אותות ומערכות – תרגיל מסכם

רון פדרמן 209339290
שקד לובין 208728139

חלק א'

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-2]$$

סעיף א'

סיבתית – המערכת סיבתית מכיוון והמוצא תלוי רק בקלט מהעבר וההווה. ובפרט לכל $n < 0$ מתקיים $h[n] = 0$.

יציבה – נחשב:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-2]\right|$$
$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right| + \left|\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-2]\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n < \infty$$

המעבר האחרון נובע מסכום של שתי סדרות הנדסיות עם $q < 1$ (כלומר, הן מתכנסות).

קיבלנו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ לכן המערכת יציבה.

הפיכה – בסעיף ה' נראה שכל האפסים והקטבים של המערכת נמצאים בתוך מעגל היחידה, ולכן המערכת הפיכה. בפרט קיימת לה מערכת הופכית יציבה $BIBO$.

סעיף ב'

נבצע התמרת Z לתגובה להלם:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\} = \mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-2]\right\}$$
$$= \mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} u[n-2]\right\}$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{z^{-2}}{1-\frac{3}{4}\cdot z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}} + \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{z^2-\frac{3}{4}\cdot z}$$
$$= \frac{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{16}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(z^2-\frac{3}{4}z\right)} = \frac{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{16}-\frac{9}{32}z^{-1}}{z^2\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$
$$= \frac{z^3-\frac{3}{4}z^2+\frac{9}{16}z-\frac{9}{32}}{z^3\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)} = \boldsymbol{\frac{z^3-\frac{3}{4}z^2+\frac{9}{16}z-\frac{9}{32}}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{4}\right)}}$$

$$\boldsymbol{Roc = \left\{|z| > \frac{1}{2}\right\} \wedge \left\{|z| > \frac{3}{4}\right\} = \left\{|z| > \frac{3}{4}\right\}}$$

סעיף ג'
נחשב:

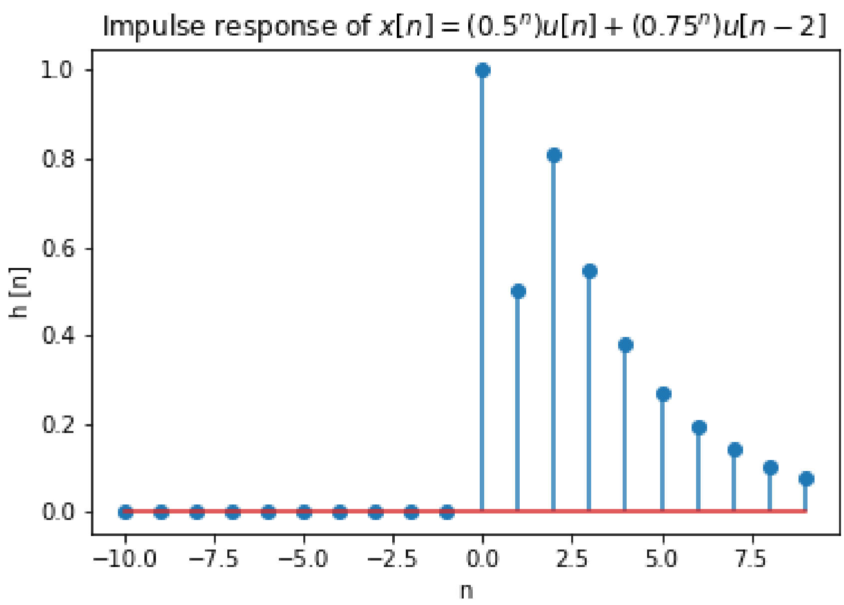
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{16}-\frac{9}{32}z^{-1}}{z^2\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}\right)}=\frac{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{16}-\frac{9}{32}z^{-1}}{z^2-\frac{5}{4}z+\frac{3}{8}}$$

$$Y(z)\cdot\left(z^2-\frac{5}{4}z+\frac{3}{8}\right)=X(z)\cdot\left(z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{16}-\frac{9}{32}z^{-1}\right)$$

$$y[n+2]-\frac{5}{4}y[n+1]+\frac{3}{8}y[n]=x[n+2]-\frac{3}{4}x[n+1]+\frac{9}{16}x[n]-\frac{9}{32}x[n-1]$$

$$\boldsymbol{y[n]-\frac{5}{4}y[n-1]+\frac{3}{8}y[n-2]=x[n]-\frac{3}{4}x[n-1]+\frac{9}{16}x[n-2]-\frac{9}{32}x[n-3]}$$

סעיף ד'



הקוד:

```python
def step(n, n0=0):
    return 1 * (n >= n0)


def Q1_D():
    n = np.arange(-10, 10)
    h = pow(0.5, n) * step(n) + pow(0.75, n) * step(n, 2)
    plt.xlabel('n')
    plt.ylabel('h [n]')
    plt.title(r'Impulse response of $x[n]=(0.5^n)u[n]+(0.75^n)u[n-2]$')
    plt.stem(n, h)
    plt.savefig('Q1D.png')
    plt.show()
```

סעיף ה'

נשתמש בMATLAB כדי לחשב את פונקציית התמסורת ונקבל:

$$H(z)=\frac{32z^3-24z^2+18z-9}{4z(2z-1)(4z-3)}$$

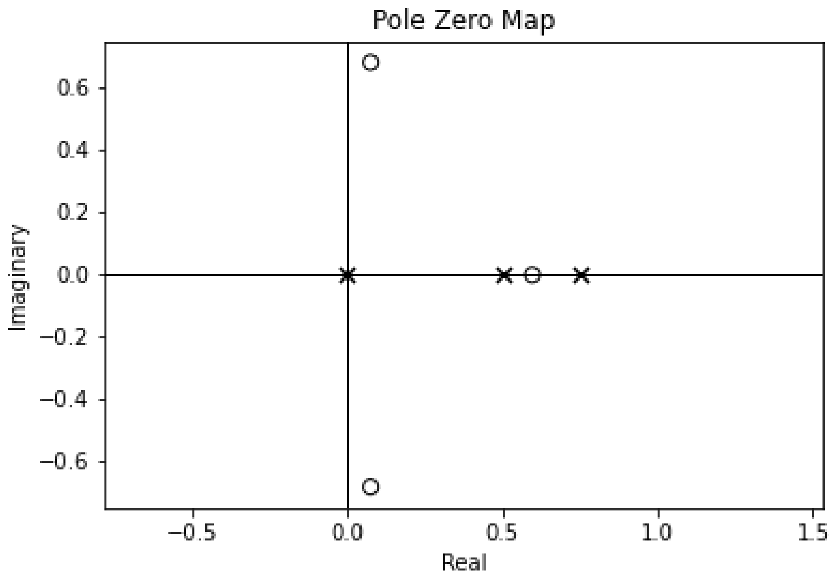
נציג בצורה ברורה של קטבים ואפסים.

$$=\frac{32\cdot(z^3-\frac{3}{4}z^2+\frac{9}{16}z-\frac{9}{32})}{32\cdot z(z-\frac{1}{2})(z-\frac{3}{4})}=\frac{(z-0.59)(z-0.076-j0.68)(z-0.076+j0.68)}{z(z-0.75)(z-0.5)}$$

הקוד:

```
syms n;
sympref('HeavisideAtOrigin', 1);
f = 0.5^n*heaviside(n) + 0.75^n*heaviside(n-2);
z_f=ztrans(f);
simplifyFraction(z_f)
```

סעיף ו'

