Desigualdades Trigonométricas

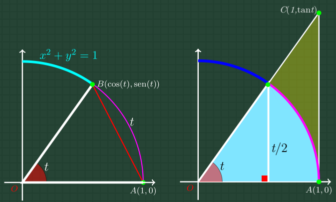
Adaptado del trabajo de Roger B. Nelsen

Usaremos el siguiente Lema (1):

Para $0 < x < \pi/2$ se tiene:

$$\cos(t) > 1 - \frac{t^2}{2} \quad \text{y} \quad \sec^2(t) > 1 + t^2$$

Prueba: Considere:



$$\Rightarrow \sqrt{(\cos t - 1)^2 + \text{sen}^2\, t)} < t$$

$$\Rightarrow 2 - 2\cos t < t^2 \equiv \cos t > 1 - t^2/2$$

$$Area(\triangle AOC) > Area(\triangle AOB) \Rightarrow \frac{1}{2}\tan t > \frac{1}{2} t$$

$$\therefore \sec^2 t > 1 + t^2$$

Desigualdad de Huygens

Para $0 < |x| < \pi/2$ se tiene:

$$2\frac{\sin x}{x} + \frac{\tan x}{x} > 3$$

Prueba: Considere que $\sin(x)/x$ y $\tan x/x$ son funciones pares, por lo que basta probar en valores positivos:

$$\sin x = \int_0^x \cos t dt > \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt = x - \frac{x^3}{6}$$
$$\tan x = \int_e^x \sec^2 t dt > \int_0^x \left(1 + t^2\right) dt = x + \frac{x^3}{3}$$
$$\therefore 2\sin x + \tan x > \left(2x - \frac{x^3}{3}\right) + \left(x + \frac{x^3}{3}\right) = 3x$$

Demostración sin palabras:

$$n^2 - 2n = 4\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(\frac{n}{2}\right) = 8\sum_{i=1}^{n/2-1} i$$