



微分几何 - 学习笔记

Alpha Version

潜龙勿用 容与

本笔记根据上海交通大学 Tobias Diez 老师的 Differential Geometry 课程内容编写

rongyu221104@163.com

Typeset with L^AT_EX

目录

1 曲线论	2
1.1 参数化曲线 (Parameterized Curve)	2
1.1.1 定义1. 曲线 (Curve)	2
1.1.2 定义2. 正则曲线 (Regular Curve)	2
1.1.3 定义3. 曲线的长度 (Length of a Curve)	2
1.1.4 定义4. 微分同胚 (Diffeomorphism)	2
1.1.5 定义5. 重参数化 (Reparameterization)	3
1.1.6 命题1	3
1.1.7 命题2	3
1.1.8 定义6. 弧长参数化曲线 (Arclength Parameterized Curve)	3
1.1.9 命题3	3
1.1.10 定理1. 活动标架 (Moving Frame)	4
1.1.11 定义7. 曲率 (Curvature)	4
1.1.12 非弧长参数化曲线的曲率	4
1.2 曲线的局部性质与整体结构 (local properties & global structure)	5
1.2.1 定义8. 回路 (Loop) & 简单回路 (simple loop)	5
1.2.2 定理2. Jordan 曲线定理	5
1.2.3 定理3. 等周不等式 (Isoperimetric Inequality)	5
1.2.4 引理	6
1.2.5 定理4. Moon in the Puddle (Pestov & Ionin, 1959)	6
1.2.6 定义9. 环绕数 (Winding Number)	6
1.2.7 命题4. 环绕数的性质	6
1.2.8 环绕数公式	7
1.3 三维空间中曲线的性质	7
1.3.1 定义: \mathbb{R}^3 中曲线的 Frenet-Serret 标架	7
1.3.2 定理5. Frenet-Serret 公式	7
1.3.3 曲率与挠率的几何意义	8
1.3.4 命题: 空间曲线平面性的判定	9
1.3.5 定理: 曲线论基本定理	9

1 曲线论

1.1 参数化曲线 (Parameterized Curve)

1.1.1 定义1. 曲线 (Curve)

设 I 是一个区间, \mathbb{R}^n 为 n 维 Euclidean 空间 (通常 $n = 2, 3$), c 为一个光滑的映射,

$$c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto c(t) \quad (1.1.1)$$

则称 c 为参数化曲线. 称其像的集合 $\{c(t) \mid t \in I\}$ 为曲线.

参数 t 不一定代表时间, 但可借用物理背景, 定义速度矢量 $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}$ 与加速度矢量 $\ddot{c}(t) = \frac{d\dot{c}}{dt}$.

1.1.2 定义2. 正则曲线 (Regular Curve)

设一条参数化曲线 c , 若 c 满足:

$$\dot{c}(t) \neq 0, \forall t \in I \quad (1.1.2)$$

则称 c 为一条正则曲线.

正则曲线没有尖点和角, 且每一点都有一个方向明确的非零切向量.

1.1.3 定义3. 曲线的长度 (Length of a Curve)

设参数化曲线 $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($I = [a, b]$ or (a, b)), c 的长度为:

$$L(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt \quad (1.1.3)$$

1.1.4 定义4. 微分同胚 (Diffeomorphism)

设 φ 是一个映射, 若满足:

1. φ 是光滑的;
2. φ 是一个双射;
3. 其逆映射 φ^{-1} 也是光滑的;

则称 φ 为一个微分同胚.

1.1.5 定义5. 重参数化 (Reparameterization)

设参数化曲线 $c_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, 微分同胚 $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$ ($\varphi'(s) > 0, \forall s \in I_2$), 则称另一参数化曲线 $c_2(s)$:

$$c_2 = c_1 \circ \varphi : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \& \quad c_2(s) = c_1(\varphi(s)) \quad (1.1.4)$$

为 c_1 通过 φ 的重参数化.

