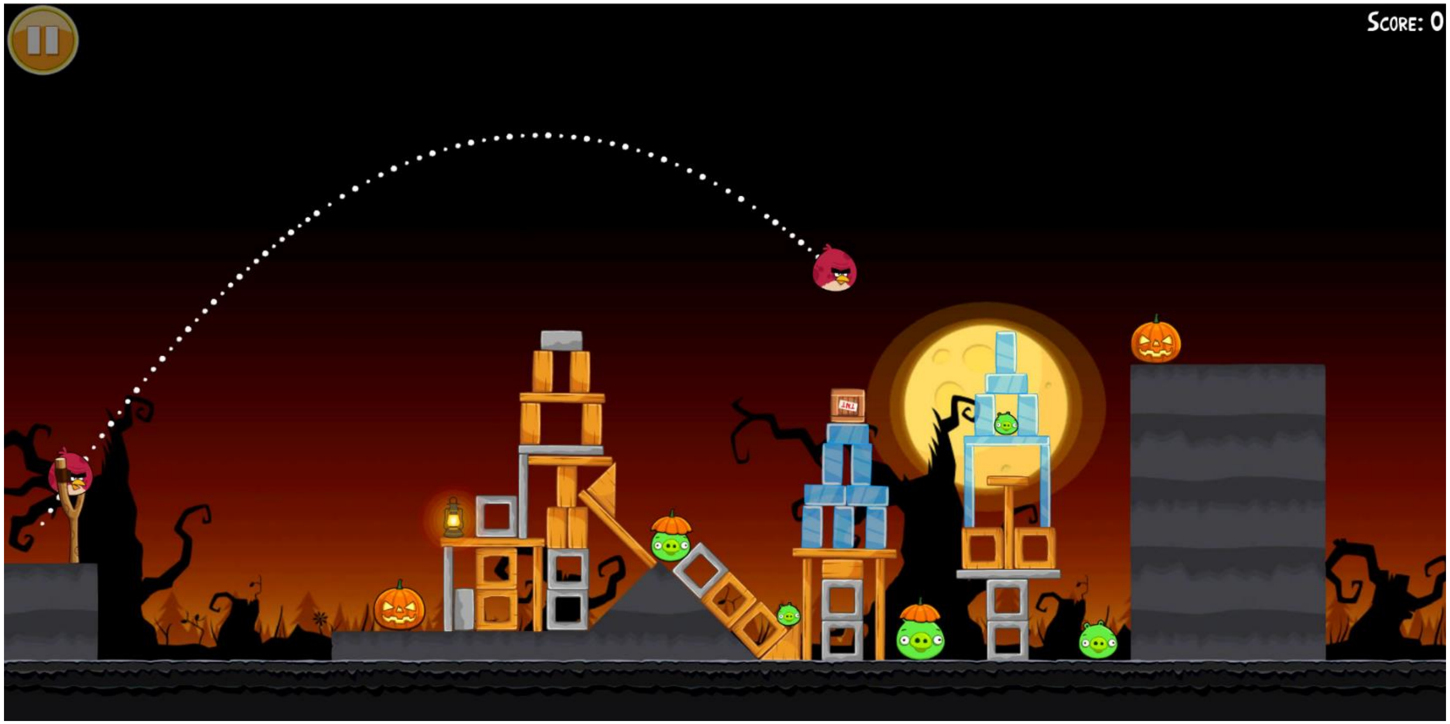
Éléments de Physique : Mécanique

CHAPITRE 2 : MOUVEMENT À DEUX DIMENSIONS

Jérémy Brisbois – 2023-2024

Table des matières

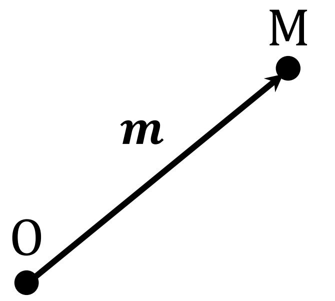
1. Vecteurs
2. Mouvement à deux dimensions
3. Projectiles



Espace à 3 dimensions

La position d'un point M dans l'espace est définie par un **vecteur** ($\boldsymbol{m}$) possédant

- une **origine** (point O)
- une **grandeur** (norme ou module) (m ou $|\boldsymbol{m}|$)
- une **direction** et un **sens**



