/"___________-___________.aux

# 1 מרחב הסתברות:

מרחב הסתברות מורכב משלשה $\Omega, P, \mathcal{F}$:

1. **מרחב מדגם ־ $\Omega$:** קבוצה לא ריקה המכילה את כל התוצאות האפשריות.

2. **פונקציות הסתברות $P$:**

- **פונקצית הסתברות נקודתית $P$:** היא הפונקציה ששולחת איבר ממרחב המדגם לקטע $[0,1]$. כלומא ־ עבור כל מאורע בתרחב המדגם היא מחזירה הסתברות בין 0 ל 1.
  **דרישות:** אנו נדרוש שסכום כל ההסתברותיות במרחב המדגם יהיה שווה ל 1

- **פונקצית הסתברות:** בניגוד לפונקציית הסתברות נקודדית שמוגדרת על **מאורע מסויים במרחב המדגם.** פונקצית הסתברות ־ מוגדרת על **תת מאורע** במרחב המדגם כלומר ־ מספר מאורעות ולא מאורע בודד.

$$P : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$$

כאשר $\mathcal{F}$ מסמלת אוסף של תתי מאורעות ממרחב המדגם $\Omega$.

**דרישות:**

**1:** אנו נדרוש $P(\Omega) = 1$ כלומר ־ כמו בפונקצית הסתברות נקודתית, ההסצברות של כל המרחב צריכה להיות שווה 1.

**2: סיגמא אדטיביות:** עבור מאורעות זרים מתקים כי סכום ההסתברויות שווה לאיחוד ההסתברויות.

**הערה ־ קבוצה בת מניה:** כשנרצה לסכם קבוצות בנות מניה שאינן סופיות (כדוגמת קבוצת הטבעיים, והרציונלים). נוכל להשתמש בטור שיביא לנו קירוב של הסכימה.
**בקבוצה שאינה בת מניה:** נדרוש שתהיה קבוצה $A$ שמוכלת ב $\Omega$ אך אינה שווה לה. כך שסכום הקבוצה $A$יהיה שווה ל 1

**תכונות:**

1. $P(\emptyset) = 0$

2. איחוד של מאורעות זרים שווה לסכום המאורעות (כמו הדרישה של סיגמא אדטיביות, רק בהפוך).

3. **מונוטניות:** אם מתקיים $A \subset B$ אזי $P(A) \leq P(B)$.

4. **משלים:** $A^c$היא הקבוצה המשלימה של $A$ ומתקיים: $P(A^c) = 1 - P(A)$.

## 1.1 בניית פונקצית הסתברות, מפונקצית הסתברות נקודתית:

**כיצד נבצע זאת:** בהינתן $p$ פונקצית הסתברות נקודתית נגדיר את $P_p : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ על ידי:

$$P_p(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

**הגדרה:** פונקציית הסתברות שנבנית על ידי פונקצית הסתברות נקודתית נקראת **פונקציית הסתברות בדידה**.

## 1.2 מרחב התסתברות אחיד:

**הגדרה:** נאמר שמרחב ההסתברות הינו אחיד אם מתקיים $P(\omega_1) = P(\omega_2)$ עבור כל $\omega_1, \omega_2$. כלומר ־ ההסתברות שווה עבור על האיברים במרחב.

עבור $\Omega$ קבוצה סופית מתקיים $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ ולכן יתקיים עבור $A$: $P_p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

## 1.3 מכפלת מרחבי הסתברות:

כאשר יש לנו שני מרחבי הסתברות שונים עם פונקציות הסתברות שונות. נרצה להגדיר את המכפלה של של שני מרחבי הסתברות.

**הגדרה:** אם $p_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^+$ ו $p_2 : \Omega \to_2 \mathbb{R}^+$ אזי מכפלת מרחבי ההסתברות (זאת פונקציה של זוגות סדורים כאשר האיבר הראשון שייך למרחב הראשון והאיבר השני שייך למרחב השני) מוגדרת להיות:

$$p1 \times p2((\omega 1, \omega 2)) = p1(\omega 1) \cdot p2(\omega 2)$$

**טענה:** אם $p_1, p_2$ הן פונקציות הסתברות אחירות. אזי גם מרחב המכפלה הינו אחיד.

## 1.4 ניסוי דו שלבי:

אנו מבצעים ניסוי ראשון. ולפי תוצאות ניסוי הראשון אנו מחליטים כיצד נבצע את הניסוי השני. כלומר ־ הניסוי השני מושפע מתוצאות הניסוי הראשון.

(למעשה זוהי הכללה של מכפלת מרחבי הסתברות. שהרי נוכל להחליט שאנו מבצעים ניסוי שני בלי שתוצאת הניסוי הראשון תשנה)

**הגדרה:** יהיו $\Omega_1, \Omega_2$ מרחבי הסתברות עם פונקצית הסתברות $p_1$על $\Omega_1$ ופונקצית הסתברות $p_{\omega 1}$ המגדירה את תוצאת הניסוי על $\omega_2$ לפי תוצאות הניסוי על $\omega_1$.

מרחב ההסתברות של ניסוי דו שלבי מוגדר להיות $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ופונקצית ההסתברות הנקודתית מוגדרת להיות $q : \Omega \to \mathbb{R}^+$ והיא מוגדרת באמצעות:

$$q((\omega 1, \omega 2)) = p(\omega 1) p_{\omega 1}(\omega 2)$$

**הערה:** בניסוי דו שלבי הפונקציה $p_{\omega 1}$נבחרת **באופן נפרד** עבור כל $\omega_1 \in \Omega_1$

### 1.5 חסם האיחוד:

**טענה:** יהיו $A,B\in\mathcal{F}$ מאורעות כלשיהן במרחב המדגם. אזי מתקיים: $P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$
וכאשר הם זרים מתקיים שוויון ממש.

**ובאופן כללי:** עבור $A_1,A_2.....$ סדרת מאורעות: $P(\cup_{i\in N})A_i\leq\sum_{i\in N}P(A_i)$

**אי שוויון בול:** אותו אי שוויון של חסם האיחוד, עובד גם עבור $n\to\infty$

### 1.6 רציפות פונקצית ההסתברות:

**הגדרה - סדרה מונוטונית:** יהיו $A_1,A_2.....$ סדרת מאורעות. נאמר שהסדרה היא מונוטונית עולה אם מתקיים $A_n\subset A_{n+1}$.

**טענה:** אם סדרת מאורעות היא מונוטונית עולה, אזי היא מקיימת: $lim_{n\to\infty}P\left(A_n\right)=P\left(\cup_{i\in N}A_i\right)$
מכיוון שהיא מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ע"י 1.

## 2 עיקרון ההכלה וההדרה:

**עבור שתי מארעות:** יהיו $A,B$ מאורעות, אזי:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

**ועבור המקרה הכללי:** יהיו $A_1...A_n$מאורעות, אזי:

$$\mathbb{P}\left(\underset{i\in[n]}{\cup}A_i\right)=\sum_{i\in[n]}\mathbb{P}\left(A_i\right)-\sum_{i\in[n]}\sum_{j\in[i-1]}\mathbb{P}\left(A_i\cap A_j\right)+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}\mathbb{P}\left(A_i\cap A_j\cap A_k\right)$$
$$-\ldots+(-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right)$$

ובאופן שקול:

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i\in[n]}A_i\right)=\sum_{\substack{I\subset[n]\\ i\neq\emptyset}}(-1)^{|I|+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$$

**הערה:** הצורה הראשונה של הנוסחה תהיה טובה יותר עבור אי שוויוני בונופורני.

**טענה - אי שוויוני בונופורני:** בכל מקום בו נקטע את הנוסחה נקבל חסם - או מלעיל או מלרע. לפי הסימן של החלק הבא בנוסחה:
אם הוא חיובי - החסם הוא מלרע.
אם הוא שלילי - החסם הוא מלעיל.

# 3 הסתברות מותנית:

יהיו $A, B$ מאורעות , אנו נרצה לשאול מה ההסתברות שמאורע $A$ קרה, בתנאי שמאורע $B$ קרה או להיפך.

**הגדרה - הסתברות מותנית:** יהיו $A, B$ מאורעות כך ש $P(B) > 0$ אזי ההסתברות של $A$ בהינתן $B$ שווה ל:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

## 3.1 בניית פונקציית הסתברות מהסתברות מותנית:

**טענה:** עבור שני מאורעות $A, B$ ועבור $P(B) \geq 0$ אם נגדיר את $P_B$ כך $P_B = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ היא תהיה פונקצית הסתברות.

## 3.2 נוסחאות הסתברות מותנית:

עבור שני מאורעות $A, B$ ועבור $P(B) \geq 0$

### 3.2.1 כלל השרשרת:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B)$$

**כלל השרשרת לכמה מאורעות:** יהיו $A_1.....A_n$ מאורעות כך ש $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 0$ אזי:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(A_n \mid \bigcap^{n-1} A_i\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k \mid \sum_{i=1}^{k-1} A_i\right)$$

### 3.2.2 כלל בייס:

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

## 3.3 התניה במספר מאורעות:

**טענה:** יהיו $A, B$ מאורעות כך ש $P(A \cap B) > 0$ נסמן התניה ב $A$: $P' = P_A$ ולאחר מכן $P'' = P'_B$ אזי לכל מאורע $D$ מתקיים:

$$\mathbb{P}''(D) = \mathbb{P}(D \mid A \cap B) = \mathbb{P}_{A\cap B}(D)$$

כלומר ־ אם מתנים בשני דברים או יותר סדר ההתניה לא משתנה.

