Ecuaciones Diferenciales

• ED Exactas

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Es exacta si se cumple criterio de exactitud:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

- Métodos de solución.

① Método normal con constante.

1) Escribir la ED de la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ y comprobar criterio de exactitud: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

2) Obtener la antiderivada de $M(x,y)$ ^ $N(x,y)$ y agregar una cte. arbitraria en términos de la variable no utilizada.

$$M(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \longrightarrow f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + C(y)$$

$$N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \longrightarrow f(x,y) = \int N(x,y)\,dy + C(x)$$

3) Derivar la función encontrada con respecto a la variable no utilizada en la integración e igualarlo ya sea a $M(x,y)$ v $N(x,y)$ según sea el caso para encontrar el valor de la cte. arbitraria.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

4) Sustituir la constante encontrada en la función del paso ② p/formar la solución general la cual es de la forma $f(x,y)=C$

② Método normal sin constante

1) Escribir la E.D de la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ y comprobar criterio de exactitud.

2) Encontrar $f(x,y)$ usando $M(x,y)$ sin agregar constante.
$$f(x,y)=\int M(x,y)\,dx$$

3) Encontrar $f(x,y)$ usando $N(x,y)$ sin agregar cte.
$$f(x,y)=\int N(x,y)\,dy$$

4) Comparar las dos funciones encontradas y los términos iguales colocarlos solo una vez, y los diferentes, los cuales tienen que ser en función de una sola variable agregarlos a la S.G. $f(x,y)=C$

• ED Separables

① En forma de diferenciales

$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$$

- Método de solución

1) Escribir la ED en forma de diferenciales.

2) Encontrar el factor integrante para separar las funciones con su respectivo diferencial.

$$F.I = \frac{1}{g_1(y) f_2(x)}$$

3) Multiplicar el F.I por la E.D para separar las funciones con su respectivo diferencial.

$$\frac{1}{g_1(y) f_2(x)} \left[f_1(x) g_1(y) dx + f_2(x) g_2(y) dy = 0 \right]$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0$$

4) Integrar ambos lados

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = C$$

5) Transformar S.G aplicando propiedades de logaritmos.

2 En forma de derivadas.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x) h(y) \rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x) dx.$$

Se soluciona integrando ambos lados.

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + C$$

- ED Homogéneas

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Es homogénea si todos los términos de $M(x,y) \wedge N(x,y)$ son del mismo grado absoluto.

- Métodos de solución

① Sustitución $y = ux$

$N(x,y)$ es más sencillo que $M(x,y)$

1) Realizar la sustitución $y=ux$ y derivar "y" ∧ "u" con respecto a "x".

$$y = ux$$
$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \rightarrow \text{Ec. ①}$$

V.I → x
V.D → y, u

2) Escribir la ED en forma de derivadas y realizar la sustitución $y=ux$ p/convertirla en una función solamente en términos de u.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \rightarrow \frac{dy}{dx} = f(u) \rightarrow \text{Ec. ②}$$

[Si ec. ② no queda sólo en términos de u está mala].

3) Igualar Ec.① con Ec.② para convertirla en una E.D.S

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u)$$
$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$
$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

4) Integrar a ambos lados.

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

② Sustitución $x = vy$

$M(x,y)$ es más sencillo que $N(x,y)$

1) Realizar la sustitución $x = vy$ y derivar "x" ^ "v" con respecto a "y".

$V.I \rightarrow x$

$V.D \rightarrow y, u$

$$x = vy$$

$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy} \rightarrow Ec ①$$

2) Escribir la E.D en forma de derivadas y realizar la sustitución $x=vy$ p/convertirla en una función solamente en términos de v

$$\frac{dx}{dy} = f(x,y) \rightarrow \frac{dx}{dy} = f(v) \rightarrow Ec. ②$$

3) Igualar Ec. ① con Ec. ② p/convertirla en E.D.S

$$v + y\frac{dv}{dy} = f(v)$$

$$y\frac{dv}{dy} = f(v) - v$$

$$\frac{dv}{f(v)-v} = \frac{dy}{y}$$

4) Integrar a ambos lados

$$\int \frac{dv}{f(v)-v} = \int \frac{dy}{y} + C$$

• ED Lineales de Primer Orden

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \qquad\qquad \frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$$

$a_1(x)=1$ $\qquad\qquad$ $a_1(y)=1$

↓ $\qquad\qquad$ ↓

E.D.L en "y" $\qquad\qquad$ E.D.L en "x".

