

Multiplicadores de Lagrange

Optimización Agrícola en el Valle del Mantaro

RONALDO CARLOS MAMANI MENA
YONHEL MAMANI CRUZ
ALEXANDER QUISPE HOLGUIN

Universidad Nacional Del Altiplano

2 de junio de 2025

Planteamiento del Problema

Optimización Agrícola en el Valle del Mantaro, Perú

Situación

Un agricultor tiene **120 hectáreas** para cultivar papa y maíz

Datos económicos:

- Papa: 8,000 soles/ha
- Maíz: 6,000 soles/ha
- Costo papa: $50x^2$ soles
- Costo maíz: $40y^2$ soles

Problema de optimización:

Maximizar:

$$f(x, y) = 8000x + 6000y - 50x^2 - 40y^2$$

Sujeto a:

$$x + y = 120$$

Método de Multiplicadores de Lagrange

Lagrangiano

$$L(x, y, \lambda) = 8000x + 6000y - 50x^2 - 40y^2 - \lambda(x + y - 120)$$

Condiciones de Primer Orden

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 8000 - 100x - \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 6000 - 80y - \lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x + y - 120) = 0 \quad (3)$$

Resolución del Sistema

Paso 1: Igualar las ecuaciones (1) y (2)

De (1): $\lambda = 8000 - 100x$

De (2): $\lambda = 6000 - 80y$

Igualando: $8000 - 100x = 6000 - 80y$

Simplificando: $y = 1,25x - 25$

Paso 2: Sustituir en la restricción

$$x + y = 120$$

$$x + (1,25x - 25) = 120$$

$$2,25x = 145$$

$$x = 64,44 \text{ hectáreas (papa)}$$

Paso 3: Encontrar y y λ

$$y = 120 - 64,44 = 55,56 \text{ hectáreas (maíz)}$$

$$\lambda = 8000 - 100(64,44) = 1,556 \text{ soles/hectárea}$$

Resultados de la Optimización

Solución Óptima

- **Papa:** 64.44 ha (54 %)
- **Maíz:** 55.56 ha (46 %)
- λ^* : 1,556 soles/ha

Utilidad Máxima

- **Ingresos:** 848,880 soles
- **Costos:** 331,098 soles
- **Utilidad neta:** 517,782 soles

Verificación

Restricción: $64,44 + 55,56 = 120$

Condiciones de optimalidad satisfechas

Significado del Multiplicador $\lambda = 1,556$ soles/hectárea

- Representa el **valor marginal** de una hectárea adicional
- Si tuviera 121 hectáreas, la utilidad aumentaría en $\approx 1,556$ soles
- Es el **precio sombra** de la tierra en el Valle del Mantaro

Recomendaciones para el Agricultor

- 1 Destinar 54 % de tierra a papa y 46 % a maíz
- 2 Considerar arrendar tierra adicional si cuesta ¡ 1,556 soles/ha/temporada
- 3 La diversificación reduce riesgos climáticos de la sierra peruana

¡La optimización matemática maximiza la rentabilidad agrícola!

Graficos de la optimizacion de la Optimización

