Mathématiques pour l'informatique 1

Cours 5 - Injections, surjections et ensembles dénombrables

Émilie Charlier

Université de Liège

Injection, surjection, bijection

Définition

Soit f une fonction de A dans B.

1. On dit que la fonction f est injective lorsque
$$\text{pour tous } a, a' \in A,\ a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$
Dans ce cas, on dit que f est une injection de A dans B.
2. On dit que la fonction f est surjective lorsque
$$\text{pour tous } b \in B, \text{ il existe } a \in A \text{ tel que } b = f(a).$$
Dans ce cas, on dit que f est une surjection de A dans B.
3. On dit que la fonction f est bijective lorsqu'elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, on dit que f est une bijection de A dans B.

Exemples

- La fonction $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n$ est injective, mais pas surjective.
- La fonction $f\colon \mathbb{Z} \to 2\,\mathbb{Z},\ n \mapsto 2n$ est bijective.
- La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ n'est ni injective ni surjective.
- La fonction $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty[,\ x \mapsto x^2$ est surjective, mais pas injective.
- La fonction $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ est injective, mais pas surjective.
- La fonction $f\colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[,\ x \mapsto x^2$ est bijective.
- La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ est bijective.

Fonction réciproque

Définition

Si $f\colon A \to B$ est une bijection, alors pour tout $b \in B$, il existe un unique $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Notons $f^{-1}(b)$ cet unique élément a.
On définit alors la fonction réciproque de f la fonction

$$f^{-1}\colon B \to A,\ b \mapsto f^{-1}(b).$$

Proposition

La fonction réciproque d'une bijection est aussi une bijection.

Démonstration

Soit $f\colon A \to B$ une bijection.

La fonction $f^{-1}\colon B \to A$ est injective puisque si $b, b' \in B$ sont tels que $f^{-1}(b) = f^{-1}(b')$, alors $b = f(f^{-1}(b)) = f(f^{-1}(b')) = b'$.

Elle est surjective puisque pour tout $a \in A$, l'élément $f(a) \in B$ est tel que $f^{-1}(f(a)) = a$. $\square$

Ensembles en bijection

Au vu de la proposition précédente, on dira que des ensembles A et B sont en bijection dès qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre.

Fonction composée

Définition

Soient $f\colon A \to B_1$ et $g\colon B_2 \to C$ avec $B_1 \subseteq B_2$.
La fonction composée de f et g est la fonction

$$g \circ f\colon A \to C,\ a \mapsto g(f(a)).$$

Exemple

Soient $f\colon\ \mathbb{Z} \to 2\,\mathbb{Z}+1,\ \ n \mapsto 2n+1$ et $g\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ \ n \mapsto \dfrac{3n}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $g(f(n)) = g(2n+1) = \dfrac{3(2n+1)}{2} = 3n + \dfrac{3}{2}$.

La composée $g \circ f$ est la fonction $g \circ f\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ \ n \mapsto 3n + \dfrac{3}{2}$.

Remarquons que la composée $f \circ g$ n'existe pas car les domaines ne sont pas compatibles.

Proposition

Soient des fonctions $f\colon A \to B_1$ et $g\colon B_2 \to C$ avec $B_1 \subseteq B_2$.
Si f et g sont des injections, alors $g \circ f\colon A \to C$ est une injection.

Démonstration

Supposons que f et g sont des injections.

Soient $a, a' \in A$ tels que $a \neq a'$.

On doit montrer que $g \circ f(a) \neq g \circ f(a')$.

Puisque f est une injection, on a $f(a) \neq f(a')$.

Comme g est aussi une injection, on obtient bien que

$$g \circ f(a) = g(f(a)) \neq g(f(a')) = g \circ f(a').$$

D'où $g \circ f$ est une injection.

Proposition

Soient des fonctions $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$.

1. Si f et g sont des surjections, alors $g \circ f\colon A \to C$ est une surjection.
2. Si f et g sont des bijections, alors $g \circ f\colon A \to C$ est une bijection.

Démonstration

1. Supposons que f et g sont des surjections.

   Soit $c \in C$.

   Puisque g est une surjection, il existe $b \in B$ tel que $g(b) = c$.

   Puisque f est une surjection, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

   On obtient que $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.

   D'où $g \circ f$ est une surjection.

2. Supposons que f et g sont des bijections.

   Alors $g \circ f$ est une injection par la proposition précédente et une surjection par le point 1, donc une bijection.

