



IEL – protokol k projektu

Ronald Bednár
xbednar00

17. decembra 2023

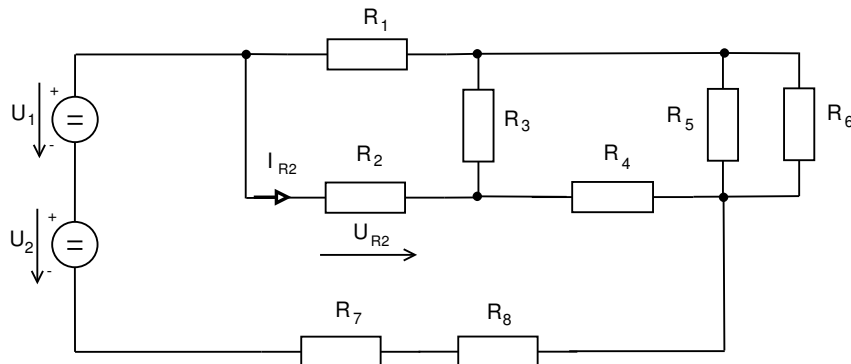
Obsah

| | | |
|---|------------------|----|
| 1 | Příklad 1 | 2 |
| 2 | Příklad 2 | 7 |
| 3 | Příklad 3 | 11 |
| 4 | Příklad 4 | 13 |
| 5 | Příklad 5 | 15 |
| 6 | Shrnutí výsledků | 17 |

Příklad 1

Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

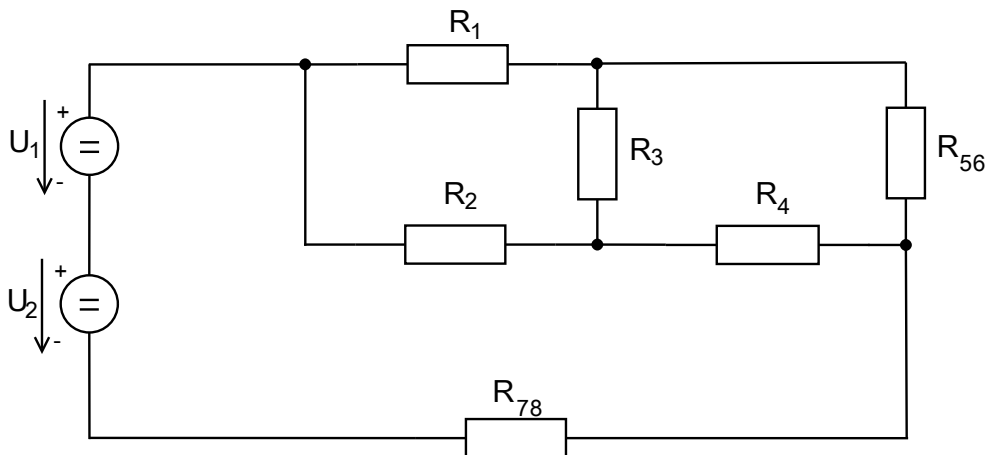
| sk. | U_1 [V] | U_2 [V] | R_1 [Ω] | R_2 [Ω] | R_3 [Ω] | R_4 [Ω] | R_5 [Ω] | R_6 [Ω] | R_7 [Ω] | R_8 [Ω] |
|-----|-----------|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| D | 105 | 85 | 420 | 980 | 330 | 280 | 310 | 710 | 240 | 200 |



Riešenie

1. krok

Spojíme paralelne zapojené rezistory R_5 a R_6 . Taktiež spojíme sériovo zapojené rezistory R_7 a R_8 .

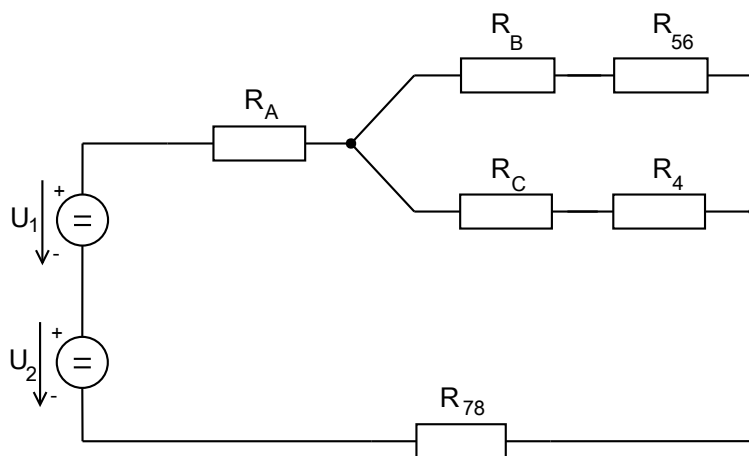


$$R_{56} = \frac{R_5 * R_6}{R_5 + R_6} \doteq 215,7843\Omega$$

$$R_{78} = R_7 + R_8 = 440\Omega$$

2. krok

Použijeme transfiguráciu z trojuholníka na hviezdu medzi rezistormi R_1 , R_2 a R_3 .