### 3.4 הסתברות מותנית וניסוי דו \ רב שלבי:

למעשה הסתברות מותנית הינה הכללה של ניסוי דו שלבי.

**טענה:** יהי ניסוי דו שלבי עם פונקצית הסתברות $q((\omega 1, \omega 2)) = p(\omega 1)p_{\omega 1}(\omega 2)$ אזי:

1. $\mathbb{P}\left(\{(\omega_1, \cdot)\}\right) = p\left(\omega_1\right)$ ההסתברות עבור כל מאורע מ $\Omega_1$
2. $\mathbb{P}\left(\{(\cdot, \omega_2)\} \mid \{(\omega_1, \cdot)\}\right) = p_{\omega_1}\left(\omega_2\right)$

### 3.5 נוסחת ההסתברות השלמה:

**הגדרה ־ חלוקה:** יהיו $A_1 .....A_n$מאורעות, נאמר שהן חלוקה של $\Omega$ אם מתקיים $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ והמאורעות זרים בזוגות.
כלומר עבור כל שני מאורעות החיתוך שלהם שווה לקבוצה הריקה, ואיחוד כל המאורעות שווה לכל המרחב.
**טענה:** אם $A_1 .....A_n$ חלוקה של $\Omega$ ויהי $B$ מאורע כלשהו, אזי:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right) \mathbb{P}\left(B \mid A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B \cap A_i\right)$$

## 4 אי תלות:

באופן בלתי פורמלי ־ אם עבור שני מאורעו מתקיים

$$P(A|B) = P(A) \iff \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

אזי $A, B$ ב"ת.
**הגדרה:** יהיו $A, B$ מאורעות נאמר שהם ב"ת אמ"מ

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

**טענות והערות:**

1. **הערה:** אם שני מאורעות הם ב"ת, **זה לא אומר שהם זרים**. אלא להיפך מכיוון שהחיתוך שלהם גדול מ 0.
2. **הערה:** לפעמים יש קשר פיזי בין המאורעות אך הם עדיין ב"ת. אך אם אין קשר פיזי הם ב"ת.

3. במרחב מכפלה, מאורעות מהצורה $A_1 \times \Omega_2$ ו$A_2 \times \Omega_1$ הם **ב"ת .**

4. לכל $A \in \mathcal{F}$ מתקיים: $A$ ב"ת ב $\Omega$. וגם $A$ ב"ת בקבוצה הריקה.

5. אם $A, B$ ב"ת אזי גם $A, B^c$ ב"ת.

6. אם $A, B$ ב"ת וגם $P(B) > 0$ אזי: $P(A|B) = P(A)$

### 4.1 אי תלות של כמה מאורעות:

**טענה:** יהיו $A, B, C$ מאורעות , ומתקיים $A, B$ ב"ת אחד בשני וגם $A, C$ב"ת אחד בשני, **לא בהכרח** שגם $A$ ו $B \cap C$ ב"ת.
**טענה - אי תלות באיחוד:** אם מאורע $B$ ב"ת במאורעות $A_1 ....A_n$, אזי מאורע $B$ גם ב"ת ב $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$
**הגדרה:** נאמר שהמאורע $A$ ב"ת במאורעות $\{B_1 ....B_n\}$ אם לכל $I \subset [n]$ מתקיים ש $A$ ב"ת $\bigcap_{i \in I} B_i$.
**טענה - אי תלות במספר מאורעות משלימים:** אם $A$ ב"ת ב $\{B_1 ....B_n\}$ אזי הוא גם ב"ת ב $\{B_1^c ....B_n^c\}$ ובפרט בחיתוך של המשלים.

### 4.2 אי תלות של קבוצת מאורעות:

**הגדרה:** מאורעות $A_1 ....A_n$ יקראו ב"ת אם לכל $I \subset [n]$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \Pi_{i \in I} \mathbb{P}\left(A_i\right)$$

**כלומר:** כל תת קבוצת מאורעות צריכה להיות ב"ת אחד בשני. **חשוב לשים לב:** אי תלות בזוגות **לא גורר** אי תלות של כל אוסף המאורעות.

**דרה שקולה:** מאורעות $A_1 ....A_n$ יקראו ב"ת אמ"מ לכל $i \in [n]$ מתקיים ש $A_i$הוא ב"ת ב $\bigcap_{j \in I, j \neq i} A_i = \{A_1, ...A_{i-1}, A_{i+1} ....A_n\}$

### 4.3 אי תלות של אינסוף מאורעות:

**הגדרה:** סדרת מאורעות $A_1, A_2.....$ נקראת ב"ת אם לכל $n \in N$ קבוצת המאורעות $\{A_1, A_2.....A_n\}$ ב"ת.
**באופן שקול:** לכל $I \subset N$ סופית. מתקיים $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}\left(A_i\right)$.
**טענה:** אם $A_1, A_2.....$סדרת מאורעות ב"ת אזי:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right) = \lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right)$$

## 5 משתנים מקריים:

**באופן כללי:** לרוב מ"מ מייצג מספר או סכום מתוך מרחב המדגם - $\Omega$. לרוב השאלות יפתחו ב "כמה" או "למה שווה", שאלות של "מה ההתפלגות של $X$" הכוונה היא מה ההסתברות לכל תשובה של $X$.

**הגדרה:** משתנה מקרי $X$ הוא פונקציה $X:\Omega\longrightarrow R$

**אינדיקטור:** אם $A$ מאורע כלשהו $1_A$היא פונקציית אינדיקטור של $A$שמחזירה 1 עבור $\omega\in A$ ומחזירה 0 עבור $\omega\notin A$.

## 5.1 התפלגות של מ"מ :

**הגדרה:** יהי $X$ מ"מ אזי ההתפלגות של $x$ היא פונקציה $P_X:\mathcal{F}_\mathcal{R}\longrightarrow\mathcal{R}^+$ המוגדרת על ידי :

$$\mathbb{P}_X(S)=\mathbb{P}(X\in S)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\in S\})$$

**טענה:** $P_X$ הינה פונקצית הסתברות על $R$

**מינוח:** עבור $X$ שמוגדר ע"י פונקצית הסתברות בדידה, נאמר ש $X$ הוא מ"מ בדיד.

**טענה:** מ"מ בדידים הם למעשה מרבח ווקטורי ולכן סגורים לחיבור וכפל בסקלר. לכן עבור שני מ"מ בדידים - החיבור שלהם הוא גם מ"מ בדיד.

## 5.2 התפלגות משותפת והתפלגויות שוליות:

בהינתן שני מ"מ $X,Y$ נבנה טבלה באופן הבא: $Y$ מייצג את השורות ו $X$ מייצג את העמודות. ואיברי מרחב המדגם מופיעות בעמודה והשורה הראשונה. וההסתברויות לכל צמד כתובות בתאים.

אם נסכום את העמודות נקבל את הערך של $X$ ללא קשר ל $Y$. ולהיפך עם השורות.

**התפלגות שולית:** היא הסכום של כל שורה או עמודה. ומתקיים ש $x,Y$ ב"ת אם ההסתברות השולית שווה למכפלת ההסתברויות.

| התפלגות שולית של $X\downarrow$ | .... | 1 | $X\backslash Y$ |
|---|---|---|---|
| | $(1,2)$ | $(1,1)$ | 1 |
| | | $(2,1)$ | ... |
| | | | = התפלגות שולית של $Y$ |

## 5.3 התפלגויות חשובות:

### 5.3.1 התפלגות ברנולי:

נאמר ש $X$ מתפלג ברנולי אם הוא מ"מ בדיד, וגם מתקיים $P(X=1)=\alpha$ וגם $P(X=0)=1-\alpha$

**נסמן:** $X\sim Ber(\alpha)$

**מייצג:** הטלת מטבע לא הוגן, או לניסוי שההסתברותלהצלחה בו הינה $p$. כאשר $X$ סופר כמה הצלחות היו.

### 5.3.2 התפלגות אחידה:

נאמר ש $X$ מתפלג אחיד על הקטע $[a,b]$ אם לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $P(X=x)=\frac{1}{b-a}$

**נסמן:** $X\sim Unif([a,b])$.

**מייצג:** הטלת מטבע או זריקת קוביה פעם אחת.

### 5.3.3 התפלגות גיאומטרית:

נאמר ש $X$ מתפלג גיאומטרית עם פרמטר $0 \leq p \leq 1$ אם $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ עבור $k$ טבעי.
כאשר $p$ הוא הסתברות למאורע בודד.
**נסמן:** $X \sim Geo(p)$
**מייצג:** $n$ ניסויים ב"ת שלכל אחד מהם יש הסתברות $p$ להצלחה, $X$ סופר כמה ניסויים היו **עד להצלחה**.

