UNIVERSITÉ DE LORRAINE | UFR SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES

Licence Sciences pour l'Ingénieur

Unité d'Enseignement 202 : Mathématiques 2

2025-2026

f' $\int$

y' y''

∂ $\iint$

Sébastien Breteaux & Isabelle Dubois

Des exercices proposés dans ce cours nous ont été fournis par M. GRANDCOLAS, nous l'en remercions. Ce cours s'appuie aussi parfois sur le livre *Méthodes savoir-faire et astuces* de SARFATI et FEGYVERES, sur le manuel de terminale scientifique *Sésamath* de ARNAUD, CASAVECCHIA, COUTEAU, FANDOHAN, FRADELIZI, GROBOL, NADIN, PRADEL, TURBOULT et WEYERMANN, ainsi que l'ouvrage *Math 1350cm^3 d'exercices corrigés pour la licence 1* de AMORY, BASTIN, CRASHBORN, DOZOT, GODEFROY pour certains exercices. Merci à P. BONNEAU pour ses commentaires et la rédaction de la méthode des deux chemins.

Table des matières

Pré-requis.

— Mathématiques de Terminale option maths.

— Acquis du premier semestre : Mathématiques UE 102

  — Vecteurs : Coordonnées et composantes de vecteurs, module de vecteurs, produit scalaire, produit vectoriel.

  — Nombres Complexes : opérations usuelles et interprétation géométrique.

  — Trigonométrie complexe : Rappels de trigonométrie (cosinus, sinus, tangente). Étude de la fonction exponentielle complexe. Formules trigonométriques complexe (Euler).

  — Étude des fonctions usuelles (inverse, racine carrée, exponentielle, logarithme, puissances, fonctions circulaires et hyperboliques) : étude, dérivation, primitives.

Descriptif de l'UE 202 Mathématiques.

— Fondements de mathématiques en logique formelle : Notation, preuves usuelles.

— Techniques de dérivation et d'intégration : dérivation de fonctions composées. Intégration par parties.

— Résolution de systèmes linéaires.

— Fonctions de plusieurs variables, différentielle, calcul de dérivées partielles. Intégrales multiples (surface et volume).

— Équations différentielles à coefficients constants : Premier ordre et second ordre.

Remarque sur les notations. Nous réserverons le symbole $\subset$ au cas de l'inclusion stricte entre deux ensemble et nous utiliserons le symbole $\subseteq$ quand on ne sait pas *a priori* si l'inclusion est stricte ou non. Par exemple on pourra écire $\{1,3\} \subset \{1,2,3\}$, $\{1,3\} \subseteq \{1,2,3\}$ ou encore $\{1,2,4\} \subseteq \{1,2,4\}$, mais en aucun cas $\{1,2,4\} \subset \{1,2,4\}$. Cette convention permet d'avoir une notation cohérente avec les autres relations d'ordre habituellement utilisées.

Solutions de certains exercices. Pour de nombreux exercices nous donnons le résultat final pour que vous puissiez vérifier vos résultats et, le cas échéant, vous corriger. Bien entendu, lors de votre apprentissage, dans les devoirs à rendre et lors des évaluations vous devez *rédiger* vos réponses et non pas vous contenter de donner les résultats finaux.

Ressources additionnelles. Ce cours est accompagné de :

(1) Une page Arche.

(2) Un recueil des épreuves des années précédentes, avec leurs corrigés.

(3) Une page internet avec des exercices produits aléatoirement
`http://sebastien-breteaux.perso.math.cnrs.fr/`

Première partie

Fonctions d'une variable

Chapitre 1

Dérivation et intégration

$$f' \qquad\qquad \int$$

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
C constante	0	$\mathbb{R}$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$
$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x = e^{x \ln a},\ a \in \mathbb{R}_+^*$	$\ln(a)\, a^x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$	$1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathbb{R}$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	x dans $D_{f'}$ et $D_{g'}$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	x dans $D_{f'}$ et $D_{g'}$ tel que $g(x) \neq 0$
$f(g(x))$	$g'(x) \cdot f'[g(x)]$	x dans $D_{g'}$ tel que $g(x)$ est dans $D_{f'}$
$\ln \lvert g(x) \rvert$	$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$	x dans $D_{g'}$ tel que $g(x) \neq 0$

Formule fondamentale de l'analyse

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{où} \quad F' = f$$

Intégration par parties

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Table 1. Formulaire à disposition lors des évaluations

1.1. Dérivation

Exercice 1.1.1 (Calculs de dérivées - Sans composition).
À savoir faire impérativement !
Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, le plus efficacement possible.
Préciser leurs ensembles de définition et de dérivabilité.

(1) $f(x) = 4x^9 + 3x^6 + 8x^3 - 7x^5 + 48$
(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^6} + 3\ln(x)$
(3) $f(x) = -(x^3 + \dfrac{1}{x})\sqrt{x}$
(4) $f(x) = (-x^4 + \dfrac{2}{7}x^2 - \dfrac{20}{103}) \times (\dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x - 2)$
(5) $f(x) = \dfrac{-5}{x^2 + 2x + 3}$
(6) $f(x) = x^2 \cos(x)$
(7) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$
(8) $f(x) = \dfrac{8x+5}{5x+9}$
(9) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{3(x+1)}$
(10) $f(x) = \dfrac{(x+8)\sqrt{x}}{2x+5}$
(11) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Proposition 1.1.2. *Soient deux fonctions f et g définies respectivement sur des parties D_f et D_g de $\mathbb{R}$. La fonction $f \circ g$ est définie, quand cela a un sens, par $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Soit x_0 dans D_g. Si*
— *g est dérivable en x_0 et*
— *$g(x_0) \in D_f$ et*
— *f est dérivable en $g(x_0)$,*
alors $f \circ g$ est définie et dérivable en x_0 et $(f \circ g)'(x_0) = g'(x_0)f'(g(x_0))$.

