סיכום לוגיקה

9 במרץ 2022

1 שבוע 1

1.1 הרצאה 1:

- **סינטקס וסמנטיקה:** סינטקס היא הדרך לכתוב את הנתונות בעוד בסמנטיקה היא הפירוש של הכתוב. אנו נשתמש בסינטקס בכדי להוכיח דברים סמנטים.
- **סימונים:** $\vdash$: מתוך הנחות טכניות - סינטקס אפשר להוכיח את המסקנה. $\vDash$**:** אם הסמנטיקה נכונה אזי המסקנות נכונות.
- **נאותות:** נאמר ששיטת ההוכחה **נאותה** אם כל מה שנוכיח הוא נכון. כלומר - א"א להוכיח מה שלא נכון. $A \vdash C \Rightarrow A \vDash C$
- **שלמות - משפט השלמות של גדל:** נאמר שלוגיקה היא **שלמה** אם כל מה שנכון ניתן להוכיח. $A \vDash C \Rightarrow A \vdash C$.
- ***Prpositional Logic* - תחשיב פסוקים:** אנו נגדיר פסוקים על ידי תווים, ונייצג אותם במבנה נתונים בצורת עץ. פסוק הוא מהצורות הבאות: אותיות $p - z$ ומספרים 1-9 שמופיעים לאחר אות, אמת ושקר - T, F, שלילה, גימום, איווי וגרירה חד כיוונית. בסוגריים נשתמש רק בגימום, איווי וגרירה.

2 שבוע 2

2.1 הרצאה 2:

- **משפט:** קבוצת נוסחאות תמיד תהיה בת מניה או סופית.
- **הגדרה - מודל:** מודל מעל סט של אטומים S היא פונקציה מ S ל T, F. $M : S \Rightarrow T, F$
למעשה זוהי השמה של T, F לכל אטום. לכן יש כמה מודלים אפשריים לכל נוסחה שחלקם יחזירו T וחלקם F.
- **טאוטולוגיה:** נוסחאות הנכונות **בכל** מודל. דוג' $(X| \sim X), T$.
- **קונטרדישינס - סתירות:** סתירות שלא נכונות **באף** מודל. דוג' $(X \& \sim X), F$

- **הגדרה - מסופקת\ספיקה** $Satisfiability$**:** נאמר שנוסחה מסופקת\ספיקה אם קיימים מודלים שיכולים לספק אותה.

- **משפט:** בהינתן טבלת אמת ניתן להפיק ממנה נוסחה בצורת DNF.
נעשה זאת כך: נבחר את כל פסוקי האמת. עבור כל משתנה T נכתוב אותו, עבור כל משתנה F נכתוב את השלילה שלו, נחבר בניהם ע"י and, ונשרשר את כל הנוסחאות ע"י or.

- **משפט:** בהינתן טבלת אמת ניתן להפיק ממנה נוסחה בצורת CNF.
נעשה זאת כך: נבחר את כל פסוקי השקר. ונשתמש ב or של and-ים.

- **משפט קוק:** כל בעיית חיפוש ניתנת לתרגום לטבלת אמת בזמן פולינומיאלי, אם יש נוסחה מספקת - הבעיה פתירה. אחרת - אין פתרון.

3 שבוע 3

3.1 הרצאה 3 - 25.10 :

- $\oplus$ XOR: מחזיר T רק אם אחד מהמשתנים הא T. אחרת - יחזיר F.
$\iff$ Iff: אופרטור אמ"מ. מחזיר T אם שני המשתנים בעלי אותו סימן.
$\Uparrow$ $Nand$: אופרטור המסמן $not\ and$.
$\Downarrow$ Nor: אוסרטור המסמן $not\ or$.

- **משפט:** כל נוסחה בוליאנית ניתנת להצגה באמצעות האופרטורים and, or, not. - צורת DNF.

- **הגדרה - שלמות:** קבוצת אופרטורים תיקרא "שלמה" אם ניתן להציג **כל** פונקציה בוליאנית ע"י האופרטורים הללו.

- **משפט:** קבוצת האפרטורים $\{and, not\}$ היא שלמה.

- **משפט:** קבוצת האפרטורים $\{nand\}$ היא שלמה.

- **משפט:** קבוצת האפרטורים $\{\Rightarrow, \sim\}$ היא שלמה.

