微分几何 - 学习笔记

Alpha Version

潜龙勿用 容与

本笔记根据上海交通大学 Tobias Diez 老师的 Differential Geometry 课程内容编写

目录

1 曲线论

1.1 参数化曲线 (Parameterized Curve)

1.1.1 定义1. 曲线 (Curve)

设 I 是一个区间, $\mathbb{R}^n$ 为 n 维 Euclidean 空间 (通常 $n=2,3$), c 为一个光滑的映射,

$$c: I \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto c(t) \tag{1.1.1}$$

则称 c 为**参数化曲线**. 称其像的集合 $\{c(t) \mid t \in I\}$ 为**曲线**.

参数 t 不一定代表时间, 但可借用物理背景, 定义速度矢量 $\dot{c}(t) = \dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$ 与加速度矢量 $\ddot{c}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\dot{c}}{\mathrm{d}t}$.

1.1.2 定义2. 正则曲线 (Regular Curve)

设一条参数化曲线 c, 若 c 满足:

$$\dot{c}(t) \neq 0,\ \forall t \in I \tag{1.1.2}$$

则称 c 为一条**正则曲线**.

正则曲线没有尖点和角, 且每一点都有一个方向明确的非零切向量.

1.1.3 定义3. 曲线的长度 (Length of a Curve)

设参数化曲线 $c: I \to \mathbb{R}^n$ $(I = [a,b]$ or $(a,b))$, c 的长度为:

$$L(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \,\mathrm{d}t \tag{1.1.3}$$

1.1.4 定义4. 微分同胚 (Diffeomorphism)

设 φ 是一个映射, 若满足:

1. φ 是光滑的;
2. φ 是一个双射;
3. 其逆映射 φ^{-1} 也是光滑的;

则称 φ 为一个**微分同胚**.

1.1.5 定义5. 重参数化 (Reparameterization)

设参数化曲线 $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$, 微分同胚 $\varphi : I_2 \to I_1$ $(\varphi'(s) > 0,\ \forall s \in I_2)$, 则称另一参数化曲线 $c_2(s)$:

$$c_2 = c_1 \circ \varphi : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \& \quad c_2(s) = c_1\left(\varphi(s)\right) \tag{1.1.4}$$

为 c_1 通过 φ 的**重参数化**.

1.1.6 命题1

若 c_2 为 c_1 的一条重参数化曲线, 则 c_1 与 c_2 长度相同. 换言之, 曲线的长度与参数化的方式无关.

$$\dot{c_2}(s) = \frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}s}(s) \xlongequal{\text{链式法则}} \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)$$

$$\Longrightarrow L(c_2) = \int_{a_2}^{b_2} \left\| \frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}s}(s) \right\| \mathrm{d}s = \int_{a_2}^{b_2} \left\| \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(\varphi(s)) \right\| \cdot \|\varphi'(s)\| \, \mathrm{d}s = \int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(t) \right\| \mathrm{d}t = L(c_1)$$

1.1.7 命题2

若 $\|\dot{c}(t)\| = 1$, 则有

$$\dot{c}(t)\ddot{c}(t) = 0 \tag{1.1.5}$$

$$\|\dot{c}(t)\| = 1 \Longrightarrow \|\dot{c}(t)\|^2 = \dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t) = 1 \xrightarrow{\text{求导}} \ddot{c}(t) \cdot \dot{c}(t) + \dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t) = 0 \Longrightarrow \dot{c}(t)\ddot{c}(t) = 0$$

1.1.8 定义6. 弧长参数化曲线 (Arclength Parameterized Curve)

设参数化曲线 $c : I \to \mathbb{R}^n$ 具有单位速率 (即 $\|\dot{c}(t)\| \equiv 1, \forall t \in I$), 则称其为**弧长参数化的**. 其长度为:

$$L(c_{[a,b]}) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, \mathrm{d}t = b - a \tag{1.1.6}$$

1.1.9 命题3

每条正则曲线都可被重参数化为一条弧长参数化曲线.

设微分同胚 $\varphi : I \to I$ $(s \overset{\varphi}{\mapsto} t)$ 使正则曲线 $c(t)$ 重参数化为弧长参数化曲线 $\tilde{c}(s)$,

$$s = \psi(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{c}(t)\| \, \mathrm{d}t = L(c_{[t_0,t]}),\ t_0 \in I \quad \left(\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} = \|\dot{c}(t)\| > 0\right)$$

$$\psi^{-1} \equiv \varphi \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\dot{c}(\varphi(s))\|}$$

$$\left\|\dot{\tilde{c}}(s)\right\| = \left\|\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(\varphi(s))\right\| \cdot \|\varphi'(s)\| = \left\|\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(\varphi(s))\right\| \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(\varphi(s))\|} = 1$$

1.1.10 定理1. 活动标架 (Moving Frame)

设 $c: I \to \mathbb{R}^n$ 为一条单位速度曲线, 且 $\|\ddot{c}\| \neq 0,\ \forall t \in I$, 其切向量 (Tangent Vector) 与法向量 (Normal Vector) 为:

$$T(t) := \dot{c}(t) \quad N(t) := \frac{\ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|} \tag{1.1.7}$$

$T(t)$ 与 $N(t)$ 均长度为 1 且相互垂直, 构成一对正交归一向量.

