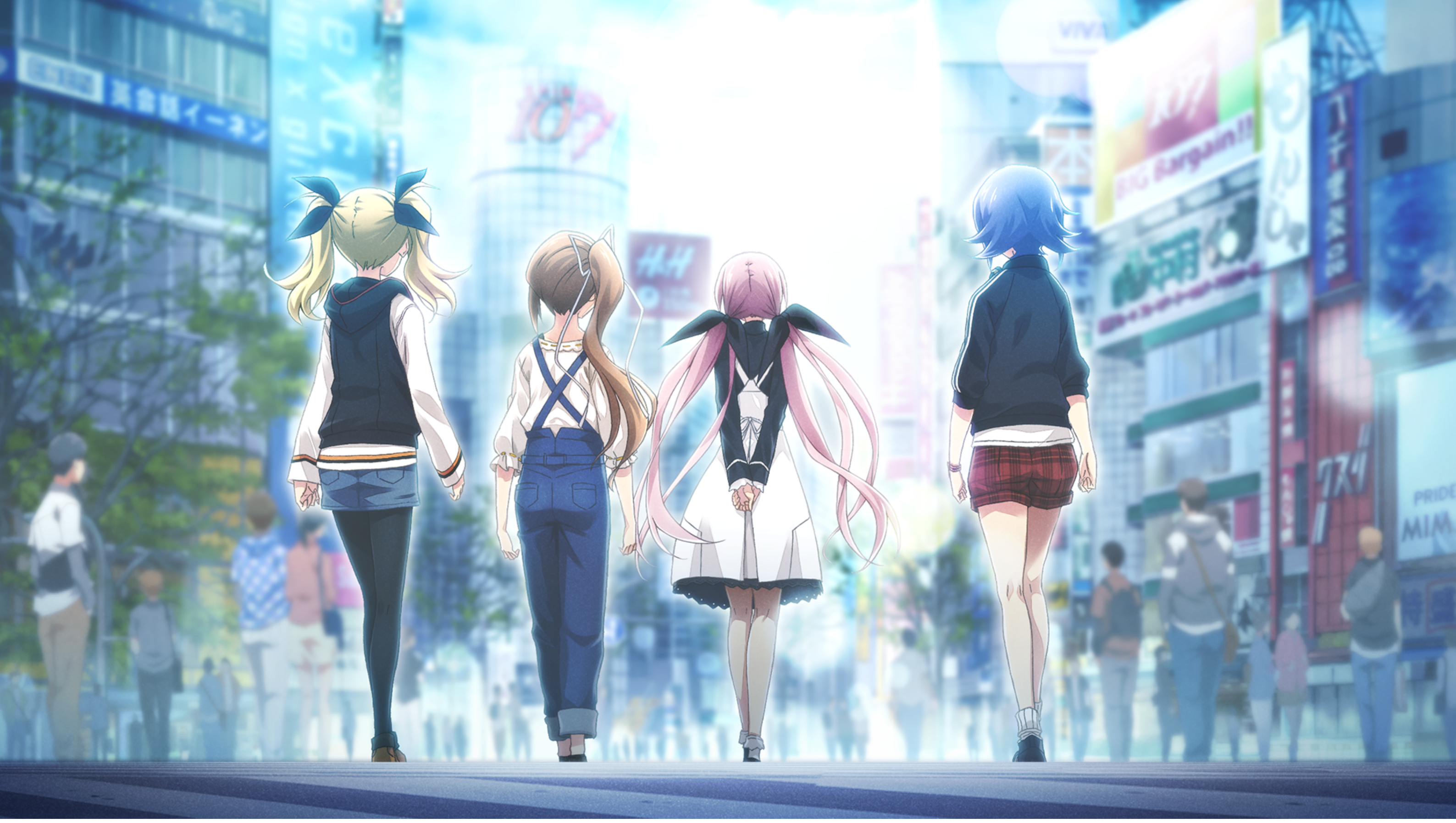


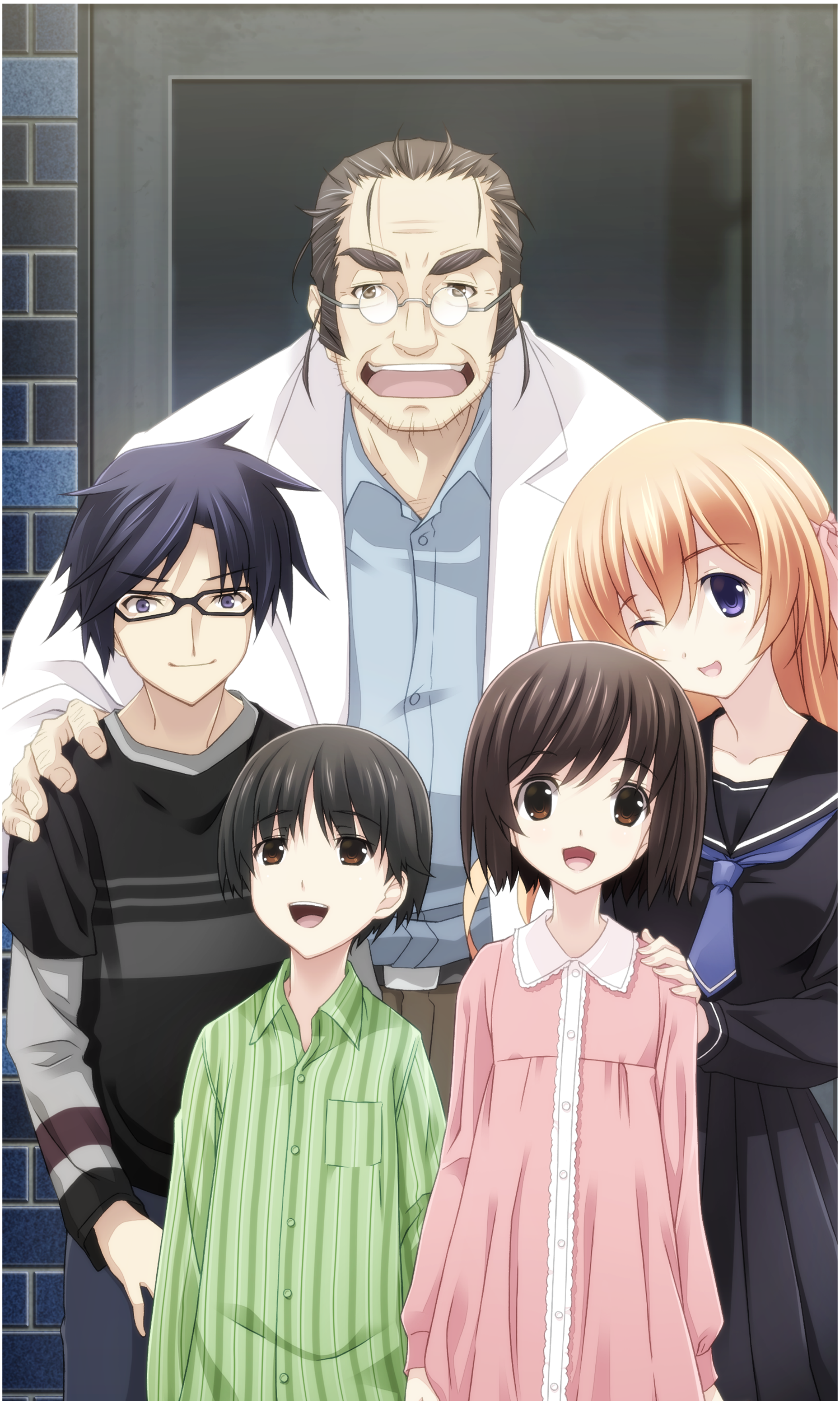
线性代数 - 学习笔记

Beta Version

容与

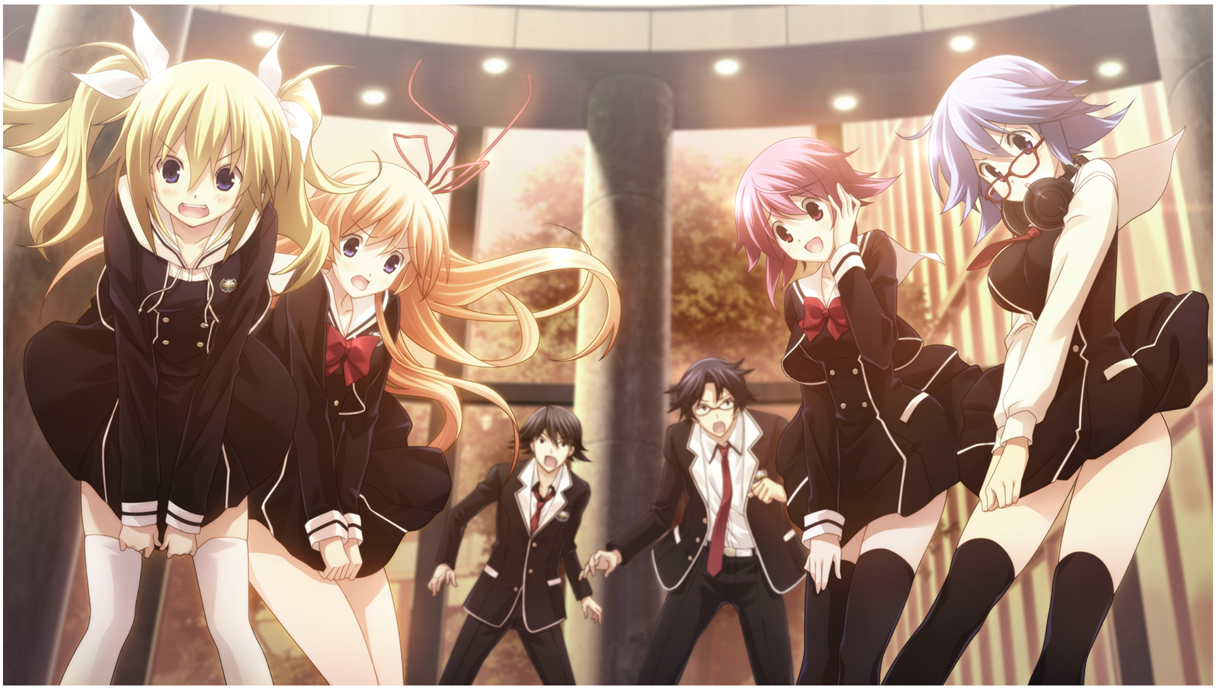
rongyu221104@163.com

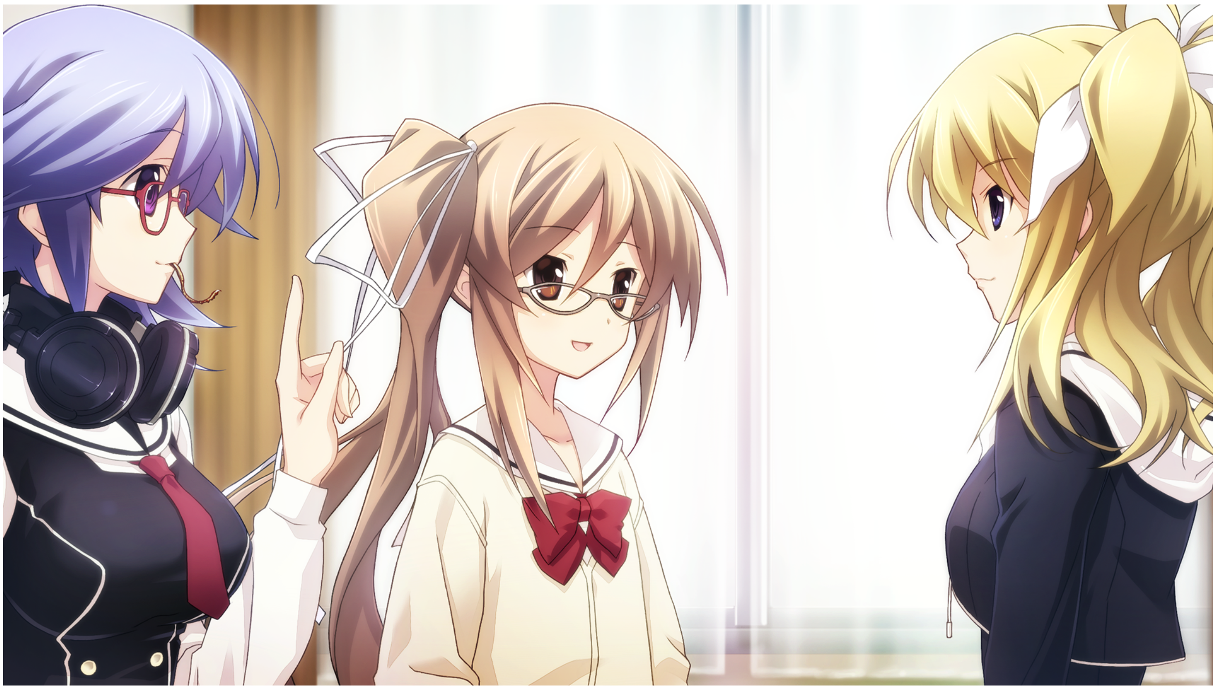
Typeset with LaTeX



目录

映射与集合论基础





0.1 映射

0.1.1 映射的定义

定义1: 映射、像、原像、定义域、陪域、值域(像集)

设 A 与 B 是两个非空集合, 如果存在一个对应法则 f, 使得 A 中每一个元素 a, 均对应 B 中唯一确定的元素 b, 则称 f 是 A 到 B 的一个**映射**, 记作:

$$f : A \longrightarrow B, a \mapsto b$$

称 b 为 a 在 f 下的**像**, 记作 $f(a)$, 称 a 为 b 在 f 下的一个**原像**; 称 A 为**定义域**, B 为**陪域**, f 的**值域** (**像集** $\operatorname{Im} f$) 为 $\underbrace{f(A)}_{\operatorname{Im} f} = \{f(a) \mid a \in A\}$.

定义2: 映射的相等

对于两个映射 f, g, 满足: $f : A \to B$, $g : A \to B$, 且 $f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$, 则称 f 与 g **相等**, 记作 $f = g$.

三要素: 定义域相同, 陪域相同, 对应法则相同.

0.1.2 特殊映射

定义3: 满射

若 $f(A) = B$, 则称 f 为一个**满射**.

$\forall b \in B, \exists a \in A, b = f(a)$

定义4: 单射

若 A 中不同元素在 f 下的像不同, 则称 f 是一个**单射**

证明方法: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ 或 $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

定义5: 双射

若 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 是一个**双射**, 又称一一对应

定义6: 函数

函数是一种特殊的映射, 将映射的陪域限制到数集(数域的一个非空子集), 则称这个映射为**函数**

传统函数要求定义域与陪域均为数集, 而泛函拓展了函数的定义, 将函数的定义域推广到函数空间

0.1.3 映射的运算

定义7: 映射的复合(乘法)

设两个映射 $f : A \to B$ 和 $g : B \to C$, 令 $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, $\forall a \in A$, 则称 $g \circ f$ 为**映射的复合**, 又称**映射的乘法**

映射复合的性质

1. 设映射 $h : C \to D$, 则有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, 即映射的复合满足结合律
2. 映射的复合不满足交换律

定义8: 恒等变换

若 $f : A \to A, a \mapsto a$, 则称 f 为 A 上的**恒等变换**, 记作 $\mathcal{I}_A$

恒等变换的性质

设 $f : A \to B$, 则 $f \circ \mathcal{I}_A = f$, $\mathcal{I}_B \circ f = f$

定义9: 可逆映射

设 $f : A \to B$, 如果存在 $g : B \to A$, 使得 $g \circ f = \mathcal{I}_A$ 且 $f \circ g = \mathcal{I}_B$, 则称 f 是可逆映射, 将 g 称为 f 的逆映射, 记作 f^{-1}, 有:

$$f^{-1} \circ f = \mathcal{I}_A \text{ 且 } f \circ f^{-1} = \mathcal{I}_B$$

可逆映射的性质

1. 若 f 是可逆映射, 则 f 的逆映射唯一
2. 可逆映射 f 的逆映射 f^{-1} 也是可逆映射, 且 $(f^{-1})^{-1} = f$

0.2 集合

0.2.1 集合的运算

定义: 笛卡尔积、二元代数运算

对于两个非空集合 S 与 M, 有序元素对组成的集合:

$$S \times M := \{(a,b) \mid a \in S, b \in M\}$$

称为 S 与 M 的**笛卡尔积**

对于一个非空集合 S, $S \times S$ 到 S 的一个映射称为 S 上的一个**二元代数运算**

0.2.2 集合的划分与等价关系

定义: 集合的划分

如果一个集合 S 为其一些非空子集的并集, 且每两个不相等的子集的交为空集(称为不相交), 则称这些子集组成的集合为 S 的一个**划分**

定义: 二元关系的定义

设 S 是一个非空集合, 将 $S \times S$ 的一个子集 W 称为 S 上的一个**二元关系**

若 $(a,b) \in W$, 则称 a 与 b 有 W 关系, 记作 $a \sim b$; 若 $(a,b) \notin W$, 则称 a 与 b 没有 W 关系

定义: 等价关系

S 上的一个二元关系 $\sim$, 如果满足:

1. $a \sim a$, $\forall a \in S$ (反身性);

2. 若 $a \sim b$, 则 $b \sim a$ (传递性);

3. 若 $a \sim b$ 且 $b \sim c$, 则 $a \sim c$ (传递性),

则称 $\sim$ 为 S 上的一个**等价关系**

定义: 等价类

设 $\sim$ 是 S 上的一个等价关系, $\forall a \in S$, 令 $\overline{a} := \{x \in S \mid x \sim a\}$, 将 $\overline{a}$ 称为 a 的一个**等价类**, 等价关系可以表达为:

$$x \sim a \Longleftrightarrow x \in \overline{a}$$

定义: 等价类的代表

根据等价关系的反身性, $a \sim a$, 于是 $a \in \overline{a}$, 称 a 为 $\overline{a}$ 的一个**代表**

等价类的性质

1. $\overline{a} = \overline{b} \Longleftrightarrow a \sim b$
2. 若 $\overline{a} \neq \overline{b}$, 则 $\overline{a} \cap \overline{b} = \varnothing$

定理: 等价关系与划分的关系

如果集合 S 有一个等价关系 $\sim$, 则所有等价类组成的集合, 是 S 的一个划分

反之, 如果集合 S 有一个划分, 则一定可以在 S 上建立一个等价关系, 使得这个划分是由所有等价类组成的

证明 $\bigcup\limits_{a \in S} \overline{a} := \{x \in S \mid \exists c \in S \text{ s.t. } x \in \overline{c}\} \subseteq S$, $\forall b \in S$, 由于 $b \in \overline{b}$, 因此 $b \in \bigcup\limits_{a \in S} \overline{a}$, 从而$S \subseteq \bigcup\limits_{a \in S} \overline{a}$, 于是 $\bigcup\limits_{a \in S} \overline{a} = S$, 再结合性质 2 得证

0.2.3 数域

定义: 数域

复数集的一个非空子集 K 如果满足:
(1) $0, 1 \in K$
(2) $a, b \in K \Longrightarrow a \pm b, ab \in K;\ a, b \in K, b \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{a}{b} \in K$
则称 K 是一个**数域**

数域的例子

有理数域 $\mathbb{Q}$、实数域 $\mathbb{R}$、复数域 $\mathbb{C}$、$\cdots$

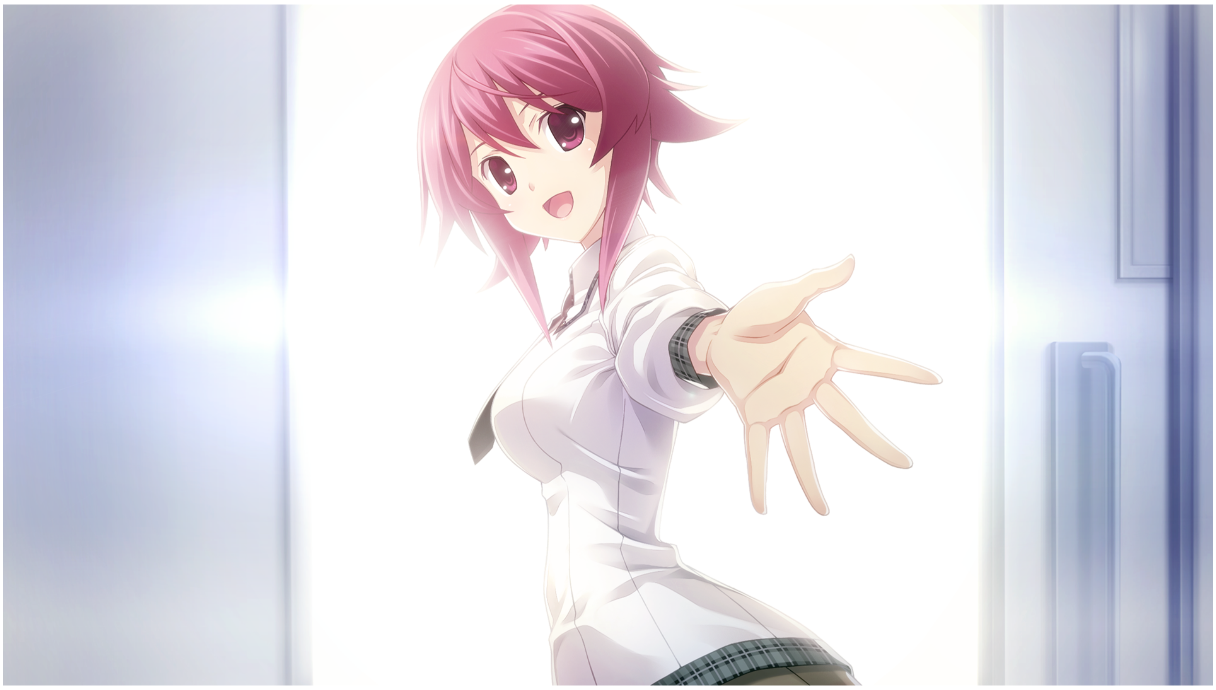
有理数域 $\mathbb{Q}$ 为最小的数域, 复数域 $\mathbb{C}$ 是最大的数域

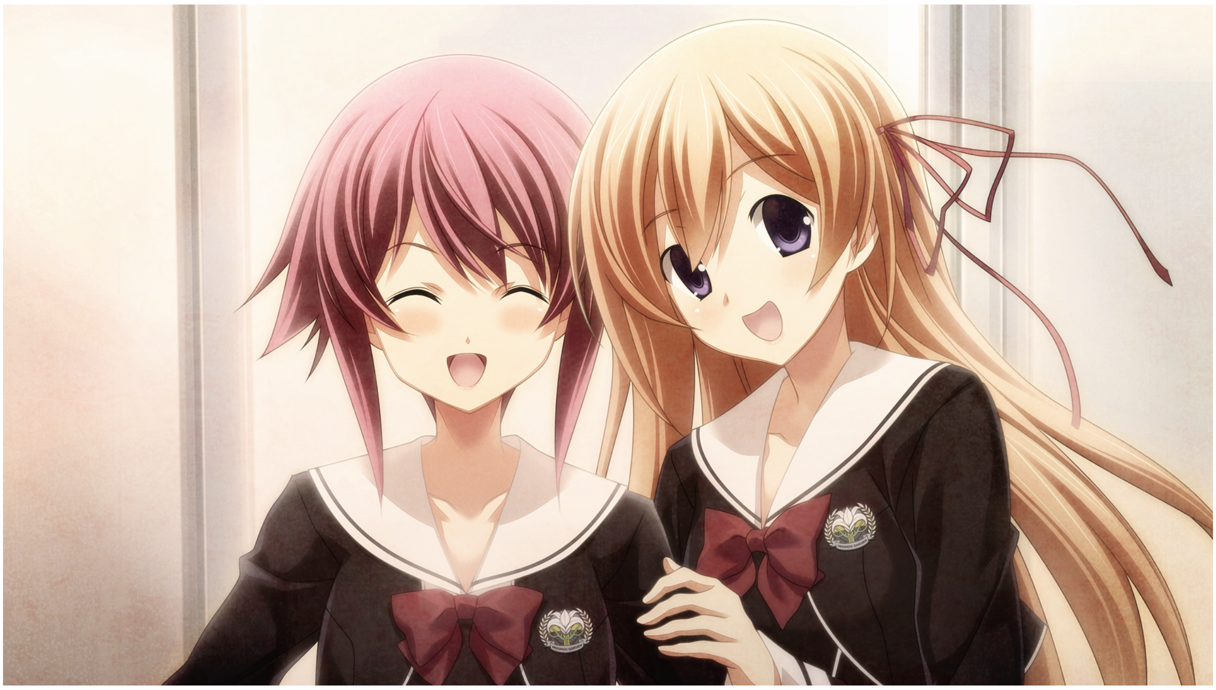
0.2.4 代数系统

定义: 代数系统

一个非空集合, 如果定义了代数运算 (即该集合与自身的笛卡尔积到自身的映射), 并且满足一定的运算法则, 则称这个集合为一个**代数系统**.