- **משפט:** קבוצת האפרטורים $\{\Rightarrow, F\}$ היא שלמה.

- **הגדרה** $T - preserving$**:** נוסחה שאם נכניס לכל המשתנים שלה T, נקבל T.

- **למה:** כל פונקציה שמשתמשת רק בקבוצת הקשרים הבאה, אינה שלמה $\{\Rightarrow, T, |, \&, \iff, mux, maj\}$.

- **הגדרה - פונקציה מונוטונית:** נגדיר פונקציה בוליאנית להיות מונוטונית אם על ידי שינוי ערך מ F ל T ערך הפונקציה לעולם לא ישתנה מ T ל F.

- **למה:** כל פונקציה שמשתמשת רק בקבוצת הקשרים הבאה, היא מונוטונית $\{F, T, |, \&\}$.

- **למה:** הקבוצה $\{\sim\}$ אינה מונוטונית.

- **הגדרה - פונקציה אפינית:** פונקציה בוליאנית תיקרא אפינית אם עם היא אפינית (לינארית + קבוע) על שדה בעל 2 איברים.
- **למה:** כל פונקציה שמשתמשת בקבוצת הקשרים הבאה היא אפינית. $\{\sim, \oplus, \iff, T, F\}$.
- **למה:** $\&$ אינו אפיני.

4 שבוע 4

4.1 הרצאה 4 - 1.11 :

- **כיצד בנויה הוכחה:** (הוכחה בסגנון הילברט)
הנחות A, B, C.
מסקנה שנרצה להוכיח מההנחות.
אוסף של ככלי היסק שמותר להשתמש בהם.
גוף ההוכחה - משתמש בכללי ההיסק כדי לקבל את המסקנה כאוסף של היסקים סנטקטים מההנחות.
- **כלל היסק - הגדרה:** מכיל אוסף של הנחות, ומסקנה שכל אחד מהם הוא נוסחה.
- **נאותות -** $Soundness$: כלל היסק נאות: נסתכל על A קבוצת נוסחאות. ועל מסקנה φ נאמר ש A גורר באופן סמנטי את φ , אם כל מודל שמקיים את כל ההנחות מקיים גם את φ.
ובאופן סינטקטי: $A \models \varphi$.
- **הגדרה - מקרה פרטי של כללי היסק:** עבור שני כללי היסק A, B. נאמר ש B הוא מקרה כללי של A. אם לכל משתנה שמופיע ב A יש מחליף מקביל אליו ב B.
- **הגדרה - הוכחה:** יש לנו למה שאותה צריך להוכיח, בנוסף יש לנו הנחות וכללי היסק שבהם ניתן להשתמש כדי להוכיח.
מבנה ההוכחה: ההוכחה בנויה מסדרה ממוספרת של שורות כאשר כל שורה כוללת: נוסחה והצדקה של הנוסחה - הנחת הלמה או מסקנה של כלל היסק (או מקרה פרטי שלו) שמופעל על שורות קודמות.
- **יכיח:** עבור כללי היסק R, ונוסחה A. נאמר שניתן להוכיח את φ מ A בעזרת כללי היסק R אם קיימת הוכחה כך שבסוף נקבל את φ.
סימון: $A \vdash_R \varphi$
- **משפט הנאותות:** אם הוכחנו למה בעזרת כללי היסק נאותים, אזי גם הלמה נאותה.
למעשה המשפט אומר שאם הסינטקס מסתדר אזי גם הסמנטיקה עובדת.
באופן פורמלי: אם קבוצת כללי ההיסק R שאיתם נצטרך להוכיך את הלמה הם נאותים, וגם מתקיים $A \vdash_R \varphi$ אזי מתקיים $A \models \varphi$.
הוכחה: נניח בשלילה כי קיים מודל שמקיים את כל כללי ההיסק וההנחות אך מחזיר שהטענה לא נכונה. נבחר את

כלל ההיסק הראשון שהמודל לא מסכים עליו (שההנחות שלו נכונות אך המסקנה לא). א"כ כלל ההיסק לא נאות בסתירה.

- **למה:** אם כלל היסק נאות, אזי כל מקרה פרטי שלו גם נאות.