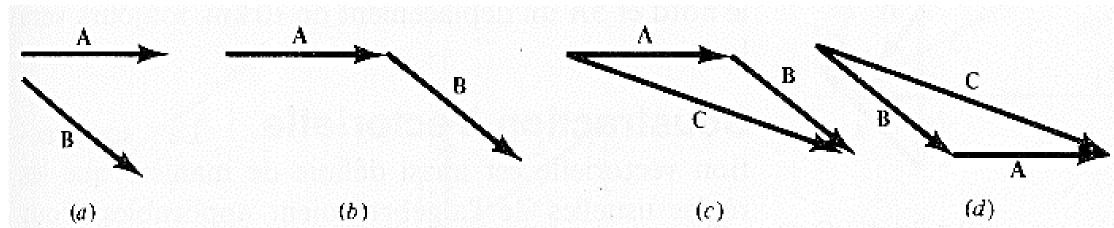
Les grandeurs physiques peuvent être

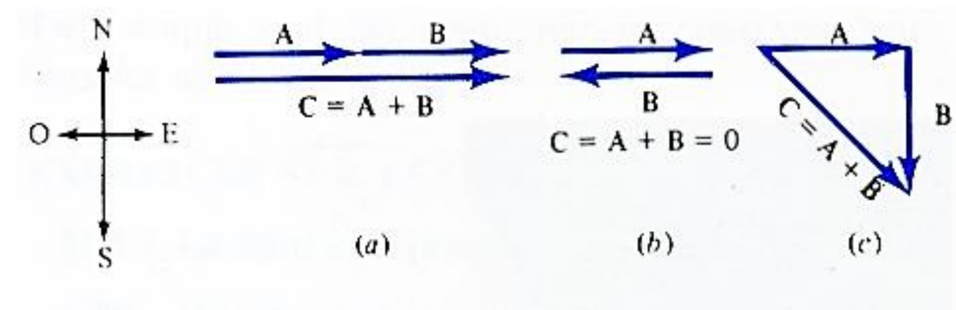
- vectorielles : $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{E}$…
- scalaires : t, T, K, U…

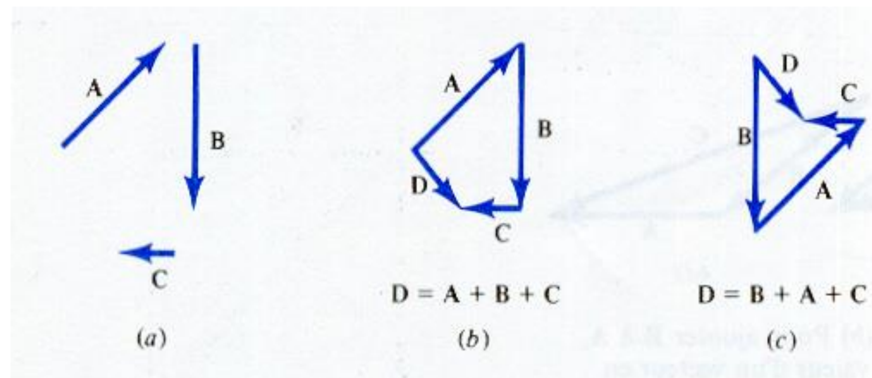
Caractériser le mouvement ↔ déterminer l'évolution temporelle du vecteur position.

Addition de deux vecteurs

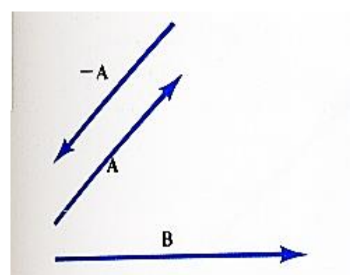
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

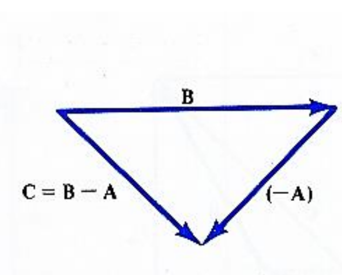






$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + (-\boldsymbol{A})$$





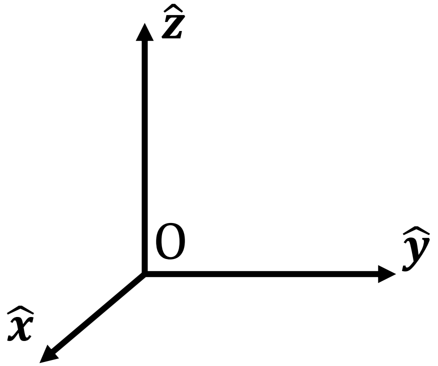
Repère cartésien

Repère cartésien

Système composé de **3 vecteurs**

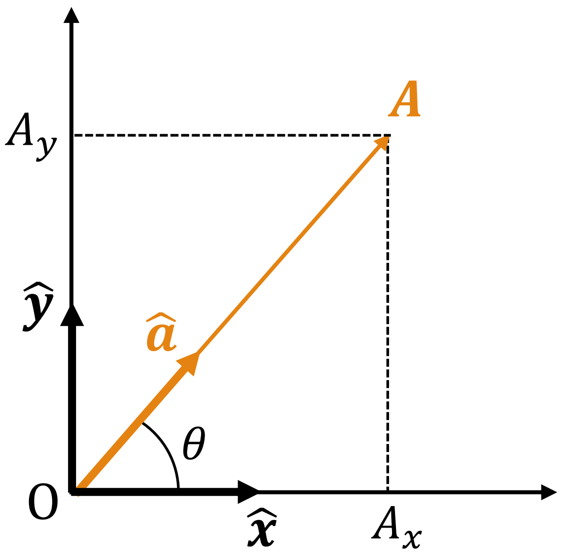
- de grandeur **unitaire** (symbole $\hat{}$)
- **orthogonaux** entre eux

