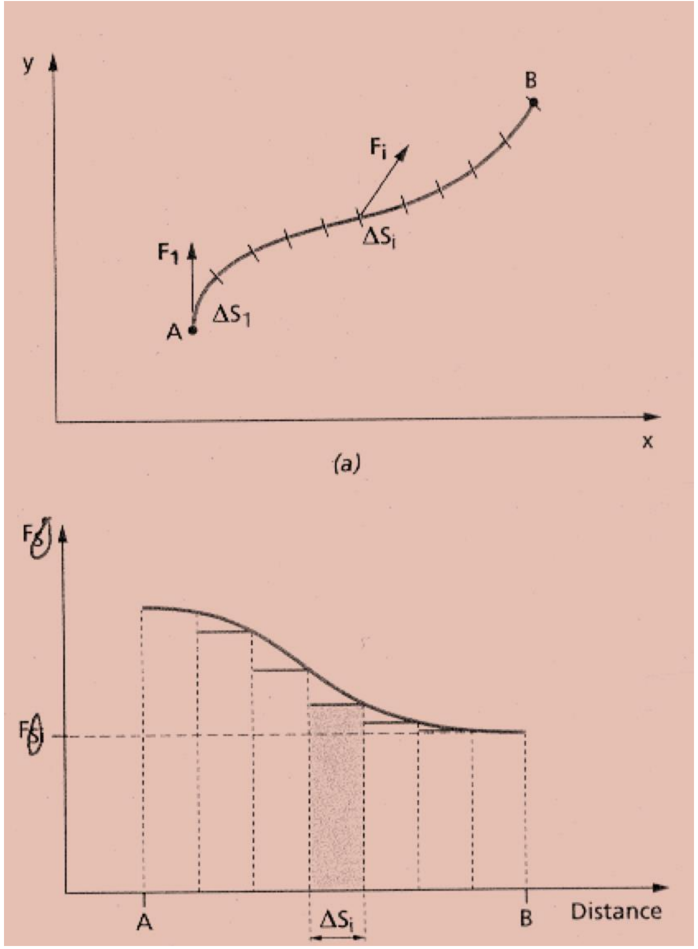
La personne effectue un travail sur l'objet.

$$W = Fs\cos\theta$$
$$= 0$$

$$W = Fs\cos\theta$$
$$= -Fs \leq 0$$

L'objet effectue un travail sur la personne.

Généralisation



Jusqu'à présent, on a considéré que F était constante.

Courts intervalles où F est constante :

$$\Delta W_i = F_i \cos\theta_i \, \Delta S_i$$

Travail effectué de $A \rightarrow B$:

$$W = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i F_i \cos\theta_i \, \Delta S_i$$

Prenant la limite pour $\Delta S_i \rightarrow 0$:

$$W = \int F \cos\theta \, ds = \int \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{s}$$

aire sous la courbe $F_s(s)$

Energie cinétique

L'**énergie** représenté la **capacité à effectuer un travail**.

Par conséquent, l'**énergie cinétique** d'un corps représente la capacité à effectuer un travail de par son **mouvement**.

Principe fondamental

L'énergie cinétique finale d'un objet (K)

$=$

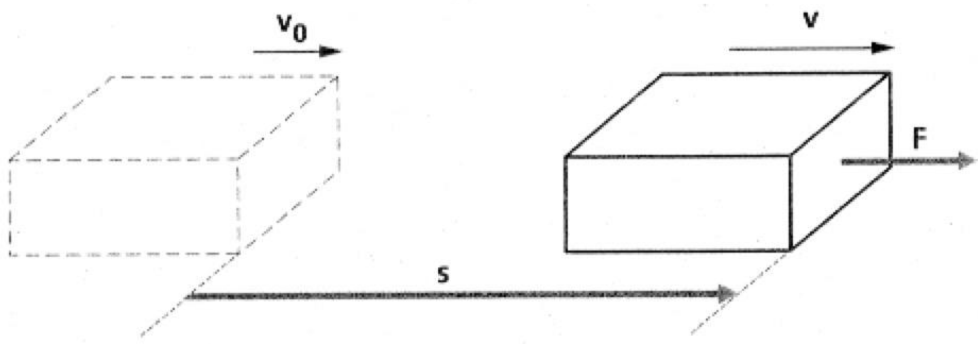
l'énergie cinétique initiale (K_0)

$+$

le travail de toute les forces agissant sur l'objet (positif ou négatif) (W)

$$K = K_0 + W$$

Expression de l'énergie cinétique



Objet en mouvement :

- masse m
- vitesse v_0

Pour accélérer jusqu'à v, il faut appliquer F sur une distance d :

$$F = ma \qquad\qquad v^2 = v_0^2 + 2ad$$

Le travail effectué :