第一章　线性空间





1.1　线性空间及其子空间

1.1.1　线性空间的定义、例子、简单性质

定义1: 线性空间

设 V 是一个非空集合, F 是一个域. 如果 V 上有一个运算:

$$V\times V\longrightarrow V,\ (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\mapsto\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$$

称为**加法**; F 与 V 之间有一个运算:

$$F\times V\longrightarrow V,\ (k,\boldsymbol{\alpha})\mapsto k\boldsymbol{\alpha}$$

称为**数量乘法**; 且满足下述八条运算法则:

1. $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha},\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ (加法交换律)
2. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$ (加法结合律)
3. V 中有一个元素 $\mathbf{0}$, 满足 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V$ (有零元)
4. 对于 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 有 $\boldsymbol{\beta}\in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=0$ (有负元)
5. $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V$ (有单位元)
6. $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha}),\ \forall k,l\in F,\boldsymbol{\alpha}\in V$ (数乘结合律)
7. $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha},\ \forall k,l\in F,\boldsymbol{\alpha}\in V$ (数乘对域加法的分配率)
8. $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta},\ \forall k\in F,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ (数乘对向量加法的分配律)

那么称 V 为域 F 上的一个**线性空间**

把 V 中的元素称为一个**向量**, 线性空间又可称为**向量空间**

线性空间的例子

eg1. 几何空间: {以定点 O 为起点的所有向量}

eg2. 数域 K 上的 n 维向量空间 $K^n:=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in K,i=1,2,\cdots,n\}$, $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为一个 n 维向量

eg3. $\mathbb{R}^X$:={非空集合 X 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射}, 规定:

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x),\ (kf)(x):=kf(x),\ \text{零函数: }0(x):=0,\ \forall x\in X$$

易证 $\mathbb{R}^X$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间, 也是一个函数空间

非空集合 X 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射, 称为 X 上的一个实值函数, 其像一定属于一个数集, 即数域的子集, 其原像则不要求属于数集 (泛函)

线性空间的性质

设域 F 上的一个线性空间 V

1. V 的零元唯一
2. $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元唯一, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$
3. $0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$
4. $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall k \in F$
5. 若 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则$k = 0$ 或 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, $\forall k \in F, \boldsymbol{\alpha} \in V$
6. $(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$

1.1.2 线性子空间

定义2: 线性子空间

设 V 是域 F 上的一个线性空间, U 是 V 的一个非空子集, 如果 U 对于 V 的加法和数量乘法也成为域 F 上的一个线性空间, 那么称 U 为 V 的一个**线性子空间**, 简称为**子空间**

$\{\mathbf{0}\}$ 为 V 的一个子空间, 称为**零子空间**

定理1: 子空间判定定理

设 U 是域 F 上线性空间 V 的一个非空子集, 则 U 是 V 的子空间的充要条件为: U 对于 V 的加法和数量乘法均封闭, 即

$$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in U \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in U$$

$$k \in F, \boldsymbol{\alpha} \in U \Rightarrow k\boldsymbol{\alpha} \in U$$

定义3: 生成子空间

若 V 给出一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 包含 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的子空间一定包含 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 所有线性组合所组成的集合. 令 $W := \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \mid k_1, \cdots, k_s \in F\}$, W 是 V 的一个子空间, 称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ **生成的子空间**, 记作 $\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle$

定义4: 线性表出

$\boldsymbol{\beta} \in \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle \iff$ 存在一组数 $l_1, \cdots, l_s$, 使得 $\boldsymbol{\beta} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_s\boldsymbol{\alpha}_s$, 此时称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ **线性表出**

定理2：基于线性表出与子空间的线性方程组有解判定定理

设数域 K 上 n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases}$$

$$令\ \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\Longleftrightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$

线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$ 有解
$\Longleftrightarrow$ 存在 K 中一组数 $c_1,\cdots,c_n$, 使得 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$
$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta}$ 可以由列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出
$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta}\in\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\rangle$

1.2 向量组的线性结构

1.2.1 向量组的线性相关性

定义5: 线性相关与线性无关

设 V 是域 F 上的一个线性空间, V 中的一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geq 1)$, 如果有一组不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_s$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ **线性相关**

如果从 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$ 可以推出 $k_1 = \cdots = k_s = 0$, 那么称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ **线性无关**

定理3: 基于列向量组线性相关性的齐次线性方程组解判定定理

K^s 中, 列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关
$\Longleftrightarrow$ 存在 K 中一组不全为 0 的数 $c_1, \cdots, c_n$, 使得 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{\alpha}_n$
$\Longleftrightarrow$ K 上 n 元齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$ 有非零解
K^s 中, 列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关
$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$ 只有零解

定理4: 基于行列式的线性相关性判定定理

K^n 中, 列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为列向量组的矩阵的行列式等于 0, 即 $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix} = 0$
K^n 中, 列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix} \neq 0$

定理5: 基于向量组线性相关性表出方式唯一判定定理

设 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 其表出方式唯一 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

向量组线性相关与线性无关的性质

1. 一个向量组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 存在$k \neq 0$ 使得 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$
   从而, $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$

2. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 有一个部分组线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关
   如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的任何一个部分组都线性无关

3. 含有 $\mathbf{0}$ 的任何一个向量组都线性相关

4. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geq 2)$ 线性相关
$\Longleftrightarrow$ 其中, 至少有一个向量, 可以由其余向量线性表出

$$设\ k_i \neq 0,\ 则\ \boldsymbol{\alpha}_i = -\frac{k_1}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} - \cdots - \frac{k_s}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_s$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 其中每一个向量, 都不能由其余向量线性表出

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出

6. 如果向量组线性无关, 则将每个向量添上 m 个分量, 所得到的延伸组也线性无关
如果向量组线性相关, 则将每个向量去掉 m 个分量, 所得到的缩短组也线性相关

1.2.2 极大线性无关组

定义6: 极大线性无关组

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个部分组满足:
(1) 这个部分组线性无关;
(2) 从向量组的其余向量中(若存在)任取一个添入, 得到的新的部分组都线性相关;
则称这个部分组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的**极大线性无关组**

定理6: 向量组与其极大线性无关组的双向线性表出定理

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m \leq s)$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中每一个向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中每一个向量也都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出

1.2.3 向量组的等价

定义7: 向量组等价

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中每一个向量都可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表出, 则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表出

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 可以相互线性表出, 则称这两个**向量组等价**, 记为 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} \cong \{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r\}$

定理7: 向量组与其极大线性无关组的等价性定理

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与其任意一个极大线性无关组等价

向量组等价的性质

1. 每个向量组与自身等价 (反身性)
2. 若 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}$, 则$\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ (对称性)
3. 若 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}$, 且$\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}\cong\{\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t\}$, 则 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t\}$ (传递性)

   线性表出的传递性**证明** 利用连加号交换次序

定理8: 极大线性无关组间的等价性定理

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的任意两个极大线性无关组等价

定理9: 基于子空间的向量组等价判定定理

生成子空间 $\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\rangle=\langle\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\rangle\Longleftrightarrow\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}$

1.2.4 向量组的秩

引理: 基于向量个数的线性相关判定定理

设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 如果 $r>s$, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 一定线性相关

证明

$$\text{设: }\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{s1}\boldsymbol{\alpha}_s\\ \dotfill\\ \boldsymbol{\beta}_r=a_{1r}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{sr}\boldsymbol{\alpha}_s\end{cases},\text{令: }x_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+x_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}x_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+x_r\boldsymbol{\beta}_r&=x_1(a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{s1}\boldsymbol{\alpha}_s)+\cdots+x_r(a_{1r}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{sr}\boldsymbol{\alpha}_s)\\&=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(a_{s1}x_1+\cdots+a_{sr}x_r)\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ 齐次线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=0\\ \dotfill\\ a_{s1}x_1+\cdots+a_{sr}x_r=0\end{cases}$ 由于 $s<r$, 方程组必有非零解. 取一组非零解 $k_1,\cdots,k_r$, 则 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0}$, 因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关

定理10: 基于线性无关的向量个数判定定理(替换定理)

设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 如果 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关, 则 $r\le s$

定理11: 基于等价性与线性无关的向量个数判定定理

等价的线性无关的两个向量组, 所含向量的个数相等

证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_t$ 可以相互线性表出, 则有 $s \leq m$ 且 $m \leq s$

定义8: 向量组的秩

向量组的任意两个极大线性无关组, 所含向量的个数相等

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的任意一个极大线性无关组, 所含向量的个数, 称为**向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩(rank)**, 记为 $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$

只含 $\mathbf{0}$ 的向量组的秩, 规定为 0

定理12: 基于线性相关性的向量组的秩判定定理

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关 $\Longleftrightarrow \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} = s$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 $\Longleftrightarrow \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} < s$

定理13: 基于线性表出的向量组的秩判定定理

若向量组 (I) 可以由向量组 (II) 线性表出, 则 $\operatorname{rank}(I) \leq \operatorname{rank}(II)$

定理14: 基于等价性的向量组的秩判定定理

等价的向量组有相等的秩

1.3 线性空间的基与维数

1.3.1 线性空间的基

定义9: 线性空间子集的线性相关性

设 V 是域 F 上的一个线性空间

将 V的一个有限子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$ 线性相关(线性无关), 定义为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关(线性无关)

将 V 的一个无线子集 S 线性相关, 定义为 S 有一个有限子集线性相关; S 线性无关, 定义为 S 任何一个有限子集都线性无关 (极限是处理无限问题的有力工具, 但未定义距离便不可定义极限)

将空集 $\varnothing$ 定义为线性无关

定义10: 线性空间的基

设 V 是数域 K 上的线性空间, V 的一个子集 S 如果满足: (1) S 线性无关; (2) V 中任一向量, 都可以由 S 中的有限个向量线性表出, 则称 S 为 V 的一个**基**

若 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为 V 的一个**有序基**

$\{\mathbf{0}\}$ 的一个基规定为 $\varnothing$

定理15: 基存在定理

任何一个域 F 上的任何一个线性空间 V 都存在一个基

证明需利用偏序集的概念与Zorn引理

定义11: 线性空间有限维与无限维

若 V 有一个是有限子集, 则称 V 是**有限维**的; 若 V 有一个基是无限维的, 则称 V 是**无限维**的

定理16: 基的维数不变性定理

若 V 是有限维的, 则 V 的任意两个基所含向量个数相等

证明 利用替换定理与基的双向线性表出

推论: 若 V 是无限维的, 则 V 的任何一个基都是无限子集

1.3.2 线性空间的维数

定义12: 线性空间的维数

设 V 是有限维的, 则将 V 的一个基所含向量的个数, 称为 V 的**维数**, 记作 $\dim V$

若 V 是无限维的, 则将 V 的维数记作 $\dim V=\infty$

$\{\mathbf{0}\}$ 的维数为 0

定理17: 基于维数的线性相关判定定理

设 $\dim V=n$, 则 V 中任意 $n+1$ 个向量都线性相关

定义13: 向量的坐标

设 $\dim V=n$, 取 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 则 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 且表出方式唯一, 将列向量 $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**坐标**

线性空间基与维数的例子

1. 几何空间中, 三个不共面的向量是一个基, 从而几何空间是 3 维的, 过定点 O 的平面 Π 是 2 维的, 过定点 O 的直线 l 是 1 维的

2. K^n 中, 向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$ 是一个基, 称为一个标准基, 任何一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a_2\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}$

定理18: 基判定定理

1. 设 $\dim V=n$, 则 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一个基

2. 设 $\dim V=n$, 若 V 中每一个向量, 都可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一个基

证明 取一个基 $\boldsymbol{\delta}_1, \cdots, \boldsymbol{\delta}_n$, 则有 $n \le \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\delta}_1, \cdots, \boldsymbol{\delta}_n\} \le \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\} \le n$

定理19: 基扩充定理

设 $\dim V = n$, 则 V 中任意一个线性无关的向量组, 都可以扩充成 V 的一个基

定理20: 子空间的维数定理

设 $\dim V = n$, W 是 V 的一个子空间, 则 $\dim W \le \dim V$

证明 利用基的扩充

推论: 若 $\dim W = \dim V$, 则 $W = V$

定义14: 极大线性无关集

设 V 是域 F 上的一个线性空间, V 的一个子集 S 如果满足: (1) S 线性无关; (2) 对于 $\boldsymbol{\beta} \notin S$(若存在), 有 $S \cup \{\boldsymbol{\beta}\}$ 线性相关, 则称 S 是 V 的一个**极大线性无关集**

定理21: 基于极大线性无关集的基判定定理

S 是 V 的一个基 $\xLeftrightarrow{V \ne \varnothing}$ S 是 V 的一个极大线性无关集

若将基定义为极大线性无关集, 则可以推出 $\varnothing$ 为 $\{\mathbf{0}\}$ 的一个基

定理22: 生成子空间的基与维数定理

$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle := \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \mid k_1, \cdots, k_s \in K\}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1 \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组, 是 $\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle$ 的一个基, 且 $\dim\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle = \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$

1.4 矩阵的秩

1.4.1 矩阵的秩的定义与性质

定义15: 矩阵的行(列)秩、行(列)空间

数域 K 上的 $s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{s1} & \cdots & a_{sn}\end{pmatrix}$, 行向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s\in K^n$, 列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in K^s$, 称行向量组的秩 $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s\}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**行秩**, 称列向量组的秩 $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**; 称行向量组生成的子空间 $\langle\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s\rangle$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**行空间**, 称 $\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\rangle$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**列空间**; 从而有:

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s\}=\dim\langle\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s\rangle,\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}=\dim\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\rangle$$

定理23: 阶梯型矩阵的秩与极大线性无关组判定定理

数域 K 上的 $s\times n$ 阶梯型矩阵 J, 设 J 的非 0 行个数为 r (有 r 个主元), 则 J:

$$\text{行秩}=\text{列秩}=r$$

且 J 的主元所在的列, 构成 J 的列向量组的一个极大线性无关组

证明 设 J 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 列向量为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$

$$\mathrm{J}=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & c_{1j_1} & \cdots & c_{1j_2} & \cdots & c_{1j_r} & \cdots & c_{1n}\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & c_{2j_2} & \cdots & c_{2j_r} & \cdots & c_{2n}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn}\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

$$c_{1j_1}c_{2j_2}\cdots c_{rj_r}\neq 0\Longrightarrow\begin{vmatrix}c_{1j_1} & c_{1j_2} & \cdots & c_{1j_r}\\ 0 & c_{2j_2} & \cdots & c_{2j_r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & c_{rj_r}\end{vmatrix}\neq 0\Longrightarrow\begin{pmatrix}c_{1j_1}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_{1j_2}\\c_{2j_2}\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}c_{1j_r}\\c_{2j_r}\\\vdots\\c_{rj_r}\end{pmatrix}\text{ 线性无关}$$

$$\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}(\text{延伸组})\text{ 线性无关}\Longrightarrow\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}\}=r$$

$$\text{且 } r = \dim\langle \boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r} \rangle \leq \dim\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle = \dim\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mid a_i \in K\} = r$$

定理24: 初等行变换下的行秩不变性定理

矩阵的初等行变换, 不改变矩阵的行秩

证明 矩阵 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{ⓙ+ⓘk} \boldsymbol{B}$,

$$\text{列向量组: } \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_i, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_j, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s \longrightarrow \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_i, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_j + k\boldsymbol{\gamma}_i, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s$$

由于 $\boldsymbol{\gamma}_j = (\boldsymbol{\gamma}_j + k\boldsymbol{\gamma}_i) + (-k\boldsymbol{\gamma}_i)$, 因此两个列向量组等价, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=$ $\boldsymbol{B}$ 的行秩
易证, 另外两种初等行变换: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{(ⓘ,ⓙ)} \boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{ⓘ\cdot l} \boldsymbol{D}, l \neq 0$ 均不改变矩阵的行秩

定理25: 初等行变换下的列秩不变性定理

矩阵的初等行变换, 不改变矩阵列向量组的线性相关性, 从而不改变矩阵的列秩
设矩阵 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \boldsymbol{B}$, 若 $\boldsymbol{B}$ 的第 $j_1, \cdots, j_r$ 列构成列向量组的一个极大线性无关组, 则 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j_1, \cdots, j_r$ 列构成 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组

定理26: 矩阵的秩定理

对任何一个矩阵: 行秩 $=$ 列秩
证明 $\boldsymbol{A}$ 行秩 $=$ J 的行秩 $=$ J 的列秩 $=$ $\boldsymbol{A}$ 的列秩

定义16: 矩阵的秩

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩与列秩, 统称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩**, 记作 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$

方法: 求矩阵的秩

设矩阵 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \mathrm{J}$, 则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{J} \text{ 的非 } 0 \text{ 行个数 } r$$

并且, 若 J 的主元在第 $j_1, \cdots, j_r$ 列, 则 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j_1, \cdots, j_r$ 列构成 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组

定理27: 转置矩阵的秩判定定理

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^T$, 有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^T)$

定理28: 初等列变换下的秩不变性定理

矩阵的初等列变换不改变矩阵的秩

定理29: 基于子式阶数的矩阵的秩判定定理

$s \times n$ 的非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 等于 $\boldsymbol{A}$ 的不为 0 的子式的最高阶数

推论: 设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的不为 0 的 r 阶子式所在的列(行)是 $\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组的一个极大线性无关组

1.4.2 满秩矩阵

定义17: 满秩矩阵

设 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$, 若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**满秩矩阵**

定理30: 基于行列式的满秩矩阵判定定理

n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵 $\iff \det(\boldsymbol{A}) \neq 0$

证明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n \implies \boldsymbol{A}$ 的不为 0 的子式的最高阶数为 n

1.5 线性方程组的解集的结构

1.5.1 矩阵的秩在判定线性方程组的解的应用

定理1: 基于矩阵的秩的线性方程组的解判别定理

数域 K 上的 n 元线性方程组有解 $\Longleftrightarrow$ 增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 与系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩相等

当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n$ 时, 方程组有唯一解; 当 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<n$ 时, 方程组有无穷多个解

推论: 数域 K 上 n 元齐次线性方程组有非零解 $\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<n$

证明 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$ 有解 $\Longleftrightarrow \dim\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}\rangle=\dim\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\rangle$ $\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(\tilde{\boldsymbol{A}})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$; 有唯一解 $\Longleftrightarrow$ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 经过初等行变换化成的阶梯形矩阵的非 0 行个数 $r=\operatorname{rank}(\tilde{\boldsymbol{A}})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n$

1.5.2 齐次线性方程组的解集的结构

定义1: 解空间

数域 K 上 n 元齐次方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$ 的解集记作 W, 设方程组有非零解, $W\subseteq K^n$, 满足: (1) 若 $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}\in W$, 则 $\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\delta}\in W$; (2) 若 $\boldsymbol{\gamma}\in W, k\in K$, 则 $k\boldsymbol{\gamma}\in W$, 从而 W 是 K^n 的一个子空间, 称 W 为齐次线性方程组的一个**解空间**

定义2: 基础解系

设 $\operatorname{rank}(A)=r<n$, $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ J, 于是 J 有 r 个主元, 不妨设主元在前 r 列, 则方程组的一般解为:

$$\begin{cases}x_1=-b_{1,r+1}x_{r+1}-b_{1,r+2}x_{r+2}-\cdots-b_{1,n}x_n\\ x_2=-b_{2,r+1}x_{r+1}-b_{2,r+2}x_{r+2}-\cdots-b_{2,n}x_n\\ \vdots\\ x_r=-b_{r,r+1}x_{r+1}-b_{r,r+2}x_{r+2}-\cdots-b_{r,n}x_n\end{cases}$$

让自由未知量 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 分别取 $n-r$ 组数 $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, 得到方程组的 $n-r$ 个解: $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix}-b_{1,r+1}\\-b_{2,r+1}\\\vdots\\-b_{r,r+1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix}-b_{1,r+2}\\-b_{2,r+2}\\\vdots\\-b_{r,r+2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r} = \begin{pmatrix}-b_{1,n}\\-b_{2,n}\\\vdots\\-b_{r,n}\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 线性无关(延伸组), 任取 W 中的一个解向量 $\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_r\\c_{r+1}\\\vdots\\c_n\end{pmatrix} = c_{r+1}\boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{\eta}_{n-r}$, 因此 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是**解空间的一个基**, 将解空间的一个基称为齐次线性方程组的一个**基础解系**

设 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是齐次线性方程组的一个基础解系, 则其全部解为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}, k_i \in K$$

定理2: 解空间的维数公式

解空间 W 的维数:

$$\dim W = n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$$

1.5.3 非齐次线性方程组的解集的结构

数域 K 上 n 元非齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0})$, 其解集记作 U, 相应的齐次线性方程组的解集记作 W, 满足: (1) 若 $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta} \in U$, 则 $\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\delta} \in W$; (2) 若 $\boldsymbol{\gamma} \in U, \boldsymbol{\eta} \in W$, 则 $\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\eta} \in U$

设 $\boldsymbol{\gamma}_0 \in U$, 称 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 为非齐次线性方程组的一个**特解**, 则

$$U = \boldsymbol{\gamma}_0 + W := \{\boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\eta} \mid \boldsymbol{\eta} \in W\}$$

易得, U 不是 K^n 的子空间

称 $U=\boldsymbol{\gamma}_0+W$ 为一个 **W 型的线性流形**, 或称 **W 的一个陪集**

设 W 的一个基为 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$, 则非齐次线性方程组的全部解为

$$\boldsymbol{\gamma}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r}+\boldsymbol{\eta}_{n-r},\ k_i\in K,\boldsymbol{\gamma}_0\text{ 是一个特解}$$

1.6 子空间的运算

1.6.1 子空间的交、和

定理1: 交的子空间保持性定理

设 V 是域 F 上的一个线性空间, V_1, V_2 都是 V 的子空间, 则 $V_1 \cap V_2$ 是 V 的一个子空间

子空间的交的性质

1. $V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1$ (交换律)
2. $(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$ (结合律)
   由此可以定义多个子空间的交: $\bigcap\limits_{i=1}^{s} V_i := V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s$, 多个子空间的交也是 V 的一个子空间
3. $V_1 \cup V_2$ 不是一个子空间, 而 $V_1 + V_2$ 是包含 $V_1 \cup V_2$ 的最小子空间

定义1: 子空间的和

设 V_1, V_2 都是 V 的子空间, 令 $V_1 + V_2 := \{\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \mid \boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_2\}$, 则称 $V_1 + V_2$ 为 V_1 与 V_2 的**和**, 易得 $V_1 + V_2$ 是 V 的一个子空间

子空间的和的性质

1. $V_1 + V_2 = V_2 + V_1$ (交换律)
2. $(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3)$ (结合律)
   由此可以定义多个子空间的和: $\sum\limits_{i=1}^{s} V_i := V_1 + V_2 + \cdots + V_s$, 多个子空间的和也是 V 的一个子空间

定理2: 生成子空间的和的基本定理

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle + \langle \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r \rangle$$

定理3: 子空间的维数公式

设 V_1, V_2 都是 V 的有限维子空间, 则 $V_1 \cap V_2$ 与 $V_1 + V_2$ 也都是有限维的, 且:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

推论: $V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}\Longleftrightarrow \dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

证明 $V_1\cap V_2$ 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 扩充为 V_1 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 与 V_2 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$, 则 $V_1+V_2=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}\rangle+\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m},\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}\rangle$

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}+q_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}=\mathbf{0}$

$\Longrightarrow q_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}=-k_1\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-k_m\boldsymbol{\alpha}_m-p_1\boldsymbol{\beta}_1-\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$

左边向量属于 V_1, 右边向量属于 V_2, 从而两边向量均属于 $V_1\cap V_2$

$\Longrightarrow q_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m$

$\Longrightarrow \mathbf{0}=q_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}-l_1\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-l_m\boldsymbol{\alpha}_m\in V_2$

$\Longrightarrow l_1=\cdots=l_m=q_1=\cdots=q_{n_2-m}=0$

$\Longrightarrow \mathbf{0}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+p_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}\in V_1$

$\Longrightarrow k_1=\cdots=k_m=p_1=p_{n_1-m}=0$

$\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n_1-m},\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关 $\Longrightarrow \dim V_1+V_2=n_1+n_2-m$

1.6.2 子空间的直和

定义2: 子空间的直和

设 V_1,V_2 是 V 的子空间, 若 V_1+V_2 中的每个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2$ 的表法唯一, 则称和 V_1+V_2 为**直和**, 记作 $V_1\oplus V_2$

定理4: 直和判定定理

设 V_1,V_2 是 V 的子空间, 则 V_1+V_2 是直和的充要条件有:

1. V_1+V_2 中 $\mathbf{0}$ 表法唯一, 即 $\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$;

2. $V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$;

3. V_1 的一个基 S_1 与 V_2 的一个基 S_2 的并集 $S_1\cup S_2$ 是 $V_1\cup V_2$ 的一个基

   证明 任取 $S_1\cup S_2$ 的一个有限子集 $\{\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t,\boldsymbol{\delta}_1,\cdots,\boldsymbol{\delta}_r\}$, $\boldsymbol{\gamma}_i\in S_1,\boldsymbol{\delta}_j\in S_2$, 设 $(k_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\gamma}_t)+(ł_1\boldsymbol{\delta}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\delta}_r)=\mathbf{0}$, 根据 (2) 可得 $k_1=\cdots=k_t=ł_1=\cdots=l_r=0$, 因此 $\{\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t,\boldsymbol{\delta}_1,\cdots,\boldsymbol{\delta}_r\}$ 线性无关, 从而 $S_1\cup S_2$ 线性无关; 任取 V_1+V_2 中的一个向量 $\boldsymbol{\alpha}=\underset{\in V_1}{\boldsymbol{\alpha}_1}+\underset{\in V_2}{\boldsymbol{\alpha}_2}$, 由于 $S_1(S_2)$ 是 $V_1(V_2)$ 的一个基, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\alpha}_2)$ 可由 $S_1(S_2)$ 中有限多个向量线性表出, 于是 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $S_1\cup S_2$ 中有限多个向量线性表出, 得证

