Demostración del Teorema del Binomio con Ecuaciones Diferenciales:

Teorema: Para cualquier numero real r y x, y reales se tiene:

$$(x+y)^r = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{r}{m} x^m y^{r-m}$$

Demostración:

La serie anterior converge si $|x| < |y|$. Entonces hacemos $t = x/y$. Entonces:

$$(1+t)^r = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{r}{m} t^m$$

Ahora consideremos:

$$f_1(t) = (1+t)^r \quad \text{y} \quad f_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{r}{m} t^m$$

Derivamos f_1 respecto a t entonces:

$$f_1'(t) = r(1+t)^{r-1} \Rightarrow (1+t)f_1'(t) = rf_1(t)$$

Por tanto $f_1(t)$ es una solución de:

$$(1+t)y' = ry, \quad y(0) = 1$$

Ahora calculemos $(1+t)f_2'(t)$:

$$f_2'(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{r}{m} m t^{m-1} = r \sum_{m=1}^{\infty} \binom{r-1}{m-1} t^{m-1}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow r(1+t)\sum_{m=1}^{\infty} \binom{r-1}{m-1} t^{m-1} &= r\sum_{m=1}^{\infty} \binom{r-1}{m-1} t^m + r\sum_{m=1}^{\infty} \binom{r-1}{m-1} t^{m-1} \\
&= r\sum_{m=1}^{\infty} \binom{r-1}{m-1} t^m + r\sum_{m=0}^{\infty} \binom{r-1}{m} t^m \\
&= r\sum_{m=1}^{\infty} \left[\binom{r-1}{m-1} + \binom{r-1}{m}\right] t^m + r \\
&= r\sum_{m=1}^{\infty} \binom{r}{m} t^m + r = r\sum_{m=0}^{\infty} \binom{r}{m} t^m \\
&= rf_2(t)
\end{aligned}$$

Se ve que $f_2(0) = 1$. Por tanto, empleando la unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales con valor inicial se obtiene que $f_1(t) = f_2(t)$