Tarea 2.

Fecha de entrega tentativa: 12 de marzo

1. Implementar y analizar el algoritmo de aceptación y rechazo para simular de $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. En caso de que exista C tal que $Cg(x) \geq f(x)$ utilizar como variable auxiliar:
   - $Y \sim Cauchy(0,1)$
   - $Y \sim t_5$ (t de Student con 5 grados de libertad)
   - Sea $\phi_{(\mu,\sigma^2)}(x)$ la densidad de una v.a. normal con media μ y varianza σ^2. Y tiene densidad $f_Y(y) = 0.4\phi_{(-1,1)}(x) + 0.6\phi_{(1,1)}(x)$, es decir es una mezcla de v.a. normales.
2. (4 puntos) Implemente y analice el algoritmo de Ziggurat para simular de una normal positiva.
3. Implementar y analizar (en caso de que sea posible) el algoritmo de cociente de uniformes para simular de $Z = X_i$ donde $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $X_2 \sim \text{Gama}(4.3, 0.5)$
4. Implementar, analizar y comparar los siguientes algoritmos:
   - Box-Müller. Programarlo usando la función seno y coseno de *Python*, programarlo también usando una aproximación usando polinomio de Taylor de segundo y cuarto grado para seno y coseno.
   - Marsaglia. Además de implementar el algoritmo resuelva la siguiente pregunta:
     Ya que el algoritmos nos pide generar U_1 y U_2 cada vez que proponemos un punto, considere el caso de que rechacemos (U_1, U_2) ¿ Es más eficiente si en vez de simular una nueva pareja (U_3, U_4) simulamos solamente una nueva uniforme y proponemoso el punto (U_2, U_3) y si lo rechazamos proponer entonces (U_3, U_4)? La idea que inspira esta pregunta es que estamos ahorrando el tiempo de la simulación de una uniforme en cada iteración, que como pudo constatar en ejercicios anteriores puede ser un proceso tardado.
5. La media muestral $\overline{X}$, está definida para cualquier variable aleatoria, no importa si esta tiene o no esperanza.

   Grafique los puntos $(n, \overline{X}_n)$ con $n \in \{1, 2, ..., 1000\}$ y $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ cuando
   - $X \sim N(0,1)$
   - $X \sim Gama(10, 0.1)$
   - $X \sim Cauchy(0,1)$, en este caso encuentre la distribución de $\bar{X}$. ¿Qué pasa si queremos usar la media muestral para estimar la esperanza de una v.a. Cauchy?
6. Realice lo siguiente
   - Simule una trayectoria de la siguiente cadena de Markov
   $$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0.1 & 0.45 & 0.45 \end{bmatrix}$$
   $$\pi = (0, 1, 0)$$
   - Encuentre el valor de P^{100}
   - Verifique si su simulación sigue lo esperado por el teorema ergódico
7. Simule una trayectoria de un proceso Poisson con tasa $\lambda = 3$ hasta el tiempo 20.
8. Simule una trayectoria de un movimiento Browniano hasta $T = 1$ con $\Delta t = 10^{-3}$