定理5: 有限维子空间基于维数的直和判定定理

设 V_1,V_2 是 V 的有限维子空间, 则:
V_1+V_2 是直和 $\Longleftrightarrow \dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

定义3: 多个子空间的直和

设 $V_1, \cdots, V_m$ 都是 V 的子空间, 如果 $V_1 + \cdots + V_m$ 中每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\alpha}_i \in V_i$ 的表法唯一, 则称 $V_1 + \cdots + V_m$ 是**直和**, 记作 $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_i$

定理6: 多个有限维子空间的直和判定定理

设 $V_1, \cdots, V_m$ 都是 V 的子空间, 则 $V_1 + \cdots + V_m$ 是直和的充要条件有:

1. $V_1 + \cdots + V_m$ 中 $\mathbf{0}$ 表法唯一;
2. $V_i \cap (\sum\limits_{j \neq i} V_j) = \mathbf{0}$;
3. 设 V_i 的一个基为 S_i $(i = 1, \cdots, m)$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$ 是 $\sum\limits_{i=1}^{m} V_i$ 的一个基

定理7: 多个有限维子空间基于维数的直和判定定理

设 $V_1, \cdots, V_m$ 都是 V 的有限维子空间, 则:
$V_1 + \cdots + V_m$ 是直和 $\iff \dim(V_1 + \cdots + V_m) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_m$

定理8: 基于直和分解的基判定定理

若 $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m}$, 则 $V_i (i = 1, \cdots, m)$ 的基合起来是 $V = \sum\limits_{i=1}^{m}$ 的一个基
这揭示了可以通过直和分解(空间的分解), 来研究线性空间的结构

1.6.3 补空间

定义4: 补空间

若 $V = V_1 \oplus V_2$, 则称 V_2 是 V_1 的一个**补空间**, 也称 V_1 是 V_2 的一个**补空间**

定理9: 有限维子空间的补空间存在定理

设 $\dim V = n$, 则 V 的每一个子空间 U, 都在 V 中有一个补空间
补空间不唯一

证明 U 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 扩充为 V 的一个基$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-m}$, 从而 $V = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-m} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle + \langle \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-m} \rangle = U + W$, 据直和的充要条件 (3) 得 $V = U \oplus W$, 因此 W 是 U 的一个补空间

1.7 线性空间的同构

1.7.1 同构映射与线性空间的同构

定义1: 同构映射、线性空间的同构

设 V 和 V' 都是域 F 上的线性空间, 如果 V 到 V' 有一个双射 σ, 满足:
(1) $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$, $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ (保持加法); (2) $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$, $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V,k\in F$ (保持数乘), 则称 σ 为 V 到 V' 的一个**同构映射**, 此时, 称**线性空间 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{V}'$ 是同构的**, 记作 $V\cong V'$

同构映射的性质

1. $\sigma(\mathbf{0})=\mathbf{0}'$

2. $\sigma(-\boldsymbol{\alpha})=-\sigma(\boldsymbol{\alpha})$

3. $\sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_s\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$

4. V 中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相(无)关 $\Longleftrightarrow$ V' 中 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$ 线性相(无)关

5. $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一个基 $\Longleftrightarrow$ $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 V' 的一个基

定理1: 有限维子空间基于维数的同构判定定理

数域 K 上两个有限维的线性空间 V 和 V' 同构 $\Longleftrightarrow \dim V=\dim V'$

推论: 域 F 上任一 n 维线性空间 V 与 F^n 同构, 因此可以通过研究 F^n 来研究线性空间

这揭示了可以通过同构, 来研究线性空间的结构

证明 “$\Longrightarrow$”由性质 5 可得. V 和 V' 中分别取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$, 令 $\sigma: V\to V', \boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^n a_i\boldsymbol{\alpha}_i\mapsto\sum\limits_{i=1}^n a_i\boldsymbol{\gamma}_i$, 由于表法唯一, 由此 σ 是一个映射; $\forall\boldsymbol{\gamma}=\sum\limits_{i=1}^n c_i\boldsymbol{\gamma}_i$, 有 $\sum\limits_{i=1}^n c_i\boldsymbol{\alpha}_i\mapsto\boldsymbol{\gamma}$, 因此 σ 是满射; 设 $\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^n b_i\boldsymbol{\alpha}_i\mapsto\sum\limits_{i=1}^n b_i\boldsymbol{\gamma}_i$, 若 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\beta})$, 则 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$, 因此 σ 是单射, 从而 σ 是双射. 易证 σ 保持加法和数乘, 因此 σ 是一个同构映射, 从而 $V\cong V'$, “$\Longleftarrow$” 得证

定理2: 同构映射的坐标不变性定理

设 $\sigma : V \to V', \boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{\alpha}_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{\gamma}_i$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

即同构映射的像与原像, 在对应的基下的坐标相同

可建立如下同构映射:

$$\sigma : V \to F^n, \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{\alpha}_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

定理3: 同构映射的子空间保持性定理

设 σ 是域 F 上线性空间 V 到 V' 的一个同构映射, U 是 V 的一个子空间, 令 $\sigma(U) := \{\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \mid \boldsymbol{\alpha} \in U\} \subseteq V'$, 则 $\sigma(U)$ 是 V' 的一个子空间

若 $\dim U = m$, 则 $\dim \sigma(U) = m$

证明 $\mathbf{0}' = \sigma(\underset{\in U}{\mathbf{0}}) \in \sigma(U)$; $\sigma(\underset{\in U}{\boldsymbol{\alpha}}) + \sigma(\underset{\in U}{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) \in \sigma(U)$; $k\sigma(\underset{\in U}{\boldsymbol{\alpha}}) = \sigma(\underset{\in U}{k\boldsymbol{\alpha}}) \in \sigma(U)$, 从而 $\sigma(U)$ 是 V' 的一个子空间

1.7.2 线性空间的同构类与划分

定义2: 同构类

设 $\Omega = \{$数域 K 上线性空间$\}$, 线性空间的同构是 Ω 上的一个等价关系, 此时, 等价类称为**同构类**

定理4: 有限维线性空间的同构类划分定理

所有同构类组成的集合是 Ω 的一个划分, 令 $\Omega_1 = \{$域 F 上有限维线性空间$\}$, 则同构类有:

$$\overline{\mathbf{0}} = \{\mathbf{0}\}, \overline{F^1} = \{1 \text{ 维线性空间}\}, \cdots, \overline{F^n} = \{\text{n 维线性空间}\}, \cdots$$

因此, 同构类完全被维数所决定

1.8 商空间

定义1: 商集

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系, 由所有等价类组成的集合 (S 的一个划分), 称为 S 对于关系 $\sim$ 的**商集**, 记作 $S/\sim$

定义2: 陪集、陪集的代表

设 V 是域 F 上的线性空间, W 是 V 的一个子空间, 设 $\boldsymbol{\beta} \sim \boldsymbol{\alpha} :\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} \in W$, 易证 $\sim$ 是 V 上的一个等价关系

$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V, \overline{\boldsymbol{\alpha}} = \{\boldsymbol{\beta} \in V \mid \boldsymbol{\beta} \sim \boldsymbol{\alpha}\} = \{\boldsymbol{\beta} \in V \mid \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} \in W\} = \{\boldsymbol{\beta} \in V \mid \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \in W\} = \{\boldsymbol{\beta} \in V \mid \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \in W\} = \{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\eta} \mid \boldsymbol{\eta} \in W\} =: \boldsymbol{\alpha} + W$, 将 $\boldsymbol{\alpha} + W$ 称为 W 的一个**陪集**, 称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{\alpha} + W$ 的一个**代表**

陪集的性质

1. $\boldsymbol{\alpha} + W = \boldsymbol{\gamma} + W \Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\gamma} \in W$, 可得: 陪集 $\boldsymbol{\alpha} + W$ 的代表不唯一

2. $\boldsymbol{\eta} \in W \Longleftrightarrow \boldsymbol{\eta} + W = W$

定义3: 商空间

$V/W := \{\boldsymbol{\alpha} + W \mid \boldsymbol{\alpha} \in V\}$ 是 V 对于子空间 W 的一个商集
规定加法: $(\boldsymbol{\alpha} + W) + (\boldsymbol{\beta} + W) := (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + W$;
规定数乘: $k(\boldsymbol{\alpha} + W) := k\boldsymbol{\alpha} + W$;
易证, 上述的定义与陪集代表的选择无关, 因此定义合理

W 是 V/W 的一个零元, $(-\boldsymbol{\alpha}) + W$ 是 $\boldsymbol{\alpha} + W$ 的负元, 易证 V/W 成为域 F 上的一个线性空间, 称 V/W 为 V 对于子空间 W 的**商空间**

定理1: 商空间的维数公式

设 V 是域 F 上的一个 n 维线性空间, W 是 V 的一个子空间, 则:

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W$$

证明 W 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 将其扩充成 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\alpha}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$,

$\forall \boldsymbol{\alpha}+W \in V/W$, 设 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_s\boldsymbol{\alpha}_s+a_{s+1}\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}+W &= (a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_s\boldsymbol{\alpha}_s+a_{s+1}\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n)\\ &= a_1(\boldsymbol{\alpha}_1+W)+\cdots+a_s(\boldsymbol{\alpha}_s+W)+a_{s+1}(\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+W)+\cdots+a_n(\boldsymbol{\alpha}_n+W)\\ &= a_1W+\cdots+a_sW+a_{s+1}(\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+W)+\cdots+a_n(\boldsymbol{\alpha}_n+W)\\ &= a_{s+1}(\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+W)+\cdots+a_n(\boldsymbol{\alpha}_n+W)\end{aligned}$$

设 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+W)+k_{n-s}(\boldsymbol{\alpha}_n+W)=W$
$\Longrightarrow k_1\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+\cdots+k_{n-s}\boldsymbol{\alpha}_n+W=W$
$\Longrightarrow k_1\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+\cdots+k_{n-s}\boldsymbol{\alpha}_n\in W$
$\Longrightarrow k_1\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+\cdots+k_{n-s}\boldsymbol{\alpha}_n=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s$
$\Longrightarrow k_1=\cdots=k_{n-s}=l_1=\cdots=l_s=0$
$\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}_{s+1}+W,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+W$ 线性无关
$\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}_{s+1}+W,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+W$ 是 V/W 的一个基
$\Longrightarrow \dim(V/W)=n-s=\dim V-\dim W$

定理2: 基于商空间的直和分解定理

如果 V/W 的一个基为 $\boldsymbol{\beta}_1+W,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t+W$, 令 $U=\langle\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\rangle$, 则 $V=W\oplus U$, 且 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是 U 的一个基

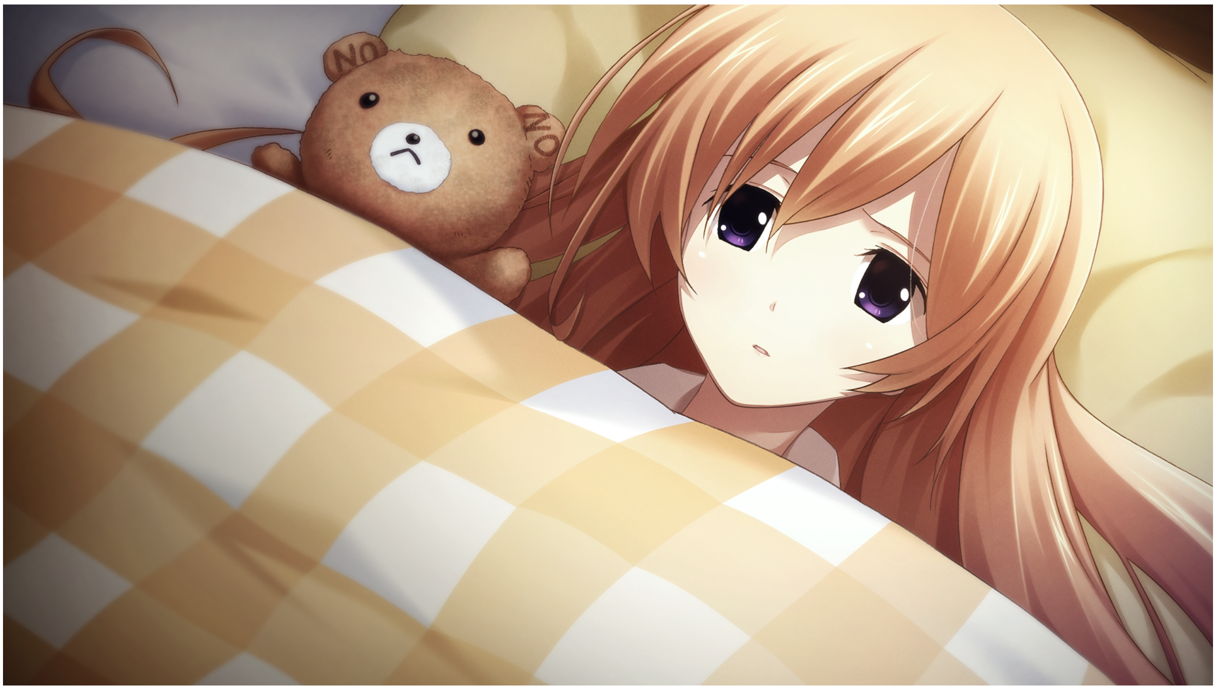
这揭示出可以通过研究商空间, 来研究线性空间的结构

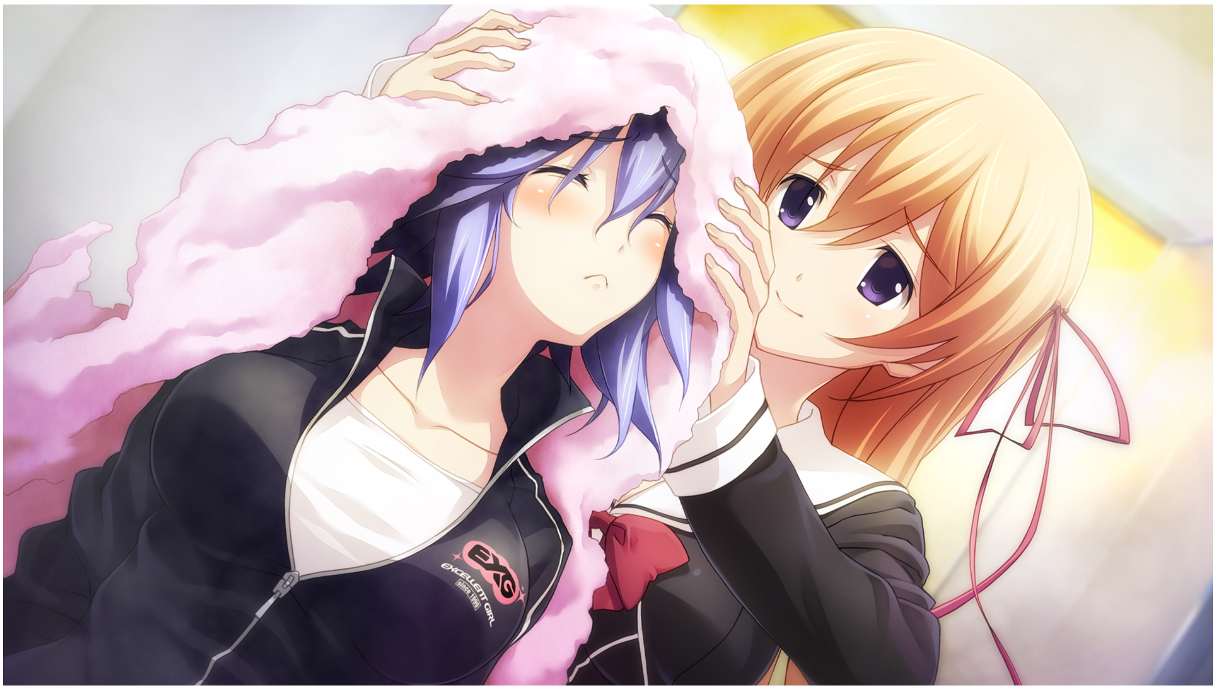
证明 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\boldsymbol{\alpha}_W=a_1(\boldsymbol{\beta}_1+W)+\cdots+a_t(\boldsymbol{\beta}_t+W)=(a_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+a_t\boldsymbol{\beta}_t)$
$\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}-\underbrace{(a_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+a_t\boldsymbol{\beta}_t)}_{\text{记作}\boldsymbol{\beta}\in U}\in W\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\eta}\in W\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\beta}\in W+U$
$\Longrightarrow V=W+U$; $\forall\boldsymbol{\gamma}\in W\cap U$, $\boldsymbol{\gamma}=l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t$
$\Longrightarrow \boldsymbol{\gamma}+W=(l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t)+W=l_1(\boldsymbol{\beta}_1+W)+\cdots+l_t(\boldsymbol{\beta}_t+W)=W$ (零元)
$\Longrightarrow l_1=\cdots=l_t=0\Longrightarrow\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}\Longrightarrow W\cap U=\{\mathbf{0}\}\Longrightarrow V=W\oplus U$
设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0}\Longrightarrow W=\mathbf{0}+W=(k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t)+W$
$\Longrightarrow k_1=\cdots=k_t=0\Longrightarrow\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关 $\Longrightarrow\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是 U 的一个基

定理3: 推广到无限维的补空间存在定理

即使 V 是无限维的, 对于其无限维子空间 W, 若商空间 V/W 是有限维的, 则 W 也存在一个补空间 U

第二章　线性映射





2.1 线性映射及其运算

2.1.1 线性映射的定义

定义1: 线性映射、线性变换

设 V 和 V' 是域 F 上的线性空间, V 到 V' 的一个映射 $\mathcal{A}$ 如果满足:

1. $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ (保持加法);

2. $\mathcal{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}),\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V,k\in F$ (保持纯量乘法),

则称 $\mathcal{A}$ 为 V 到 V' 的一个**线性映射**

如果 V 到 V' 的一个线性映射 $\mathcal{B}$, 满足: $\mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha})=\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}),\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, 则称 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ **相等**, 记作 $\mathcal{B}=\mathcal{A}$

V 到自身的一个线性映射, 称为 V 上的一个**线性变换**

线性变换的例子

1. 数乘变换: $\mathcal{K}(\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{\alpha},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V,k\in F$

2. 零变换: $\mathcal{O}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V$

3. 恒等变换: $\mathcal{I}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V$

线性映射的性质

1. $\mathcal{A}(\mathbf{0})=\mathbf{0}'$
   零元的像是零元

2. $\mathcal{A}(-\boldsymbol{\alpha})=-\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})$

3. $\mathcal{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=k_1\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_s\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_s)$

4. $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 在 V 中线性相关 $\Rightarrow\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_s)$ 在 V' 中线性相关
   线性相关向量组的像仍线性相关, 线性无关向量组的像不一定线性无关

5. 设 $\dim V=n$, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, 设 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 则 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})=k_1\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_n\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)$
   $\mathcal{A}$ 完全被其在 V 中一个基上的作用所决定

6. 设 $\mathcal{A}$ 是 V 到 V' 的一个同构映射 $\Longleftrightarrow\mathcal{A}$ 是 V 到 V' 的一个可逆线性映射

定理1: 线性映射的构造

设 V 和 V' 是域 F 上的线性空间, 且 $\dim V = n$, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, V' 中任取 n 个向量 $\boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n$ (可重复), 令 $\mathcal{A}: V \to V', \boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{\alpha}_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{\gamma}_i$, 则 $\mathcal{A}$ 是 V 到 V' 的一个线性映射

其中, $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\gamma}_i$, $i =, \cdots, n$; 若有 V 到 V' 的一个线性映射 $\mathcal{B}$, 满足: $\mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\gamma}_i$, $i =, \cdots, n$, 则 $\mathcal{B} = \mathcal{A}$

2.1.2 线性映射的运算律

定义2: 线性映射的加法与纯量乘法

设 V 和 V' 是域 F 上的线性空间, 令 $\mathrm{Hom}(V, V') := \{V$ 到 V' 的线性映射$\}$, $\mathrm{Hom}(V, V) := \{V$ 上的线性变换$\}$

在 $\mathrm{Hom}(V, V')$ 中, 规定**加法**: $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\boldsymbol{\alpha} := \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}$, $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V, V'), \boldsymbol{\alpha} \in V$; 规定**纯量乘法**: $(k\mathcal{A})\boldsymbol{\alpha} := k(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha})$, $\forall k \in F, \mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V'), \boldsymbol{\alpha} \in V$

定义3: 线性映射空间

易证, $\mathrm{Hom}(V, V')$ 满足线性空间八条运算法则, 其中零元是**零映射**: $\mathcal{O}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}'$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, $\mathcal{A}$ 的负元是: $(-\mathcal{A})\boldsymbol{\alpha} = -\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}$, $\forall \mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V')\boldsymbol{\alpha} \in V$, 因此 $\mathrm{Hom}(V, V')$ 也成为域 F 上的一个线性空间, 称为 **V 到 V' 的线性映射空间**

同理, $\mathrm{Hom}(V, V)$ 也是域 F 上的一个线性空间, 称为 **V 上的线性变换空间**

定义4: 线性映射的乘法

设线性映射 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$: $V \xrightarrow{\mathcal{A}} U \xrightarrow{\mathcal{B}} W$, 则有**线性映射的乘法** $\mathcal{BA}$, 根据映射乘法的运算律, 线性映射的乘法满足: (1) 结合律; (2) 左右分配律

易证, $\mathrm{Hom}(V, V)$ 对于加法和乘法是一个有单位元 (恒等变换 $\mathcal{I}$) 的非交换环, 其纯量乘法满足: $k(\mathcal{AB}) = (k\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{A}(k\mathcal{B})$

定理2: 基于同构的可逆线性变换判定定理

$\mathcal{A}$ 是 V 上的可逆线性变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}^{-1}$ 是 V 上的可逆线性变换

定义5: 线性变换的幂运算

设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, 令 $\mathcal{A}^m := \underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}\cdots\mathcal{A}}_{m\text{个}}$, $m \in \mathbb{N}^*$, 称为 $\mathcal{A}$ 的**正整数指数幂**

$\mathcal{A}^0 := \mathcal{I}$, 称为 $\mathcal{A}$ 的**零次幂**

易证, $\mathcal{A}^m\mathcal{A}^l = \mathcal{A}^{m+l}$, $(\mathcal{A}^m)^l = \mathcal{A}^{ml}$, $m, l \in \mathbb{N}$

若 $\mathcal{A}$ 可逆, 则令 $\mathcal{A}^{-m} := (\mathcal{A}^{-1})^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, 称为 $\mathcal{A}$ 的**负整数指数幂**

2.1.3 投影

定义6: 投影

设几何空间 V, 过定点 O 的一个平面 U 是 V 的一个子空间, 过定点 O 的一条直线 W 也是 V 的一个子空间, 有: $V = U \oplus W$

$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, $\boldsymbol{\alpha} = \underset{\in U}{\boldsymbol{\alpha}_1} + \underset{\in W}{\boldsymbol{\alpha}_2}$, $\boldsymbol{\alpha}$ 平行于 W 在 U 上的**投影**: $\mathcal{P}_U(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}_1$

设域 F 上的一个线性空间 $V = U \oplus W$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, $\boldsymbol{\alpha} = \underset{\in U}{\boldsymbol{\alpha}_1} + \underset{\in W}{\boldsymbol{\alpha}_2}$, 令 $\mathcal{P}_U(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}_1$, 则称 $\mathcal{P}_U$ 为**平行于 W 在 U 上的投影**

投影的性质

1. $\mathcal{P}_U$ 是 V 上的一个线性变换
2. $\mathcal{P}_U = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}, \ \forall \boldsymbol{\alpha} \in U \\ \mathbf{0}, \ \forall \boldsymbol{\alpha} \in W \end{cases}$
3. $\mathcal{P}_U^2 = \mathcal{P}_U$

定义7: 幂等变换

V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 如果满足: $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是一个**幂等变换**

投影 $\mathcal{P}_U$ 是一个幂等变换

定理3: 投影判定定理

若 V 上的一个线性变换 $\mathcal{A}$ 满足: $\mathcal{A} = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}, \ \forall \boldsymbol{\alpha} \in U \\ \mathbf{0}, \ \forall \boldsymbol{\alpha} \in W \end{cases}$, 则 $\mathcal{A} = \mathcal{P}_U$

证明 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 设 $\boldsymbol{\alpha} = \underset{\in U}{\boldsymbol{\alpha}_1} + \underset{\in W}{\boldsymbol{\alpha}_2}$, $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + \mathbf{0} = \mathcal{P}_U$, 从而 $\mathcal{A} = \mathcal{P}_U$

2.2 线性映射的核与像

定义1: 线性映射的核

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 到 V' 的一个线性映射, 则 V 的子集 $\operatorname{Ker}\mathcal{A} := \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}'\}$, 称为 $\mathcal{A}$ 的**核**

$\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 是 V 的一个子空间, 可以称为**核空间**; $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 是 V' 的子空间, 称为**像空间**