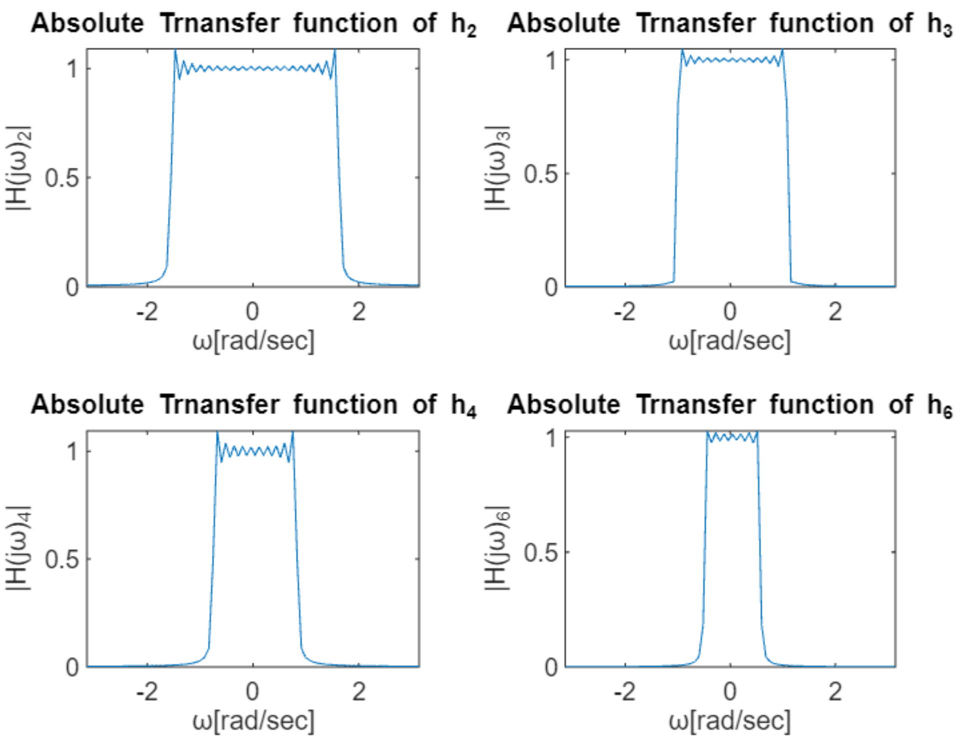


הקוד:

```
def Q1_F_poles_zeros():
    h2 = control.TransferFunction([1, -0.75, 9 / 16, -9 / 32], [1, -5 / 4, 3 / 8, 0])
    control.pzmap(h2, plot=True)
    plt.savefig('Q1F_zeros_poles.png')
    plt.show()
```

חלק ב'

סעיף א'



הקוד:

```
clc;
clear all;
clearvars;
load ('LPF.mat');

%Getting the fft of each h[n]
H2=fftshift(fft(h2));
H3=fftshift(fft(h3));
H4=fftshift(fft(h4));
H6=fftshift(fft(h6));

%Getting the omega range
w2=linspace(-pi,pi,length(H2));
w3=linspace(-pi,pi,length(H3));
w4=linspace(-pi,pi,length(H4));
w6=linspace(-pi,pi,length(H6));

%Plotting
nexttile
plot(w2, abs(H2));
title('Absolute Trnansfer function of h_2');
xlabel('\omega[rad/sec]');
ylabel('|H(j\omega)_2|');

nexttile
plot(w3, abs(H3));
title('Absolute Trnansfer function of h_3');
xlabel('\omega[rad/sec]');
ylabel('|H(j\omega)_3|');

nexttile
plot(w4, abs(H4));
title('Absolute Trnansfer function of h_4');
xlabel('\omega[rad/sec]');
ylabel('|H(j\omega)_4|');

nexttile
plot(w6, abs(H6));
title('Absolute Trnansfer function of h_6');
xlabel('\omega[rad/sec]');
ylabel('|H(j\omega)_6|');
```

סעיף ב'

נתון לנו האות:

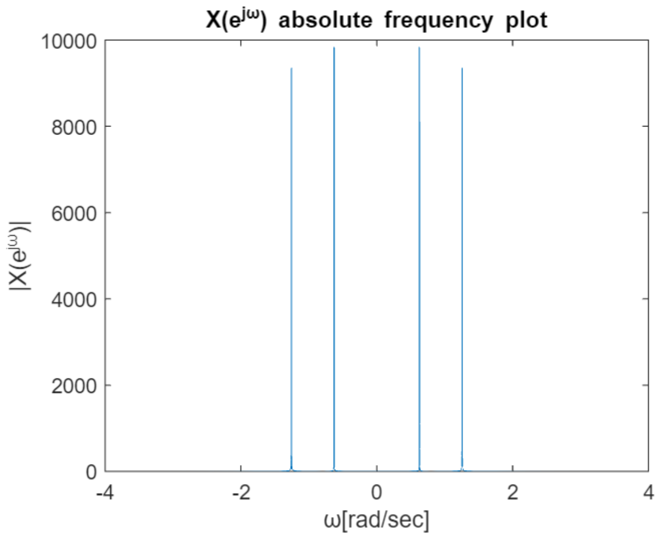
$$x[n] = 2\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{10}n\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{10}n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)$$

נמצא את ה$DTFT$ על פי דף הנוסחאות:

$$X(e^{j\omega}) = \pi\cdot\left(\sum_{l=\infty}^{\infty}\{\delta\left(\omega-\frac{\pi}{5}-2\pi l\right)+\delta(\omega+\frac{\pi}{5}-2\pi l\} + \sum_{l=\infty}^{\infty}\{\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{5}-2\pi l\right)+\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{5}-2\pi l\right)\}\right)$$

נפשט ונקבל:

$$X(e^{j\omega}) = \pi\cdot\sum_{l=\infty}^{\infty}\left\{\delta\left(\omega-\frac{\pi}{5}-2\pi l\right)-\delta\left(\omega+\frac{\pi}{5}-2\pi l\right)+\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{5}-2\pi l\right)+\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{5}-2\pi l\right)\right\}$$



הקוד:

```
clc;
clear all;
clearvars;
load ('LPF.mat');

%Setup
n_max = 10000;
T_s = 1;
num_samples = 2*(n_max/T_s)+1;

%Setup x[n]
n = linspace(-n_max,n_max,num_samples);
x = 2*cos((3*pi/10)*n).*cos((pi/10)*n);

%Get X
X = fftshift(fft(x));

%Plotting
w=linspace(-pi,pi,length(X));
plot(w,abs(X));
title('X(e^{j\omega}) absolute frequency plot');
xlabel('\omega[rad/sec]');
ylabel('|X(e^{j\omega})|');
```

סעיף ג'

נתונות לנו התגובות להלם עבור ארבע מערכות שונות, כפי שלמדנו בהינתן תגובה להלם $h[n]$ ואות כניסה $x[n]$ נוכל לחשב את אות היציאה באופן הבא:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

נתון לנו כי:

$$H_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\pi}{i} \\ 0 & else \end{cases}$$

אנו יודעים כי ההתמרה ההופכית של $H_i(e^{j\omega})$ הינה $sinc$. נשים לב כי לעשות קונבולוציה של אות הכניסה עם $sinc$ זה חישוב מסובך, לכן נעדיף לחשב את אות היציאה בתחום התדר ולאחר מכן לבצע התמרה הופכית על מנת לקבל את אות היציאה בתחום הזמן.