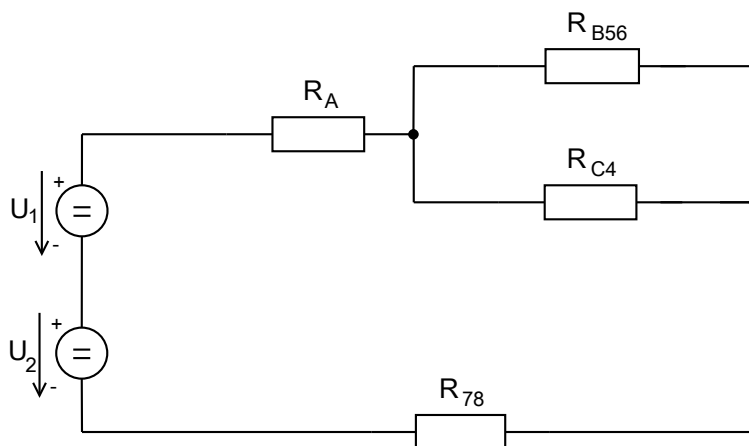
$$R_A = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \doteq 237,9191\Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 * R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \doteq 80,1156\Omega$$

$$R_C = \frac{R_2 * R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \doteq 186,9364\Omega$$

3. krok

Spojíme dvojice sériovo zapojených rezistorov R_B s R_{56} a R_C s R_4 .

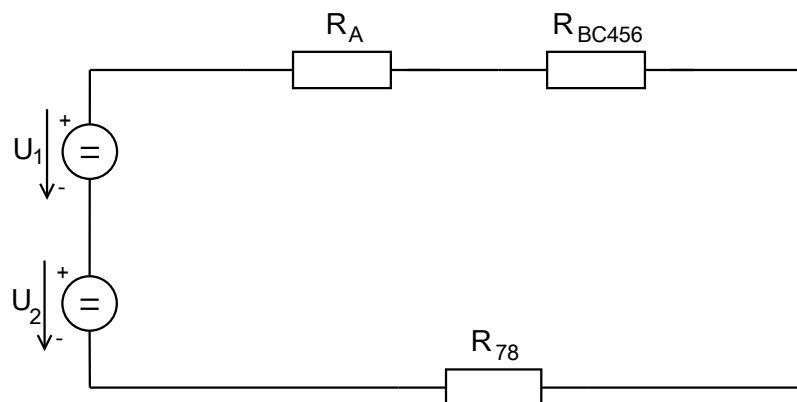


$$R_{B56} = R_B + R_{56} \doteq 295,8999\Omega$$

$$R_{C4} = R_C + R_4 \doteq 466,9364\Omega$$

4. krok

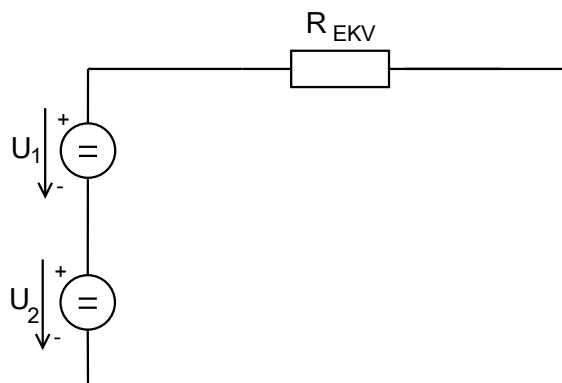
Spojíme paralelne zapojené rezistory R_{B56} a R_{C4} .



$$R_{BC456} = \frac{R_{B56} * R_{C4}}{R_{B56} + R_{C4}} \doteq 181,1220\Omega$$

5. krok

Spojením 3 rezistorov R_A , R_{BC456} a R_{78} dostaneme výsledný odpor R_{EKV} . Následne dopočítame I .

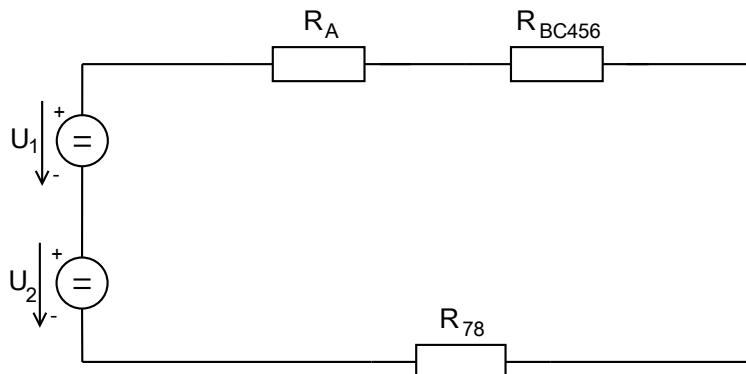


$$R_{EKV} = R_A + R_{BC456} + R_{78} \doteq 859,0411\Omega$$

$$I = \frac{U_1 + U_2}{R_{EKV}} \doteq 0,2212A$$

6. krok

Teraz budeme obvod rozkladať opačným smerom. Keďže poznáme prúd I , tak môžeme vypočítať napätie na rezistoroch R_A a R_{BC456} .