5 שבוע 5

5.1 הרצאה 5 :

- **משפט:** אם ניתן להוכיח משפט בעזרת למה וכללי היסק R, ובנוסף תנין להוכיח את הלמה בעזרת אותם כללי היסק. אזי ניתן להוכיח את המשפט בעזרת כללי ההיסק בלבד בלי להשתמש בלמה.

- **$Modus\ Ponens - MP$:** כלל היסק שאומר שמתוך p ו $(p \Rightarrow q)$ נובע q.

- **$I1$:** אקסיומה $(q \to (p \to q))$

- **D:** אקסיומה $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$

- **שימוש באקסיומות:** אנו נשתמש בכמה אקסיומות (כללי היסק שקבוצת ההנחות שלהם ריקה). בצירוף MP וכך ניצור קבוצת כללי היסק חזקה שאיתה נוכל להוכיח הכל.

- **למה:** אם R היא רשימת כללי היסק המכילה את MP אזי:

$$\vdash_R (\varphi \to \psi) \text{ implies } \{\varphi\} \vdash_R \psi$$

כלומר ־ יש שקילות בין $A \Rightarrow B$ לבין אם A נכון אזי גם B נכון.

- **משפט הדדוקציה:** אם R כוללת את $MP, I1, D$, וכללי היסק שהם אקסיומות, אזי: עבור A קבוצת נוסחאות:

$$A \cup \{\varphi\} \vdash_R \Psi \quad \Leftrightarrow \quad A \vdash_R (\varphi \to \psi)$$

כלומר ־ אם אפשר להוכיח את A מתוך B, אזי ניתן להוכיח בלי הנחות ש $A \Rightarrow B$ ולהיפך.

- **הגדרה ־ אי קונסיסטנטיות:** עבור קבוצת כללים R וקבוצת נוסחאות A, אם מתקיים אחד מהכללים הבאים אזי הקבוצה A לא קינסיסטנטית:
  1: ניתן להוכיח את $(p \Rightarrow p) \sim$ מ A.
  2: ניתן להוכיח מ A שלילה של אחת האקסיומות מ R.
  3: קיימת נוסחה שניתן להוכיח גם אותה וגם את שלילתה ע"י A.
  4: ניתן להוכיח ע"י הקבוצה A כל נוסחה בעולם.
  5: ניתן להוכיח ע"י הקבוצה A שלילה של כל אקסיומה בעולם.
  כל ההגדרות הנ"ל שקולות.

- **הוכחה בשלילה ומשפט הדדוקציה:** עבור קבוצת כללים R וקבוצת נוסחאות A ותהי φ נוסחה, אזי $A \cup \{\sim \varphi\}$ הוא לא קונסיסטנטי אמ"מ $A \vdash_R \varphi$.
כלומר - אם מתוך השלילה של φ הגענו לקבוצה לא קונסיסטנטית, אזי ניתן מהקבוצה להוכיח את φ. למעשה זה נובע ממשפט הדדוקציה.

6 שבוע 6 - משפט התאותולוגיה:

6.1 הרצאה 6 - 15.11:

- **משפט השלמות:** אם $\varphi \vDash A$ אז $A \vdash \varphi$. כלומר - אם φ נובע מקבוצת פסוקים A (לא בהכרח סופית), אזי ניתן להוכיח את φ מקבוצה זו. (את הצד השני ראינו לפני שתי הרצאות).

- **ארבעת האקסיומות של הילברט:** $MP, N, D, I1$. איתן ועם קבוצת הקשרים $\{\Rightarrow, \sim\}$ ניתן להוכיח הכל.

- **משפט התאותולוגיה:** אם φ תאותולוגית (מתקיימת בכל מודל) אזי $\vdash \varphi$ כלומר - ניתן להוכיח אותה בלי שום הנחות. (בעזרת האקסיומות של הילברט)

- **הגדרה - נוסחאות תופסות מודל:** (המרת מודל לנוסחאות) עבור כל משתנה במודל L נשים את הנוסחה p אם הוא מקבל ערך $true$ במודל, אחרת נשים $\sim p$.

- **למה:** אם יש לנו נוסחה φ שמקבלת ערך אמת במודל L, אזי ניתן להוכיח את φ מאוסף הנוסחאות שתופסות את L. ואם φ היא שקר אזי ניתן להוכיח את $\sim \varphi$.