1.1.6 命题1

若 c_2 为 c_1 的一条重参数化曲线, 则 c_1 与 c_2 长度相同. 换言之, 曲线的长度与参数化的方式无关.

$$\begin{aligned} \dot{c}_2(s) &= \frac{dc_2}{ds}(s) \xrightarrow{\text{链式法则}} \frac{dc_1}{dt}(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \\ \implies L(c_2) &= \int_{a_2}^{b_2} \left\| \frac{dc_2}{ds}(s) \right\| ds = \int_{a_2}^{b_2} \left\| \frac{dc_1}{dt}(\varphi(s)) \right\| \cdot \|\varphi'(s)\| ds = \int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{dc_1}{dt}(t) \right\| dt = L(c_1) \end{aligned}$$

1.1.7 命题2

若 $\|\dot{c}(t)\| = 1$, 则有

$$\dot{c}(t) \ddot{c}(t) = 0 \quad (1.1.5)$$

$$\|\dot{c}(t)\| = 1 \implies \|\dot{c}(t)\|^2 = \dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t) = 1 \xrightarrow{\text{求导}} \ddot{c}(t) \cdot \dot{c}(t) + \dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t) = 0 \implies \dot{c}(t) \ddot{c}(t) = 0$$

1.1.8 定义6. 弧长参数化曲线 (Arclength Parameterized Curve)

设参数化曲线 $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 具有单位速率 (即 $\|\dot{c}(t)\| \equiv 1, \forall t \in I$), 则称其为弧长参数化的. 其长度为:

$$L(c_{[a,b]}) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = b - a \quad (1.1.6)$$

1.1.9 命题3

每条正则曲线都可被重参数化为一条弧长参数化曲线.

设微分同胚 $\varphi : I \rightarrow I$ ($s \xrightarrow{\varphi} t$) 使正则曲线 $c(t)$ 重参数化为弧长参数化曲线 $\tilde{c}(s)$,

$$s = \psi(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{c}(t)\| dt = L(c_{[t_0,t]}), \quad t_0 \in I \quad \left(\frac{d\psi(t)}{dt} = \|\dot{c}(t)\| > 0 \right)$$

$$\begin{aligned}\psi^{-1} \equiv \varphi \implies \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{1}{\frac{d\psi}{dt}(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\dot{c}(\varphi(s))\|} \\ \left\| \ddot{\tilde{c}}(s) \right\| &= \left\| \frac{dc}{dt}(\varphi(s)) \right\| \cdot \|\varphi'(s)\| = \left\| \frac{dc}{dt}(\varphi(s)) \right\| \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(\varphi(s))\|} = 1\end{aligned}$$

1.1.10 定理1. 活动标架 (Moving Frame)

设 $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为一条单位速度曲线, 且 $\|\ddot{c}\| \neq 0$, $\forall t \in I$, 其切向量 (Tangent Vector) 与法向量 (Normal Vector) 为:

$$T(t) := \dot{c}(t) \quad N(t) := \frac{\ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|} \quad (1.1.7)$$

$T(t)$ 与 $N(t)$ 均长度为 1 且相互垂直, 构成一对正交归一向量.

若 c 位于二维 Euclidean 空间中, 则 $T(t), N(t)$ 构成一个沿 c 移动的标准正交基, 称其为 c 的活动标架 (Moving Frame) 或称 Frenet-Serret 标架.

1.1.11 定义7. 曲率 (Curvature)

设弧长参数化曲线 $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, 有

$$\kappa(t) = \|\ddot{c}(t)\| \in [0, \infty) \quad (1.1.8)$$

称 $\kappa(t)$ 为 c 在 t 处的曲率.

1.1.12 非弧长参数化曲线的曲率

若正则曲线 c 是非弧长参数化的, 令 $\tilde{c} = c \circ \varphi$ 为其弧长参数化映射, $\tilde{\kappa}$ 为 \tilde{c} 的曲率, 则 c 的曲率为:

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}(\varphi^{-1}(t)) \quad (1.1.9)$$

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2 - \dot{v}^2(t)}}{v^2(t)} = \frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2 - [\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t)]^2}}{v^3(t)} \quad (1.1.10)$$

其中, 速率 $v(t) = \|\dot{c}(t)\|$.

$$ds = \|\dot{c}(t)\| dt \implies v(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$T(s) = \frac{\dot{c}(t)}{ds/dt} = \frac{\dot{c}(t)}{v(t)} \implies \frac{dT}{ds} = \frac{dT/dt}{ds/dt} = \frac{1}{v(t)} \frac{d}{dr} \left(\frac{\dot{c}(t)}{v(t)} \right) = \frac{\ddot{c}(t)v(t) - \dot{v}(t)\dot{c}(t)}{v^3(t)}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= \frac{d}{dt} \|\dot{c}(t)\| = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t)} = \frac{\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t)}{v(t)} \implies \frac{dT}{ds} = \frac{\ddot{c}(t)v^2(t) - \dot{c}(t)[\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t)]}{v^4(t)} \\ \kappa(t) &= \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{1}{v^4(t)} \sqrt{\{\ddot{c}(t)v^2(t) - \dot{c}(t)[\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t)]\}^2} = \frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2 - [\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t)]^2}}{v^3(t)} \\ &\xrightarrow{\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t) = \dot{v}(t)v(t)} \kappa(t) = \frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2 - \dot{v}^2(t)}}{v^2(t)}\end{aligned}$$

