**§13. Множества. Действительные числа.**

**13.1 Основные понятия.**

1. **Множество** — совокупность объектов (элементов), которые рассматриваются как единое целое.
2. **Подмножество** — множество, все элементы которого принадлежат другому множеству.
3. **Объединение множеств** — множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из объединяемых множеств.
4. **Пересечение множеств** — множество, состоящее из элементов, принадлежащих всем пересекаемым множествам.

**13.2 Числовые множества.**

1. **Множество действительных чисел** (R\mathbb{R}) — объединение рациональных (Q\mathbb{Q}) и иррациональных чисел.
2. **Числовая прямая** — геометрическое представление действительных чисел.

**13.3 Числовые промежутки.**

1. **Окрестность точки** — интервал (a−δ,a+δ)(a - \delta, a + \delta), где δ>0\delta > 0, называется δ\delta-окрестностью точки aa.

**§14. Функция.**

**14.1 Понятие функции.**

1. **Функция** — зависимость, при которой каждому элементу множества XX ставится в соответствие один элемент множества YY.

**14.3 Основные характеристики функции.**

1. **Область определения функции** — множество всех значений аргумента, при которых функция определена.
2. **Область значений функции** — множество всех значений, которые принимает функция.

**14.4 Обратная функция.**

1. **Обратная функция** f−1(x)f^{-1}(x) существует, если функция f(x)f(x) взаимно однозначна.

**14.5 Сложная функция.**

1. **Сложная функция** — функция, результат вычисления которой зависит от другой функции: z=g(f(x))z = g(f(x)).

**§15. Последовательности.**

**15.1 Числовая последовательность.**

1. **Числовая последовательность** — множество чисел, упорядоченное в соответствии с натуральными числами a1,a2,a3,…a\_1, a\_2, a\_3, \ldots.

**15.2 Предел числовой последовательности.**

1. **Предел последовательности** an→Aa\_n \to A, если для любого ϵ>0\epsilon > 0 существует NN, что для всех n>Nn > N: ∣an−A∣<ϵ|a\_n - A| < \epsilon.

**15.4 Число ee.**

1. **Число ee** — предел последовательности (1+1n)n(1 + \frac{1}{n})^n при n→∞n \to \infty.

**§16. Предел функции.**

**16.1 Предел функции.**

1. **Предел функции в точке**: lim⁡x→af(x)=A\lim\_{x \to a} f(x) = A, если ∣f(x)−A∣<ϵ|f(x) - A| < \epsilon для всех xx, таких что 0<∣x−a∣<δ0 < |x - a| < \delta.

**16.2 Односторонние пределы.**

1. **Правосторонний предел**: lim⁡x→a+f(x)\lim\_{x \to a^+} f(x).
2. **Левосторонний предел**: lim⁡x→a−f(x)\lim\_{x \to a^-} f(x).

**§17. Бесконечно малые функции (б.м.ф.).**

**17.1 Определения и основные теоремы.**

1. **Бесконечно малая функция**: f(x)f(x) называется б.м.ф., если lim⁡x→af(x)=0\lim\_{x \to a} f(x) = 0.

**17.3 Основные теоремы о пределах.**

1. Если lim⁡x→af(x)=A\lim\_{x \to a} f(x) = A и lim⁡x→ag(x)=B\lim\_{x \to a} g(x) = B, то:
   * lim⁡x→a[f(x)+g(x)]=A+B\lim\_{x \to a} [f(x) + g(x)] = A + B,
   * lim⁡x→a[f(x)g(x)]=AB\lim\_{x \to a} [f(x)g(x)] = AB,
   * lim⁡x→af(x)g(x)=AB\lim\_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, если B≠0B \neq 0.

**§19. Непрерывность функции.**

**19.1 Непрерывность функции.**

1. **Непрерывность функции в точке**: f(x)f(x) непрерывна в точке aa, если:
   * f(a)f(a) определена,
   * lim⁡x→af(x)\lim\_{x \to a} f(x) существует,
   * lim⁡x→af(x)=f(a)\lim\_{x \to a} f(x) = f(a).

