

Señales y Muestreo de Sistemas Discretos

Ricardo Rodríguez Bustinza
robust@uni.edu.pe

Índice

1. Señales	2
1.1. Señal Análoga	2
1.2. Señal Muestreada	3
1.3. Señal Cuantizada	3
1.4. Señal Digital	4
1.5. Eje de Tiempo Discreto	4
2. Fenómenos del Muestreo	5
2.1. Cuantización	5
2.2. Aliasing	8
2.2.1. Frecuencia de Nyquist	9

1. Señales

Las señales de tiempo continuo (también llamadas señales analógicas) son aquellas definidas para cada instante de tiempo, asignando un valor a cada punto del dominio temporal. Se caracterizan por tener una variable independiente continua (como el tiempo) y pueden tomar cualquier valor dentro de un rango determinado. Ejemplos incluyen la voz, las ondas de radio, la presión arterial o la temperatura. El simple hecho de que un sistema de control digital (ver Figura 1) interactúe con un proceso físico trae consigo un análisis inherente de señales ya que estas deben ser convertidas de señal analógica a señal digital (ADC) y viceversa (DAC), en ese sentido para que una señal pueda ser procesada digitalmente, la señal es continua se debe convertirse a una señal digital mediante un proceso que implica dos pasos, *muestreo* conversión a señal de tiempo discreto y la *cuantización* conversión de su conjunto de valores a un conjunto finito (múltiplos de un valor mínimo).

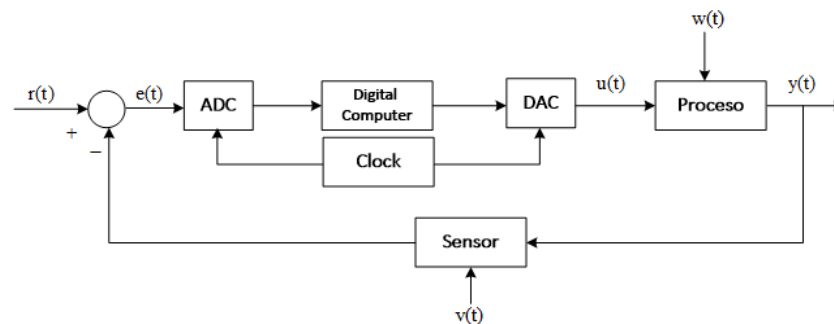


Figura 1: Sistema de control digital.

Las señales en estudio son:

- Señal analógica
- Señal muestreada
- Señal cuantizada
- Señal digital

1.1. Señal Analógica

Una señal analógica se define sobre un rango continuo de tiempo cuya amplitud asume una gama continua de valores, es una señal generada por algún tipo de fenómeno electromagnético (ver Figura 2).

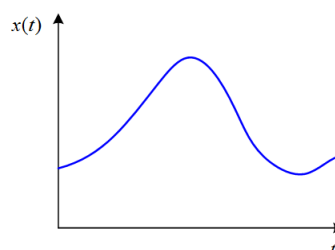


Figura 2: Señal analógica.

1.2. Señal Muestreada

El muestreo consiste en una conversión de una señal en tiempo continuo a una señal en tiempo discreto tomando muestras de la señal de tiempo continuo en instantes de tiempo discreto. Esta señal se define solo en instantes discretos de tiempo y la amplitud se asume en un rango continuo de valores tal como se muestra en la Figura 3.

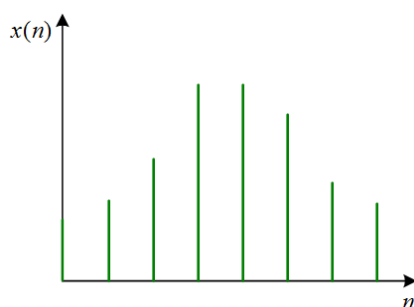


Figura 3: Señal muestreada.

1.3. Señal Cuantizada

Una señal digital no solamente es discretizado en el tiempo, sino también en su amplitud. Esto se debe a que el computador, por su naturaleza discreta, no es capaz de representar ni manipular una función continua de amplitud. El proceso por el cual se discretiza la amplitud de una señal en el computador se denomina cuantización. La cuantización es un proceso claramente no lineal (ver Figura 4). Esto implica que genera distorsiones o errores no lineales. La cuantización se encarga de otorgarle un rango de amplitud a la señal.