1.2 曲线的局部性质与整体结构 (local properties & global structure)

1.2.1 定义8. 回路 (Loop) & 简单回路 (simple loop)

设参数化曲线 $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 若 $c(a) = c(b)$, 且 c 在端点 a 和 b 处的所有单侧导数均相等, 即

$$\frac{d^k}{dt^k} \Big|_{t=a} c(t) = \frac{d^k}{dt^k} \Big|_{t=b} c(t), \quad \forall k \geq 1 \quad (1.2.1)$$

则称 c 为回路.

若 c 不与自身相交, 即

$$c(t_1) \neq c(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in (a, b) \text{ 且 } t_1 \neq t_2 \quad (1.2.2)$$

则称 c 为简单回路.

1.2.2 定理2. Jordan 曲线定理

平面 \mathbb{R}^2 上的每条简单回路, 都将平面分成两个集合: 一个是有界的, 称为回路的内部; 另一个是无界的, 称为回路的外部.

1.2.3 定理3. 等周不等式 (Isoperimetric Inequality)

设简单回路 $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, 长度为 L , 所围区域的面积为 A , 则有

$$4\pi A \leq L^2 \quad (1.2.3)$$

当且仅当 c 为一个圆周时, 等号成立.

1.2.4 引理

设一条简单正则回路 $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, 则一定存在 $t_0 \in I$, 使得在 c 处的密切圆存在, 且在回路内部.

定义 p 点处的极大圆 (maximal circle) c_p : 与 c 相切于 p 且位于 c 内部的半径最大的圆, c_p 与 c 至少还有另一个交点 q . 择一参数 $t \in [a, b]$, 使得 $p = c(t)$, 那么

1. 若 c 在 p 处的密切圆位于 c 内部, 则符合上述引理;
2. 假设该密切圆不在 c 内部, 则 p 处极大圆的半径一定严格小于该密切圆, 密切圆作为曲线的二阶近似, 保证了在 p 的某一邻域内, 其极大圆与 c 不再相交.

1.2.5 定理4. Moon in the Puddle (Pestov & Ionin, 1959)

设 $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是一条简单正则回路, 若

$$\kappa(t) \leq 1, \quad \forall t \in I$$

则 c 所围区域一定包含一个单位圆 (unit disc).

其中, " $\kappa(t) \leq 1$ " 为曲线的局部性质, "一定包含一个单位圆" 为曲线的整体性质, 该定理将二者关联了起来.

假设曲线 c 上存在一点 $p = c(t_0)$, 使得该点处的密切圆 σ 位于曲线内部, σ 的半径 $r = \frac{1}{\kappa(t_0)} \geq 1$ 因此, 其一定包含一个单位圆.

1.2.6 定义9. 环绕数 (Winding Number)

设 $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为一个环路, P_0 为不在 c 上的一点, 将 c 沿逆时针绕过 P_0 圈数称为环绕数, 记作 $W(c, P_0)$. 显然有 $W(c, P_0) \in \mathbb{Z}$.

1.2.7 命题4. 环绕数的性质

1. $W(c, P_0)$ 的值依赖于 P_0 的选取;
2. 若 P_1 与 P_2 能被一条不与 c 相交的曲线相连, 则有 $W(c, P_1) = W(c, P_2)$;
3. 若 c 的连续形变不经过 P_0 , 则 $W(c, P_0)$ 在该形变下保持不变, 即: 设 c_δ 为一族回路, 且有

$$c_\delta(t) \neq P_0, \quad \forall \delta, t$$

则 $W(c_\delta, P_0)$ 的取值与 δ 无关.

