---

§13. Множества. Действительные числа.

13.1 Основные понятия.

1. **Множество** — совокупность объектов (элементов), которые рассматриваются как единое целое.
2. **Подмножество** — множество, все элементы которого принадлежат другому множеству.
3. **Объединение множеств** — множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из объединяемых множеств.
4. **Пересечение множеств** — множество, состоящее из элементов, принадлежащих всем пересекаемым множествам.

13.2 Числовые множества.

1. **Множество действительных чисел** (R\mathbb{R}) — объединение рациональных (Q\mathbb{Q}) и иррациональных чисел.
2. **Числовая прямая** — геометрическое представление действительных чисел.

13.3 Числовые промежутки.

1. **Окрестность точки** — интервал (a−δ,a+δ)(a - \delta, a + \delta), где δ>0\delta > 0, называется δ\delta-окрестностью точки aa.

---

§14. Функция.

14.1 Понятие функции.

1. **Функция** — зависимость, при которой каждому элементу множества XX ставится в соответствие один элемент множества YY.

14.3 Основные характеристики функции.

1. **Область определения функции** — множество всех значений аргумента, при которых функция определена.
2. **Область значений функции** — множество всех значений, которые принимает функция.

14.4 Обратная функция.

1. **Обратная функция** f−1(x)f^{-1}(x) существует, если функция f(x)f(x) взаимно однозначна.

14.5 Сложная функция.

1. **Сложная функция** — функция, результат вычисления которой зависит от другой функции: z=g(f(x))z = g(f(x)).

§15. Последовательности.

15.1 Числовая последовательность.

1. **Числовая последовательность** — множество чисел, упорядоченное в соответствии с натуральными числами a1,a2,a3,…a_1, a_2, a_3, \ldots.

15.2 Предел числовой последовательности.

1. **Предел последовательности** an→Aa_n \to A, если для любого ϵ>0\epsilon > 0 существует NN, что для всех n>Nn > N: ∣an−A∣<ϵ|a_n - A| < \epsilon.

15.4 Число ee.

1. **Число ee** — предел последовательности (1+1n)n(1 + \frac{1}{n})^n при n→∞n \to \infty.

---

§16. Предел функции.

16.1 Предел функции.

1. **Предел функции в точке**: lim x→af(x)=A\lim_{x \to a} f(x) = A, если ∣f(x)−A∣<ϵ|f(x) - A| < \epsilon для всех xx, таких что 0<∣x−a∣<δ0 < |x - a| < \delta.

16.2 Односторонние пределы.

1. **Правосторонний предел**: lim x→a+f(x)\lim_{x \to a^+} f(x).
2. **Левосторонний предел**: lim x→a−f(x)\lim_{x \to a^-} f(x).

---

§17. Бесконечно малые функции (б.м.ф.).

17.1 Определения и основные теоремы.

1. **Бесконечно малая функция**: f(x)f(x) называется б.м.ф., если lim x→af(x)=0\lim_{x \to a} f(x) = 0.

17.3 Основные теоремы о пределах.

1. Если lim x→af(x)=A\lim_{x \to a} f(x) = A и lim x→ag(x)=B\lim_{x \to a} g(x) = B, то:
   - lim x→a[f(x)+g(x)]=A+B\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = A + B,
   - lim x→a[f(x)g(x)]=AB\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = AB,
   - lim x→af(x)g(x)=AB\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, если B≠0B \neq 0.

---

§19. Непрерывность функции.

19.1 Непрерывность функции.

1. **Непрерывность функции в точке**: f(x)f(x) непрерывна в точке aa, если:
   - f(a)f(a) определена,
   - limx→af(x)\lim_{x \to a} f(x) существует,
   - limx→af(x)=f(a)\lim_{x \to a} f(x) = f(a).

19.4 Основные теоремы о непрерывных функциях.

1. Теорема: Если f(x)f(x) непрерывна на [a,b][a, b], то f(x)f(x) достигает на [a,b][a, b] своих наибольшего и наименьшего значений.

---

§20. Производная функции.

20.2 Определение производной.

1. **Производная функции**: f′(x)=limΔx→0f(x+Δx)−f(x)Δxf'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, если предел существует.

Продолжаю выписывать определения и теоремы из главы V.

---

§20. Производная функции (продолжение).

20.3 Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.

1. Если функция f(x)f(x) дифференцируема в точке aa, то она непрерывна в этой точке.

20.4 Производная суммы, разности, произведения и частного функций.

1. **Производная суммы**: (f(x)+g(x))′=f′(x)+g′(x)(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).
2. **Производная разности**: (f(x)−g(x))′=f′(x)−g′(x)(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).
3. **Производная произведения**: (f(x)g(x))′=f′(x)g(x)+f(x)g′(x)(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
4. **Производная частного**: (f(x)g(x))′=f′(x)g(x)−f(x)g′(x)g(x)2\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, g(x)≠0g(x) \neq 0.

20.5 Производная сложной и обратной функций.