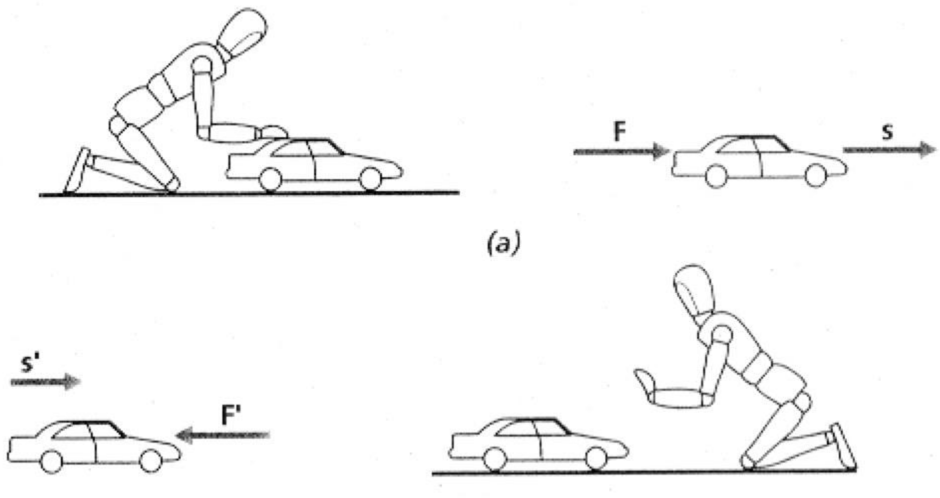
$$W = Fd = mad = m\frac{\left(v^2 - v_0^2\right)}{2d}d = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$\longrightarrow \boxed{K = \frac{mv^2}{2} + \underbrace{C}_{=0}}$$

pour que $K = 0$ lorsque $v = 0$

Expression de l'énergie cinétique

On exerce une force de 5 N sur une distance de 1 m.



Masse de la voiture :

$$m = 0.1 \text{ kg}$$

Travail effectué :

$$W = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{s} = 5 \times 1 = 5 \text{ J}$$

Energie cinétique finale :

$$K = K_0 + W = 0 + 5 = 5 \text{ J}$$

La vitesse finale :

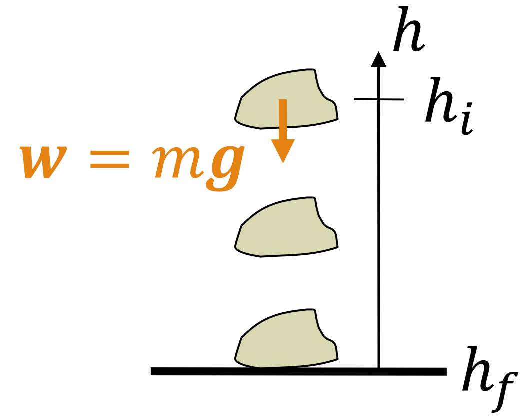
$$K = \frac{mv^2}{2} = 5 \text{ J} \quad \longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 5}{0,1}} = 10 \text{ m/s}$$

Energie potentielle gravitationnelle

K mesure le travail que peut effectuer un objet en raison de son mouvement.

Un objet au repos peut aussi **potentiellement** effectuer un travail.

Exemple : Une masse à une hauteur h peut effectuer un travail que ne peut effectuer le même objet en $h = 0$.



Pourquoi ?

Au cours de sa chute l'objet acquiert une énergie cinétique ΔK = travail du poids :

$$\Delta K = W_{grav} = wd = -mg(h_f - h_i) = mgh_i - mgh_f$$

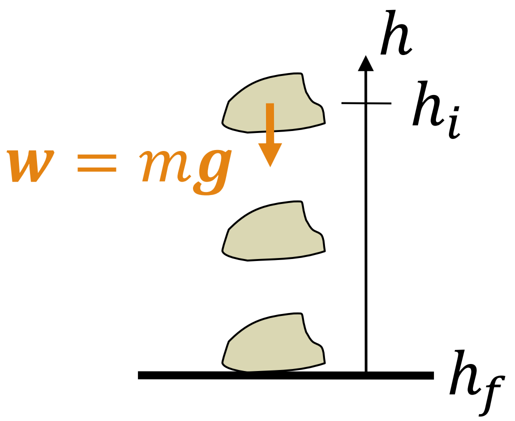
On pose : $\Delta U = U_f - U_i = -\Delta K$

$$\longrightarrow \boxed{U = mgh + \underbrace{C}_{=0}}$$

pour que $U = 0$ lorsque $h = 0$

Energie potentielle gravitationnelle

Lorsqu'on déplace l'objet de $h_i \rightarrow h_f$, w effectue un travail :



$$W_{grav} = -mg\left(h_f - h_i\right) < 0$$

L'objet acquiert de l'énergie potentielle :