Exemple : repère droitier



Composantes d'un vecteur

Cas à deux dimensions



$$\boldsymbol{A} = A\,\hat{\boldsymbol{a}} = A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}}$$

composantes : $A_x = A\cos\theta$

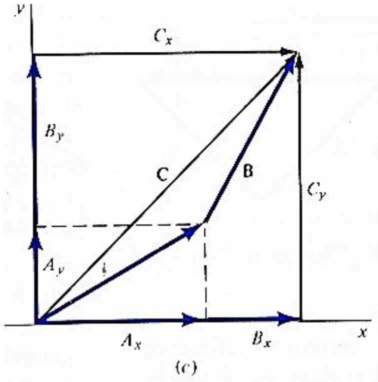
$A_y = A\sin\theta$

$$\frac{A_y}{A_x} = \tan\theta$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Opérations sur les vecteurs

- Addition :



$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_x + B_x)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\boldsymbol{y}}$$

- Soustraction :

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (A_x - B_x)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \left(A_y - B_y\right)\hat{\boldsymbol{y}}$$

- Multiplication par un scalaire :

$$\alpha\boldsymbol{A} = \alpha A_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + \alpha A_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

Le mouvement à deux dimensions

- La position ($\boldsymbol{s}$), la vitesse ($\boldsymbol{v}$) et l'accélération ($\boldsymbol{a}$) sont représentées par des **vecteurs**.

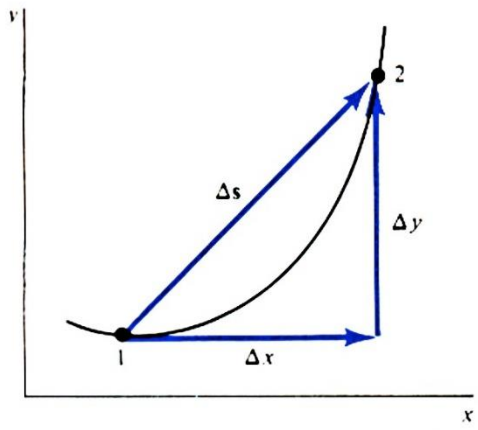
- Les **composantes** de ces vecteurs **dans une direction donnée** satisfont entre elles aux mêmes relations que dans le cas du **mouvement rectiligne**.

Problème de mouvement à deux dimensions (x, y)

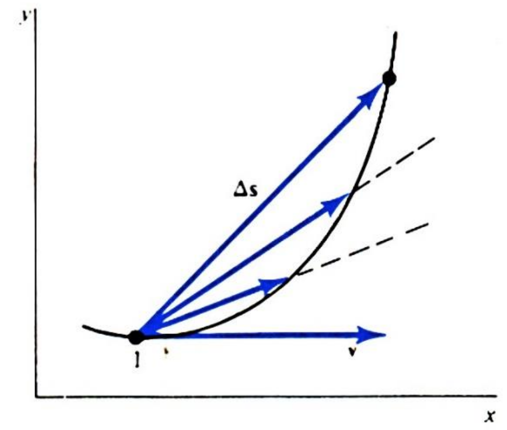
$=$

Deux problèmes de mouvement rectiligne (selon x et y) simultanés et couplés au travers de la variable temps (t)

Le vecteur vitesse



(a)



(b)

Vitesse moyenne :

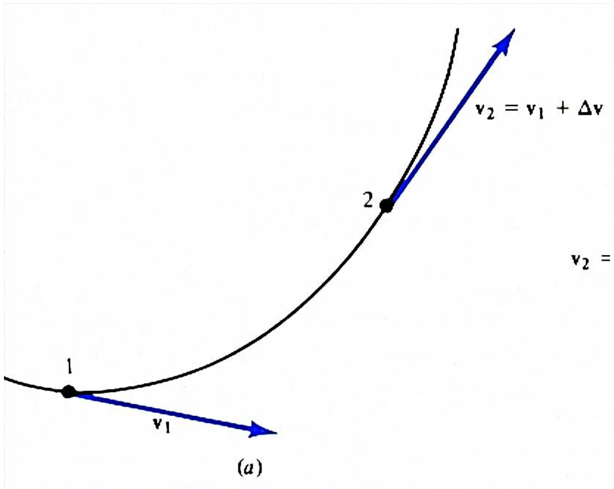
$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{s}}{\Delta t} = \frac{(s_{x2} - s_{x1})\,\hat{\boldsymbol{x}} + (s_{y2} - s_{y1})\,\hat{\boldsymbol{y}}}{\Delta t}$$
$$= \frac{\Delta s_x}{\Delta t}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\Delta s_y}{\Delta t}\,\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$= \bar{v}_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + \bar{v}_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