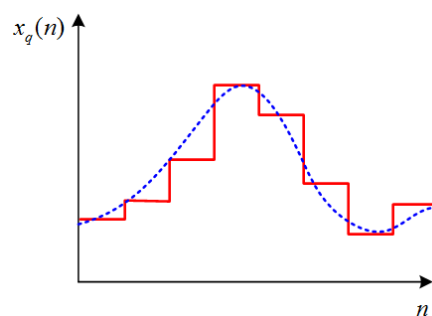


Figura 4: Señal cuantizada.

Una señal cuantizada en amplitud es una señal cuya amplitud, que inicialmente es continua, ha sido convertida a un conjunto finito y discreto de valores. Este proceso de cuantificación es una etapa fundamental en la conversión de señales analógicas a digitales, donde la amplitud de cada punto de la señal se asigna al nivel discreto más cercano, introduciendo un error inherente. Los valores continuos de la señal son aproximados a 2^n niveles de amplitud cuantizado, donde n corresponde al número de bits disponible, esto depende de cada sistema. La resolución de la señal por ende tendrá relación con el número de niveles que se tenga para codificar.

1.4. Señal Digital

Una señal digital es una representación de información mediante valores discretos, típicamente una secuencia de dígitos binarios (ceros y unos). A diferencia de las señales analógicas, que son continuas, las señales digitales se utilizan en circuitos digitales, computadoras y sistemas de comunicación para procesar y transmitir datos. Las señales digitales, en contraste con las señales analógicas, no varían en forma continua, sino que cambian en pasos o en incrementos discretos. La mayoría de las señales digitales utilizan códigos binarios o de dos estados. En resumen, decimos que la señal digital se define solo en instantes discretos de tiempo y con un amplitud cuantizada según se muestra en la Figura 5.

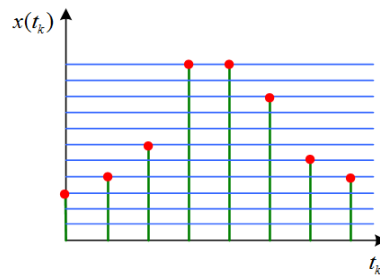


Figura 5: Señal digital.

Las señales dentro de una computadora digital (ver Figura 6) son números digitales o señales digitales, estas suceden sólo en el instante de reloj y son cuantizado (p.e. 8-bit) en un nivel de amplitud.

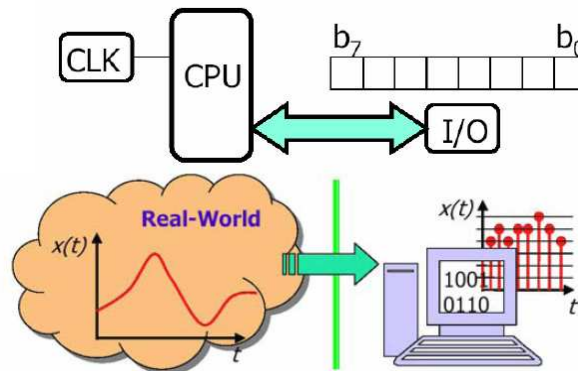


Figura 6: Bloque de proceso real a señales digitales.

1.5. Eje de Tiempo Discreto

Una *señal tiempo-discreto* es una secuencia o una serie de señal de valores definidos en puntos discretos (eje- t_k). Estos puntos discretos de tiempo se denota por t_k donde k es un índice entero de tiempo. La distancia de tiempo entre cada punto es el *tiempo-de-paso*, que se denota por h (también como T_s o simplemente T). Entonces:

$$h = t_k - t_{k-1}$$

La serie de tiempo se escribe de varias maneras:

$$\{x(t_k)\} = \{x(kh)\} = \{x(k)\} = x(0), x(1), x(2), \dots$$

Esta última expresión siempre y cuando $h = 1$. Para hacer la notación simple, escribimos la señal análoga, $x(t)$, las señales $x(k)$ y $x(t_k)$ se diferencian desde el esquema de la Figura 7.

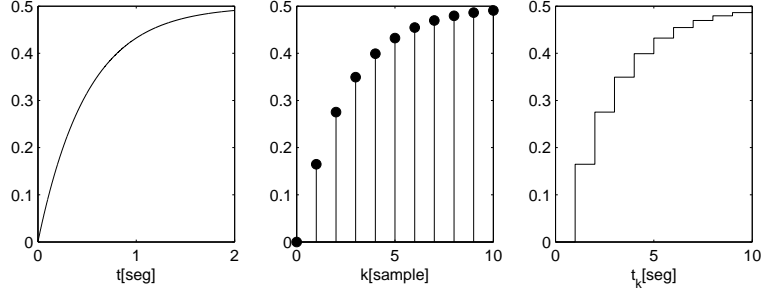


Figura 7: Señales continua, digital y reconstruida.