$$\Delta U = U_f - U_i = -W_{grav} > 0$$

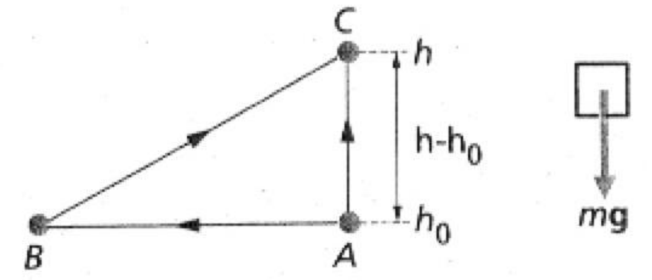
$$\Delta U = mgh_f - mgh_i$$

$$\longrightarrow \boxed{U = mgh + \underbrace{C}_{=0}}$$ pour que $U = 0$ lorsque $h = 0$

Forces conservatives

Une **force conservative** est une force dont le travail ne dépend que des positions initiale et finale, pas du chemin suivi.

$$A \to B \to C : W_{grav}$$
$$= 0 - mg(h - h_0) A \to C : W_{grav}$$
$$= -mg(h - h_0)$$



C’est cette propriété qui nous a précédemment permis de remplacer le travail le long d’un chemin par une différence finie.

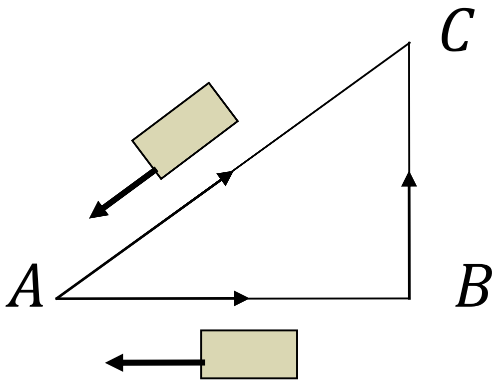
Autres forces conservatives :

- Force de Coulomb, force magnétique
- Force de rappel d’un ressort…

Forces dissipatives

Les forces de frottement ne sont pas conservatives.

exemple : frottement sur un plan



$$A \rightarrow B \rightarrow C : W_{f2} = -\mu_c N(|AB| + |BC|)$$
$$\neq W_{f1} A \rightarrow C : W_{f1} = -\mu_c N|AC|$$

Les frottements **s'opposent au mouvement**, donc le travail fourni est toujours négatif.

De l'**énergie est dissipée** $\rightarrow$ forces dissipatives

Conservation de l’énergie

- Principe fondamental : $K = K_0 + W$

- Travail : $W = \underbrace{W_c}_{\text{forces conservatives}} + \underbrace{W_a}_{\text{autres forces}}$

$K = K_0 + W_c + W_a$ et $W_c = -(U - U_0)$

$$\boxed{K + U = K_0 + U_0 + W_a}$$

Conservation de l'énergie

On appelle énergie mécanique $E_0 = K_0 + U_0$

$$\underbrace{K + U}_{E} = \underbrace{K_0 + U_0}_{E_0} + W_a$$

$$\boxed{E = E_0 + W_a}$$

En l'**absence de travail des forces extérieures** ($W_a = 0$), l'**énergie d'un système est conservée** :

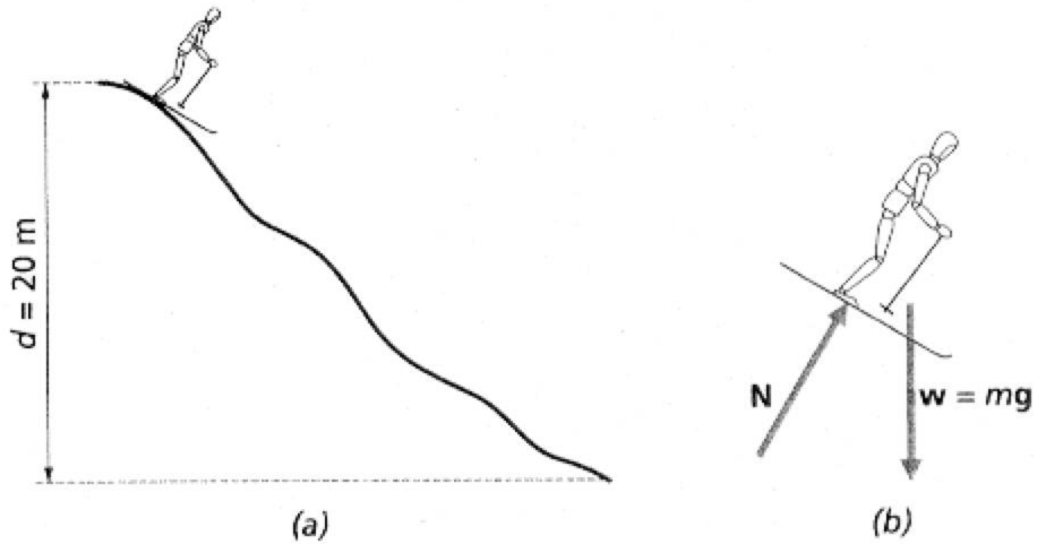
$$K + U = K_0 + U_0$$

Résolution des problèmes

1. Identifier l'**ensemble des forces** qui s'exercent sur l'objet.
2. Pour les **forces conservatives** : inclure un terme d'énergie potentielle (ressort, attraction gravitationnelle…).
3. Pour les **forces non-conservatives** : estimer le travail effectué par la force.
4. Comparer l'équation de conservation en **deux points** particuliers du mouvement

