Éléments de Physique : Mécanique

CHAPITRE 7 : QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Jérémy Brisbois – 2023-2024

Table des matières

Introduction

La mécanique de Newton est déterministe.

Si nous connaissons au temps t :

- les **forces** agissant sur un corps
- la **position initiale**
- la **vitesse initiale**

Alors nous sommes en mesure de déterminer son **mouvement**, c'est-à-dire de prédire où le corps se trouve en $t + \Delta t$.

En pratique : résolution parfois fastidieuse (numérique!)

$\rightarrow$ Solution : utilisation de notions globales + lois de conservation

Conservation de l'énergie

Conservation de la quantité de mouvement

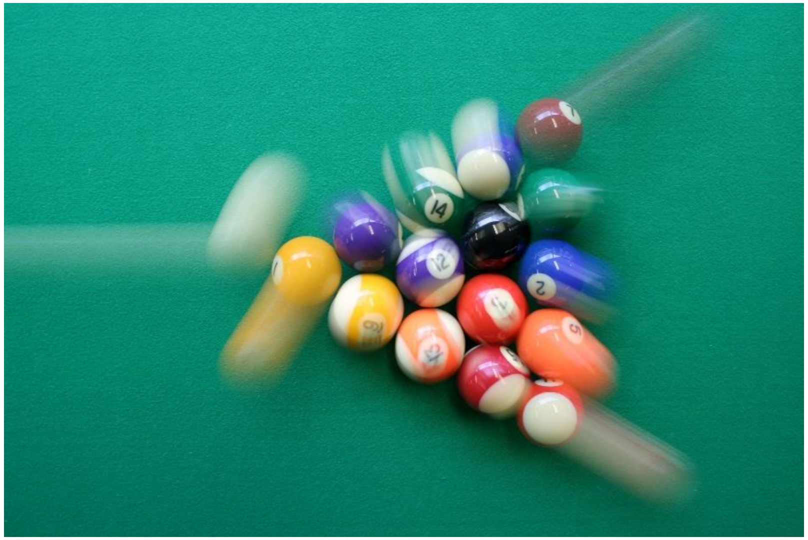
Quantité de mouvement

La **quantité de mouvement** est le produit de la masse par la vitesse :

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

Unités : kg.m/s

Cette grandeur mesure le mouvement d'un objet, mais également son inertie.



Impulsion

Pour accélérer un corps (changer sa vitesse), il faut appliquer une force durant un certain temps.

L'**impulsion** est l'intégrale de la force par rapport au temps.

Unités : N.s

$$\int \boldsymbol{F}\, dt = \int m\boldsymbol{a}\, dt$$

Si la masse est constante, on a

$$\int m\boldsymbol{a}\, dt = m\big(\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(0)\big) = \boldsymbol{p}(t) - \boldsymbol{p}(0)$$

L'impulsion donne directement la variation de la quantité de mouvement.

Exemple : accident de voiture

Lors d'un crash de voiture, il est très complexe d'évaluer les forces de déformation de la tôle, la dissipation d'énergie…

Néanmoins, on peut tirer des conclusions pour un passager.

$m = 70$ kg
$v_i = 50$ km/h = 14 m/s
$v_f = 0$ km/h

$p_i = 972$ kg.m/s
$p_f = 0$ kg.m/s

Quelle force moyenne subira le passager si le choc dure 0,2 s ?

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{972}{0,2} = 4860 \text{ N}$$

Exemple : accident de voiture

Et si on considère uniquement la tête contre le pare-brise ?

$m = 5$ kg

$v_i = 50$ km/h = 14 m/s $\qquad p_i = 70$ kg.m/s

$v_f = 0$ km/h $\qquad p_f = 0$ kg.m/s

Immobilisation quasi-instantanée par le pare-brise (0,002 s), donc

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{70}{0,002} = 33332 \text{ N}$$

Quelles sont les surfaces d'application des forces (la pression importe) ?

Corps (ceinture) : $\approx 0,1$ m² $\qquad \frac{F}{A} = 4,9 \times 10^4$ N/m²

Tête (localisé) : $\approx 0,0025$ m² $\qquad \frac{F}{A} = 1,3 \times 10^7$ N/m²

→ beaucoup plus de dégâts ($P_c \sim 3,2 \times 10^4$ N/m²)