Por ejemplo las señales *tiempo-discreto* son los registros de las mediciones de señales de entrada y señal de salida de un filtro, la señal de control de un proceso físico controlado por una computadora, y que pueda simularse como respuesta de un sistema dinámico.

2. Fenómenos del Muestreo

2.1. Cuantización

La cuantización depende del número de bits que maneje el *convertidor-AD* (*Análogo-Digital*) que convierte una señal análoga $y_a(t)$ en una señal digital $y_d(t)$. Por ejemplo, las señales análogas como una señal de voltaje de una temperatura o velocidad provenientes de un sensor que deberán ser convertidas a una señal digital (previo muestreo según lo mostrado en la Figura 8), en la forma de un número que se usa en operaciones en la computadora.

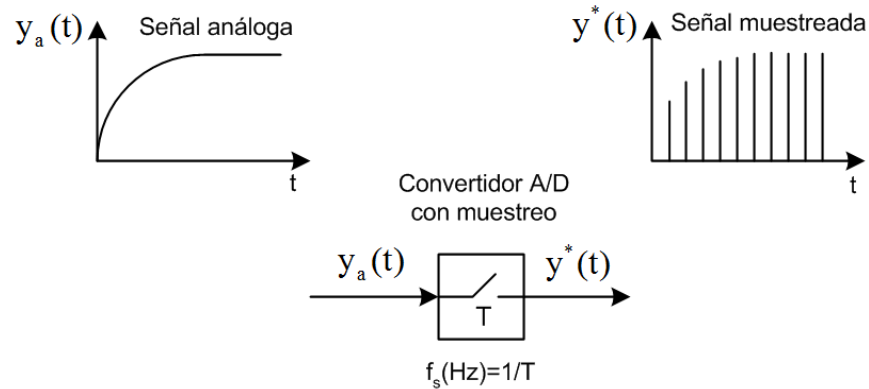


Figura 8: Esquema de muestreo.

El *convertidor-AD* es una interface entre el computador y un equipo externo (sensores). La señal digital es representada internamente en la computadora por un número de bits. Un bit es

una pequeña información almacenada en la computadora. Un bit tiene dos posibles valores que típicamente son denotados por 0 (cero) y 1 (uno).

Ejemplo: Asumiremos que la señal analoga $y_a(t)$ tiene valores en el rango $[Y_{min}, Y_{max}]$ y que el *convertidor-AD* representa y_a en un rango particular que usa n bits. Entonces y_a es convertido en una señal digital en la forma de un conjunto de bits:

$$y_d \sim b_{n-1}b_{n-2} \cdots b_1b_0$$

Donde cada bit b_i tiene un valor 0 ó 1. Estos bits son interpretados como pesos o coeficientes en un número con base 2:

$$y_d = b_{n-1}2^{n-1} + b_{n-2}2^{n-2} + \cdots + b_12^1 + b_02^0$$

b_0 es el LSB (Least Significant Bit), mientras b_{n-1} es el MSB (Most Significant Bit).

Vemos como los valores Y_{min} y Y_{max} son representados en el computador. Asumimos que el convertidor es de $n = 12$ bits, que es típico en un *convertidor-AD*.

- $y_d = Y_{min}$ es representado:

$$\begin{aligned} y_d &= Y_{min} \\ &= 0 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + \cdots + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= 000000000000_2 = 0_2 \\ &= 0 \quad (\text{decimal}) \end{aligned}$$

Donde el subíndice 2 significa base-2.

- $y_d = Y_{max}$ es representado:

$$\begin{aligned} y_d &= Y_{max} \\ &= 1 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^{10} + \cdots + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 111111111111_2 \\ &= 1000000000000_2 - 1 \\ &= 2^{12} - 1 \\ &= 4095 \quad (\text{decimal}) \end{aligned}$$

La cuantización Q , que es el intervalo representado por LSB, es:

$$q = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{\text{Número de intervalos}}$$

Luego:

$$Q = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{2^n - 1}$$

Para un *convertidor-AD* de 12 bits con $Y_{max} = 10\text{ V}$ y $Y_{min} = 0\text{ V}$, la cuantización es:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{Y_{max} - Y_{min}}{2^n - 1} \\ &= \frac{10\text{V} - 0\text{V}}{2^{12} - 1} \\ &= \frac{10\text{V}}{4095} = 2.4\text{mV} \end{aligned}$$

En pequeñas variaciones, de los niveles de cuantización no se detecta por el *convertidor-AD*. La Figura 9 muestra un ejemplo de una señal analógica y su correspondiente señal cuantizada para $n = 12$ bits y para $n = 4$ bits en el *convertidor-AD*.