- **משפט השלמות לקבוצה סופית:** אם A קבוצת פסוקים סופית ממנה נובעת φ (סמנטית), אזי ניתן להוכיח ממנה את φ (סינטקטית).

- **מקרה פרטי של משפט השלמות:** עבור φ = סתירה. אם כל מודל שמקבל את A מקבל את הסתירה, אזי ניתן להוכיח מ A את הסתירה. (כלומר A אינה קונסיסטנטית).
מסקנה: אם ל A אין אף מודל שמקיים אותה אזי A אינה קונסיסטנטית.
מסקנה שניה: אם A קונסיסטנטית (לא מגיעים ממנה לסתירה) אזי יש לה מודל.

- **טענה:** אם A קבוצה אינסופית של הנחות, ונוסחה φ ניתנת להוכחה מ A, אזי φ ניתנת להוכחה מקבוצה סופית A' תת קבוצה של A. (אמ"מ)

- **משפט הקומפקטיות:** אם לכל תת קבוצה סופית של אוסף נוסחאות יש מודל, אזי יש מודל לקבוצה האינסופית.

- **הגדרה - מרחב טופולוגי (מטרי) קומפקטי:** מרחב טופולוגי יקרא קומפקטי אם לכל אוסף של תתי קבוצות סגורות יש חיתוך לא ריק, אזי לכל האינסוף יש חיתוך לא ריק.

- **טענה:** מרחב המודלים הוא מרחב קומפקטי.

7 שבוע 7 ־ תחשיב הפרדיקטים (יחסים):

7.1 הרצאה 7:

7.1.1 סינטקס:

יש לנו שני סוגי עצמים ־ שמות עצם ונוסחאות :

- **שמות עצם** $Terms$:
  משתנים: אותיות בין $u - z$ מייצגים בני אדם או מספרים וכו
  קבועים: מיוצגים ע"י אותיות $a - e$ ספרות או "_".
  פונקציות: מופעלות על שמות עצם אחרים ($t = terms$) רקורסיבית. מחזירות עצם ,עבור שמות עצם $f(t_1, t_2, ..., t_n)$, תורכב מאותיות $f - t$ ותקבל לפחות משתנה 1. לדוגמה $plus(x, y)$ היא פונקציה.

- **נוסחאות:**
  שוויון: הנוסחה הראשונה שיש לנו היא $t_1 = t_1$.
  יחס: יחס שמופעל על שמות עצם $R(t_1....t_n)$ ומחזיר $true/false$. ניתן להגדיר יחס שלא מקבל אף $term$.
  כמתים: כמתים של לכל וקיים, נגדיר בצורה הבאה $\exists x[\phi]$ כאשר x הוא משתנה ו ϕ היא נוסחה.
  קשרים: $\Rightarrow, \sim, |, \&$.

- **משפט:** קיימת דרך אחת בלבד להפוך סטרינג לפורמולה.

- **הגדרה ־ משתנה חופשי:** מופע של משתנה נקרא חופשי אם הוא לא נמצא בתוך סוגריים מרובעים שבאים אחרי שם המשתנה עצמו.
  בדוגמה הבאה x חופשי: $\exists y[plus(x, y) = 0]$.

- **משפט:** סט של $terms$ ושל נוסחאות הם אינסופיים בני מניה.

7.1.2 סמנטיקה:

- **מודל** (עולם שבתוכו תהיה משמעות לפסוק):
  עולם $Univers$ ־ Ω: ־ העולם שבתוכו אנו חיים.
  קבוע: הוא אלמנט במודל $\omega \in \Omega$
  פונקציה: לוקחת שני איברים במודל ומחזירה איבל המודל. $f : \Omega^k \to \Omega$.
  יחס: לכל קבוצה של k איברים הוא מחזיר לנו $true$ אם היחס מקיים אותה או $falsee$ להיפך, $\mathrm{R} \subseteq \Omega^{\mathrm{k}}$.

- **ערך של** $Term$ **בתוך מודל ללא משתנים:**
  לקבוע c: המודל נותן לו ערך.
  לפונקציה $f(t_1....t_k)$: באופן רקורסיבי כל אחד משמות העצם של הפונקציה מקבל ערך במודל (מכיוון שערך של $term$ במודל הוא איבר ב Ω של המודל). לכן הפונקציה תחזיר $term$.