חישוב אות היציאה בתחום התדר מחושב באופן הבא:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H_i(e^{j\omega})$$

בסעיף הקודם מצאנו כי:

$$X(e^{j\omega}) = \pi \cdot \sum_{l=\infty}^{\infty} \left\{ \delta\left(\omega - \frac{\pi}{5} - 2\pi l\right) - \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5} - 2\pi l\right) + \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} - 2\pi l\right) \right\}$$

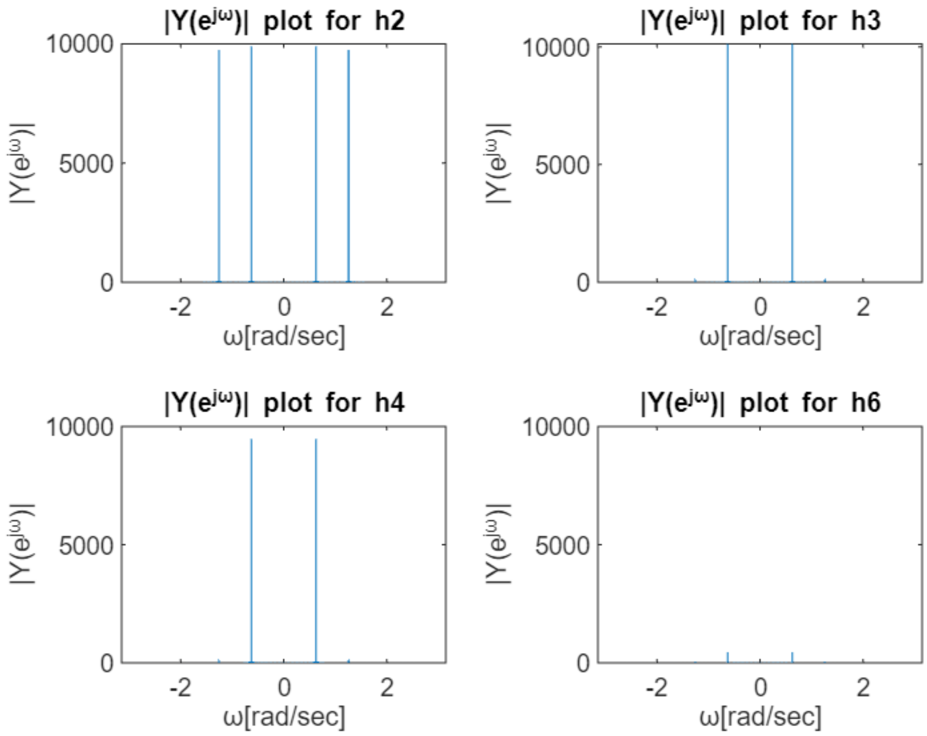
נשים לב כי $X(e^{j\omega}) \cdot H_i(e^{j\omega})$ תחזיר לנו רק את ההלמים של $X(e^{j\omega})$ בתדרים $|\omega| < \frac{\pi}{i}$. מכך נקבל (מטעמי נוחות נסתכל רק על מחזור אחד, אך אנו יודעים כי לאות ישנה המשכה מחזורית):

$$Y(e^{j\omega}) = \pi \cdot \begin{cases} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right) & for\ H_2 \\ \delta\left(\omega - \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5}\right) & for\ H_3 \\ \delta\left(\omega - \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{5}\right) & for\ H_4 \\ 0 & for\ H_6 \end{cases}$$

נחשב את ההתמרה ההופכית על פי דף הנוסחאות:

$$y[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{5} n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5} n\right) & for\ H_2 \\ \cos\left(\frac{\pi}{5} n\right) & for\ H_3 \\ \cos\left(\frac{\pi}{5} n\right) & for\ H_4 \\ 0 & for\ H_6 \end{cases}$$

סעיף ד'



כפי שהראינו בסעיף הקודם מתקיים $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H_i(e^{j\omega})$. חישבנו ומצאנו כי $X(e^{j\omega})$ הוא ארבעה הלמים בתדרים $\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, -\frac{2\pi}{5}, -\frac{\pi}{5}$, בנוסף, אנו יודעים כי כל $H_i(e^{j\omega})$ הינו מסנן המסנן תדרים הגדולים מתדר כלשהו.

מסנן H_2 מסנן את כל התדרים הגדולים בערך מוחלט מ $\left|\frac{\pi}{2}\right|$, כל התדרים שלנו קטנים מהתדר הזה ולכן התגובה $Y(e^{j\omega})$ תהיה כל ארבעת ההלמים ב $\omega = \pm\frac{\pi}{5}, \pm\frac{2\pi}{5}$.

מסננים H_3 וH_4 מסננים תדרים הגדולים בערך מוחלט מ $\left|\frac{\pi}{3}\right|$ ו $\left|\frac{\pi}{4}\right|$ בהתאמה. נשים לב כי מתקיים $\left|\frac{\pi}{4}\right| > \left|\frac{\pi}{3}\right| > \left|\frac{2\pi}{5}\right|$ וגם $\left|\frac{\pi}{3}\right| < \left|\frac{\pi}{4}\right| < \left|\frac{\pi}{5}\right|$ ולכן המסננים מסננים את שני ההלמים הרחוקים יותר מה0 אך משאירים את השניים הקרובים. מכך נקבל כי התגובה $Y(e^{j\omega})$ תהיה שני ההלמים ב $\omega = \pm\frac{\pi}{5}$.

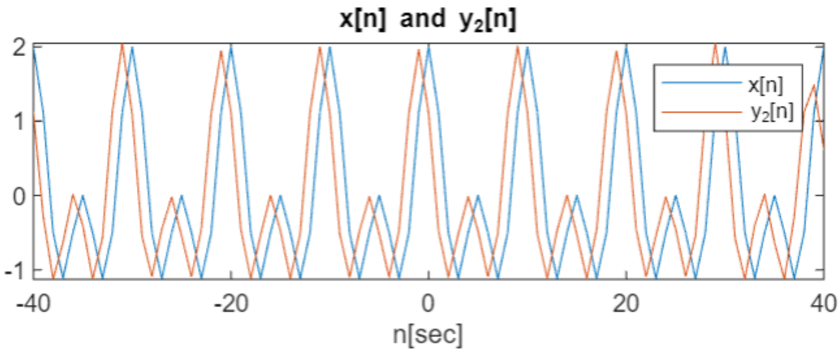
מסנן H_6 מסנן את כל התדרים הגדולים בערך מוחלט מ $\left|\frac{\pi}{6}\right|$, נשים לב כי מתקיים $\left|\frac{\pi}{6}\right| < \left|\frac{2\pi}{5}\right| < \left|\frac{\pi}{5}\right|$ ולכן המסנן מסנן את כל ארבעת ההלמים ונקבל שהתגובה $Y(e^{j\omega})$ תהיה כלום.

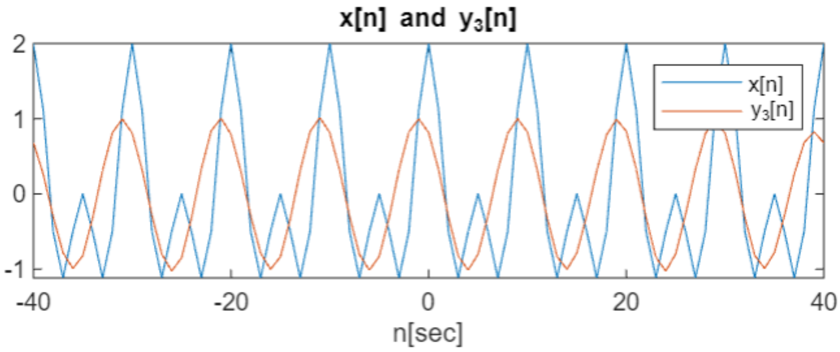
*נציין כי מכיוון והמסננים הם סופיים בזמן אזי הם אינם אידיאלים ולכן ניתן לראות כי הסינון אינו אידיאלי ולדוגמא במסנן H_6 הוא לא מסנן לגמרי את האות.