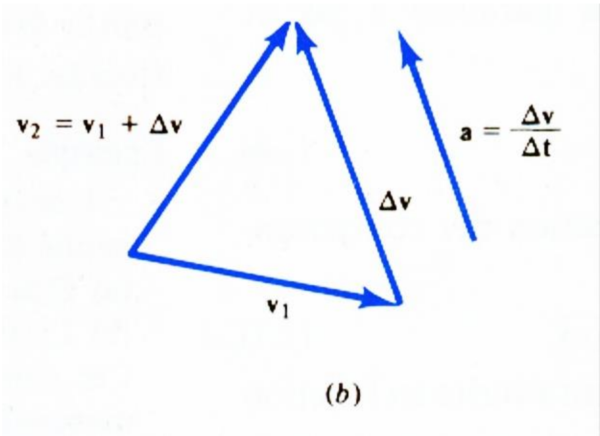
Vitesse instantanée :

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{s}}{\Delta t}$$
$$= \frac{ds_x}{dt}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{ds_y}{dt}\,\hat{\boldsymbol{y}}$$
$$= v_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

Le vecteur vitesse est **tangent** à la trajectoire.

Le vecteur accélération





Accélération moyenne :

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{(v_{x2} - v_{x1})\,\hat{\boldsymbol{x}} + (v_{y2} - v_{y1})\,\hat{\boldsymbol{y}}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$= \bar{a}_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + \bar{a}_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

Accélération instantanée :

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

$$= a_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + a_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

Lois du mouvement

Les composantes (s_x, v_x, a_x) et (s_y, v_y, a_y) satisfont entre elles aux lois du MRUA.

$\rightarrow$ Un mouvement plan est une combinaison de deux MRUA.

Vitesse ou accélération constante

$\neq$ module du vecteur constant

$=$ module <u>et</u> direction constants
$=$ chacune des composantes constante

Lois du mouvement à 2 dimensions

Accélération

$\boldsymbol{a} = a_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + a_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$ $\quad a_x =$ constante $\quad a_y =$ constante

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Vitesse

$\boldsymbol{v} = v_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + v_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$ $\quad v_x = v_{x0} + a_x\Delta t$ $\quad v_y = v_{y0} + a_y\Delta t$

$$v_x = \frac{ds_x}{dt} \qquad v_y = \frac{ds_y}{dt}$$

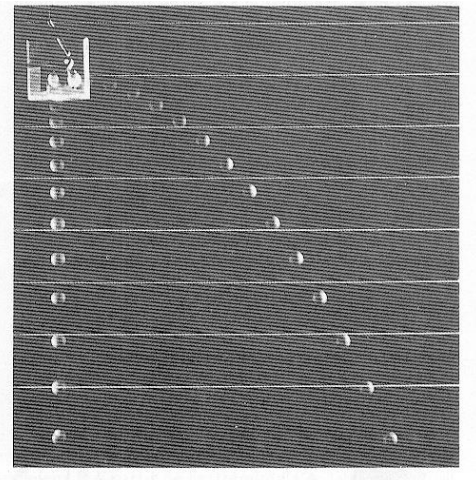
Position

$\boldsymbol{s} = s_x\,\hat{\boldsymbol{x}} + s_y\,\hat{\boldsymbol{y}}$

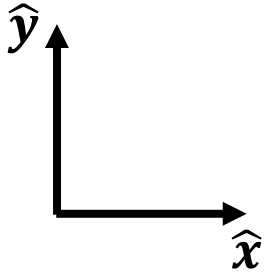
$$\Delta s_x = v_{x0}\Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2 \qquad \Delta s_y = v_{y0}\Delta t + \frac{1}{2}a_y(\Delta t)^2$$

$$\Delta s_x = \frac{(v_x^2 - v_{x0}^2)}{2a_x} \qquad \Delta s_y = \frac{(v_y^2 - v_{y0}^2)}{2a_y}$$

Application : les projectiles



Repère : $\hat{\boldsymbol{x}}$ horizontal et $\hat{\boldsymbol{y}}$ vertical



Equations du mouvement

Direction horizontale

MRU

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_{x0}$$

$$\Delta x = v_{x0}\Delta t$$

Direction verticale

MRUA

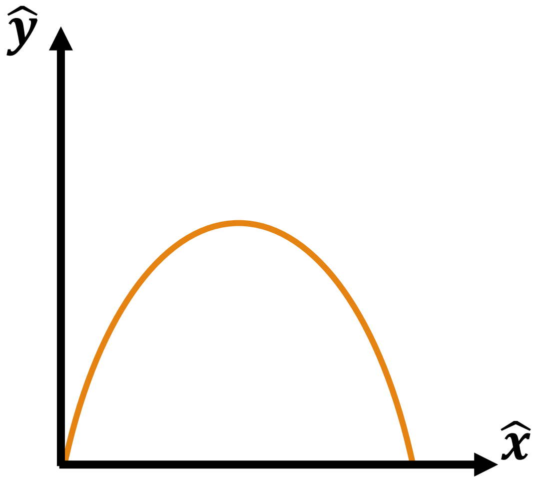
$$a_y = -g$$

$$v_y = v_{y0} - g\Delta t$$

$$\Delta y = v_{y0}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$

Projectiles – Trajectoire parabolique

Le trajectoire d’un **objet en chute libre** dans un graphe x-y est une **parabole**.



