Mathématiques pour l'informatique 1

Cours 2 - Karnaugh et techniques de démonstration

Émilie Charlier

Université de Liège

Déterminer si une proposition est satisfaisable ou non est un problème fondamental en informatique.

Problème SAT

Étant donné une proposition sous forme normale conjonctive, déterminer si elle est ou si elle n'est pas satisfaisable.

SAT, un problème difficile

Remarquez que vous disposez déjà d'un algorithme pour répondre à cette question, et ce, quelle que soit l'instance du problème SAT que l'on vous donne, c'est-à-dire, quelle que soit la proposition.

Il s'agit donc d'un problème décidable. L'intérêt de SAT réside dans le fait qu'il s'agit d'un problème difficile, au sens où il n'existe pas d'algorithme rapide pour le résoudre.

Par exemple, que pensez-vous du temps mis par votre algorithme en fonction du nombre de variables de la formule de départ ?

La définition rigoureuse d'un problème difficile vous sera donnée dans votre cours "Introduction to the theory of computation". Vous y verrez que SAT est NP-complet.

Qu'est-ce qu'une forme normale conjonctive ?

Exemple : $(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee z)$

Définition

Une forme normale conjonctive (FNC) d'une proposition φ est une conjonction de disjonctions de variables ou de négation de variables logiquement équivalente à φ.

Et une forme normale disjonctive ?

Exemple : $(x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge z)$

Définition

Une forme normale disjonctive (FND) d'une proposition φ est une disjonction de conjonctions de variables ou de négation de variables logiquement équivalente à φ.

Fait

Toute proposition possède une FNC et une FND.

Exemple

Considérons la proposition

$$\varphi \equiv \neg(w \Rightarrow (x \Rightarrow (y \wedge z))) \Leftrightarrow (\neg y \wedge (x \vee (y \Leftrightarrow (w \vee \neg z)))).$$

Nous commençons par construire la table de vérité de $\neg\varphi$.

w	x	y	z	φ	$\neg\varphi$
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0

On obtient une FND de $\neg\varphi$:

$$\begin{aligned}\neg\varphi \equiv &(\neg w \wedge \neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg w \wedge x \wedge \neg y \wedge \neg z)\\ &\vee (\neg w \wedge x \wedge \neg y \wedge z) \vee (w \wedge x \wedge y \wedge \neg z).\end{aligned}$$

En prenant la négation de cette FND, on obtient une FNC de φ :

$$\begin{aligned}\varphi \equiv &(w \vee x \vee y \vee \neg z) \wedge (w \vee \neg x \vee y \vee z)\\ &\wedge (w \vee \neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg w \vee \neg x \vee \neg y \vee z).\end{aligned}$$

Formes normales de longueur minimale

Le procédé que nous venons de voir est intéressant car tout à fait général.

MAIS il a un désavantage de taille puisque la FNC est généralement bien plus longue que la proposition de départ !

Pourquoi ?

Il est donc important de réfléchir à des procédés qui tentent de fournir des formes normales équivalentes les plus compactes possibles.

En programmation, de tels procédés permettent de réduire les conditions testées lors d'instructions conditionnelles. De cette manière, on réduit, souvent considérablement, la taille du code ainsi que son temps d'exécution en diminuant le nombre de tests nécessaires.

Un tel procédé est donné par les tables de Karnaugh.

Tables de Karnaugh

Le but est de faire apparaître visuellement des simplifications possibles.

Une table de Karnaugh d'une proposition φ est un tableau à deux dimensions construit comme suit.

Si le nombre de variables de φ est un nombre pair $2n$, on sépare ces variables en deux groupes de taille n.

S'il s'agit d'un nombre impair $2n+1$, on sépare les variables en deux groupes de taille n et $n+1$.

Les distributions des valeurs de vérité de chaque groupe sont notées verticalement et horizontalement sous forme de listes avec la contrainte que deux listes consécutives ne diffèrent qu'en une seule entrée (code de Gray).