Exercice 1.1.3 (Composition de fonctions). Déterminer les expressions des fonctions composées $f(g(x))$ et $g(f(y))$ dans les cas suivants.
Pour aller plus loin, déterminer leurs ensembles de définition.

(1) $f(y) = 1/y$ et $g(x) = \sqrt{x}$
(2) $f(y) = y^2 + y$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$
(3) $f(y) = e^y$ et $g(x) = x^2 + 1$

Exercice 1.1.4. Décomposer les expressions suivantes en opérations sur des fonctions élémentaires (somme, produit, quotient, et surtout composition).
Préciser leurs domaines de définition.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{3x-1}$
(2) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
(3) $f(x) = \ln(e^x + 2)$
(4) $f(x) = \cos(x^2)$
(5) $f(x) = \cos^2(x)$

(6) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)$

(7) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2x^2+3}\right)$

(8) $f(x) = x\ln\left((x+2)^2\right)$

(9) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}+3}$

Exercice 1.1.5 (Calculs de dérivées - Avec composition). Reprendre les fonctions de l'exercice 1.1.4 et calculer leurs dérivées premières.

Exercice 1.1.6. On note u une fonction dérivable sur un intervalle convenable.
Écrire les fonctions g suivantes sous la forme $g(x) = f(u(x))$.
En déduire, pour chaque cas, la dérivée g' de g en fonction de u et de u'.

(1) $g = -2u^{n+2}$, pour $n \in \mathbb{N}$

(2) $g = \dfrac{1}{\ln u}$

(3) $g = \dfrac{-3}{u^7}$

(4) $g = \sqrt{1+u^2}$

(5) $g = \dfrac{-2}{u^{n-3}}$, pour $n \geq 4$

(6) $g = \tan(u) + \sin(u)$

(7) $g = \cos(2u+3)$

(8) $g = e^{\sqrt{u}}$

Exercice 1.1.7 (Dérivées successives). Calculer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 des fonctions suivantes.

(1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

(2) $g(x) = \cos(2x+1)$

(3) $h(x) = \ln(x+1)$

Qu'en déduisez-vous pour la dérivée d'ordre n, avec n un entier naturel quelconque ?

Exercice 1.1.8. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$.
Calculer sa dérivée seconde et exprimer g'' en fonction de g.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième $g^{(n)}$ de g.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
C constante	0	$\mathbb{R}$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$
$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$-\dfrac{1}{x^2} = (-1)x^{-2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x = e^{x \ln a},\ a \in \mathbb{R}_+^*$	$\ln(a)\, a^x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left] -\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right[, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$	$1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathbb{R}$

TABLE 2. Dérivées des fonctions usuelles

Opération	Dérivée	Conditions
$k \cdot f,\ k \in \mathbb{R}$	$k \cdot f'$	
$f + g$	$f' + g'$	
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$	
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	g ne s'annule pas ($g \neq 0$)

TABLE 3. Dérivées des opérations usuelles sur les fonctions

Fonction	Dérivée	Conditions
$f(g(x))$	$g'(x) \cdot f'[g(x)]$	$g(x) \in D_{f'}$
$f(ax+b),\ a, b \in \mathbb{R}$	$af'(ax+b)$	$ax+b \in D_{f'}$
$g^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$ng'g^{n-1}$	
$\dfrac{1}{g}$	$-\dfrac{g'}{g^2}$	$g \neq 0$
$\sqrt{g}$	$\dfrac{g'}{2\sqrt{g}}$	$g > 0$
$g^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha g'\, g^{\alpha-1}$	$g > 0$
$\ln g$	$\dfrac{g'}{g}$	$g > 0$
e^g	$g'\, e^g$	
$\sin g$	$g' \cos g$	
$\cos g$	$-g' \sin g$	
$\arctan g$	$\dfrac{g'}{1+g^2}$	

TABLE 4. Dérivées de fonctions composées

1.2. Intégration

Calculs de primitives et d'intégrales - Sans composition ou de type $f(ax+b)$.

Exercice 1.2.1. *À savoir faire impérativement !*

Calculer les fonctions primitives des fonctions f suivantes, puis calculer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pour les réels a et b indiqués :

(1) $f(x) = 4x^9 + 3x^6 + 8x^3 - 7x^5 + 48$, $a = -1$, $b = 1$

(2) $f(x) = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2$, $a = 1/2$, $b = 1$

(3) $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\cos(2x)$, $a = -\pi$, $b = \pi/2$

(4) $f(x) = 2 - 4e^{3x+2}$, $a = -1$, $b = 4$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}$, $a = 0$, $b = 1/2$

(6) $f(x) = \sqrt{3x-4}$, $a = 2$, $b = 4$

(7) $f(x) = -\dfrac{5}{(3x+4)^2}$, $a = 0$, $b = 2$

(8) $f(x) = \dfrac{2}{-10x+5}$, $a = 1$, $b = 10$

(9) $f(x) = 7^{-2x+3}$, $a = 1$, $b = 2$

(10) $f(x) = x^\pi$, $a = 1$, $b = \pi$

Calculs de primitives - Avec composition.