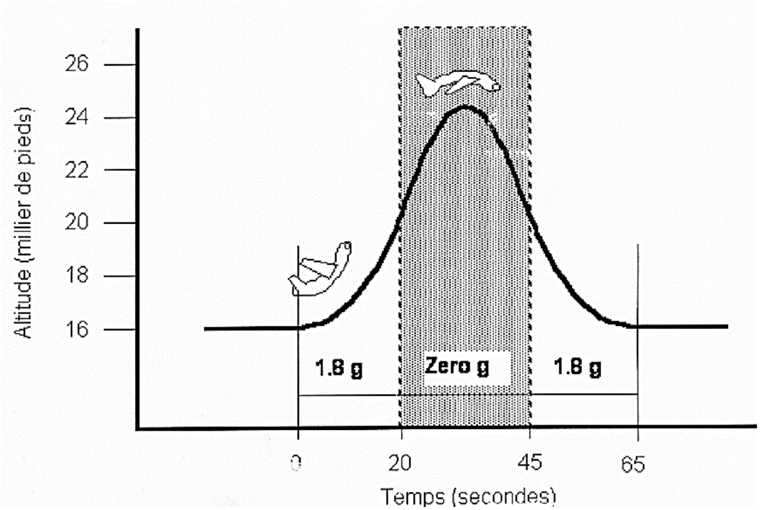
$$\Delta x = v_{x0}\Delta t \qquad \rightarrow \ \Delta t = \frac{\Delta x}{v_{x0}}$$

$$\Delta y = v_{y0}\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$

$$\rightarrow \ \Delta y = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}\Delta x - \frac{g}{2v_{x0}^2}(\Delta x)^2$$

Pour rappel, pour une parabole : $\Delta y = A(\Delta x)^2 + B\,\Delta x + C$

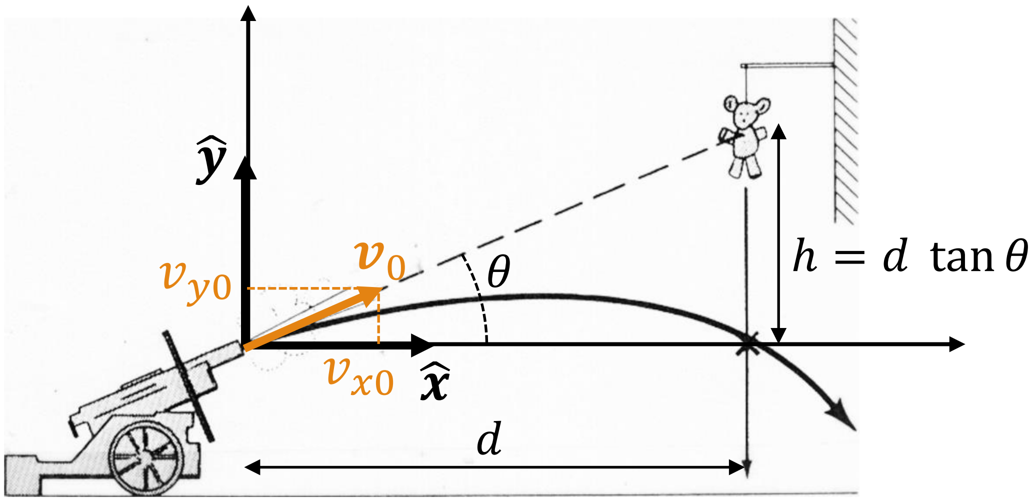
Exemple : vol zéro g



Durant la phase zéro g, l'avion est **en chute libre** et décrit une trajectoire **parabolique**.

Exemple : tir parabolique

Un canon tire un projectile en direction d'un ours en peluche.
Que va-t-il se passer?



- Combien de temps faut-il pour que le projectile parcoure une distance horizontale $\Delta x = d$?