- K renseigne sur la vitesse
- U renseigne sur la position (au moins partiellement)

Exercice : vitesse d’un skieur



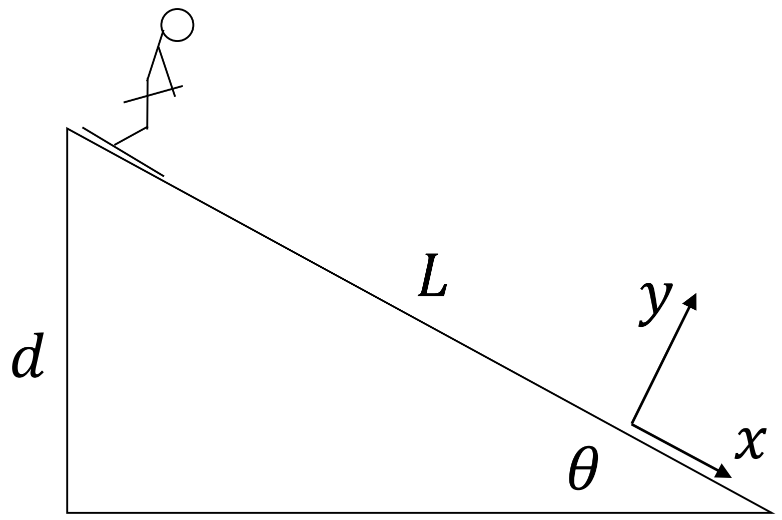
Forces :

- $\boldsymbol{w} \rightarrow \Delta U$
- $\mathbf{N} \perp \boldsymbol{s} \rightarrow W_a = 0$

Vitesse du skieur en bas de la pente ?

$$\underbrace{K_i}_{0} + \underbrace{U_i}_{mgd} = \underbrace{K_f}_{\frac{mv^2}{2}} + \underbrace{U_f}_{0} \qquad \rightarrow \quad v = \sqrt{2gd} = 20 \text{ m/s}$$

Exercice : vitesse d'un skieur



$$F_x = w \sin\theta = mg\sin\theta = ma_x$$

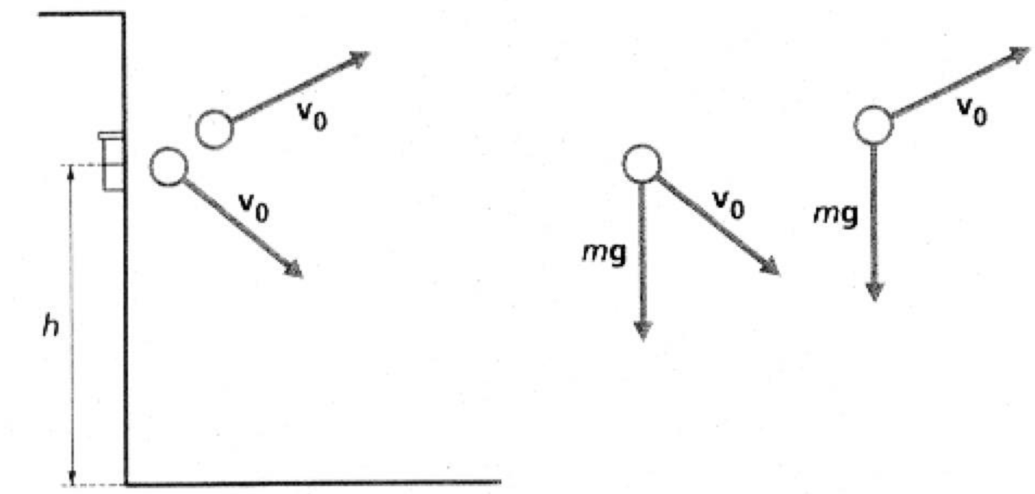
$$L = \frac{d}{\sin\theta}$$

Vitesse du skieur en bas de la pente ?

