Mathématiques pour l'informatique 1

Cours 9 - Déterminant et inverse d'une matrice carrée

Émilie Charlier

Département de Mathématique
Université de Liège

Inverse d'une matrice

Lemme

Si A, B, C sont des matrices carrées de même taille telles que $BA = AC = I$, alors $B = C$.

Démonstration.

Supposons que $BA = AC = I$. Alors $B = BI = BAC = IC = C$. □

Cette propriété s'énonce également comme suit : si A admet un inverse à gauche et un inverse à droite, alors ces inverses sont égaux.

Une matrice carrée A est dite inversible s'il existe une matrice carrée B de même taille que A telle que $AB = BA = I$.

Au vu du lemme, il ne peut exister qu'une seule telle matrice B et celle-ci est appelée la matrice inverse de A. Lorsqu'elle existe, la matrice inverse de A est notée A^{-1}.

Exemple

On a

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

car

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

L'inverse d'une matrice n'existe pas toujours.

Nous allons déterminer dans quelles conditions une matrice admet un inverse.

Pour cela, nous avons besoin de définir une notion importante : le déterminant.

Déterminant

Soit A une matrice carrée de taille $m \times m$.

Definition

Le déterminant de A est un nombre, noté $\det(A)$ ou $|A|$, que l'on définit récursivement comme suit :

1. Si $m = 1$, alors $\det(A) = A_{11}$.
2. Si $m > 1$, alors
$$\det(A) = \sum_{k=1}^{m} A_{1k}\, \mathcal{C}_{1k},$$
où $\mathcal{C}_{1k} := (-1)^{1+k} \det(M_{1k})$, avec M_{1k} la matrice de taille $(m-1) \times (m-1)$ obtenue en supprimant la première ligne et la k-ième colonne de A.

On appelle ce procédé le calcul du déterminant par développement suivant la première ligne.

Exemple

Définition récursive :

- calcul d'un déterminant $m \times m \to$ calcul de m déterminants $(m-1) \times (m-1)$.
- calcul d'un déterminant $3 \times 3 \to$ calcul de 3 déterminants 2×2.

En appliquant la définition, on trouve que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$$

vaut

$$4 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 12 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}.$$

Mineurs

Definition

On note $M_{ij}(A)$ la matrice de taille $(m-1)\times(m-1)$ obtenue en supprimant de A la i-ième ligne et la j-ième colonne.

Le mineur de l'élément A_{ij} est le déterminant de $M_{ij}(A)$.

Le nombre $\mathcal{C}_{ij}(A) := (-1)^{i+j}\det(M_{ij}(A))$ est appelé le cofacteur de l'élément A_{ij}.

Si la matrice A est clairement identifiée, on s'autorise à écrire simplement M_{ij} et $\mathcal{C}_{ij}$.

Première loi des mineurs

En réalité, la définition du déterminant est indépendante de la ligne choisie. Nous admettons l'important résultat suivant.

Première loi des mineurs pour les lignes

Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on a

$$\sum_{k=1}^{m} A_{ik}\, \mathcal{C}_{ik} = \det(A).$$

On appelle ce procédé le calcul du déterminant par développement suivant la i-ème ligne.

On peut également calculer le déterminant en calculant les mineurs relatifs aux éléments d'une colonne. À nouveau, nous admettons ce résultat.

Première loi des mineurs pour les colonnes

Pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, on a

$$\sum_{k=1}^{m} A_{kj} \, \mathcal{C}_{kj} = \det(A).$$

On appelle ce procédé le calcul du déterminant par développement suivant la j-ème colonne.

Deuxième loi des mineurs

Et si on se trompait de ligne pour calculer les cofacteurs ? Et bien, cela change tout ! Dans ce cas, on obtient toujours la même réponse : 0.

En effet, on a également l'important résultat suivant, que nous démontrons pas non plus.

Deuxième loi des mineurs pour les lignes

Pour tous $i, i' \in \{1, \ldots, m\}$ tels que $i \neq i'$, on a

$$\sum_{k=1}^{m} A_{ik}\, \mathcal{C}_{i'k} = 0.$$

On a également un résultat analogue dans le cas des colonnes.

Deuxième loi des mineurs pour les colonnes

Pour tous $j, j' \in \{1, \ldots, m\}$ tels que $j \neq j'$, on a

$$\sum_{k=1}^{m} A_{kj}\, \mathcal{C}_{kj'} = 0.$$

Propriétés du déterminant

Proposition 1

Si A possède deux lignes ou deux colonnes identiques, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration.

Nous faisons la démonstration dans le cas des lignes, celle sur les colonnes se faisant de façon similaire.

Supposons que les lignes i et i' de A soient identiques, avec $i \neq i'$.

Cela signifie que pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, on a $A_{ik} = A_{i'k}$.

Au vu des lois des mineurs sur les lignes, on a

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}\,\mathcal{C}_{ik} = \sum_{k=1}^{m} A_{i'k}\,\mathcal{C}_{ik} = 0.$$

□

Proposition 2

On a $\det(A) = \det(A^\intercal)$.

Démonstration

On procède par récurrence sur la taille des matrices.