$$\Delta x = v_0 \cos\theta\, \Delta t = d$$

$$\rightarrow \Delta t = \frac{d}{v_0 \cos\theta}$$

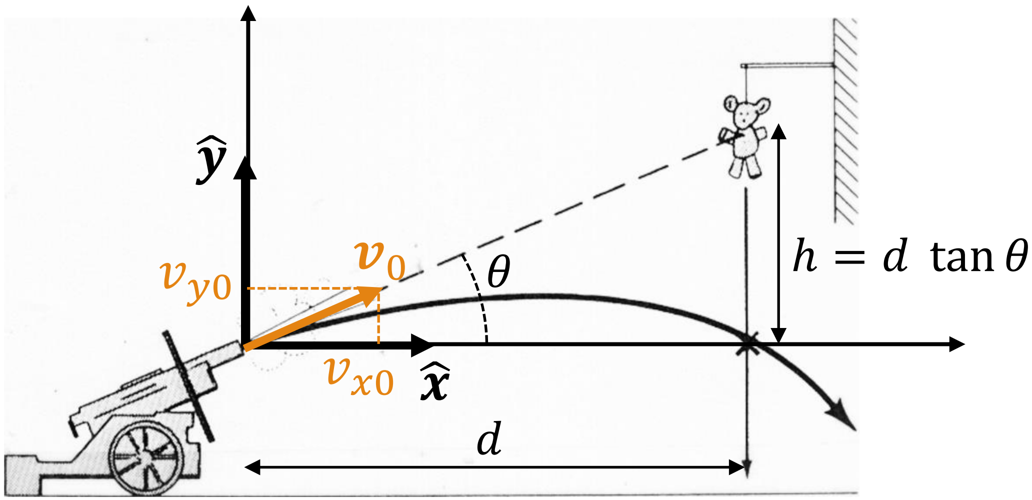
- Quelle est la hauteur y_P du projectile en $\Delta x = d$?

$$\Delta y = y_P - 0 = v_0 \sin\theta\, \Delta t - \frac{g}{2}(\Delta t)^2 \quad \rightarrow y_P = h - \frac{g}{2}\left(\frac{d}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

Le projectile rate l'ours…

Exemple : tir parabolique

Et si on détache l'ours en peluche au moment où le canon tire, que va-t-il se passer?



- Position verticale du projectile en $\Delta x = d$:

$$y_P = h - \frac{g}{2}\left(\frac{d}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

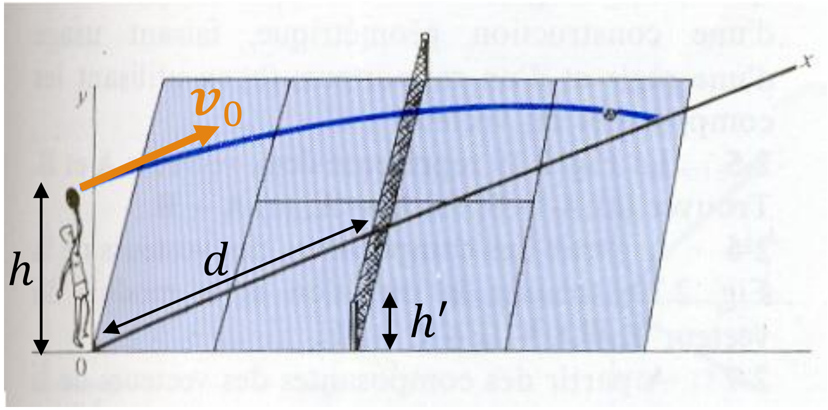
- Quelle est la position y_O de l'ours lorsque le projectile est en $\Delta x = d$?

$$\Delta y = y_O - h = -\frac{g}{2}(\Delta t)^2 \qquad \rightarrow y_O = h - \frac{g}{2}\left(\frac{d}{v_0\cos\theta}\right)^2 = y_P$$

Le projectile touche l'ours!

Exemple : service au tennis

Un joueur de tennis est au service dans un coin du terrain.
La balle passera-t-elle au-dessus du filet?



Données : $v_0 = v_{x0} = 30$ m/s

$h = 2{,}4$ m

$h' = 0{,}9$ m

$d = 12$ m

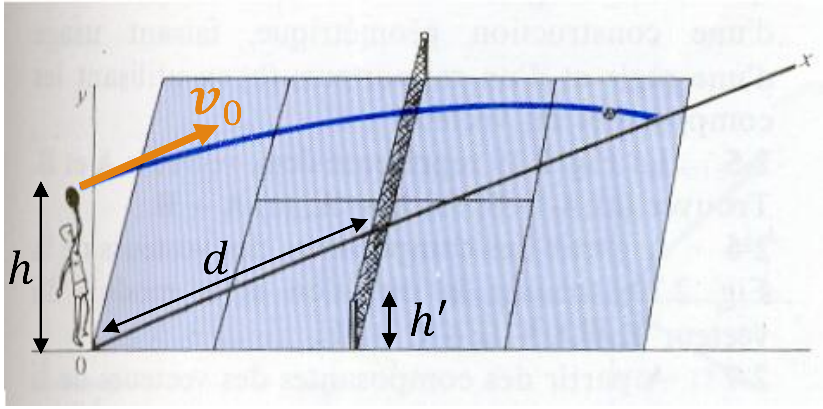
$$\Delta x = v_{x0}\Delta t = d \qquad \rightarrow \Delta t = \frac{d}{v_{x0}} = 0{,}4 \text{ s}$$

$$\Delta y = v_{y0}\Delta t - \frac{g}{2}(\Delta t)^2 = -0{,}78 \text{ m}$$

$$\rightarrow y_f = y_i + \Delta y = 2{,}4 - 0{,}78 = 1{,}62 \text{ m} > 0{,}9 \text{ m}$$

La balle passe!