- **ערך של $Term$ בתוך מודל עם משתנים:**
לקבוע c: המודל נותן לו ערך.
לשם משתנה: הערך שלו מופיע בהשמה.
לפונקציה $f(t_1....t_k)$: באופן רקורסיבי כל אחד משמות העצם של הפונקציה מקבל ערך במודל (מכיוון שערך של $term$ במודל הוא איבר ב Ω של המודל). לכן הפונקציה תחזיר $term$.

- **ערך אמת של נוסחה:**
ערך האמת כאשר צריך השמה לכל המשתנים החופשיים:
עבור $t_1 = t_2$: לשני ה $terms$ יש השמה ב Ω, לכן נקבל $true$ רק אם הם שווים.
עבור $R(t_1....t_k)$: כל אחד מאברי ה $tuple$ מקבל ערך ב Ω, ונקבל $true$ אם הם מקיימים את היחס.
עבור אופרטורים בינארים ואונארים: נשתמש בצורה הרגילה של תחשיב הפסוקים.

- **כמתי לכל וקיים:**
כמת לכל $\forall x[\varphi]$: נקבל $true$ אם הערך של φ הוא $true$ **לכל** השמה של x. (לכל $\omega_i \in \Omega$ אם ההשמה של $\{x : \omega_i\}$ מחזירה $true$).
כמת קיים $\exists x[\varphi]$: נקבל $true$ אם הערך של φ הוא $true$ באחת מההשמות שמה של x. (אם קיים איבר ב Ω אם ההשמה של $\{x : \omega\}$ מחזירה $true$).

8 שבוע 8

8.1 הרצאה 8 - תחשיב היחסים הטהור (ללא פונקציות ו "="):

- **פונקציות כיחסים:** ניתן לתרגם כל פונקציה ליחס, כאשר הוא מכיל זוגות מהצורה $(f(x), x)$ עבור $x \in A, f(x) \in B$.

- **כך נתרגם פונקציה ליחס:** עבור יחס F שמייצג את הפונקציה

$$(y, x_1, \ldots, x_t) \in F \Leftrightarrow y = f(x_1, \ldots, x_t)$$

- **מעבר מיחסים לפונקציות:** ניתן לעבור גם מיחס לפונקציה, אך לא בכל מצב. אם היחס לא מקיים תנאים של פונקציה (לא מתאים ערך לכל x, או שולח x אחד לשני מקומות שונים) אזי התרגום לא אפשרי.

- **משפט - הסרת פונקציות:** תהי קבוצה F של נוסחאות שיכול להיות שמשתמשות בפונקציות, ניתן לבנות קבוצה F' של נוסחאות ללא פונקציות, כך שיש מודל ל F אמ"מ יש מודל ל F'. והמודלים שמתאימים ל F ול F' הם בדיוק אחד לאחד (חח"ע).

- **החלפת הסימן $x = y$ ביחס $Same(x, y)$:** נוסיף את הדברים הבאים:
רפלקסיביות: $\forall x[SAME(x, x)]$
סימטריה: $\forall x[\forall y[(SAME(x, y) \rightarrow SAME(y, x))]]$

טרנזטביות: $\forall x[\forall y[\forall z[((SAME(x,y)\&SAME(y,z)) \to SAME(y,z))]]]$

בנוסף:

ליחס אונארי: $\forall x[\forall y[(SAME(x,y) \to (R(x) \to R(y)))]]$

וליחס בינארי: $\forall x1[\forall x2[\forall y1[\forall y2[((SAME(x1,y1)\&SAME(x2,y2)) \to (R(x1,x2) \to R(y1,y2)))]]]]$

- **משפט - הסרת הסימן = :** תהי קבוצה F של נוסחאות שיכול להיות שמשתמשות בסימן =, ניתן לבנות קבוצה F' של נוסחאות ללא הסימן שווה אלא עם היחס $Same$, כך שיש מודל ל F אמ"מ יש מודל ל F'. והמודלים שמתאימים ל F ול F' הם תואמים.

- **כיצד ניצור מודל ל** F**:** בהינתן מודל ל F'ניתן ליצור מודל לקבוצה F כך שהמודלים יהיו חח"ע.