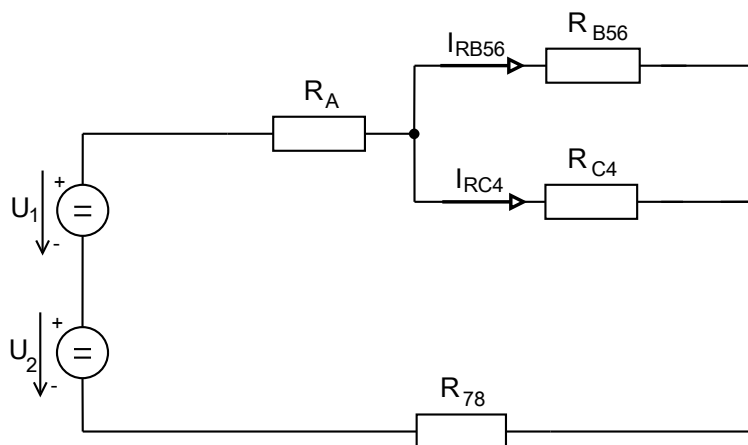


$$U_{R_{BC456}} = I * R_{BC456} \doteq 40,06V$$

$$U_{R_A} = I * R_A \doteq 52,6222V$$

7. krok

Napätie na rezistoroch R_{B56} a R_{C4} sa bude rovnáť, pretože sú zapojené paralelne. To znamená, že vieme dopočítať $I_{R_{B56}}$ a $I_{R_{C4}}$.



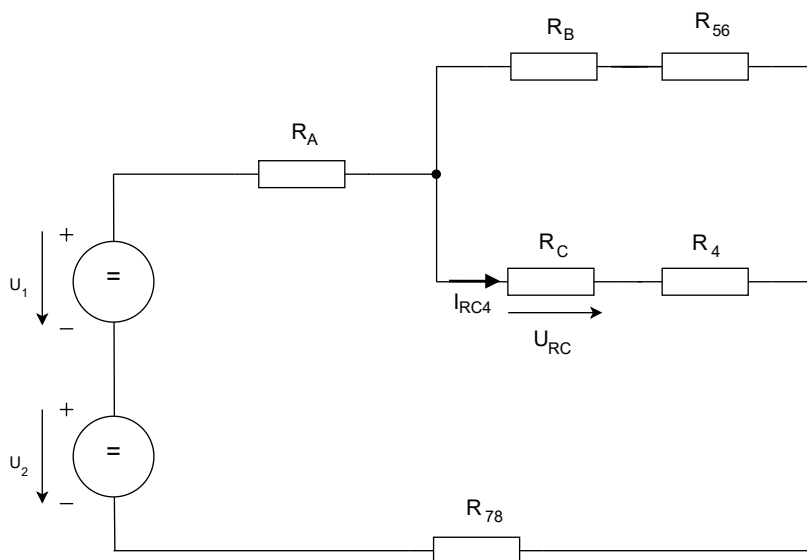
$$U_{R_{BC456}} = U_{R_{B56}} = U_{R_{C4}}$$

$$I_{R_{B56}} = \frac{U_{R_{BC456}}}{R_{B56}} \doteq 0,1354A$$

$$I_{R_{C4}} = \frac{U_{R_{BC456}}}{R_{C4}} \doteq 0,0858A$$

8. krok

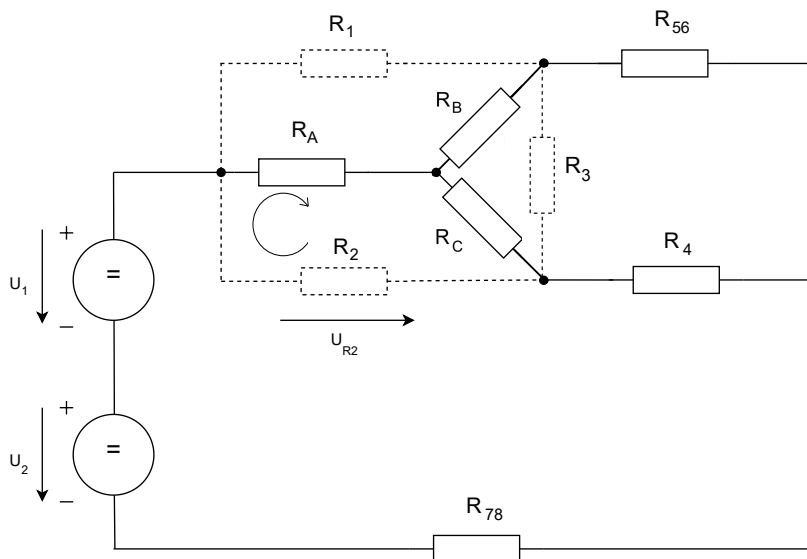
Kedže teraz už poznáme prúd I_{RC4} , tak môžeme dopočítať napätie na rezistore R_C .



