Gas Ideal Clásico (Ecuación de Estado):

Consideremos el Hamiltoniano:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{N} p_i^2$$

Primero calculamos:

$$\sum(E) = \frac{1}{h^{3N}}\int_{\mathscr{H}<E} d^3p_1 \cdots d^3p_N d^3q_1 \cdots d^3q_N$$

Siendo h una constante de la dimensión de la cantidad de movimiento $\times$ distancia, introducida para hacer $\sum E$ adimensional. La integración sobre q_i se puede realizar inmediatamente, dando un factor de V. Sea:

$$R = \sqrt{2mE}$$

Con lo que:

$$\sum(E) = \left(\frac{V}{h^3}\right)^N \Omega_{3N}(R)$$

Donde Ω_n es el volumen de una n-esfera de radio R :

$$\Omega_n(R) = \int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<R^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \Rightarrow \Omega_n(R) = C_n R^n$$

Siendo C_n constante. Para encontrar C_n, empleamos la siguiente identidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n e^{-\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2}\right)^n = \pi^{n/2} \tag{1}$$

Ahora en (1), siendo $S_n \equiv d\Omega_n(R)/dR$ el área de la superficie de la n-esfera de radio R, podemos escribir:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n e^{-\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)} = \int_0^{\infty} dR S_n(R) e^{-R^2} = nC_n \int_0^{\infty} dR R^{n-1} e^{-R^2} \\ = \frac{1}{2} n C_n \int_0^{\infty} dt t^{(n/2)-1} e^{-t} = \frac{1}{2} n C_n \Gamma(n/2)\end{aligned}$$

Comparando las ecuaciones previas obtenemos:

$$C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} \Rightarrow \log C_n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{n}{2}\log\pi - \frac{n}{2}\log\frac{n}{2} + \frac{n}{2}$$

De aquí:

$$\sum(E) = C_{3N}\left[\frac{V}{h^3}(2mE)^{3/2}\right]^N$$

Gas Ideal Clásico(Ecuación de Estado):

La entropía de un gas ideal es:

$$S(E,V) = k\left[\log C_{3N} + N\log\frac{V}{h^3} + \frac{3}{2}N\log(2mE)\right]$$

Lo que se puede reducir usando la expresión logarítmica encontrada previamente a:

$$S(E,V) = Nk\log\left[V\left(\frac{4\pi m}{3h^2}\frac{E}{N}\right)^{3/2}\right] + \frac{3}{2}Nk$$

Resolvemos para E en términos de S y V, siendo $U(S,V)$ la energía interna:

$$U(S,V) = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{h^2}{m}\right)\frac{N}{V^{2/3}}\exp\left(\frac{2}{3}\frac{S}{Nk} - 1\right)$$

La definición de temperatura es:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \frac{2}{3}\frac{U}{Nk}$$

De donde se tiene:

$$C_V = \frac{3}{2}Nk$$

Por tanto la ecuación de estado es:

$$P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = \frac{2}{3}\frac{U}{V} = \frac{NkT}{V}$$

Recopilado por Ronald Portocarrero

Problema:

1. Un gas de N partículas puntuales clásicas se guarda en una superficie de dos dimensiones. Calcule la energía interna y la ecuación de estado si la superficie es un toro.