Exercice 1.2.2. Calculer les primitives des fonctions suivantes, en reconnaissant une expression de la forme $u'(x) \cdot g(u(x))$ (à une constante multiplicative près) :

(1) $f(x) = \sin^2(x)\cos(x)$

(2) $f(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

(3) $f(x) = 3x(x^2+3)^{31}$

(4) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}$

(5) $f(x) = \tan(8x)$

(6) $f(x) = \dfrac{x}{(4x^2+7)^3}$

(7) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(8) $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x^2}$

(9) $f(x) = \cos^5(x)\sin(x)$

(10) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

(11) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+5}$

(12) $f(x) = x\tan(x^2)$

Exercice 1.2.3. Calculer les primitives des fonctions suivantes, en transformant au préalable l'expression donnée et en identifiant une expression de la forme $u'(x) \cdot g[u(x)]$:

(1) $f(x) = \dfrac{\tan(4x)}{\cos(4x)}$

(2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

(3) $f(x) = \cos^3(x)$ (utiliser $\cos^2 + \sin^2 = 1$)

(4) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{2+x^2}$ (mettre sous la forme $1/(1+u^2)$)

Primitives de fractions rationnelles.

Exercice 1.2.4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x-3)}$.

(1) Vérifier que $\dfrac{x}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{3}{x-3} - \dfrac{2}{x-2}$, pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ et $x \neq 3$.

(2) En déduire les primitives de f sur chacun des intervalles où elle est définie.

Exercice 1.2.5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 7x + 4}{(x+1)^2}$.

(1) Montrer que pour tour tout x réel, $x^3 + 5x^2 + 7x + 4 = (x+3)(x+1)^2 + 1$.

(2) En déduire les primitives de f sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 1.2.6. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$.

(1) Démontrer qu'il existe deux nombres A, B (à calculer) tels que :

$$\forall x \neq -1, \; \frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1}$$

(2) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f (sur chaque intervalle où elle est définie).

Exercice 1.2.7. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{(x+1)(x-2)(x+3)}$.

(1) Démontrer qu'il existe trois nombres a, b, c (à calculer) tels que :

$$\forall x \notin \{-3, -1, 2\}, \; \frac{x^2+2}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}$$

(2) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f (sur chaque intervalle où elle est définie).

Formule d'intégration par parties.

Proposition 1.2.8. *Soient $a < b \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur des parties D_f et D_g de $\mathbb{R}$ contenant $[a,b]$. Si*

— *f et g sont dérivables sur $[a,b]$ et*

— *f' et g' sont continues sur $[a,b]$,*

alors

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 1.2.9. Calculer les intégrales ci-dessous à l'aide de la formule d'intégration par parties :

(1) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_1^4 (x^2 - x + 2)e^x\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^1 te^{-t}\,\mathrm{d}t$

(5) $\displaystyle\int_0^a \arctan(x)\,\mathrm{d}x \ (a \in \mathbb{R})$

(6) $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int_e^{2e} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$

(8) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$

(9) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 1.2.10. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives de la fonction $f(x) = x^\alpha\ln(x)$ sur $]0,+\infty[$, pour un réel $\alpha \neq -1$.

Exercice 1.2.11. On considère, pour tout réel x, les deux intégrales

$$A(x) = \int_0^x e^t\cos(2t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{et} \quad B(x) = \int_0^x e^t\sin(2t)\,\mathrm{d}t.$$

(1) À l'aide d'une intégration par parties appliquée à $A(x)$, puis à $B(x)$, établir deux relations entre $A(x)$ et $B(x)$. En déduire les valeurs de $A(x)$ et $B(x)$.

(2) On considère maintenant, pour tout réel x, les deux intégrales :

$$I(x) = \int_0^x e^t\cos^2(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{et} \quad J(x) = \int_0^x e^t\sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer $I(x) + J(x)$ et $I(x) - J(x)$. En déduire, à l'aide de la question précédente, les valeurs de $I(x)$ et $J(x)$.

Exercice 1.2.12. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$.

(1) Calculer I_0 et I_1.

(2) Montrer que pour tout entier n non nul : $(3+2n)I_n = 2nI_{n-1}$.

(3) Calculer I_2 et I_3. Proposez une formule générale pour la valeur de I_n en fonction de n.

Fonction	Primitives, où $C \in \mathbb{R}$	sur un intervalle I tel que
k constante	$kx + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$I \subseteq \mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n},\ n \geq 2$	$-\dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{x^{n-1}} + C$	$I \subseteq \mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	$2\sqrt{x} + C$	$I \subseteq \mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha = e^{\alpha \ln x},\ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\dfrac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + C$	$I \subseteq \mathbb{R}_+^*$
e^x	$e^x + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$
$a^x = e^{x \ln a},\ a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$I \subseteq]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$I \subseteq]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	$I \subseteq \mathbb{R}$

Table 5. Primitives de fonctions usuelles

Fonction	Primitives, où $C \in \mathbb{R}$
$k \cdot f',\ k \in \mathbb{R}$	$k \cdot f + C$
$f' + g'$	$f + g + C$