$$U_{RC} = I_{RC4} * R_C \doteq 16,0379V$$

9. krok

Na záver vypočítame napätie U_{R2} a prúd I_{R2} .



$$U_{RA} + U_{RC} - U_{R2} = 0$$

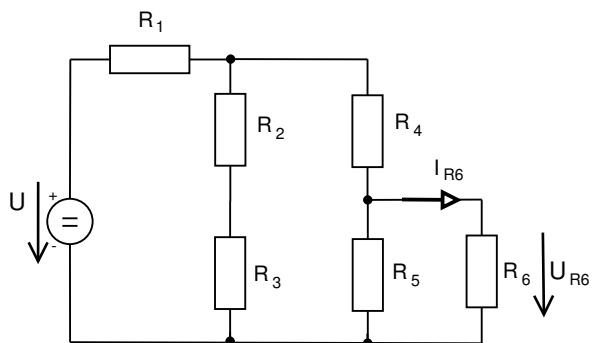
$$U_{R2} = U_{RA} + U_{RC} \doteq 68,6601V$$

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} \doteq 0,0701A$$

Příklad 2

Stanovte napětí U_{R6} a proud I_{R6} . Použijte metodu Théveninovy věty.

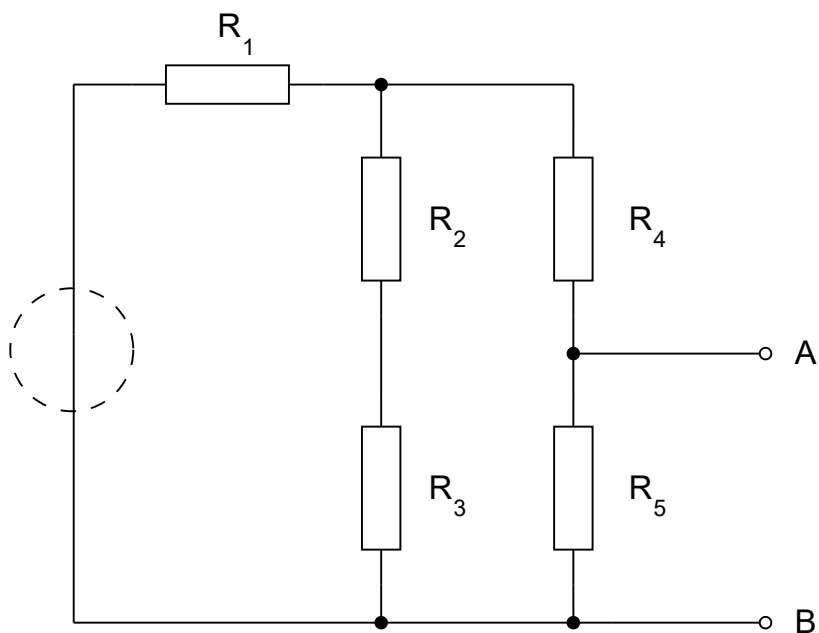
| sk. | U [V] | R_1 [Ω] | R_2 [Ω] | R_3 [Ω] | R_4 [Ω] | R_5 [Ω] | R_6 [Ω] |
|-----|---------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| C | 200 | 70 | 220 | 630 | 240 | 450 | 200 |



Riešenie

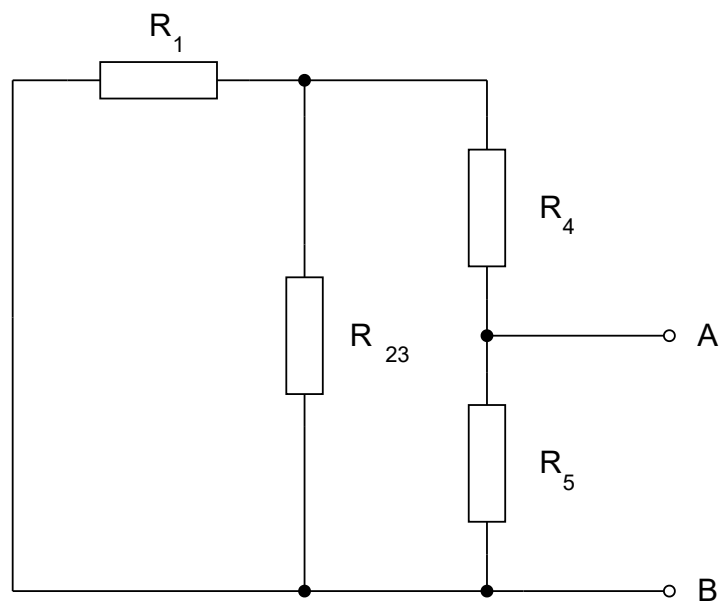
1. krok

Skratujeme napäťový napájací zdroj a odstránime záťaž R_6 .