**19.4 Основные теоремы о непрерывных функциях.**

1. Теорема: Если f(x)f(x) непрерывна на [a,b][a, b], то f(x)f(x) достигает на [a,b][a, b] своих наибольшего и наименьшего значений.

**§20. Производная функции.**

**20.2 Определение производной.**

1. **Производная функции**: f′(x)=lim⁡Δx→0f(x+Δx)−f(x)Δxf'(x) = \lim\_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, если предел существует.

Продолжаю выписывать определения и теоремы из главы V.

**§20. Производная функции (продолжение).**

**20.3 Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.**

1. Если функция f(x)f(x) дифференцируема в точке aa, то она непрерывна в этой точке.

**20.4 Производная суммы, разности, произведения и частного функций.**

1. **Производная суммы**: (f(x)+g(x))′=f′(x)+g′(x)(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).
2. **Производная разности**: (f(x)−g(x))′=f′(x)−g′(x)(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).
3. **Производная произведения**: (f(x)g(x))′=f′(x)g(x)+f(x)g′(x)(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
4. **Производная частного**: (f(x)g(x))′=f′(x)g(x)−f(x)g′(x)g(x)2\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, g(x)≠0g(x) \neq 0.

**20.5 Производная сложной и обратной функций.**

1. **Производная сложной функции**: Если z=g(f(x))z = g(f(x)), то z′=g′(f(x))f′(x)z' = g'(f(x))f'(x).
2. **Производная обратной функции**: Если y=f−1(x)y = f^{-1}(x), то f'(y)f^{-1}'(x) = 1.

**20.6 Производные основных элементарных функций.**

1. (c)′=0(c)' = 0, (xn)′=nxn−1(x^n)' = nx^{n-1}.
2. Производные тригонометрических функций:
   * (sin⁡x)′=cos⁡x(\sin x)' = \cos x,
   * (cos⁡x)′=−sin⁡x(\cos x)' = -\sin x,
   * (tan⁡x)′=sec⁡2x(\tan x)' = \sec^2 x,
   * (cot⁡x)′=−csc⁡2x(\cot x)' = -\csc^2 x.

**§21. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.**

**21.1 Неявно заданная функция.**

1. Если функция F(x,y)=0F(x, y) = 0 задает y=f(x)y = f(x) неявно, то dydx=−FxFy\frac{dy}{dx} = -\frac{F\_x}{F\_y}, где Fx=∂F∂xF\_x = \frac{\partial F}{\partial x}, Fy=∂F∂yF\_y = \frac{\partial F}{\partial y}.

**21.2 Функция, заданная параметрически.**

1. Если x=ϕ(t)x = \phi(t) и y=ψ(t)y = \psi(t), то dydx=ψ′(t)ϕ′(t)\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.

**§23. Производные высших порядков.**

**23.1 Производные высших порядков.**

1. Производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием: f(n)(x)=dnf(x)dxnf^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.

**23.2 Механический смысл производной второго порядка.**

1. Производная второго порядка характеризует ускорение в механике.

**§24. Дифференциал функции.**

**24.1 Понятие дифференциала функции.**

1. **Дифференциал функции** f(x)f(x): df=f′(x)dxdf = f'(x)dx.

**24.2 Геометрический смысл дифференциала.**

1. Дифференциал dfdf приближенно равен приращению функции Δf\Delta f при малом Δx\Delta x.

**24.3 Основные теоремы о дифференциалах.**

1. Дифференциал линейной комбинации равен линейной комбинации дифференциалов: d(af(x)+bg(x))=a⋅df+b⋅dg.d(af(x) + bg(x)) = a \cdot df + b \cdot dg.