Formule fondamentale de l'analyse

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{où} \quad F' = f$$

Intégration par parties

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

TABLE 6. Opérations usuelles sur les primitives

Fonction	Primitives, où $C \in \mathbb{R}$
$g'(x)f'(g(x))$	$f(g(x)) + C$
$f'(ax+b),\ a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$	$\dfrac{1}{a} \cdot f(ax+b) + C$
$g'(x)\,g(x)^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{n+1} \cdot g(x)^{n+1} + C$
$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln(\lvert g(x)\rvert) + C$
$\dfrac{g'}{\sqrt{g}}$	$2\sqrt{g} + C$
$g'\,g^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\dfrac{1}{\alpha+1} \cdot g^{\alpha+1} + C$
$g'e^{g}$	$e^{g} + C$
$g' \cos g$	$\sin g + C$
$g' \sin g$	$-\cos g + C$
$\dfrac{g'}{1+g^2}$	$\arctan g + C$

TABLE 7. Dérivées de fonctions composées à savoir reconnaître

Chapitre 2

Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

$$y'$$

2.1. Définition

Définition 2.1.1. Une *équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants* est une équation de la forme

$$a\,y'(t) + b\,y(t) = f(t)\,, \qquad t \in I\,,$$

où a et b sont des nombres complexes, $a \neq 0$, f est une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$, et où l'inconnue y est une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Si la fonction f est constante égale à 0, on dit que l'équation différentielle linéaire est *homogène*.

Remarque 2.1.2. On se restreint, sans perdre en généralité, au cas $a = 1$, car

$$ay'(t) + b\,y(t) = f(t) \Leftrightarrow y'(t) + \frac{b}{a}\,y'(t) = \frac{f(t)}{a}\,.$$

2.2. Partie homogène

Théorème 2.2.1. *Soient $a \in \mathbb{C}$ et I un intervalle. Les solutions $y : I \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle du premier ordre linéaire homogène à coefficients constants*

$$(EH) \qquad\qquad y'(t) + a\,y(t) = 0$$

sont les fonctions de la forme

$$y(t) = C\,e^{-at} \quad \textit{avec} \quad C \in \mathbb{C}\,.$$

Démonstration. * $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + a\,y(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (y'(t) + a\,y(t))e^{at} = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (y(t)e^{at})' = 0 \Leftrightarrow \exists C, \forall t \in \mathbb{R}, y(t)e^{at} = C \Leftrightarrow \exists C, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = Ce^{-at}$. □

2.3. Principe de superposition

THÉORÈME 2.3.1. *Soient $a \in \mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$. Si y_P est une solution particulière de l'équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants*

$$(E) \qquad y'(t) + a\,y(t) = f(t)\,,$$

alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y_P + y_H$ où y_H est une solution de l'équation homogène

$$(EH) \qquad y'(t) + a\,y(t) = 0$$

associée à (E).

DÉMONSTRATION. * Soient y_P une solution de (E) et y une fonction dérivable de I dans $\mathbb{C}$.
y est solution de $(E) \Leftrightarrow (y - y_P)' + a(y - y_P) = y' + ay - (y'_P + ay_P) = d - d = 0$
$\Leftrightarrow y - y_P$ est une solution de (EH). □

2.4. Recherche d'une solution particulière

Voyons comment trouver une solution particulière de l'équation (E) dans des cas particuliers courants dans les applications à la physique, la chimie, l'électronique, etc.

PROPOSITION 2.4.1. *Soit $Q(t)$ un polynôme de degré d_Q. L'équation*

$$(E) \qquad y'(t) + a\,y(t) = Q(t)$$

possède une solution particulière qui est un polynôme $R(t)$ de degré $d_R \leq d_Q + 1$.

PROPOSITION 2.4.2. *Soit $Q(t)$ un polynôme de degré d_Q et $m \in \mathbb{C}$. L'équation*

$$(E) \qquad y'(t) + c\,y(t) = Q(t)\,e^{mt}\,.$$

possède une solution particulière de la forme $R(t)\,e^{mt}$ où $R(t)$ est un polynôme de degré $d_R \leq d_Q + 1$.

Méthode de la variation de la constante. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_P(t) = C(t)y_H(t)$, où y_H est une solution non nulle de (EH) et C est une fonction dérivable. On injecte y_P dans (E) puis on en déduit la fonction $C(t)$ et enfin $y_P(t)$.

2.5. Exercices

Premier ordre, homogène.

EXERCICE 2.5.1. *À savoir faire impérativement !*
Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y'(t) - 10y(t) = 0$
(2) $y'(t) + 2y(t) = 0$
(3) $y'(t) - 3y(t) = 0$
(4) $y'(t) = -3y(t)$
(5) $3y'(t) - 10y(t) = 0$
(6) $2y'(t) = 5y(t)$
(7) $y'(x) + 2y(x) = 0$; $y(0) = 1$
(8) $y'(x) - 2y(x) = 0$; $y(0) = -1/2$
(9) $y'(x) + 7y(x) = 0$; $y'(0) = -2$
(10) $y'(x) = 9y(x)$; $y(1) = 2$
(11) $-5y'(x) = y(x)$; $y'(1) = 2$
(12) $4y'(x) + 2iy(x) = 0$

Premier ordre, avec second membre.

EXERCICE 2.5.2. *À savoir faire impérativement !*
Trouver une solution particulière y_P de chaque équation différentielle linéaire, puis résoudre l'équation différentielle à l'aide du principe de superposition.

(1) $y'(x) - 9y(x) = 5$
(2) $y'(x) - 9y(x) = -4\,x - 9$
(3) $y'(x) + 6y(x) = -3\,x + 9$
(4) $y'(t) + 6y(t) = 9t^2 + 2$
(5) $y'(x) - 3y(x) = -x^2 + 7\,x + 1$
(6) $y'(x) + 4y(x) = -(6\,x + 1)e^x$
(7) $y'(x) + 8y(x) = (4x + 1)e^{2x}$
(8) $y'(x) - 2y(x) = e^{2x}\sin(x)$
(9) $y'(x) - 2y(x) = e^{2x}\sin(3x)$

Premier ordre avec second membre et condition initiale.