מכיוון שהיחס $Same$ הוא טרנזטיבי סימטרי ורפלקסיבי אזי הוא יחס שקילות ולכן הוא מחלק את העולם Ω למחלקות שקילות. נקח מכל מחלקת שקילות נציג, וכך נקבל מודל חח"ע למודל של F.

9 שבוע 9

9.1 הרצאה 9:

- **מה יכול לשמש כשורה בהוכחה בתחשיב הפרדיקטים :**
  - **1 - אקסיומות:** אנו נשתמש ב 6 אקסיומות בלבד.
  - **2 -** MP**:** כמו בתחשיב הפסוקים.
  - **3 - תאוטולוגיה:** שימוש בתאוטולוגיה כמו בתחשיב היחסים.
  - **4:** הנחות.
  - **5 -** UG**:** בהינתן פסוק φ אזי ניתן לכתוב אותו כ $\forall x[\varphi]$.

- **אקסיומה -** UI**:** $(\forall x[\varphi(x)] \to \varphi(\tau))$ האקסיומה אומרת שאם יש לכל x שגורר משו, אזי ניתן להישאר רק עם המשו ולהוריד את התנאי של לכל.

- **כיצד נשתמש בתבניות:** בכדי שנוכל לבחליף נוסחאות במקרה פרטי, נצטרך להגדיר מה מוגדר כקבוע (שלא ניתן להחליף אותו) ומה כתבנית שניתן להחליף אותה. יהיו לנו 3 סוגים של תבניות:
  - **1 - שם של קבוע:** יכול להחליף כל $term$.
  - **2 - של של משתנה:** יכול להחליף כל משתנה.
  - **3 - שם של יחס:** ניתן להחליף אותו בכל פסוק / נוסחה.

- **כלל 1 להחלפת יחס בנוסחה:** אם אנחנו רוצים להחליף יחס בנוסחה, כאזר היחס מופיע בתוך נוסחה גדולה יותר.
אסור שיהיה משתנה חופשי בנוסחה הקטנה שיכומת ע"י משתנה בנוסחה הגדולה.
אבל אם המשתנה לא חופשי, אלא מכומת בנוסחה הקטנה אין בעיה לבצע את ההחלפה.

- **כלל 2 להחלפת יחס בנוסחה:** כאשר אנו מחליפים $term$ ב "_" בנוסחה, אסור לשים במקום ה "_" שם של משתנה שמכומת גם בנוסחה הפנימית וגם בנוסחה הגדולה.

- **סכמה:** תאמר לנו בכל נוסחה אילו שמות משתנים/ קבועים /יחסים הם תבניות שניתן להחליף באחרות.

- **הגדרה ־ נאותות:** נאמר **שנוסחה היא נאותה** אם היא עובדת בכל מודל.
נאמר **שסכמה היא נאותה** אם כל המקרים הפרטיים שלה (יכולים להיות אינסוף כאלו) הם נאותים (עובדים בכל מודל).

- **הגדרה ־ הוכחה סינטקטית:** אם ניתן להוכיח נוסחה φ מסט של סכמות A אזי נואמר שהנוסחה ניתן להוכחה ונסמן $A \vdash \varphi$.

- **הגדרה ־ הוכחה סמנטית:** נאמר שמאוסף של אקסיומות A נובעת הנוסחה φ, אם כל מודל שמקייצ את כל האקסיומות מקיים גם את הנוסחה. ונסמן $A \vDash \varphi$.

- **משפט הנאותות לתחשיב היחסים:** אם יש לנו נוסחה φ שניתן להוכיח אותה רק ע"י שימוש באקסיומות נאותות X, אזי היא נכונה וכל מודל שמקיים את ההנחות A יקיים גם את הנוסחה φ.
כלומר: $\boldsymbol{A} \vDash \varphi$ $.if(A \cup X) \vDash \varphi, \text{ then}$ עבור X קבוצה של אקסיומות לוגיות נאותות, ו A קבוצת הנחות.

10 שבוע 10

10.1 הרצאה 10 :

- ד

11 שבוע 3

11.1 הרצאה 3 ־ 25.10 :

- ד

12 שבוע 3

12.1 הרצאה 3 ־ 25.10 :

- ד

13 שבוע 3

13.1 הרצאה 3 ־ 25.10 :

- ד