Mathématiques pour l'informatique 1

Cours 3 - Ensembles, relations et fonctions, suites et signe sommatoire

Émilie Charlier

Université de Liège

Qu'est-ce qu'un ensemble ?

S'il existe un concept primordial en mathématiques, c'est bien celui d'ensemble.

Pourtant, la définition d'un ensemble est difficile à formuler simplement, et bien des problèmes peuvent résulter d'une approche trop naïve de ce qu'on appelle la théorie des ensembles.

Une définition naïve

Nous nous contenterons donc de considérer qu'un ensemble est bien défini dans les conditions suivantes.

Un ensemble est bien défini s'il est donné par une collection d'éléments qui satisfont une propriété caractéristique explicite, c'est-à-dire commune à tous les éléments de l'ensemble et à eux seuls.

Si une telle propriété est notée P, on notera l'ensemble correspondant par

$$\{x : P(x)\},$$

c'est à dire l'ensemble des x vérifiant la propriété P.

Quelques précisions

Nous supposerons toujours que les éléments constituant nos ensembles font partie d'un référentiel et que la propriété sélectionne certains éléments de ce référentiel.

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le référentiel, on gardera la notation implicite $\{x : P(x)\}$.

Si par contre, on souhaite distinguer deux référentiels, par exemple, ceux des entiers $\mathbb{Z}$ et des réels $\mathbb{R}$, on écrira

$$\{x \in \mathbb{Z} : x \leq 0\} \quad \text{et} \quad \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

Bien sûr, cette notation n'a de sens que lorsque la propriété (ici $x \leq 0$) est définie dans notre référentiel.

Par exemple, la notation $\{x \in \mathbb{C} : x \leq 0\}$ n'a pas de sens !

En pratique, on trouve deux notations pour définir un ensemble.

- L'énumération explicite des éléments : $\{7, 3, 4\}$, ou encore $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- La notation en compréhension : $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ est mutliple de } 3\}$

Nous introduisons maintenant quelques notations importantes, qui ont un sens précis.

Ces signes sont peu nombreux et, tout comme les connecteurs logiques de la section précédente, doivent être utilisés à bon escient en toutes circonstances.

- On écrit $x \in A$ pour signifier que x est un élément de l'ensemble A. On note $x \notin A$ pour signifier que x n'est pas un élément de l'ensemble A.

- On note l'inclusion de A dans B par $A \subseteq B$. Ceci signifie que tout élément de A est aussi un élément de B. On dit que A est un sous-ensemble ou une partie de B.

- L'égalité de deux ensembles est définie par la double inclusion : on écrit $A = B$ lorsque $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

  Autrement dit, des ensembles A et B sont égaux lorsque tout élément de A est aussi dans B et, inversement, tout élément de B appartient également à A.

- L'union de A et de B est l'ensemble qui contient à la fois les éléments de A et de B :

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- L'intersection de A et de B est l'ensemble qui contient les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

- La différence de deux ensembles A et B est l'ensemble qui contient les éléments de A n'appartenant pas à B :

$$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

- L'ensemble des parties d'un ensemble A est l'ensemble de toutes les parties de A :

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

- L'ensemble vide

$$\emptyset$$

  est l'ensemble qui ne contient pas d'élément.

Propriétés des ensembles correspondant à des tautologies

Les propriétés suivantes peuvent être démontrées en utilisant des tables de vérité.

Soit X un ensemble et soient $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Alors

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
4. $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ exemple détaillé au tableau
9. $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$

Les diagrammes de Venn sont utilisés pour représenter des ensembles.

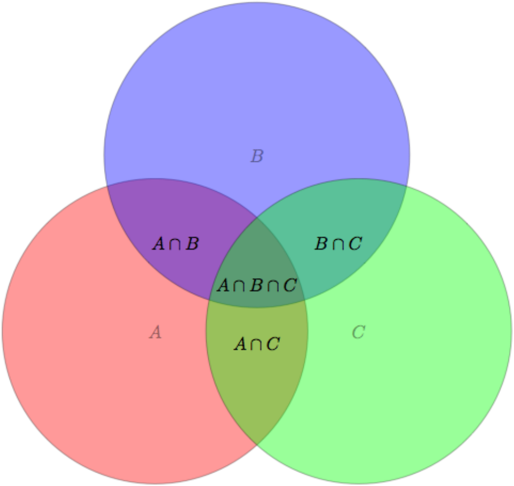
Un grand rectangle (ou à défaut, la feuille ou le tableau) représente votre référentiel.

