(12967) ראיה אנושית גישה חישובית | תרגיל 4

שם: רונאל חרדים | ת"ז:208917641

שאלה 1

נניח כי יש לנו מערכת ויזואלית שמשתמשת ב k חיישנים

(א)

נניח כי$x \in R^{400}$ הוא אור שאנחנו רוצים לייצג.
מחוקי גרוסמן נוסע כי ניתן לבטא את האור כפי שהוא נתפס אצלנו בעין באופן הבא:

$$y_{k\times1} = S_{k\times400}x_{400\times1}$$

נגדיר את המטריצה $P_{400\times k}$ כך שבכל שורה שלה נמצא ספקטרום של אחד מכל k הפנסים.
יהי $\alpha \in R^k$ וקטור שהוא הצירוף הלינארי של האורות בשורות של המטריצה P. האור המתקבל ע"י הצירוף הלינארי מוגדרך באופן הבא:

$$l_{300\times1} = P_{300\times k}\alpha_{k\times1}$$

שני האורות יתפסו זהים אם מתקיים $Sx = Sl$, כלומר ההטלה שהמוח שלנו מבצע על הצבע האמיתי היא אותה ההטלה שהמוח שלנו מבצע על הצירוף הלינארי של אורות הפנסים. ואז

$$Sx = SP\alpha$$

אם המטריצה SP הינה הפיכה, אזי ניתן לייצג כל צבע באמצעות צ"ל של פנסים - α:

$$(SP)^{-1}Sx = \alpha$$

אם אם המטריצה אינה הפיכה, אזי קיים צבע שלא ניתן לייצג באמצעות צ"ל של k הפנסים.

נביא דוגמה:

עבור $k = 3$ נקח שלש אורות שהייצור שלהם הוא הייצוג הבא

$$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0...0)^t$$

אזי במטריצה P בשורה הראשונה יהיו אחדות, ובחוץ יהיו אפסים.
אם המטריצה S היא המטריצה הבאה

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \mathrm{s}_{1,1} & \mathrm{s}_{1,2} & \cdots & \mathrm{s}_{1,400} \\ \mathrm{s}_{2,1} & \mathrm{s}_{2,2} & \cdots & \mathrm{s}_{2,400} \\ \mathrm{s}_{3,1} & \mathrm{s}_{3,2} & \cdots & \mathrm{s}_{3,400} \end{pmatrix}$$

אזי המכפלה SP היא:

$$SP = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{2,1} & s_{3,1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$SP\alpha = SP \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i S_{i,1}\alpha_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

עבור וקטור עמודה x שיש לו 1 במקום ה j ו 0 בשאר הקאורדינטות.
הוקטור שמתקבל מהמכפלה Sx הוא וקטור העמודה ה j של המטריצה S:

$$Sx = \begin{pmatrix} S_{j,1} \\ S_{j,2} \\ S_{j,3} \end{pmatrix}$$

אם נבחר את j כך שבעמודה ה j במטריצה S בשורה השניה אן השלישית אין אפסים (בהכרח יש לנו עמודה כזאת) אזי בוקטור העמודה המתקבל מהמכפלה Sx בשורה השניה או השלישית יש איבר ששונה מ 0, ובהכרח לא קיים ווקטור מקדמים α כך ש

$$SP\alpha = \begin{pmatrix} \sum_i s_{i,1}\alpha_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{j,1} \\ s_{j,2} \\ s_{j,3} \end{pmatrix} = Sx$$

אם כן ראינו דוגמה לכך שלא ניתן לייצר צבע שרירותי מצ"ל של $k = 3$ פנסים.

(ב)

נניח ובחרנו באופן רנדולי את k צבעי הבסיס. כלומר הגרלנו את המטריצה P שהשורות שלה מכילות את הצבעים היסודיים.
אזי בהינתן המטריצה S, מכיוון ששורות המטריצה בת"ל, מכפלת שתי המטריצות תתן לנו מטריצה ריבועית רנדומלית מגודל $k \times k$.
הסיכוי שהמטריצה הזאת לא הפיכה שואף ל 0.

