Tarea 4.

Fecha de entrega 7 de mayo

1. Sea $\vec{x} = \{x_i\}_{i=1}^n$ una m.a. donde $x_i|\alpha, \beta \sim Gam(\alpha, \beta)$ para $i \in \{1, 2, ..., 10\}$ v.a.i.i.d. con distribuciones a priori para los parámetros $\alpha \sim U(1, 4)$ y $\beta \sim exp(1)$.

   Encontrar el kernel de la densidad posterior de (α,β) dado la muestra, ¿ Los parámetros son independientes a posteriori?

2. Se obtuvo la siguiente muestra: 0.3292034, 0.4251084, 0.7001423, 1.7175335, 0.4127446, 0.7386927, 0.3311653, 0.7333610, 1.3709668, 0.3422751

   Implemente y analice el algoritmo MCMC para simular de $f_{\alpha,\beta|\vec{x}}$.

   Como propuesta use
   $$(\alpha_p, \beta_p) = (\alpha, \beta) + \varepsilon$$
   con $\varepsilon \sim \mathcal{N}_2\Big((0,0), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big)$

   El análisis debe considerar al menos

   - Diferentes puntos iniciales
   - Argumentación de selección del parámetro de *burnin*
   - Argumentación de selección del parámetro de *lag* entre observaciones
   - Gráfico de dispersión de los puntos simulados sobre las curvas de nivel de $f_{\alpha,\beta|\vec{x}}$

3. Sean
   $$X_1 \sim \mathcal{N}_2\Big((0,0), \begin{pmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 2 \end{pmatrix}\Big)$$
   $$X_2 \sim \mathcal{N}_2\Big((5,5), \begin{pmatrix} 4 & -0.9 \\ -0.9 & 0.5 \end{pmatrix}\Big)$$

   Use MCMC con propuestas de caminatas aleatorias para simular de
   $$f(x,y) = 0.5 f_{x_1}(x,y) + 0.5 f_{x_2}(x,y)$$

   Para la distribución del punto inical tome uniformes en el cuadrado $(-2, 8)^2$ y realice la simulación usando las siguientes matrices de varianzas y covarianzas
   $$\begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

   ¿ Qué fenómeno se presenta al usar la primer matriz en vez de la segunda?

4. Simular de $x \sim Gamma(\alpha, \beta)$, usando MCMC con una propuesta independiente dada por una v.a. con distribución Erlang($\lceil\alpha\rceil, \beta$). Tomar $\alpha = 2.7$ y $\beta = 2.8$

   - Encontrar una expresión analítica para ρ
   - Analizar la cadena, argumentar porqué se tomó ese burnin y ese lag y estimar el número promedio de rechazos una vez que la cadena llegá a la distribución estacionaria.

- Comparar la densidad de la v.a. con densidad Gamma, con el histograma de la simulación

5. Simular de $x \sim Gamma(\alpha, \beta)$, usando MCMC con una propuesta independiente dada por una v.a. con distribución Lognormal($\frac{1}{2}, 1$). Tomar $\alpha = 2.7$ y $\beta = 2.8$

   - Encontrar una expresión analítica para ρ
   - Analizar la cadena, argumentar porqué se tomó ese burnin y ese lag y estimar el número promedio de rechazos una vez que la cadena llegá a la distribución estacionaria.
   - Comparar la densidad de la v.a. con densidad Gamma, con el histograma de la simulación

6. Con los argumentos de la pregunta 4 y 5 responda ¿ Cuál de las dos propuestas fue mejor y por qué?

7. Sea $t_i|\alpha, \lambda \sim Weibull(\alpha, \lambda)$ para $i \in \{1, ..., n\}$. Suponemos a priori que $\lambda|\alpha \sim Gamma(\alpha, \beta)$ y $\alpha \sim exp(c)$, donde β y c son hiperparámetros (es decir el usuario los elige). **Nota:**

$$f(t_i|\alpha, \lambda) = \alpha\lambda t_i^{\alpha-1} e^{-t_i^{\alpha}\lambda}$$

   - Encuentre la densidad posterior dada la muestra $f(\alpha, \lambda|\vec{t_i})$. **Nota:** Los parámetros α y λ no son a priori independientes.
   - Dada la muestra 0.3499344,0.2453302,0.1724166,0.3073314, 0.2614696,0.2785925,0.2562785,0.3871797, 0.2248742,0.3463315, simular de $f(\alpha, \lambda|\vec{t_i})$ usando MCMC con Kernels híbridos. Debe al menos haber 4 kerneles diferentes, dos de los cuales deben mover solo una coordenada, los otros dos son a elegir por ustedes.**Nota:** En caso de poder usar propuestas de Gibbs debe utilizarlas.
   - ¿ La cadena es ergódica? ¿ La cadena es fuertemente aperiódica?
   - Analizar la cadena, argumentar porqué se tomó ese burnin y ese lag y estimar el número promedio de rechazos una vez que la cadena llegá a la distribución estacionaria.
   - Graficar las curvas de nivel de $f(\alpha, \lambda|\vec{t_i})$ y poner sobre estas los puntos simulados.

8. Replicar el ejemplo del producto de exponenciales del tutorial de T-walk de la pgina de Andrés Christen