Le résultat est évident pour les matrices de taille 1×1.

Supposons à présent que $n > 1$ et que le résultat soit vrai pour toutes les matrices de taille $m \times m$ avec $m < n$. Soit A une matrice de taille $n \times n$.

Remarquez que si M_{ij} désigne la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A, alors $(M_{ij})^\intercal$ désigne la matrice obtenue en supprimant la j-ième ligne et la i-ième colonne de $A^\intercal$.

Autrement dit, on a $(M_{ij}(A))^\intercal = M_{ji}(A^\intercal)$.

Ainsi, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{ij}(A) &= (-1)^{i+j} \det(M_{ij}(A)) \\
&= (-1)^{i+j} \det((M_{ij}(A))^\mathsf{T}) \\
&= (-1)^{i+j} \det(M_{ji}(A^\mathsf{T})) \\
&= \mathcal{C}_{ji}(A^\mathsf{T}).
\end{aligned}$$

On obtient

$$\det(A^\mathsf{T}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} (A^\mathsf{T})_{1k}\, \mathcal{C}_{1k}(A^\mathsf{T}) \;=\; \sum_{k=1} A_{k1}\, \mathcal{C}_{k1}(A) \;=\; \det(A)$$

comme annoncé. $\square$

Conséquence

Toute propriété du déterminant sur les lignes d'une matrice est également valable pour les colonnes, et vice-versa.

Multilinéarité du déterminant sur les lignes et les colonnes

Proposition 3

1. Pour tous $i \in \{1, \ldots, m\}$, $L_1, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_m$, $M, N, \in \mathbb{C}^{1\times m}$ et $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$\det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ aM+bN \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ M \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} + b \cdot \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ N \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}.$$

2. Pour tous $j \in \{1, \ldots, m\}$, $C_1, \ldots, C_{j-1}, C_{j+1}, \ldots, C_m$, $D, E \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ et $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} C_1 \cdots C_{j-1} & aD+bE & C_{j+1} \cdots C_m \end{pmatrix} \\ &\quad = a \cdot \det \begin{pmatrix} C_1 \cdots C_{j-1} & D & C_{j+1} \cdots C_m \end{pmatrix} + b \cdot \det \begin{pmatrix} C_1 \cdots C_{j-1} & E & C_{j+1} \cdots C_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple

On a toujours

$$\begin{vmatrix} a & 3b+2c & d \\ e & 3f+2g & h \\ i & 3j+2k & \ell \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & \ell \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ i & k & \ell \end{vmatrix}.$$

et

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d+2e & 3f+2g & 3h+2i \\ j & k & \ell \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & h \\ j & k & \ell \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & g & i \\ j & k & \ell \end{vmatrix}.$$

Corollaire

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\det(\lambda A) = \lambda^m \det(A).$$

Démonstration.

C'est une conséquence directe de la multilinéarité du déterminant. $\square$

Exemple

On a

$$\begin{aligned}
\left|3\cdot\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\right| &= \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c\\ 3d & 3e & 3f\\ 3g & 3h & 3i\end{vmatrix}\\
&= 3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c\\ 3d & 3e & 3f\\ 3g & 3h & 3i\end{vmatrix}\\
&= 9\cdot\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ 3g & 3h & 3i\end{vmatrix}\\
&= 27\cdot\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Proposition 4

1. Le déterminant d'une matrice carrée vaut 0 si une ligne est une combinaison linéaire des autres lignes.
2. Le déterminant d'une matrice carrée vaut 0 si une colonne est une combinaison linéaire des autres colonnes.

Démonstration.

Nous savons que le déterminant d'une matrice qui possède deux lignes ou deux colonnes identiques vaut 0.

Le résultat découle alors de la multilinéarité du déterminant sur les lignes et les colonnes. $\square$

Exemple

Au vu de la proposition précédente, on a toujours

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+2d & 3b+2e & 3c+2f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

Le calcul suivant illustre la preuve de cette proposition :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+2d & 3b+2e & 3c+2f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 3\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}}_{=0} + 2\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix}}_{=0} = 0.$$

Corollaire

1. Le déterminant d'une matrice carrée est inchangé si l'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des <u>autres</u> lignes.
2. Le déterminant d'une matrice carrée est inchangé si l'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des <u>autres</u> colonnes.

Démonstration.

Ceci découle des deux propositions précédentes. $\square$

Critère d'annulation du déterminant

En fait, nous avons même le critère suivant (que nous admettons pour moitié, donc).

Fait

Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Le déterminant de A vaut 0.
2. Une ligne de A est combinaison linéaire des autres.
3. Une colonne de A est combinaison linéaire des autres.

Remarques pratiques concernant le calcul du déterminant

1. L'expression $(-1)^{i+j}$ vaut $+1$ ou -1 selon que la puissance $i+j$ est paire ou impaire.

   En particulier quand on passe du coefficient A_{ij} au coefficient suivant $A_{i,j+1}$, le signe change.