נוכיח כי הסיכוי ששורות או עמודות המטריצה SP ת"ל שואף ל 0.
נניח שהגרלנו את המספרים הבאים לשורה הראשונה $a_1 ... a_k$ ואנחנו רוצים לבחור מספרים לשורה השניה.
נניח כי המספר הראשון שבחרנו לשורה השניה b_1 הוא מכפלה של a_1 כך ש

$$b_1 = \lambda a_1$$

בהסתברות שואפת ל 1 $a_1 \neq 0$ משום שהגרלנו אותו באופן אחיד מתוך סט אינסופי של מספרים. ולכן קיים λ יחיד כזה.
כעת, נניח כי אנו באים להגריל את המספר השני בשורה השניה. בשביל ששתי השורות יהיו ת"ל אנו צריכים שיתקיים

$$b_2 = \lambda a_2$$

והסיכוי שזה יקרה שואף ל 0 (משום שטווח המספרים אינסופי).
אם כן ראינו כי הסיכוי שהשורה הראשונה והשניה ת"ל היאנו אפסי.

כעת אנו רוצים להגריל את השורה השלישית, שני המספרין הראשונים שהגרלנו יגדירו לנו את המקדמים $\lambda_1 \lambda_2$ של הצ"ל של שתי השורות הקודמות. כדי שהשורה השלישית תהיה צ"ל של שתי השורות הקודמות נצטרך שיתקיים

$$c_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_2$$

והסיכוי להגריל מספר כזה הינו אפסי.

אסכן, ראינו כי הסיכוי להגריל שורות או עמודות ת"ל במטריצה P הינו אפסי, ולכן סביר להניח כי המטריצה הינה בת"ל.
אם כן, המכפלה SP הינה גם כן בת"ל בהסתברות שואפת ל 1. ולכן היא הפיכה. ולכן בהסתברות שואפת ל 1 אם נגריל k פנסים יהיה ניתן להתאים כל צבע לקומבינציה לינארית שלהם.

(ג)

נציע ניסוי כנדרש.
אם בחרנו k תבעים כך שלא ניתן להתאים צ"ל שלהם לבע מזויים. זאת אומרת שיש בניהם תלות לינארת. לכן נרצה לגלות בניסוי האם יש תלות לינארית בין הצבעים העיקריים שבחרנו.

1. בניסוי נציב שני מסכים.
2. עבור כל צבע מ k הצבעים, נקרין את הצבע על המסך הימני.
3. נבקש מהנסיין לשחק עם העוצמות של $k-1$ הפנסים הנותרים, ולנסות ליצור על המסך השמאלי, את אותו הצבע שמופיע על המסך הימני.
4. אם הוא הצליח - יש תלות, ו k הצבעים שבחרנו גרועים.
5. אחרת - אם הוא בדק את k הפנסים ולא הצליח ליצור צבע תואם בין המסך הימני לשמאלי, הבחירה שלנו הייתה טובה.

שאלה 2

(א)

בהינתן $k-1$ פנסים $x_1, ...x_{k-1} \in R^{400}$.
קבוצת האורות שאנו יכולים לייצר, נמצאים במרחב שנפרש ע"י $k-1$ הפנסים:

$$span\left\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\right\}$$

כדי להגיע לכל הצבעים שנפרשים ע"י k החיישנים, אנו צריכים שהפנס ה k יהיה ב"ת ב $k-1$ הפנסים הקודמים.
בהינתן פנס כזה - x_k - ניתן לייצג את כל האורות שניתני לייצוג ע"י k הפנסים כך:

$$L = \left\{l \mid l = \lambda \cdot x_k + \text{span}\left\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\right\}, \lambda \neq 0\right\}$$

(ב)

הסיכוי שנגריל באופן רנדומלי צבע l כך שהוא יהיה צ"ל של $k-1$ הפנסים הקודמים. שווה לסיכוי ש l הינו ת"ל ב $k-1$ הפנסים.
ממה שציינו בסעיף ב של שאלה 1 ראינו כי הסיכוי להגריל ווקטור כך שהוא יהיה צ"ל של הווקטורים הקודמים שואף ל 0.
לכן הסיכוי שנגריל l שלא ניתן להתאים לו צ"ל של $k-1$ הפנסים האחרים שווה ל 1.