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x L$$

$$= 0 + 2g\sin\theta\ \frac{d}{\sin\theta} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2gd} = 20\ \text{m/s}$$

Exercice : chute libre



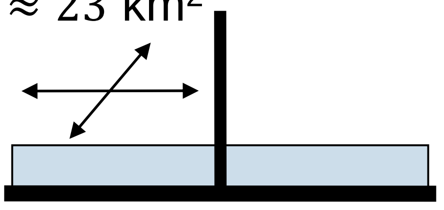
Vitesse de la balle en atteignant le sol ?

$$\underbrace{K_0}_{\frac{mv_0^2}{2}} + \underbrace{U_0}_{mgh} = \underbrace{K}_{\frac{mv^2}{2}} + \underbrace{U}_{0} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

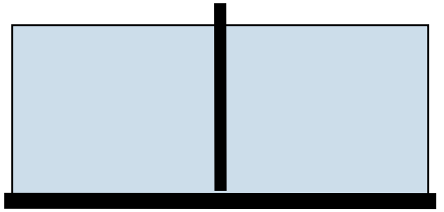
Exercice : barrage sur la Rance

Marée basse

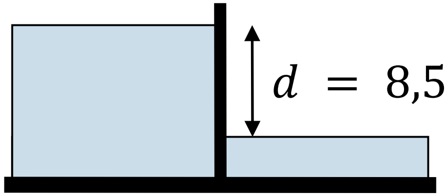
$A \approx 23\ \text{km}^2$



Marée haute



Marée basse



Quelle est l'énergie disponible ?

$$W_a = U - U_0 = -\underbrace{m}_{\rho A d}\, g\, \underbrace{h}_{\frac{d}{2}}$$

(hauteur moyenne de l'eau)

$$W_a = -(1000 \times 23 \times 10^6 \times 8{,}5) \times 9{,}81 \times \frac{8{,}5}{2}$$

$$= -8{,}15 \times 10^{12} = -8{,}15\ \text{GJ}$$

Force d'attraction gravitationnelle

Pour déterminer U nous avons supposé que g est constante.

En toute généralité :

$$\boldsymbol{F}_g = -G\frac{mM_T}{(R_T+h)^2}\hat{\boldsymbol{r}} = -G\frac{mM_T}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

$$g = -G\frac{M_T}{(R_T+h)^2} = \text{cste si } h = \text{cste}$$

En pratique, $g =$ constante est une bonne approximation si $h \ll R_T$.

Force conservative

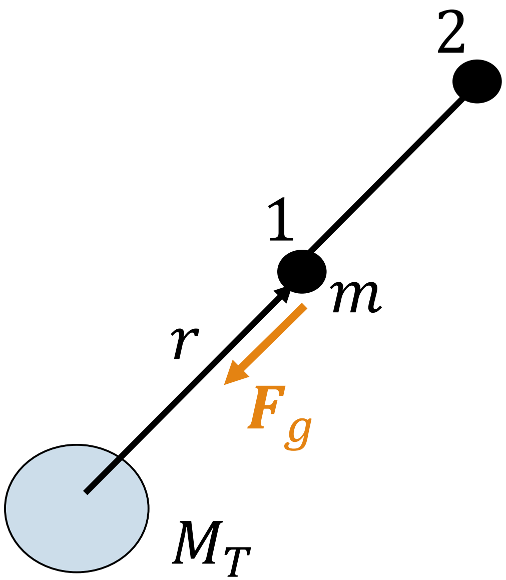
F_g est conservative :

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \boldsymbol{F}_g . d\boldsymbol{r}$$

$$= \int_1^2 -G\frac{mM_T}{r^2}dr$$

$$= G\frac{mM_T}{r}\bigg|_1^2$$

$$= \underbrace{G\frac{mM_T}{r_2}}_{-U_2} - \underbrace{G\frac{mM_T}{r_1}}_{-U_1}$$