2. krok

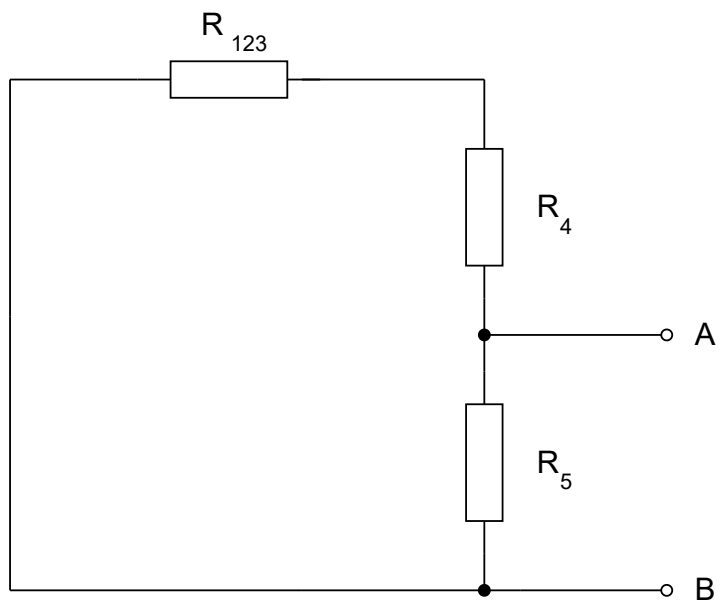
Spojíme sériovo zapojené rezistory R_2 a R_3 .



$$R_{23} = R_2 + R_3 = 850\Omega$$

3. krok

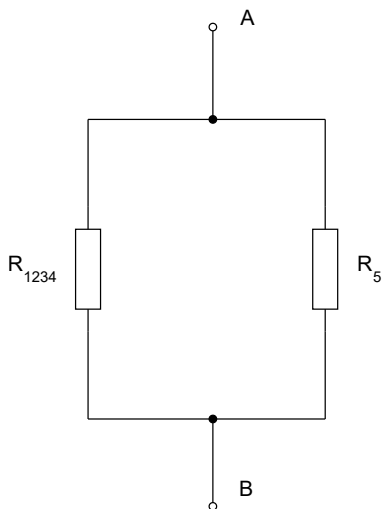
Spojíme paralelne zapojené rezistoroy R_1 a R_{23} .



$$R_{123} = \frac{R_1 * R_{23}}{R_1 + R_{23}} \doteq 64,6739\Omega$$

4. krok

Spojíme sériovo zapojené rezistory R_{123} a R_4 . Následne vypočítame R_i .

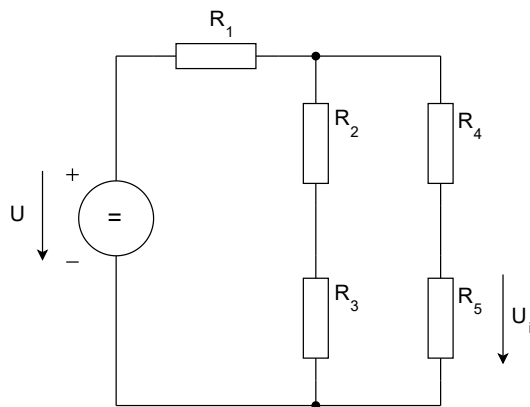


$$R_{1234} = R_{123} + R_4 \doteq 304,6739\Omega$$

$$R_i = \frac{R_{1234} * R_5}{R_{1234} + R_5} \doteq 161,6722\Omega$$

5. krok

Vrátime sa k pôvodnej schéme a vypočítame U_i .



$$R_{EKV} = R_1 + \frac{R_{23} * R_{45}}{R_{23} + R_{45}} = R_1 + \frac{(R_2 + R_3) * (R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} \doteq 450,8442\Omega$$