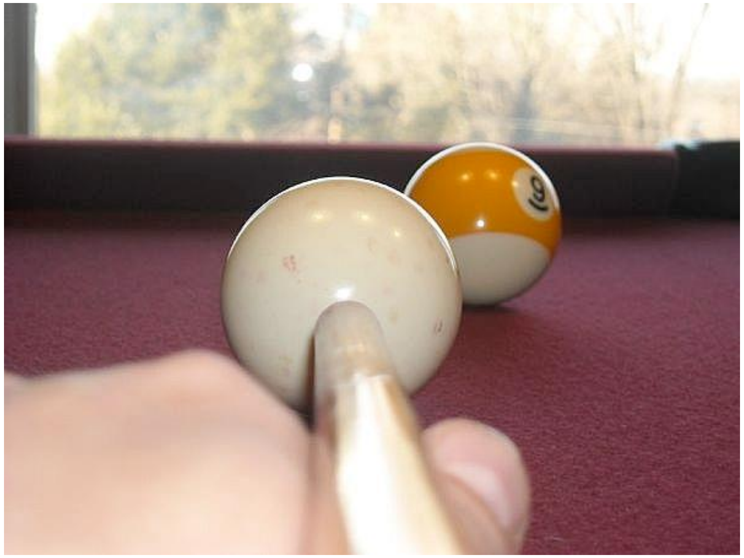
Utilisation de $\boldsymbol{p}$

Lorsque le détail des forces appliquées n'est pas connu, la quantité de mouvement permet de tirer des conclusions sur l'évolution d'un système.

Le principe est semblable (mais différent) à celui de la conservation de l'énergie : les forces sont complexes, mais l'effet global est simple.

Cas important :

En l'absence de forces extérieures, $\boldsymbol{p}$ totale est conservée lors d'un choc.



Exemple : billard

Lors d'un choc entre 2 boules de billard, les forces ne sont pas connues précisément. Cependant :

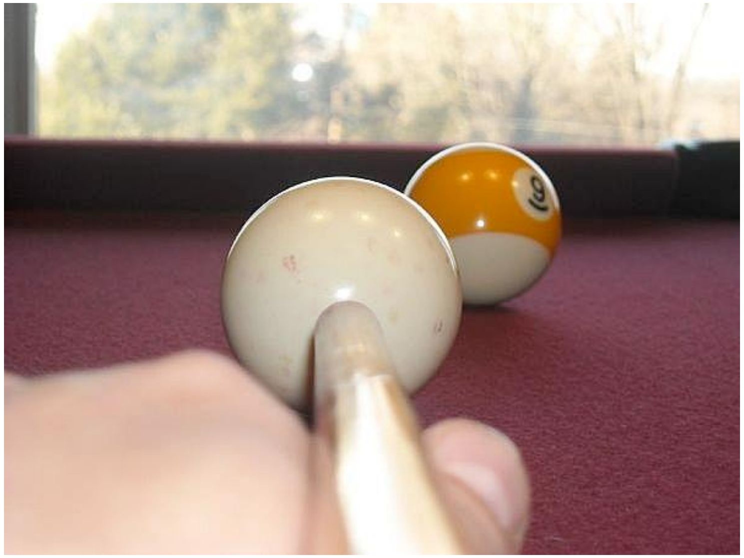
- On connait $\boldsymbol{p}$ avant le choc
- On sait qu'il n'y a (presque) pas de frottements
- L'énergie potentielle gravifique est constante.

En utilisant la 3ème loi de Newton (principe d'action-réaction) :

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$$

$$\boldsymbol{p}'_1 - \boldsymbol{p}_1 = -(\boldsymbol{p}'_2 - \boldsymbol{p}_2)$$

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2$$



Conservation de $\boldsymbol{p}$

Loi générale

S'il n'y a **aucun travail des forces extérieures**, la **quantité de mouvement** est **constante**.

Cas particulier : cette condition est toujours vérifiée pour un système isolé.

La quantité de mouvement étant une quantité vectorielle, lorsque $\boldsymbol{p}$ est conservée, p_x, p_y et p_z sont également conservées.

Exemple : Armageddon

Bruce Willis veut arrêter un astéroïde (10^{12} kg, 300 m/s) avec son vaisseau spatial (10^{6} kg).

A quelle vitesse doit-il voler ?

Et s’il veut seulement le dévier de 0,1° ?

Exemple : absorption d'un neutron

Un neutron ($m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, $v = 2700$ m/s) peut être absorbé par un noyau atomique (par exemple de l'azote, $\mathrm{M} = 23 \times 10^{-27}$ kg).

Quelle sera la vitesse finale du système?

La masse après la collision est (à peu près) la somme $M + m$, donc la vitesse sera de

$$v' = \frac{mv}{M+m} \approx 183 \text{ m/s}$$

ce qui est mesurable expérimentalement.

Effet sur le centre de masse

Généralisation de la trajectoire du centre de masse

Définition du CM :

$$M\boldsymbol{r}_{CM} = \sum_i m_i \,\boldsymbol{r}_i$$

En prenant la dérivée temporelle :

$$M\boldsymbol{v}_{CM} = \sum_i m_i \,\boldsymbol{v}_i = \sum_i \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_{CM}$$

qui est justement la quantité de mouvement totale.