**טענות:**

1. **טענה:** יהי $X \sim Geo(p)$ ויהי $k \in N$ מתקיים: $P(X>k)=(1-p)^k$
2. **יצירת מ"מ גיאומטרי מסדרת מ"מ עם התפלגות ברנולי:** תהי $X_1, X_2....$סדרת מ"מ ב"ת עם $X_i \sim Ber(p)$ לכל $i$ נגדיר: $X=min(n \in N | X_n=1)$ אזי $X \sim Geo(p)$.
3. **תכונת חוסר הזיכרון:** אם $X \sim Geo(p)$ אזי לכל $k$ טבעי מתקיים : : $(X-k|X>k) \sim X$. כלומר ־ הזזת המשתנה המקרי בקבוע, לא משפיעה על ההתפלגות שלו אלא היא נשארת אותו הדבר.
4. **טענה ־ הוכחת התפלגות גיאומטרית ע"י חוסר הזיכרון:** אם $X$ מ"מ שנתמך על הטבעיים ($supp(X)=N$) ו $(X-1|X>1) \sim X$ אזי $X \sim Geo(p)$ עבור $0<p<1$ כלשהו. כלומר ־ אם $X$ מקיים את תכונת חוסר הזיכרון, אזי הוא מ"מ גיאומטרי.
5. **טענה ־ הגדרה שקולה למשתנה מקרי גיאומטרי:** יהי $X$ משתנה מקרי שנתמך על הטבעיים ומקיים $P(X=1)<1$ אזי התנאים הבאים שקולים:
**1:** $X$ מתפלג גיאומטרית. **2:** $(X-1|X>1) \sim X$. **3:** $(X-k|X>k) \sim X$ לכל $k$ טבעי.

### 5.3.4 התפלגות בינומית:

נאמר ש $X$ מתפלג בינומית עם פרמטר $0 \leq p \leq 1$. ועבור $n$ טבעי. אם לכל $k \in \{0,1,....n\}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

**נסמן:** $X \sim Bin(n,p)$
**מייצג:** $n$ ניסויים ב"ת שלכל אחד מהם יש הסתברות ברנולי $p$ להצלחה, $X$ סופר **כמה הצלחות** היו.

**טענות:**

1. **יצירת משתנה מקרי בינומי מקבוצת מ"מ עם התפלגות ברנולי: יהיו** $X_1.....X_n$ **מ"מ ב"ת שווי התפלגות. עם** $X_i \sim Ber(p)$. **אזי:** $(X=\sum_{i-1}^{n}=X_i) \sim Bin(n,p)$.
2. **סכום של מ"מ עם התפלגות בינומית:** אם $Y \sim Bin(m,p)$, $X \sim Bin(n,p)$ והם ב"ת, אזי $(Z=X+Y) \sim Bin(n+m,p)$.

### 5.3.5 התפלגות פואסון:

נאמר ש $X$ מתפלג פואסון עם פרמטר $\lambda \in R^+$ אם לכל $k$ ששייך לטבעיים כולל 0. מתקיים:

$$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

**נסמן:** $X\sim Po(\lambda)$

**מייצג:** גבול של התפלגות בינומיות שבהן יש מספר גדול של נסיונות, עם הסתברות קטנה של הצלחה לכל אחד מהנסיונות.

**טענות:**

1. **גבול של התפלגות בינומית:** יהי $\lambda>0$ ויהיו $X_n\sim Bin\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$ משתנים מקריים, עבור $n>\lambda$ (לאו דווקא ב"ת) אזי לכל $k$ טבעי כולל 0, מתקיים עבור $X\sim Po(\lambda)$: $lim_{n\to\infty}P(X_n=k)=P(X=k)$
**הערה:** $lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda}$
2. **סכום של מ"מ עם התפלגות פואסון:** אם $X\sim Po(\lambda),\quad Y\sim Po(\mu)$ והם ב"ת, אזי: $(Z=X+Y)\sim Po(\lambda+\mu)$

## 5.4 התומך של מ"מ:

**הגדרה:** התומך של מ"מ $X$ מסומן $supp(X)$ ומוגדר על ידי :

$$supp(X)=\{s\in\mathbb{R}\mid\mathbb{P}(X=s)=\mathbb{P}_X(s)>0\}$$

כלומר - כל הערכים ב $\Omega$ עבורם נקבל הסתברות שגדולה מ 0 .

## 5.5 יחסים בין משתנים מקריים:

### 5.5.1 הגדרה - שווי התפלגות:

יהיו $X,Y$ שני מ"מ נאמר שהם **שווי התפלגות** אם מתקיים $P_X=P_Y$
כלומר - אם לכל $S\subset R$ מתקיים $\mathbb{P}(X\in S)=\mathbb{P}(Y\in S)$. הם מחזירים את אותה התשובה עבור כל ערך ב $\Omega$
**הערה - עבור מ"מ בדידים:** אם המ"מ בדידים אזי מספיק לבדוק שעבור כל $s\in R$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(X=s)=\mathbb{P}_X(s)=\mathbb{P}_Y(s)=\mathbb{P}(Y=s)$$

**סימון:** נסמן $X\overset{\mathrm{d}}{=}Y$

### 5.5.2 הגדרה ־ שוויון כמעט תמיד:

יהיו $X,Y$ שני מ"מ נאמר שהם **שווים כמעט תמיד** אם מתקיים

$$P(X=Y)=1 \iff \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=Y(\omega)\})=1$$

כולמר ־ ההסתברות ששני המ"מ יחזירו עבור $\omega\in\Omega$ את אותה ההסתברות, שווה ל 1.
**סימון:** $X\overset{\text{a.s}}{=}Y$

### 5.5.3 תכונות של התפלגויות בין שני מ"מ:

1. **טרנזטיביות:** אם $X\overset{\text{a.s}}{=}Y$ וגם $Y\overset{\text{a.s}}{=}Z$ אז $X\overset{\text{a.s}}{=}Z$
2. **הרכבה ־ תמיד:** אם $X\overset{\text{d}}{=}Y$ אזי $f(X)\overset{\text{d}}{=}f(Y)$ עבור $f$ מ"מ חדש.
3. **הרכבה ־ כמעט תמיד:** אם $X\overset{\text{a.s}}{=}Y$ אזי $f(X)\overset{a.s}{=}f(Y)$ עבור $f$ מ"מ חדש.

## 5.6 וקטורים מקריים (ו"מ) והתפלגות משותפת של מ"מ:

### 5.6.1 וקטור $n$ מימדי:

יהיו $X_1,....X_n$ מ"מ (מעל אותו מרחב הסתברות) ניתן לחשוב עליהם כעל ווקטור מקרי.
**נסמן:** $Z:\Omega\to R^n=(X_1,...X_n)$ ומתקיים: $Z(\omega)=(X_1(\omega),....X_n(\omega)) \quad \forall\omega\in\Omega$

**התפלגות של ווקטור מקרי $X$:** עבור $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$ שהיא קבוצת כל תתי הקבוצות של $R^n$.

$$\mathbb{P}_X:\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\to[0,1]$$

זוהי פונקצית הסתברות על $R^{\mathrm{n}}$
**מינוח:** אם $P_X$היא פונקציה בדידה, נאמר ש $X$ הוא **ווקטור מקרי בדיד.**
**טענה:** יהי $X=(X_1....X_n)$ וקטור מקרי. אזי $X$ בדיד אמ"מ $X_i$ בדיד.

### 5.6.2 התפלגות משותפת:

**הגדרה ־ התפלגות המשותפת:** יהיו $X_1....X_n$ מ"מ אזי ההתפלגות: $P_{X_1....X_n}$ נקראת ההתפלגות המשותפת של $X_1....X_n$.

## 5.7 הסתברות מותנית על מ"מ:

התניה במאורע $A$ משנה את ההתפלגות של המ"מ, נכתוב זאת כך: $\mathbb{P}_{X|A}(S)=\mathbb{P}(X\in S\mid A)$

## 5.8 אי תלות של מ"מ:

יהיו $X, Y$ מ"מ נאמר שהם ב"ת אם לכל $S, T \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ המאורעות $Y \in T, X \in S$ הם ב"ת. כלומר:

$$\mathbb{P}(X \in S, Y \in T) = \mathbb{P}(X \in S)\mathbb{P}(Y \in T)$$

**באופן שקול:** אם לכל $S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ עבורה $P(X = S) > 0$ מתקיים $P_{Y|X \in S} = P_Y$
**באפן שקול עבור מ"מ בדידים:** נאמר ש $X, Y$ ב"ת אמ"מ לכל $s, t \in R$ מתקיים $\mathbb{P}(X = s, Y = t) = \mathbb{P}(X = s)\mathbb{P}(Y = t)$

## 5.9 אי תלות של כמה מ"מ:

**הגדרה:** יהיו $X_1, ....X_n$ מ"מ, נאמר שהם ב"ת אם לכל $S_1, ...S_n \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ **המאורעות** $X_i \in S$ הם ב"ת.
כלומר לכל $I \subset [n]$ מתקיים: $\mathbb{P}\left(\forall i \in I \quad X_i \in S_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}\left(X \in S_i\right)$
**טענה - שקילות לאי תלות:** היו $X_1, ....X_n$ מ"מ, נאמר שהם ב"ת אם לכל $S_1, ...S_n \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(X_1 \in S_1, X_2 \in S_2, \ldots, X_n \in S_n\right) = \mathbb{P}\left(X_1 \in S_1\right)\mathbb{P}\left(X_2 \in S_2\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\left(X_n \in S_n\right)$$

**טענה - אי תלות של מ"מ בדידים:** יהיו $X_1, ....X_n$ מ"מ בדידים, נאמר שהם ב"ת אם לכל $s_1, ...s_n \in R$ מתקיים:

$$\mathbb{P}\left(\forall i \in [n] X_i = s_i\right) = \prod_{i \in [n]} \mathbb{P}\left(X_i = s_i\right)$$

**טענה:** יהיו $A_1, ....A_n$מאורעות על אותו מרחב הסתברות. אזי: הם ב"ת אמ"מ $1_{A_1}, ....1_{A_n}$הם ב"ת.

## 5.10 שימור אי תלות תחת הפעלת פונקציות:

### 5.10.1 טענה - אי תלות של הרכבה על משתנים מקריים:

**טענה:** יהיו $X, Y$ מ"מ ב"ת ויהיו $f, g \in \mathcal{F}_{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ . אזי: $f(X), g(Y)$ הם ב"ת. ($f, g$ הן פונקציות).