Energie potentielle gravitationnelle

On définit l'énergie potentielle gravitationnelle

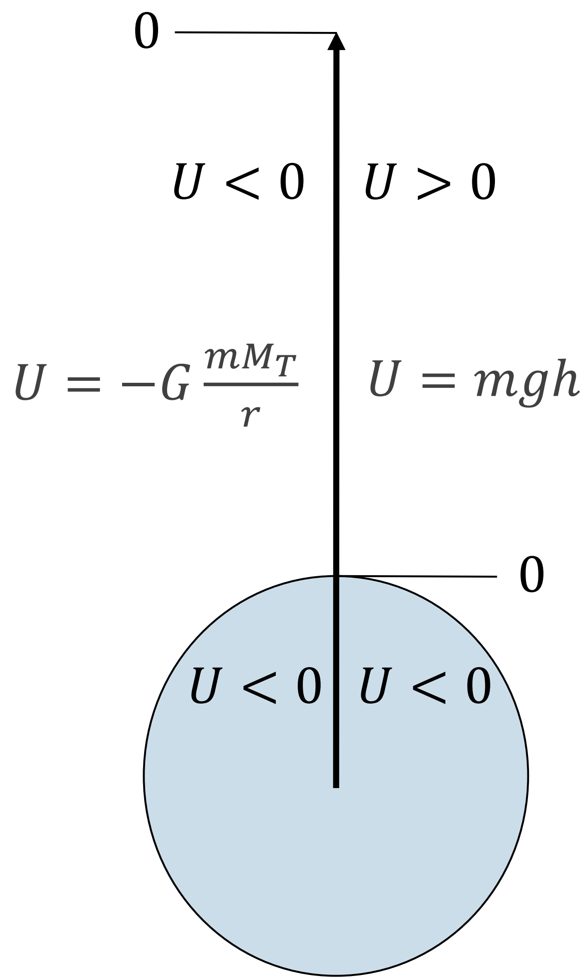
$$\Delta W = -\Delta U = -(U - U_0)$$

$$\boxed{U = -G\frac{mM_T}{r}} + C$$

$= 0$ pour que $U = 0$ lorsque $r = +\infty$

Connexion avec $U = mgh$

$$
\begin{aligned}
U &= -G\,\frac{mM_T}{(R_T+h)} \\
&= -G\,\frac{mM_T}{R_T}\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)} \\
&= -G\,\frac{mM_T}{R_T}\left(1-\frac{h}{R_T}+\cdots\right) \\
&\approx \underbrace{-G\,\frac{mM_T}{R_T}}_{C} + m\underbrace{\frac{GM_T}{R_T^2}}_{g}h \\
&\approx mgh + C
\end{aligned}
$$



Rappel : si $x = \frac{h}{R_T} \ll 1$: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots$

Energie d’un satellite

Energie potentielle :

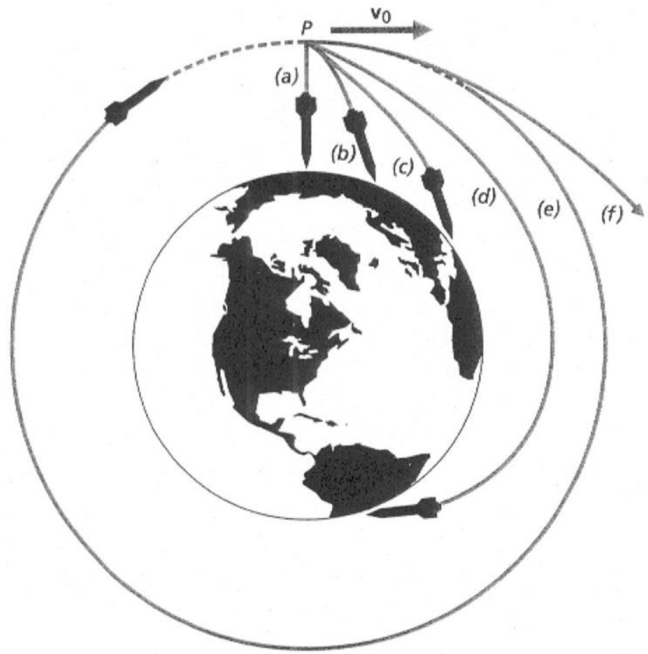
$$U = -G\frac{mM_T}{r}$$

Energie cinétique :

$$G\frac{mM_T}{r^2} = ma = m\frac{v^2}{r}$$

$$mv^2 = G\frac{mM_T}{r}$$

$$K = \frac{1}{2}G\frac{mM_T}{r} = -\frac{1}{2}U$$



Energie mécanique :

$$E = K + U = \frac{1}{2}U$$

$$= -\frac{1}{2}G\frac{mM_T}{r}$$

Mise en orbite d'un satellite

Energie initiale :

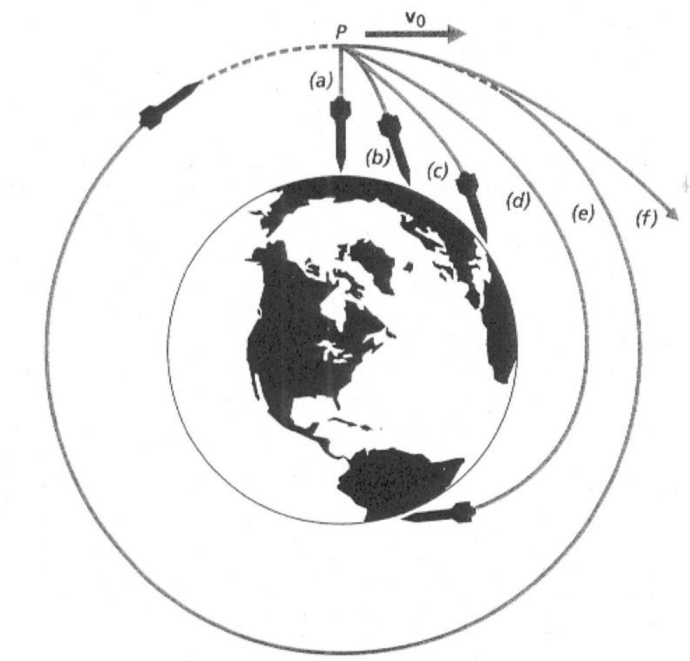
$$E_0 = U_0$$

$$= -G\,\frac{mM_T}{R_T}$$

Energie finale ($r = 2R_T$) :

