Mathématiques pour l'informatique 1

Cours 8 - Calcul matriciel

Émilie Charlier

Département de Mathématique
Université de Liège

Matrice complexe

Une matrice complexe est un tableau rectangulaire de nombres complexes, qu'on place généralement entre de grandes parenthèses.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 3+i \\ i\pi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \pi & e^2 & \sqrt{2} \\ 2 & 4+\pi & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}$$

Lignes, colonnes, éléments, taille

Une matrice est de taille $\ell \times c$ si ℓ est le nombre de ses lignes et c le nombre de ses colonnes.

On note $\mathbb{C}^{\ell \times c}$ l'ensemble des matrices de taille $\ell \times c$.

Une matrice dans $\mathbb{C}^{1 \times c}$ est appelée une matrice-ligne, tandis qu'une matrice dans $\mathbb{C}^{\ell \times 1}$ est appelée une matrice-colonne.

L'élément à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne d'une matrice A est noté A_{ij}.

On écrit

$$A = (A_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq j \leq c}} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1c} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{\ell 1} & \cdots & A_{\ell c} \end{pmatrix}.$$

Matrice carrée, diagonale, triangulaire

Une matrice est dite carrée si elle possède le même nombre de lignes et de colonnes.

Si A est une matrice carrée de taille $m \times m$, ses éléments diagonaux sont $A_{11}, \ldots, A_{mm}$.

Une matrice carrée est diagonale si tous ses éléments non diagonaux sont nuls.

Elle est dite triangulaire supérieure si tous les éléments situés en-dessous de sa diagonale sont nuls, i.e. si $A_{ij} = 0$ si $i > j$, et triangulaire inférieure si tous les éléments situés au-dessus de sa diagonale sont nuls, i.e. si $A_{ij} = 0$ si $i < j$.

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Égalité de matrices

Deux matrices A et B de tailles différentes ne sont jamais égales !

Deux matrices A et B sont égales si et seulement si elles sont de même taille $\ell \times c$ et telles que $A_{ij} = B_{ij}$ pour tous $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ et $j \in \{1, \ldots, c\}$.

Matrice identité

La matrice identité de taille m est la matrice de taille $m \times m$ possédant des 1 partout sur sa diagonale et des 0 ailleurs :

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible concernant la taille de la matrice, on s'autorise à la noter I et on parle simplement de matrice identité.

Matrices nulles

La matrice nulle de taille $\ell \times c$ est la matrice de taille $\ell \times c$ ne possédant que des éléments nuls :

$$0_{\ell \times c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible concernant la taille de la matrice, on s'autorise à la noter 0 et on parle de la matrice nulle.

Matrices associées : transposée, conjuguée et adjointe

La matrice transposée (ou simplement la transposée) d'une matrice A de taille $\ell \times c$ est la matrice de taille $c \times \ell$, notée $A^\intercal$ dont les lignes sont les colonnes de A :

$$A^\intercal = (A_{ji})_{\substack{1 \le j \le c \\ 1 \le i \le \ell}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{\ell 1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{\ell 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1c} & A_{2c} & \cdots & A_{\ell c} \end{pmatrix}.$$

Exemples

La transposée d'une matrice 3×2 est de taille 2×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Remarquez que les éléments diagonaux ne changent pas lors de la transposition d'une matrice carrée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 32 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 7 & 32 \end{pmatrix}$$

Matrice symétrique

Une matrice carrée est dite symétrique lorsqu'elle est égale à sa transposée.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ -1 & 32 & 7 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}^{\intercal} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ -1 & 32 & 7 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice conjuguée

La matrice conjuguée d'une matrice complexe A est la matrice de même taille, notée $\overline{A}$, obtenue en remplaçant chacun des éléments de A par leur conjugué :

$$\text{pour } A \in \mathbb{C}^{\ell \times c}, \quad \overline{A} = \left(\overline{A_{ij}}\right)_{\substack{1 \le i \le \ell \\ 1 \le j \le c}}.$$

Par exemple, on a

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 & i \\ \pi + 3i & 0 \\ 3 - i & -9i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ \pi - 3i & 0 \\ 3 + i & 9i \end{pmatrix}.$$

Remarquez que $A = \overline{A} \iff A$ a tous ses éléments dans $\mathbb{R}$.

