Opération	**Dérivée**	**Vigilance**
$k \cdot f,\ k \in \mathbb{R}$	$k \cdot f'$	
$f + g$	$f' + g'$	
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$	
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	g ne s'annule pas
$f(ax+b),\ a, b \in \mathbb{R}$	$af'(ax+b)$	$ax + b \in D_{f'}$
$\mathbf{f[g(x)]}$	$\mathbf{g'(x) \cdot f'[g(x)]}$	$\mathbf{g(x) \in D_{f'}}$
$u^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$
$u^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha u' u^{\alpha - 1}$	$u > 0$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$	$u > 0$
e^u	$u'e^u$	
$\sin u$	$u' \cos u$	
$\cos u$	$-u' \sin u$	
$\arctan u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	

LN

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
C constante	$\mathbb{R}$	0
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2} = (-1)x^{-2}$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n},\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}} = (-n)x^{-(n+1)}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$x^\alpha = e^{\alpha \ln x},\ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$a^x = e^{x \ln a},\ a \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)\, a^x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi; \dfrac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$]-1;1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$]-1;1[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$
$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$
$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$	$\mathbb{R}$	$1-\tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

Feuille TD 1 - Dérivation

Calculs de dérivées - Sans composition

Exercice 1. *À savoir faire impérativement !*
Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, le plus efficacement possible.
Préciser leurs ensembles de définition et de dérivabilité.

1. $f(x) = 4x^9 + 3x^6 + 8x^3 - 7x^5 + 48$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^6} + 3\ln(x)$
3. $f(x) = -(x^3 + \dfrac{1}{x})\sqrt{x}$
4. $f(x) = (-x^4 + \dfrac{2}{7}x^2 - \dfrac{20}{103}) \times (\dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x - 2)$
5. $f(x) = \dfrac{-5}{x^2 + 2x + 3}$
6. $f(x) = x^2 \cos(x)$
7. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$
8. $f(x) = \dfrac{8x+5}{5x+9}$
9. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{3(x+1)}$
10. $f(x) = \dfrac{(x+8)\sqrt{x}}{2x+5}$
11. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Composition de fonctions

Soient deux fonctions f et g définies respectivement sur des parties D_f et D_g de $\mathbb{R}$. La fonction $f \circ g$ est définie, quand cela a un sens, par $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Soit x_0 dans D_g. Si :

- g est dérivable en x_0 et
- $g(x_0) \in D_f$ et
- f est dérivable en $g(x_0)$,

alors $f \circ g$ est définie et dérivable en x_0 et $(f \circ g)'(x_0) = g'(x_0)f'(g(x_0))$.

Exercice 2. Déterminer les expressions des fonctions composées $f(g(x))$ et $g(f(y))$ dans les cas suivants. Pour aller plus loin, déterminer leurs ensembles de définition.

1. $f(y) = 1/y$ et $g(x) = \sqrt{x}$
2. $f(y) = y^2 + y$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$
3. $f(y) = e^y$ et $g(x) = x^2 + 1$

Exercice 3. Décomposer les expressions suivantes en opérations sur des fonctions élémentaires (somme, produit, quotient, et surtout composition).

Préciser leurs domaines de définition.

1. $f(x) = \dfrac{1}{3x-1}$ $\quad g'(h(x)) \cdot h'(x)$
2. $f(x) = \sqrt{4-x^2}$
3. $f(x) = \ln(e^x + 2)$
4. $f(x) = \cos(x^2)$
5. $f(x) = \cos^2(x)$
6. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)$
7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2x^2+3}\right)$
8. $f(x) = x\ln\left((x+2)^2\right)$
9. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}+3}$

Calculs de dérivées - Avec composition

Exercice 4.

Reprendre les fonctions de l'exercice 3 et calculer leurs dérivées premières.

Exercice 5. On note u une fonction dérivable sur un intervalle convenable.

Écrire les fonctions g suivantes sous la forme $g(x) = f(u(x))$.

En déduire, pour chaque cas, la dérivée g' de g en fonction de u et de u'.

1. $g = -2u^{n+2}$, pour $n \in \mathbb{N}$
2. $g = \dfrac{1}{\ln u}$
3. $g = \dfrac{-3}{u^7}$
4. $g = \sqrt{1+u^2}$
5. $g = \dfrac{-2}{u^{n-3}}$, pour $n \geq 4$
6. $g = \tan(u) + \sin(u)$
7. $g = \cos(2u+3)$
8. $g = e^{\sqrt{u}}$

Dérivées successives

Exercice 6. Calculer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$
2. $g(x) = \cos(2x+1)$
3. $h(x) = \ln(x+1)$

Qu'en déduisez-vous pour la dérivée d'ordre n, avec n un entier naturel quelconque ?

Exercice 7.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$.

Calculer sa dérivée seconde et exprimer g'' en fonction de g.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième $g^{(n)}$ de g.