$$I = \frac{U}{R_{EKV}} \doteq 0,4436A$$

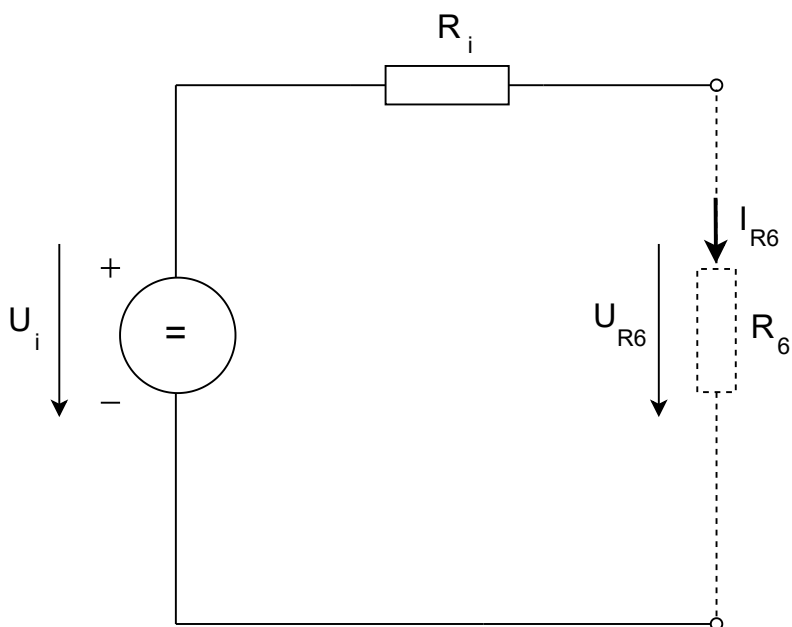
$$U_{R_1} + U_{R_{45}} - U = 0 \implies U_{R_{45}} = U - U_{R_1} = U - I * R_1 \doteq 168,9471V$$

$$I_{R_{45}} = \frac{U_{R_{45}}}{R_{45}} \doteq 0,2449A$$

$$U_i = U_{R_5} = I_{R_{45}} * R_5 \doteq 110,1928V$$

6. krok

V náhradnom obvode dopočítame U_{R6} a I_{R6} .



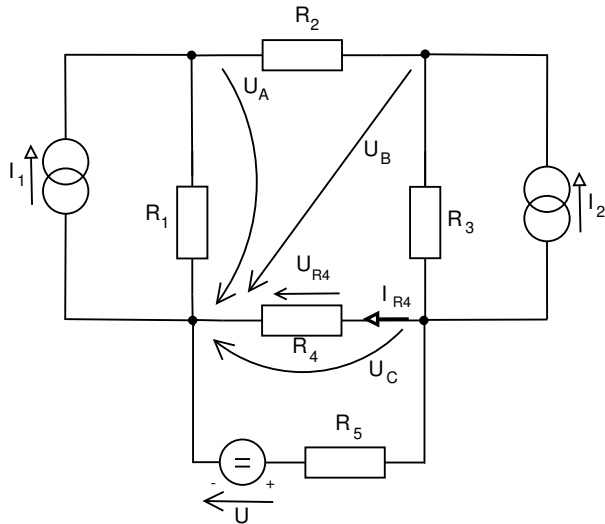
$$I_{R6} = \frac{U_i}{R_i + R_6} \doteq 0,2887A$$

$$U_{R6} = I_{R6} * R_6 \doteq 57,7369V$$

Příklad 3

Stanovte napětí U_{R4} a proud I_{R4} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

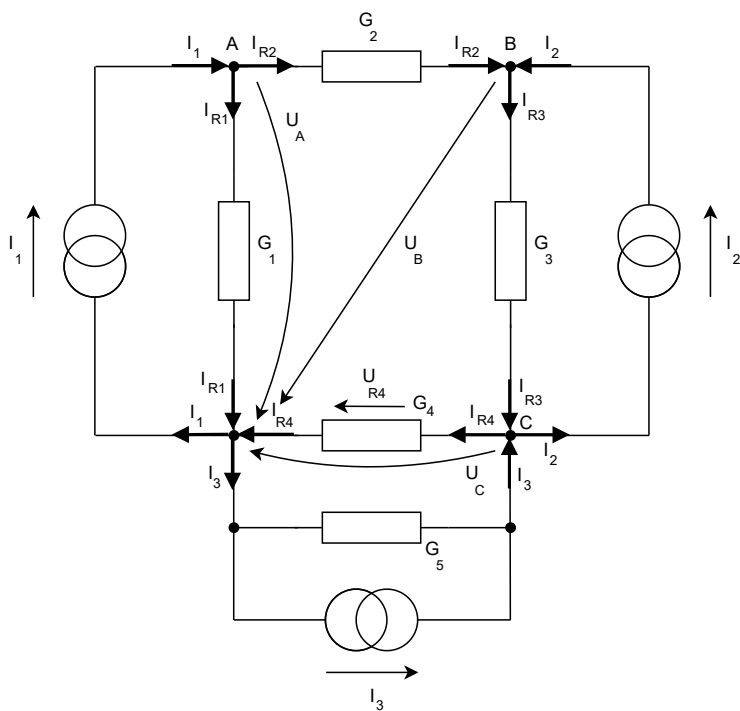
| sk. | U [V] | I_1 [A] | I_2 [A] | R_1 [Ω] | R_2 [Ω] | R_3 [Ω] | R_4 [Ω] | R_5 [Ω] |
|-----|---------|-----------|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| A | 120 | 0.9 | 0.7 | 53 | 49 | 65 | 39 | 32 |



