La soluciones no son adjudicadas a mi persona, estas fueron recopiladas por lo que provienen de diversas fuentes

Soluciones

69. Encuentre la curva plana que pasa por el punto M_0 (2,4) que cumple lo siguiente: dibujamos dos líneas rectas a través de cualquier punto de la curva, paralela a los ejes de coordenadas. Entonces, el área de una de dos superficies planas, determinadas por este rectángulo y la curva es dos veces más grande que la otra

$$\text{Área}OAMC = 2\text{Area}CBM$$

$$OAMC = \int_0^x ydx$$

$$CBM = xy - \int_0^x ydy$$

$$\Rightarrow \int_0^x ydx = 2(xy - \int_0^x ydy$$

$$3\int_0^x ydx = 2xy \Rightarrow 3y = 3y + 2xy' \Rightarrow 2xy' = y$$

$$y^2 = Cx, y(2) = 4 \therefore C = 8, y^2 = 8x$$

38. Si $\mathcal{L}[F(u)] = f(s)$. Calcular:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^1 J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du\right]$$

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \Rightarrow J_0(2\sqrt{u(t-u)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k[u(t-u)]^k}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^k (t-u)^k}{(k!)^2}$$

$$\Rightarrow J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(kt)^2} u^k (t-u)^k F(u)$$

$$\Rightarrow \int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \int_0^t u^k (t-u)^k F(u)du$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \mathcal{L}\left[\int_0^t u^k (t-u)^k F(u)du\right]$$

Por convolución:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)^2} \mathcal{L}\left[t^k \cdot t^k F(t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left[\frac{k!}{s^{k+1}} (-1)^k \frac{d^k}{ds^k}(f(s))\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(k-1)^2} \left(\frac{k!}{s^{k+1}}\right) f^{(k)}(s)$$

$$\boxed{= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k!)^2} \frac{f^{(k)}(s)}{s^{k+1}}}$$

37.

$$D = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x} dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \arctan(e^x) \arctan\left(e^{-x}\right) dx}$$

En la primera integral:

$$\int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int_0^1 \ln x x^{n-1} dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} = \zeta(3)$$

Usando integración por partes se puede probar:

$$\int_0^{\pi} u(\pi - u) e^{-(2k+1)ui} du = -\frac{4i}{(2k+1)^3} \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{u(\pi-u)}{\sin u} \left(1 - e^{-2Kui}\right) du = 2i \sum_{k=0}^{K-1} \int_0^{\pi} u(\pi-u) e^{-(2k+1)ui} du = 8 \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{(2k+1)^3}$$

Usando $K \to \infty$, se deduce que:

$$\int_0^{\pi} \frac{u(\pi-u)}{\sin u} du = 8 \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^3} = 8\left(1 - \frac{1}{8}\right)\zeta(3) = 7\zeta(3)$$

Ahora en la integral del denominador hacemos $y = e^x$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1}(y) \tan^{-1}\left(y^{-1}\right)}{y} dy$$

Luego $y = \tan t$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{t\left(\frac{1}{2}\pi - t\right)}{\sin t \cos t} dt$$

Finalmente $u = 2t$:

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{u(\pi-u)}{\sin u} du = \frac{7}{4}\zeta(3)$$

$$\boxed{\therefore D = \frac{4}{7}}$$

39 Encuentre la familia de integrales de superficie de la siguiente ecuación diferencial parcial no lineal de orden uno

$$p^2 + q^2 = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Usamos polares entonces:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta$$

Usando esto:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Entonces la ecuación inicial se puede reescribir:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2 = f(r)$$

Entonces el sistema característico:

$$\frac{dr}{2pr^2} = \frac{d\theta}{2q} = \frac{du}{2p^2r^2 + 2q^2} = = \frac{-dp}{2rp^2 - 2rf - r^2f'} = \frac{-dq}{0}$$

Donde $p = \dfrac{\partial u}{\partial r}, q = \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \Rightarrow q = a$. De la ecuación:

$$p = \pm\sqrt{f(r) - \frac{a^2}{r^2}}$$

Teniendo la ecuación Pfaff es:

$$du = \pm\sqrt{f(r) - \frac{a^2}{r^2}}dr + ad\theta$$

Y la integral completa sería:

$$u = \pm\int_{r_0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{f(r) - \frac{a^2}{r^2}} + a\arctan\frac{y}{x} + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$