Exemple avec un nombre pair de variables

Considérons à nouveau la proposition

$$\varphi \equiv \neg(w \Rightarrow (x \Rightarrow (y \wedge z))) \Leftrightarrow (\neg y \wedge (x \vee (y \Leftrightarrow (w \vee \neg z))).$$

Séparons les variables w, x, y, z en les deux sous-groupes : w, x (verticalement) et y, z (horizontalement).

w	x	y	z	φ
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

y z / w x	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1				
1 1				
1 0				

Exemple avec un nombre impair de variables

Considérons la proposition $\psi \equiv x \wedge (y \Rightarrow z)$.

x	y	z	$y \Rightarrow z$	$x \wedge (y \Rightarrow z)$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Séparons les variables x, y, z en les deux sous-groupes : x (verticalement) et y, z (horizontalement).

x \ y z	0 0	0 1	1 1	1 0
0				
1				

Comment remplir la table

Dans chaque case du tableau, on inscrit la valeur de vérité de φ correspondant aux valeurs de vérité des variables données par la ligne et la colonne sur lesquelles la case se trouve.

Exemple avec un nombre pair de variables

Considérons à nouveau la proposition

$$\varphi \equiv \neg(w \Rightarrow (x \Rightarrow (y \wedge z))) \Leftrightarrow (\neg y \wedge (x \vee (y \Leftrightarrow (w \vee \neg z))).$$

Séparons les variables w, x, y, z en les deux sous-groupes : w, x (verticalement) et y, z (horizontalement).

w	x	y	z	φ
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

w x \ y z	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	0	1	1
0 1	0	0	1	1
1 1	1	1	1	0
1 0	1	1	1	1

Exemple avec un nombre impair de variables

Considérons la proposition $\psi \equiv x \wedge (y \Rightarrow z)$.

x	y	z	$y \Rightarrow z$	$x \wedge (y \Rightarrow z)$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Séparons les variables x, y, z en les deux sous-groupes : x (verticalement) et y, z (horizontalement).

x \ y z	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	0	0	0
1	1	1	1	0

Rangées adjacentes et rectangles

La dernière ligne/colonne sera considérée comme étant adjacente à la première ligne/colonne.

Un rectangle de taille $\ell \times c$ est obtenu en sélectionnant ℓ lignes et c colonnes adjacentes.

Recherche d'une FND minimale équivalente

- On identifie dans le tableau les rectangles de 1 dont la taille est une puissance de 2 (où la taille est donnée par le nombre de cases).
- On recouvre tous les 1 avec de tels rectangles, en allant de la plus grande taille possible vers la plus petite, et en utilisant un nombre minimal de rectangles.
- Rien n'empêche qu'un même 1 fasse partie de plusieurs rectangles à la fois, mais aucun 0 ne doit appartenir à un rectangle.
- Chaque rectangle sera décrit par une conjonction de variables et de négations de variables.
- La disjonction de ces conjonctions donnera une FND équivalente à φ.

Exemple (suite)

Nous testerons d'abord les rectangles de taille 16, puis $8, 4, 2$, et enfin les rectangles de taille 1, c'est à dire les cases seules.

Aucun rectangle de taille 16 ou 8 ne convient.

Quatre rectangles de taille 4 suffisent pour recouvrir tous les 1 :

w x \ y z	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	0	1	1
0 1	0	0	1	1
1 1	1	1	1	0
1 0	1	1	1	1

Ce rectangle est décrit par la conjonction $\neg x \wedge \neg z$.

Exemple (suite)

Nous testerons d'abord les rectangles de taille 16, puis $8, 4, 2$, et enfin les rectangles de taille 1, c'est à dire les cases seules.

Aucun rectangle de taille 16 ou 8 ne convient.

Quatre rectangles de taille 4 suffisent pour recouvrir tous les 1 :

w x \ y z	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	0	1	1
0 1	0	0	1	1
1 1	1	1	1	0
1 0	1	1	1	1

Ce rectangle est décrit par la conjonction $\neg w \wedge y$.

Exemple (suite)

Nous testerons d'abord les rectangles de taille 16, puis $8, 4, 2$, et enfin les rectangles de taille 1, c'est à dire les cases seules.

Aucun rectangle de taille 16 ou 8 ne convient.

Quatre rectangles de taille 4 suffisent pour recouvrir tous les 1 :

w x \ y z	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	0	1	1
0 1	0	0	1	1
1 1	1	1	1	0
1 0	1	1	1	1

Ce rectangle est décrit par la conjonction $w \wedge \neg y$.

Exemple (suite)

Nous testerons d'abord les rectangles de taille 16, puis $8, 4, 2$, et enfin les rectangles de taille 1, c'est à dire les cases seules.

