Commande d'un moteur à courant continu par modes glissants

Pierre Riedinger et Jérémie Kreiss

L'objectif de ce TP est de concevoir une loi de commande par modes glissants pour la machine à courant continu. La loi de commande doit être robustes aux incertitudes et limiter au maximum le "chattering" (le bruit induit par les commutations).

1 Modélisation

La machine à courant continu est composée d'une partie électrique et d'une partie mécanique.

La dynamique électrique concerne le courant circulant de le stator du moteur et permet d'appliquer un couple électro-mécanique sur l'arbre moteur. Grâce aux lois de Kirchhoff, on peut la modéliser par l'équation différentielle suivante :

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + Ri(t) = v_a(t) - K_e\dot{\theta}(t),\ t \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \tag{1}$$

$L, R, K_e \in \mathbb{R}_{>0}$ sont respectivement l'inductance statorique, la résistance statorique et la constante de la force contre électromotrice. Le courant à l'instant t est noté $i(t)$. A l'état initial, $i(0) = i_0 \in \mathbb{R}$. $v_a(t)$ est la tension d'entrée du moteur t. v_a constitue la commande du système.

Le couple moteur généré par le courant qui circule dans le stator est noté T et est donné par la relation suivante

$$T(t) = K_t i(t),\ t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \tag{2}$$

où $K_t \in \mathbb{R}_{>0}$ est la constante de couple électro-mécanique.

Ce couple entraine l'arbre moteur dont la dynamique est obtenue par le principe fondamental de la dynamique. On obtient

$$J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) = T(t),\ t \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \tag{3}$$

$J, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sont respectivement le moment d'inertie et le coefficient de friction. La position de l'able à l'instant t est notée $\theta(t)$. A l'état initial, $\theta(0) = \theta_0 \in \mathbb{R}$ et la vitesse $\dot{\theta}(0) = 0$.

On considère que l'inductance et le moment d'inertie sont mal connus, de sorte qu'ils diffèrent de leur valeur nominale (L_0 et J_0) par la relation suivante :

$$\xi_L = \frac{L_0 - L}{L}, \quad |\xi_L| < 0.1 \tag{4}$$

$$\xi_J = K_t\left(\frac{1}{J} - \frac{1}{J_0}\right), \quad |\xi_J| < 0.5 \tag{5}$$

Hypothèse 1.1. Le coefficient de friction est considéré négligeable, i.e. $b = 0$. △

Question 1. Sous l'hypothèse 1.1 et en prenant $x = [\theta, \dot{\theta}, i]^\top$ comme vecteur d'état, écrire le modèle sous représentation d'état :

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(t, x, u).$$

$Ax + Bu$ correspond au modèle nominal et $f(t, x, u)$ regroupe les parties non linéaires et les incertitudes. Réaliser le schéma simulink du moteur.

Question 2. On remarque que (A, B) est sous forme compagne. Déterminer A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1 et B_2 ainsi que $f_u(t, x)$ et $f_m(t, x, u)$.

2 Choix d'une surface de glissement

Lorsqu'il y a glissement, on souhaite que les valeurs propres de la dynamique d'ordre réduit respectent :

$$\lambda^2 + 2\xi w_n \lambda + w_n^2 = 0$$

avec $\xi = 0.9$ et $w_n = 2$ rad.s^{-1}.

Question 3. En déduire $M = [m_1,\ m_2]$.

Pour choisir la fonction de commutation, il reste à déterminer S_2.

Question 4. Choisir S_2 le plus simplement possible de sorte que SB soit non-singulière. Sur le schéma simulink, réaliser le calcul de la fonction de commutation.

3 Choix de la loi de commande

En l'absence d'incertitudes, on souhaite rallier la surface de glissement ($s(x) = 0$) avec un temps de réponse $t_{r5\%} = 1$s.

Question 5. En calculant la commande équivalente et avec le contrainte ci-dessus, déterminer la partie linéaire de la loi de commande. La réaliser sur simulink.

Finalement, il reste à déterminer la partie non-linéaire.

Question 6. Écrire la dynamique d'ordre réduit ($s(x) = 0$) lorsque la commande linéaire est appliquée. En déduire la nouvelle expression de $f_u(t, x)$.

On aimerait trouver $\rho(t, x)$ de sorte que la condition d'atteignabilité soit vérifiée sur tout l'espace d'état. D'après le cours, on sait que c'est le cas lorsque

$$\rho(t, x) \geq \|S_2\| \left(\|M\|\|f_u\| + \|f_m\|\right) + \delta_2$$

avec $\delta_2 > 0$. On procède par étape.

Question 7. Sachant que $|\xi_L| < 0.1$ et à l'aide de l'expression de $f_m(t, x, u)$, trouver $\rho_1(t, x)$ tel que

$$\rho_1(t, x, u) \geq \|f_m(t, x, u)\|.$$

Question 8. Sachant que $|\xi_J| < 0.5$ et à l'aide de l'expression de $f_u(t, x)$, trouver $\rho_2(t, x)$ tel que

$$\rho_2(t, x) \geq \|M\|\|f_u(t, x, u)\|.$$

On rappelle l'expression de la commande que l'on souhaite mettre en œuvre :

$$u = u_l + u_n = u_l + \rho(t, x)\|(S_2 B_2)^{-1}\|\text{sign}(s).$$

On remarque que $\|u\|$ dépend de $\rho(t, x)$. On ne peut donc pas exprimer $\rho_1(t, x, u)$ en fonction de $\|u\|$.

Question 9. Trouver une borne supérieure pour $\|u\|$ qui fait apparaître $\rho(t, x)$ explicitement. En déduire la nouvelle expression de $\rho_1(t, x, u_l)$.

Question 10. En prenant $\rho(t,x) = \rho_1(t,x,u_l) + \rho_2(t,x) + \delta_2$, exprimer la valeur de $\rho(t,x)$. (Attention : $\rho(t,x)$ ne doit dépendre ni explicitement, ni implicitement de $\rho(t,x)$).

4 Simulation

Le moteur considéré a les valeurs numériques suivantes :

- $R = 1.2\ \Omega$;
- $L_0 = 0.05$ H ;
- $K_e = 0.6$ V.s.rad^{-1} ;
- $K_t = 0.6$ N.m.A^{-1} ;
- $J_0 = 0.135$;
- $\theta_0 = 3$ rad ;
- $i_0 = 0$ A

Question 11. A l'aide de Simulink, simuler le comportement du moteur commandé par la loi de commande obtenue, lorsque $L = 0.046$ H et $K_t/J = 6$. Commenter.