$$E = K + U$$

$$= \frac{1}{2}G\,\frac{mM_T}{2R_T}$$



Travail nécessaire :

$$W_a = E - E_0$$

$$= \frac{3}{4}G\,\frac{mM_T}{R_T}$$

Mise en orbite d’un satellite

Travail nécessaire :

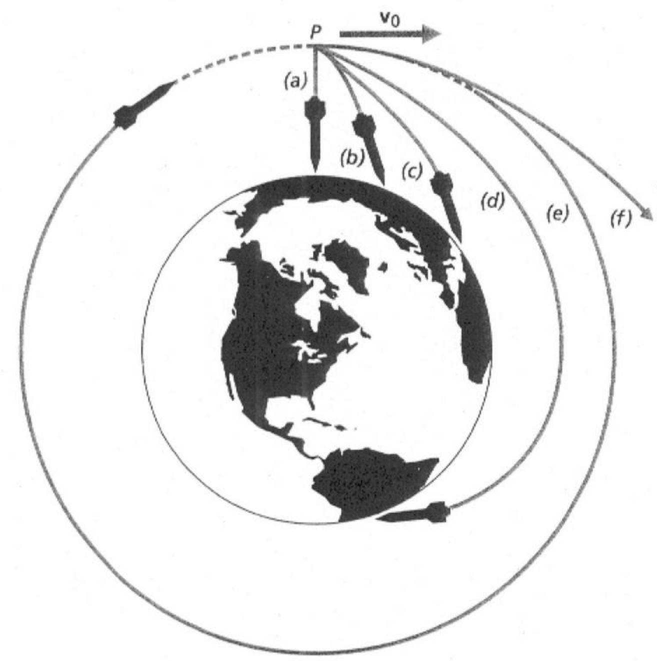
$$W_a = \frac{3}{4} G \frac{mM_T}{R_T}$$

Energie cinétique (catapulte) :

$$K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

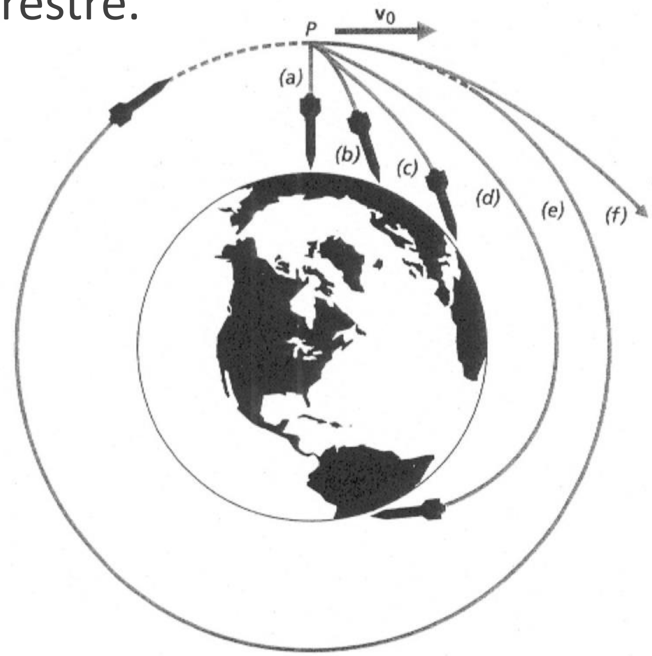
$$= \frac{3}{4} G \frac{mM_T}{R_T}$$

$$\rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{3}{2} G \frac{M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{3}{2} g R_T}$$



Vitesse de libération d'un satellite

La **vitesse de libération** est la vitesse initiale minimum permettant d'échapper à l'attraction gravitationnelle terrestre.



On a : $\underbrace{K}_{\geq 0} + \underbrace{U}_{0} = \underbrace{K_0}_{\frac{mv_0^2}{2}} + \underbrace{U_0}_{-\frac{GmM_T}{R_T}}$

$$\rightarrow \quad \frac{mv_0^2}{2} \geq G\,\frac{mM_T}{R_T}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 6{,}38 \times 10^6} \cong 40000 \text{ km/h}$$

Puissance

La **puissance** est le travail effectué par unité de temps.