EXERCICE 2.5.3. *À savoir faire impérativement !*
Quelles sont les solutions réelles de l'équation différentielle avec la condition initiale donnée ?

(1) $y'(x) - 3y(x) = e^{4x}$; $y(0) = 3$
(2) $y'(x) - 3y(x) = e^{4x}$; $y'(1) = e^3$
(3) $y'(x) - 5y(x) = x^2e^{5x}$; $y(0) = -2$
(4) $y'(x) = e^x$; $y(4) = 2$
(5) $y'(x) - 3y(x) = \dfrac{e^{3x}}{x}$; $y(1) = 2$ (sur $]0, +\infty[$)
(6) $y'(x) - 3y(x) = \dfrac{e^{3x}}{x}$; $y(-1) = 2$ (sur $]-\infty, 0[$)

Équations différentielles qui se ramènent à une équation différentielle linéaire du premier ordre.

EXERCICE 2.5.4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $4y''(t) + 2y'(t) = 0$

(2) $y'(t)^2 + y(t)^2 = 2y(t)y'(t)$

(3) $\dfrac{y(t)}{y'(t)} = \sqrt{2}$

(4) $y''(t) + 7y'(t) = 42t^2 - 2t + 19$

EXERCICE 2.5.5. * Donner des solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y'(t) = 2y(t)\ln y(t)$

(2) $(y(t)^3)' = 15y(t)^3$

(3) $(\cos y(t))' = -2y'(t)\sin y(t)$

(4) $\tan y(t) = 7y'(t)$

(5) $3y'(t) + (1 + y(t)^2)\arctan y(t) = 0$

Équations différentielles premier ordre à coefficients non-constants ou non linéaires.

EXERCICE 2.5.6. * Donner des solutions des équations différentielles suivantes :

(1) $y'(t) + 2ty(t) = 0$

(2) $y'(t) = \dfrac{y(t)}{t}$

(3) $y'(t) = 7e^{-y(t)}$

(4) $y'(t) = t^2(y(t))^3$

(5) $t^2y'(t) + 2ty(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

2.6. Solutions

Solution (de l'exercice 2.5.2).

(1) $Ce^{9x} - \dfrac{5}{9}$

(2) $Ce^{9x} + \dfrac{4}{9}\,x + \dfrac{85}{81}$

(3) $Ce^{-6x} - \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{19}{12}$

(4) $Ce^{-6t} + \dfrac{3t^2}{2} - \dfrac{t}{2} + \dfrac{5}{12}$

(5) $\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{19}{9}x - \dfrac{28}{27} + Ce^{3x}$

(6) $Ce^{-4x} - \dfrac{6}{5}\,xe^x + \dfrac{1}{25}\,e^x$

(7) $Ce^{-8x} + \dfrac{2}{5}xe^{2x} + \dfrac{3}{50}e^{2x}$

(8) $Ce^{2x} - \cos(x)e^{2x}$

(9) $Ce^{2x} - \dfrac{1}{3}\,\cos(3x)e^{2x}$

Solution (de l'exercice 2.5.3).

(1) $e^{4x} + 2\,e^{3x}$

(2) $e^{4x} + \dfrac{1-4e}{3}e^{3x}$

(3) $\dfrac{1}{3}\,x^3e^{5x} - 2\,e^{5x}$

(4) $-e^4 + e^x + 2$

(5) $e^{3x}\ln(x) + 2e^{3x-3}$ sur $]0,+\infty[$

(6) $e^{3x}\ln(-x) + 2e^{3x+3}$ sur $]-\infty,0[$

Chapitre 3

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

$$y''$$

3.1. Définition

Définition 3.1.1. Une *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme

$$ay''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = d(t)\,,$$

où a, b et c sont des nombres complexes, $a \neq 0$, $d : I \to \mathbb{C}$ est une fonction définie sur un intervalle I, et où l'inconnue est une fonction $y : I \to \mathbb{C}$.

Si la fonction d est constante égale à 0, on dit que l'équation différentielle linéaire est *homogène*.

Remarque 3.1.2. On se restreint, sans perdre en généralité, au cas $a = 1$, car

$$ay''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = d(t) \Leftrightarrow y''(t) + \frac{b}{a}\,y'(t) + \frac{c}{a}\,y(t) = \frac{d(t)}{a}\,.$$

3.2. Partie homogène

Théorème 3.2.1. *Soit l'équation différentielle du second ordre linéaire homogène à coefficients constants*

$$(EH) \qquad\qquad y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = 0\,, \quad b, c \in \mathbb{C}.$$

Le polynôme caractéristique associé à (EH) est $P(X) = X^2 + bX + c$.

Soient r_1 et r_2 les racines (dans $\mathbb{C}$) de P.

— *Si $r_1 \neq r_2$, alors les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de (EH) sont les fonctions de la forme*

$$y(t) = C_1\,e^{r_1 t} + C_2\,e^{r_2 t}\,, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2\,.$$

— *Si $r_1 = r_2 = r$, alors les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme*

$$y(t) = C_1\,e^{rt} + C_2\,t\,e^{rt}\,, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2\,.$$

Le cas des fonctions à valeurs réelles est important :

Théorème 3.2.2. *Soit l'équation différentielle du second ordre linéaire homogène à coefficients constants réels*

$$(EH) \qquad y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = 0\,, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Le polynôme caractéristique associé à (EH) *est* $X^2 + bX + c = (X - r_1)(X - r_2)$.