**§25. Исследование функций при помощи производных.**

**25.2 Правила Лопиталя.**

1. Если lim⁡x→af(x)g(x)\lim\_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} принимает неопределенную форму 00\frac{0}{0} или ∞∞\frac{\infty}{\infty}, то: lim⁡x→af(x)g(x)=lim⁡x→af′(x)g′(x),\lim\_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, при условии, что lim⁡x→af′(x)g′(x)\lim\_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} существует.

**25.4 Максимум и минимум функций.**

1. **Необходимое условие экстремума**: Если f(x)f(x) имеет экстремум в точке cc, то f′(c)=0f'(c) = 0 (если f′(c)f'(c) существует).

**25.6 Выпуклость графика функции.**

1. Функция f(x)f(x) выпукла вверх на интервале, если f′′(x)>0f''(x) > 0, и вниз, если f′′(x)<0f''(x) < 0.

**§26. Формула Тейлора.**

**26.1 Формула Тейлора для многочлена.**

1. Формула Тейлора для функции f(x)f(x) в окрестности aa: f(x)=f(a)+f′(a)(x−a)+f′′(a)2!(x−a)2+⋯+f(n)(a)n!(x−a)n+Rn(x),f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R\_n(x), где Rn(x)R\_n(x) — остаточный член.

**§29. Неопределенный интеграл.**

**29.1 Понятие неопределенного интеграла.**

1. **Неопределенный интеграл** ∫f(x)dx\int f(x)dx — это множество всех первообразных функции f(x)f(x) на некотором интервале: ∫f(x)dx=F(x)+C,\int f(x)dx = F(x) + C, где F′(x)=f(x)F'(x) = f(x), а CC — произвольная постоянная интегрирования.

**29.2 Свойства неопределенного интеграла.**

1. **Линейность интеграла**: ∫[af(x)+bg(x)]dx=a∫f(x)dx+b∫g(x)dx,\int [af(x) + bg(x)] dx = a\int f(x) dx + b\int g(x) dx, где aa и bb — произвольные константы.
2. **Интеграл от производной**: ∫f′(x)dx=f(x)+C.\int f'(x) dx = f(x) + C.
3. Если F′(x)=f(x)F'(x) = f(x), то ∫f(x)dx=F(x)+C\int f(x) dx = F(x) + C.

**29.3 Таблица основных неопределенных интегралов.**

Некоторые стандартные интегралы:

1. ∫xndx=xn+1n+1+C\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C при n≠−1n \neq -1.
2. ∫1xdx=ln⁡∣x∣+C\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.
3. ∫exdx=ex+C\int e^x dx = e^x + C.
4. ∫axdx=axln⁡a+C\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C при a>0,a≠1a > 0, a \neq 1.
5. ∫sin⁡xdx=−cos⁡x+C\int \sin x dx = -\cos x + C.
6. ∫cos⁡xdx=sin⁡x+C\int \cos x dx = \sin x + C.
7. ∫1cos⁡2xdx=tan⁡x+C\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.
8. ∫1sin⁡2xdx=−cot⁡x+C\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.

**§30. Основные методы интегрирования.**

**30.1 Метод непосредственного интегрирования.**

1. Применение известных формул интегрирования из таблицы (прямое использование свойств и стандартных интегралов).

**30.2 Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной).**

1. Если u=g(x)u = g(x), то du=g′(x)dxdu = g'(x)dx, и интеграл преобразуется: ∫f(g(x))g′(x)dx=∫f(u)du.\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.

**30.3 Метод интегрирования по частям.**

1. Формула интегрирования по частям: ∫udv=uv−∫vdu,\int u dv = uv - \int v du, где uu и dvdv выбираются в зависимости от функции.

**§31. Интегрирование рациональных функций.**

**31.1 Понятие о рациональных функциях.**

1. Рациональная функция — это отношение двух многочленов: R(x)=P(x)Q(x),R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, где P(x)P(x) и Q(x)Q(x) — многочлены.