Unités : J/s

- Puissance moyenne (lorsqu'un travail ΔW est effectué sur un intervalle de temps Δt) :

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

- Puissance instantanée (puissance moyenne sur un intervalle de temps extrêmement court) :

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Puissance

$$P = \frac{dW}{dt}$$

On peut remplacer la définition générale du travail:

$$W = \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{s} = F\cos\theta\, ds = F_s ds$$

On a alors :

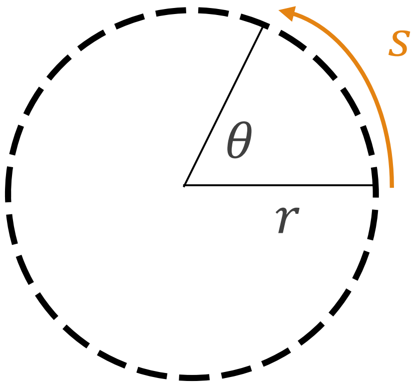
$$\boxed{P = F_s \frac{ds}{dt} = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{v}}$$

Cette expression est valable pour toutes les forces et trajectoires.

Mouvement de rotation

Pour un mouvement de rotation, on a :

$$s = r\theta \qquad a_t = r\alpha$$
$$v = r\omega \qquad a_r = r\omega^2$$



Travail : $W = \boldsymbol{s}.\boldsymbol{F} = \theta\, \underbrace{\boldsymbol{r}.\boldsymbol{F}}_{\tau} = \theta\tau$

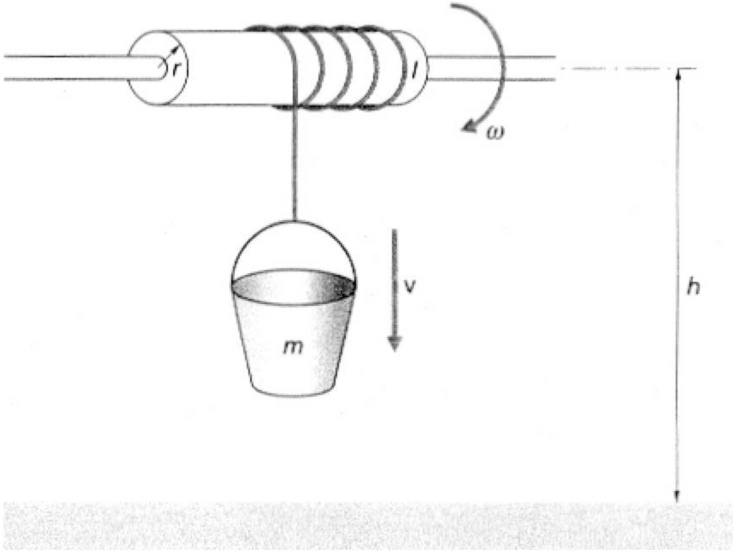
Puissance : $P = \dfrac{dW}{dt} = \tau \underbrace{\dfrac{d\theta}{dt}}_{\omega} = \omega\tau$

Energie cinétique : $K = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}\underbrace{mr^2}_{I}\omega^2 = \dfrac{1}{2}I\omega^2$

Exercice : seau + poulie

$$\underbrace{K}_{} + \underbrace{\mathcal{U}}_{0} = \underbrace{K_0}_{0} + \underbrace{\mathcal{U}_0}_{mgh}$$

$$K \rightarrow \underbrace{K_{seau}}_{\frac{mv^2}{2}} + \underbrace{K_{treuil}}_{\frac{I\omega^2}{2} = \frac{Iv^2}{2r^2}}$$

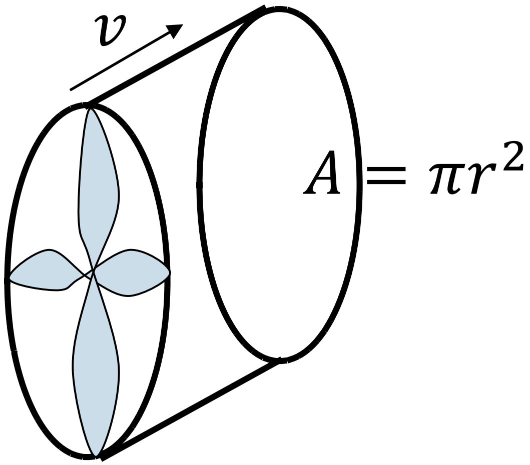


$$\Rightarrow \frac{mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2r^2} = mgh$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2mgh}{m + \frac{I}{r^2}} \qquad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{r^2}}}$$

$$I = \frac{1}{2} mr^2$$

Exercice : éolienne



Une éolienne transforme en électricité 30% de l'énergie cinétique qui la traverse.

- Masse d'air traversant l'éolienne durant Δt :

$$m = \rho(Av\Delta t)$$

- Energie cinétique associée :

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\rho A v^3 \Delta t$$

- Puissance disponible :

$$P = 0{,}3 \times \frac{1}{2}\rho A v^3$$

- Puissance convertie :

$$P = \frac{K}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho A v^3$$