- Método de solución

1) Escribir la E.D de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \quad ; \quad a_1(x)=1$$

2) Calcular el F.I que convierte en exacta la E.D.

$$M(x)=e^{\int P(x)dx}$$

3) Multiplicar la ED por el F.I M(x) encontrado p/que la E.D sea exacta.

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+P(x)ye^{\int P(x)dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$N(x,y)=e^{\int P(x)dx} \qquad M(x,y)=P(x)ye^{\int P(x)dx}-Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=P(x)e^{\int P(x)dx} \qquad \frac{\partial M}{\partial y}=P(x)e^{\int P(x)dx} \rightarrow \text{E.D.E.}$$

4) El lado izq. de la E.D que resulta forma un diferencial exacto el cual es el producto del F.I por la V.D.

$$d[FI*VD]=Q(x).FI \rightarrow d\left[e^{\int P(x)dx}.y\right]=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

5) Integrar a ambos lados de la E.D.

$$\int d[e^{\int P(x)dx} y] = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C$$

$$e^{\int P(x)dx} y = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} + C$$

- E.D de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x) y^n \rightarrow \text{E.D.B "y"}$$

$$\frac{dx}{dy} + P(y) x = Q(y) x^n \rightarrow \text{E.D.B "x"}$$

- Método de solución

1) Escribir la E.D de la siguiente forma y seleccionar "n":

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x) y^n \quad . \quad n$$

2) Multiplicar la E.D por y^{-n}

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x) y^{1-n} = Q(x) \rightarrow \text{Ec. } 1$$

3) Usar la sustitución especial $v = y^{1-n}$ y derivarla con respecto a "x".

$$\frac{dv}{dx} = (1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} = y^{-n} \frac{dy}{dx} \rightarrow \text{Ec. } 2$$

4) Sustituir Ec. ② y la sustitución especial en Ec. ① p/convertirla en lineal.

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)\,v = Q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} + \underbrace{P(x)(1-n)}_{P_1(x)}\,v = \underbrace{Q(x)(1-n)}_{Q_1(x)}$$

$$\frac{dv}{dx} = P_1(x)\,v = Q_1(x) \rightarrow \text{E.D.L "v"}$$

5) Resolver la E.D.L

• Factor Integrante

Se usa para E.D que no son de ningún tipo de los anteriores.

① Función en términos de "x".

Si la función encontrada a través de la sgte. expr.:

$$\frac{1}{N_{(x,y)}}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

depende únicamente de "x", entonces el F.I que convierte en Exacta la E.D es el siguiente:

$$F.I = e^{\int \frac{1}{N_{(x,y)}}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]dx}$$

el cual se va a utilizar cuando $N_{(x,y)}$ sea más sencillo.

② Función en términos de "y"

Si la función encontrada a través de la expr:

$$\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]$$

depende únicamente de "y", entonces el F.I que convierte en Exacta la E.D es:

$$F.I = e^{\int \frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]dy}$$

el cual se va a usar cuando $M(x,y)$ sea más sencillo.