Chaque ensemble est représenté à l'intérieur du rectangle par une courbe fermée.

S'il y a n ensembles à représenter, les n courbes fermées doivent partager le référentiel en exactement 2^n zones.

On indique un élément de l'ensemble par un point à l'intérieur de la zone délimitée par la courbe fermée représentant cet ensemble.

Diagramme de Venn de 3 ensembles quelconques



Exercice.
Pour visualiser l'égalité $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, hachurez les zones $A \cup (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ dans deux diagrammes distincts.

Mise en garde : Un dessin seul n'est pas une démonstration !

Lien entre les diagrammes de Venn et la logique propositionnelle.

Un diagramme de Venn représentant n ensembles doit toujours contenir 2^n zones.

Ceci se traduit en logique propositionnelle par les 2^n lignes de la table de vérité d'une proposition constituée de n variables propositionnelles.

Chaque zone d'un diagramme de Venn de n ensembles $A_1, \ldots, A_n$ doit correspondre à une exactement une distribution des valeurs de vérité des n propositions $x \in A_1, \ldots, x \in A_n$.

Produits cartésiens, relations et fonctions

Voici maintenant trois définitions importantes.

La première est celle du produit cartésien d'ensembles.

Par exemple, la notation $\mathbb{R}^2$ désigne le produit cartésien de deux ensembles, qui sont dans ce cas deux copies du même ensemble, celui des nombres réels $\mathbb{R}$.

Cette notation n'est pas toujours bien assimilée et pourtant, elle est omniprésente en mathématiques.

Produit cartésien de deux ensembles

Définition

Le produit cartésien de deux ensembles A et B est l'ensemble des couples d'éléments dont la première composante appartient à A et la seconde composante appartient à B :

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Lorsque $A = B$, on écrit $A \times A = A^2$.

Exemples

- La notation $\mathbb{R}^2$ est donc l'ensemble des couples de réels :

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,.$$

- $\{0, 1\} \times \{3, 4, 6\} = \{(0, 3), (0, 4), (0, 6), (1, 3), (1, 4), (1, 6)\}.$

Produit cartésien de n ensembles

Définition

Le produit cartésien de n ensembles $A_1, \ldots, A_n$ est l'ensemble des n-uples dont la i-ième composante appartient à A_i pour chaque indice $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1, \ldots x_n \in A_n\}.$$

Lorsque les n ensembles $A_1, \ldots, A_n$ sont les mêmes, on leur donne un nom commun, par exemple A, et on écrit $A_1 \times \cdots \times A_n = A^n$.

Exemples

- La notation $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uples de réels :

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}.$$

- $$\begin{aligned}\{0,1\} \times \{3,4,6\} \times \{a,b\} = \{&(0,3,a),(0,3,b),(0,4,a),(0,4,b),\\ &(0,6,a),(0,6,b),(1,3,a),(1,3,b),\\ &(1,4,a),(1,4,b),(1,6,a),(1,6,b)\}.\end{aligned}$$

Relation

Définition

Soient A et B deux ensembles. Une relation R de A dans B est simplement une partie de $A \times B$.

On note le plus souvent l'assertion $(x, y) \in R$ par xRy.

Pensez à la relation d'ordre $<$ sur les nombres réels par exemple.

On peut en effet voir l'ordre $<$ comme une relation (au sens de notre définition) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Cette relation est donnée par l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$.

Dans ce cas, on écrira bien plutôt $2 < 3$ que $(2, 3) \in <$.

La relation $<$ est un exemple de relation non symétrique :
on a $2 < 3$ mais pas $3 < 2$.

Voici un autre exemple de relation, cette fois de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

La relation "être multiple de" se traduit par la partie de $\mathbb{Z}^2$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : \text{ il existe } m \in \mathbb{Z} \text{ tel que } y = mx\}.$$

Cet ensemble contient le couple $(2, -6)$ mais pas le couple $(3, 10)$.

Cette relation est-elle symétrique ?

Les fonctions de A dans B sont des relations particulières.