定理1: 基于核的单射判定定理

$\mathcal{A}$ 是单射 $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$

证明 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A},\ \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}' = \mathcal{A}(\mathbf{0}) \overset{\mathcal{A}\text{是单射}}{\Longrightarrow} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$; 设 $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in V$ 且 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) = \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}'$, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \overset{\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\{\mathbf{0}\}}{\Longrightarrow} \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2$

定理2: 基于像的满射判定定理

$\mathcal{A}$ 是满射 $\Longleftrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = V'$

定理3: 投影的核与像

几何空间 $V = U \oplus W$, 设平行于 W 在 U 上的投影 $\mathcal{P}_U$, $\operatorname{Ker}\mathcal{P}_U = W$, $\operatorname{Im}\mathcal{P}_U = U$

定理4: 投影的核的商空间与像空间的同构性定理

令 $\sigma : V/W \to \operatorname{Im}\mathcal{P}_U, \boldsymbol{\alpha} + W \mapsto \mathcal{P}_U\boldsymbol{\alpha},\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 易证 σ 既是单射又是满射, 从而 σ 是一个双射, 又满足:

1. $(\boldsymbol{\alpha} + W) + (\boldsymbol{\beta} + W) = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + W \mapsto \mathcal{P}_U(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \mathcal{P}_U\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{P}_U\boldsymbol{\beta}$ (保持加法);
2. $k(\boldsymbol{\alpha} + W) = (k\boldsymbol{\alpha}) + W \mapsto \mathcal{P}_U(k\boldsymbol{\alpha}) = k\mathcal{P}_U\boldsymbol{\alpha}$ (保持纯量乘法),

因此, σ 是一个同构映射, 从而 $V/W \cong \operatorname{Im}\mathcal{P}_U$, 即 $V/\operatorname{Ker}\mathcal{P}_U \cong \operatorname{Im}\mathcal{P}_U$

定理5: 第一同构定理

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 到 V' 的一个线性映射, 则:

$$V/\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cong \operatorname{Im}\mathcal{A}$$

于是, 有维数关系: $\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A}) = \dim(V/\operatorname{Ker}\mathcal{A}) = \dim V - \dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A})$

证明 记 $W = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, 令 $\sigma : V/W \to \operatorname{Im}\mathcal{A}, \boldsymbol{\alpha} + W \mapsto \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha} + W = \boldsymbol{\beta} + W \Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \in W = \operatorname{Ker}\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}' \Longleftrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}$, 因此 σ 是一个映射, 并且是一个单射, 显然也是一个满射, 从而 σ 是一个双射, 易证, σ 保持加法与纯量乘法, 因此是 $V/\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 到 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 的一个同构映射

定理6: 线性映射核与像的维数公式(秩-零度定理)

设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V')$, $\dim V = n$, 则:

$$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Im}\,\mathcal{A})$$

定义2: 线性映射的秩与零度

将线性映射 $\mathcal{A}$ 的像空间的维数, 称为**线性映射的秩**, 记作 $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}\,\mathcal{A})$
将 $\mathcal{A}$ 的核的维数, 称为 $\mathcal{A}$ 的**零度**

定理7: 有限维同维线性空间的线性映射单满等价性定理

设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V')$ 且 $\dim V = \dim V'$, 则 $\mathcal{A}$ 是单射 $\iff$ $\mathcal{A}$ 是满射
特别地, $\mathcal{A}$ 是有限维线性空间 V 上的一个线性变换, 则 $\mathcal{A}$ 是单射 $\iff$ $\mathcal{A}$ 是满射
证明 $\mathcal{A}$ 是单射 $\iff \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\} \iff \dim V = \dim(\mathrm{Im}\,\mathcal{A}) \iff \mathrm{Im}\,\mathcal{A} = V' \iff \mathcal{A}$ 是满射

2.3 线性映射的矩阵表示

设 V 是域 F 上的线性空间, 令:

$$V^n := \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n\text{个}} := \{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \mid \boldsymbol{\alpha}_i \in V, i = 1, \cdots, n\}$$

1. 规定相等: $(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) :\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\beta}_i,\ i = 1, \cdots, n$
2. 规定加法: $(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) + (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) := (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n + \boldsymbol{\beta}_n),\ \forall \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_i \in V$
3. 规定纯量乘法: $k(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) := (k\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, k\boldsymbol{\alpha}_n),\ \forall \boldsymbol{\alpha}_i \in V, k \in F$
   易证, V^n 成为域 F 上的一个线性空间
4. 规定与矩阵的乘法:

$$\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)}_{\in V^n} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} := \underbrace{(a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \cdots, a_{1m}\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + a_{nm}\boldsymbol{\alpha}_n)}_{\in V^m}$$

满足:
(1) $[(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}]\,\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{AB})$;
(2) $(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{AB})$;
(3) $(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n + \boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{A}$;
(4) $k\,[(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}] = [k(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)]\,\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)(k\boldsymbol{A})$

2.3.1 线性映射在一个基下的矩阵

定义1: 线性变换的矩阵

设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的一个线性变换, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 基在线性变换下的像一定可以由基线性表出:

线性变换完全被其在基上的作用所决定

$$\begin{cases} \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \quad\vdots \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{记作}\boldsymbol{A}}$$

$$\text{即 } \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) := (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**线性变换** $\mathcal{A}$ **在基** $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ **下的矩阵**

$\boldsymbol{A}$ 的第 j 列是 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_j$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**坐标**, 于是, 线性变换在一个给定的基下的矩阵是唯一的

定义2: 线性映射的矩阵

设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V'), \dim V = n, \dim V' = s$, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, V' 中取一个基 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$, 则:

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}}_{\text{记作}\boldsymbol{A}}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s)\boldsymbol{A}$$

将 $\boldsymbol{A}$ 称为**线性映射** $\mathcal{A}$ **在** V **的基** $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ **和** V' **的基** $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ **下的矩阵**

线性映射及其矩阵的性质

令 $\sigma : \mathrm{Hom}(V, V') \to \boldsymbol{M}_{s\times n}(F), \mathcal{A} \mapsto \boldsymbol{A}$, 其中 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s)\boldsymbol{A}$,
设 $\mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V, V')$, $\mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s)\boldsymbol{B}$, 则有:

1. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s)(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$ (保持加法)
2. $(k\mathcal{A})(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s)(k\boldsymbol{A})$ (保持纯量乘法)

线性变换及其矩阵的特殊性质

1. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, 在给定的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下, $\mathcal{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $\mathcal{B}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 则有 $(\mathcal{A}\mathcal{B})(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$ (保持乘法)
2. 令 $\sigma : \mathrm{Hom}(V, V) \to \boldsymbol{M}_n(F), \mathcal{A} \mapsto \boldsymbol{A}$, 其中 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$, 则 σ 保持加法、纯量乘法、乘法

3. $\mathcal{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\mathcal{A}^{-1}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$

4. $\mathcal{A}$ 是幂等变换 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵

2.3.2 线性映射空间与矩阵空间的关系

定理1: 线性映射空间与矩阵空间的同构定理

任给 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)\in \boldsymbol{M}_{s\times n}$, 根据定理1, 一定存在唯一的一个线性映射 $\mathcal{C}$, 使得 $\mathcal{C}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s)(\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s)\boldsymbol{C}$, 因此 σ 是双射, 从而 σ 是 $\mathrm{Hom}(V,V^{'})$ 到 $\boldsymbol{M}_{s\times n}(F)$ 的一个同构映射, 于是有:

$$\mathrm{Hom}(V,V^{'})\cong \boldsymbol{M}_{s\times n}(F)$$

特别地, 对于线性变换:

$$\mathrm{Hom}(V,V)\cong \boldsymbol{M}_n(F)$$

定理2: 线性映射空间的维数公式

由于线性映射空间与矩阵空间同构, 二者维数相等, 于是有:

$$\dim\left[\mathrm{Hom}(V,V^{'})\right]=sn=(\dim V)(\dim V^{'})$$

特别地, 对于线性变换:

$$\dim\left[\mathrm{Hom}(V,V)\right]=n^2=(\dim V)^2$$

2.3.3 相似矩阵与不变量

定义3: 矩阵的迹

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$, 对角线元素之和 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$, 称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹**, 记作 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

矩阵的迹的性质

1. $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$

2. $\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A})=k\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$

3. $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$

定义4: 相似矩阵、相似类

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 如果存在域 F 上的 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**相似**的, 记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$

相似关系是 $\boldsymbol{M}_n(F)$ 上的一个等价关系, 相似关系下的等价类, 称为**相似类**

定理3: 矩阵的行列式、秩、迹在相似关系下的不变性定理

1. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$, 且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$
   证明 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}|\,|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}|^{-1}\,|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|$

2. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(B)$
   证明 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$

因此, n 级矩阵的行列式、秩、迹均为**相似关系下的不变量**

2.3.4 线性变换在不同基下的矩阵

定义5: 过渡矩阵

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, V 中取两个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$, 设 $(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\underbrace{\begin{pmatrix}s_{11}&\cdots&s_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ s_{n1}&\cdots&s_{nn}\end{pmatrix}}_{\text{记作}\boldsymbol{S}}$, 称 $\boldsymbol{S}$ 为基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的**过渡矩阵**

定理4: 线性变换在不同基下的矩阵相似定理

设 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{B}$, 则有:

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$$

即, 线性变换 $\mathcal{A}$ 在不同基下的矩阵是相似的

证明 从 $\underbrace{(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)}_{\text{线性无关}}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$, 可推出 $\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=0\in F^n$

$\Longleftrightarrow$ 从 $\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)}_{\text{线性无关}}\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$, 可推出 $\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=0\in F^n$

$\Longleftrightarrow$ 从 $\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=0\in F^n$, 可推出 $\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=0\in F^n$ (齐次线性方程组只有零解)

$\Longleftrightarrow |\boldsymbol{S}|\neq 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{S}$ 是可逆矩阵

$\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{B}$

定义6: 线性变换的行列式、秩、迹

由于 $\mathcal{A}$ 在不同基下的矩阵是相似的, 将 $\mathcal{A}$ 在一个基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式、秩、迹, 称为**线性变换 $\mathcal{A}$ 的行列式、秩、迹**

定理5: 线性变换的矩阵的秩与像空间维数的关系

设 $\mathcal{A}\in\mathrm{Hom}(V,V)$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$, 则:

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\dim(\mathrm{Im}\,\mathcal{A})$$

证明

2.3.5 向量在线性映射下像的坐标

定义7: 向量在线性映射下像的坐标

....

2.4　矩阵对角化及特征值与特征向量

Def. 1 in 2.3.1 表明一个线性变换在给定一个基后可以由一个矩阵表示. 于是我们便想找到一个基, 使得线性变换在这个基下的矩阵表示形式最简单. 我们认为最简单的矩阵为对角矩阵, 设这个基为 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$, 对角矩阵为 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots \lambda_n\}$, 则有

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n) = (\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{\xi}_n)$$

于是有 $\mathcal{A}\boldsymbol{\xi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\xi}_i$, 这引出了特征值与特征向量的问题.

Thm. 4 in 2.3.4 表明一个线性变换在不同基下有不同的矩阵表示, 且给出了矩阵之间的关系——相似. 于是我们能够在有一个给定的基及其下矩阵的基础上, 通过 Meth. 2 in 2.4.4 给出的对角化方法, 将一个可对角化的矩阵转化为对角矩阵.

2.4.1　线性变换的特征值与特征向量

定义1: 线性变换的特征值与特征向量

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换, 若存在 $\lambda_0 \in F$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{\xi} \in V$, 使得

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda_0\boldsymbol{\xi}$$

则称 λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个**特征值**, 称 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\mathcal{A}$ 的属于特征值 λ_0 的一个**特征向量**

定义2: 特征子空间

设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, 令

$$V_{\lambda_0} := \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}\}$$

由于 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V_{\lambda_0}, k \in F$, $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, k\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0} \in V_{\lambda_0}$, 从而 V_{λ_0} 是 V 的一个子空间, 称 V_{λ_0} 为 $\mathcal{A}$ 的属于特征值 λ_0 的**特征子空间**

定理1: 不同特征值对应的特征向量线性无关

设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, λ_1, λ_2 是 $\mathcal{A}$ 的不同的特征值, V_{λ_1} 中 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, V_{λ_2} 中 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关

推广到所有特征值: 设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, λ_i 是 $\mathcal{A}$ 的不同的特征值, V_{λ_i} 中 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{1r_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{sr_s}$ 仍线性无关, $i = 1, \cdots, s$

证明 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0}$, 则 $k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_s+l_1\lambda_2\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_r\lambda_2\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0}$, 于是有 $l_1(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_r(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0}$, 由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 从而 $l_1=\cdots=l_r=0$, 易得 $k_1=\cdots=k_s=0$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关

2.4.2 矩阵的特征值与特征向量

定义3: 矩阵的特征值与特征向量

设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 若存在 $\lambda_0\in F$, 以及 F^n 中一个非零列向量 $\boldsymbol{y}$, 使得 $\boldsymbol{Ay}=\lambda_0\boldsymbol{y}$, 则称 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个**特征值**, $\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的一个**特征向量**

定理2: 有限维线性空间中的特征值与特征向量判定定理

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, $\mathcal{A}$ 在这个基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, V 中的向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在这个基下的坐标记为 $\boldsymbol{y}$, 则:

λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\mathcal{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量 $\Longleftrightarrow$

1. $\boldsymbol{Ay}=\lambda_0\boldsymbol{y},\ \lambda_0\in F$ 且 $\boldsymbol{y}\neq\mathbf{0}\in F^n$
2. λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\xi}$ 的坐标 $\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量

定理3: 特征值与特征向量求解定理

设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量 $\Longleftrightarrow$

1. $|\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})X=\mathbf{0}$ 的一个非零解, $\lambda_0\in F$
2. λ_0 是一元多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$ 在 F 中的一个根, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})X=\mathbf{0}$ 的一个非零解

定义4: 环上的特征矩阵及其行列式、特征多项式

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{pmatrix}$$

是**环 $F[\lambda]$ 上的一个矩阵**, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征矩阵**, 可定义加法、纯量乘法、乘法, 且满足与域 F 上矩阵相同的运算法则

环 $F[\lambda]$ 上的 n 级矩阵可定义行列式, 将 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的行列式:

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**

将对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 称为**线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征多项式**

方法1: 求矩阵全部特征值与特征向量

求域 F 上 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量的步骤:

1. 计算 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$

2. 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 在 F 中的全部根, 即为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值

3. 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ_i, 求齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})X=\mathbf{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$

4. 则 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_i 的全部特征向量为

$$\{k_1\boldsymbol{\alpha}_{i1}+\cdots+k_{r_i}a_{ir_i}\mid k_1,\cdots,k_{r_i}\in F,k_1\cdots k_{r_i}\neq 0\}$$

定理4: 特征多项式与特征值在相似关系下的不变性定理

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等, 从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 (重根按重数计算)

证明 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}|$
$=|\boldsymbol{P}^{-1}|\,|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{P}|\Longrightarrow|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$

定理5: 矩阵特征多项式的展开式定理

设 $\boldsymbol{A}(a_{ij})\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式:

$$f(\lambda)=\lambda^n-\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^k\sum_{1\leq j_1'<\cdots<j_k'\leq n}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}j_1' & \cdots & j_k'\\ j_1' & \cdots & j_k'\end{pmatrix}\lambda^{n-k}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|$$

证明

2.4.3 线性变换可对角化的条件

定义5: 可对角化

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, 若 V 中有一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 使得 $\mathcal{A}$ 在这个基下的矩阵为对角矩阵, 则称 $\mathcal{A}$ **可对角化**

定理6: 基于特征向量的线性变换可对角化判定定理

n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$

1. V 中存在由 $\mathcal{A}$ 的特征向量组成的一个基
2. $\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

   证明 V 中有一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 使得 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$,
   即 $(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n)$, 即 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_i = \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,\ i = 1, \cdots, n$

定理7: 基于特征子空间的线性变换可对角化判定定理

n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$

1. 所有特征子空间的基合起来, 是 V 的一个基

   证明 $\underbrace{\boldsymbol{\alpha}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{1r_1}}_{\in V_{\lambda_1}}, \cdots, \underbrace{\boldsymbol{\alpha}_{s1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{sr_s}}_{\in V_{\lambda_s}}$, $r_1 + \cdots + r_s = n$, 假如有 V_{λ_j}, $\boldsymbol{\alpha}_{j1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{jr_j}$ 不是 V_{λ_j} 的一个基, 则 V_{λ_j} 有一个向量 $\boldsymbol{\beta}_j$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_{j1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{jr_j}$ 线性表出, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_{j1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{jr_j}, \boldsymbol{\beta}_j$ 线性无关, 于是 $\boldsymbol{\alpha}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{1r_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{jr_j}, \boldsymbol{\beta}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{sr_s}$ 仍线性无关, 而其向量个数为 $n+1$, 产生矛盾, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_j}$ 是 V_{λ_i} 的一个基, $i = 1, \cdots, s$

2. $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 $\mathcal{A}$ 所有不同的特征值

3. $\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_s}$

4. $V_{\lambda_j} = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})$

   证明 $\boldsymbol{\alpha}_j \in V_{\lambda_j} \Longleftrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_j = \lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j \Longleftrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_j - \lambda_j\mathcal{I}\boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{0} \Longleftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})\boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_j \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})$

定义6: 特征值的代数重数与几何重数

将特征值 λ_i 作为特征多项式的根的重数, 称为 λ_i 的**代数重数**; 将特征子空间 V_{λ_i} 的维数, 称为 λ_i 的**几何重数**

定理8: 基于重数的线性变换可对角化判定定理

n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$
$\mathcal{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$, 其中 $\lambda_1\neq\cdots\neq\lambda_s$; 并且特征值 λ_i 的代数重数, 等于 λ_i 的几何重数

证明

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{1r_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{sr_s})=(\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{sr_s})\begin{pmatrix}\lambda_1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&\lambda_1&&&& \\ &&&\ddots&&& \\ &&&&\lambda_s&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&\lambda_s\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow|\lambda\boldsymbol{I}-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\lambda_1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&\lambda-\lambda_1&&&& \\ &&&\ddots&&& \\ &&&&\lambda-\lambda_s&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&\lambda-\lambda_s\end{vmatrix}$$

2.4.4 矩阵的对角化

定义7: 矩阵的可对角化

设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 若 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角矩阵, 则称 $\boldsymbol{A}$ **可对角化**

定理9: 矩阵可对角化判定定理

$\boldsymbol{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$ 存在域 F 上的一个 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得:

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$$

方法2: 求可对角化矩阵的对角矩阵

....

2.5 不变子空间与线性变换的多项式

2.5.1 不变子空间的定义与例子

定义1: 不变子空间

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换, W 是 V 的一个子空间, 若从 $\boldsymbol{\alpha} \in W$ 可推出 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} \in W$, 则称 W 是 $\mathcal{A}$ 的一个**不变子空间**

不变子空间的例子

1. $\{\mathbf{0}\}, V$ 都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 称为**平凡的不变子空间**

2. $\mathcal{A}$ 的特征子空间、$\operatorname{Ker}\mathcal{A}$、$\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 均是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间
证明 $\boldsymbol{\alpha} \in V_{\lambda_1} \Longrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha} \in V_{\lambda_1}$; $\boldsymbol{\beta} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$; $\mathcal{A}\boldsymbol{\gamma} \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$ $\Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{A}\boldsymbol{\gamma}) \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$

3. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \operatorname{Hom}(V, V)$, 若 $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, 则 $\mathcal{B}$ 的特征子空间、$\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ 和 $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ 均是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间
证明 $\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker}\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{B}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}$; $\mathcal{B}\boldsymbol{\beta} \in \operatorname{Im}\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}) \in \operatorname{Im}\mathcal{B}$; 设 V_{μ_1} 是 $\mathcal{B}$ 的一个特征子空间, $\boldsymbol{\gamma} \in V_{\mu_1}$ $\Longrightarrow \mathcal{B}\boldsymbol{\gamma} = \mu_1\boldsymbol{\gamma} \Longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}\boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{\gamma}) = \mu_1\mathcal{A}\boldsymbol{\gamma} \Longrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\gamma} \in V_{\mu_1}$

4. $\mathcal{A}$ 的不变子空间的交与和, 仍是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间

5. 设 $W = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle$ 是 V 的一个子空间, 则:
W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 $\Longleftrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_i \in W,\ i = 1, \cdots, s$

2.5.2 线性变换的分块对角矩阵表示

定义2: 限制变换

设 W 是 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间, $\mathcal{A}|_W$ 满足: $\forall \boldsymbol{\alpha} \in W, (\mathcal{A}|_W)\boldsymbol{\alpha} = \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}$, 即对应法则不变, 仅将定义域限制到 W 上, 则称 $\mathcal{A}|_W$ 为 $\mathcal{A}$ 在 W 上的一个**限制变换**

易证, $\mathcal{A}|_W$ 是 W 上的一个线性变换

定理1: 基于不变子空间的分块对角矩阵结构定理

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, 满足:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{1r_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{sr_s})=(\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{sr_s})\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}$$

即 $\mathcal{A}$ 在基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为一个分块对角矩阵, 其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是 r_i 级的矩阵, $i=1,\cdots,s$

$\Longleftrightarrow W_1=\langle\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{1r_1}\rangle,\cdots,W_s=\langle\boldsymbol{\alpha}_{s1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{sr_s}\rangle$ 是 $\mathcal{A}$ 的非平凡不变子空间, 且 $V=\bigoplus\limits_{i=1}^{s}W_i$, $\boldsymbol{A}_i$ 是 $\mathcal{A}|_{W_i}$ 在 W_i 的基 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$ 下的矩阵, $i=1,\cdots,s$, 即:

$$(\mathcal{A}|_{W_i})(\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir_i})=(\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir_i})\boldsymbol{A}_i$$

$$\cdots$$

2.5.3 零化多项式与 Hamilton-Cayley 定理

定义3: 线性变换的多项式

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换, 则表达式:

$$b_m\mathcal{A}^m+\cdots+b_1\mathcal{A}+b_0\mathcal{I}$$

称为**线性变换 $\mathcal{A}$ 的一个多项式**

$F[\mathcal{A}]:=\{\mathcal{A}\text{ 的多项式}\}\subseteq\mathrm{Hom}(V,V)$, 根据域 F 上一元多项式环 $F[x]$ 的通用性质, 不定元 x 可以用 $F[\mathcal{A}]$ 的任一元素代入, 保持加法与乘法运算

易证 $F[\mathcal{A}]$ 对于减法、乘法均封闭, 因此 $F[\mathcal{A}]$ 是 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 的一个子环, 且是一个有单位元 $\mathcal{I}$ 的交换环; $F\mathcal{I}:=\{k\mathcal{I}\mid k\in F\}=\{\mathcal{K}\mid k\in F\}$ 是 $F[\mathcal{A}]$ 的一个子环, 且有单位元 $\mathcal{I}$; 设 $\tau:F\to F\mathcal{I},k\mapsto k\mathcal{I}=\mathcal{K}$, 易证, τ 是 F 到 $F\mathcal{I}$ 的一个环同构映射

定理2: 基于多项式互素的核空间直和分解定理

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换, $\mathcal{A}$ 的任何一个多项式 $f(\mathcal{A})$都与 $\mathcal{A}$ 可交换, 因此 $\mathrm{Ker}\,f(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间

在 $F[x]$ 中, $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, 且 $f_1(x),f_2(x)$ 互素, 则:

$$\mathrm{Ker}\,f(\mathcal{A})=\mathrm{Ker}\,f_1(\mathcal{A})\oplus\mathrm{Ker}\,f_2(\mathcal{A})$$

推论: $f(x)=f_1(x)\cdots f_s(x)$, 且 $f_1(x),\cdots,f_s(x)$ 两两互素, 则:

$$\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})=\bigoplus_{i=1}^{s}\operatorname{Ker} f_i(\mathcal{A})$$

证明 $\Longrightarrow f(\mathcal{A})=f_1(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1\in\operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A})\Longrightarrow f_2[(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})\boldsymbol{\alpha}_1]=f_2(\mathcal{A})(\mathbf{0})=\mathbf{0}$

$\Longrightarrow f(\mathcal{A})\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1\in\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$

$\Longrightarrow\operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A})\subseteq\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$, 同理 $\operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})\subseteq\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$

由于 $f_1(x),f_2(x)$ 互素, 因此存在 $u(x),v(x)\in F[x]$, 使得 $u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x)=1$

x 用 $\mathcal{A}$ 代入, 有 $u(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})+v(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})=\mathcal{I}$, 于是

定义4: 零化多项式

设 $\mathcal{A}\in\operatorname{Hom}(V,V),f(x)\in F[x]$, 若 $f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$, 则称 $f(x)$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个**零化多项式**

设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(F),f(x)\in F[x]$, 若 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$, 则称 $f(x)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个**零化多项式**

设 $\mathcal{A}\in\operatorname{Hom}(V,V),\dim V=n$, $\mathcal{A}$ 在 V 的一个基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $f(x)$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个零化多项式 $\Longleftrightarrow f(x)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个零化多项式

引例: 投影变换的应用举例

环 $f(\lambda)$ 上的矩阵可以写为 λ 的幂乘域 F 上的矩阵之和

…………………………………………………………………………

定理3: Hamilton-Cayley 定理

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个零化多项式

2. 设线性变换 $\mathcal{A}\in\operatorname{Hom}(V,V)$, $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个零化多项式