$\square$

Ensembles dénombrables

En informatique et en mathématiques discrètes, on travaille le plus souvent avec des ensembles dénombrables (voire finis), avec pour paradigme l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$.

Définition

Un ensemble A est dénombrable s'il existe une injection de A dans $\mathbb{N}$.

Exemple

Les ensembles $\mathbb{N}$, $2\,\mathbb{N}$ et $2\,\mathbb{N}+1$ sont dénombrables.

Il suffit de vérifier que les fonctions suivantes sont injectives :

$$i: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n$$

$$f: 2\,\mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \frac{n}{2}$$

$$g: 2\,\mathbb{N}+1 \to \mathbb{N},\ n \mapsto \frac{n-1}{2}$$

La proposition précédente est en fait un cas particulier du résultat suivant.

Proposition

Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Démonstration

Soit A un ensemble dénombrable et soit $B \subseteq A$.

Par définition, il existe une injection $f\colon A \to \mathbb{N}$.

La fonction $i\colon B \to A$, $x \mapsto x$ étant injective, on obtient que la fonction $f \circ i\colon B \to \mathbb{N}$ est une injection de B dans $\mathbb{N}$. $\square$

Proposition

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Démonstration

Il suffit de vérifier que la fonction

$$f:\ \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ z \mapsto \begin{cases} 2z-1 & \text{si } z > 0 \\ -2z & \text{si } z \leq 0 \end{cases}$$

est une injection. $\square$

Proposition

Si A est un ensemble dénombrable infini, alors il existe une bijection de A dans $\mathbb{N}$.

Démonstration

Soit A un ensemble dénombrable infini. Il existe donc une injection $f\colon A \to \mathbb{N}$.

Puisque A est infini et que f est une injection, l'ensemble image $\{f(a)\colon a \in A\}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Notons les éléments de cet ensemble par $n_0, n_1, n_2, \ldots$ en supposant que $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$.

On définit une fonction $g\colon A \to \mathbb{N}$ en posant que pour tout $a \in A$, l'image $g(a)$ est le naturel k tel que $f(a) = n_k$. On vérifie ensuite que la fonction g ainsi définie est une bijection.

Elle est injective car si $a, b \in A$ et $k \in \mathbb{N}$ sont tels que $g(a) = g(b) = k$, alors $f(a) = f(b) = n_k$ et donc $a = b$ par injectivité de f.

Elle est surjective car pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = n_k$, et donc tel que $g(a) = k$. $\square$

Théorème

L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. Plus précisément, la fonction

$$\pi \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (m, n) \mapsto \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

est une bijection.

Une autre façon d'obtenir que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable est donnée par le résultat suivant.

Théorème

La fonction

$$\rho \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ (m, n) \mapsto 2^m(2n+1) - 1$$

est une bijection.

Démonstration (faite en classe - voir aussi les notes de cours)

Proposition

Si A et B sont dénombrables, alors $A \times B$ est dénombrable.

Démonstration

Supposons que A et B soient dénombrables. Par hypothèse, il existe des injections $f\colon A \to \mathbb{N}$ et $g\colon B \to \mathbb{N}$.

Montrons que la fonction $h\colon A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto (f(a), g(b))$ est injective.

Soient (a, b) et (a', b') des éléments de $A \times B$ tels que $h(a, b) = h(a', b')$.

Par définition de h, on a $f(a) = f(a')$ et $g(b) = g(b')$.

Comme f et g sont des injections, on obtient que $a = a'$ et $b = b'$, et donc $(a, b) = (a', b')$, montrant que la fonction h est bien injective.

Les fonctions $h\colon A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\rho\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ étant toutes deux injectives, la fonction composée $\rho \circ h\colon A \times B \to \mathbb{N}$ est injective.

Ainsi, $A \times B$ est dénombrable. $\square$

Autres exemples

- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
- L'ensemble des suites infinies de 0 et de 1 est non dénombrable.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ est non dénombrable.
- L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ est non dénombrable.

Argument de la diagonale ou *de Cantor*

Théorème

L'ensemble $A = \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N},\, a_n \in \{0,1\}\big\}$ est non dénombrable.

Démonstration

Procédons par l'absurde et supposons que l'ensemble A soit dénombrable.

Comme A est infini, il existe une bijection $f\colon\ \mathbb{N} \to A$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $f(k) = (a_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Considérons la suite particulière $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A définie par

$$c_n = 1 - a_{n,n}.$$

Considérons à présent $j \in \mathbb{N}$ tel que $f(j) = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On obtient que $a_{j,j} = c_j = 1 - a_{j,j}$, une contradiction. $\square$