Il n'y a aucun rectangle de 1 de taille 16 ou 8.

Quatre rectangles de taille 4 suffisent pour recouvrir tous les 1 :

y z / w x	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	0	1	1
0 1	0	0	1	1
1 1	1	1	1	0
1 0	1	1	1	1

Ce rectangle est décrit par la conjonction $y \wedge z$.

Ainsi, nous obtenons la FND équivalente à φ de longueur 8

$$(\neg x \wedge \neg z) \vee (\neg w \wedge y) \vee (w \wedge \neg y) \vee (y \wedge z).$$

À titre de comparaison, la FND obtenue directement à partir de la table de vérité est de longueur 48.

En effet, la table de vérité de φ possède 12 fois la valeur 1, et chacun de ces 1 est décrit par une conjonction de longueur 4 (puisqu'il y a 4 variables).

Remarque

Plusieurs choix de rectangles respectant les contraintes décrites précédemment sont possibles.

On peut donc obtenir autant de FND que de choix de rectangles sont possibles.

Toutes les FND ainsi obtenues sont logiquement équivalentes.

Un exercice

Pouvez-vous donner une autre FND minimale équivalente à φ ?

Indice : Un autre choix de rectangles de taille 4 était possible.

Recherche d'une FNC minimale équivalente

En appliquant la méthode précédente à partir d'un tableau de Karnaugh de $\neg\varphi$, on obtient une FND de $\neg\varphi$.

Ensuite, en prenant sa négation et en utilisant les équivalences logiques

$$\neg(\theta \wedge \psi) \equiv \neg\theta \vee \neg\psi$$
$$\neg(\theta \vee \psi) \equiv \neg\theta \wedge \neg\psi$$

on obtient une FNC de φ.

Cette procédure donne encore une longueur minimale.

Exemple (suite)

Tableau de Karnaugh de $\neg\varphi$:

w x \ y z	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 1	0	0	0	1
1 0	0	0	0	0

Exemple (suite)

Tableau de Karnaugh de $\neg\varphi$:

w x \ y z	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 1	0	0	0	1
1 0	0	0	0	0

Ce rectangle est décrit par la conjonction $\neg w \wedge \neg y \wedge z$.

Exemple (suite)

Tableau de Karnaugh de $\neg\varphi$:

w x \ y z	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 1	0	0	0	1
1 0	0	0	0	0

Ce rectangle est décrit par la conjonction $\neg w \wedge x \wedge \neg y$.

Exemple (suite)

Tableau de Karnaugh de $\neg\varphi$:

y z / w x	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 1	0	0	0	1
1 0	0	0	0	0

Ce rectangle est décrit par la conjonction $w \wedge x \wedge y \wedge \neg z$.

Exemple (suite)

Une FND de $\neg\varphi$ est

$$(\neg w \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg w \wedge x \wedge \neg y) \vee (w \wedge x \wedge y \wedge \neg z).$$

D'où

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \neg\neg\varphi \\ &\equiv \neg(\neg w \wedge \neg y \wedge z) \wedge \neg(\neg w \wedge x \wedge \neg y) \wedge \neg(w \wedge \neg x \wedge y \wedge z) \\ &\equiv (w \vee y \vee \neg z) \wedge (w \vee \neg x \vee y) \wedge (\neg w \vee \neg x \vee \neg y \vee z). \end{aligned}$$

La dernière expression est bien une FNC de φ.

Quelques techniques de démonstration

Dans cette section, nous allons formaliser des techniques de démonstration mathématique basée sur la logique propositionnelle.

Équivalence logique et substitution

Lorsque deux propositions sont logiquement équivalentes, on peut substituer l'une par l'autre dans n'importe quelle proposition sans que cela ne change sa table de vérité.

Autrement dit, en substituant dans une proposition une "sous-proposition" par une autre "sous-proposition" logiquement équivalente, on obtient une nouvelle proposition logiquement équivalente.

C'est le concept de substitution, qui est utilisé constamment dans les preuves mathématiques.

Exemple : résolution d'équations

- Résoudre l'équation $\frac{x^2-4}{x-1} = 0$ dans $\mathbb{R}$. La condition d'existence est $x \neq 1$. Ainsi, pour tout x réel différent de 1, l'égalité donnée est équivalente à $x^2 - 4 = 0$, qui est elle-même équivalente à $x^2 = 4$. On écrit

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1} = 0 \iff x^2 = 4.$$

Nous obtenons deux solutions réelles, à savoir 2 et -2.

