# Mathématiques pour l'informatique 1

# Cours 11 - Rang et compatibilité d'un système linéaire, algorithme de Gauss

Émilie Charlier

Département de Mathématique
Université de Liège

# Rang et résolution d'un système quelconque

### Définition

- Une sous-matrice d'une matrice $A$ est une matrice que l'on peut obtenir à partir de $A$ en supprimant des lignes et des colonnes.
- Le rang d'une matrice $A$, noté $\mathrm{rg}(A)$, vaut $m$ si la plus grande sous-matrice carrée de $A$ ayant un déterminant non nul est de taille $m \times m$.
- Le rang d'un système linéaire $Ax = b$ est le rang de la matrice des coefficients $A$.

# Exemple

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

alors $\det(A) = 0$ mais le déterminant de la sous-matrice de $A$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne est non nul.

Donc le rang de $A$ vaut 2.

# Autre exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = 0$, donc $\mathrm{rg}(A) \leq 2$.

Les 6 sous-matrices $2 \times 2$ obtenues en sélectionnant la deuxième ligne ont toutes un déterminant nul.

Les 3 sous-matrice de $A$ de taille $2 \times 2$ obtenues en supprimant la deuxième ligne sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ces trois matrices étant elles aussi de déterminant nul, on a $\mathrm{rg}(A) \leq 1$.

Comme $A \neq 0_{3\times 3}$, on a aussi $\mathrm{rg}(A) \geq 1$.

En conclusion, le rang de $A$ vaut 1.

# Propriétés du rang

## Proposition

1. Si $A$ est une matrice carrée $m \times m$ de déterminant non nul, alors son rang vaut $m$.
2. Si une ligne d'une matrice $A$ est une combinaison linéaire des autres lignes de $A$, alors la matrice obtenue en supprimant cette ligne a le même rang que $A$.
3. Si une colonne d'une matrice $A$ est une combinaison linéaire des autres colonnes de $A$, alors la matrice obtenue en supprimant cette colonne a le même rang que $A$.

**Démonstration.**
Ceci découle de la définition du rang et de la multilinéarité du déterminant sur les rangées. $\square$

# Règle des déterminants bordés

**Définition**

Soient $S$ et $S'$ deux sous-matrices d'une matrice $A$. On dit que $S$ borde $S'$ si $S'$ est une sous-matrice de $S$.

**Théorème**

Une matrice $A$ est de rang $r$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1. Il existe une sous-matrice carrée $S$ de $A$ de taille $r \times r$ ayant un déterminant non nul.
2. Toutes les sous-matrices de $A$ de taille $(r+1) \times (r+1)$ qui bordent $S$ ont un déterminant nul.

# Exemple (suite)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Grâce à la règle des déterminants bordés, pour affirmer que $\mathrm{rg}(A) = 1$, il suffit de considérer la sous-matrice $S = (1)$, de vérifier que $\det(S) \neq 0$ et que toutes les sous-matrices $2 \times 2$ qui bordent $S$ dans $A$ ont un déterminant nul.

On a bien $\det(S) = 1 \neq 0$ et

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons que cette méthode mène au calcul de 4 déterminants $2 \times 2$. Sans elle, nous avions calculé 1 déterminant $3 \times 3$ et 9 déterminants $2 \times 2$.

# Matrice augmentée et critère de compatibilité

Soient $A \in \mathbb{C}^{\ell \times c}$ et $b \in \mathbb{C}^{\ell \times 1}$. La matrice augmentée $A|b$ est la matrice

$$A|b = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1c} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2c} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{\ell 1} & A_{\ell 2} & \cdots & A_{\ell c} & b_\ell \end{pmatrix}.$$

obtenue en ajoutant la colonne $b$ à la matrice $A$.

### Critère

Soient $A \in \mathbb{C}^{\ell \times c}$ et $b \in \mathbb{C}^{\ell \times 1}$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. Le système linéaire $Ax = b$ possède au moins une solution $x \in \mathbb{C}^{c \times 1}$.
2. Le rang de $A$ est égal au rang de la matrice augmentée $A|b$.

# Une conséquence importante

**Théorème**

Un système linéaire compatible $Ax = b$ de rang $r$ est équivalent à tout système $A'x = b'$ obtenu en sélectionnant $r$ lignes de telle sorte que $\mathrm{rg}(A') = r$.

# Méthode de Gauss pour la résolution d'un système quelconque

- On considère un système linéaire sans aucune restriction, et on garde les mêmes notations que précédemment.
- On choisit une ligne dont le coefficient de $x_1$ est non nul que l'on place tout en haut et que l'on utilise pour supprimer les coefficients de $x_1$ de toutes les lignes suivantes.
- Ensuite on choisit une autre ligne dans laquelle le coefficient de $x_2$ est non nul, que l'on place en deuxième place et qui sert à supprimer les coefficients de $x_2$ des lignes suivantes.
- Dans le cas où tous les coefficients de $x_2$ sont nuls, on choisit une inconnue $x_i$ ayant un coefficient non nul dans une certaine ligne et on la renumérote $x_2$ (et $x_2$ devient $x_i$).
- On continue tant que l'on peut trouver une inconnue dans les lignes suivantes dont le coefficient est non nul.