1.2.8 环绕数公式

$$W(c, O) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt \quad (1.2.4)$$

将 P_0 平移到坐标原点 O , 替换到极坐标系下, 有 $c(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$, 回路 c 绕 O 的环绕数为 $W(c, O) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$,

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{\dot{r}}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dot{\theta} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ \implies \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} (-y, x) &= \frac{\dot{r}}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (-y, x) + \dot{\theta} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} (-y, x) \implies \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} \\ \implies W(c, O) &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} dt \end{aligned}$$

1.3 三维空间中曲线的性质

1.3.1 定义: \mathbb{R}^3 中曲线的 Frenet-Serret 标架

设 c 为 \mathbb{R}^3 中的参数化曲线, 其切向量为 $T(t)$, 曲率 $\kappa(t) = |\ddot{c}(t)|$. 假设 $\kappa > 0$, 则 $N(t) = \frac{\ddot{c}(t)}{|\ddot{c}(t)|}$, 且有副法向量 (binormal vector):

$$B(t) = T(t) \times N(t) \quad (1.3.1)$$

称 $\{T, N, B\}$ 为 \mathbb{R}^3 中曲线的 Frenet-Serret 标架.

1.3.2 定理5. Frenet-Serret 公式

设参数化曲线 $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 有 Frenet-Serret 标架 T, N, B , 则有

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = (\tau T + \kappa B) \times \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

其中, $\tau(t) = -\dot{B}(t) \cdot N(t) = \dot{N}(t) \cdot B(t)$, 称 τ 为 c 在 t 处的挠率 (torsion).

$\dot{T} = \ddot{c} = \kappa N$, 假设存在 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 使得 $\dot{N} = aT + bN + cB$,

$$\begin{cases} N \cdot T = 0 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \underbrace{\dot{N} \cdot T}_a + \underbrace{N \cdot \dot{T}}_{\kappa} = 0 \implies a = -\kappa \\ N \cdot N = 1 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} 2 \underbrace{\dot{N} \cdot N}_b = 0 \implies b = 0 \\ N \cdot B = 0 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \underbrace{\dot{N} \cdot B}_c + N \cdot \dot{B} = 0 \implies c = -N \cdot \dot{B} \end{cases}$$

令 $c = \dot{N} \cdot B = -N \cdot \dot{B} \equiv \tau$, 设 $\dot{B} = \tilde{a}T + \tilde{b}N + \tilde{c}B$,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} B \cdot B = 1 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} 2 \underbrace{\dot{B} \cdot B}_{\tilde{c}} = 0 \implies \tilde{c} = 0 \\ B \cdot T = 0 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \underbrace{\dot{B} \cdot T}_{\tilde{a}} + \underbrace{B \cdot \dot{T}}_{=B \cdot \kappa N = 0} = 0 \implies \tilde{a} = 0 \\ B \cdot N = 0 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \underbrace{\dot{B} \cdot N}_{\tilde{b}} + \underbrace{B \cdot \dot{N}}_{\tau} = 0 \implies \tilde{b} = -\tau \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} \dot{T} = \kappa N \\ \dot{N} = -\kappa T + \tau B \\ \dot{B} = -\tau N \end{cases} \implies \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \\ & \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa N \\ -\kappa T + \tau B \\ -\tau N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa B \times T \\ -\kappa N \times B + \tau T \times N \\ -\tau B \times T \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \tau T \times T + \kappa B \times T \\ \tau T \times N + \kappa B \times N \\ \tau T \times B + \kappa B \times B \end{pmatrix} = (\tau T + \kappa B) \times \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3.3 曲率与挠率的几何意义

曲率 κ 度量了标架绕 B 的转动; 而挠率 τ 度量了标架绕 T 的转动.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

显然 Ω 是一个斜对称矩阵 (skew-symmetric matrix):

$$\Omega^T = -\Omega \quad (1.3.4)$$

Ω 描述了标架如何变化

1.3.4 命题: 空间曲线平面性的判定

设 $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是一条弧长参数化曲线, 其曲率 $\kappa > 0$, 当且仅当挠率 $\tau = 0$ 时, c 位于一个平面内.

1.3.5 定理: 曲线论基本定理

若给定可微函数 $\begin{cases} \kappa : [0, L] \rightarrow (0, \infty) \\ \tau : [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$, 初始点 $p_0 \in \mathbb{R}^3$, 以及初始 F-S 标架 $T_0, N_0, B_0 \in \mathbb{R}^3$, 则存在唯一的弧长参数化曲线 $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$, 使得:

1. 其曲率为挠率为
2. $c(0) = p_0$
3. $T(0) = T_0, N(0) = N_0, B(0) = B_0$