若 c 位于二维 Euclidean 空间中, 则 $T(t), N(t)$ 构成一个沿 c 移动的标准正交基, 称其为 c 的**活动标架 (Moving Frame)** 或称 **Frenet-Serret 标架**.

1.1.11 定义7. 曲率 (Curvature)

设弧长参数化曲线 $c: I \to \mathbb{R}^n$, 有

$$\kappa(t) = \|\ddot{c}(t)\| \in [0, \infty) \tag{1.1.8}$$

称 $\kappa(t)$ 为 c 在 t 处的**曲率**.

1.1.12 非弧长参数化曲线的曲率

若正则曲线 c 是非弧长参数化的, 令 $\tilde{c} = c \circ \varphi$ 为其弧长参数化映射, $\tilde{\kappa}$ 为 $\tilde{c}$ 的曲率, 则 c 的曲率为:

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}\left(\varphi^{-1}(t)\right) \tag{1.1.9}$$

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2 - \dot{v}^2(t)}}{v^2(t)} = \frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2 - [\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t)]^2}}{v^3(t)} \tag{1.1.10}$$

其中, 速率 $v(t) = \|\dot{c}(t)\|$.

$$\mathrm{d}s = \|\dot{c}(t)\|\,\mathrm{d}t \Longrightarrow v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$T(s) = \frac{\dot{c}(t)}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{c}(t)}{v(t)} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}T/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{1}{v(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\dot{c}(t)}{v(t)}\right) = \frac{\ddot{c}(t)v(t) - \dot{v}(t)\dot{c}(t)}{v^3(t)}$$

$$\dot{v}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\dot{c}(t)\|=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\dot{c}(t)\cdot\dot{c}(t)}=\frac{\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)}{v(t)}\implies\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}=\frac{\ddot{c}(t)v^2(t)-\dot{c}(t)\left[\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)\right]}{v^4(t)}$$

$$\kappa(t)=\left\|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\right\|=\frac{1}{v^4(t)}\sqrt{\{\ddot{c}(t)v^2(t)-\dot{c}(t)\left[\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)\right]\}^2}=\frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2-\left[\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)\right]^2}}{v^3(t)}$$

$$\xRightarrow{\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)=\dot{v}(t)v(t)}\kappa(t)=\frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2-\dot{v}^2(t)}}{v^2(t)}$$

1.2 曲线的局部性质与整体结构 (local properties & global structure)

1.2.1 定义8. 回路 (Loop) & 简单回路 (simple loop)

设参数化曲线 $c:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, 若 $c(a)=c(b)$, 且 c 在端点 a 和 b 处的所有单侧导数均相等, 即

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=a}c(t)=\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=b}c(t),\quad\forall k\geq 1\tag{1.2.1}$$

则称 c 为**回路**.

若 c 不与自身相交, 即

$$c(t_1)\neq c(t_2),\quad\forall t_1,t_2\in(a,b)\text{ 且 }t_1\neq t_2\tag{1.2.2}$$

则称 c 为**简单回路**.

1.2.2 定理2. Jordan 曲线定理

平面 $\mathbb{R}^2$ 上的每条简单回路, 都将平面分成两个集合: 一个是有界的, 称为回路的内部; 另一个是无界的, 称为回路的外部.

1.2.3 定理3. 等周不等式 (Isoperimetric Inequality)

设简单回路 $c:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, 长度为 L, 所围区域的面积为 A, 则有

$$4\pi A\leq L^2\tag{1.2.3}$$

当且仅当 c 为一个圆周时, 等号成立.

1.2.4 引理

设一条简单正则回路 $c: I \to \mathbb{R}^2$, 则一定存在 $t_0 \in I$, 使得在 c 处的密切圆存在, 且在回路内部.

定义 p 点处的极大圆 (maximal circle) c_p: 与 c 相切于 p 且位于 c 内部的半径最大的圆, c_p 与 c 至少还有另一个交点 q. 择一参数 $t \in [a, b]$, 使得 $p = c(t)$, 那么

1. 若 c 在 p 处的密切圆位于 c 内部, 则符合上述引理;
2. 假设该密切圆不在 c 内部, 则 p 处极大圆的半径一定严格小于该密切圆, 密切圆作为曲线的二阶近似, 保证了在 p 的某一邻域内，其极大圆与 c 不再相交.

1.2.5 定理4. Moon in the Puddle (Pestov & Ionin, 1959)

设 $c: I \to \mathbb{R}^2$ 是一条简单正则回路, 若

$$\kappa(t) \leq 1, \quad \forall t \in I$$

则 c 所围区域一定包含一个单位圆 (unit disc).

其中, "$\kappa(t) \leq 1$" 为曲线的局部性质, "一定包含一个单位圆" 为曲线的整体性质, 该定理将二者关联了起来.