证明 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^*(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{I}=f(\lambda)\boldsymbol{I}$

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{pmatrix}\Longrightarrow(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^*=\begin{pmatrix}g_{11}(\lambda) & \cdots & g_{n1}(\lambda)\\ \vdots & & \vdots\\ g_{1n}(\lambda) & \cdots & g_{nn}(\lambda)\end{pmatrix}$$

其中, $\deg g_{ij}(\lambda)\le n-1$, 于是可以将伴随矩阵分解为:

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^*=\lambda^{n-1}\boldsymbol{B}_{n-1}+\lambda^{n-2}\boldsymbol{B}_{n-2}\cdots+\lambda\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_0$$

其中 $\boldsymbol{B}_i \in \boldsymbol{M}_n(F), i=0,1,\cdots,n-1$, 且该式表法唯一
设 $f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$,

$$\begin{aligned}f(\lambda)\boldsymbol{I}&=(\lambda^{n-1}\boldsymbol{B}_{n-1}+\cdots+\lambda\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_0)(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\\&=\lambda^n\boldsymbol{B}_{n-1}+\cdots+\lambda^2\boldsymbol{B}_1+\lambda\boldsymbol{B}_0-\lambda^{n-1}\boldsymbol{B}_{n-1}\boldsymbol{A}-\cdots-\lambda\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{A}\\&=\lambda^n\boldsymbol{B}_{n-1}+\lambda^{n-1}(\boldsymbol{B}_{n-2}-\boldsymbol{B}_{n-1}\boldsymbol{A})+\cdots+\lambda(\boldsymbol{B}_0-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A})-\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{A}\\&=\lambda^n\boldsymbol{I}+\lambda^{n-1}a_{n-1}\boldsymbol{I}+\cdots+\lambda a_1\boldsymbol{I}+a_0\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

则: $\boldsymbol{B}_{n-1}=\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{B}_{n-2}-\boldsymbol{B}_{n-1}\boldsymbol{A}=a_{n-1}\boldsymbol{I},\ \cdots,\ \boldsymbol{B}_0-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{I},\ -\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{A}=a_0\boldsymbol{I}$
对于上述等式, 依次右乘 $\boldsymbol{A}^n,\ \boldsymbol{A}^{n-1},\ \cdots,\ \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I}$, 再全部相加, 得到:

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}=f(\boldsymbol{A})$$

定理4: 根子空间直和分解定理

在 $F[\lambda]$ 中, $f(\lambda)=p_1^{r_1}(\lambda)\cdots p_s^{r_s}(\lambda)$, 其中 $p_1(\lambda),\cdots,p_s(\lambda)$是域 F 上两两不等的首一不可约多项式, 由于 $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})=\operatorname{Ker}(\mathcal{O})=V$, 于是有:

$$V=\bigoplus_{i=1}^{s}\operatorname{Ker}[p_i^{r_i}(\mathcal{A})]$$

若在 $F(\lambda)$ 中, $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s\in F$ 两两不等, 则:

$$V=\bigoplus_{j=1}^{s}\operatorname{Ker}[(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{r_j}]$$

将 $\operatorname{Ker}[(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{r_j}]$ 称为 $\mathcal{A}$ 的**根子空间**, $j=1,\cdots,s$

2.5.4 最小多项式

定义5: 线性变换的最小多项式

设 $\mathcal{A}\in\operatorname{Hom}(V,V)$, 在 $\mathcal{A}$ 的所有非零的零化多项式中, 次数最低且首项系数为 1 的多项式, 称为 $\mathcal{A}$ 的**最小多项式**

最小多项式的性质

1. $\mathcal{A}$ 的最小多项式是唯一的
2. 设 $m(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 的最小多项式, 则 $m(\lambda)\mid g(\lambda)\Longleftrightarrow g(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个零化多项式
   证明 $m(\lambda)$ 整除 $g(\lambda)\Longrightarrow g(\lambda)=h(\lambda)m(\lambda)\Longrightarrow g(\mathcal{A})=h(\mathcal{A})\mathcal{O}=\mathcal{O}$;

$g(\lambda)=h(\lambda)m(\lambda)+r(\lambda),\ \deg r(\lambda)<\deg m(\lambda)$, 假设 $r(\lambda)\neq 0$, 则 λ 用 $\mathcal{A}$ 代入, 有 $g(\mathcal{A})=h(\mathcal{A})m(\mathcal{A})+r(\mathcal{A})=\mathcal{O}+r(\mathcal{A})=r(\mathcal{A})=\mathcal{O}$, 于是 $r(\lambda)$ 也是零化多项式, 这与最小多项式定义矛盾, 因此 $r(\lambda)=0$

3. $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与最小多项式 $m(\lambda)$ 在域 F 中有相同的根 (重数可以不同), 且不随域的扩大而改变

定义6: 矩阵的最小多项式

设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 在 $\boldsymbol{A}$ 的所有非零的零化多项式中, 次数最低且首项系数为 1 的多项式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**最小多项式**

定理5: 线性变换与矩阵的最小多项式等价定理

设 $\mathcal{A}\in\mathrm{Hom}(V,V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的一个基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则 $\mathcal{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的最小多项式

推论: $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与最小多项式 $m(\lambda)$ 在 F 中有相同的根 (重数可以不同), 且不随域的扩大而改变

定理6: 最小多项式在相似关系下的不变性定理

相似矩阵有相同的最小多项式

证明 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$;
设 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 存在唯一的线性变换 $\mathcal{A}$, 使得 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$, 令 $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{S}$, 则 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{B}\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$

定理7: 线性变换最小多项式的分解定理

设 $\dim V=n$, $\mathcal{A}\in\mathrm{Hom}(V,V)$, $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s,\ W_i$ 均为 $\mathcal{A}$ 的非平凡不变子空间, $\mathcal{A}|_{W_j}$ 的最小多项式为 $m_j(\lambda),\ j=1,\cdots,s$, 则 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 为:

$$m(\lambda)=[m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)]$$

推论: 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 且 $\boldsymbol{A}_j$ 的最小多项式为 $m_j(\lambda),\ j=1,\cdots,s$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)=[m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)]$

证明 任取 $\mathcal{A}$ 的一个零化多项式 $q(\lambda)$, 则 $q(\mathcal{A})=\mathcal{O}$
$\forall\boldsymbol{\alpha}_j\in W_j,\ q(\mathcal{A}|_{W_j})\boldsymbol{\alpha}_j=\mathcal{O}\boldsymbol{\alpha}_j=\mathbf{0}$, 于是 $q(\mathcal{A}|_{W_j})=\mathcal{O}$, 从而 $q(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 的一个零化多

项式, 因此 $m(\lambda) \mid q(\lambda)$, $j=1,\cdots,s$, 于是 $q(\lambda)$ 是 $m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)$ 的一个公倍式, 即 $\{\mathcal{A}$ 的非零零化多项式$\}=$

2.5.5 幂零变换

定义7: 幂零变换、幂零指数

若有 $l\in\mathbb{N}^*$ 使得 $\mathcal{A}^l=\mathcal{O}$, 则称为**幂零变换**, 使得 $\mathcal{A}^l=\mathcal{O}$成立的最小正整数 l 称为 $\mathcal{A}$ 的**幂零指数**

定理8: 基于最小多项式的幂零变换判定定理

设 $\mathcal{A}$ 是幂零指数为 l 的幂零变换, 则 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)=\lambda^l$

证明 $\mathcal{A}^l=\mathcal{O}\Longrightarrow\lambda^l$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个零化多项式, 当 $0<t<l$ 时, $\mathcal{A}^t\neq\mathcal{O}\Longrightarrow\lambda^l$ 不是零化多项式, 因此 $m(\lambda)=\lambda^l$

定理9: 基于最小多项式的可对角化判定定理

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 $\mathcal{A}$ 的全部特征值, 则 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$, 即 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可以分解为不同的一次因式的乘积

推论1: 幂零指数 $l>1$ 的幂零变换, 一定不可对角化

推论2: 幂等变换一定可对角化

证明 $V_{\lambda_j}=\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})\Longleftrightarrow\forall\boldsymbol{\alpha}_j\in V_{\lambda_j},(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})\boldsymbol{\alpha}_j=\left[\mathcal{A}|_{V_{\lambda_j}}-\lambda_j(\mathcal{I}|_{V_{\lambda_j}})\right]\boldsymbol{\alpha}_j=\mathbf{0}\Longleftrightarrow\mathcal{A}|_{V_{\lambda_j}}-\lambda_j(\mathcal{I}|_{V_{\lambda_j}})=\mathcal{O}\Longleftrightarrow\lambda-\lambda_j$ 是 $\mathcal{A}|_{V_{\lambda_j}}$ 的一个零化多项式, 由于最小多项式非零, $\mathcal{A}|_{V_{\lambda_j}}$ 的最小多项式为 $\lambda-\lambda_j\Longleftrightarrow m(\lambda)=[\lambda-\lambda_1,\cdots,\lambda-\lambda_s]$, $j=1,\cdots,s$

....

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, $\mathcal{A}$ 的最小多项式为 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$, 其中 $\lambda_1\neq\cdots\neq\lambda_s$, 则 $V=\mathrm{Ker}\left((\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})^{l_1}\right)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}\left((\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{I})^{l_s}\right)$, 令 $W_j=(\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{I})^{l_s}$, $\forall\boldsymbol{\alpha}_j\in W_j$, $(\mathcal{A}|_{W_j}-\lambda_j\mathcal{I}|_{W_j})^{l_j}\boldsymbol{\alpha}_j=\mathbf{0}$, 于是 $(\mathcal{A}|_{W_j}-\lambda_j\mathcal{I}|_{W_j})^{l_j}=\mathcal{O}$, 从而 $(\lambda-\lambda_j)^{l_j}$ 是 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 的一个零化多项式, 因此 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 的一个最小多项式 $m_j(\lambda)=(\lambda-\lambda_j)^{t_j}$, $t_j\leq l_j$, 于是 $m(\lambda)=[(\lambda-\lambda_1)^{t_1},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{t_s}]=(\lambda-\lambda_1)^{t_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{t_s}$, 据唯一因式分解定理, $t_j=l_j$, 因此 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 的最小多项式 $m_j(\lambda)=(\lambda-\lambda_j)^{l_j}$

设 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 在 W_j 的一个基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}_j$, 令 $\mathcal{B}_j=\mathcal{A}|_{W_j}-\lambda_j\mathcal{I}|_{W_j}$, 则 $\mathcal{B}^{l_j}=\mathcal{O}$, 因此 $\mathcal{B}_j$ 是 W_j 上的一个幂零变换, 幂零指数为 l_j, $\mathcal{B}_j$ 在上述基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}_j-\lambda_j\boldsymbol{I}$

2.6 Jordan 标准型

对于线性变换的矩阵表示, 最理想的简单形式为对角矩阵, 但并非每一个矩阵都可对角化. 对于不可对角化的矩阵, Jordan 标准型为为其最简单的形式, Jordan 标准形是对对角化的扩展. 在复数域上, 任何一个 n 级矩阵都可以化为一个 Jordan 形矩阵, 即矩阵的 Jordan 标准型.

2.6.1 幂零变换的 Jordan 标准型

引理: 幂零变换下的像线性无关

设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, 若 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, $\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, $\mathcal{A}^m\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, $m \in \mathbb{N}^*$, 则 $\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关

证明 设 $k_0\boldsymbol{\alpha} + k_1\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + k_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 依次做如下变换:

$$\mathcal{A}^{m-1}(k_0\boldsymbol{\alpha} + k_1\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + k_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}) = k_0\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \Longrightarrow k_0 = 0$$

$$\mathcal{A}^{m-2}(k_0\boldsymbol{\alpha} + k_1\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + k_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}) = k_1\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \Longrightarrow k_1 = 0$$

$$\cdots$$

$\Longrightarrow k_0 = k_1 = \cdots = k_{m-1} = 0 \Longrightarrow$ 像 $\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的

定义1: Jordan 块

设域 F 上 t 级矩阵形如:

$$\mathbf{J}_t(a) := \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

则称该矩阵为**主对角元为 a 的一个 t 级 Jordan 块**

定义2: Jordan 形矩阵

由若干个 Jordan 块组成的分块对角矩阵, 称为一个 **Jordan 形矩阵**

定义3: 循环子空间、强循环子空间

域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换 $\mathcal{A}$, 如果存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathcal{A}^{t-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关, 且 $\mathcal{A}^r\boldsymbol{\alpha} \in \langle\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathcal{A}^{t-1}\boldsymbol{\alpha}\rangle$, 则称 $\langle\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathcal{A}^{t-1}\boldsymbol{\alpha}\rangle$ 是一个 **$\mathcal{A}$-循环子**

空间

若一个 $\mathcal{A}$-循环子空间还满足 $\mathcal{A}^t=\mathbf{0}$, 则称是一个 **$\mathcal{A}$-强循环子空间**

定理1: 幂零变换判定定理

设 $\mathcal{B}$ 是域 F 上 r 维线性空间 W 上的一个幂零变换, 其幂零指数为 $l\le r$

证明 $\mathcal{B}^l=\mathcal{O}$, $\mathcal{B}^{l-1}\neq\mathcal{O}$, 于是 $\exists\boldsymbol{\xi}\in W(\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0})$, s.t. $\mathcal{B}^{l-1}\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$, $\mathcal{B}\boldsymbol{\xi}\equiv\mathbf{0}$, 根据 Lem in 2.6.1, 有 $\mathcal{B}^{l-1}\boldsymbol{\xi},\cdots,\mathcal{B}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}$ 线性无关, 从而 $l\le\dim W=r$

1. $\langle\mathcal{B}^{l-1}\boldsymbol{\xi},\cdots,\mathcal{B}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle$ 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间, $\mathcal{B}|_{\langle\mathcal{B}^{l-1}\boldsymbol{\xi},\cdots,\mathcal{B}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle}$ 在基 $\mathcal{B}^{l-1}\boldsymbol{\xi},\cdots,\mathcal{B}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}$ 下的矩阵为一个 Jordan 块:

$$\mathbf{J}_l(0)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

2. $\langle\mathcal{B}^{l-1}\boldsymbol{\xi},\cdots,\mathcal{B}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle$ 是一个 $\mathcal{B}$-强循环子空间

定理2: 幂零变换的强循环子空间直和分解定理

设 $\mathcal{B}$ 是域 F 上 r 维线性空间 W 上的一个幂零变换, 其幂零指数为 l, 则 W 可分解为 $\dim W_0$ 个 $\mathcal{B}$-强循环子空间的直和, 其中 W_0 为 $\mathcal{B}$ 的属于特征值 0 的特征子空间

证明 对维数 r 做第二数学归纳法: 当 $r=1$ 时, $W=\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle$, 此时 $l=1$, 于是 $\mathcal{B}=\mathcal{O}$, $\mathcal{O}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, 因此 $\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle$ 是一个 $\mathcal{O}$-强循环子空间; 假设对于维数小于 r 的线性空间, 命题为真; 若 $l=1$, 则 $\mathcal{B}=\mathcal{O}$, W 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1\cdots\boldsymbol{\alpha}_r$, 则 $W=\langle\boldsymbol{\alpha}_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\boldsymbol{\alpha}_r\rangle$, 由于 $\mathcal{O}\boldsymbol{\alpha}_j=\mathbf{0}$, 因此 $\langle\boldsymbol{\alpha}_j\rangle$ 是一个 $\mathcal{O}$-强循环子空间; 假设 $l>1$, 此时 $\mathcal{B}\neq\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$ 有特征值 0, 于是 $\mathcal{B}$ 的属于特征值 0 的特征子空间 $W_0\neq\{\mathbf{0}\}$, 由于 $\mathcal{B}\neq\mathcal{O}$, 因此 $W_0\neq W$, 从而 $1\le\dim(W/W_0)=\dim W-\dim W_0<\dim W=r$

$\tilde{\mathcal{B}}:W/W_0\to W/W_0,\boldsymbol{\alpha}+W_0\mapsto\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}+W_0$, 易证, $\tilde{\mathcal{B}}$ 是 W/W_0 上的一个线性变换, $\forall\boldsymbol{\alpha}+W_0\in W/W_0$, 有$\tilde{\mathcal{B}}^l(\boldsymbol{\alpha}+W_0)=\mathcal{B}^l\boldsymbol{\alpha}+W_0=\mathcal{O}\boldsymbol{\alpha}+W_0=W_0$, 因此 $\tilde{\mathcal{B}}$ 是 W/W_0 上的一个幂零变换, 对 W/W_0 用归纳假设, 得:

$W/W_0=\underbrace{\langle\tilde{\mathcal{B}}^{t_1-1}(\boldsymbol{\xi}_1+W_0),\cdots,(\boldsymbol{\xi}_1+W_0)\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\tilde{\mathcal{B}}^{t_s-1}(\boldsymbol{\xi}_s+W_0),\cdots,(\boldsymbol{\xi}_s+W_0)\rangle}_{\text{均为 }\tilde{\mathcal{B}}\text{-强循环子空间}}$

$\Longrightarrow$ 商空间得一个基为 $\mathcal{B}^{t_1-1}\boldsymbol{\xi}_1+W_0,\cdots,\boldsymbol{\xi}_1+W_0,\cdots,\mathcal{B}^{t_s-1}\boldsymbol{\xi}_s+W_0,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s+W_0$,

令 $U=\langle\mathcal{B}^{t_1-1}\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\mathcal{B}^{t_s-1}\boldsymbol{\xi}_s,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s\rangle=\langle\mathcal{B}^{t_1-1}\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_1\rangle,\cdots,\langle\mathcal{B}^{t_s-1}\boldsymbol{\xi}_s,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s\rangle$

By Thm 2 in 1.8, $W = U \oplus W_0$, 由于 $\mathcal{B}^{t_1}\boldsymbol{\xi}_1 + W_0 = \tilde{\mathcal{B}}^{t_1}(\boldsymbol{\xi}_1 + W_0) = W_0 \Longrightarrow \mathcal{B}^{t_1} \in W_0 \Longrightarrow \mathcal{B}^{t_1+1}\boldsymbol{\xi}_1 = \mathcal{B}\underbrace{(\mathcal{B}^{t_1}\boldsymbol{\xi}_1)}_{\in W_0} =$

定理3: 幂零变换的 Jordan 标准型判定定理

设 $\mathcal{B}$ 是域 F 上的一个 r 维线性空间 W 上的一个幂零变换, 其幂零指数为 l, 则在 W 中存在一个基, 使得 $\mathcal{B}$ 在此基下的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是一个 Jordan 形矩阵, 并且

1. 每一个 Jordan 块的主对角元为 0;
2. 每一个 Jordan 块级数不超过 l;
3. Jordan 块的总数为 $\dim W_0 = \dim(\operatorname{Ker}\mathcal{B}) = r - \operatorname{rank}(\mathcal{B})$;
4. t 级 Jordan 块的个数

$$N(t) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^{t-1}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^{t+1}) - 2\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^{t}) = \operatorname{rank}(\mathcal{B}^{t-1}) + \operatorname{rank}(\mathcal{B}^{t+1}) - 2\operatorname{rank}(\mathcal{B}^{t})$$

证明 Jordan 块是循环位移矩阵,

$\operatorname{rank}[\mathbf{J}_t(0)] = t-1,\ \operatorname{rank}[\mathbf{J}_t(0)^2] = t-2,\ \cdots,\ \operatorname{rank}[\mathbf{J}_t(0)^{t-1}] = 1,\ \operatorname{rank}(\mathbf{J}_t(0)^t) = 0$

$\operatorname{rank}(\mathcal{B}) = \sum_{t=1}^{l} N(t)\operatorname{rank}(\mathbf{J}_t) = \sum_{t=1}^{l} N(t) \times (t-1)$

$\operatorname{rank}(\mathcal{B}^2) =$

$\operatorname{rank}(\mathcal{B}^{t-1}) = N(t)$

$\operatorname{rank}(\mathcal{B}^{t}) =$

$\operatorname{rank}(\mathcal{B}^{t+1}) =$

这个 Jordan 形矩阵 $\boldsymbol{B}$, 称为**幂零变换 $\mathcal{B}$ 的 Jordan 标准型**, 除了 Jordan 块的排列次序外, $\mathcal{B}$ 的 Jordan 标准型是唯一的

推论: 设 $\boldsymbol{B}$ 是域 F 上的一个幂零矩阵, 其幂零指数为 l, 则 $\mathcal{B}$ 一定相似于一个 Jordan 形矩阵, 每一个 Jordan 块的主对角元均为 0, 级数不超过 l, 总数为 $r - \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$, $N(t) = \operatorname{rank}[\boldsymbol{B}^{t-1}] + \operatorname{rank}[\boldsymbol{B}^{t+1}] - 2\operatorname{rank}[\boldsymbol{B}^{t}]$, 这个 Jordan 形矩阵称为**幂零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 Jordan 标准型**, 除 Jordan 块的排列顺序外, 是唯一的

2.6.2 线性变换与矩阵的 Jordan 标准型

定理4: 线性变换的 Jordan 标准型判定定理

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, 如果 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式为 $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}$, 则

1. V 中有一个基, 使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为一个 Jordan 形矩阵

2. 其主对角线上的元素, 是 $\mathcal{A}$ 的全部特征值

3. 主对角元为 λ_j 的 Jordan 块的总数 $N_j = n - \operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})$

4. 主对角元为 λ_j 的 t 级 Jordan 块的个数为
$N_j(t) = \operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{t-1} + \operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{t+1} - 2\operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^t,\ 1 \le t \le l_j$

这个 Jordan 形矩阵 $\boldsymbol{A}$, 称为**线性变换 $\mathcal{A}$ 的 Jordan 标准型**, 除了 Jordan 块的排列次序外, $\mathcal{A}$ 的 Jordan 标准型是唯一的

推论: 矩阵 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_n(F)$, 其最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 能分解为一次因式的乘积, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个 Jordan 形矩阵, 其主对角线元素为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值, 主对角元为 λ_j 的 Jordan 块的总数 $N_j = n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{I})$, t 级 Jordan 块的个数为
$N_j(t) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} - \lambda_j\boldsymbol{I})^{t-1} + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} - \lambda_j\boldsymbol{I})^{t+1} - 2\operatorname{rank}(\boldsymbol{A} - \lambda_j\boldsymbol{I})^t,\ 1 \le t \le l_j$, 这个 Jordan 形矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型, 除 Jordan 块的排列顺序外, 是唯一的

证明 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 $\mathcal{A}$ 所有不同的特征值, 且 $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}\left[(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{I})^{l_i}\right] = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} W_i$, 令 $\mathcal{B} = \mathcal{A}|_{W_j} - \lambda_j \mathcal{I}|_{W_j}$, 则 $\mathcal{B}_j$ 是 W_j 上的幂零变换, 其幂零指数为 l_j, W_j 中取一个基, 使得 $\mathcal{B}_j$ 在此基下的矩阵 $\boldsymbol{B}_j$ 是一个 Jordan 形矩阵, 设 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 在 W_j 此基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}_j$, 则 $\boldsymbol{A}_j = \lambda_j \boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}_j$, 于是 $\boldsymbol{A}_j$ 是主对角元为 λ_j 的 Jordan 形矩阵, 因此, $\mathcal{A}$ 在 W_j 的全部的基合起来组成的 V 的一个基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 Jordan 形矩阵.
$\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A}|_{W_j} - \lambda_j\mathcal{I}|_{W_j})^m \iff \boldsymbol{\alpha} \in W_j$ 且 $(\mathcal{A}|_{W_j} - \lambda_j\mathcal{I}|_{W_j})^m\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{\alpha} \in W_j$ 且 $(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^m\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^m \implies N(j) = \dim(\operatorname{Ker}\mathcal{B}_j) = \dim[\operatorname{Ker}(\mathcal{A}|_{W_j} - \lambda_j\mathcal{I}|_{W_j})] = \dim[\ker(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})] = \dim V - \operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})$
$N_j(t) = \operatorname{rank}(\mathcal{B}_j^{t-1}) + \operatorname{rank}(\mathcal{B}_j^{t+1}) - 2\operatorname{rank}(\mathcal{B}_j^t) = 2\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{B}^t) - \dim(\operatorname{Ker}\mathcal{B}^{t-1}) - \dim(\operatorname{Ker}\mathcal{B}^{t+1})$
$= 2\dim[\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^t] - \dim[\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{t-1}] - \dim[\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{t+1}]$
$= \operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{t-1} + \operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{t+1} - 2\operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^t$

定理5: 线性变换存在 Jordan 标准型的条件

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, 则 $\mathcal{A}$ 有 Jordan 标准型 $\iff$

1. $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为一次因式的乘积

2. $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为一次因式的乘积

定理6: 矩阵存在 Jordan 标准型的条件

设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_n(F)$, $\boldsymbol{A}$ 相似于一个 Jordan 形矩阵 $\iff$
$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 或最小多项式 $m(\lambda)$, 在 $F[\lambda]$ 可以分解为一次因式的乘积

定理7: Jordan 标准型定理

复方阵一定有 Jordan 标准型

根据代数基本定理与复系数多项式唯一因式分解定理可得

推论: 任意一个 n 级复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都相似于一个 Jordan 形矩阵 $\mathbf{J}$, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得:

$$\mathbf{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

定理8: 矩阵相似判定定理

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 如果二者的特征多项式或最小多项式, 在 $F[\lambda]$ 可以分解为一次因式的乘积, 则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Longleftrightarrow$
$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的 Jordan 标准型 (除 Jordan 块的排列顺序外)