   Cela donne une répartition des coefficients $(-1)^{i+j}$ dans une matrice en damier.
$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 & \cdots \\ -1 & +1 & -1 & \cdots \\ +1 & -1 & +1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

2. On a intérêt à développer le déterminant selon, si possible, une ligne ou une colonne avec un grand nombre de 0.

3. On a intérêt à d'abord regarder si on peut se servir des propositions 3 et 4, et du corollaire qui suit la proposition 4.

   Lorsque c'est le cas, les calculs du déterminant sont grandement facilités.

Quelques cas particuliers où le calcul du déterminant est facilité

1. Matrices 2×2.

   On a

   $$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1} A_{11} A_{22} + (-1)^{1+2} A_{12} A_{21} \\ &= A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}.\end{aligned}$$

   On parle de produit "en croix".

2. Matrices 3×3.

En développant suivant la première ligne, on trouve

$$\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \\
&\quad = (-1)^{1+1} A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\
&\quad = A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) - A_{12}(A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}) + A_{13}(A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}) \\
&\quad = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{13}A_{22}A_{31}.
\end{aligned}$$

On parle de la règle de Sarrus.

Attention que celle-ci n'est pas valide en dimension supérieure !

3. Matrices triangulaires (inférieures ou supérieures).

On a

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix} = A_{11} \cdot A_{22} \cdots A_{mm}.$$

et

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & & A_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{mm} \end{pmatrix} = A_{11} \cdot A_{22} \cdots A_{mm}.$$

En particulier, on a $\det(I_m) = 1$.

Exemple

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Comme la troisième ligne ne comprend qu'un seul coefficient non nul, il est judicieux de choisir de développer le déterminant selon celle-ci (on aurait pu tout aussi bien choisir la deuxième colonne pour la même raison).

On obtient

$$\det(A) = (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

On développe à présent suivant la deuxième ligne (ou colonne) :

$$\det(A) = 3 \cdot 5 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 15(1 \cdot 7 - 4 \cdot 2) = 15 \cdot (-1) = -15.$$

Déterminant d'un produit de matrices carrées

Pour terminer cette section sur le déterminant, nous admettons l'important résultat suivant.

Déterminant d'un produit de matrices carrées

Si A et B sont des matrices carrées de même taille, alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Lien entre déterminant et inverse

Le théorème suivant donne une caractérisation des matrices inversibles en fonction de leurs déterminants, ainsi qu'une formule de calcul de l'inverse.

Théorème

La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

De plus, lorsque A est inversible, son inverse est donné par

$$M = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} & \cdots & \mathcal{C}_{1m} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} & \cdots & \mathcal{C}_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathcal{C}_{m1} & \mathcal{C}_{m2} & \cdots & \mathcal{C}_{mm} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} .$$

Démonstration de la condition nécessaire

Supposons que A est inversible.

Il existe donc une matrice B de même taille telle que $AB = BA = I_m$.

On a donc $\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(I_m) = 1$.

On obtient ainsi que $\det(A) \neq 0$.

Démonstration de la condition suffisante et de la formule de l'inverse

Supposons que $\det(A) \neq 0$.

But : montrer que dans ce cas, la matrice M de l'énoncé est telle que $AM = MA = I_m$.

Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, on a

$$(AM)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} M_{kj} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{m} A_{ik} \mathcal{C}_{jk}.$$

Par les lois des mineurs pour les lignes, on obtient que

$$(AM)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } i = j \\ 0 & \text{lorsque } i \neq j. \end{cases}$$

On a donc obtenu que $AM = I_m$.

De la même façon, en utilisant les lois des mineurs pour les colonnes, on obtient que $MA = I_m$. À faire par vous-même !

D'où A est inversible et la matrice M de l'énoncé est son inverse. $\square$

Exemple

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$\det(A) = 1 \cdot (1 \cdot (-1) - 4 \cdot 5) + 2 \cdot (3 \cdot 5) = 9.$$

Donc A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -21 & 3 & 15 \\ 10 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{3} & \frac{10}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{5}{3} & \frac{-5}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier qu'on a bien $AA^{-1} = I_3$ et $A^{-1}A = I_3$.

Lien avec l'arithmétique modulaire

Théorème

Soit $m \geq 2$ un entier. Alors une matrice carrée A de taille $n \times n$ dont les éléments sont dans $\mathbb{Z}_m$ est inversible si et seulement si $\det(A)$ est inversible dans $\mathbb{Z}_m$, auquel cas son inverse est donné par

$$(\det(A))^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} & \cdots & \mathcal{C}_{1n} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} & \cdots & \mathcal{C}_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathcal{C}_{n1} & \mathcal{C}_{n2} & \cdots & \mathcal{C}_{nn} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}},$$

où $(\det(A))^{-1}$ désigne l'inverse de $\det(A)$ dans $\mathbb{Z}_m$.

Démonstration.

La démonstration est une adaptation directe de celle du théorème précédent. $\square$

Corollaire

Soit m un nombre premier. Alors une matrice carrée A dont les éléments sont dans $\mathbb{Z}_m$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Démonstration.

Ceci est dû au fait que si m est un nombre premier, tout élément non nul de $\mathbb{Z}_m$ est inversible dans $\mathbb{Z}_m$. $\square$