— *Si* $r_1 \neq r_2$,
  — *Si* $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ *alors les solutions* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de* (EH) *sont les fonctions de la forme*

$$y(t) = C_1\, e^{r_1 t} + C_2\, e^{r_2 t}\,, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\,.$$

  — *Sinon, il existe* ρ *et* ω *dans* $\mathbb{R}$ *tels que* $r_1 = \rho + i\omega$ *et* $r_2 = \rho - i\omega$, *et les solutions* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de* (EH) *sont les fonctions de la forme*

$$y(t) = e^{\rho t}\Big(C_1\, \cos(\omega t) + C_2\, \sin(\omega t)\Big)\,, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\,.$$

— *Si* $r_1 = r_2 = r$, *alors les solutions* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de* (EH) *sont les fonctions de la forme*

$$y(t) = C_1 e^{rt} + C_2\, t e^{rt}\,, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Démonstration du théorème 3.2.1 (hors programme). Remarquons que $X^2 + bX + c = (X - r_1)(X - r_2) = X^2 - (r_1 + r_2)X + r_1 r_2$ donc $b = -r_1 - r_2$ et $c = r_1 r_2$.

Posons $z(t) = y'(t) - r_2 y(t)$. Alors $z'(t) - r_1 z(t) = y''(t) - r_2 y'(t) - r_1 y'(t) + r_1 r_2 y(t)$ et $(EH) \Leftrightarrow z'(t) - r_1 z(t) = 0$, qui a pour solutions les fonctions de la forme $z(t) = z_0 \exp(r_1 t)$ pour $z_0 \in \mathbb{C}$. On se ramène donc à résoudre $y'(t) - r_2 y(t) = z_0 \exp(r_1 t)$.

Si $r_1 \neq r_2$ (c'est-à-dire $b^2 \neq 4c$), posons $w(t) = y(t) - \frac{z_0}{r_2 - r_1} \exp(r_1 t)$, alors

$$\begin{aligned}
(EH) &\Leftrightarrow y'(t) - r_2 y(t) = z_0 \exp(r_1 t)\\
&\Leftrightarrow \frac{z_0}{r_1 - r_2} \exp(r_1 t)' + w(t)' - r_2 \frac{z_0}{r_1 - r_2} \exp(r_1 t) - r_2 w(t) = z_0 \exp(r_1 t)\\
&\Leftrightarrow \frac{z_0}{r_1 - r_2} r_1 \exp(r_1 t) - r_2 \frac{z_0}{r_1 - r_2} \exp(r_1 t) + w(t)' - r_2 w(t) = z_0 \exp(r_1 t)\\
&\Leftrightarrow w(t)' - r_2 w(t) = 0
\end{aligned}$$

et les solutions de cette équations sont exactement les fonctions de la forme $w(t) = C_2 \exp(r_2 t)$ pour C_2 dans $\mathbb{C}$. Au final, les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme $y(t) = C_1 \exp(r_1 t) + C_2 \exp(r_2 t)$ avec $C_1 (= \frac{z_0}{r_2 - r_1})$ et C_2 dans $\mathbb{C}$.

Si $r_1 = r_2 = r$ (c'est-à-dire $b^2 = 4c$), posons $w(t) = y(t) - z_0 t \exp(rt)$, alors

$$\begin{aligned}
(EH) &\Leftrightarrow y'(t) - r_2 y(t) = z_0 \exp(rt)\\
&\Leftrightarrow z_0 (t \exp(rt))' + w(t)' - r z_0 t \exp(rt) - r w(t) = z_0 \exp(rt)\\
&\Leftrightarrow z_0 r t \exp(rt) + z_0 \exp(rt) - r z_0 t \exp(r_1 t) + w(t)' - r w(t) = z_0 \exp(rt)\\
&\Leftrightarrow w(t)' - r w(t) = 0
\end{aligned}$$

et les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $w(t) = C_1 \exp(rt)$ pour C_1 dans $\mathbb{C}$. Au final, les solutions de (EH) sont les fonctions de la forme $y(t) = C_1 t \exp(r_1 t) + C_2 t \exp(r_2 t)$ avec C_1 et $C_2 (= z_0)$ dans $\mathbb{C}$. □

3.3. Solution particulière et principe de superposition

Pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre, il suffit d'ajouter une solution particulière de l'équation (E) aux solutions de l'équation homogène (EH) associée :

THÉORÈME 3.3.1. *Soient $(b, c) \in \mathbb{C}^2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{C}$. Soit y_P est une solution particulière de l'équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants*

$$(E) \qquad y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = d(t)\,.$$

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y_P + y_H$ où y_H est solution de l'équation homogène (EH) associée à (E).

En général on ne sait pas trouver une solution particulière de l'équation (E), mais dans certains cas particuliers, courants dans les applications à la physique, la chimie, etc., on sait le faire :

PROPOSITION 3.3.2. *Soit $Q(t)$ un polynôme de degré d_Q. L'équation*

$$(E) \qquad y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = Q(t)$$

possède une solution particulière qui est un polynôme $R(t)$ de degré $d_R \leq d_Q + 2$.

PROPOSITION 3.3.3. *Soit $Q(t)$ un polynôme de degré d_Q et $m \in \mathbb{C}$. L'équation*

$$(E) \qquad y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = Q(t)\,e^{mt}\,.$$

possède une solution particulière de la forme $R(t)\,e^{mt}$ où $R(t)$ est un polynôme de degré $d_R \leq d_Q{+}2$.