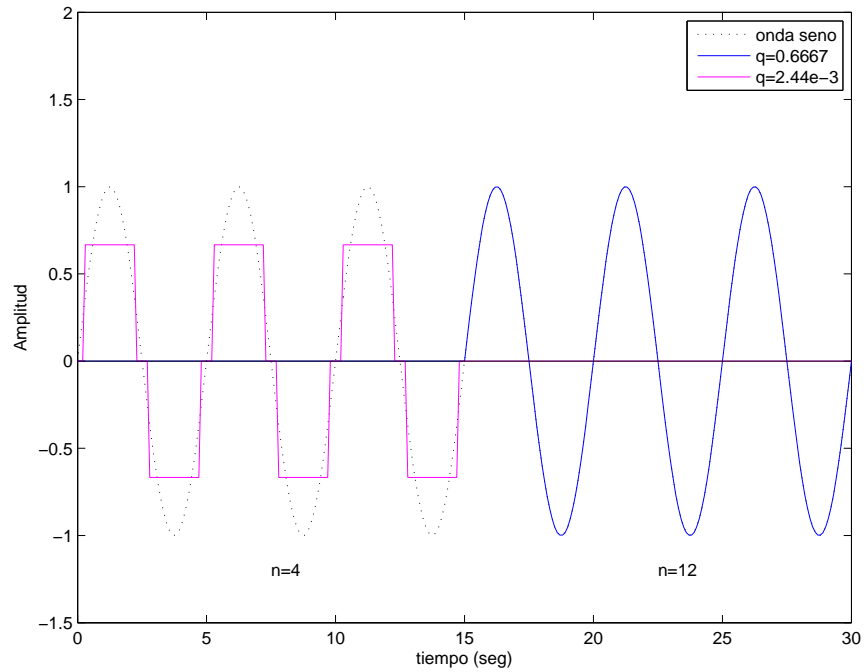


Figura 9: Niveles de cuantización.

En resumen cuanto mayor es el número de bits disponibles para describir el nivel instantáneo de la señal, más baja es el nivel del error de la cuantización, esto se observa en la Figura 10.

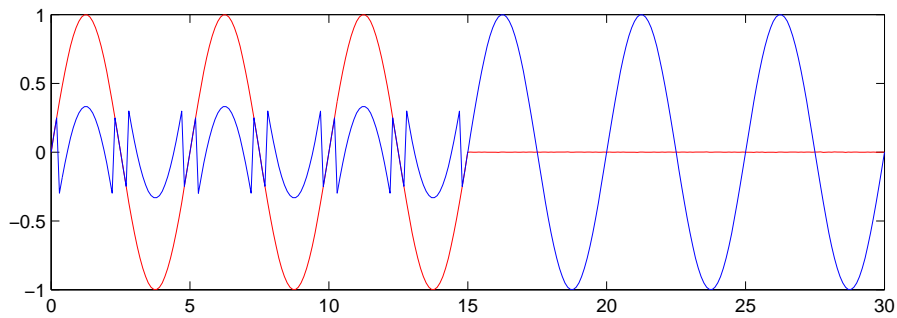


Figura 10: Error de cuantización.

2.2. Aliasing

Es un fenómeno particular que ocurre cuando una señal en tiempo continuo es muestreada. Los componentes de la frecuencia (componentes de una señal senoidal) en la señal análoga aparece como una senoide de baja frecuencia en la señal digital este fenómeno es llamado *aliasing* y aparece cuando la frecuencia muestreada es demasiado pequeña comparado a la frecuencia de la señal continua, esto se observa en la Figura 11.