### 5.10.2 טענה - אי תלות של הרכבה על וקטורים מקריים:

**טענה:** יהיו $X = (X_1, \ldots, X_n), \quad Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ וקטורים מקריים ב"ת .
ויהיו $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l}, \quad g \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k}$ אזי: $f(X), g(Y)$ הם וקטורים מקריים ב"ת.

**טענות והערות:**

1. **הערה:** טענה זו נכונה גם עבור $n > 2$ וקטורים מקריים.
2. **הערה:** כל הטענות שהוכחנו עבור כמה מ"מ ב"ת, נכונות גם עבטר כמה ו"מ ב"ת.

3. **טענה:** אם $X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m$ הם מ"מ ב"ת. אזי: הווקטורים $Y=(Y_1,\ldots,Y_m)\ ,\ \ X=(X_1,\ldots,X_n)$ הם ו"מ ב"ת .
4. **טענה:** אם $X_1,X_2,X_3,X_4$ הם מ"מ ב"ת אזי גם $X_3+X_4 \quad ,X_1+X_2$ הם ב"ת. וגם $\frac{X_1}{X_2}$ עבור $x_2\neq 0$הם ב"ת. וגם $\sin\left(X_2\cdot X_3\right)$ הם ב"ת.
5. **טענה:** אם $X_1,....X_{100}$ הם מ"מ ב"ת. אזי: $Y_1=X_1+X_2+X_3+X_4$ ו $Y_2=X_5+\cdots+X_8$ הם ב"ת.
6. **טענה:** אם $A_1,A_2,A_3,A_4$מאורעות ב"ת אז: $A_1\cup A_2$ ו $A_3\cup A_4$ הם מאורעות ב"ת.

### 5.11 סדרה אינסופית של מ"מ:

**הגדרה:** סדרה אינסופית של מ"מ $X_1,X_2....$ נקראת ב"ת. אם לכל $n$ טבעי המ"מ $X_1,X_2....X_n$ הם ב"ת

**טענה:** אם $S_1,S_2....\in F_R$ וסדרת מ"מ $X_1,X_2....$ ב"ת. אזי: $P\left(\forall i{\in}N\quad X_i{\in}S_i\right)=\Pi_{i\in N}P(X_i\in S_i)$

**טענה:** יהיו $X_1,X_2$ מ"מ (לאו דווקא בלתי תלויים ולאו דווקא על אותו מרחב הסתברות). אזי קיים מרחב הסתברות $(\Omega,F,P)$ וסדרת מ"מ ב"ת: $Y_1,Y_2,...$ על אותו $\Omega$. כך ש $Y_i\overset{d}{=}X_i$

## 6 תוחלת:

**הגדרה:** יהי $X$מ"מ בדיד. התוחלת של $X$ מוגדרת להיות: $E(X)=\sum_{s\in Supp(X)}s{\cdot}P(X=s)$

**הערה:** אם הטור הנ"ל לא מתכנס בהחלט - נאמר של $X$ אין תוחלת.

**הגדרה שקולה:** $E(X)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\omega)$

### 6.1 תוחלות של התפלגויות מוכרות:

1. **התפלגות ברנולי:** $E(X)=p$
2. **התפלגות אחידה:** $E(X)=\frac{a+b}{2}$
3. **התפלגות בינומית:** $E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
4. **התפלגות פואסונית:** $E(X)=\lambda$
5. **התפלגות גיאומטרית:** $E(X)=\frac{1}{p}$

### 6.2 תכונות התוחלת:

1. **תתוחלת של משתנה מקרי המוגדר כהרכבה של מ"מ אחר:** אם $X=(X_1,...,X_n)$ ו"מ בדיד. ו $f{\in}F_{R^n\to R}$. נגדיר $Y=f(X)$ אזי:

$$E(Y)=\sum_{t\in R^n}f(t){\cdot}P(X=t)$$

2. **אי שליליות:** אם $X \geq 0$ כ"ת. אזי $E(X) \geq 0$. ניתן לנסח את הטענה עם א"ש חזק.

3. **לינאריות התוחלת:** עבור $X, Y$ מ"מ בעלי תוחלת ו $a, b$ סקלרים: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

4. **מונוטוניות:** אם $X \geq Y$ כ"ת. אזי $E(X) \geq E(Y)$.

5. **תוחלת של אינדיקטור:** היא ההסתברות שהמאורע קרה. (כי אינדיקטור הוא מספר קבוע)

6. **מ"מים שווי התפלגות:** יש את אותה התוחלת גם אם הם מעל מרחבי הסתברות שונים.

### 6.3 תוחלת תחת התניה ואי תלות:

**טענה - עבור $X, Y$ ב"ת בלבד:** מתקיים $E(XY) = E(X)E(Y)$.
**הגדרה:** יהי $X$ מ"מ בדיד, ו $A$ מאורע כך ש $P(A) > 0$. נגדיר את התוחלת של $X|A$ להיות: $E(X|A) = \sum_{s \in Supp(X)} s \cdot P(X = s|A)$
**טענה - נוסחת התוחלת השלמה:** אם $A_1 ... A_n$ חלוקה של $\Omega$ ו $X$ מ"מ. אזי: $E(X) = \sum_{i=1, P(A_i)>0}^{n} E(X|Ai)P(Ai)$

### 6.4 נוסחת הזנב:

**טענה:** עבור מ"מ המקיים $Supp(X) \subseteq N$ (כלומר - $X$ מקבל רק ערכים טבעיים). אזי: $E(X) = \sum_{n \in N} P(X \geq n)$. (אין דרישה שהמ"מ הוא אחיד).

## 7 אי שוויון מרקוב:

**טענה:** עבור מ"מ $X \geq 0$ כ"ת, ובעל תוחלת. אזי לכל $a > 0$ מתקיים $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$
**הערה:** אם המ"מ לא מקיים $X \geq 0$ כ"ת. נצטרך לנרמל אותו ושיקיים את הדרוש ע"מ להשתמש בא"ש מרקוב.

## 8 שונות:

**תיאור:** שונות היא המדדד לפיזור של ההתפלגות מסביב לתוחלת.
**הגדרה:** יהי $X$ מ"מ **בדיד** ובעל תוחלת אזי השונות של $X$ מוגדרת להיות: $Var(X) = E\left(X - E(X)^2\right)$
**הגדרה שקולה:** $Var(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$
**הערה - עבור מ"מ ברנולי או אינדיקטור:** מתקיים $X^2 = X$.

### 8.1 סטיית תקן:

**הגדרה:** סטיית תקן של מ"מ $X$ מוגדרת להיות $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.

### 8.2 תכונות השונות:

1. **אי שליליות:** עבור כל מ"מ שיש לו שונות. מתקיים: $Var(X) \geq 0$, (והיא שווה בדיוק 0 כאשר $X = 1$ מ"מ קבוע).
2. **הזזה בקבוע:** מתקיים $Var(X + a) = Var(X)$ עבור $a \in R$
3. **כפל בקבוע:** קבוע $a \in R$ יוצא מהתוחלת ומועלה בריבוע - $Var(aX) = a^2 \cdot Var(X)$.
4. **אדטיביות של מ"מ ב"ת:** יהיו $X, Y$ מ"מ **ב"ת** בעלי שונות אזי: $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$
**הערה:** תנאי זה יכול להתקיים גם עבור מ"מ ב"ת, אך לא בהכרח.

### 8.3 שונות של התפלגויות מוכרות:

1. **התפלגות ברנולי:** $Var(X) = p(1 - p)$
2. **התפלגות אחידה:** $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$
3. **התפלגות בינומית:** $Var(X) = np(1 - p)$
4. **התפלגות פואסונית:** $Var(X) = \lambda$
5. **התפלגות גיאומטרית:** $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

## 9 אי שוויון צ'בישב:

יהי $X$ מ"מ בעל תוחלת ושונות. אזי לכל $a > 0$ מתקיים: $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$
**למעשה:** זוהי הסתברות שבאה לתאר "כמה סביר שנהיה רחוקים מהתוחלת".

## 10 החוק החלש של המספרים הגדולים:

יהיו $X_1, X_2...$ מ"מ **ב"ת, שווי התפלגות**. בעלי תוחלת $E(X_i) = \mu$. ושונות $Var(X_i) = \sigma^2$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\mu - \varepsilon \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \leq \mu + \varepsilon\right) = 1$$

**הערות:**

1. תוחלת של ממוצע של מ"מים ב"ת = לתוחלת של כל אחד מהם.
2. השונות של ממוצע של מ"מים שווים ב"ת קטנה יותר מהשונות של כל אחד מהם, והיא פשוט השונות המקורית חלקי מספר המ"מים.
3. **הערה:** יתכן שהמשתנים תלויים זב"ז, ובכ"ז החוק הנ"ל מתקיים.