1. **Производная сложной функции**: Если z=g(f(x))z = g(f(x)), то z′=g′(f(x))f′(x)z' = g'(f(x))f'(x).
2. **Производная обратной функции**: Если y=f−1(x)y = f^{-1}(x), то f'(y)f^{-1}'(x) = 1.

20.6 Производные основных элементарных функций.

1. (c)′=0(c)' = 0, (xn)′=nxn−1(x^n)' = nx^{n-1}.
2. Производные тригонометрических функций:
    - (sin x)′=cos x(\sin x)' = \cos x,
    - (cos x)′=−sin x(\cos x)' = -\sin x,
    - (tan x)′=sec 2x(\tan x)' = \sec^2 x,
    - (cot x)′=−csc 2x(\cot x)' = -\csc^2 x.

---

§21. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.

21.1 Неявно заданная функция.

1. Если функция F(x,y)=0F(x, y) = 0 задает y=f(x)y = f(x) неявно, то dydx=−FxFy\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, где Fx=∂F∂xF_x = \frac{\partial F}{\partial x}, Fy=∂F∂yF_y = \frac{\partial F}{\partial y}.

21.2 Функция, заданная параметрически.

1. Если x=ϕ(t)x = \phi(t) и y=ψ(t)y = \psi(t), то dydx=ψ′(t)ϕ′(t)\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.

---

§23. Производные высших порядков.

23.1 Производные высших порядков.

1. Производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием: f(n)(x)=dnf(x)dxnf^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.

23.2 Механический смысл производной второго порядка.

1. Производная второго порядка характеризует ускорение в механике.

---

§24. Дифференциал функции.

24.1 Понятие дифференциала функции.

1. **Дифференциал функции** f(x)f(x): df=f′(x)dxdf = f'(x)dx.

24.2 Геометрический смысл дифференциала.

1. Дифференциал dfdf приближенно равен приращению функции Δf\Delta f при малом Δx\Delta x.

24.3 Основные теоремы о дифференциалах.

1. Дифференциал линейной комбинации равен линейной комбинации дифференциалов: d(af(x)+bg(x))=a·df+b·dg.d(af(x) + bg(x)) = a \cdot df + b \cdot dg.

---

§25. Исследование функций при помощи производных.

25.2 Правила Лопиталя.

1. Если limx→af(x)g(x)\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} принимает неопределенную форму 00\frac{0}{0} или ∞∞\frac{\infty}{\infty}, то: limx→af(x)g(x)=limx→af′(x)g′(x),\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, при условии, что limx→af′(x)g′(x)\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} существует.

25.4 Максимум и минимум функций.

1. **Необходимое условие экстремума**: Если f(x)f(x) имеет экстремум в точке cc, то f′(c)=0f'(c) = 0 (если f′(c)f'(c) существует).

25.6 Выпуклость графика функции.

1. Функция f(x)f(x) выпукла вверх на интервале, если f′′(x)>0f''(x) > 0, и вниз, если f′′(x)<0f''(x) < 0.

---

§26. Формула Тейлора.

26.1 Формула Тейлора для многочлена.

1. Формула Тейлора для функции f(x)f(x) в окрестности aa: f(x)=f(a)+f′(a)(x−a)+f′′(a)2!(x−a)2+⋯+f(n)(a)n!(x−a)n+Rn(x),f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x), где Rn(x)R_n(x) — остаточный член.

---

§29. Неопределенный интеграл.

29.1 Понятие неопределенного интеграла.

1. **Неопределенный интеграл** ∫f(x)dx\int f(x)dx — это множество всех первообразных функции f(x)f(x) на некотором интервале: ∫f(x)dx=F(x)+C,\int f(x)dx = F(x) + C, где F′(x)=f(x)F'(x) = f(x), а CC — произвольная постоянная интегрирования.

29.2 Свойства неопределенного интеграла.

1. **Линейность интеграла**: ∫[af(x)+bg(x)]dx=a∫f(x)dx+b∫g(x)dx,\int [af(x) + bg(x)] dx = a\int f(x) dx + b\int g(x) dx, где aa и bb — произвольные константы.
2. **Интеграл от производной**: ∫f′(x)dx=f(x)+C.\int f'(x) dx = f(x) + C.

3. Если $F'(x) = f(x)$, то $\int f(x)\, dx = F(x) + C$.

29.3 Таблица основных неопределенных интегралов.

Некоторые стандартные интегралы:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ при $n \neq -1$.
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$.
3. $\int e^x dx = e^x + C$.
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ при $a > 0, a \neq 1$.
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$.

---

§30. Основные методы интегрирования.

30.1 Метод непосредственного интегрирования.

1. Применение известных формул интегрирования из таблицы (прямое использование свойств и стандартных интегралов).

30.2 Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной).

1. Если $u = g(x)$, то $du = g'(x)dx$, и интеграл преобразуется: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$

30.3 Метод интегрирования по частям.

1. Формула интегрирования по частям: $\int u\, dv = uv - \int v\, du,$ где u и dv выбираются в зависимости от функции.

---

§31. Интегрирование рациональных функций.

31.1 Понятие о рациональных функциях.

1. Рациональная функция — это отношение двух многочленов: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$ где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.
