מודלים גרפים ש.ב 2

הילה מלכה 313312753 רון דגני 318170917

1.1.

בשאלה התבקשנו להדפיס עבור כל סוג של זוג צמתים את הפקטור עליהם. על מנת לעשות זאת, עבור כל קשת מדלנו פקטור באופן הבא – בהתאם לתנאי השאלה:

אם a,b באותו צבע אז ההסתברות שלהם להסכים היא 5:1, ולכן עבור משתנים בינאריים נקבל את הCPD הבא:

Yellow	Yellow	p
0	0	**5**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**5**

Pink	Pink	p
0	0	**5**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**5**

Blue	Blue	p
0	0	**5**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**5**

עבור צמתים שכנים בצבעים שונים נקבל:

Yellow	Pink	p
0	0	**2**
0	1	**7**
1	0	**7**
1	1	**2**

Blue	Yellow	p
0	0	**1**
0	1	**3**
1	0	**3**
1	1	**1**

Blue	Pink	p
0	0	**1**
0	1	**8**
1	0	**8**
1	1	**1**

מכיוון שהוגדר יחס בין הסכמה לאי הסכמה הנחנו שבתוך הקבוצה ההתפלגות יוניפורמית.

באופן דומה יצרנו פקטורים על הגרף על פי הצמתים על פי הנתונים:

Color	Don't buy	Buy
Yellow	1	**3**
Pink	3	**4**
Blue	4	**1**

1.2. לאחר יצירת הפקטורים, יכולנו לחשב BeliefPropagation ולבצע שאילתות על הגרף:

1. על מנת לחשב את ההסתברות שלפחות אחד צהוב, חישבנו את ההסתברות שכל הצמתים הצהובים שהם 0 והחסרנו את התוצאה מ1. התוצאה: 0.973

2. על מנת לחשב את ההסתברות שלפחות 2 כחולים, חישבנו את ההסתברות ש2 מתוך 3 הצמתים הכחולים חיוביים או ששלושתם חיוביים. חיברנו את ההסתברויות של כל האפשרויות הללו. התוצאה: 0.0407

3. על מנת לחשב את הקונפיגורציה "most likely", השתמשנו בפונקציה map_query אשר מחשבת את הקונפיגורציה עם ההסתברות המקסימלית בצורה יעילה. התוצאה: (1 קנה, 0 לא קנה)

{'a': 1, 'b': 0, 'c': 1, 'd': 1, 'e': 1, 'f': 0, 'g': 0, 'h': 1, 'i': 0, 'j': 0}

4. על מנת לחשב את הקונפיגורציה "most likely" בהינתן שכל הצהובים חיוביים, השתמשנו גם כן בפונקציה map_query. התוצאה: (1 קנה, 0 לא קנה)

{'b': 0, 'c': 1, 'd': 1, 'f': 0, 'g': 0, 'i': 0, 'j': 0}

2. נרצה לחשב independent sets על ידי שימוש בפקטורים.

2.1

המודל:

1. עבור כל קשת נגדיר פקטור שנותן הסתברות יוניפורמית להשמה חוקית והסתברות אפס להשמה לא חוקית לIS כאשר ערך 1 של צומת מגדיר השתייכות לIS, כלומר עבור שני צמתים שכנים a,b כל השמה שאינה השתייכות שני הצמתים על הקשת הינה חוקית ותקבל הסתברות חיובית:

a	b	p
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2. נבצע BeliefPropagation ונגדיר שאילתה על קודקודי הגרף.

כעת, נחשב את מספר הIS באפן הבא:

אנו יודעים כי כאשר פקטור מסוים מקשר בין קודקודים שהם 1 ו1 (כלומר מפרים את הIS) הוא מקבל את הערך 0 ו1 אם אין הפרה. לפיכך, כאשר יש IS נקבל כי $P(x) = \frac{1}{z} * \prod_{c \in E} \phi(c) = \frac{1}{z} * 1$ מאופן הגדרת הפקטורים להיות 1 כאשר אין סתירה לIS. מכיוון שאנו כופלים את הפקטורים על פני כל הקודקודים, אם יש פקטור שלא מקיים את התנאי אז הוא יהפוך את כל המכפלה להיות אפס $P(x) = \frac{1}{z} * \prod_{c \in E} \phi(c) = 0$.

לכן, Z מייצג לנו את מספר הIS בגרף.