证明 设 $\boldsymbol{A}\sim\mathbf{J}_1$, $\boldsymbol{B}\sim\mathbf{J}_2$, 则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Longleftrightarrow\mathbf{J}_1\sim\mathbf{J}_2\Longleftrightarrow\mathbf{J}_1$ 与 $\mathbf{J}_2$ 都是 $\mathcal{A}$ 的 Jordan 标准型 $\Longleftrightarrow\mathbf{J}_1$ 与 $\mathbf{J}_2$ 是一样的 (除 Jordan 块排列顺序外)

定理9: 复矩阵相似判定定理

两个 n 级复矩阵相似 $\Longleftrightarrow$ 二者有相同的 Jordan 标准型 (除 Jordan 块排列顺序外)

2.7 线性函数与对偶空间

定义1: 线性函数

设 f 是域 F 上的线性空间 V 到 F 的一个线性映射, 即 f 是 V 到 F 的一个映射, 且满足:

1. $f(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha})+f(\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ (保持加法);

2. $f(k\boldsymbol{\alpha})=kf(\boldsymbol{\alpha}),\ \forall k\in F,\boldsymbol{\alpha}\in V$ (保持纯量乘法),

则称 f 为 V 上的一个**线性函数**

设 $\dim V=n$, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, $\forall\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n\in V$, 则 $f(\boldsymbol{\alpha})=x_1f(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+x_nf(\boldsymbol{\alpha}_n)$, 将此式称为 f 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**表达式**

线性函数的例子

1. 矩阵的迹 $\mathrm{tr}:\boldsymbol{M}_n(F)\to F,\boldsymbol{A}=(a_{ij})\mapsto\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ 是 $\boldsymbol{M}_n(F)$ 上的一个线性函数, 称为**迹函数**

2. 给定 $a_1,\cdots,a_n\in F$, $f:F^n\to F,\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mapsto\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i$ 是 F^n 上的一个线性函数, 称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的**一次齐次函数**

定理1: 线性函数的构造

任给 $a_1,\cdots,a_n$, 存在唯一的线性函数 f, 使得 $f(\boldsymbol{\alpha}_i)=a_i$, $i=1,\cdots,n$, 于是 $f(\boldsymbol{\alpha})=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$

定义2: 对偶空间

$\mathrm{Hom}(V,F)=\{V\ 上线性函数\}$ 是域 F 上的线性空间, 称为 V 上的**线性函数空间**

若 V 是有限维的, 则将 $\mathrm{Hom}(V,F)$ 记作 V^*, 称 V^* 为 V 的**对偶空间**

定理2: 对偶空间的维数公式与同构

设 $\dim V=n$, V^* 为 V 的对偶空间, 则有

$$\dim V^*=(\dim V)(\dim F)=\dim V=n$$

$$V^*\cong V$$

定义3: 对偶基

V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, V^* 的一个基 $f_1,\cdots,f_n$ 满足:

$$f_i(\boldsymbol{\alpha}_j)=\begin{cases}1,\ j=i\\0,\ j\neq i\end{cases}=\delta_{ij},\ i,j=1,\cdots,n$$

则将 $f_1,\cdots,f_n$ 称为 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的**对偶基**

证明

F 中给定 n 个元素	V 上的线性函数
$1,0,\cdots,0$	$\exists f_1$ s.t. $f_1(\boldsymbol{\alpha}_1)=1, f_1(\boldsymbol{\alpha}_j)=0, j\neq 1$
$0,1,\cdots,0$	$\exists f_2$ s.t. $f_2(\boldsymbol{\alpha}_2)=1, f_2(\boldsymbol{\alpha}_j)=0, j\neq 2$
$\vdots$	$\vdots$
$0,0,\cdots,1$	$\exists f_n$ s.t. $f_n(\boldsymbol{\alpha}_n)=1, f_n(\boldsymbol{\alpha}_j)=0, j\neq n$

设 $k_1f_1+\cdots+k_nf_n=\mathbf{0}$, 则

$$k_1f_1(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2f_2(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_nf_n(\boldsymbol{\alpha}_1)=0\Longrightarrow k_1=0$$

$$k_1f_1(\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2f_2(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_nf_n(\boldsymbol{\alpha}_2)=0\Longrightarrow k_2=0$$

$$\vdots$$

$$k_1f_1(\boldsymbol{\alpha}_n)+k_2f_2(\boldsymbol{\alpha}_n)+\cdots+k_nf_n(\boldsymbol{\alpha}_n)=0\Longrightarrow k_n=0$$

从而 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性无关, 又由于 $\dim V^*=n$, 因此 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 V^* 的一个基

向量与线性函数的坐标

1. V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i$, 则 $f_j(\boldsymbol{\alpha})=\sum\limits_{i=1}^{n}x_if_j(\boldsymbol{\alpha}_i)=x_j$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_i$
2. V^* 中任一元素 $f=\sum\limits_{j=1}^{n}k_jf_j$, 则 $f(\boldsymbol{\alpha}_i)=\sum\limits_{j=1}^{n}k_jf_j(\boldsymbol{\alpha}_i)=k_i$, 因此 $f=\sum\limits_{j=1}^{n}f(\boldsymbol{\alpha}_j)f_j$

定理3: 对偶基过渡矩阵定理

设 V 是域 F 上 n 维线性空间, V 中取两个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$, 过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 有 $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$; V^* 中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的对偶基为 $f_1,\cdots,f_n$, $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的为 $g_1,\cdots,g_n$, 过渡矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 有 $(g_1,\cdots,g_n)=(f_1,\cdots,f_n)\boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$$

证明 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&c_{1n}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&\cdots&c_{nj}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_j=\sum\limits_{i=1}^{n}c_{ij}\boldsymbol{\beta}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}g_i(\boldsymbol{\alpha}_j)\boldsymbol{\beta}_i$, 于是 $c_{ij}=g_i(\boldsymbol{\alpha}_j)$;

$(g_1,\cdots,g_n)=(f_1,\cdots,f_n)\boldsymbol{B}=(f_1,\cdots,f_n)\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1i}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{ni}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}$, 则 $g_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ji}f_j=\sum\limits_{j=1}^{n}g_i(\boldsymbol{\alpha}_j)f_j$, 于是 $b_{ji}=g_i(\boldsymbol{\alpha}_j)=c_{ij}$, 因此 $\boldsymbol{B}(j;i)=\boldsymbol{A}^{-1}(i;j)=(\boldsymbol{A}^{-1})^T(j;i)$, $i,j=1,\cdots,n$

定义4: 双重对偶空间

设 $\dim V=n$, V^* 的对偶空间为 $(V^*)^*$, 将其称为**双重对偶空间**, 简记作 V^{**}, 有:

$$\dim V^{**}=\dim V^*=\dim V$$

$$V^{**}\cong V^*\cong V$$

定理4: 双重对偶定理

V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, V^* 中关于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的对偶基为 $f_1,\cdots,f_n$, V^{**} 中关于 $f_1,\cdots,f_n$ 的对偶基记作 $\boldsymbol{\alpha}_1^{**},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n^{**}$, 有同构映射 σ,τ:

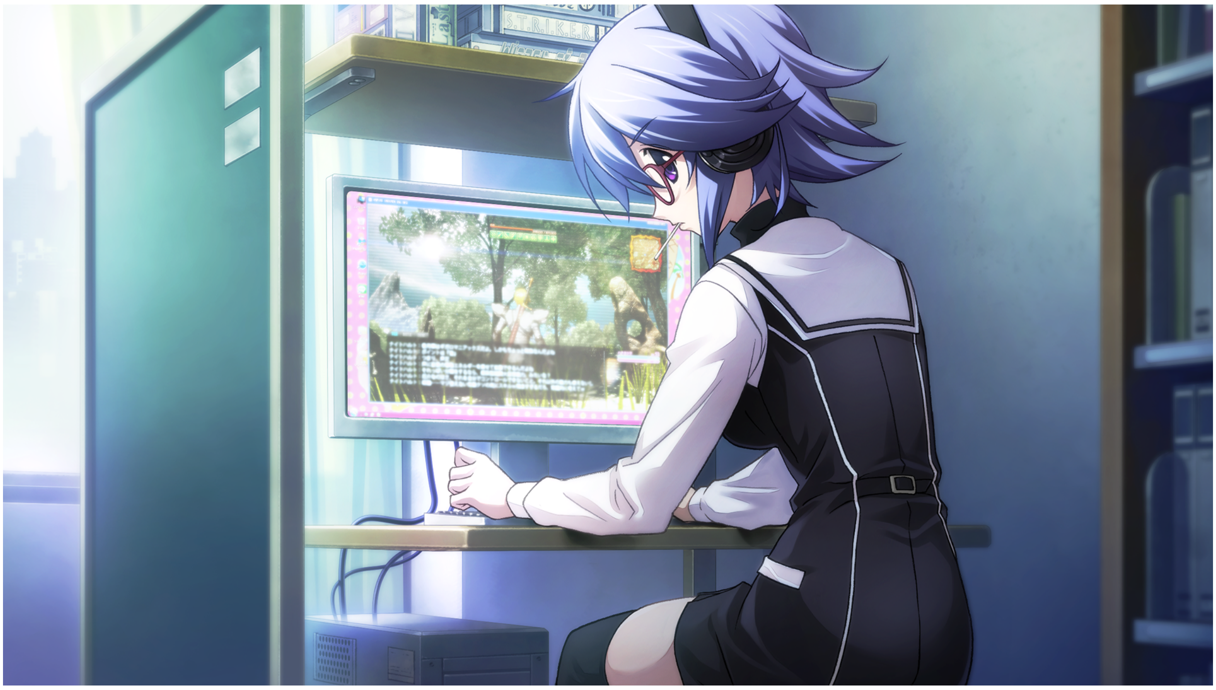
$$V\xrightarrow{\quad\sigma\quad}V^*\xrightarrow{\quad\tau\quad}V^{**}$$

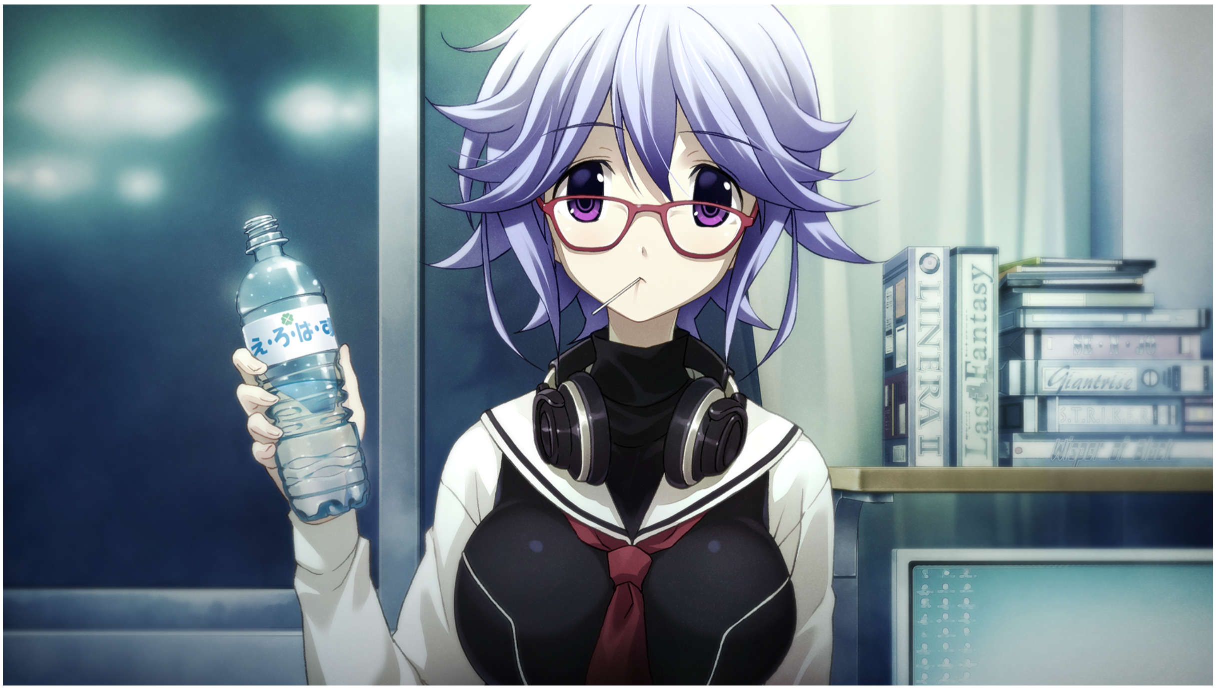
$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i\longmapsto\sum_{i=1}^{n}x_if_i\longmapsto\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i^{**}=:\boldsymbol{\alpha}^{**}$$

$$\begin{aligned}\forall f\in V^*,\ \boldsymbol{\alpha}^{**}(f)&=(\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i^{**})(f)=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i^{**}(f)=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i^{**}[\sum_{j=1}^{n}f(\boldsymbol{\alpha}_j)f_j]\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_if(\boldsymbol{\alpha}_j)\boldsymbol{\alpha}_i^{**}(f_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_if(\boldsymbol{\alpha}_j)\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_if(\boldsymbol{\alpha}_i)\\&=f(\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i)=f(\boldsymbol{\alpha})\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}^{**}(f)=f(\boldsymbol{\alpha})\end{aligned}$$

于是 V 到 V^{**} 有一个同构映射 $\tau\sigma:\boldsymbol{\alpha}\mapsto\boldsymbol{\alpha}^{**}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{**}(f)=f(\boldsymbol{\alpha})$, 这种不依赖于基的选择的同构映射, 称为**自然同构**, 可将 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{**}$ 等同, 从而可将 V 与 V^{**} 等同, 于是 V 可以看作 V^* 的对偶空间, 因此 V 与 V^* **互为对偶空间**

第三章　具有度量的线性空间





3.1 双线性函数

3.1.1 双线性函数的概念与性质

定义1: 双线性函数

设 V 是域 F 中的一个线性空间, $V\times V$ 到 F 的一个映射如果满足:

1. $f(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=k_1f(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})+k_2f(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}\in V,k_1,k_2\in F;$

2. $f(\boldsymbol{\alpha},l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2)=l_1f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1)+l_2f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_2),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\in V,l_1,l_2\in F,$

则称 f 是 V 上的一个**双线性函数**

双线性函数给出线性函数:

1. 任给 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\boldsymbol{\alpha}_L(\boldsymbol{\beta}):=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\beta}\in V$, $\boldsymbol{\alpha}_L$ 是 V 上的一个线性函数

2. 任给 $\boldsymbol{\beta}\in V$, $\boldsymbol{\beta}_R(\boldsymbol{\alpha}):=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\boldsymbol{\beta}_R$ 是 V 上的一个线性函数

定义2: 度量矩阵

设 $\dim V=n$, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)X$, $\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)Y$, 设 f 是 V 上的双线性函数, 则

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})&=f\left(\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{j=1}^n y_j\boldsymbol{\alpha}_j\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jf(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\sum_{j=1}^n\left[\sum_{i=1}^n x_if(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)\right]y_j\\
&=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n x_if(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & \sum_{i=1}^n x_if(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n)\\ \vdots & & \vdots\\ f(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=X^T\boldsymbol{A}Y
\end{aligned}$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 f 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**度量矩阵**

将 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jf(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=X^T\boldsymbol{A}Y$ 称为 f **在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的表达式**

推论 反之, 任给 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 令 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}):=X^T\boldsymbol{A}Y$, 易证 f 是 V 上的一个双线性函数, 且 f 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的度量矩阵即为 $\boldsymbol{A}$

证明

定理: 双线性函数在不同基下的矩阵

设 f 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数, V 中基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, f 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的度量矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 则有:

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

即, f 在 V 的不同的两个基下的度量矩阵, 是合同的

证明 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_j & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}$,
$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_j,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_j & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}\Longrightarrow\boldsymbol{\beta}_j=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{p}_j$,
$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_n)\\ \vdots & & \vdots\\ f(\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\beta}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\beta}_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{p}_n^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n^T\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^T$, $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$

3.1.2 矩阵的合同

定义3: 合同矩阵、合同类

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 若存在域 F 上 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是**合同**的, 记作 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$

合同关系是 $\boldsymbol{M}_n(F)$ 上的一个等价关系, 合同关系下的等价类, 称为**合同类**

定理: 合同矩阵的秩相等

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$, 则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$

证明 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}$ 可逆$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{P}$ 满秩, 从而合同不改变矩阵的秩

定义4: 矩阵秩

由于合同矩阵的秩相同, 将双线性函数 f 在 V 的一个基下度量矩阵的秩, 称为 f 的**矩阵秩**, 记作 $\mathrm{rank}_m(f)$

推论 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$, 则可以将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 看作域 F 上 n 维线性空间 V 上同一个双线性函数 f 在 V 的不同基下的度量矩阵

3.1.3 非退化双线性函数

定义5: 双线性函数的左根和右根

设 f 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数

1. $\operatorname{rad}_L V := \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0,\ \forall \boldsymbol{\beta} \in V\}$, 称为 f 在 V 中的**左根**

2. $\operatorname{rad}_L V := \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0,\ \forall \boldsymbol{\beta} \in V\}$, 称为 f 在 V 中的**左根**

易证, 二者均是 V 的子空间

定义6: 非退化双线性函数

若双线性函数 f 在 V 上的左根和右根都是 $\{\mathbf{0}\}$, 则称 f 是**非退化**的

定理: 非退化的判定

域 F 上 n 维线性空间 V 上的双线性函数 f 是非退化的 $\Longleftrightarrow$

1. f 在 V 中一个基下的度量矩阵是满秩矩阵

2. $\operatorname{rank}_m(f)n$

证明 V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, f 在此基下的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标为 X, $\boldsymbol{\beta}$ 的坐标为 Y, $\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{rad}_L V \Longleftrightarrow f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0,\ \forall \boldsymbol{\beta} \in V \Longleftrightarrow X^T \boldsymbol{A} Y = 0,\ \forall Y \in F^n \Longleftrightarrow X^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{\varepsilon}_i = 0,\ i = 1, \cdots, n \Longleftrightarrow X^T \boldsymbol{A} \Longleftrightarrow X^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{I} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}^T X = 0 \Longleftrightarrow X$ 是 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^T Z = 0$ 的一个解, $\boldsymbol{A}^T Z = 0$ 只有零解 $\Longleftrightarrow \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^T) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$

3.1.4 对称和斜对称双线性函数

定义7: 对称双线性函数与斜对称双线性函数

域 F 上线性空间 V 上的双线性函数 f:

1. 若 $f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = f(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 则称 f 是**对称**的

2. 若 $f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -f(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$, 则称 f 是**斜对称**的

定理: 对称与斜对称的判定

$\dim V = n$, f 在 V 的一个基下的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$
f 是对称的 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, f 是斜对称的 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{A}$ 是斜对称矩阵

定理:

设 f 是特征不为 2 域 F 上的 n 维线性空间 V 上的一个对称双线性函数, 则 V 中存在一个基, 使得 f 在此基下的度量矩阵是对角矩阵

推论 特征不为 2 的域 F 上 n 级对称矩阵 $\boldsymbol{A}$

证明 对线性空间的维数 n 作数学归纳法

3.2 实内积空间的结构

3.2.1 实线性空间的内积

定义1: 正定对称双线性函数

实数域上的线性空间 V 上的对称双线性函数 f, 如果满足: $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V,\ f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) \geq 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$ 时取等, 则称 f 是**正定**的

定义2: 正定矩阵

n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 若满足: $X^T\boldsymbol{A}X > 0,\ \forall X \in \mathbb{R}^n$ 且 $X \neq \boldsymbol{0}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是**正定矩阵**

定理: 双线性函数正定判定定理

n 维实线性空间 V 上的对称双线性函数 f 是正定的 $\Longleftrightarrow$
f 在 V 的一个基下的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵

定义3: 内积

实线性空间 V 上的一个正定对称双线性函数 f, 称为 V 上的一个**内积**, 将 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

定义: 实内积空间、欧几里得空间

若实线性空间 V 定义了一个内积, 则称 V 是一个**实内积空间**, 有限维的实内积空间, 称为**欧几里得空间**

定义: 标准内积

$\mathbb{R}^n$ 中, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, 令 $(X,Y) := \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i = X^TY$, 则 $(\ ,\ )$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个内积, 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的**标准内积**

证明 $(X,Y) = X^TY = X^T\boldsymbol{I}Y \Longrightarrow (\ ,\ )$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的度量矩阵是单位矩阵 $\boldsymbol{I}$, 从而 $(\ ,\ )$ 是对称的; $\forall X \in \mathbb{R}^n$ 且 $X \neq \boldsymbol{0}$, $(X,X) = X^TX = \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 > 0$, 因此 $(\ ,\ )$ 是正定对称双线性函数, 即内积

3.2.2 实内积空间的度量

设 V 是一个实内积空间

定义: 向量的长度、单位向量、单位化

V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**长度** $|\boldsymbol{\alpha}| := \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$, 有

$$|k\boldsymbol{\alpha}| = |k||\boldsymbol{\alpha}|,\ \forall k \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$$

若 $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为**单位向量**
若 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 则 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个单位向量, 称为**将 $\boldsymbol{\alpha}$ 单位化**

定理: Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz 不等式

$\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V,\ |(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关时取等

Pf. 情形1: $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 或 $\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha}$, $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}) = (0\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}) = 0(\mathbf{0}.\boldsymbol{\beta}) = |0||\boldsymbol{\beta}|$, $|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| = |(\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\alpha})| = |k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})| = |k||(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})| = |k||\boldsymbol{\alpha}|^2 = |\boldsymbol{\alpha}||k\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$;
情形2: $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 则 $\forall t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\beta} \neq t\boldsymbol{\alpha}$, 即 $t\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, $0 < (t\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}, t\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = (t\boldsymbol{\alpha}, t\boldsymbol{\alpha}) - 2(t\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = t^2\boldsymbol{\alpha}^2 - 2t(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}^2 \Longrightarrow \Delta = 4(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 - 4|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}| < 0 \Longrightarrow |(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) < |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$

推论(向量长度的三角形不等式) $|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}| \leq |\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|$

Pf. $|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = |\alpha|^2 + \underbrace{2(\alpha, \beta)}_{\leq 2|\alpha||\beta|} + |\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2$

定义: 向量的夹角

设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**夹角** $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle := \arccos \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|},\ 0 \leq \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle \leq \pi$

推论 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$

定义: 向量的正交

若 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ **正交**, 记作 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$

推论1 只有零向量与自己正交, 若 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0,\ \forall \boldsymbol{\beta} \in V$, 则 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 即内积是非退化的对称双线性函数

推论2(勾股定理) 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 则 $|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}|^2 = |\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2$

定义: 向量的距离

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**距离** $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) := |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|$, 满足:

1. $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = d(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$ (对称性);
2. $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \geq 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ 时取等 (正定性);
3. $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) \leq d(\boldsymbol{\alpha}, be) + d(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ (三角形不等式)

3.2.3 欧几里得空间的标准正交基与正交矩阵

设 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧几里得空间

定理

实内积空间中, 由两两正交的非零向量组成的集合 S, 一定是线性无关的

Pf. 任取 S 中一个有限子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$, 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$, 则 $(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_i)=(\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}_i)=k_i\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)}_{\geq 0}=0\Longrightarrow k_i=0,\ i=1,\cdots,m$

定义: 正交基、标准正交基

$\mathbb{R}^n$ 中, n 个两两正交的非零向量是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基, 称为 $\mathbb{R}^n$ 的一个**正交基**

n 个两两正交的单位向量组成 V 的一个基, 称为 V 的一个**标准正交基**

$\mathbb{R}^n$ 中指定标准内积, 有 $\begin{cases}(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_i)=1\\(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j),\ i\neq j\end{cases}$, 因此 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基

方法1: Schmidt 正交化

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个线性无关的向量组, 令:

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s-\sum_{j=1}^{s-1}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_j)}\boldsymbol{\beta}_j$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是两两正交的非零向量组, 且 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 等价

Pf. 对向量组个数 s 作数学归纳法: $s=1$ 时, $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, 命题为真; 假设 $s=k$ 时, 命题为真; $s=k+1$ 时, $\boldsymbol{\beta}_{k+1}=\boldsymbol{\alpha}_{k+1}-\sum_{j=1}^{k}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_j)}\boldsymbol{\beta}_j$

$$(\boldsymbol{\beta}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_i)=(\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_i)-\sum_{j=1}^{k}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_j)}(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_i)=(\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_i)-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i)}(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i)=0$$

因此 $\boldsymbol{\beta}_{k+1}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_i$ 正交, $i=1,\cdots,k$, 据归纳假设可得, $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k,\boldsymbol{\beta}_{k+1}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 等价, 从而 $\boldsymbol{\beta}_{k+1}\neq\mathbf{0}$, 因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k,\boldsymbol{\beta}_{k+1}$ 是两两正交的非零向量组, 据数学归纳法原理, 对一切 s 命题为真

方法2: 正交基单位化

$\mathbb{R}^n$ 中任取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \xrightarrow{\text{Schmidt 正交化}}$ 正交基 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$, 令

$$\boldsymbol{\eta}_i = \frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_i|}\boldsymbol{\beta}_i,\ i = 1, \cdots, n$$