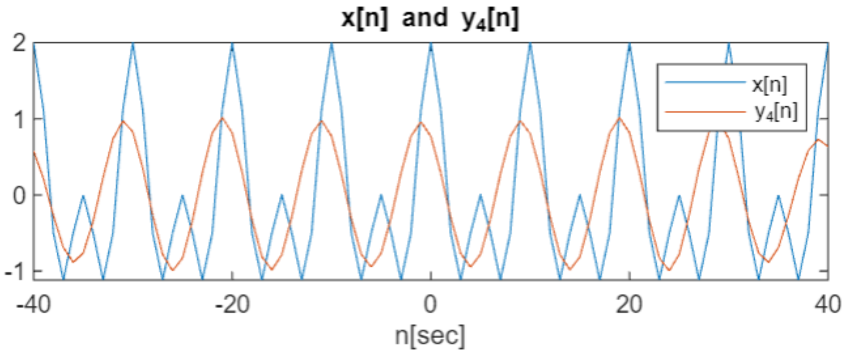
הקוד :

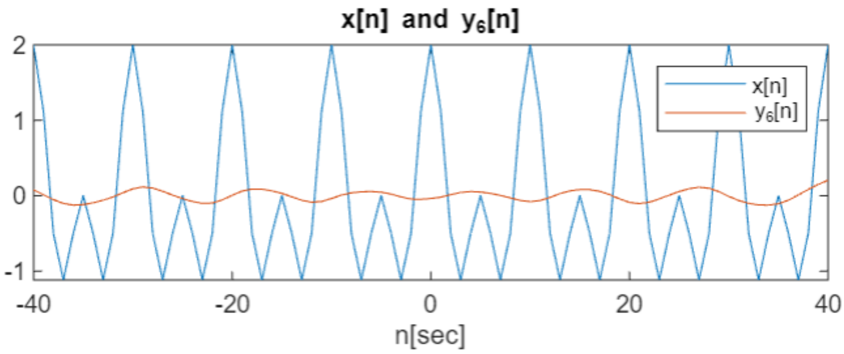
```
clc;
clear all;
clearvars;
load ('LPF.mat');

%Setup
n_max = 10000;
T_s = 1;
num_samples = 2*(n_max/T_s)+1;

%Setup x[n]
n = linspace(-n_max,n_max,num_samples);
x = 2*cos((3*pi/10)*n).*cos((pi/10)*n);

%y[n]=convolution(x[n],hi[n])
y2 = conv(x,h2);
y3 = conv(x,h3);
y4 = conv(x,h4);
y6 = conv(x,h6);

%DTFT of each y[n]
Y2 = fftshift(fft(y2));
Y3 = fftshift(fft(y3));
Y4 = fftshift(fft(y4));
Y6 = fftshift(fft(y6));

%Omega range
w=linspace(-pi,pi,length(Y2));

%Plotting
nexttile
plot(w,abs(Y2));
title('|Y(e^{j\omega})| plot for h2');
xlabel('\omega[rad/sec]');
ylabel('|Y(e^{j\omega})|');

nexttile
plot(w,abs(Y3));
title('|Y(e^{j\omega})| plot for h3');
xlabel('\omega[rad/sec]');
ylabel('|Y(e^{j\omega})|');

nexttile
plot(w,abs(Y4));
title('|Y(e^{j\omega})| plot for h4');
xlabel('\omega[rad/sec]');
ylabel('|Y(e^{j\omega})|');

nexttile
plot(w,abs(Y6));
title('|Y(e^{j\omega})| plot for h6');
xlabel('\omega[rad/sec]');
ylabel('|Y(e^{j\omega})|');
ylim([0 10000])
```

סעיף ה'









בהתאם להסבר מסעיף קודם, אנו רואים כי אכן המסנן הראשון איננו מסנן אף אחד מתדרי האות, המסננים השני והשלישי מסננים את אחד התדרים ולכן אנו רואים רק תדר אחד והתדר האחרון וסנן את שני התדרים של האות קלט ולכן אנו מקבלים תדר 0.

הקוד :

```
clc;
clear all;
clearvars;
load ('LPF.mat');

%Setup
n_max = 40;
T_s = 1;
num_samples = 2*(n_max/T_s)+1;

%Setup x[n]
n = linspace(-n_max, n_max, num_samples);
t_sampled = T_s*n;
x = 2*cos((3*pi/10)*n).*cos((pi/10)*n);

%y[n]=convolution(x[n],hi[n])
y2 = conv(x,h2,'same');
y3 = conv(x,h3,'same');
y4 = conv(x,h4,'same');
y6 = conv(x,h6,'same');

%Plotting
nexttile
plot(t_sampled, x);
hold on;
plot(t_sampled, y4);
legend('x[n]','y_4[n]');
hold off;
title('x[n] and y_4[n]');
xlabel('n[sec]');

nexttile
plot(t_sampled, x);
hold on;
plot(t_sampled, y6);
legend('x[n]','y_6[n]');
hold off;
title('x[n] and y_6[n]');
xlabel('n[sec]');
```

חלק ג

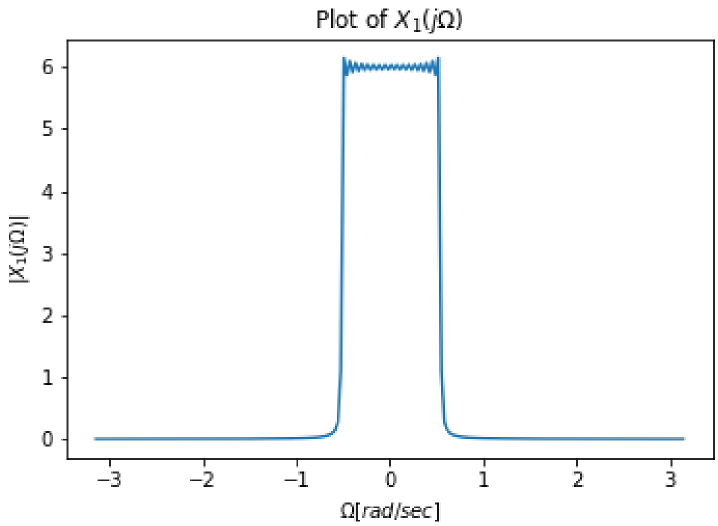
סעיף א'

האות הראשון הינו :

$$x_1(t) = sinc\left(\frac{t}{6}\right) = 6 \cdot \frac{1}{6} sinc\left(\frac{\pi \frac{t}{6}}{\pi}\right)$$

ההתמרה לפי הדף נוסחאות תהיה :

$$\Rightarrow \boldsymbol{X_1(j\Omega)} = \begin{cases} \boldsymbol{6}, & |\boldsymbol{\Omega}| < \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}} \\ \boldsymbol{0}, & |\boldsymbol{\Omega}| \geq \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}} \end{cases}$$

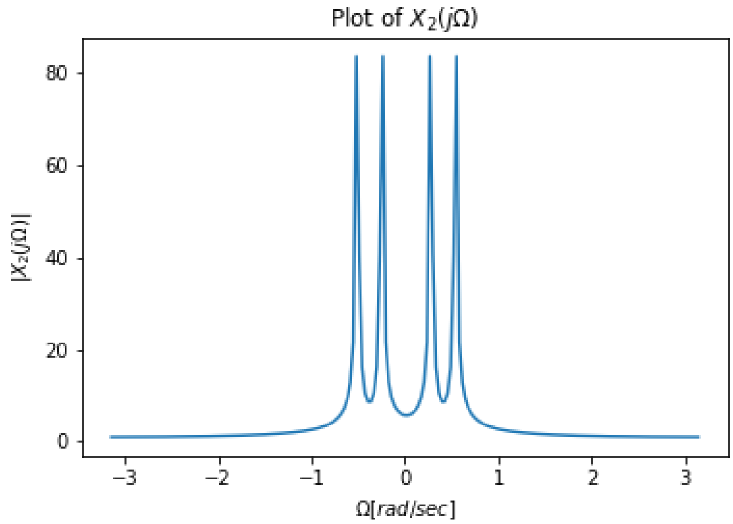


האות השני הינו :

$$x_2(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{j\pi}{12}t} + e^{-\frac{j\pi}{12}t}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{\frac{j\pi}{6}t} - e^{-\frac{j\pi}{6}t}\right)$$

ההתמרה לפי הדף נוסחאות תהיה :

$$\boldsymbol{X_2(j\Omega) = \pi \cdot \left(\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{12}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{12}\right)\right) + \frac{\pi}{j} \cdot \left(\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{6}\right) - \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{6}\right)\right)}$$