Si une masse initiale M se désintègre en plusieurs parties m_i, la trajectoire du centre de masse n'est pas modifiée (les forces internes ne donnent pas d'impulsion nette).

Réécriture de la 2ème loi de Newton

On peut réécrire la célèbre 2ème loi de Newton de la façon suivante :

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

Avantage : Cette expression inclut le cas où la masse n’est pas constante.

La quantité de mouvement peut varier sous l’effet d’un changement de masse, de vitesse ou les deux.

Exemple : décollage de fusée

Décollage de Falcon 9 (SpaceX)

$F = 7{,}6 \times 10^6$ N $\quad m = 549\,000$ kg

En 162 s, l'altitude h serait inférieure à 180 km, au lieu de 200-300km en réalité. Pourquoi ?

- g pas constant :

$$g_{\text{eff}} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2} = 9{,}19 \text{ m/s}^2 \ \text{ pour } h = 200 \text{ km}$$

- m pas constante : la fusée perd la plupart de sa masse en carburant

http://spaceflight101.com/spacerockets/falcon-9-v1-1-f9r/

Collisions (in)élastiques

Types de collision

- Si l'énergie mécanique est conservée : **élastique**
- Sinon : **inélastique** (frottements)

Collision totalement inélastique : le mouvement relatif des fragments disparaît (l'un “se colle” à l'autre).

Dans tous les cas le système total conserve $\boldsymbol{p}$!

Exemples :

- tarte à la crème + Bill Gates
- neutron absorbé

Collisions inélastiques

Dans le cas totalement inélastique, la fraction d'énergie cinétique restante est limitée.

Quantité de mouvement :

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v'$$

Energie cinétique :

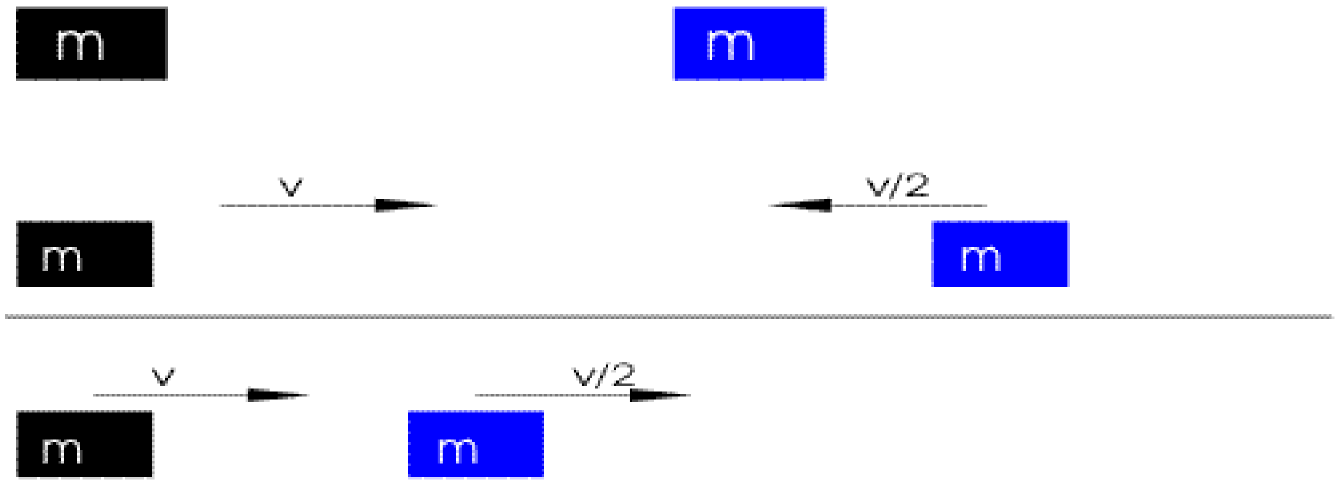
$$\frac{K'}{K} = \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}$$

Pour une masse m_2 donnée, plus m_1 est faible, plus la fraction d'énergie cinétique « perdue » en déformation, chaleur, etc... sera grande (K' faible).

Collisions élastiques

Trois cas de figure

- Une masse est au repos
- Vitesses opposées
- Vitesses dans le même sens



Collisions élastiques

Cas simplifié : 1 dimension, 2 masses

En fonction des masses et des vitesses initiales, tous les cas de figure sont rencontrés.