• Sistemas Lineales de E.D

- Método de eliminación algebraica

1) Escribir la E.D en forma de operadores.

$$\frac{dx}{dt}+2x+3y=t \rightarrow Dx+2x+3y=t \rightarrow (D+2)x+3y=t$$

$$\frac{dy}{dt}-2y-\frac{dx}{dt}=3 \rightarrow Dy-2y-Dx=3 \rightarrow -Dx+(D-2)y=3$$

2) Simultanear el sistema de E.D p/encontrar las E.D en términos de una sola variable.

$$(D+2)x+3y=t \quad (D-2)$$
$$-Dx+(D-2)y=3 \quad (-3)$$

$$(D+2)(D-2)x+3Dx=(D-2)t-9$$
$$(D^2-4+3D)x=Dt-2t-9$$
$$(D^2-4+3D)x=1-2t-9$$
$$(D^2+3D-4)x=-2t-8$$

↳ E.D.L en "x"

$$(D+2)x+3y=t \quad (D)$$
$$-Dx+(D-2)y=3 \quad (D+2)$$

$$3Dy+(D+2)(D-2)y=Dt+(D+2)3$$
$$(D^2-4+3D)y=1+\cancel{D3}^{0}+6$$
$$(D^2+3D-4)y=7$$

↳ E.D.L en "y"

3) Resolver las dos E.D.

- $(D^2+3D-4)x = -2t-8$

$m^2+3m-4=0$

$(m+4)(m-1)=0$

$m_1=1 \quad m_2=-4 \rightarrow x_c(t)=C_1e^{t}+C_2e^{-4t}$

$g(t)=-2t-8$

$x_p = At+B$

$x'_p = A \ ; \ x''_p = 0$

$\cancel{0}+3A-4At-4B=-2t-8$

$t \rightarrow -4A=-2 \qquad k \rightarrow 3A-4B=-8$

$A=\frac{1}{2} \qquad B=\frac{19}{8}$

$x(t)=C_1e^{t}+C_2e^{-4t}+\frac{1}{2}t+\frac{19}{8}$

- $(D^2+3D-4)y=7$

$m^2+3m-4=0$

$(m+4)(m-1)=0$

$m_1=1 \quad m_2=-4 \rightarrow y_c(t)=C_3e^{t}+C_4e^{-4t}$

$g(t)=7 \rightarrow Y_p=A$

$Y'_p=0$

$Y''_p=0$

$0+3(0)-4A=7$

$A=-7/4$

$y(t)=C_3e^{t}+C_4e^{-4t}-\frac{7}{4}$

4) Verificar cuántas incógnitas tienen que tener las soluciones encontradas resolviendo el determinante formado por los términos que acompañan a las variables.

$(D+2)x+3y=t$

$-Dx+(D-2)y=3$

$d = \begin{vmatrix} D+2 & 3 \\ -D & D-2 \end{vmatrix} = D^2-4+3D = D^2+3D-4$

orden 2

2 ctes.

5) Sustituir x(t) ^ y(t) encontrados en una de las ED para encontrar una relación entre las ctes. de x(t) ^ y(t).

* $\frac{dx}{dt} + 2x + 3y = t$; $\frac{dy}{dt} - 2y - \frac{dx}{dt} = 3$

$$\frac{dx}{dt} = C_1e^t - 4C_2e^{-4t} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \quad C_1e^t - 4C_2e^{-4t} + \frac{1}{2}$$

$$2x \rightarrow \quad 2C_1e^t + 2C_2e^{-4t} + t + \frac{19}{4}$$

$$3y \rightarrow \quad 3C_3e^t + 3C_4e^{-4t} - \frac{21}{4}$$

$$(3C_1+3C_3)e^t + (3C_4-2C_2)e^{-4t} + \cancel{t} = \cancel{t}$$

$$(3C_1+3C_3)e^t + (3C_4-2C_2)e^{-4t} = 0$$

$3C_1 + 3C_3 = 0$ $\qquad$ $3C_4 - 2C_2 = 0$

$C_3 = -C_1$ $\qquad$ $C_4 = \frac{2}{3}C_2$

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{-4t} + \frac{1}{2}t + \frac{19}{8}$$

$$y(t) = -C_1e^t + \frac{2}{3}C_2e^{-4t} - \frac{7}{4}$$