הקוד :

```
def Q3_A_FFT():
    t_max = 100;
    t = np.arange(-t_max, t_max)
    omega = np.linspace(-np.pi, np.pi, num=2*t_max)

    x1 = np.sinc(t/6)
    x2 = np.cos((np.pi/12)*t) + np.sin((np.pi/6)*t)

    f1 = fftshift(fft(x1))
    f2 = fftshift(fft(x2))

    plt.figure()
    plt.xlabel('$\Omega[rad/sec]$')
    plt.ylabel('$|X_1(j\Omega$)|')
    plt.title(r'Plot of $X_1(j\Omega$)')
    plt.plot(omega, np.abs(f1))
    plt.savefig('Q3A_FFT1.png')
    plt.show()

    plt.figure()
    plt.xlabel('$\Omega[rad/sec]$')
    plt.ylabel('$|X_2(j\Omega$)|')
    plt.title(r'Plot of $X_2(j\Omega$)')
    plt.plot(omega, np.abs(f2))
    plt.savefig('Q3A_FFT2.png')
    plt.show()
```

סעיף ב'

על מנת למצוא את זמן הדגימה המקסימלי נעזר בקשר $T_{max} = \frac{\pi}{\Omega_{max}}$

- עבור האות הראשון $\Omega_{max} = \frac{\pi}{6}$ ולכן נקבל $T_{max} = 6\ sec$
- עבור האות השני $\Omega_{max} = \frac{\pi}{6}$ ולכן נקבל $T_{max} = 6\ sec$

נשים לב ששני האותות אינם מתאפסים בנקודות הגבול בה $\Omega = \Omega_{max}$ כלומר הדרישה על קצב הדגימה היא אי שוויון חזק – נדרוש שזמן בין דגימות יהיה $T_s < T_{max}$ כדי להימנע מ$aliasing$.

עבור הסעיפים הבאים נבחר זמן דגימה של $T_s = 1\ sec$ אשר מבטיח דגימה ללא $aliasing$.

סעיף ג'

<u>עבור $x_1(t)$:</u>

ראשית נמצא את האות הדגום:

$$x_1(t) = sinc\left(\frac{t}{6}\right) \Rightarrow x_1[n] = x_1(n \cdot T_s) = x_1(n) = \boldsymbol{sinc\left(\frac{n}{6}\right)}$$

לפי הנוסחה לספקטרום של האות הדגום נקבל:

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1\left(j\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T_s}\right)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1\big(j(\omega - 2\pi k)\big)$$

כאשר $X_1(j\Omega)$ הוא הספקטרום של האות המקורי אותו דגמנו וחישבנו בסעיף הקודם. ניתן לראות שספקטרום האות הדגום הוא ההמשכה המחזורית 2π של הספקטרום המקורי.

$$\boldsymbol{X_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 6, & |\omega - 2\pi k| < \frac{\pi}{6}\ k \in \mathbb{Z} \\ 0, & otherwise \end{cases}}$$

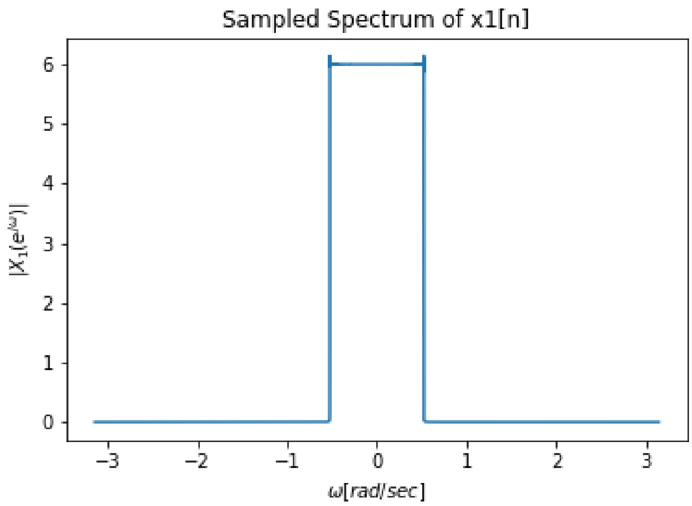
<u>עבור $x_2(t)$:</u>

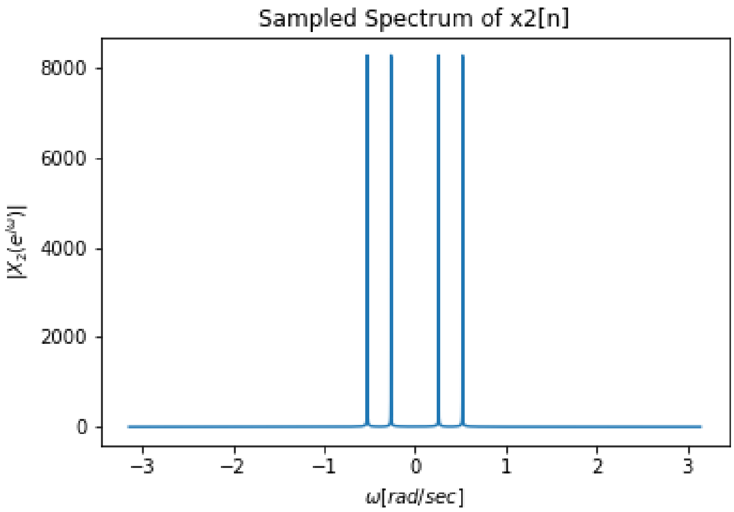
$$x_2(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \Rightarrow x_2[n] = x_2(n \cdot T_s) = x_2(n) = \boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{12}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)}$$

באופן דומה:

$$\boldsymbol{X_2(e^{j\omega}) = \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\delta\left(\omega - \frac{\pi}{12} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{12} - 2\pi k\right)\right) - j\cdot\left(\delta\left(\omega - \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right) - \delta\left(\omega + \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right)\right)}$$

סעיף ד'

