# 微分几何学习笔记

东华大学物理学院
刘轩宇　熊玉郎

2025 年 9 月 23 日

## 1　曲线论

### 1.1　参数化曲线 (Parameterized Curve)

#### 1.1.1　定义1. 曲线 (Curve)

设 $I$ 是一个区间, $\mathbb{R}^n$ 为 $n$ 维 Euclidean 空间 (通常 $n = 2, 3$), $c$ 为一个光滑的映射,

$$c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto c(t) \tag{1.1.1}$$

则称 $c$ 为**参数化曲线**. 称其像的集合 $\{c(t) \mid t \in I\}$ 为**曲线**.

参数 $t$ 不一定代表时间, 但可借用物理背景, 定义速度矢量 $\dot{c}(t) = \dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$ 与加速度矢量 $\ddot{c}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\dot{c}}{\mathrm{d}t}$.

#### 1.1.2　定义2. 正则曲线 (Regular Curve)

设一条参数化曲线 $c$, 若 $c$ 满足:

$$\dot{c}(t) \neq 0,\ \forall t \in I \tag{1.1.2}$$

则称 $c$ 为一条**正则曲线**.

正则曲线没有尖点和角, 且每一点都有一个方向明确的非零切向量.

#### 1.1.3　定义3. 曲线的长度 (Length of a Curve)

设参数化曲线 $c : I \to \mathbb{R}^n$ ($I = [a, b]$ or $(a, b)$), $c$ 的长度为:

$$L(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \,\mathrm{d}t \tag{1.1.3}$$

### 1.1.4 定义4. 微分同胚 (Diffeomorphism)

设 $\varphi$ 是一个映射, 若满足:

1. $\varphi$ 是光滑的;
2. $\varphi$ 是一个双射;
3. 其逆映射 $\varphi^{-1}$ 也是光滑的;

则称 $\varphi$ 为一个**微分同胚**.

### 1.1.5 定义5. 重参数化 (Reparameterization)

设参数化曲线 $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$, 微分同胚 $\varphi : I_2 \to I_1$ $(\varphi'(s) > 0,\ \forall s \in I_2)$, 则称另一参数化曲线 $c_2(s)$:

$$c_2 = c_1 \circ \varphi : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \& \quad c_2(s) = c_1\left(\varphi(s)\right) \tag{1.1.4}$$

为 $c_1$ 通过 $\varphi$ 的**重参数化**.

### 1.1.6 命题1

若 $c_2$ 为 $c_1$ 的一条重参数化曲线, 则 $c_1$ 与 $c_2$ 长度相同. 换言之, 曲线的长度与参数化的方式无关.

$$\dot{c}_2(s) = \frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}s}(s) \xlongequal{\text{链式法则}} \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)$$

$$\Longrightarrow L(c_2) = \int_{a_2}^{b_2} \left\| \frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}s}(s) \right\| \mathrm{d}s = \int_{a_2}^{b_2} \left\| \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(\varphi(s)) \right\| \cdot \|\varphi'(s)\| \,\mathrm{d}s = \int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(t) \right\| \mathrm{d}t = L(c_1)$$

### 1.1.7 命题2

若 $\|\dot{c}(t)\| = 1$, 则有

$$\dot{c}(t)\ddot{c}(t) = 0 \tag{1.1.5}$$

$$\|\dot{c}(t)\| = 1 \Longrightarrow \|\dot{c}(t)\|^2 = \dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t) = 1 \xrightarrow{\text{求导}} \ddot{c}(t) \cdot \dot{c}(t) + \dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t) = 0 \Longrightarrow \dot{c}(t)\ddot{c}(t) = 0$$

### 1.1.8 定义6. 弧长参数化曲线 (Arclength Parameterized Curve)

设参数化曲线 $c: I \to \mathbb{R}^n$ 具有单位速率 (即 $\|\dot{c}(t)\| \equiv 1, \forall t \in I$), 则称其为**弧长参数化的**. 其长度为:

$$L(c_{[a,b]}) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \,\mathrm{d}t = b - a \tag{1.1.6}$$

### 1.1.9 命题3

每条正则曲线都可被重参数化为一条弧长参数化曲线.