# 11 שונות משותפת $Covariance$:

**הגדרה:** יהיו $X,Y$ מ"מ בעלי שונות. נגדיר את השונות המשותפת שלהם להיות:

$$Cov(X,Y)=E((X-E(X))(Y-E(Y)))$$

**הגדרה שקולה:** $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

**מבחינה אינטואיטבית:** ככל שישנה התאמה חיובית גבוהה יותר בין שני המ"מ (דהיינו גדלים וקטנים יחד) - השונות המשותפת גדלה, וככל שישנה התאמה שלילית גבוהה יותר (דהיינו אחד גדל בזמן שהשני קטן) - השונות המשותפת קטנה.

## 11.1 טענות ותכונות של $Cov$:

1. **סימטריה:** $Cov(X,Y)=E((X-E(X))(Y-E(Y)))=E((Y-E(Y))(X-E(X)))=Cov(Y,X)$
2. **בי-ליניאריות:**
   **עבור סכום של 2:** יהיו $a,b\in R$ ו $X,Y,Z$ מ"מים בעלי שונות, אזי: $Cov(aX+bY,Z)=aCov(X,Z)+bCov(Y,Z)$
   **הנוסחה הכללית:** עבור $n$ מ"מים וסקלרים מתקיים: $Cov\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i,Z\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iCov\left(X_i,Z\right)$
3. **שונות משותפת של מ"מ עם עצמו:** $Var(X)=Cov(X,X)$.
4. **טענה - חישוב שונות של סכום של מ"מים:**
   **מקרה פרטי עבור 2 מ"מים:** יהיו $X,Y$ מ"מים בעלי שונות, אזי: $Var(X+Y)=Var(X)+2Cov(X,Y)+Var(Y)$.
   **הכללה עבור $n$ מ"מים:** יהיו $X_1....X_n$ מ"מים בעלי שונות, אזי: $Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}Var\left(X_i\right)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}Cov\left(X_i,X_j\right)$
   **שימוש:** כאשר המ"מים תלויים, נשתמש בנוסחה זו כדי לחשב את השונויות.
5. **טענה:** $Cov(X,X)=Var(X)$

## 11.2 מ"מים בלתי מתואמים:

**הגדרה - מ"מ בלתי מתואמים:** עבור $X,Y$ שני מ"מים. נאמר שהם **בלתי מתואמים** אם מתקיים $Cov(X,Y)=0$

**טענה:** אם $X,Y$ בלתי תלויים, אזי הם בלתי מתואמים.

**הערה:** ההיפך **אינו נכון.** אם שני מ"מים הם בלתי מתואמים **לא בהכרח** שהם גם ב"ת.

# 12 אי שוויון קושי שוורץ:

**טענה:** יהיו $X,Y$ מ"מים בעלי שונות, אזי: $|\mathbb{E}(XY)|\leq\sqrt{\mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(Y^2\right)}$. ומתקיים שוויון **אמ"מ** קיים $a\in R_{\geq0}$ כך ש $Y=aX$.

# 13 מקדם המתאם:

## 13.1 הגדרה:

**הגדרה:** יהיו $X \neq 0, Y \neq 0$ מ"מים בעלי שונות, מקדם המתאם שלהם הוא: $Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}$ (עבור $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$)

**מבחינה אינטואיטבית:** מקדם המתאם בודק כמה $X, Y$ מתואמים, והוא אינו מושפע מהזזות/כפל בקבוע עבור שניהם. ככל שישנה התאמה חיובית גבוהה יותר (דהיינו גדלים וקטנים יחד) - מקדם המתאם גדל, וככל שישנה התאמה שלילית גבוהה יותר (דהיינו אחד גדל בזמן שהשני קטן) - מקדם המתאם קטן. אם לא קיימת התאמה כלל מקדם המתאם הוא 0 (למשל במקרה בו הם בת"ל וכתוצאה מכך השונות המשותפת היא 0).

## 13.2 טענה:

**טענה - חסמים למקדם המתאם:** יהיו $X \neq 0, Y \neq 0$ מ"מים בעלי שונות מתקיים: $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$

**בנוסף:**

1. $Corr(X,Y) = 1$ אמ"מ $Y = aX + b$ עם $\boldsymbol{a > 0}$ ו $b \in R$
2. $Corr(X,Y) = -1$ אמ"מ $Y = aX + b$ עם $\boldsymbol{a < 0}$ ו $b \in R$

# 14 מומנטים:

## 14.1 הגדרה - מומנט ומומנט מרכזי:

**הערה:** חישוב של מומנטים מסדר גבוה הוא מסובך, לכן לא נתמש בזה אלא בפונקציה יוצרת מומנטים.

**הגדרה - המומנט** מסדר $k$: יהי $X$מ"מ, המונמט מסדר $k$ של $X$ הוא: $m_k(X) = E\left(X^k\right)$.
**הגדרה - המומנט המרכזי** מסדר $k$: הוא $\mu_k(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^k\right)$ .
**הערה:** נשים לב כי עבור $k = 1$ נקבל את התוחלת. ועבור מומנט מרכזי $k = 2$ נקבל את השונות.
**טענה - הקשר בין מומנט למומנט המרכזי:** $\mu_3(X) = m_1(X) - 3m_1(X)m_2(X) + (2m_1(X))^2$

### 14.1.1 טענה - הכללה של אי־שוויון צ'בישב עבור מומנטים מסדרים גבוהים:

לכל $k$ **זוגי** ולכל $a > 0$ מתקיים: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mu_k(X)}{a^k}$

## 14.2 פונקציה יוצרת מומנטים - פי"מ:

**הגדרה:** יהי $X$ מ"מ פונקציה יוצרת המומנטים של $X$ היא פונקציה $M_X(t) : R \to R$ המוגדרת ע"י:
$M_X(t) = \mathbb{E}\left(\left(e^t\right)^X\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$.

**הערה:** לפעמים $\mathbb{E}\left(\left(e^t\right)^X\right)$ לא מוגדרת. ורק $t=0$ הוא הערך היחיד עבורו מובטח לנו שהפונקציה תהיה מוגדרת .
**הערה חשובה:** במבחן צריך להגיד מהו תחום ההגדרה של הפונקציה, ־ עבור אילו $t$ים היא מתקיימת.
**הגדרה ־ מ"מ בעל מומנט מעריכי:** מ"מ בעל פונקציה יוצרת מומנטים המוגדרת בסביבה של הראשית נקרא **מ"מ בעל מומנט מעריכי.**
**טענה:** אם $X$ מ"מ בדיד עבורו פי"מ סופית בסביבת 0, אזי: הנגזרת ה $k$ית של $M_X$ב 0 קיימת ושווה למומנט מסדר $k$ של $X$: $M_X^{(k)}(0)=E\left[X^k\right]=m_k(X)$

### 14.2.1 תכונות וטענות של פונקציה יוצרת מומנטים:

1. **אי שליליות:** לכל $X,t$ עבורם פונקציה יוצרת מומנטים מוגדרת, מתקיים: $M_X(t)\geq 0$.
2. **כפליות:**אם $X,Y$ מ"מ **ב"ת** אז: $M_{X+Y}(t)=M_X(t)\cdot M_Y(t)$ (בהנחה שהפונקציות מוגדרות עבור $X,Y$).
   **הערה:** ניתן להכליל בצורה אינדוקטיבית את התכונה הזו גם על סכום של יותר מ 2 ־ מ"מים.
3. **טענה ־ פי"מ של סכום מ"מ:** יהיו $X,Y$ שני מ"מ **ב"ת** אזי: $M_{X+Y}(t)=M_X(t)\cdot M_Y(t)$

### 14.2.2 פונקציה יוצרת מומנטים של התפלגויות מוכרות:

1. **התפלגות ברנולי:** $M_X(t)=pe^t+(1-p)$.
2. **התפלגות אחידה:** $M_X(t)=\frac{e^t\left(1-e^{nt}\right)}{n\left(1-e^t\right)}$.
3. **התפלגות בינומית:** $M_X(t)=pe^t+(1-p)^n$.
4. **התפלגות פואסונית:** $M_X(t)=e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$.
5. **התפלגות גיאומטרית:** $M_X(t)=\begin{cases}\frac{e^tp}{1-e^t(1-p)} & t<-\log_e(1-p)\\ not\ defined & else\end{cases}$

# 15 אי שוויון צ'רנוף:

**טענה:** יהי $X$ מ"מ עם פונקציה יוצרת מומנטים ויהי $a\in R$. לכל $t>0$ עבורו הפונקציה מוגדרת, מתקיים: $P(X\geq a)\leq M_X(t)\cdot e^{-ta}$.
**הערה:** לפעמים נרצה למצוא את הערך $t$ עבורו החסם הדוק ביותר. לכן נגזור ונחפש $t$ שהן נקודות מינימום של פי"מ.

# 16 הופדינג:

## 16.1 הלמה של הופדינג:

**למה:** אם $X$ מ"מ המקיים $|X|\leq 1$ כ"ת. וגם $E(X)=0$ אזי לכל $t\in R$ מתקיים: $M_X(t)\leq\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$

**הערה:** כשנרצה להשתמש בלמה והתנאים לא יתקיימו, נצטרך לנרמל את המ"מ, לכן התנאי המספיק הוא ש$X_i$ הם ב"ת וחסומים ע"י $M$ כלשהו.

### 16.2 אי־שוויון הופדינג:

**טענה:** יהיו מ"מים ב"ת $X_1....X_n$ עם $|X_i| \leq 1$ כ"ת. ו $E\left(X_i\right) = 0$. נגדיר $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ אזי לכל $a > 0$ מתקיים: $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq a\right) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right)$.