Exemple : service au tennis



Données : $v_0 = v_{x0} = 30$ m/s
$h = 2{,}4$ m
$h' = 0{,}9$ m
$d = 12$ m

Où la balle atteindra-t-elle le sol?

$$\Delta y = v_{y0}\Delta t - \frac{g}{2}(\Delta t)^2 = h \qquad \rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}7 \text{ s}$$

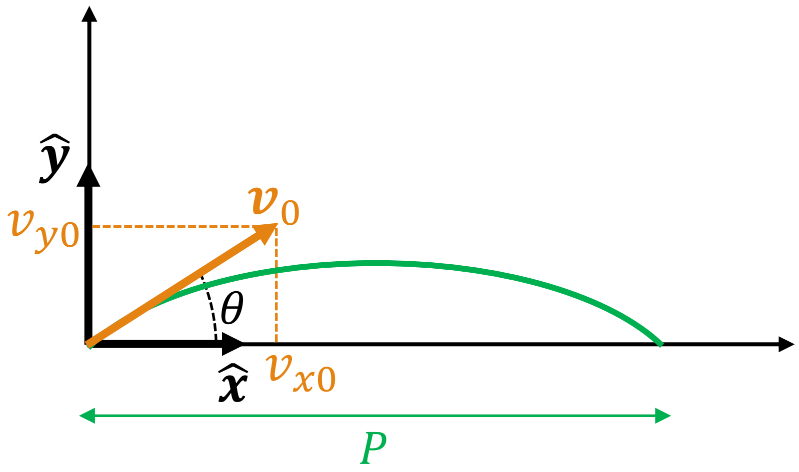
$$\Delta x = v_{x0}\Delta t = 21 \text{ m}$$

Lors d'un service à l'horizontale :

- le temps de vol est indépendant de v_0
- la portée est proportionnelle à v_0

→ Il est important d'adapter l'angle de service à la vitesse.

Portée et temps de vol



Lancer à partir du sol

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{y0} = v_0 \sin\theta$$

Temps de vol $[\Delta y = 0]$

$$\Delta y = v_{y0}\Delta t - \frac{g}{2}(\Delta t)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(v_{y0} - \frac{g}{2}\Delta t\right)\Delta t = 0$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{2v_{y0}}{g} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}}$$

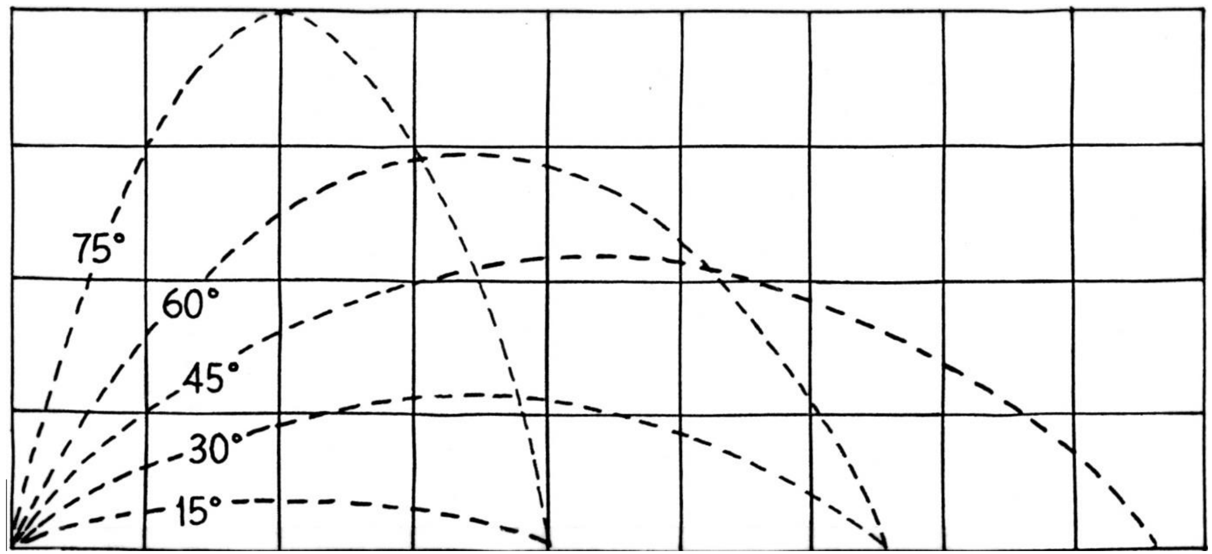
Portée $[\Delta x]$

$$P = v_{x0}\Delta t = v_0 \cos\theta \, \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

$$\boxed{P = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)}$$

Angle optimum

Portée maximale : compromis entre vitesse horizontale et temps de vol



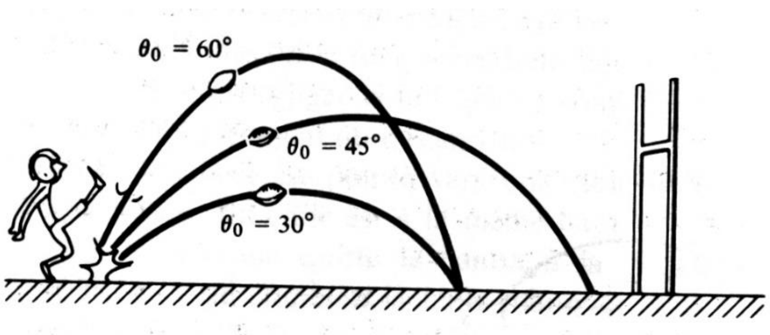
$v_{x0} = v_0 \cos\theta$ max en $\theta = 0°$