על מנת לחשב את Z, נוכל להשתמש בIS הטריוויאלי – שבו אין אף צומת ששייכת לIS (נוכל להשתמש בכל IS אחר שאנחנו יודעים עליו לצורך החישוב), נסמן את הIS הטריוואלי בx:

א. נמצא את x בעזרת belief והצבת הערכים 0 לכל הקודקודים ונקבל את $P(x) = \frac{1}{Z}$.

ב. $Z = \frac{1}{P(x)}$

קיבלנו כי מספר הפרמוטציות האפשריות הן 73. נשים לב שמספר זה כולל את המקרה הטריוויאלי עבורו הקבוצה IS הינה קבוצה ריקה, או מקרים בהם רק צומת אחת בIS וכו' – כלומר כל מקרה בו אין סתירה להגדרת הIS הדורשת שלא יהיו צמתים שכנים ששייכים לקבוצה.

2.2

המודל:

את הפקטורים נבנה על הגרף מסעיף 2.1 – אשר יבטיחו כי הקבוצה תישאר ב"ת כפי שהוסבר לעיל.

נבנה את הפקטורים: ניתן הסתברות גדולה יותר ל1 מאשר ל0 לכל הקודקודים. נעשה זאת בהסתברות: [0.3, 0.7]

לכן, כשאר נשלוף את ההשמה האופטימלית לפקטור זה, נקבל את ההשמה בעלת מס' ה1 הרב ביותר, אשר במקרה שלנו מהווה הוא הIS בעל מספר הקודקודים הרב ביותר משום שכאשר יתכן כי הקודקוד הינו 1 (חלק מהIS), הוא ישובץ ככזה בהשמה האופטימלית.

קיבלנו כי MAX IS הוא בעל 4 קודקודים.

2.3

כפי שראינו בהרצאה, הסיבוכיות של חישוב הפקטורים הוא אקספוננציאלי בפרמטר w שמסמן את גודל הקליקה המקסימלית, פרמטר שתלוי במבנה הגרף ולכן זהו החישוב המשמעותי ביותר והיקר ביותר בסיבוכיות (ביחס לאחרים, לכן בחישוב סיבוכיות הוא זה שיקבע את הסיבוכיות הכללית של האלגוריתם). בסך הכל נקבל:

עבור d שהוא dom(v) כלומר מספר הערכים שצומת יכולה לקבל, במקרה שלנו יש שני ערכים: שייך או לא שייך לIS. סיבוכיות העברת הודעה אחת היא $O(d^w)$. מכיוון שצריך להעביר הודעה מכל צומת, נקבל שהסיבוכיות היא $O(nd^w)=O(n2^w)\ll O(2^n)$. קטנה מאשר במקרה הכללי.

3.

יהי $G(V,E)$ $cordal\ graph, a,b\in V,(a,b)\notin E$ לא מכוון וקשיר.

יהי $S\ ab-minimal\ saparator$.

צ"ל: S הוא קליקה.

נניח בשלילה שS אינו קליקה, כלומר קיימים שתי צמתים $x,y\in S$ כך שאין ביניהם מסלול.

S מפריד את הגרף G לרכיבי קשירות:- רכיב A המכיל את a ומהגדרת S אין ממנו מסלול לb בגרף $G[V\backslash S]$. באופן דומה רכיב B מכיל את b ואין ממנו מסלול לa בגרף $G[V\backslash S]$.

יהיו $x, y \in S$. לפי למה *3.3* לשניהם יש שכנים ברכיב A ורכיב B. נסמנם a_x, a_y, b_x, b_y בהתאמה לרכיבים בהם הם נמצאים. בין הצמתים a_x, a_y וכן בין הצמתים b_x, b_y יש מסלולים שעוברים רק בתוך A וB בהתאמה, מכיוון שאלו רכיבים קשירים. אם כך, נוכל למצוא מעגל בגרף G שעובר כך:

$$a_x \to x \to b_x \to b_y \to y \to a_y \to a_x$$

זהו מעגל בגודל 4 לפחות (יהיה בדיוק 4 במקרה שבו $a_x = a_y, b_x = b_y$). נתון שהגרף G הינו cordal graph, חייב להיות מיתר בתוך המעגל. S הוא minimal saparator ולכן לא ייתכן מיתר מרכיב A לרכיב B. ולכן בהכרח יש מיתר בין x, y, בסתירה להנחה שאין ביניהם מסלול כלל. לכן, S הוא קליקה.