得到 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$

定义: 内积的度量矩阵

$\mathbb{R}^n$ 中, 有唯一的内积, 这个内积在 $\mathbb{R}^n$ 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$, 称为**基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的度量矩阵**

设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 在基下坐标为 X, Y, 则 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = X^T\boldsymbol{A}Y,\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n) \end{pmatrix}$

标准正交基的性质

设 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基, $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n)X,\ \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n)Y$

1. $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = X^T\boldsymbol{I}Y = X^TY$
2. $\boldsymbol{\alpha} = \sum\limits_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}_i)\boldsymbol{\eta}_i$, 称为 **Fourier 展开**

定义: 正交矩阵

若 $\boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ 满足:

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{Q}$ 为一个**正交矩阵**

正交矩阵的性质

1. $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$
2. $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{Q}^T$ 也是正交矩阵
3. 若 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2$ 均为正交矩阵, 则 $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2$ 也是正交矩阵
   Pf. $(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2)^T(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2) = \boldsymbol{Q}_2^T\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{I}$
4. $\det(\boldsymbol{Q}) = \pm 1$
   Pf. $|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^T||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{I}| = 1$
5. 对于 $\boldsymbol{Q}$ 的所有特征值 $|\lambda| = 1$

定理: 标准正交基间的过渡矩阵

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots\boldsymbol{\eta}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基, $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{P}$,
则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是标准正交基 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{P}$ 是正交矩阵

Pf. 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\beta}_j=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{p}_j$, $\begin{cases}(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i)=1\\(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=0,\ i\neq j\end{cases}$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{p}_i^T\boldsymbol{p}_i=1\\\boldsymbol{p}_i^T\boldsymbol{p}_j=0\end{cases}\quad\Longleftrightarrow \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^T\\\vdots\\\boldsymbol{p}_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{p}_n\\\vdots & & \vdots\\\boldsymbol{p}_n^T\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n^T\boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}$$

3.2.4 实内积空间的子空间与正交直和分解

定义: 正交补

设 S 是实内积空间 V 的一个非空子集, 令:

$$S^{\perp}:=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0,\ \forall\boldsymbol{\beta}\in S\}$$

称 $S^{\perp}$ 为 S 的**正交补**

易证 $S^{\perp}$ 是 V 的一个子空间, 且也是一个实内积空间

定理: 正交直和分解

设 U 是实内积空间 V 的一个有限维子空间, 则有:

$$V=U\oplus U^{\perp}$$

将一个实内积空间分解为一个有限维子空间与其正交补的直和, 这种分解称为**正交直和分解**

Pf. 设 U 中标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$, $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, 构造 $\boldsymbol{\alpha}_1=\sum\limits_{i=1}^{m}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_i)\boldsymbol{\eta}_i\in U$,
令 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1$, 则 $(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}_j)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_j)-\left(\sum\limits_{i=1}^{m}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_i)\boldsymbol{\eta}_i,\boldsymbol{\eta}_j\right)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_j)-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_i)\delta_{ij}=0$
从而 $V=U+U^{\perp}$; $\forall\boldsymbol{\gamma}\in U\cap U^{\perp}$, $(\underset{\in U}{\boldsymbol{\gamma}},\underset{\in U^{\perp}}{\boldsymbol{\gamma}})=0\Longrightarrow\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}\Longrightarrow U\cap U^{\perp}=\{\boldsymbol{0}\}$

定义: 正交投影

若 $V=U\oplus U^{\perp}$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{1+\boldsymbol{\alpha}_2}$, $\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\alpha}_1\in U,\boldsymbol{\alpha}_2\in U^{\perp}$, 则有平行于 $U^{\perp}$ 在 U 上的投影 $\mathcal{P}_U$, $\mathcal{P}_U(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}_1$称 $\mathcal{P}_U$ 为 V 在 U 上的**正交投影**, 将 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\mathcal{P}_U$ 下的像 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ **在 U 上的正交投影**

推论 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影 $\Longleftrightarrow\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1\in U^{\perp}$

定理

若 $V = U \oplus U^{\perp}$, 则 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V, \boldsymbol{\alpha}_1 \in U$, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影 $\Longleftrightarrow$

$$d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1) \leq d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}),\ \forall \boldsymbol{\gamma} \in U$$

Pf. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是正交投影 $\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1 \in U^{\perp} \Longrightarrow [d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})]^2 = |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}|^2 = |\underbrace{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1}_{\in U^{\perp}} + \underbrace{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\gamma}}_{\in U}|^2 = |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2 + |\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\gamma}|^2 \geq |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2$; 设 $\boldsymbol{\delta}$ 是正交投影 $\Longrightarrow d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta}) \leq d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1)$, 又 $\boldsymbol{\delta} \in U \Longrightarrow d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1) \leq d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta})$, 于是 $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta}) = d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1)$, 从而 $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2 = |\underbrace{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\delta}}_{\in U^{\perp}} + \underbrace{\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\alpha}_1}_{\in U}|^2 = |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\delta}|^2 + |\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2 \Longrightarrow |\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\alpha}_1| = 0$, 因此 $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\alpha}_1$

定义: 最佳逼近元

设 U 是实内积空间 V 的一个子空间, 如果对于 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 存在 $\boldsymbol{\delta} \in U$, 使得:

$$d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\delta}) \leq d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}),\ \forall \boldsymbol{\gamma} \in U$$

则称 $\boldsymbol{\delta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的**最佳逼近元**

推论 当 U 是有限维的, 则有 $V = U \oplus U^{\perp}$, 从而 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 有 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影 $\boldsymbol{\alpha}_1$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的最佳逼近元

3.2.5 实内积空间的同构

定义: 实内积空间的同构、保距同构

设 V 与 V' 都是实内积空间, 若 V 到 V' 有一个双射 σ, 且满足:

1. $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \sigma(\boldsymbol{\alpha}) + \sigma(\boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$
2. $\sigma(l\boldsymbol{\alpha}) = k\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\ \forall k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\alpha} \in V$
3. $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \sigma(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ (保持内积)

则 σ 是实内积空间 V 到 V' 的一个**同构映射**, 此时称 V 与 V' 是同构的, 记作 $V \cong V'$

若 σ 除了保持加法与数量乘法, 还保持向量的内积, 则称 σ 是一个**保距同构**

标准正交基在保距同构下的像, 仍为标准正交基

定理: 欧几里得空间的同构

两个欧几里得空间同构 $\Longleftrightarrow$ 二者有相同的维数

Pf. “$\Longleftarrow$”: 设 $\dim V=\dim V'=n$, V 与 V' 分别取一个标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 与 $\boldsymbol{\delta}_1,\cdots,\boldsymbol{\delta}_n$, 构造映射

$$\sigma:V\to V^{'},\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\eta}_i\mapsto\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\delta}_i,\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{\eta}_i\mapsto\sum_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{\delta}_i$$

则 σ 是 V 到 V' 的一个线性同构

$$\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,\ (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\delta}_i,\sum_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{\delta}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

从而, σ 是一个保距同构, 因此二者同构

推论 任一 n 维欧几里得空间 $V\cong\mathbb{R}^n$, 其中一个同构映射为:

$$\sigma:V\to\mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\eta}_i\mapsto\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

3.3 实内积空间上的变换

3.3.1 正交变换

定义1: 实内积空间上的正交变换

设 $\mathcal{A}$ 是实内积空间 V 上的一个变换, 若 $\mathcal{A}$ 是满射, 且满足:

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V \text{ (保持内积不变)}$$

则称 $\mathcal{A}$ 是一个**正交变换**

实内积空间上正交变换的性质

设 $\mathcal{A}$ 是实内积空间 V 上的一个正交变换

1. $|\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}|,\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$

2. $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle,\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$

3. $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} \perp \mathcal{A}\boldsymbol{\beta} \Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta},\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$

4. $d(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}) = d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$

5. $\mathcal{A}$ 一定是线性变换
   Pf. 利用内积的正定性: $|\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) - (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta})|^2$
   $= (\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) - (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}), \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) - (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}))$
   $= |\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})|^2 - 2(\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}), \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}) + (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta})$
   $= |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 - 2[(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})] + |\boldsymbol{\alpha}|^2 + 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + |\boldsymbol{\beta}|^2 = 0$
   $\Longrightarrow \mathcal{A}(\alpha, \beta) = (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta})$; 同理, 易证 $\mathcal{A}(k\boldsymbol{\alpha}) = k(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha})$

6. $\mathcal{A}$ 一定是单射, 从而是双射, 即 $\mathcal{A}$ 是可逆的
   Pf. $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ s.t. $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \Longrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$, 从而 $\mathcal{A}$ 是单射

总结 正交变换保持所有实内积空间的度量性质不变

定理

实内积空间 V 上的变换 $\mathcal{A}$ 是正交变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 是 V 到自身的一个保距同构
推论1 正交变换的逆变换, 也是正交变换
推论2 两个正交变换的乘积, 也是正交变换

欧几里得空间上正交变换的特殊性质

n 维欧几里得空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 是正交变换 $\Longleftrightarrow$

1. $\mathcal{A}$ 保持内积
2. V 中标准正交基在 $\mathcal{A}$ 下的像, 仍是标准正交基
3. $\mathcal{A}$ 在 V 的任一标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵

定义: 第一、二类正交变换

n 维欧几里得空间上的正交变换 $\mathcal{A}$ 的行列式等于 1 或 -1, 若 $\det(\mathcal{A}) = 1$, 则称 $\mathcal{A}$ 是**第一类**的; 若 $\det(\mathcal{A}) = -1$, 则称 $\mathcal{A}$ 是**第二类**的

定义: 超平面、反射

n 维线性空间的任一 $n-1$ 维子空间, 称为 V 的一个**超平面**, 设 V 中一个单位向量 $\boldsymbol{\eta}$, 则将超平面记作 $\langle\boldsymbol{\eta}\rangle^{\perp}$

$\mathcal{P}$ 是 V 在 $\langle\boldsymbol{\eta}\rangle$ 上的正交投影, $\mathcal{I}$ 为恒等变换, 令:

$$\mathcal{R} = \mathcal{I} - 2\mathcal{P}$$

则称 $\mathcal{R}$ 为关于 $\langle\boldsymbol{\eta}\rangle^{\perp}$ 的**反射**

在欧几里得空间中, 关于超平面的反射是第二类正交变换

定理: 正交变换的分块对角矩阵

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的一个正交变换, 则 V 中存在一个标准正交基, 使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为分块对角矩阵, 形如:

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & \\
& & \lambda_r & & & & & \\
& & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & \\
& & & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\
& & & & & \ddots & & \\
& & & & & & \cos\theta_m & -\sin\theta_m \\
& & & & & & \sin\theta_m & \cos\theta_m
\end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_i = \pm 1,\ i = 1, \cdots, r, 0 \leq r \leq n;\ 0 < \theta_j < \pi,\ j = 1, \cdots, m, 0 \leq m \leq \dfrac{n}{2}$

3.3.2 对称变换与实对称矩阵

定义: 实内积空间上的对称变换

设 $\mathcal{A}$ 是实内积空间 V 上的一个变换, 若满足:

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$$

则称 $\mathcal{A}$ 为 V 上的一个对称变换

推论 $\mathcal{A}$ 一定是线性变换

Pf. 利用 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),\ \forall\boldsymbol{\gamma}\in V\Longleftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$

定理: 对称变换判定定理

n 维欧几里得空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 是对称变换 $\Longleftrightarrow$
$\mathcal{A}$ 在 V 中一个标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵

Pf. 设 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\mathcal{A}\boldsymbol{\eta}_j=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{\eta}_i\\ \mathcal{A}\boldsymbol{\eta}_j=\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathcal{A}\boldsymbol{\eta}_j,\boldsymbol{\eta}_i)\boldsymbol{\eta}_i\end{cases}\Longrightarrow a_{ij}=(\mathcal{A}\boldsymbol{\eta}_j,\boldsymbol{\eta}_i),\ \mathcal{A}\text{ 是对称变换}\Longleftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$$

定理: 实对称矩阵的特征多项式实根定理

n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的复根均为实数

Pf. 任取 $f(\lambda)$ 的一个复根 λ_0, 将 $\boldsymbol{A}$ 看作复矩阵, 则 λ_0 是复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\exists\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$,

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\text{ 是实矩阵}\Longrightarrow\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\lambda_0}\overline{\boldsymbol{\alpha}}\\ \boldsymbol{A}\text{是对称矩阵}\Longrightarrow(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^T=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}^T\end{cases}\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}^T\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\lambda_0}\boldsymbol{\alpha}^T\overline{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^T\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{pmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{a_1}\\ \vdots\\ \overline{a_n}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{a_i}=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\xrightarrow[\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}]{\boldsymbol{\alpha}^T\overline{\boldsymbol{\alpha}}\neq\boldsymbol{0}}\lambda_0=\overline{\lambda_0}\Longrightarrow\lambda_0\in\mathbb{R}$$

定理: 对称变换的特征向量正交性

实内积空间上的对称变换 $\mathcal{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是正交的

Pf. 设 λ_1,λ_2 是 $\mathcal{A}$ 的不同特征值, $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 分别为属于 λ_1,λ_2 的一个特征向量,
$\lambda_1(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=(\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=(\mathcal{A}\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=(\boldsymbol{\xi}_1,\mathcal{A}\boldsymbol{\xi}_2)=(\boldsymbol{\xi}_1,\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2)=\lambda_2(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)\xrightarrow{\lambda_1\neq\lambda_2}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=0$

推论 n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量一定是正交的

定理

设 $\mathcal{A}$ 是实内积空间 V 上的一个对称变换, 若 W 是 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间, 则 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间

Pf. $\forall \boldsymbol{\alpha} \in W, \boldsymbol{\beta} \in W^{\perp}$, $(\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\beta}, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0 \Longrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\beta} \in W^{\perp}$

定理

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的一个对称变换, 则 V 中存在一个标准正交基, 使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为对角矩阵

Pf. 对欧几里得空间的维数作数学归纳法: $n = 1$ 时, 显然命题成立; 假设维数为 $n-1$ 时, 命题为真; 维数为 n, 实对称矩阵一定有特征值, 取 $\mathcal{A}$ 的一个特征值 λ_1, 设 $\boldsymbol{\eta}_1$ 为 $\mathcal{A}$ 的属于 λ_1 的单位特征向量, 则 $V = \langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle^{\perp}$, 由于 $\langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 则 $\langle \boldsymbol{\eta} \rangle^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 从而 $\mathcal{A}|_{\langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle^{\perp}}$ 是 $\langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle^{\perp}$ 上的对称变换, 据归纳假设, $\mathcal{A}|_{\langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle^{\perp}}$ 在 $\langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle^{\perp}$ 的一个标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 下的矩阵为 $\operatorname{diag}\{\lambda_2, \cdots \lambda_n\}$, $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 是一个标准正交基, $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为 $\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, 据数学归纳法原理, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 命题为真

推论 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵, 则存在一个 n 级正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$$

此时, 称 $\boldsymbol{A}$ **正交相似**于对角矩阵

方法: 实对称矩阵的正交对角化

求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部不同的特征值 (必为实数)
2. 对每一个特征值 λ_i, 求 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})X$ 的一个基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$
3. $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_i} \xrightarrow{\text{Schmidt 正交化}} \boldsymbol{\beta}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{ir_i} \xrightarrow{\text{单位化}} \boldsymbol{\eta}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{ir_i}$
4. 得到正交矩阵 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\eta}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{1r_1}, \boldsymbol{\eta}_{s1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{sr_s})$
5. 求得对角矩阵 $\operatorname{diag}\{\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{r_1 \text{ 个}}, \cdots, \underbrace{\lambda_s, \cdots \lambda_s}_{r_s \text{ 个}}\}$

谱定理?

3.4 酉空间的结构及其上变换

3.4.1 酉空间的内积与度量

复数域上线性空间 V 的一个双线性函数 f 有

$$f(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha},\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha})=(\mathrm{i}\cdot\mathrm{i})f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=-f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}),\ f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0\in\mathbb{R}$$

与正定性矛盾, 但要求保留正定性, 则改为

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{\alpha},\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha})=\bar{\mathrm{i}}f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\\ f(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\mathrm{i}f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\end{cases}\implies f(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha},\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha})=\mathrm{i}\bar{\mathrm{i}}f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$$

$$\implies\overline{f(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\overline{\mathrm{i}f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\bar{\mathrm{i}}f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=f(\boldsymbol{\alpha},\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha})$$

失去对称性

定义1: 复线性空间上的内积、Hermite 性

复线性空间 V 上的一个二元函数 $(\ ,\ )$, 即 $V\times V$ 到 $\mathbb{C}$ 的一个映射, 如果满足:

1. $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=\overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})},\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ (**Hermite 性**)
2. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$ (对第一个变量保持加法)
3. $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,k\in\mathbb{C}$ (对第一个变量保持数量乘法)
4. $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时取等 (正定性)

则称 $(\ ,\ )$ 是 V 上的一个**内积**

对第二个变量:

1. $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\delta})=\overline{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\alpha}}=\overline{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}+\overline{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\alpha})}$
2. $(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta})=\overline{(k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}=\overline{k}\overline{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}=\overline{k}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

则称 $(\ ,\ )$ 对第二个变量是**共轭线性**的

对比实内积与复内积:

1. 实线性空间的内积是一个**正定的对称双线性函数**
2. 复线性空间的内积是一个**正定的共轭对称半线性函数**

定义2: 复内积空间、酉空间

若复线性空间 V 指定了一个内积, 则称 V 是一个**复内积空间**, 或称**酉空间**

定义: 标准内积

$\mathbb{C}^n$ 中, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, 规定

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}=\boldsymbol{y}^\dagger\boldsymbol{x}$$

易证, (,) 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个内积, 称为**标准内积**

定义: 酉空间中向量长度

设 V 是一个酉空间, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**长度** $|\boldsymbol{\alpha}|:=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$, 易证 $|k\boldsymbol{\alpha}|=|k||\boldsymbol{\alpha}|$

定理1: 酉空间中的 Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz 不等式

在酉空间 V 中, $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,\ |(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\le|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时取等

Pf. 情形1: $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 易证 $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$; 情形2: $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, $\forall t\in\mathbb{C},\ \boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$, 由正定性 $0<(\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta})=|\boldsymbol{\alpha}|^2+\bar{t}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+t\overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}+t\bar{t}|\boldsymbol{\beta}|^2$
取 $t=-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\beta}|^2}$, 代入得 $|\boldsymbol{\alpha}|^2-\dfrac{|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|^2}{|\boldsymbol{\beta}|^2}>0$

定义: 酉空间中向量夹角

在酉空间 V 中, 若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**夹角**为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle:=\arccos\frac{|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}$$

其中 $0\le\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\le\dfrac{\pi}{2}$

物理意义 $\cos^2\langle\psi_k,\psi\rangle$ 是在 ψ 态下测量力学量 A_j 得到 λ_{jk} 的概率

定义: 酉空间中向量正交

在酉空间中, 若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ **正交**, 记作 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$

推论(三角形不等式) $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\le|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|$

推论(勾股定理) 若 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$, 则 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2$

定义: 酉空间中的距离

在酉空间中, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的**距离** $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}):=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$

3.4.2 有限维酉空间的标准正交基与酉矩阵

定义: 正交规范集

在酉空间中, 由两两之间的非零向量组成的集合是线性无关的, 两两正交的单位向量组成的子集, 称为**正交规范集**

定义: 有限维酉空间的标准正交基

n 维酉空间 V 中, 由 n 个两两正交的非零向量组成的基, 称为 V 的一个**正交基**; 由 n 个两两正交的单位向量组成的基, 称为 V 的一个**标准正交基**

标准正交基的性质

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots\boldsymbol{\eta}_n$ 是 V 的一个标准正交基, $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots\boldsymbol{\eta}_n)X,\ \boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots\boldsymbol{\eta}_n)Y$

1. $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\eta}_i,\sum\limits_{j=1}^{n}y_j\boldsymbol{\eta}_j)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}=\boldsymbol{y}^{\dagger}\boldsymbol{x}$

2. $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_i)\boldsymbol{\eta}_i$ (Fourier 展开)

定理:

n 维酉空间中一定有标准正交基

Pf. 对一个基进行 Schmidt 正交化与单位化后得到标准正交基

定义: 酉矩阵

若 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{M}_n(\mathbb{C})$ 满足:

$$\boldsymbol{U}^{\dagger}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\dagger}=\boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{U}$ 为一个**酉矩阵**

酉矩阵的性质

1. $\boldsymbol{U}^{-1}=\boldsymbol{U}^{\dagger}$

2. $\boldsymbol{U}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{U}^{\dagger}$ 也是酉矩阵

3. 若 $\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2$ 均为酉矩阵, 则 $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2$ 也是酉矩阵

4. $|\det(\boldsymbol{U})|=1$

5. 对于 $\boldsymbol{U}$ 的所有特征值 $|\lambda|=1$

定理: 酉空间中标准正交基之间的过渡矩阵

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 n 维酉空间 V 的一个标准正交基, 令 $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{P}$, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是标准正交基 $\iff \boldsymbol{P}^\dagger\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$, 即有限维酉空间中, 标准正交基到标准正交基的过渡矩阵, 为酉矩阵

Pf. $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_j & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}\Longrightarrow \boldsymbol{\beta}_j=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{p}_j$, $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是标准正交基 $\iff (\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=\delta_{ij}\iff \boldsymbol{p}_j^\dagger\boldsymbol{p}_i=\delta_{ij}$

$$\iff \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^\dagger\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^\dagger\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$$

3.4.3 酉空间的正交直和分解与同构

定理: 酉空间的正交分解与正交投影判定定理

设 U 是酉空间 V 的一个有限维子空间, 则有

$$V=U\oplus U^\perp$$

若 $V=U\oplus U^\perp$, 则平行于 $U^\perp$ 在 U 上的投影 $\mathcal{P}_U$, 称为 V 在 U 上的正交投影, 设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\in U,\boldsymbol{\alpha}_2\in U^\perp$, 将 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影

$\boldsymbol{\alpha}\in U$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影 $\iff \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1\in U^\perp\iff d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)\le d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}),\ \forall\boldsymbol{\gamma}\in U$

定义: 酉空间中的最佳逼近元

酉空间 V 的一个子空间 U, 如果存在 $\boldsymbol{\delta}\in U$, 使得

$$d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta})\le d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}),\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\gamma}\in U$$

则称 $\boldsymbol{\delta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的最佳逼近元

若 U 是有限维的, 则 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上都有最佳逼近元, 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{U}$ 上的正交投影

定义: Hilbert 空间

设 V 是一个复 (实) 内积空间, 若 V 中每一个 Cauchy 序列都在 V 中有极限, 则称 V 是一个 **Hilbert 空间**, 即为一个完备化的复 (实) 内积空间

定理: Hilbert 空间的正交分解定理

设 V 是一个 Hilbert 空间, 若 U 是 V 的一个闭子空间, 则 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都在 U 上有最佳逼近元, 从而有

$$V=U\oplus U^\perp$$

定理: 酉空间的同构

设 V 和 V' 都是酉空间, 如果存在 V 到 V' 的一个双射 σ, 使得 σ 保持加法与纯量乘法, 且 σ 保持向量的内积不变, 则称 σ 是 V 到 V' 的一个同构映射 (保距同构), 此时称 V 与 V' 是同构的, 记作 $V \cong V'$

两个有限维酉空间同构 $\Longleftrightarrow$ 二者维数相同, 从而任一酉空间同构于 $\mathbb{C}^n$

3.4.4 酉变换

定义: 酉变换

酉空间 V 上的一个变换 $\mathcal{A}$, 如果 $\mathcal{A}$ 是满射, 且满足:

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$$

则称 $\mathcal{A}$ 是一个酉变换

酉变换保持酉空间的内积, 即保持一切度量性质, 保持向量的长度、夹角、正交性、距离不变

易证, 酉变换一定是线性变换, 且一定是单射, 从而是双射, 是可逆的

定理: 酉变换的判定

酉空间 V 上的变换 A 是酉变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 是 V 到自身的一个同构映射 (保距同构)

易证, 酉变换的逆变换、酉变换的乘积, 仍是酉变换

定理: 有限维酉空间上酉变换的判定

n 维酉空间 V 上的变换 $\mathcal{A}$, 若满足:

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$$

即为酉变换

定理: 酉变换的特征值

n 维酉空间 V 上酉变换 $\mathcal{A}$ 的特征值的模为 1

Pf. 设 λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\xi}$是 $\mathcal{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量, 则有 $(\mathcal{A}\boldsymbol{\xi}, \mathcal{A}\boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = (\lambda_0\boldsymbol{\xi}, \lambda_0\boldsymbol{\xi}) = \lambda_0\overline{\lambda_0}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \xrightarrow{\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}} |\lambda_0| = 1$

定理: 酉变换的不变子空间

设 $\mathcal{A}$ 是酉空间 V 上的一个酉变换, 若 W 是 V 的一个有限维的子空间, 且 W 是 A 的一个不变子空间, 则 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的一个子空间