**הערה:** כשנרצה להשתמש בטענה והתנאים לא יתקיימו, נצטרך לנרמל את המ"מים.

## 17 פונקצית התפלגות מצטברת פה"מ:

**הגדרה:** יהי $X$ מ"מ פה"מ של $X$ היא פונקציה $F_X : R \to [0,1]$ המוגדרת ע"י: $F_X(t) = P(X \leq t)$

### 17.1 טענות ותכונות:

1. **חישוב הסתברות למאורע ע"י שימוש בפונקציית התפלגות מצטברת:** יהי $X$ מ"מ ו $a \in R$ אזי:

$$\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - \lim_{n\to\infty} F_X\left(a - \frac{1}{n}\right) = F_X(a) - \lim_{b\to a^-} F_X(b)$$

2. **פונקציית ההתפלגות כאפיון התפלגות:** יהיו $X, Y$ מ"מים כלשיהם, מתקיים: $F_X = F_Y$ אמ"מ $X \overset{d}{=} Y$ .
3. **תכונה 1 ־ גבול במינוס אינסוף:** לכל מ"מ $X$ מתקיים: $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$.
4. **תכונה 2 ־ גבול באינסוף:** לכל מ"מ $X$ מתקיים: $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$
5. **תכונה 3 ־ מונוטוניות:** לכל $a \leq b$ מתקיים: $F_X(a) \leq F_X(b)$.
6. **תכונה 4 ־ רציפות מימין:** לכל $a \in R$ מתקיים: $F_X(a) = \lim_{n\to\infty} F_X\left(a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{b\to a^+} F_X(b)$.
7. **תנאי מספיק להיות פונקציית התפלגות מצטברת:** תהי פונקציה $F : R \to R$ המקיימת את תכונות 1־4. אזי קיים מרחב הסתברות ומ"מ $X$ כך ש $F_X = F$.

## 18 משתנים מקריים רציפים בהחלט:

**הגדרה ־ פונקצית הצפיפות:** יהי $X$ מ"מ, נאמר שהוא רציף בהחלט אם קיימת פונקציה $f_X : R \to R$ אינטגרבילית, כך שלכל $t \in R$ מתקיים: $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$.

במקרה כזה $f_X$ נקראת **פונקצית הצפיפות** של $X$.

**טרמינולוגיה:** כאשר אנו אומרים רק 'מ"מ רציף', בלי 'בהחלט' הכוונה שהפונקצייה $F_X$ רציפה, בלי הכרח שהיא תהווה

אינטגרל של פונקציה אחרת.

**טענה:** יהי $X$ מ"מ רציף בהחלט. עם פונקצית צפיפות. ויהיו $a \leq b$, מתקיים:

$$\mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

## 18.1 תכונות:

1. **אי שליליות:** לכל מ"מ $X$ רציף בהחלט, ולכל $x \in R$ מתקיים $f_X(x) \geq 0$. (למעט לכל היותר מס' סופי של נק').
2. **ערך על כל הישר:** לכל מ"מ רציף בהחלט $X$ מתקיים: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.
3. **תנאי מספיק להיות פונקציית צפיפות:** תהי פונקציה $F : R \to R$ המקיימת את תכונות 1-2. אזי קיים מרחב הסתברות ומ"מ $X$ כך ש $f_X = f$.
4. **רציפות וגזירות:** פה"מ היא רציפה, ובכל נקודת רציפות $t$ מתקיים: $F'_X(t) = f_X(t)$.

**למעשה:** פונקציית הצפיפות המצטברת $(F_X)$, היא הפונקציה הצוברת של פונקצית הצפיפות $(f_X)$.

## 18.2 תוחלת של משתנה מקרי רציף בהחלט:

**הגדרה:** יהי $X$ מ"מ רציף בהחלט עם פונקצית צפיפות $f_x$. התוחלת של $X$ מוגדרת להיות: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} sf_X(s)ds$. (עבור אינטגרל שמתכנס בהחלט).

**טענה - תוחלת של פונקציה של מ"מ רציף:** יהי $X$ מ"מ (לא בהכרח רציף בהחלט) עם פונקצית צפיפות $f_x$, ותהי $g : R \to R$. נגדיר מ"מ $Y = g(X)$ אזי: $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)f_X(s)ds$.

### 18.2.1 תכונות תוחלת של מ"מ רציף:

עבור מ"מ רציף מתקיימות כל התכונות של התוחלת כפי שלמדנו עבור מ"מ בדיד, כלומר: אי שליליות, לינאריות ומונוטוניות

### 18.2.2 הגדרות הנוגעות לתוחלת:

1. **שונות:** $Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$
2. **פונקציה יוצרת מומנטים:** $M_X(t) = E\left(e^{tX}\right)$.

**הערה:** כל המשפטים והאי־שוויונים שהראינו במקרה הבדיד עדיין תקפים!

### 18.3 התפלגויות מוכרות:

#### 18.3.1 התפלגות אחידה:

**הגדרה:** יהי $X$ מ"מ רציף. נאמר ש $X \sim U([a,b])$ אם מתקיים: $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in [a,b] \\ 0 & else \end{cases}$.

**פה"מ של מ"מ אחיד רציף:** $F_X(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a} & t \in [a,b] \\ 0 & t < a \\ 1 & t > b \end{cases}$.

**תוחלת של מ"מ רציף אחיד:** $E(X) = \frac{a+b}{2}$

**שונות של מ"מ רציף אחיד:** $Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$.

**פונקציה יוצרת מומנטים של מ"מ רציף אחיד:** $M_X(t) = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$

**טענה - מתיחה של מ"מ אחיד רציף:** יהי $X \sim U([a,b])$ נגדיר $Y = \alpha X + \beta$ עבור $\alpha > 0$, $\beta \in R$. מתקיים: $Y \sim \mathrm{U}([\alpha a + \beta, \alpha b + \beta])$.

#### 18.3.2 התפלגות מעריכית:

**הגדרה:** יהי $X$ מ"מ רציף. נאמר ש $X \sim Exp(\lambda)$ אם מתקיים: $f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

**פה"מ של מ"מ רציף מעריכי:** $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$.

**תוחלת של מ"מ רציף מעריכי:** $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

**שונות של מ"מ רציף מעריכי:** $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

**פונקציה יוצרת מומנטים של מ"מ רציף מעריכי:** $M_X(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - t} & t < \lambda \\ \infty & \lambda > t \end{cases}$

**טענה - תכונת חוסר הזיכרון:** מ"מ מעריכי (בדומה למ"מ גיאומטרי), מקיים את תכונת חוסר הזיכרון: יהי $X \sim Exp(\lambda)$ מ"מ אזי $X$ מקיים: $(X - t \mid X > t) \sim Exp(\lambda)$ לכל $t > 0$.

#### 18.3.3 התפלגות קושי:

**הגדרה:** נאמר שמ"מ $X$ מתפלג קושי עם פרמטרים $(0,1)$ אם פה"מ שלו מקיימת: $f_X(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(t^2+1)}$.

**הערה:** זוהי ההתפלגות הרציפה הראשונה שמקיימת: $f_X(t) \neq 0$. לכל $t \in R$

**טענה:** למ"מ קושי **אין תוחלת.**

#### 18.3.4 התפלגות נורמלית סטנדרטית:

**הגדרה:** הי $X$ מ"מ רציף. נאמר ש $X$ מתפלג נורמלי תקני (סטנדרטי) $X \sim N(0,1)$ אם מתקיים: $f_X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}$.

**למעשה:** זהו מ"מ שהתוחלת שלו שווה ל 0. והשונות שווה 1.

**פונקציה קדומה** $F_X$: למעשה א ניתן להביע את הקדומה של מ"מ נורמלי באמצעות נוסחה, לכן: $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{g^2}{2}} ds$

**תוחלת של מ"מ רציף נורמלי:** $E(X) = 0$.

**שונות של מ"מ רציף נורמלי:** $Var(X) = 1$
**פונקציה יוצרת מומנטים של מ"מ רציף נורמלי:** $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

#### 18.3.5 התפלגות נורמלית שאינה סטנדרטית:

**הגדרה:** יהי $X \sim N(0,1)$ נגדיר $Y = \sigma X + \mu$ עבור $0 < \sigma - R \ni \mu$.
**פונקציית צפיפות:** $f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
**תוחלת:** $\mathbb{E}(Y) = \mu$
**שונות:** $Var(X) = \sigma^2$
**נסמן:** $Y \sim (\mu, \sigma^2)$

### 18.4 פונקציה של מ"מ רציף:

**טענה:** נתון מ"מ רציף בהחלט $X$ בעל התפלגות ידועה. ונתונה פונקציה $g : R \to R$. במקרים רבים המ"מ $g(X)$ הוא רציף בהחלט. וניתן למצוא את הצפיפות שלו ע"י כך שנחשב את פה"מ $F_{g(X)}$ ונגזור אותה.

## 19 אינטגרלים דו מימדיים:

אנו מעוניינים לחשב את הנפח מתחת לגרף הפונקציה.

### 19.1 משפט פוביני:

תהי פונקציה $f : R^2 \to R$ עבורה אנו רוצים לחשב את האינטגרל באיזור $A = [a,b] \times [c,d]$ אזי:

$$\iint_A f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

**כלומר -** אם כתבנו $dxdy$ אנו מחשבים את האינטגרל לפי $x$ ואחכ לפי $y$.
**משפט פוביני עבור פונקציות:** אם מתקיים $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ עבור $g, h : R \to R$ אז נקבל:

$$\iint_A f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

נצטרך להגדיר את הגבול החיצוני להיות גבול ממשי, ולפיו להגדיר את הגבול הפנימי.