- Résoudre l'équation $\frac{x^2+4}{x-1} = 0$ dans $\mathbb{R}$. La condition d'existence est $x \neq 1$. Sachant cela, l'équation donnée est équivalente à $x^2 + 4 = 0$, qui est elle-même équivalente à $x^2 = -4$. On écrit

$$\frac{x^2 + 4}{x - 1} = 0 \iff x^2 = -4.$$

L'équation donnée ne possède aucune solution réelle.

Démonstration directe d'une implication

Lorsque qu'un théorème s'énonce par "si A, alors B", la méthode la plus employée pour le démontrer est de supposer A vrai et, avec cette hypothèse, d'ensuite démontrer que B doit être vrai aussi.

Ceci est justifié par la table de vérité associée au connecteur logique $\Rightarrow$.

φ	ψ	$\varphi \Rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Attention : Montrer une implication ne donne aucune information sur la vérité de A et B indépendamment ! ! !

Exemple

Tout entier qui est un carré a un nombre impair de diviseurs.

Preuve

Soit n un entier quelconque.

Nous supposons que $n = k^2$, et nous voulons montrer que n a un nombre impair de diviseurs.

Comme $n = k^2$, l'entier n admet k comme diviseur. Pour tout autre diviseur p (c'est-à-dire tel que $p \neq k$), il doit y avoir un entier q tel que $n = pq$. Donc l'entier q est également diviseur de n et $q \neq k$.

Donc les diviseurs de n autres que k doivent exister par paires. Le nombre total de diviseurs est donc impair. $\square$

Techniques de démonstration basée sur des équivalences logiques.

Certaines équivalences logiques correspondent à des techniques de démonstration bien connues, qui méritent d'être mises en évidence.

C'est le cas de

- $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$
- $\varphi \equiv \neg\varphi \Rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$
- $\varphi \Rightarrow (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow \theta$
- $(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \theta \equiv (\varphi \Rightarrow \theta) \wedge (\psi \Rightarrow \theta)$

La démonstration par contraposition est basée sur $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$.

Définition

La proposition $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$ est appelée la contraposition (on dit aussi la contraposée) de $\varphi \Rightarrow \psi$.

Exemple

Si n est un nombre entier tel que n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve

Soit n un nombre entier quelconque.

Montrons la contraposée : si n est impair, alors n^2 est impair.

Supposons donc que n est impair. Dans ce cas, nous savons qu'il existe un entier k tel $n = 2k + 1$. On calcule

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

prouvant ainsi que n^2 est impair. $\square$

Questions de vocabulaire

- La condition est-elle nécessaire ou suffisante ?

Lorsqu'on démontre l'implication $A \Rightarrow B$ de manière directe, on montre en fait que A est une condition suffisante pour B.

Lorsqu'on démontre l'implication $A \Rightarrow B$ en passant à la contraposée $\neg B \Rightarrow \neg A$, on montre que B est une condition nécessaire pour A. Autrement dit, si B est faux, alors A ne peut être vrai.

Questions de vocabulaire (suite)

- Condition nécessaire ET suffisante ?

Lorsque l'on veut montrer un énoncé du type "A si et seulement si B", c'est-à-dire $A \Leftrightarrow B$, la démonstration doit toujours contenir deux parties indépendantes, dont l'ordre n'a pas d'importance.

Questions de vocabulaire (suite)

La première est la démonstration de $A \Rightarrow B$.

On qualifie cette partie de démonstration de la condition nécessaire : comprenez, du fait que B est une condition nécessaire pour A.

C'est à cette première partie que fait référence le "seulement si" de la formulation "A si et seulement si B".

Questions de vocabulaire (suite)

La deuxième est celle de $A \Leftarrow B$, ou encore $B \Rightarrow A$.

Cette deuxième partie est la démonstration de la condition suffisante : comprenez, que B est une condition suffisante pour A.

C'est à cette deuxième partie que fait référence le "si" de la formulation "A si et seulement si B".

Questions de vocabulaire (suite)

Ainsi, on aura démontré que B est une condition nécessaire et suffisante pour A. Remarquons qu'en dépit de la symétrie de la notation $A \Leftrightarrow B$, on attribue bien les noms de condition nécessaire et de condition suffisante par rapport à la proposition de gauche (ici, de A).