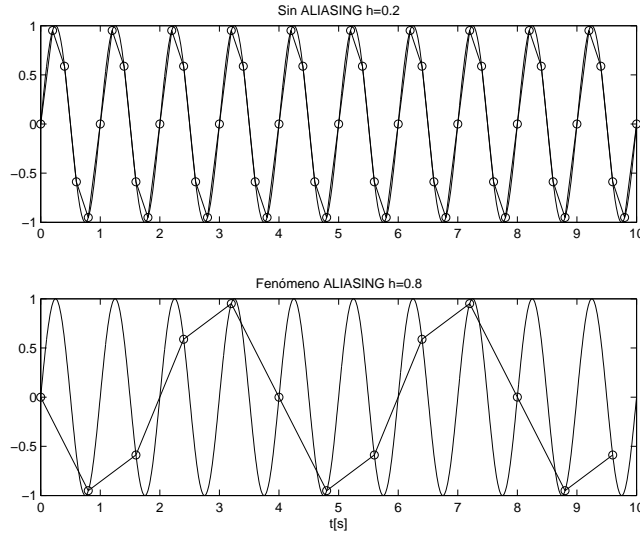


Figura 11: Señal continua $y(t)$ y señales muestreadas para diferentes intervalos de muestreo.

Ejemplo: considere el intervalo de muestreo es diferente en los dos ejemplos. La señal en tiempo-continuo es dado por:

$$y(t) = \sin 2\pi t$$

La señal tiene la frecuencia:

$$f_{con} = 1\text{Hz}$$

Se ha dibujado líneas rectas entre los valores de señal discontinuos para hacer estos valores más visibles. Estos dos casos son los siguientes:

1. Intervalo de muestreo $h = 0.2\text{s}$ correspondiente a la frecuencia de muestreo:

$$f_s = \frac{1}{h} = \frac{1}{0.2} = 5\text{Hz}$$

La señal discreta tiene la misma frecuencia que la señal continua, ver Figura 11. Entonces, *no hay aliasing*.

2. Intervalo de muestreo $h = 0.8\text{s}$ correspondiente a la frecuencia de muestreo:

$$f_s = \frac{1}{h} = \frac{1}{0.8} = 1.25\text{Hz}$$

La señal discreta tiene diferente (baja) frecuencia que la señal continua, ver Figura 11. Entonces, *hay aliasing*.

Para hallar la frecuencia de la señal resultante, f_{dis} se obtiene desde la Figura 13. Haciendo relaciones de triángulos semejantes obtenemos:

$$\frac{0.625}{f_{dis}} = \frac{1.25 - 0.625}{1.25 - 1} = \frac{0.625}{1.25 - 1}$$

Luego obtenemos:

$$f_{dis} = 0.25\text{Hz}$$

Calculando el periodo de muestreo:

$$T_{dis} = \frac{1}{f_{dis}} = \frac{1}{0.25\text{Hz}} = 4\text{s}$$

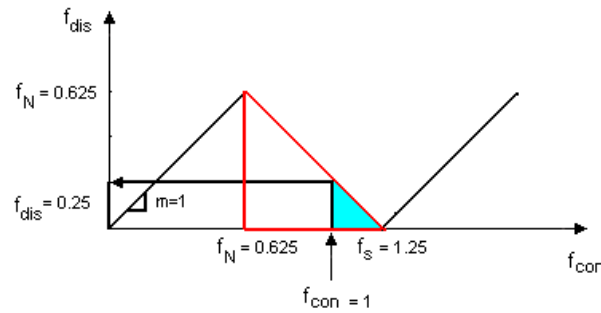


Figura 13: Formando triángulos semejantes para hallar f_{dis} .

El aliasing es una distorsión causada cuando las frecuencias altas de una señal se “pliegan” hacia frecuencias más bajas durante la digitalización, lo que impide reconstruir la señal original con fidelidad. Los componentes en frecuencia del aliasing causa problemas en las aplicaciones de audio y aplicaciones de control. Una manera de reducir el problema del aliasing es pasar la señal en tiempo continuo a través de un filtro pasa-bajo antes de muestrear. Este filtro anti-aliasing debe ser un filtro análogo que se implementa usando componentes electrónicos como resistores, capacitores y amplificadores operacionales.

Referencias

- [1] C. Phillips, H. Nagle. “*Control System Analysis and Design*”. Prentice Hall, 1984.
- [2] Sam Fadali. “*Digital Control Engineering Analysis and Design*”. Academic Press is an imprint of Elsevier, 2009.
- [3] Katsuiko Ogata. “*Sistemas de Control en Tiempo Discreto*”. Prentice Hall, 1996.
- [4] Karl. J. Astrom & Bjorn Wittenmark. “*Computer Controller System*”. Prentice Hall, 1997.