Conservation de $\boldsymbol{p}$: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

Conservation de l'énergie : $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

La résolution de ce système de 2 équations à 2 inconnues donne la solution générale :

$$v_1' = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 v_1 + m_2 v_2 \pm m_2 |v_1 - v_2|)$$

$$v_2' = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 v_1 + m_2 v_2 \mp m_1 |v_1 - v_2|)$$

Collisions élastiques

Cas simplifié : 1 dimension, 2 masses

Si la 2ème masse est initialement au repos, la résolution est plus simple :

Conservation de $\boldsymbol{p}$: $m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

Conservation de l'énergie : $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

$$K_1' = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} K_1 \qquad K_2' = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} K_1$$

Cas particulier si les masses sont égales : $K_1' = 0$ et $K_2' = K_1$

Exemple : Au billard, la boule blanche s'arrête et l'autre boule part avec la même vitesse.

Moment cinétique

Le **moment cinétique** est l'analogue de la **quantité de mouvement pour la rotation** : en l'absence de frottements, un corps en rotation conserve sa vitesse angulaire ω.

Loi de Newton : $\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$

Impulsion angulaire : $\tau\Delta t$

Moment cinétique : $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$

Comme pour $\boldsymbol{p}$, en l'absence de moment de force extérieure, $\boldsymbol{L}$ est conservé.

$\boldsymbol{L}$ est une grandeur vectorielle (direction de $\boldsymbol{\omega}$).

Exemple : patineuse

Patineuse sur glace en rotation : $\omega_i = 3\pi$ rad/s

Moment d'inertie (bras tendus) : $\mathrm{I} = I_0$

Moment d'inertie (bras repliés) : $I' = 0{,}6\ I_0$

Quelle sera la nouvelle vitesse angulaire ? $\omega_f = 5\pi$ rad/s

Et l'énergie cinétique ? $\dfrac{K'}{K} = \dfrac{\frac{1}{2}I'\omega_f^2}{\frac{1}{2}I\omega_i^2} = \dfrac{5}{3}$

D'où vient l'énergie cinétique en plus ?

Moment cinétique

Chaque masse m_i (position $\boldsymbol{r}_i$ et vitesse $\boldsymbol{v}_i$) fournit une contribution au moment cinétique :

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

Moment cinétique total :

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{L}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i = \sum_i m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega}$$

Exemple : système solaire, $\boldsymbol{L}$ de la Terre autour du Soleil

Rayon : 150×10^6 km

Masse : 6×10^{24} kg

$L \approx 2{,}7 \times 10^{40}$ kg.m²/s

Remarque : vocabulaire

Français	**Anglais**
Quantité de mouvement	(linear) Momentum
Moment cinétique	Angular momentum
Moment d'inertie	Moment of inertia

Toupie

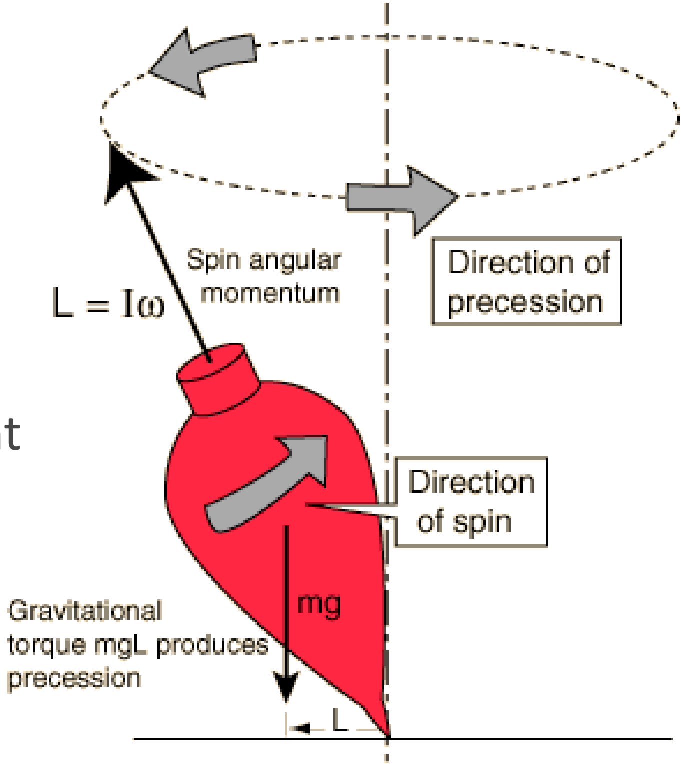
Utilisation du moment cinétique

Equilibre des forces (on néglige les frottements)

Le poids produit un moment de force :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$$

- $\boldsymbol{\tau}$ est toujours perpendiculaire à $\boldsymbol{L}$.
- $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{w}$ sont entraînés dans un mouvement circulaire : précession



Et si la toupie ne tourne pas?

Gyroscope

Über-toupie

Au lieu d'être suspendu à un point quelconque, le gyroscope peut tourner autour de son centre de gravité seulement (frottements quasi nuls).

Pas de précession → détecter les mouvements du support (avion, fusée...): la direction du $\boldsymbol{L}$ du gyroscope reste fixe dans l'espace.