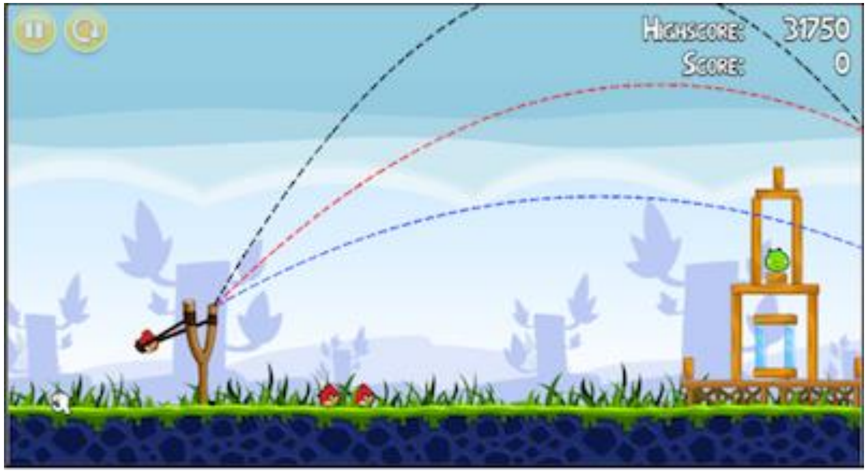
$\Delta t = \dfrac{2v_0 \sin\theta}{g}$ max en $\theta = 90°$

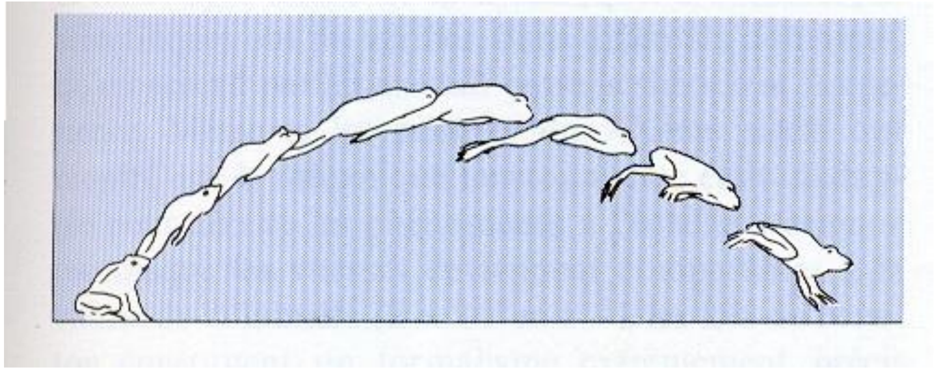
$\rightarrow\ P(\theta) = \dfrac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$

max en $\theta = 45°$

Angle optimum

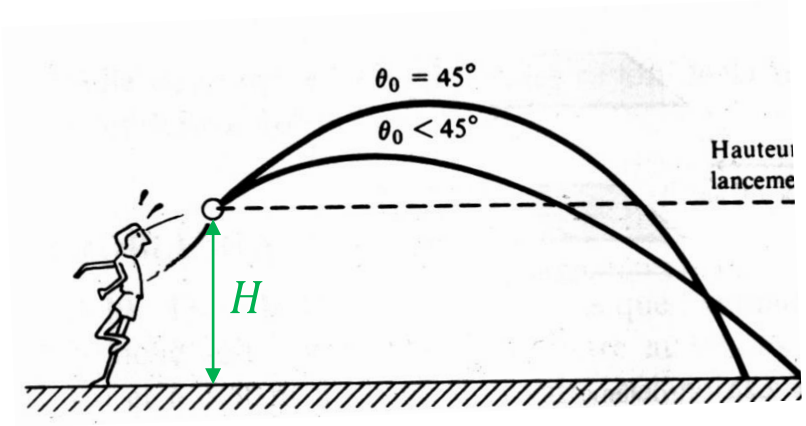






La portée maximale n'est plus à $\theta = 45°$ si on tient compte des frottements.

Portée et temps de vol



Lancer à partir d'une hauteur H

Temps de vol $[\Delta y = -H]$

$$\Delta y = v_{y0}\Delta t - \frac{g}{2}(\Delta t)^2 = -H$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gH}}{g}}$$

Portée $[\Delta x]$

$$P = v_{x0}\Delta t$$

$$\boxed{P = \frac{v_0^2}{2g}\sin(2\theta) + \frac{v_0 \cos\theta}{g}\sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gH}}$$

La portée maximale n'est plus à $\theta = 45°$.