- On arrive finalement à un système dont la partie supérieure gauche est sous forme triangulaire et dont les coefficients des lignes suivantes sont tous nuls (sinon on pourrait continuer).

$$\left\{\begin{array}{rcc} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1r}x_r + A_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + A_{1c}x_c & = & b_1 \\ & \vdots & \\ A_{rr}x_r + A_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + A_{rc}x_c & = & b_r \\ 0 & = & b_{r+1} \\ & \vdots & \\ 0 & = & b_\ell \end{array}\right.$$

- Le rang du système reste le même d'une étape à l'autre. Ainsi, le rang du système de départ est égal au rang du système à la fin de la procédure.
- Le rang du système est égal à $r$, c'est-à-dire au nombre d'équations qui ne sont pas de la forme $0 = b_i$.
- Si au moins un des nombres $b_{r+1}, \ldots, b_\ell$ est non nul, alors le système est impossible.

- Sinon, le système est équivalent au système obtenu en supprimant toutes les équations de la forme $0 = 0$ et en déplaçant les inconnues $x_{r+1}, ..., x_c$ dans les seconds membres des $r$ premières équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1r}x_r & = & b_1 - A_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - A_{1c}x_c \\ & \vdots & \\ A_{rr}x_r & = & b_r - A_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - A_{rc}x_c \end{array} \right.$$

- Nous trouvons alors facilement les solutions $(x_1, \ldots, x_r)$ qui dépendent de $x_{r+1}, \ldots, x_c$.

# Remarque importante

Remarquez qu'avec cette méthode, le rang du système se calcule a posteriori.

Pas besoin de le pré-calculer pour savoir si le système est impossible ou non.

# Un exemple

On a successivement

$$\begin{cases} 2x - 3y + \ \ z = 3 \\ \ x + \ \ y - 2z = 4 \\ 4x - \ \ y - 3z = 11 \\ \ x - 4y + 3z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \ x + \ \ y - 2z = 4 \\ 2x - 3y + \ \ z = 3 \\ 4x - \ \ y - 3z = 11 \\ \ x - 4y + 3z = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \ \ y - 2z = 4 \\ \quad - 5y + 5z = -5 \\ \quad - 5y + 5z = -5 \\ \quad - 5y + 5z = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z & = & 4 \\ y - z & = & 1 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 4 + 2z \\ \quad y = 1 + z \end{cases}$$

# Un exemple (suite)

Le système est donc de rang 2. On résout par rapport à $x$ et $y$ avec $z$ comme paramètre, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+(1+z) & = & 4+2z \\ y & = & 1+z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3+z \\ y & = & 1+z \end{array}\right.$$

Les solutions sont donc $(x,y,z)=(3+\lambda,1+\lambda,\lambda)$, avec $\lambda\in\mathbb{C}$.

# Un deuxième exemple

On a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 4 \\ -3x & - & y & & & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & - & 5y & + & 3z & = & 2 \\ & & 5y & - & 3z & = & 8 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcc} x + 2y - z & = & 1 \\ -5y + 3z & = & 2 \\ 0 & = & 10 \end{array}\right.$$

Le système est de rang 2 et impossible.

# La méthode de Gauss peut s'écrire sous forme de tableau de nombres.

La résolution du système précédent peut s'encoder comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

# Méthode de Gauss pour le calcul de l'inverse d'une matrice

Si $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ est une matrice inversible, alors son inverse est l'unique solution $X \in \mathbb{C}^{m \times m}$ de l'équation

$$AX = I_m. \tag{1}$$

Si l'on note $x_1, \ldots, x_m$ les colonnes de $X$ et $e_1, \ldots, e_m$ les colonnes de $I_m$, alors l'équation matricielle (**??**) est équivalente aux $m$ systèmes linéaires

$$Ax_j = e_j, \quad j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Comme ces $m$ systèmes possèdent la même matrice des coefficients $A$, on peut tous les résoudre simultanément en utilisant la méthode de Gauss.

# Exemple

On cherche la matrice inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Il nous reste à présent à résoudre 3 systèmes linéaires triangulaires.

# Exemple (suite)

Pour la première colonne de $X$, on obtient successivement

- $X_{31} = -\frac{1}{2}$
- $X_{21} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$
- $X_{11} = 1 - 2X_{21} - X_{31} = \frac{1}{2}$.

# Exemple (suite)

Pour la deuxième colonne de $X$, on obtient

- $X_{32} = -\frac{3}{2}$
- $X_{22} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$
- $X_{12} = 0 - 2X_{22} - X_{32} = \frac{5}{2}$.

# Exemple (suite)

Enfin, pour la troisième colonne de $X$, on obtient

- $X_{33} = 1$
- $X_{23} = \frac{0}{-2} = 0$
- $X_{13} = 0 - 2X_{23} - X_{33} = -1.$

On a donc obtenu que

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

# Remarques importantes

- Dans le cas d'une matrice $3 \times 3$, la méthode des cofacteurs est compétitive par rapport à la méthode de Gauss, mais plus la taille de la matrice augmente, plus le gain de temps apporté par la méthode de Gauss est important.
- Tout comme pour le calcul du rang, la méthode de Gauss permet de voir a posteriori si une matrice est ou non inversible.
- Il ne faut donc pas savoir avant de commencer si elle est inversible ou non (ce qui serait dommage puisque cela imposerait un calcul de déterminant inutilement lourd).