PROPOSITION 3.3.4. *Si y_P et $\tilde{y}_P$ sont des solutions particulières des équations*

$$y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = d(t) \qquad \text{et} \qquad y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = \tilde{d}(t)$$

alors $\alpha y_P + \beta \tilde{y}_P$ est une solution de

$$y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = \alpha d(t) + \beta \tilde{d}(t)\,.$$

Méthode de la variation des constantes. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_P(x) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$ satisfaisant $0 = C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t)$, où y_1 et y_2 sont des solutions de (EH) qui ne sont pas proportionnelles entre elles. Les dérivées de y_P sont alors

$$\begin{aligned} y_P'(t) &= C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) + C_1(t)y_1'(t) + C_2(t)y_2'(t) = C_1(t)y_1'(t) + C_2(t)y_2'(t) \\ y_P''(t) &= C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) + C_1(t)y_1''(t) + C_2(t)y_2''(t) \end{aligned}$$

et l'équation (E) donne

$$\begin{aligned} y_P''(t) + by_P'(t) + cy_P(t) &= C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) + C_1(t)y_1''(t) + C_2(t)y_2''(t) \\ &\quad + C_1(t)by_1'(t) + C_2(t)by_2'(t) + C_1(t)cy_1(t) + C_2(t)cy_2(t) \\ &= C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) \\ &\quad + C_1(t)\Big(y_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t)\Big) + C_2(t)\Big(y_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t)\Big) \\ &= C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) = d(t) \end{aligned}$$

On est donc amené à résoudre le système

$$\begin{cases} C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) &= d(t) \\ C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) &= 0 \end{cases}.$$

3.4. Exercices

Second ordre, homogènes.

Exercice 3.4.1. *À savoir faire impérativement !*

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y''(t) = 2y(t)$,
(2) $y''(t) = 0$,
(3) $4y''(t) - y(t) = 0$,
(4) $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0$,
(5) $y''(t) + y(t) = 0$,
(6) $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0$,
(7) $y''(t) - 17y'(t) = 0$.

Exercice 3.4.2. *À savoir faire impérativement !*

Résoudre les équations différentielles suivantes : on donnera d'abord les solutions pour des fonctions à valeurs complexes, puis pour des fonctions à valeurs réelles.

(1) $y''(t) = -3y(t)$,
(2) $y''(t) - 10y'(t) + 29y(t) = 0$,
(3) $4y''(t) + 2y(t) = 0$,
(4) $y''(t) - 2y'(t) + 8y(t) = 0$,
(5) $y''(t) + 16y(t) = 0$.

Second ordre, avec second membre.

Exercice 3.4.3. *À savoir faire impérativement !*

Trouver une solution particulière des équations différentielles linéaires à coefficients constants avec second membre suivantes puis donner leurs solutions à valeurs réelles.

(1) $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 9t^2 + 2$,
(2) $y''(t) + 7y'(t) = 42t^2 - 2t + 19$.

Exercice 3.4.4. *À savoir faire impérativement !*

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $16y''(t) - y(t) = 6$,
(2) $y''(t) = e^{t/4}$,
(3) $y''(t) + 4y'(t) + y(t) = e^{-t/3}$,
(4) $3iy''(t) - 2y(t) = e^{2it}$,
(5) $y''(t) + 9y(t) = 2\sin(9t)$,
(6) $2y''(t) + y(t) = te^{-t}$,

Exercice 3.4.5. *À savoir faire impérativement !*

Trouver les solutions à valeurs réelles des équations différentielles suivantes.

(1) $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = t^3 + e^t$,
(2) $y''(t) - 25y(t) = 6 + e^{5t}$,
(3) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 2 + \cos(t)$.

Second ordre, avec ou sans second membre, avec conditions initiales ou aux bords.

Exercice 3.4.6. *À savoir faire impérativement !*

Trouver la (ou les) solution(s) à valeurs réelles de

(1) $y''(t) + y(t) = 0$ telles que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$,

(2) $y''(t) + 9y(t) = 0$ telles que $y(0) = 0$ et $y(\frac{\pi}{6}) = 7$,

(3) $y''(t) + 9y(t) = 0$ telles que $y(0) = 0$ et $y(3\pi) = 7$,

(4) $y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 2$ telles que $y(0) = 4$.

Autres exercices.

Exercice 3.4.7. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = \dfrac{1}{\sin(t)}$, en spécifiant l'intervalle sur lequel on travaille. On pourra utiliser la méthode de la variation des constantes.

Exercice 3.4.8. Trouver une solution particulière de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants et avec second membre

$$(E) : y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = (16 + 10t + t^2)e^{3t} ,$$

puis donner les solutions à valeurs réelles de (E).

Exercice 3.4.9. Trouver une solution particulière de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants et avec second membre, puis donner sa solution générale.

(1) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t^2 - t + 1\,.$

(2) $y''(t) + 3y'(t) = 2t^2 + 3\,.$

Exercice 3.4.10. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y''(t) = e^t$,

(2) $9y''(t) - y(t) = 1$,

(3) $y''(t) - 4y(t) = 1 + e^{2t}$,

(4) $y''(t) + 4y(t) = \sin(4t)$,

(5) $y''(t) + y(t) = te^t$,

(6) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 1 + \sin(t)$,

(7) $y''(t) + 6y'(t) + y(t) = e^{-t/3}$,

(8) $iy''(t) - y(t) = e^t$.