假设曲线 c 上存在一点 $p = c(t_0)$, 使得该点处的密切圆 σ 位于曲线内部, σ 的半径 $r = \dfrac{1}{\kappa(t_0)} \geq 1$ 因此, 其一定包含一个单位圆.

1.2.6 定义9. 环绕数 (Winding Number)

设 $c: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ 为一个环路, P_0 为不在 c 上的一点, 将 c 沿逆时针绕过 P_0 圈数称为**环绕数**, 记作 $W(c, P_0)$. 显然有 $W(c, P_0) \in \mathbb{Z}$.

1.2.7 命题4. 环绕数的性质

1. $W(c, P_0)$ 的值依赖于 P_0 的选取;
2. 若 P_1 与 P_2 能被一条不与 c 相交的曲线相连, 则有 $W(c, P_1) = W(c, P_2)$;
3. 若 c 的连续形变不经过 P_0, 则 $W(c, P_0)$ 在该形变下保持不变, 即: 设 c_δ 为一族回路, 且有

   $$c_\delta(t) \neq P_0, \ \forall \delta, t$$

   则 $W(c_{\delta}, P_0)$ 的取值与 δ 无关.

1.2.8 环绕数公式

$$W(c,O)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{x(t)\dot{y}(t)-y(t)\dot{x}(t)}{x(t)^2+y(t)^2}\,\mathrm{d}t \tag{1.2.4}$$

将 P_0 平移到坐标原点 O, 替换到极坐标系下, 有 $c(t)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{pmatrix}$, 回路 c 绕 O 的环绕数为 $W(c,O)=\dfrac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}$,

$$\dot{c}(t)\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta\\\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta\end{pmatrix}=\dot{r}\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}+r\dot{\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}=\frac{\dot{r}}{r}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\dot{\theta}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{pmatrix}(-y,x)=\frac{\dot{r}}{r}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}(-y,x)+\dot{\theta}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}(-y,x)\Longrightarrow\dot{\theta}=\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow W(c,O)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}t$$

1.3 三维空间中曲线的性质

1.3.1 $\mathbb{R}^3$ 中曲线的 Frenet-Serret 标架

设 c 为 $\mathbb{R}^3$ 中的参数化曲线, 其切向量为 $T(t)$, 曲率 $\kappa(t)=|\ddot{c}(t)|$. 假设 $\kappa>0$, 则 $N(t)=\dfrac{\ddot{c}(t)}{|\ddot{c}(t)|}$, 且有**副法向量** (binormal vector):

$$B(t)=T(t)\times N(t) \tag{1.3.1}$$

称 $\{T,N,B\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中曲线的 Frenet-Serret 标架.

1.3.2 定理5. Frenet-Serret 公式

设参数化曲线 $c:I\to\mathbb{R}^3$ 有 Frenet-Serret 标架 T,N,B, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\-\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix}=(\tau T+\kappa B)\times\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix} \tag{1.3.2}$$

其中, $\tau(t)=-\dot{B}(t)\cdot N(t)=\dot{N}(t)\cdot B(t)$, 称 τ 为 c 在 t 处的**挠率**.

$\dot{T} = \ddot{c} = \kappa N$, 假设存在 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 使得 $\dot{N} = aT + bN + cB$,

$$\begin{cases} N \cdot T = 0 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \underbrace{\dot{N} \cdot T}_{a} + \underbrace{N \cdot \dot{T}}_{\kappa} = 0 & \Longrightarrow a = -\kappa \\ N \cdot N = 1 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} 2\underbrace{\dot{N} \cdot N}_{b} = 0 & \Longrightarrow b = 0 \\ N \cdot B = 0 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \underbrace{\dot{N} \cdot B}_{c} + N \cdot \dot{B} = 0 & \Longrightarrow c = -N \cdot \dot{B} \end{cases}$$

令 $c = \dot{N} \cdot B = -N \cdot \dot{B} \equiv \tau$, 设 $\dot{B} = \tilde{a}T + \tilde{b}N + \tilde{c}B$,

$$\begin{cases} B \cdot B = 1 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} 2\underbrace{\dot{B} \cdot B}_{\tilde{c}} = 0 & \Longrightarrow \tilde{c} = 0 \\ B \cdot T = 0 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \underbrace{\dot{B} \cdot T}_{\tilde{a}} + \underbrace{B \cdot \dot{T}}_{=B \cdot \kappa N = 0} = 0 & \Longrightarrow \tilde{a} = 0 \\ B \cdot N = 0 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \underbrace{\dot{B} \cdot N}_{\tilde{b}} + \underbrace{B \cdot \dot{N}}_{\tau} = 0 & \Longrightarrow \tilde{b} = -\tau \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{T} = \kappa N \\ \dot{N} = -\kappa T + \tau B \\ \dot{B} = -\tau N \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \kappa N \\ -\kappa T + \tau B \\ -\tau N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa B \times T \\ -\kappa N \times B + \tau T \times N \\ -\tau B \times T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tau T \times T + \kappa B \times T \\ \tau T \times N + \kappa B \times N \\ \tau T \times B + \kappa B \times B \end{pmatrix} = (\tau T + \kappa B) \times \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \end{aligned}$$