שאלה 3

נתאר את שני חלקי הניסוי:

(א)

ניסוי בכדי לגלות את מספר חיישני הצבע:

1. נבחר שני מסכים, נגריל אור l ונקרין אותו על המסך הימני.

2. ניתן לחייזר פנסים $k = 1, 2, 3...$, נבקש ממנו להגיע אל l ע"י הקרנת הפנסים ושינוי העוצמה על המסך השמאלי.

3. אם הוא הצליח להגיע לצבע נסיק כי יש לו k חיישנים, אחרת - נביא לו פנס נוסף (נגדיל את k ב 1) ונגיד לו שישחק עם הפנסים.

4. כשהוא יצליח, נסיק כי יש לו k חיישנים.

(ב)

ניסוי בכדי למצוא את תת המרחב שנפרש ע"י החיישנים:
נרצה להציע ניסוי שמוצא את המטריצה S. כך נוכל למצוא את תת המרחב שנפרש ע"י $span(S)$.

1. ניתן לחייזר את k הפנסים שגילינו בניסוי הקודם, ונגריל 400 אורות שונים - $l_1, l_2...l_{400}$.

2. נבקש מהחייזר להגיע לכל אחד מ 400 האורות ע"י k הפנסים שיש לו.

3. עבור כל אור l_i נשמור את עוצמת כל אחד מ k הפנסים שהחייזר כיוון בכדי להגיע לאור ה i, בווקטור α_i. כך שמתקיים

$$Sl_i = SP\alpha_i$$

4. נסדר את הווקטורים כשורות מטריצה, נפתור את מערכת המשוואות. כך נוכל להסיק את תת המרחב שנפרש ע"י חיישני החייזר.

שאלה 4

נתון:

$$l_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)^T$$
$$l_2 = (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)^T$$

נתון כי מספר החיישנים $k = 3$.

בנוסף נתון כי הרגישות הספקטרלית של החיה היא:

$$s1 = (1, 2, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$
$$s2 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$$
$$s3 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 2, 1)$$

אנו יודעים כי התגובה של החיה ל l_1 היא (y_1, y_2, y_3)
והתגובה של החיה ל l_2 היא (z_1, z_2, z_3).

נחשב את התגובות (y_1, y_2, y_3) ו (z_1, z_2, z_3):

ראינו כי $y = SI$.
נגדיר את המטרצה S

$$S = \begin{bmatrix} 1,2,3,2,1,0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,1,1,1,1,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0,1,2,3,2,1 \end{bmatrix}$$

נפתור:

$$(y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} 1,2,3,2,1,0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,1,1,1,1,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0,1,2,3,2,1 \end{bmatrix} \cdot (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)^T$$

$$= [1 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 6, 7 + 6 + 5 + 4, 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5] = [72, 22, 27]$$

$$(z_1, z_2, z_3) = \begin{bmatrix} 1,2,3,2,1,0,0,0,0,0 \\ 0,0,0,1,1,1,1,0,0,0 \\ 0,0,0,0,0,1,2,3,2,1 \end{bmatrix} \cdot (10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)^T$$

$$= [1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5, 4 + 5 + 6 + 7, 1 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 6] = [27, 22, 72]$$

שאלה 5

נתון:

$$A : 2, 3$$
$$B : 1, 3$$
$$C : 2$$

אנו רואים שני צבעים כ $metamers$ אם המוח שלנו מחשב את אותו החישוב לשני הצבעים. אם מתקיים $Sl_1 = Sl_2$, כלומר ההטלה שהמוח שלנו מבצע על שני הצבעים היא אותו הדבר. לכן C יחשוב ששני הצבעים הם $metamers$.
ל C יש רק את החיישן השני, לכן הוא יחשוב ששני הצבעים הם למעשה אותו הצבע, כפי שניתן לראות החיישן האמצעי מחזיר את אותו המספר (22) עבור שני הצבעים - l_1, l_2. לכן הוא יראה אותם כ $metamers$.