Exercice 3.4.11. Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant l'intervalle sur lequel on travaille. (On cherchera des solutions à valeurs réelles.)

1. $y''(t) + y(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}$,
2. $y''(t) + y(t) = \tan t$
[Indication : Calculer $\left(\ln\left(\left|\dfrac{1}{\cos t} + \tan t\right|\right) - \sin t\right)'$.] ,
3.* $y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = \dfrac{9t^2 + 6t + 2}{t^3}$.
[Indication : On n'essaiera pas de calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{e^{-3t}}{t}\,\mathrm{d}t$.]

Exercice 3.4.12. Trouver une solution particulière de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants et avec second membre

$$(E) : y''(t) - y'(t) + 2y(t) = (t - 3)e^{-2t} .$$

3.5. Solutions

Solution (3.4.1). (1) $Ae^{\sqrt{2}t}+Be^{-\sqrt{2}t}$,

(2) $At+B$,

(3) $Ae^{t/2}+Be^{-t/2}$,

(4) $Ae^{2t}+Be^{3t}$,

(5) $A\exp(it)+B\exp(-it)$
ou $C\cos(t)+D\sin(t)$

(6) $A\exp((1-i)t)+B\exp((1+i)t)$,
ou $e^t(C\cos(t)+D\sin(t))$

(7) $Ae^{\sqrt{17}t}+B$.

Solution (3.4.3). (1) $Ae^{-3t}+Be^{-2t}+\frac{23}{12}-\frac{5}{2}t+\frac{3}{2}t^2$,

(2) $Ae^{-7t}+B+2t^3-t^2+3t$.

Solution (3.4.4). (1) $Ae^{t/4}+Be^{-t/4}-6$,

(2) $16e^{t/4}+At+B$,

(3) $Ae^{(-2-\sqrt{3})t}+Be^{(\sqrt{3}-2)t}-\frac{9}{2}e^{-t/3}$,

(4) $Ae^{t(1-i)/\sqrt{3}}+Be^{-t(1-i)/\sqrt{3}}+(-\frac{1}{74}+\frac{3i}{37})e^{2it}$,

(5) $A\sin(3t)+B\cos(3t)-\frac{1}{36}\sin(9t)$ ou $Ce^{3it}+De^{-3it}-\frac{1}{36}\sin(9t)$,

(6) $A\cos(t/\sqrt{2})+B\sin(t/\sqrt{2})+(\frac{4}{9}+\frac{t}{3})e^{-t}$
ou $Ce^{it/\sqrt{2}}+De^{-it/\sqrt{2}}+(\frac{4}{9}+\frac{t}{3})e^{-t}$,

Solution (3.4.5). (1) $Ae^{-t}+Be^{2t}+\dfrac{15}{8}-\dfrac{9}{4}t+\dfrac{3}{4}t^2-\dfrac{1}{2}t^3-\dfrac{1}{2}e^t$,

(2) $Ae^{5t}+Be^{-5t}+\frac{1}{10}te^{5t}-\frac{6}{25}$,

(3) $Ae^t+Bte^t-\frac{\sin(t)}{2}+2$.

Solution (3.4.6). (1) $3\sin t$,

(2) $7\sin(3t)$,

(3) il n'y a pas de solution,

(4) $Ce^{-t/2}\sin(\frac{\sqrt{7}}{2}t)+3e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{7}}{2}t)+1$.

Solution (3.4.8). $Ae^{2t}+Bte^{2t}+e^{3t}(t^2+6t+2)$

Solution (3.4.9). (1) $Ae^{-2t}+Be^{-t}+\dfrac{t^2}{2}-2t+3$,

(2) $Ae^{-3t}+B+\dfrac{2t^3}{9}+\dfrac{2t^2}{9}+\dfrac{31t}{27}$.

Solution (3.4.10). (1) e^t+A+Bt ,

(2) $-1+Ae^{t/3}+Be^{-t/3}$,

(3) $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}te^{2t}+Ae^{2t}+Be^{-2t}$,

(4) $Ae^{2it}+Be^{-2it}-\frac{1}{12}\sin(4t)$ ou
$C\cos(2t)+D\sin(2t)-\frac{1}{12}\sin(4t)$,

(5) $Ae^{it}+Be^{-it}+\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{2}\right)e^t$ ou
$C\cos(t)+D\sin(t)+\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{2}\right)e^t$,

(6) $Ae^{-t}+Bte^{-t}+1-\dfrac{\cos(t)}{2}$,

(7) $Ae^{(-3+2\sqrt{2})t}+Be^{(-3-2\sqrt{2})t}-\dfrac{9}{8}e^{-t/3}$,

(8) $Ae^{e^{\frac{3i\pi}{4}}t}+Be^{-e^{\frac{3i\pi}{4}}t}+\dfrac{e^t}{i-1}$.

Solution (3.4.11). (1) $A\cos(t)+B\sin(t)+\ln(|\cos(t)|)\cos(t)+t\sin(t)$,

(2) $A\cos(t)+B\sin(t)-\ln\left(\left|\frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}\right|\right)\cos(t)$,

(3) $Ae^{3t}+Bte^{3t}+\frac{1}{t}$.

Solution (3.4.12). $\left(\dfrac{t}{8}-\dfrac{19}{64}\right)e^{-2t}$ est une solution particulière de (E).

Deuxième partie

Fonctions de plusieurs variables (Disponible plus tard.)

Index