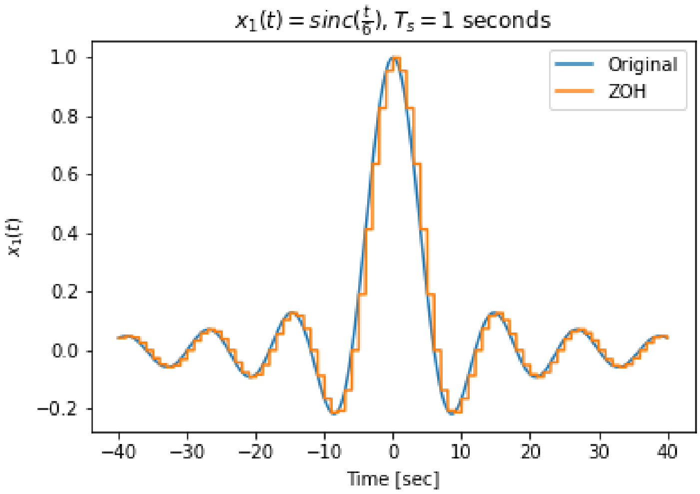


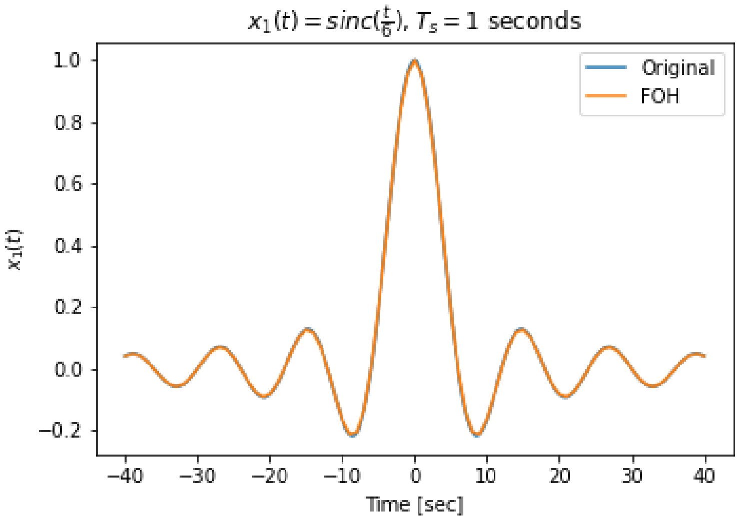


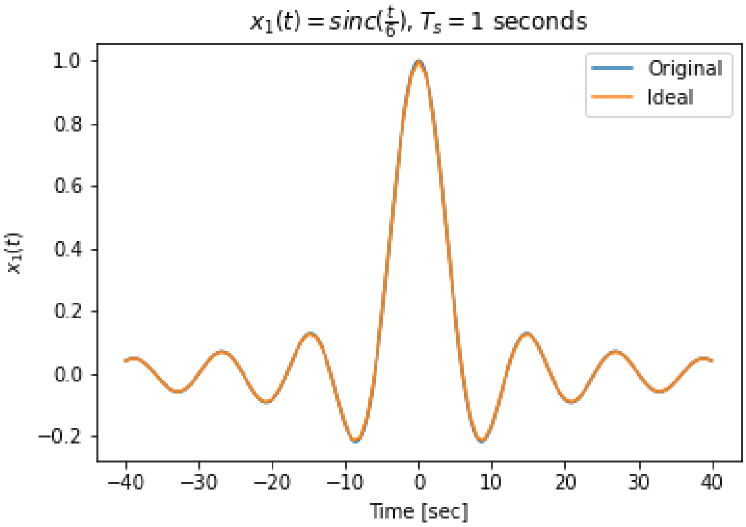
הקוד :

```python
def Q3_D_DTFT(T_s=1):
    n_max = 10000
    n = np.arange(-n_max, n_max)
    t_sampled = n * T_s
    omega = np.linspace(-np.pi, np.pi, num=2*n_max)
    x1 = np.sinc(t_sampled / 6)
    f1 = fftshift(fft(x1))
    plt.figure()
    plt.title('Sampled Spectrum of x1[n]')
    plt.xlabel('$\omega[rad/sec] $')
    plt.ylabel('$|X_1(e^{j\omega})|$')
    plt.plot(omega, np.abs(f1))
    plt.savefig('Q3D_DTFT1_'+str(T_s)+'.png')
    plt.show()

    plt.figure()
    x2 = np.cos((np.pi/12)*t_sampled) + np.sin((np.pi/6)*t_sampled)
    f2 = fftshift(fft(x2))
    plt.title('Sampled Spectrum of x2[n]')
    plt.xlabel('$\omega[rad/sec] $')
    plt.ylabel('$|X_2(e^{j\omega})|$')
    plt.plot(omega, np.abs(f2))
    plt.savefig('Q3D_DTFT2_'+str(T_s)+'.png')
    plt.show()
```

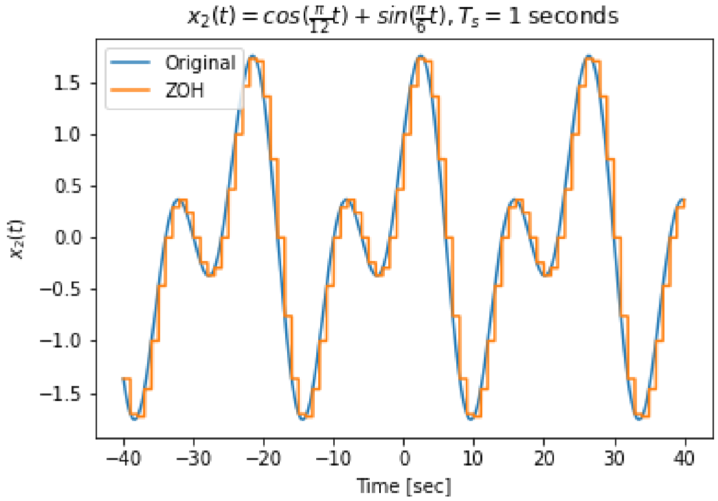
סעיף ה'
עבור האות הראשון:

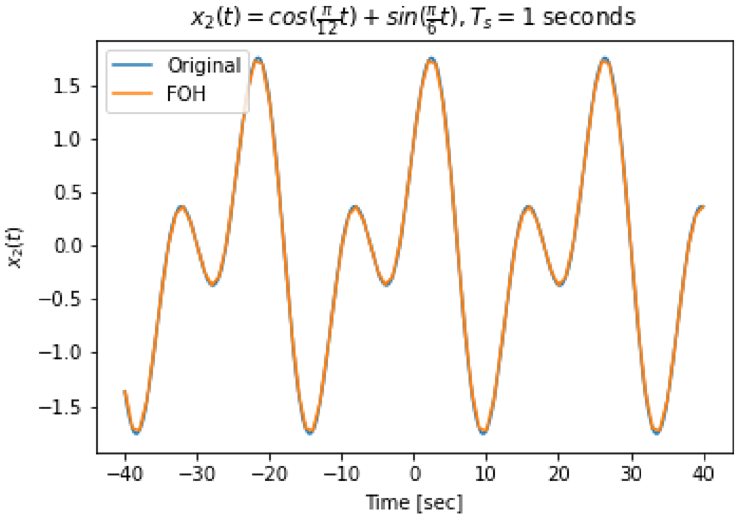


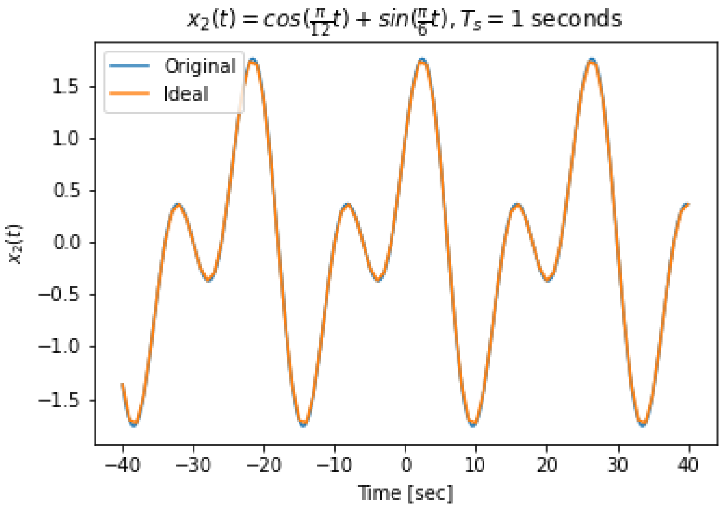




עבור האות השני:







הקוד לשחזורים והצגתם :

```python
def Q3_E_ZOH_FOH(T_s, func, func_name, title, ylabel):
    abs_max_time = 40
    num_of_samples = (2 * abs_max_time) // T_s + 1

    t_sampled = np.linspace(-abs_max_time, abs_max_time, num=num_of_samples)
    t_cont = np.linspace(-abs_max_time, abs_max_time, num=num_of_samples * 100)

    x_original = func(t_cont)

    x_sampled = func(t_sampled)
    zoh = interp1d(t_sampled, x_sampled, kind='previous')
    foh = interp1d(t_sampled, x_sampled)
    ideal = np.convolve(x_sampled, np.sinc(t_sampled / T_s), 'same')

    # Plot ZOH
    plt.figure()
    plt.plot(t_cont, x_original, label="Original")
    plt.plot(t_cont, zoh(t_cont), label="ZOH")
    plt.title(title)
    plt.xlabel("Time [sec]")
    plt.ylabel(ylabel)
    plt.legend()
    plt.savefig('Q3E_ ' + func_name + '_ZOH_ ' + str(T_s) + '.png')
    plt.show()
```

```python
    # Plot FOH
    plt.figure()
    plt.plot(t_cont, x_original, label="Original")
    plt.plot(t_cont, foh(t_cont), label="FOH")
    plt.title(title)
    plt.xlabel("Time [sec]")
    plt.ylabel(ylabel)
    plt.legend()
    plt.savefig('Q3E_ ' + func_name + '_FOH_ ' + str(T_s) + '.png')
    plt.show()

    # Plot Ideal
    plt.figure()
    plt.plot(t_cont, x_original, label="Original")
    plt.plot(t_sampled, ideal, label="Ideal")
    plt.title(title)
    plt.xlabel("Time [sec]")
    plt.ylabel(ylabel)
    plt.legend()
    plt.savefig('Q3E_ ' + func_name + '_Ideal_ ' + str(T_s) + '.png')
    plt.show()
```

```python
# ~~~~~~~~~~~Run codes~~~~~~~~~~~
def RunQ3_E(T_s=1):
    Q3_E_ZOH_FOH(T_s, lambda t: np.sinc(t / 6), 'X1',
                 "$x_1(t)=sinc(\\frac{t}{6}),  T_s = $" + str(T_s) + " seconds", "$x_1(t)$")
    Q3_E_ZOH_FOH(T_s, lambda t: np.cos((np.pi / 12) * t) + np.sin((np.pi / 6) * t), 'X2',
                 "$x_2(t)=cos(\\frac{\pi}{12}t) + sin(\\frac{\pi}{6}t),  T_s = $" + str(T_s) + " seconds", "$x_2(t)$")
```

סעיף ו'

בסעיף זה זמן הדגימה הוא $T_s = 1.5 \cdot T_{max} = 9\ sec$

חזרה על סעיף ג' עבור $T_s = 9$

<u>עבור $x_1(t)$:</u>

ראשית נמצא את האות הדגום:

$$x_1(t) = sinc\left(\frac{t}{6}\right) \Rightarrow x_1[n] = x_1(n \cdot T_s) = x_1(9n) = sinc\left(\frac{9n}{6}\right) = \boldsymbol{sinc\left(\frac{3n}{2}\right)}$$

לפי הנוסחה לספקטרום של האות הדגום נקבל:

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1\left(j\left(\frac{\omega - 2\pi k}{T_s}\right)\right) = \frac{1}{9}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1\left(j\left(\frac{\omega - 2\pi k}{9}\right)\right)$$

כאשר $X_1(j\Omega)$ הוא הספקטרום של האות המקורי אותו דגמנו וחישבנו בסעיף הקודם. ניתן לראות שספקטרום האות הדגום הוא ההמשכה המחזורית 2π של הספקטרום המקורי.

$$X_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{6}{9}, & \left|\frac{\omega - 2\pi k}{9}\right| < \frac{\pi}{6}\ k \in \mathbb{Z} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$\boldsymbol{X_1(e^{j\omega})} = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{2}{3}}, & \boldsymbol{|\omega - 2\pi k|} < \boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z} \\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{otherwise} \end{cases}$$

<u>עבור $x_2(t)$:</u>

$$x_2(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

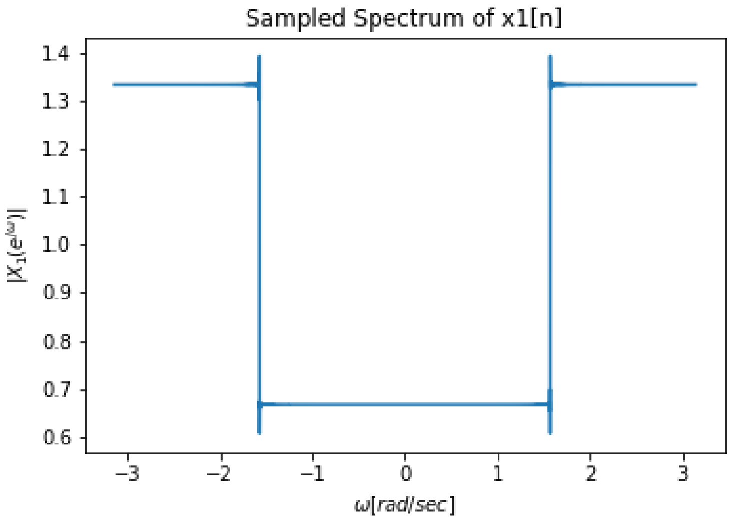
$$\Rightarrow x_2[n] = x_2(n \cdot T_s) = x_2(9n) = \cos\left(\frac{9\pi}{12}n\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{6}n\right) = \boldsymbol{\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}n\right)}$$

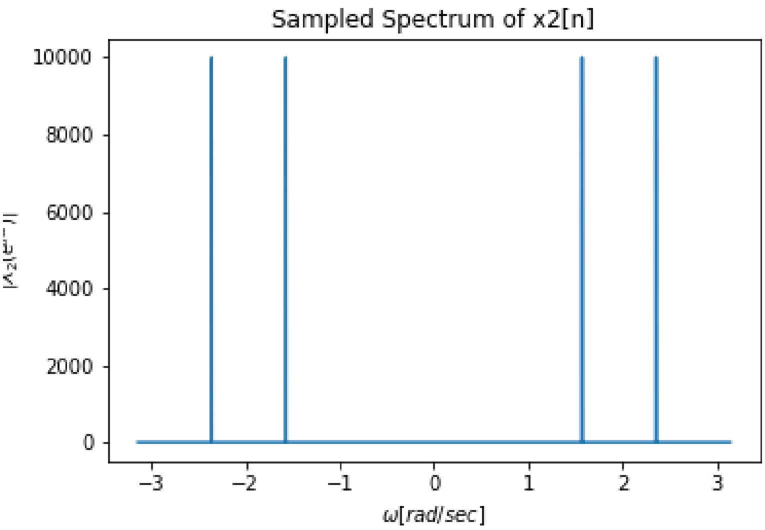
באופן דומה:

$$\boldsymbol{X_2(e^{j\omega}) = \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{4} - 2\pi k\right) + \delta\left(\omega + \frac{3\pi}{4} - 2\pi k\right)\right) - j\cdot\left(\delta\left(\omega - \frac{3\pi}{2} - 2\pi k\right) - \delta\left(\omega + \frac{3\pi}{2} - 2\pi k\right)\right)}$$

בדומה לסעיף ג' קיבלנו ארבעה הלמים, אך מיקומיהם השתנו.