Questions de vocabulaire (suite)

- Contraposée ou réciproque ?

Il s'agit de deux notions différentes !

Nous avons vu que la contraposée de l'implication $\varphi \Rightarrow \psi$ est $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$.

Par contre, la réciproque de l'implication $\varphi \Rightarrow \psi$ est $\psi \Rightarrow \varphi$.

Une implication et sa contraposée sont vraies simultanément, alors que les valeurs de vérité d'une implication et de sa réciproque sont indépendantes.

La démonstration par l'absurde est basée sur $\varphi \equiv \neg\varphi \Rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$.

En effet, la proposition $\psi \wedge \neg\psi$ est une contradiction.

Dès lors, l'implication $\neg\varphi \Rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$ ne peut être vraie que si $\neg\varphi$ est faux, c'est-à-dire, que si φ est vrai.

Souvent le raisonnement par l'absurde a comme désavantage de ne pas être constructif.

En mathématique, en raisonnant par l'absurde, il arrive qu'on puisse montrer qu'une équation possède une solution (car si elle n'en avait pas, on obtiendrait une contradiction) sans pour autant être capable de fournir explicitement une solution de cette équation !

Exemple

Il existe une infinité de nombres premiers.

Pour rappel, un nombre naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs naturels : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$.

Preuve

Procédons par l'absurde et supposons qu'il y ait un nombre fini de nombres premiers. Notons-les $p_1, \ldots, p_n$.

On considère maintenant le nombre entier $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.

Ce nouveau nombre N est ≥ 2 et n'est divisible par aucun des nombres $p_1, \ldots, p_n$.

Le nombre N est donc lui-même premier.

Mais N est aussi strictement plus grand que tous les nombres $p_1, \ldots, p_n$, ce qui impossible. $\square$

La démonstration d'une alternative est basée sur $\varphi \Rightarrow (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow \theta$

Définition

Une alternative est une implication de la forme $\varphi \Rightarrow (\psi \vee \theta)$.

Pour démontrer que "s'il pleut, alors je prends un parapluie ou un imperméable", on pourra montrer que "s'il pleut et que je n'ai pas de parapluie, alors j'ai un imperméable".

Remarquez que, de façon équivalente, on peut également montrer que "s'il pleut et que je n'ai pas d'imperméable, alors j'ai un parapluie".

Exemple

Si un entier n est divisible par 3, alors n est divisible par 6 ou $n - 3$ est divisible par 6.

Preuve

Supposons que n est un entier divisible par 3 mais pas par 6.

Nous devons montrer que $n - 3$ est divisible par 6.

On sait que $n = 3k$ pour un entier k.

Puisque n n'est pas divisible par 6, k n'est pas divisible par 2.

Donc $k = 2\ell + 1$ pour un entier ℓ.

On obtient que $n - 3 = 3k - 3 = 3(k - 1) = 3 \cdot 2\ell = 6\ell$ et donc que $n - 3$ est divisible par 6. $\square$

La démonstration par disjonction des cas se base sur $(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \theta \equiv (\varphi \Rightarrow \theta) \wedge (\psi \Rightarrow \theta)$.

Lorsque l'on doit démontrer une implication de la forme $(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \theta$, on procède généralement par disjonction des cas.

Pour prouver que

“si un parallélogramme a un angle droit ou est tel que ses diagonales sont de même longueur, alors c'est un rectangle”,

je montrerai que

- "tout parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle”

et aussi que

- “tout parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle”.

Exemple

Si un entier n est divisible par 6 ou par 10, alors n est pair.

Remarquons que le fait d'être divisible par 6 n'implique pas d'être divisible par 10 et réciproquement, le fait d'être divisible par 10 n'implique pas d'être divisible par 6. On doit donc bien considérer ces deux cas de figure indépendamment l'un de l'autre.

Preuve

Supposons d'abord que n est un entier divisible par 6.

Alors $n = 6k$, pour un entier k. On obtient que $n = 2 \cdot 3k$, donc que n est un nombre pair.

Supposons à présent que n est un entier divisible par 10.

Alors $n = 10\ell$, pour un entier ℓ.

On obtient que $n = 2 \cdot 5\ell$, donc que n est un nombre pair. $\square$