Pf. $\mathcal{A}|_W$ 是 W 上的一个线性变换, 由于 $\mathcal{A}$ 是 V 到自身的单射, 因此 $\mathcal{A}|_W$ 是 W 到自身的单射, 又由于 W 是有限维的, 因此 $\mathcal{A}|_W$ 是满射; $\forall \boldsymbol{\alpha} \in W$, $\exists \boldsymbol{\gamma} \in W$ s.t. $\mathcal{A}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}$, 任取 $\boldsymbol{\beta} \in W^{\perp}$, $(\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}, \mathcal{A}\boldsymbol{\gamma}) = (\underset{\in W^{\perp}}{\boldsymbol{\beta}}, \underset{\in W}{\boldsymbol{\gamma}}) = 0 \Longrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\beta} \in W^{\perp}$

定理: 酉变换的对角矩阵

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维酉空间 V 上的一个酉变换, 则 V 中存在一个标准正交基, 使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为对角矩阵

Pf. 对酉空间的维数作数学归纳法:

推论 n 级酉矩阵一定相似于一个对角矩阵, 称为**酉相似**

3.4.5 Hermite 变换

定义: Hermite 变换

$\mathcal{A}$ 是酉空间 V 上的一个变换, 若满足:

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$$

则称 $\mathcal{A}$ 是一个 **Hermite 变换**

Hermite 变换一定是线性变换

定义: Hermite 矩阵

若 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{C})$ 满足:

$$\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为一个 **Hermite 矩阵**

定理

n 维酉空间上的线性变换 $\mathcal{A}$ 是 Hermite 变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 在 V 的任一标准正交基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵

定理: Hermite 变换特征值实值定理

n 维酉空间上 Hermite 变换 $\mathcal{A}$ 的特征值一定是实数

Pf. 设 λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\xi}$是 $\mathcal{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量, 则有 $(\mathcal{A}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = (\lambda_0\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = \lambda_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{\xi}, \mathcal{A}\boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{\xi}, \lambda_0\boldsymbol{\xi}) = \overline{\lambda_0}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \Longrightarrow \lambda_0 = \overline{\lambda_0}$

定理: Hermite 变换的不变子空间

设 $\mathcal{A}$ 是酉空间 V 上的一个 Hermite 变换, 若 W 是 V 的一个有限维的子空间, 且 W 是 A 的一个不变子空间, 则 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的一个子空间

定理: Hermite 变换的实对角矩阵

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维酉空间 V 上的一个 Hermite 变换, 则 V 中存在一个标准正交基, 使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为实对角矩阵

推论 n 级酉矩阵一定酉相似于一个实对角矩阵

3.5　正交空间与辛空间

3.5.1　Lorentz 变换

$$\text{Galileo 变换}\begin{cases}t^{'}=t\\x^{'}=x\\y^{'}=y\\z^{'}=z\end{cases}\xrightarrow{\text{光速不变原理}}\textbf{Lorentz 变换}(\mathcal{L})\begin{cases}t^{'}=\dfrac{t-\dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\\x^{'}=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\\y^{'}=y\\z^{'}=z\end{cases}$$

令 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, 则 Lorentz 变换的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix}ct^{'}\\x^{'}\\y^{'}\\z^{'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma\dfrac{v}{c}&0&0\\-\gamma\dfrac{v}{c}&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ct\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}^4$中, 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}t_1\\x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}t_2\\x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$, 若指定正定对称双线性函数（ , ）作为内积, 则 $(\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}),\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}))\neq(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$, 即在洛伦兹变换下不保持内积不变

3.5.2　Minkowski 空间

于是令

$$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=-c^2t_1t_2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

则 f 是一个非退化的对称双线性函数

将 f 作为 $\mathbb{R}^4$ 的内积, 此时称 $(\mathbb{R}^4,f)$ 为一个 **Minkowski 空间**, 满足:

$$(\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}),\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$$

$f(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**时-空间隔平方**, 满足:

$$f(\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}),\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$$

3.5.3 正交空间

域 F 上线性空间 V 指定了一个对称双线性函数 f, 则称 f 为 V 上的一个内积, 称 V 是一个**正交空间**, 记作 (V,f)

若 f 是非退化的, 则称 (V,f) 是**正则**的, 否则则称 (V,f) 是**非正则**的

Minkowski 空间是一个 4 维的正交空间

3.5.4 辛空间

域 F 上线性空间 V 指定了一个斜对称双线性函数 f, 则称 f 为 V 上的一个内积, 称 V 是一个**辛空间**

3.6　对易与李代数

定义: 矩阵的对易及运算法则

在 $\boldsymbol{M}_n(F)$ 中, $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 称为矩阵的**对易子**, 记作 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$, 诱导出**对易运算**:

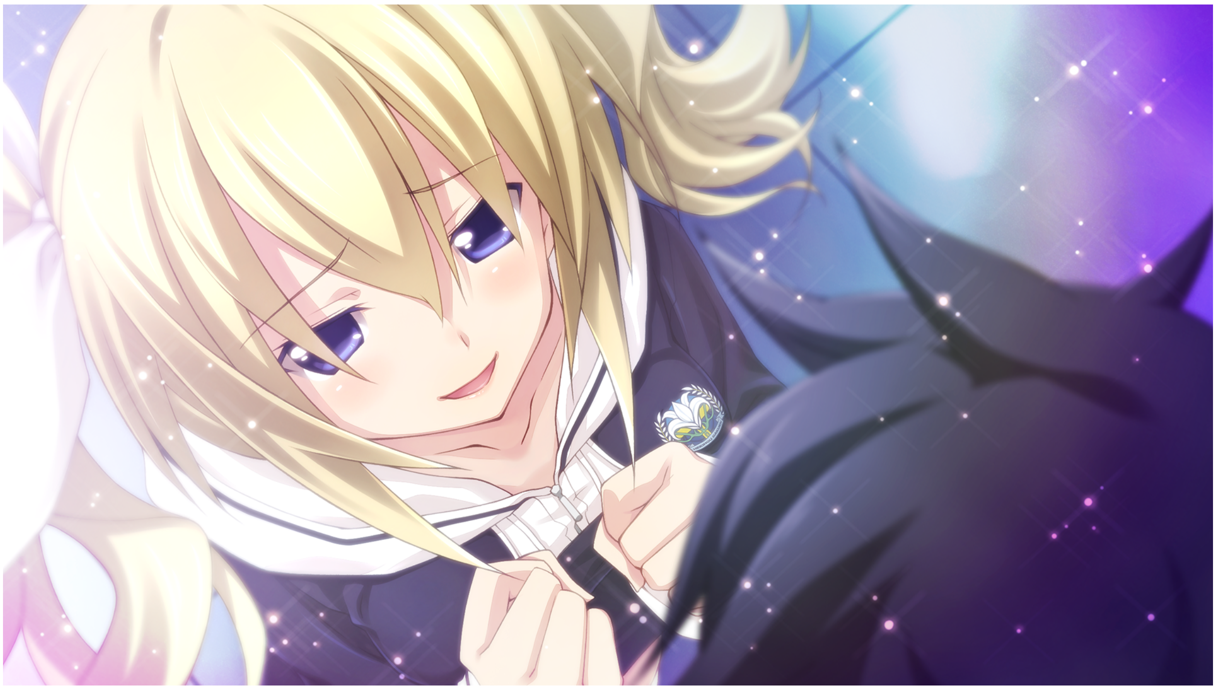
$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA},\ \forall \boldsymbol{AB}\in \boldsymbol{M}_n(F)$$

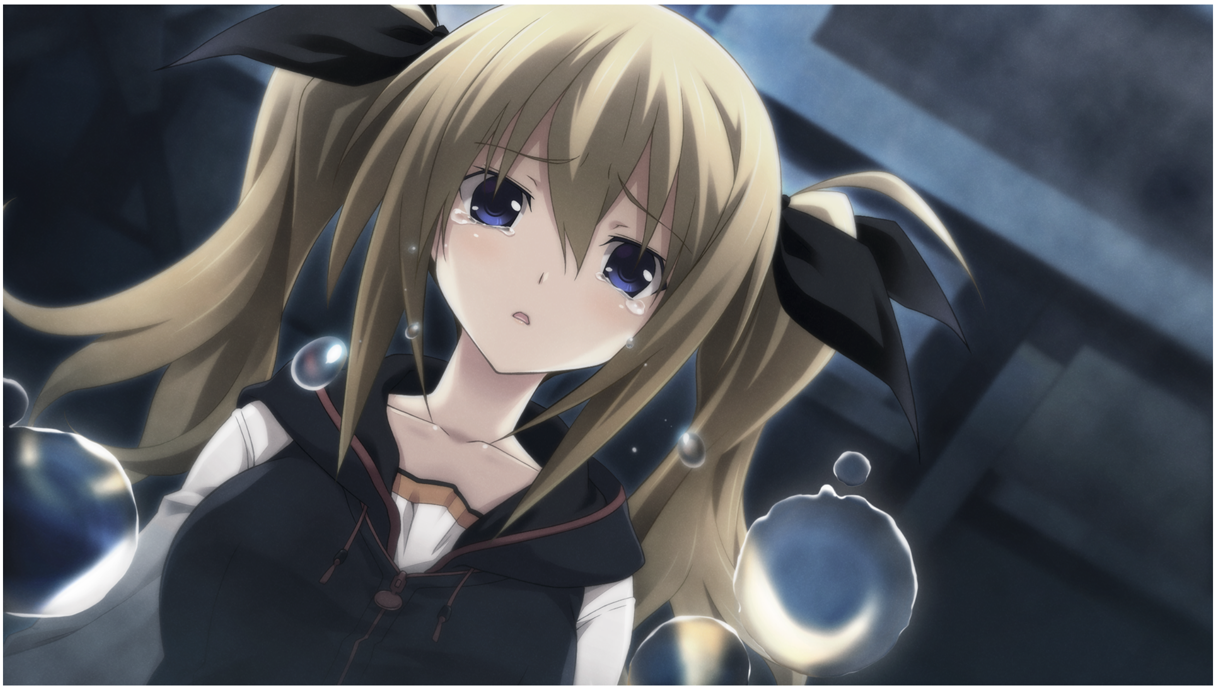
对易运算满足:

1. $[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}],\ [\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}]=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}],$
   $[k\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{A},k\boldsymbol{B}]=k[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ (线性性)
2. $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=-[\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}]$ (反交换律)
3. $[\boldsymbol{A},[\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]]+[\boldsymbol{B},[\boldsymbol{C},\boldsymbol{A}]]+[\boldsymbol{C},[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]]=\boldsymbol{0}$ (Jacobi 恒等式)

定义: 李代数

第四章　多项式





4.1 一元多项式环

4.1.1 一元多项式及其运算

定义1: 一元多项式、次数

设 K 是一个数域, x 是一个符号, 形如下述的表达式:

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_i x^i + \cdots + a_1 x + a_0$$

其中, $n \in \mathbb{N}$, 系数 $a_n, \cdots, a_1 \in K$, 如果满足: 两个这种形式的表达式相等 $\iff$ 二者含有完全相同的项, 则称这种表达式为数域 K 上的一个**一元多项式**, x 称为**不定元**

系数全为 0 的一元多项式, 称为**零多项式**

若 $a_n \neq 0$, 则称 n 为 $f(x)$ 的**次数**, 记作 $\deg f(x)$

0 次多项式形如 b, 其中 $b \in K^*$, 等同于 K 中的非零元

零多项式的次数为负无穷, 记作 $-\infty$, 且规定 $-\infty < n, (-\infty) + n = -\infty, \forall n \in \mathbb{N}$

定义2: 多项式的运算

$K[x] := \{$数域 K 上一元多项式$\}$,

1. 规定**加法**: $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) x^i$
2. 规定**乘法**: $(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i)(\sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j) = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j} = \sum\limits_{s=0}^{n+m}(\sum\limits_{i+j=s} a_i b_j) x^s$
3. 从而有**数量乘法**: $k(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum\limits_{i=0}^{n} (k a_i) x^i$
4. 于是有**减法**: $f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)]$

$K[x]$ 对于加法和数量乘法, 成为数域 K 上的一个无限维的线性空间

证明 $K[x]$ 中每个多项式都可以由 $\Omega = \{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$ 中有限多个多项式线性表出, 任取 Ω 的一个有限子集 $\Omega_1 = \{x^{i_1}, \cdots, x^{i_m}\}$, 设 $k_1 x^{i_1} + \cdots + k_m x^{i_m} = 0$, 则 $k_1 = \cdots = k_m = 0$, 因此 Ω_1 线性无关, 从而 Ω 线性无关, 所以 $\Omega = \{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$ 是 $K[x]$ 的一个基, 从而 $K[x]$ 是一个无限维的线性空间

$K[x]$ 的乘法满足: 交换律、结合律、分配律, 有单位元, 即 $1f(x) = f(x)1 = f(x)$

定理1: 多项式和与积的次数定理

设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 则 $\deg[f(x) + g(x)] \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$
次数相同且首项系数互为相反数时取 $<$

$\deg[f(x)g(x)] = \deg f(x) + \deg g(x)$
对零多项式同样成立

推论1: $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0 \Longrightarrow f(x)g(x) \neq 0$
推论2 (多项式乘法的**消去律**): $f(x)g(x) = f(x)h(x)$, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $g(x) = h(x)$

4.1.2 环的概念及其性质

定义3: 环

一个非空集合 R, 如果有两个代数运算, 一个称为加法, 一个称为乘法, 并且满足以下运算法则:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in R$ (加法结合律)
2. $a+b = b+a$, $\forall a, b \in R$ (加法交换律)
3. R 中有一个元素 0, 有 $0+a = a+0 = a$, $\forall a \in R$, 称 0 为 R 的**零元** (有零元)
4. $\forall a \in R, \exists b \in R$, s.t. $a+b = b+a = 0$, 称 b 为 a 的**负元**, 记作 $-a$ (有负元)
5. $(ab)c = a(bc)$ (乘法结合律)
6. $a(b+c) = ab+ac$, $(b+c)a = ba+ca$, $\forall a, b, c \in R$ (左右分配律)

则称 R 为一个**环**
对于负元可以定义环中的**减法**: $a-b = a+(-b)$, $\forall a, b \in R$

定义4: 交换环、单位元、零因子

设 R 是一个环,
(1) 若 R 的乘法满足交换律, 则称 R 是一个**交换环**;
(2) 若 R 有一个元素 e, 满足: $ea = ae = a$, $\forall a \in R$, 则称 e 为 R 的**单位元**, 记作 1, 且若 R 有单位元, 则单位元唯一;
(3) $\forall a \in R$, 若存在 $b \in R$, 且 $b \neq 0$, 使得 $ab = 0$, 则称 a 是一个**左零因子**, 若 $ba = 0$, 则称为**右零因子**, 统称为**零因子**, 且在 R 中, 有 $0a = a0 = 0$, $\forall a \in R$, 从而 0 是零因子, 称为**平凡零因子**

4.1.3 子环的概念及其判定

定义5: 子环

环 R 的一个非空子集 R_1, 若对于 R 的加法、乘法运算, 也成为一个环, 则称 R_1 是 R 的一个**子环**

定理2: 子环判定定理

环 R 的一个非空子集 R_1 是一个子环

$\Longleftrightarrow$ 从 $a,b\in R_1$ 可以推出 $a-b,ab\in R_1$, 即 R_1 对于 R 的减法与乘法均封闭

证明"$\Longleftarrow$": $\forall c\in R_1 \Longrightarrow c-c=0\in R_1$ (有零元); $\forall b\in R_1 \Longrightarrow -b=0-b\in R_1$ (有负元); $\forall a,b\in R_1 \Longrightarrow a+b=a-(-b)\in R_1$ (加法), 易证, R_1 称为一个环, 从而 R_1 是 R 的一个子环

子环的例子

1. $\forall \boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}_n(K)$, 表达式 $b_m\boldsymbol{A}^m+\cdots+b_1\boldsymbol{A}+b_0\boldsymbol{I}$ $(m\in\mathbb{N})$ 称为 $\boldsymbol{A}$ **的多项式**, $K[\boldsymbol{A}]:=\{$数域 K 上矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式$\}$, 易证 $K[\boldsymbol{A}]$ 对于矩阵的减法与乘法封闭, 从而 $K[\boldsymbol{A}]$ 是环 $\boldsymbol{M}_n(K)$ 的一个子环, 并且是一个有单位元的交换环

2. $K\boldsymbol{I}$ 是 $K[\boldsymbol{A}]$ 的一个子环

4.1.4 一元多项式环的通用性质

定义: 同构映射与环同构

若环 R 到环 R' 有一个双射 σ, 满足: $\sigma(a+b)=\sigma(a)+\sigma(b)$, $\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$, $\forall a,b\in R$ (保持加法和乘法), 则称 σ 是 R 到 R' 的一个**同构映射**, 此时称 R 和 R' 是**同构**的

若环 R 到环 R' 有一个同构映射 σ, 且 R 有单位元 e, 则 $\sigma(e)$ 是 R' 的单位元 e', 即, 单位元在同构映射下的像, 一定是单位元

定理3: 一元多项式环的通用性质(泛性质)

设 K 是一个数域, R 是一个有单位元的交换环, 且 K 到 R 的一个子环 R_1 有一个同构映射 τ, $\forall t\in R$, 令:

$$\sigma_t: K[x]\to R, f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\mapsto f(t):=\sum_{i=0}^{n}\tau(a_i)t^i$$

由于 $f(x)$ 表法唯一, 因此 σ_t 是 $K[x]$ 到 R 的一个映射

$\sigma_t(x)=t$, 且 σ_t 保持加法和乘法运算, 即:

$$f(x)+g(x)=h(x),\ f(x)g(x)=p(x)\Longrightarrow f(t)+g(t)=h(t),\ f(t)g(t)=p(t)$$

称 σ_t 为 x **用** t **代入**

4.2 n 元多项式环及其通用性质

定义1: n 元多项式

设 F 是一个域, $x_1,\cdots,x_n$ 是 n 个符号, 有

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n\in\mathbb{N}$, $a_{i_1i_2\cdots i_n}\in F$ 称为**系数**.

若只有有限多个系数不为 0, 且当且仅当两个这种形式的表达式,除系数为 0 的项外,有完全相同的项时二者相等, 则称这种形式的表达式为域 F 上的一个 n **元多项式**, 记作 $f(x_1,\cdots,x_n)$, 称 $x_1,\cdots,x_n$ 为 n **个无关的不定元**.

称其中一项 $a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 为**单项式**, 称幂指数之和 $i_1+\cdots+i_n$ 为**单项式的次数**, 称系数非零的最高单项式次数为 n **元多项式的次数**.

定义2: n 元多项式环

$F[x_1,\cdots,x_n]:=\{$域 F 上 n 元多项式$\}$, 易证, $F[x_1,\cdots,x_n]$ 成为一个有单位元的交换环, 称为域 F 上的 n **元多项式环**.

定义3: 齐次多项式

若 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的每个系数非零的单项式的次数均为 m, 则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为一个 m **次齐次多项式**.

零多项式可以是任意次齐次多项式.

$\{$域 F 上 n 元 m 次齐次多项式$\}$ 是域 F 上的一个线性空间.

定理: n 元多项式环的通用性质

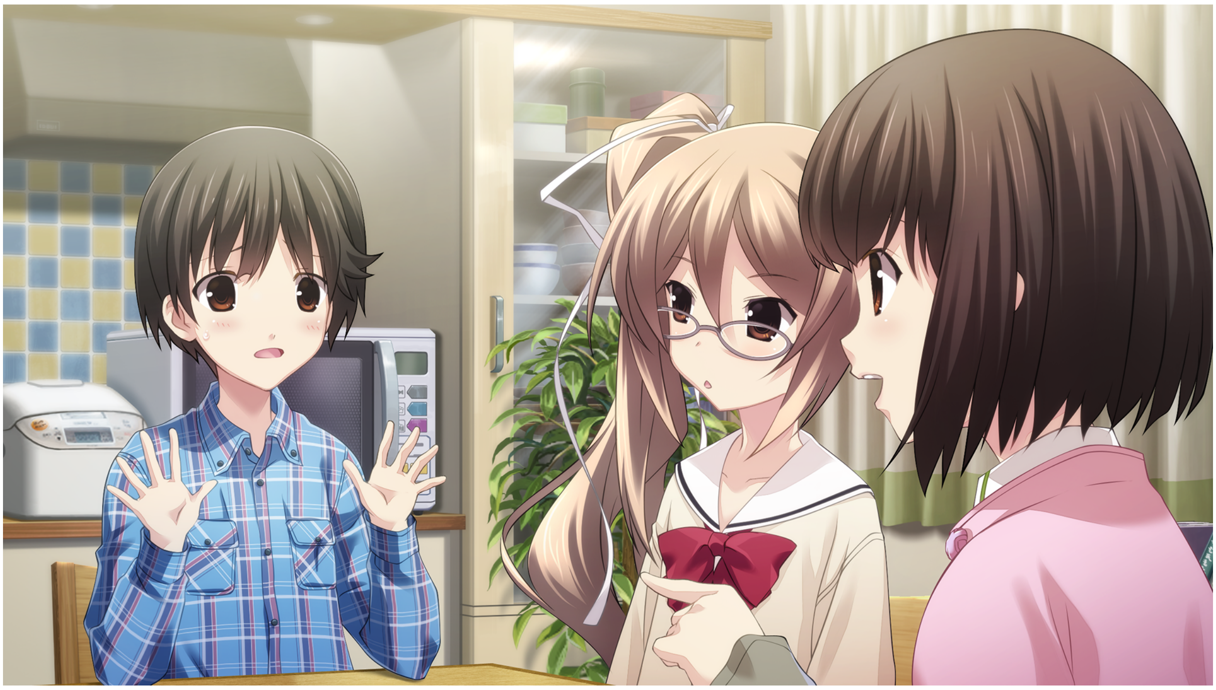
设 F 是一个域, R 是一个有单位元的交换环, 且 F 到 R 有一个子环 R_1 有一个同构映射 τ, $\forall t_1,\cdots,t_n\in R$, 令

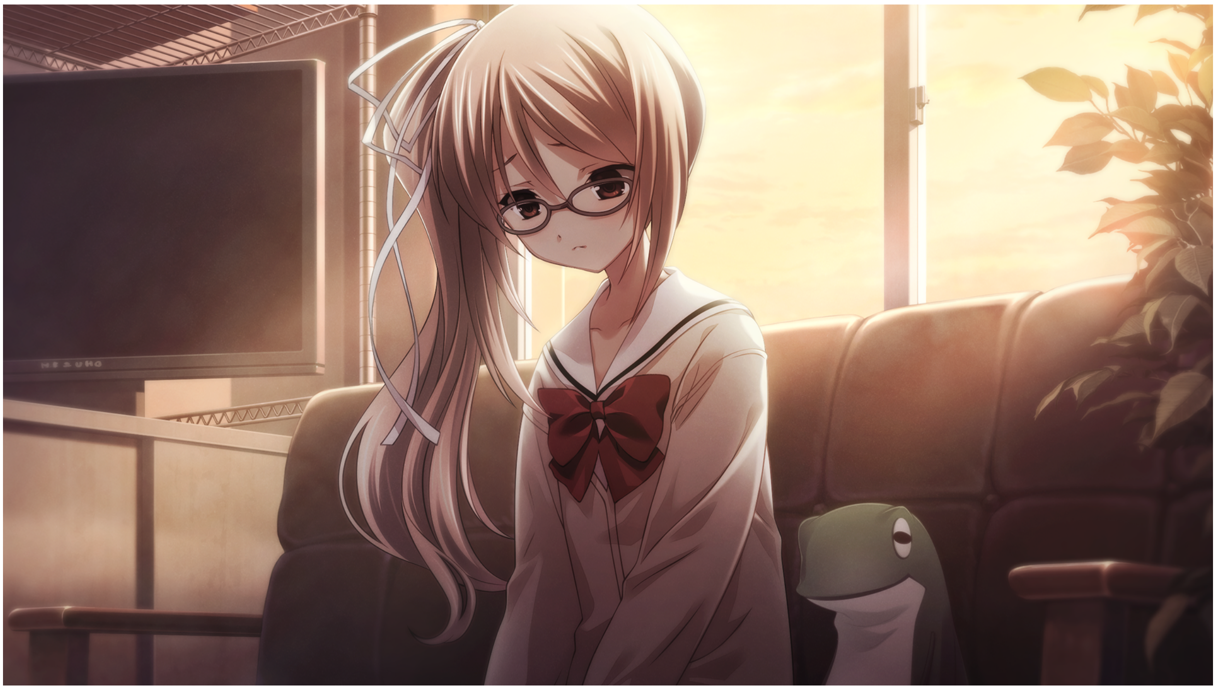
$$\sigma_{t_1,\cdots,t_n}:F[x_1,\cdots,x_n]\to R$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}\mapsto\sum_{i_1,\cdots,i_n}\tau(a_{i_1,\cdots,i_n})t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}$$

则 $\sigma_{t_1,\cdots,t_n}$ 是 $F[x_1,\cdots,x_n]$ 到 R 的一个映射, 且 $\sigma_{t_1,\cdots,t_n}$ 保持加法和乘法运算, 将 $\sigma_{t_1,\cdots,t_n}$ 称为 $x_1,\cdots,x_n$ **分别用** $t_1,\cdots,t_n$ **代入**.

第五章　多重线性代数





5.1　多重线性映射

5.2　线性空间的张量积

5.3　张量代数

5.4　外代数