Riešenie

1. krok

Napäťový napájací zdroj transformujeme na prúdový, dopočítame vodivosti a vyznačíme všetky prúdy.



$$I_3 = \frac{U}{R_5} = 3,75A$$

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{53}S$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{49}S$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{65}S$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{39}S$$

$$G_5 = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{32}S$$

2. krok

Vytvoríme rovnice napätia pre jednotlivé uzly.

$$A : U_A(G_1 + G_2) + U_B(-G_2) + U_C(0) - I_1 = 0$$

$$B : U_A(-G_2) + U_B(G_2 + G_3) + U_C(-G_3) - I_2 = 0$$

$$C : U_A(0) + U_B(-G_3) + U_C(G_3 + G_4 + G_5) + I_2 - I_3 = 0$$

Rovnice prevedieme na maticový tvar.

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 + G_5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ -I_2 + I_3 \end{pmatrix}$$

Vyriešime pomocou Sarrusovho a Cramerovho pravidla a dostaneme výsledné napätia:

$$U_A = 65,9954V \quad U_B = 82,9100V \quad U_C \doteq 59,8478V$$

Na záver si vyjadríme U_{R_4} a dopočítame I_{R_4} .

$$U_{R_4} = U_C \doteq \mathbf{59,8478V} \quad I_{R_4} = \frac{U_{R_4}}{R_4} \doteq \mathbf{1,5346A}$$

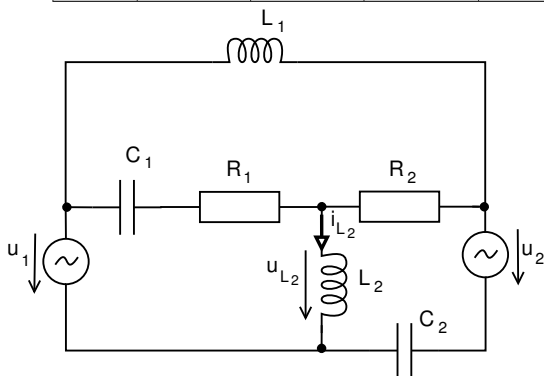
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

| sk. | U_1 [V] | U_2 [V] | R_1 [Ω] | R_2 [Ω] | L_1 [mH] | L_2 [mH] | C_1 [μ F] | C_2 [μ F] | f [Hz] |
|-----|-----------|-----------|--------------------|--------------------|------------|------------|------------------|------------------|----------|
| D | 4 | 5 | 13 | 15 | 180 | 90 | 210 | 75 | 85 |



Riešenie

1. krok

Vyjadríme uhlovú frekvenciu:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 85 = 170\pi \text{ rad/s}$$

Prevedieme hodnoty na vyhovujúce jednotky:

$$L_1 = 180 \text{ mH} = 0,18 \text{ H}$$

$$C_1 = 210 \mu\text{F} = 210 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$L_2 = 90 \text{ mH} = 0,09 \text{ H}$$

$$C_2 = 75 \mu\text{F} = 75 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

Vypočítame impedancie jednotlivých cievok a kondenzátorov:

$$Z_{L1} = i\omega L_1 \doteq 96,1327i\Omega$$

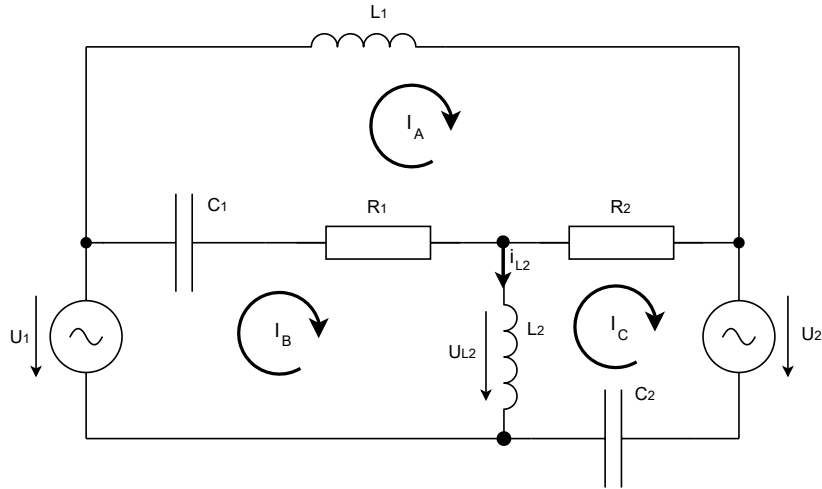
$$Z_{C1} = -\frac{i}{\omega C_1} \doteq -8,9162i\Omega$$

$$Z_{L2} = i\omega L_2 \doteq 48,0664i\Omega$$

$$Z_{C2} = -\frac{i}{\omega C_2} \doteq -24,9655i\Omega$$

2. krok

Zostavíme rovnice pre jednotlivé slučky.