### 19.2 צפיפות משותפת$\Leftrightarrow$התפלגות משותפת רציפה בהחלט:

**הגדרה:** יהיו $X, Y$ שני מ"מ מעל אותו מרחב הסברות, נאמר כי יש להם צפיפות משותפת, אותה נסמן $f_{X,Y}$ אם לכל $a, b \in R$.

$$F_{X,Y}(a,b)=\mathbb{P}(X\le a,Y\le b)=\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b}f_{X,Y}(x,y)dydx$$

במקרה כזה לכל $A\in F_{R^2}$ מתקיים: $\mathbb{P}((X,Y)\in A)=\iint_A f_{X,Y}(x,y)d(x,y)$.

**הערה:** גם אם שני המ"מים רציפים בהחלט, **לא בהכרח** שיש להם צפיפות משותפת.

## 19.3 טענה - תנאים לפונקציית צפיפות משותפת:

יהיו $X,Y$ שני מ"מ, נאמר כי יש להם צפיפות משותפת $f_{X,Y}$ אמ"מ מתקיים:

1. **אי שליליות:** לכל $(x,y)\in R^2$ למעט מספר סופי של נקודות מתקיים: $f_{X,Y}(x,y)\ge 0$ .
2. **נרמול:** עבור $A=R^2$ (כלומר $A=(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$) מתקים: $\iint_A f_{X,Y}(x,y)d(x,y)=1$.

## 19.4 צפיפות שולית:

אם $f_{X,Y}$ היא הצפיפות המשותפת של $X,Y$, אזי הצפיפות השולית שלהם מוגדרת ע"י:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dx$$

**כלומר** - כדי לחשב את הצפיפות של $X$ נעשה אינטגרל לפי $y$, ולהיפך.

## 19.5 טענה - תוחלת של פונקציה של $(X,Y)$:

אם $f_{X,Y}$ היא הצפיפות המשותפת של $X,Y$, ותהי $g:R^2\to R$ אזי:

$$\mathbb{E}(g(X,Y))=\iint_{\mathbb{R}^2}g(x,y)f_{X,Y}(x,y)d(x,y)$$

## 19.6 שונות משותפת:

$$Cov(X,Y)=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

## 19.7 אי תלות של מ"מים רציפים בהחלט:

**הגדרה:** שני מ"מים יקראו ב"ת אם לכל $A,B\subseteq R$ מתקיים: $\mathbb{P}(X\in A,Y\in B)=\mathbb{P}(X\in A)\mathbb{P}(Y\in B)$.

**הגדרה שקולה:** מ"מים רציפים בהחלט הם בלתי תלויים אם ורק קיימת צפיפות משותפת המקיימת: $f_{X,Y}(s,t)=\quad\forall s,t\in\mathbb{R}$ $f_X(s)f_Y(t)$.

### 19.7.1 הוכחת תלות:

אם נרצה להוכיח ששני מ"מים תלויים לא נוכל להראות מההגדרה שלא מתקיים שוויון כי הפונקציה לא מוגדרת באופן מוחלט עבור כל נקודה. לכן נעשה זאת באופן הבא:

1. **שימוש בשונות משותפת:** אם שני מ"מים הם ת"ל, אזיהשונות המשותפת שלהם שווה ל 0 . לכן אם השונות שונה מ 0 - שניהם תלויים.

2. **חישוב עבור מאורע ספציפי:** כשאי אפשר לחשב את השונות, נבחר מאורע ספציפי (שני ערכים) ונראה עבורו שההסתברות אינה מכפלת ההסתברויות.

### 19.7.2 טענה -סכום של מ"מים בת"ל המתפלגים מעריכית:

**טענה:** יהיו $X_1....X_n$ מ"מים **ב"ת** עם $X_i\sim Exp(\lambda_i)$ נסמן $X=min\left\{X_i|1\leq i\leq n\right\}$ אזי: $X\sim Exp\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)$.

### 19.7.3 נוסחת הקונבולוציה:

זאת נוסחה לישוב חיבור של שני מ"מים ב"ת.

**נוסחה:** יהיו $X,Y$ מ"מים רציפים בהחלט **בלתי תלויים** עם צפיפויות $f_X,f_Y$ אזי: $f_{X+Y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(s)f_Y(t-s)ds$ .

**הערה:** הסכום הוא גם מ"מ רציף ופה"מ שלו היא הקונבולוציה הנ"ל

## 19.8 צפיפות מותנית:

**הגדרה:** במקרה הרציף, הצפיפות המותנית של $x$ בהינתן $Y=t$ עבור $f_Y(t)>0$ מוגדרת ע"י: $f_{X|Y=t}(s)=\frac{f_{X,Y}(s,t)}{f_Y(t)}$.

**הערה:** אין עניין לחשב ערך בודד שהרי ההסתברות לערך בודד שווה ל 0.

**הערה:** יש מקרים בהם הצפיפות המותנית לא מוגדרת.

**טענה:** לכל זוג מ"מ $X,Y$ בעלי צפיפות משותפת מתקיים: $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{Y|X=x}(y)f_{X=x}(x)dx$ . (כאשר בנק' בהן הצפיפות המותנית לא מוגדרת הביטוי באינטגרל שווה ל 0).

## 19.9 התכנסות של סדרת התפלגויות⇔התכנסות בהתפלגות:

**הגדרה - התכנסות להתפלגות גבולית רציפה:** תהי$X_n$ סדרת מ"מים כלשיהם, ונניח כי $X$ הוא מ"מ רציף. נאמר ש $X_n$ **מתכנסת בהתפלגות** ל $X$ אם לכל $t\in R$ שבה $F_X$ רציפה מתקיים: $\lim_{n\to\infty}F_{X_n}(t)=F_X(t)$.

במקרה זה נסמן $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

**הגדרה ־ התכנסות להתפלגות גבולית כללית:** יהיו $X_n, X$ מ"מים כלשיהם, נאמר ש $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ אם לכל $t$ שהיא **נקודת רציפות** של $F_X$ מתקיים: $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$.

#### 19.9.1 תכונות של התכנסות בהתפלגות:

אם $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c$ עבור $c \in R$ ו $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y$ בנוסף $X_n, Y_n$ מוגדרים מעל אותו המרחב. אזי:

1. $Y_n + X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y + c$.
2. $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} cY$.

# 20 משפט הגבול המרכזי:

## 20.1 החוק החלש של המספרים הגדולים ־ ניסוח חדש:

יהיו $X_1, X_2....$ סדרת מ"מים ב"ת ושווי התפלגות, עם תוחלת $E(X_i) = \mu$. נגדיר: $S_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, אזי $S_n \xrightarrow{d} \mu$
**טענה:** תהי $Y_n$ סדרת מ"מים, ויהי $a \in R$ . אזי $Y_n \xrightarrow{d} a$ אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - a| \geq \varepsilon\right) = 0$.

## 20.2 משפט הגבול המרכזי:

**באופן לא פורמלי:** משפט הגבול המרכזי אומר שאם יש לי סכום של מ"מים בת"ל שכל אחד מהם משפיע רק בקצת על הסכום, אזי הסכום מתפלג בקירוב נורמלי (עם תוחלת שהיא סכום התוחלות ושונות שהיא סכום השונויות).
**קיימים מספר ניסוחים למשפט:**

1. יהיו $X_1, X_2....$ סדרת מ"מים ב"ת ושווי התפלגות, עם תוחלת $E(X_i) = 0$ ושונות $Var(X_i) = 1$ אזי עבור $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$$

2. יהיו $X_1, X_2....$ סדרת מ"מים ב"ת ושווי התפלגות, עם תוחלת $E(X_i) = \mu$ ושונות $Var(X_i) = \sigma^2$ אזי עבור $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - n\cdot\mu)}{\sigma}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z,$$

3. יהיו $X_1, X_2....$ סדרת מ"מים ב"ת ושווי התפלגות, עם תוחלת $E(X_i) = \mu$ ושונות $Var(X_i) = \sigma^2$. נסמן - $S_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ אזי עבור $Z \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$:

$$\sqrt{n}\left(S_n - \mu\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z$$

# 21 סטטיסטיקה:

אנו לעשה מסתכלים על זה כמו הסתברות רק מהצד השני, לדוגמא - אנו נסתכל על מספר הטלות מטבע בלי לדעת כיצד הוא מתפלג, ונצטרך "לנחש" את ההתפלגות.

## 21.1 בדיקת השערות פשוטות:

**הגדרות:**

1. **הגדרה - השערה פשוטה:** השערה פשוטה היא פונקציית הסתברות הקובעת את התפלגות המ"מ.

2. **הגדרה - השערה לא פשוטה:** השערה לא פשוטה היא קבוצת פונקציות הסתברות הקובעת קבוצת התפלגויות אפשריות למ"מ. (לא נתעסק בזה כרגע).

3. **הגדרה - מבחן:** מבחן הוא פרוצדורה להכריע בין 2 השערות. כל פרוצדורה היא מבחן, זו לא חייבת להיות פרוצדורה הגיונית, אך המטרה שלנו היא למצוא מבחנים הגיוניים וסבירים שיתנו הערכות טובות.
**ובאופן רשמי:** בהינתן שתי השערות פשוטות $H_0, H_1$. מבחן היא הקבוצה $S \subseteq R$ ומאורע $C = \{X \in S\}$ שמשמעותו - המבחן אומר ש$H_0$שגויה ונקבל את $H_1$.