Matrice adjointe

La matrice adjointe d'une matrice complexe A est la matrice $\overline{A^\intercal}$. On la note A^*.

Remarquez qu'on a toujours $\overline{A^\intercal} = \overline{A}^\intercal$.

Addition de matrices

Si A et B sont deux matrices de même taille $\ell \times c$, alors on définit leur somme $A + B$ comme étant la matrice de taille $\ell \times c$ obtenue en additionnant les éléments se correspondant :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1c} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{\ell 1} & A_{\ell 2} & \cdots & A_{\ell c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1c} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{\ell 1} & B_{\ell 2} & \cdots & B_{\ell c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1c} + B_{1c} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2c} + B_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{\ell 1} + B_{m1} & A_{\ell 2} + B_{\ell 2} & \cdots & A_{\ell c} + B_{\ell c} \end{pmatrix}.$$

Propriétés de l'addition

Proposition

Si A, B, C sont des matrices de même taille, alors

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$ associativité de la somme
2. $A+B = B+A$ commutativité de la somme
3. $A+0 = 0+A = A$ 0 est neutre pour la somme

Démonstration.

Ce découle du fait que la somme s'effectue "composante à composante" et que nous travaillons dans $\mathbb{C}$, où les mêmes propriétés de la somme sont vérifiées. $\square$

Multiplication d'une matrice par un nombre

Soit A une matrice de taille $\ell \times c$ et λ un nombre complexe. Le produit de A par λ est la matrice $\ell \times c$ obtenue en multipliant chaque élément de A par λ :

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{\ell 1} & \lambda A_{\ell 2} & \cdots & \lambda A_{mn} \end{pmatrix}$$

Distributivité et matrice opposée

Proposition

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A, B \in \mathbb{C}^{\ell \times c}$, alors

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
2. $A + (-1) \cdot A = (-1) \cdot A + A = 0.$

Démonstration.

Ceci découle du fait que le produit d'une matrice par un nombre et la somme de deux matrices s'effectuent "composante à composante" et que nous travaillons dans $\mathbb{C}$, où les mêmes propriétés de la somme et du produit sont vérifiées. $\square$

Notations courtes

Comme d'habitude, on écrit l'opposé de A par $-A$. Ceci donne sens aux écritures $(-1) \cdot A = -A$.

De plus, on écrit $-\lambda A$ pour désigner la matrice $-(\lambda A) = (-\lambda)A$.

Enfin, on écrit également $A - B$ au lieu de $A + (-B)$.

L'associativité de la somme, quant à elle, permet de donner du sens à l'écriture $A + B + C$.

Combinaison linéaire de matrices

Une combinaison linéaire de matrices $A_1, \ldots, A_k$ de même taille est une expression de la forme

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$.

Produit matriciel

On peut former le produit $A \cdot B$ de deux matrices $A \in \mathbb{C}^{\ell \times c}$ et $B \in \mathbb{C}^{\ell' \times c'}$ dans le cas où $c = \ell'$.

La matrice AB est la matrice de taille $\ell \times c'$ définie par

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{c} A_{ik} B_{kj}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$ et tout $j \in \{1, \dots, c'\}$.

Lien avec le produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ est

$$(a_1, \ldots, a_n) \bullet (b_1, \ldots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n.$$

Donc $(AB)_{ij}$ est le produit scalaire de la i-ième ligne de A et de la j-ième colonne de B :

$$(A_{i1}, \ldots, A_{ic}) \bullet (B_{1j}, \ldots, B_{cj}) = A_{i1} B_{1j} + \cdots + A_{ic} B_{cj}.$$

Nous avons donc

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{c} A_{1k}B_{k1} & \sum_{k=1}^{c} A_{1k}B_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{c} A_{1k}B_{kc'} \\ \sum_{k=1}^{c} A_{2k}B_{k1} & \sum_{k=1}^{c} A_{2k}B_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{c} A_{2k}B_{kc'} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{c} A_{\ell k}B_{k1} & \sum_{k=1}^{c} A_{\ell k}B_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{c} A_{\ell k}B_{kc'} \end{pmatrix}.$$

Exemples

- On a $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} \end{pmatrix}$.

- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le produit matriciel n'est pas commutatif.

