<u>Problema 1:</u> La curva regular C resulta de la intersección de las siguientes superficies $S_1 : y^2 - z^2 = x - 2$ y $S_2 : y^2 + z^2 = 9$. Determine las ecuaciones paramétricas de la curva C

Solución:

En S_2 vemos que podemos aplicar:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Obteniendo que:

$$y = 3\cos t \qquad z = 3\operatorname{sen} t$$

Ahora en S_1:

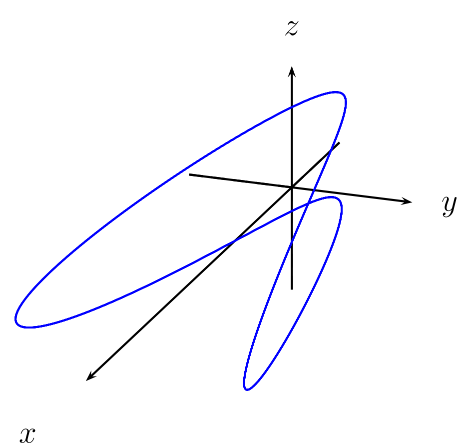
$$9\cos^2 t - 9\operatorname{sen}^2 t = x - 2$$

$$9(\cos(2t) + 2 = x$$

Por tanto:

$$C : \begin{cases} x = 9\cos 2t + 2 \\ y = 3\cos t \\ z = 3\sin t \end{cases}, \qquad t \in I$$

Siendo que $I \subseteq \mathbb{R}$, de modo que para cerrar la curva basta con tener (el dominio puede expandirse pero se volvería a recorrer la curva) $I = [(2n-1)\pi, 2n\pi], \forall n \in \mathbb{N}$. Una gráfica sería:



Problema 2: Sea C una curva suave, en el instante $t = 1$ tiene rapidez igual a $\sqrt{3}$, curvatura $K(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y torción $\tau(1) = \dfrac{1}{3}$ además con vectores unitarios:
Solución:
$T(1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), N(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1), B(1) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)$. Para el instante $t = 1$, defina las componentes de los siguientes vectores:

a) $\dfrac{dT}{dt}$
Sabemos que:

$$\frac{dT}{dt} = T'(t) = K(t)\|r'(t)\|N(t)$$

Bata reemplazar los datos, obteniendo:

$$T'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

b) $\dfrac{dB}{dt}$
Se tiene que:

$$\frac{dB}{dt} = B'(t) = -\tau(t)\|r'(t)\|N(t)$$

Reemplazando:

$$B'(1) = \frac{-1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) = (0, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})$$

c) $\dfrac{dN}{dt}$:
Se sabe que:

$$\frac{dN}{dt} = N'(t) = \tau(t)\|r'(t)\|B(t) - K(t)\|r'(t)\|T(t)$$

Reemplazando los datos:

$$N'(1) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = (-\frac{5\sqrt{2}}{6}, -\frac{2\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{6})$$

Problema 3: : Sea C un curva regular con rapidez arbitraria, definida por:
Solución:

$$r(t) = (2t^2, 2t^2, \cos t); \qquad 0 \leq t \leq 4\pi$$

Tenemos lo siguiente:

$$r''(t) = (4t, 4t, -\operatorname{sen} t), \qquad r''(t) = (4, 4, -\cos t), \qquad r'''(t) = (0, 0, \operatorname{sen} t)$$

a) Determine la curvatura de C:

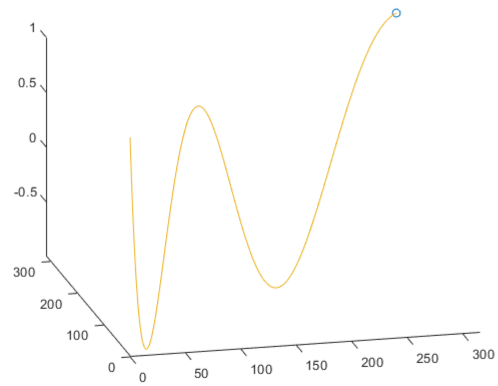
$$K(t) = \frac{\|r'(t)r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{\|(-4t\cos t + 4\operatorname{sen} t, 4t\cos t - 4\operatorname{sen} t, 0\|}{\sqrt{32t^2 + \operatorname{sen}^2 t}^3} = 4\sqrt{2}\frac{|t\cos t - \operatorname{sen} t|}{\sqrt{32t^2 + \operatorname{sen}^2 t}^3}$$

b) Calcule la torsión de C:
Se tiene una curva plana, por lo que $\tau(t) = 0$

c) Describa las características geométricas de C y realice un bosquejo de la curva:

- Esta curva no pasa por el origen de coordenadas es decir, el vector (0,0,0) no pertenece al rango de $r(t)$
- El punto inicial de la curva es $(0, 0, 1)$ y el punto final es $(32\pi^2, 32\pi^2, 1)$
- Es una curva plana ya que todos sus puntos satisfacen a la ecuación de un plano $x - y = 0$
- Por el mismo hecho del punto anterior, la proyección de la curva sobre el plano XY es una recta en la que todos sus puntos satisfacen la ecuación $x = y$
- La curva cruza al plano XY 4 veces, los puntos en donde lo corta son $r(\frac{\pi}{2}), r(\frac{3\pi}{2}), r(\frac{5\pi}{2})$ y $r(\frac{7\pi}{2})$
- Es una curva simple debido a que la única condición para que un $r(a)$, sea igual a un $r(b)$ es que a y b sean iguales
- Los valores en el eje vertical$Z$ oscilan entre -1 y 1, pues la función $\cos t \in [-1, 1]$
- No es una curva cerrada ya que no existen $a, b[0, 4]$ con $a \neq b$ talque $r(a) = r(b)$

Una gráfica hecha en Matlab sería:



<u>Problema 4:</u> Una partícula se mueve sobre una curva regular C representada por la siguiente función vectorial

$$C : r(t) = -\frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{k}; \qquad 0 \leq t \leq 2$$

defina una nueva función vectorial de modo que la partícula recorra C en sentido contrario y que lo haga en el doble del tiempo.
Solución:
Tenemos: $r : [0,2] \to \mathbb{R}^3$ y queremos que la curva reparametrizada haga su recorrido con la mitad de velocidad de la curva original, por lo que se buscara una función:

$$\varphi : [0,4] \to [0,2]$$

Como buscamos el sentido contrario se aplica la fórmula:

$$\varphi(t) = -kt + b$$

Siendo k la relación entre la velocidad de la nueva curva y la inicial, con b como el limite superior del dominio de la C. Por lo que se obtiene:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2}t + 2$$

Con lo que se tiene la curva:

$$r(\varphi(t)) = -\frac{1}{2}\left(2 - \frac{t}{2}\right)^2\mathbf{i} + \left(2 - \frac{t}{2}\right)\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 - \frac{t}{2}\right)^2\mathbf{k}; \qquad 0 \leq s \leq 4$$

$\boxed{\text{Hecho en \LaTeX}}$