Définition

Soient A et B des ensembles. Une fonction f est une relation de A dans B telle que pour tout $x \in A$, il existe un unique $y \in B$ tel que $(x, y) \in f$.

Par exemple, la relation d'ordre $<$ n'est pas une fonction puisque $2 < 3$ et $2 < 4$. Par contre, la relation

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ y = x^2\}$$

est une fonction.

Définition

Une telle relation f est vue comme une “loi de transformation” et on écrit $f : A \to B$ pour signifier que f est une fonction de A dans B.

On dit que A est le domaine et que B est le but (ou le co-domaine) de f.

Pour définir une fonction f, on écrit en général

$$f : A \to B,\ x \mapsto f(x)$$

où $f(x)$ est une formule dépendant de x qui est bien définie pour tout élément x de A. Formellement, on a

$$f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

où $f(x)$ est l'unique élément y de B tel que $(x, y) \in f$.

En reprenant notre exemple, la fonction

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ \ y = x^2\}$$

est communément notée

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto x^2.$$

Restriction du domaine

La définition d'une fonction vient toujours avec son domaine et son but.

On considérera donc les fonctions

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

et

$$g\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

comme différentes.

On écrit $g = f_{|[-1,1]}$ pour indiquer que g est la restriction de f à $[-1,1]$.

Plus généralement, si $A' \subseteq A$ et si $f\colon A \to B$, on écrit $g = f_{|A'}$ pour indiquer que g est la restriction de f à A'. Ainsi, $g\colon A' \to B$.

Suites et sommes

Définition

Une suite de points d'un ensemble A est une fonction $x\colon \mathbb{N} \to A$.

Lorsqu'on manipule des suites, on utilise souvent la notation x_i plutôt que $x(i)$ pour désigner l'image du naturel i, appelée aussi terme indicé par i de la suite x.

On trouve aussi souvent les notations $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ou $(x_i)_{i\geq 0}$ pour désigner une suite $x\colon \mathbb{N} \to A$.

Une suite de réels est alors simplement une fonction $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (l'ensemble A choisi est l'ensemble $\mathbb{R}$).

Exemples

- $(i)_{i\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, 4 \ldots)$
- $(i^2)_{i\in\mathbb{N}} = (0, 1, 4, 9, 16, \ldots)$
- $(\frac{1}{i+1})_{i\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

Dans le troisième exemple, on écrit aussi cette suite par $(\frac{1}{i})_{i\geq 1}$.

Cet abus de notation sera justifié lorsque nous aborderons la notion d'ensembles dénombrables.

suite $\neq$ ensemble

Remarquons que les suites ne sont pas des ensembles, mais des ensembles ordonnés.

Les termes d'une suite sont énumérés en respectant un ordre (celui des naturels), alors que ce n'est pas le cas pour les éléments d'un ensemble.

Somme de termes d'une suite

Définition

Soit une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et soient $j, k \in \mathbb{N}$. Pour écrire la somme des termes consécutifs d'une suite en commençant par le terme indicé par j jusqu'au terme indicé par k, on peut écrire

$$x_j + x_{j+1} + \cdots + x_k,$$

en convenant que cette somme vaut 0 dans le cas où $j > k$.

On introduit la notation suivante, plus compacte, pour désigner la même somme :

$$\sum_{i=j}^{k} x_i.$$

Le symbole $\sum$ est appelé le signe sommatoire.

Signe sommatoire et distributivité

Soient des suites réelles $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$, soient $j,k\in\mathbb{N}$ et soient $a,b\in\mathbb{R}$. On a

$$\sum_{i=j}^{k}(ax_i+by_i)=a\sum_{i=j}^{k}x_i+b\sum_{i=j}^{k}y_i.$$

Exemple

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{5}(2x_i+3y_i)&=(2x_2+3y_2)+(2x_3+3y_3)+(2x_4+3y_4)+(2x_5+3y_5)\\&=(2x_2+2x_3+2x_4+2x_5)+(3y_2+3y_3+3y_4+3y_5)\\&=2(x_2+x_3+x_4+x_5)+3(y_2+y_3+y_4+y_5)\\&=2\sum_{i=2}^{5}x_i+3\sum_{i=2}^{5}y_i.\end{aligned}$$