$$I_A : I_A(Z_{L1} + R_1 + R_2 + Z_{C1}) + I_B(-Z_{C1} - R_1) + I_C(-R_2) = 0$$

$$I_B : I_A(-Z_{C1} - R_1) + I_B(Z_{C1} + R_1 + Z_{L2}) + I_C(-Z_{L2}) = u_1$$

$$I_C : I_A(-R_2) + I_B(-Z_{L2}) + I_C(R_2 + Z_{C2} + Z_{L2}) = -u_2$$

Rovnice prevedieme na maticový tvar.

$$\begin{pmatrix} Z_{L1} + R_1 + R_2 + Z_{C1} & -Z_{C1} - R_1 & -R_2 \\ -Z_{C1} - R_1 & R_1 + Z_{L2} + Z_{C1} & -Z_{L2} \\ -R_2 & -Z_{L2} & R_2 + Z_{C2} + Z_{L2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}$$

Maticu vyriešime pomocou Cramerovho pravidla (s výpočtom determinantu Sarrusovým pravidlom).
Výsledné hodnoty prúdov:

$$I_A \doteq -0,0119 + 0,0157iA$$

$$I_B \doteq -0,0206 - 0,0837iA$$

$$I_C \doteq -0,0458 + 0,0203iA$$

Vypočítame $|U_{L2}|$ a φ_{L2} .

$$I_{L2} = I_B - I_C \doteq 0,0253 - 0,1040iA$$

$$u_{L2} = Z_{L2} * I_{L2} \doteq 4,9986 + 1,2141iV$$

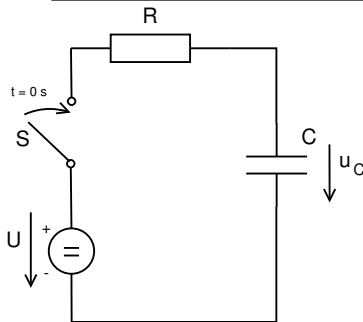
$$U_{L2} = \sqrt{\text{Re}(u_{L2})^2 + \text{Im}(u_{L2})^2} \doteq 5,1439V$$

$$\varphi_{L2} = \arctan\left(\frac{\text{imag}(u_{L2})}{\text{real}(u_{L2})}\right) \doteq \arctan\left(\frac{1,2141}{4,9986}\right) \doteq 13,6524^\circ = 13^\circ 39'$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $u_C = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

| sk. | U [V] | C [F] | R [Ω] | $u_C(0)$ [V] |
|-----|---------|---------|------------------|--------------|
| C | 35 | 5 | 25 | 15 |



1. krok

Zostavíme rovnice vyplývající z obvodu. 1. $i = \frac{u_R}{R}$

2. $u_R + u_C - U = 0$

3. $u_C' = \frac{i}{C}$

Vyjadríme pomocou nich diferenciálnu rovnicu.

$$u_C' = \frac{U_R}{RC}$$

$$u_C' = \frac{U - u_C}{RC} \implies u_C' + \frac{u_C}{RC} = \frac{U}{RC}$$

2. krok

Zostavíme charakteristickú rovnicu.

$$(\lambda = u_C', 1 = u_C')$$

$$\lambda + \frac{1}{RC} = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{RC}$$

3. krok

Dosadíme λ do očekávaného riešenia a túto rovnicu zderivujeme.

$$u_C(t) = K(t) * e^{\lambda t} = K(t) * e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_C'(t) = K'(t) * e^{-\frac{t}{RC}} + K(t) * \left(-\frac{1}{RC}\right) * e^{-\frac{t}{RC}}$$

4. krok

Dosadíme u_C a u_C' do diferenciálnej rovnice.

$$K'(t) * e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{RC}$$

$$K'(t) = \frac{U}{RC} * e^{\frac{t}{RC}}$$

$$K(t) = U * e^{\frac{t}{RC}} + k$$

$$u_c(t) = (U + k * e^{-\frac{t}{RC}})$$

5. krok

Dosadíme $u_c(0) = u_cp$

$$u_cp = U + k * e^0 \Rightarrow k = u_cp - U \Rightarrow u_c(t) = U + (u_cp - U) * e^{-\frac{t}{RC}}$$

Shrnutí výsledků

| Příklad | Skupina | Výsledky |
|---------|---------|---|
| 1 | D | $U_{R2} = 68,6601V$ $I_{R2} = 0,0701A$ |
| 2 | C | $U_{R6} = 57,7369V$ $I_{R6} = 0,2887A$ |
| 3 | A | $U_{R4} = 59,8478V$ $I_{R4} = 1,5346A$ |
| 4 | D | $ U_{L2} = 5,1439V$ $\varphi_{L2} = 13^{\circ}39'$ |
| 5 | C | $u_C =$ |