On a $AB \neq BA$ en général !

Plusieurs raisons à cela :

1. Ce n'est pas parce qu'on peut former le produit AB qu'on peut aussi former le produit BA.
2. Même dans le cas où l'on peut former les deux produits AB et BA, les matrices AB et BA peuvent ne pas avoir la même taille.
3. Même si les deux produits AB et BA ont du sens et sont des matrices de même taille (ceci se produit uniquement lorsque A et B sont des matrices carrées), on n'a pas nécessairement $AB = BA$ non plus !

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés du produit matriciel

Proposition

Soient λ, μ des nombres complexes et A, B, C des matrices. Si les opérations suivantes ont du sens, alors

1. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ associativité des produits
   $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$
2. $(AB)C = A(BC)$ associativité du produit matriciel
3. $A(B + C) = AB + AC$ distributivité du produit matriciel sur la somme
   $(A + B)C = AC + BC$
4. $(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal$ transposée d'un produit matriciel
5. $AI = IA = A$ I est neutre pour le produit matriciel de matrices carrées
6. $A0 = 0$ et $0A = 0$ 0 est absorbant pour le produit matriciel

Les propriétés d'associativité permettent de donner du sens aux écritures $\lambda\mu A$, λAB et ABC.

Démonstration

Démontrons l'associativité du produit matriciel.

Soient $A \in \mathbb{C}^{\ell \times c}, B \in \mathbb{C}^{c \times c'}, C \in \mathbb{C}^{c' \times c''}$.

Soient $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ et $j \in \{1, \ldots, c''\}$.

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\big((AB)C\big)_{ij} &= \sum_{k=1}^{c'} (AB)_{ik} C_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{c'} \left(\sum_{n=1}^{c} A_{in} B_{nk} \right) C_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{c'} \sum_{n=1}^{c} A_{in} B_{nk} C_{kj}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
\big(A(BC)\big)_{ij} &= \sum_{n=1}^{c} A_{in}(BC)_{nj} \\
&= \sum_{n=1}^{c} A_{in}\Big(\sum_{k=1}^{c'} B_{nk}C_{kj}\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{c}\sum_{k=1}^{c'} A_{in}B_{nk}C_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{c'}\sum_{n=1}^{c} A_{in}B_{nk}C_{kj}.
\end{aligned}
$$

On a donc bien $\big((AB)C\big)_{ij} = \big(A(BC)\big)_{ij}$ comme souhaité.

Montrons également que si $A \in \mathbb{C}^{\ell \times c}$, alors $AI_c = A$.

Par définition de la matrice identité, on a

$$(I_c)_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Par conséquent, pour tous $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ et $j \in \{1, \ldots, c\}$, nous avons

$$(AI_c)_{ij} = \sum_{k=1}^{c} A_{ik}(I_c)_{kj} = A_{ij}.$$

Matrices technologiques

Une entreprise produit quatre sortes d'articles (output) A_1, A_2, A_3 et A_4, ce pour quoi elle utilise trois sortes d'input : matières premières, énergie et main d'œuvre.

On suppose que la quantité d'articles produits est proportionnelle à la quantité d'input fourni.

On peut représenter cette situation au moyen du tableau suivant :

	A_1	A_2	A_3	A_4
matières premières	1	6	1	4
énergie	0	1	2	2
main-d'œuvre	1	1	1	2

où le nombre situé à l'intersection de la i-ème ligne et la j-ème colonne représente la quantité de l'input correspondant à la ligne i qui est nécessaire pour produire une unité de l'article A_j.

Considérons à présent D la matrice à 3 lignes et 4 colonnes obtenues à partir de ces données :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si Q est une matrice-colonne donnant la quantité commandée de chacun des articles et si P est une matrice-ligne donnant le coût de chaque unité d'input, alors le prix total de la commande est le produit matriciel PDQ :

$$\begin{aligned} PDQ &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 + p_3 & 6p_1 + p_2 + p_3 & p1 + 2p2 + p3 & 4p_1 + 2p_2 + 2p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \\ &= (p_1 + p_3)q_1 + (6p_1 + p_2 + p_3)q_2 + (p1 + 2p2 + p3)q_3 + (4p_1 + 2p_2 + 2p_3)q_4. \end{aligned}$$