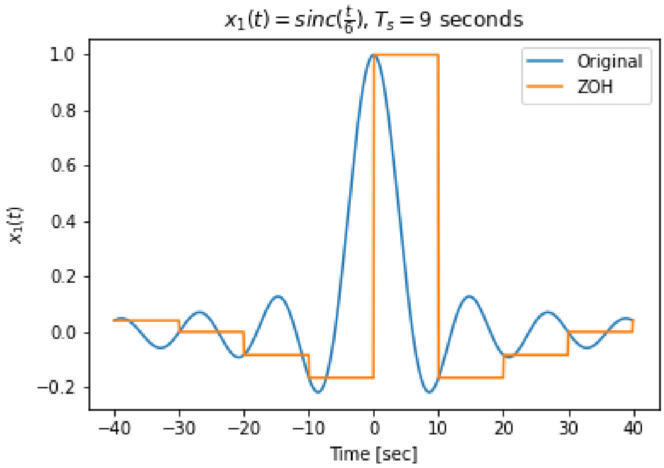
חזרה על סעיף ד' עבור $T_s = 9$

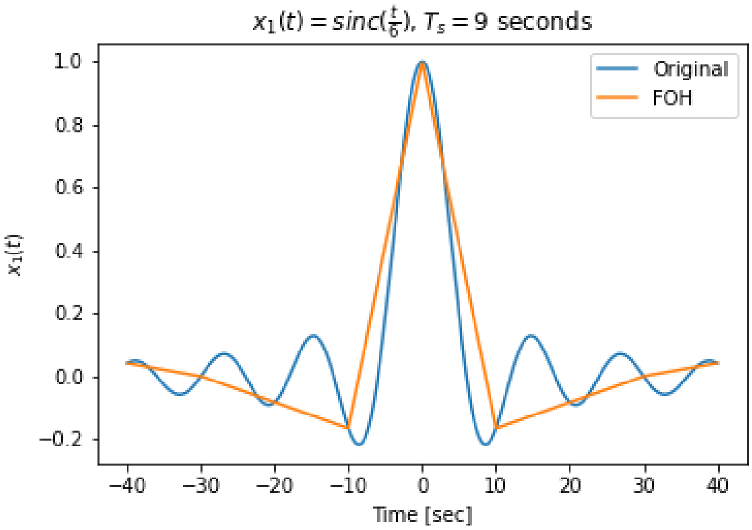


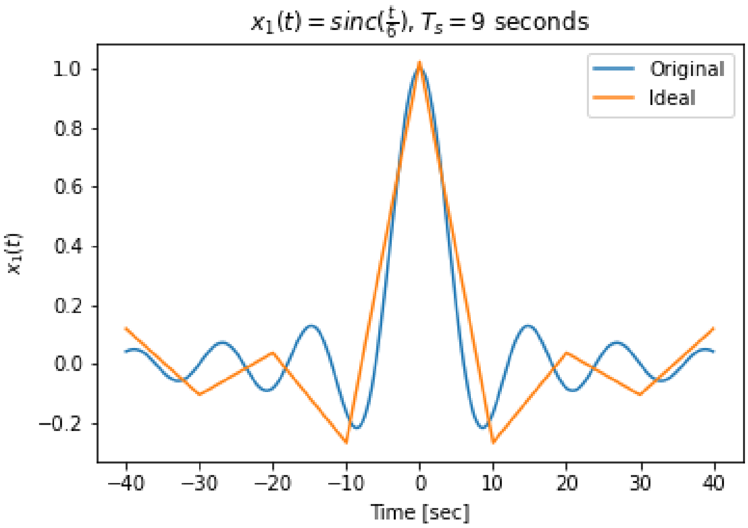


הקוד הינו אותו קוד מסעיף ד' רק עם הקלט $T_s = 9$. (הסבר בסעיף ז').

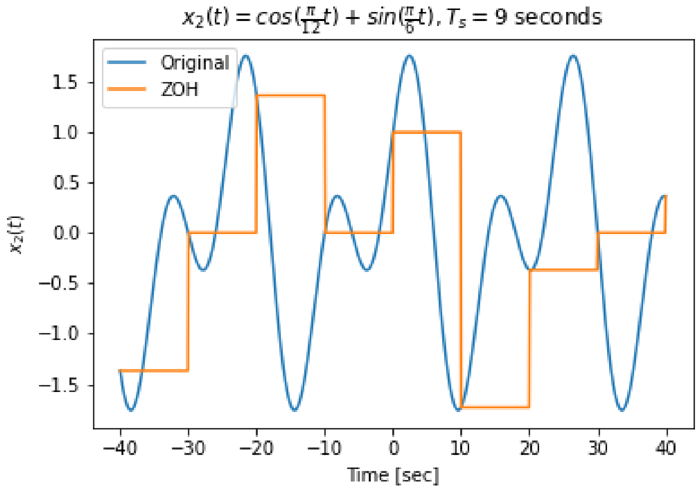
חזרה על סעיף ה' עבור $T_s = 9$
עבור האות הראשון:

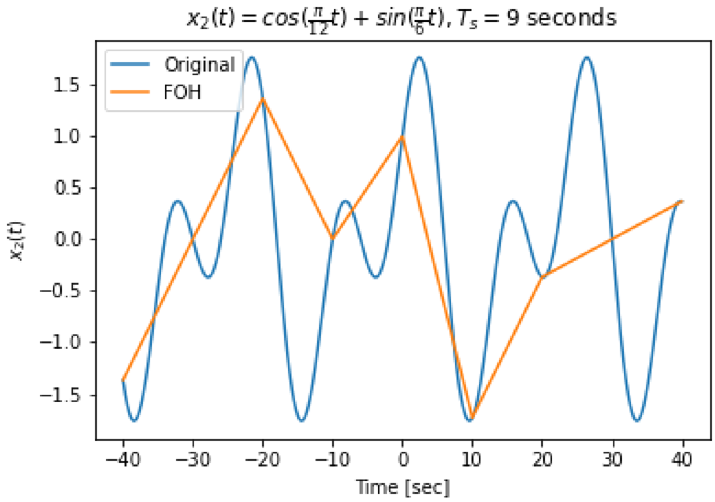


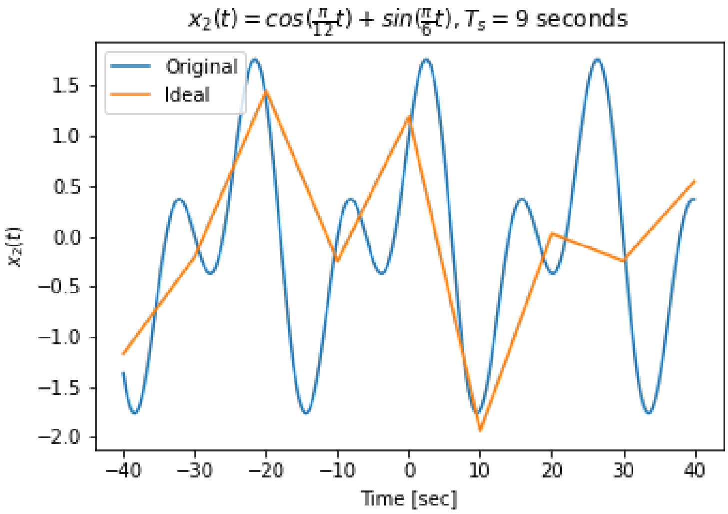




עבור האות השני:







הקוד הינו אותו קוד מסעיף ד' רק עם הקלט $T_s = 9$.

סעיף ז'

נשים לב כי קצב הדגימה המקסימלי העומד בתנאי נייקוויסט הינו $T_{max} = 6\ sec$. בסעיפי ג'-ה' חישבנו עם קצב דגימה של $T_s = 1\ sec$ העומד בתנאי ואילו בסעיף ו' חישבנו עם קצב דגימה של $T_s = 9\ sec$ אשר אינו עומד בתנאי.

מחישוב אנליטי של האות בתדר ראינו כי האות יקטן פי 9 בציר האנכי ויימתח פי 9 בציר האופקי. בנוסף, מכיוון ואנו דוגמים בקצב דגימה הגדול מתדר נייקוויסט אזי אנו מצפים לראות $aliasing$.

מהסתכלות על האות הראשון בתחום התדר ניתן לראות בברור כי ישנו טווח מסביב ל0 אשר קטן פי 9 מהגרף המקורי אך בנק' מסוימת מתחילה חפיפה עם העותק הבא (בגלל שציר התדר נמתח פי 9 העותקים חופפים) של האות ולכן גודל האות גדל עוד פי 2 כמצופה.

מהסתכלות על האות השני בתחום התדר ניתן לראות כי מיקומי ההלמים השתנו כתוצאה ממתיחת התדר. בדגימה שעומדת בתנאי נייקוויסט קיבלנו הלמים ב$\pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{12}$ מה ששיקף בצורה מדויקת את התדרים באות המקורי, ואילו כאשר דגמנו בקצב שאינו עומד בתנאי נייקוויסט קיבלנו הלמים ב- $\pm\frac{3\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{2}$ אשר נובעים מ$aliasing$ ואינם מייצגים את האות המקורי.

מהתבוננות בגרפי השחזורים ניתן לראות בברור כי השחזורים עבור $T_s = 9$ פחות טובים, זה נובע מכך שיש לנו פחות מדידות והאות מעוות.