设微分同胚 $\varphi: I \to I$ $(s \overset{\varphi}{\mapsto} t)$ 使正则曲线 $c(t)$ 重参数化为弧长参数化曲线 $\tilde{c}(s)$,

$$s = \psi(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{c}(t)\| \,\mathrm{d}t = L(c_{[t_0,t]}),\ t_0 \in I \quad \left(\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} = \|\dot{c}(t)\| > 0\right)$$

$$\psi^{-1} \equiv \varphi \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\dot{c}(\varphi(s))\|}$$

$$\left\|\dot{\tilde{c}}(s)\right\| = \left\|\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(\varphi(s))\right\| \cdot \|\varphi'(s)\| = \left\|\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(\varphi(s))\right\| \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(\varphi(s))\|} = 1$$

### 1.1.10 定理1. 活动标架 (Moving Frame)

设 $c: I \to \mathbb{R}^n$ 为一条单位速度曲线, 且 $\|\ddot{c}\| \neq 0, \ \forall t \in I$, 其切向量 (Tangent Vector) 与法向量 (Normal Vector) 为:

$$T(t) := \dot{c}(t) \quad N(t) := \frac{\ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|} \tag{1.1.7}$$

$T(t)$ 与 $N(t)$ 均长度为 1 且相互垂直, 构成一对正交归一向量.

若 $c$ 位于二维 Euclidean 空间中, 则 $T(t), N(t)$ 构成一个沿 $c$ 移动的标准正交基, 称其为 $c$ 的**活动标架 (Moving Frame)** 或称 **Frenet-Serret 标架**.

### 1.1.11 定义7. 曲率 (Curvature)

设弧长参数化曲线 $c: I \to \mathbb{R}^n$, 有

$$\kappa(t) = \|\ddot{c}(t)\| \in [0, \infty) \tag{1.1.8}$$

称 $\kappa(t)$ 为 $c$ 在 $t$ 处的**曲率**.

### 1.1.12 非弧长参数化曲线的曲率

若正则曲线 $c$ 是非弧长参数化的, 令 $\tilde{c} = c \circ \varphi$ 为其弧长参数化映射, $\tilde{\kappa}$ 为 $\tilde{c}$ 的曲率, 则 $c$ 的曲率为:

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}\left(\varphi^{-1}(t)\right) \tag{1.1.9}$$

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2 - \dot{v}^2(t)}}{v^2(t)} = \frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2 - [\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)]^2}}{v^3(t)} \tag{1.1.10}$$

其中, 速率 $v(t) = \|\dot{c}(t)\|$.

$$\mathrm{d}s = \|\dot{c}(t)\|\,\mathrm{d}t \Longrightarrow v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$T(s) = \frac{\dot{c}(t)}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{c}(t)}{v(t)} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}T/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{1}{v(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\dot{c}(t)}{v(t)}\right) = \frac{\ddot{c}(t)v(t) - \dot{v}(t)\dot{c}(t)}{v^3(t)}$$

$$\dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\dot{c}(t)\| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\dot{c}(t)\cdot\dot{c}(t)} = \frac{\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)}{v(t)} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \frac{\ddot{c}(t)v^2(t) - \dot{c}(t)\left[\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)\right]}{v^4(t)}$$

$$\kappa(t) = \left\|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\right\| = \frac{1}{v^4(t)}\sqrt{\{\ddot{c}(t)v^2(t) - \dot{c}(t)\left[\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)\right]\}^2} = \frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2 - [\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)]^2}}{v^3(t)}$$

$$\xRightarrow{\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t) = \dot{v}(t)v(t)} \kappa(t) = \frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2 - \dot{v}^2(t)}}{v^2(t)}$$

## 1.2 曲线的整体性质

### 1.2.1 *定义. 简单闭合曲线

若一个曲线在除了端点以外, 无其他自交点, 则称其为简单闭合曲线

### 1.2.2 Jordan 曲线定理

平面 $\mathbb{R}^n$ 上的每条简单闭曲线, 都将平面分成两个集合: 一个是有界的, 称为曲线的内部; 另一个是无界的, 称为曲线的外部.