4. **הגדרה - טעות מסוג ראשון:** אם $H_0$נכונה ו $X \in S$ אזי זאת טעות מסוג ראשון.
**כלומר** - קיבלנו את $H_1$למרות שהיא הטענה השגויה.
**נסמן את ההסתברות לטעות כך:** $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(X \in S)$

5. **הגדרה - טעות מסוג שני:** אם $H_1$ נכונה ו $X \in S^c$ אזי זאת טעות מסוג שני.
**כלומר** - קיבלנו את $H_0$למרות שהיא הטענה השגויה.
**נסמן את ההסתברות לטעות כך:** $\beta = \mathbb{P}_{H_1}(X \in S^c)$

תמיד נסמן את ההשערה שהיא מקרה הבסיס ב $H_0$, ואת ההשערה האלטרנטיבית ב $H_1$. אנו רוצים לצמצם את טווח הטעות כך ש $\alpha, \beta$ יהיו קטנות ככל האפשר.

## 21.2 השוואה בין מבחנים:

**הגדרות:**

1. **הגדרה ־ יחס בין מבחנים:** בהינתן שני מבחנים $C, D$:
   1: נאמר שמבחן $C$ **טוב בדיוק כמו** מבחן $D$ אם: $\alpha_C = \alpha_D$ וגם $\beta_C = \beta_D$
   2: נאמר שמבחן $C$ **טוב לפחות כמו** מבחן $D$ אם: $\alpha_C \leq \alpha_D$ וגם $\beta_C \leq \beta_D$
   3: נאמר שמבחן $C$ **טוב ממש** ממבחן $D$ אם $(\alpha_C \leq \alpha_D$ וגם $\beta_C < \beta_D)$ או $(\alpha_C < \alpha_D$ וגם $\beta_C \leq \beta_D)$

2. **הגדרה ־ מבחן מיטבי:** נאמר שמבחן $C$ הוא מבחן מיטבי אם לא קיים מבחן אחר ש**טוב ממש** ממנו. כלומר־ $\beta_C < \beta_D$ וגם $\alpha_C < \alpha_D$ לכל מבחן $D$.

## 21.3 מבחן יחס נראות:

מבחן יחס נראות יעזור לנו למצוא מבחן מיטבי.

**הגדרות:**

1. **הגדרה ־ מבחן יחס נראות במקרה הבדיד:** עבור התפלגויות $H_0, H_1$ בדידות, נאמר שמבחן $C$ כלשהו הוא מבחן יחס נראות עם פרמטר $\lambda_0 \geq 0$ אם מתקיים:
   1: לכל $s \in R$ עבורו $\mathbb{P}_{H_0}(X=s) < \lambda_0 \mathbb{P}_{H_1}(X=s)$ מתקיים $s \in S$.
   2: כל $s \in R$ עבורו $\mathbb{P}_{H_0}(X=s) < \lambda_0 \mathbb{P}_{H_1}(X=s)$ מתקיים $s \notin S$
   **הערה:** אם מתקיים שוויון לא נדרוש כלום ע"מ להגדיר מבחן יחס נראות, כלומר אותו $s$ עבורו מתקיים השוויון יכול לקיים $s \in S$ ויכול שלא.
   **יחס נראות:** הוא היחס $\frac{\mathbb{P}_{H_0}(X=s)}{\mathbb{P}_{H_1}(X=s)}$.

1. **הגדרה ־ מבחן יחס נראות במקרה הרציף:** עבור התפלגויות $H_0, H_1$ רציפות בהחלט, נאמר שמבחן $C$ כלשהו הוא מבחן יחס נראות עם פרמטר $\lambda_0 \geq 0$ אם מתקיים:
   1: לכל $s \in R$ עבורו $f_{X\sim H_0}(s) < \lambda_0 f_{X\sim H_1}(s)$ מתקיים $s \in S$.
   2: כל $s \in R$ עבורו $f_{X\sim H_0}(s) < \lambda_0 f_{X\sim H_1}(s)$ מתקיים $s \notin S$.

### 21.3.1 הלמה של נויימן פירסון:

**למה:** אם $C$ הוא מבחן יחס נראות עם פרמטר $\lambda_0 \geq 0$ אזי $C$ הוא מבחן מיטבי (הכיוון ההפוך גם נכון ־ כל מבחן מיטבי הא מבחן יחס נראות).

**טענה:** אם מבחן $D$ הוא טוב ממש ממבחן $C$ אזי: $f(D) < f(C)$.

## 21.4 בדיקת השערות ־ דגימות מרובות:

דגימות מרובות זו פשוט דרך להשוות בין 2 התפלגויות על וקטורים מקריים, ולא על מ"מ בודד. כל מה שעשינו בנוגע למבחני נראות וכו' נכון גם עבור דגימות מרובות.

### 21.5 אמידת פרמטרים:

**באופן לא פורמלי:** נקבל דגימות בלתי תלויות מהתפלגות לא ידועה במלואה ועל סמך הדגימות ננסה להסיק משהו לגבי ההתפלגות.

**הגדרות:**

1. **משפחה של התפלגויות:** משפחה של התפלגויות יכולה להיות כל קבוצה שהיא של התפלגויות.

2. **פרמטר -** $\Theta$ : הוא פונקציה ממשפחת התפלגויות ל $R$.

3. **אומד:** בהינתן משפחת התפלגויות ופרמטר $\Theta$ על המשפחה, אומד $Y$ עבור $\Theta$ על סמך דגימות $X_1....X_n$ הוא **מ"מ** שהוא פונקציה של $X_1....X_n$. כלומר $Y = f(X_1....X_n)$. עבור $f : R^n \to R$.

4. **חוסר הטיה:** נאמר שאומד $Y$ הוא **חסר הטיה** אם מתקיים: $E(Y) = \Theta$.

5. **מוטה:** אם אומד $Y$ הוא חסר הטיה - נאמר שהוא **מוטה.**

6. **תוחלת ריבוע השגיאה** $MSE$**:** נניח ש $Y = f(X_1....X_n)$ הוא אומד לפרמטר $\Theta$ כלשהן. אזי ה $MSE$ של $Y$ מוגדר ע"י: $MSE(Y) = \mathbb{E}\left((Y - \Theta)^2\right)$.

7. **הטיה -** $\boldsymbol{bias}$**:** ההטיה של אומד $Y$ עבור פרמטר $\Theta$ מוגדרת ע"י: $Bias(Y) = E(Y) - \Theta$

**טענה - חישוב שקול ל** $MSE$**:** יהי אומד $Y$ עבור פרמטר $\Theta$ כלשהו, מתקיים: $MSE(Y) = Var(Y) + (Bias(Y))^2$.
**טענה - חיבור אומדנים:** יהי $f, g$ אומדים חסרי הטיה עבור $\Theta_1, \Theta_2$ בהתאמה. אזי $f + g$ הוא אומד חסר הטיה עבור $\Theta_1 + \Theta_2$.

#### 21.5.1 אומד נראות מקסימלי:

**הסבר כללי:** זוהי דרך למצוא אומדים טובים, בדומה לדרך בה מצאנו מבחנים אופטימליים.
**הגדרה - מיקסום נראות:** בהינתן דגימות $x_1...x_n$ (אלו תוצאות הדגימות, לא מ"מים). נרצה למצוא פרמטר שממקסם את **הנראות** (לא יחס נראות).
**הערה:** חשוב לומר שאנחנו מניחים שמשפחת ההתפלגויות כאן מצומצמת יותר - אנחנו מרשים רק סוג התפלגות מסוים עם פרמטר שיכול להשתנות.

## 22 טורים:

1. $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2. שינוי סדר סכימה בטורים אפשרי כאשר הטור הוא חיובי ומתכנס ולכן מתכנס בהחלט.

3. בטור - ניתן להוציא את הסקלאר החוצה.

4. **טורי טיילור:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

5. **טור גיאומטרי:** $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \quad \textbf{for } |q| < 1$.

6. **שינוי סדר סכימה:** בטור חיובי מתכנס ניתן לשנות סדר סכימה בלי שהתוצאה תשתנה.

7. $\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} k \cdot x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ עבור $|x| < 1$.

## 23 חוקי לוגים:

1. עבור $x > -1$ מתקיים $log(1+x) \leq x$.

## 24 טריקים:

1. כאשר אנו רוצים לחשב גודל של קבוצה $A$ וקשה לנו לדעת מהו הגודל. נוכל לחשב את $A^c$.

2. אם נרצה להיפטר ממכפלה - נוכל להפעיל עליה $log$ וכך היא תהפוך לסכום.

$$x = \prod_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow log\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} log\left(A_i\right)$$

3. **סכום סדרה חשבונית:** $\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$.

4. **טענה:** לכל $x \in R$ מתקיים: $1 + x \leq e^x$

5. **אינטגרל של מעגל:** הרבה פעמים כשנצטרך לחשב שטח של מעגל, נוכל לחשב זאת על ידי נוסחת שטח מעגל במקום לעשות אינטגרל.

6. **נוסחה לחישוב מקסימום בין שני מ"מים:** $\max(X,Y) = \frac{X+Y}{2} + \frac{|X-Y|}{2}$.

7. **קירוב פואסוני למ"מ בינומי רציף:** מתקיים $Bin(n,p) = Poiss(n \cdot p)$

8. **חישוב של $X^2$:** עבור $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ אזי: $X^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i\right)^2 + \sum_{i\neq j}^{n} X_i \cdot X_j$