Electromagnetics
电磁学 - 期末复习

Version 1.6.2

容与

rongyu221104@163.com

Typeset with LaTeX

目录

1 静电

1.1 静电基本规律

1.1.1 电场强度

Coulomb 定律 (真空中两个静止点电荷间相互作用力):

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} \tag{1.1.1}$$

其中 ϵ_0 称为真空介电常量, $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$.

电场强度

1. 点电荷:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1.1.2}$$

2. 连续带电体:

    (a) 电荷体分布

    $$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho\,\mathrm{d}V}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1.1.3}$$

    (b) 电荷面分布

    $$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1.1.4}$$

    (c) 电荷线分布

    $$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\,\mathrm{d}\ell}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1.1.5}$$

eg1. 无限长均匀带电直线, 线密度为 λ, r 远处电场强度?

$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\boldsymbol{e}_r \tag{1.1.6}$$

eg2. 均匀带电圆环, 总电量为 q, 半径为 R, 其轴线上距离圆心 x 远处电场强度?

$$\boldsymbol{E} = \frac{q|x|}{4\pi\epsilon_0(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{sgn}(x)\boldsymbol{e}_x \tag{1.1.7}$$

eg3. 电偶极子

1. 电偶极矩:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l} \tag{1.1.8}$$

2. 力矩:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} \tag{1.1.9}$$

3. 电势能:

$$W = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E} \tag{1.1.10}$$

1.1.2 Gauss 定理

$$\Phi_E = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S内} q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, \mathrm{d}V \tag{1.1.11}$$

微分形式:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.1.12}$$

eg1. 无限大平板 r 远处电场强度?

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathrm{sgn}(x) \boldsymbol{e}_x \tag{1.1.13}$$

eg2. 均匀带电球体总带电量为 q, 半径为 R, 距球心 r 远处电场强度?

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \dfrac{q\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \dfrac{\rho \boldsymbol{r}}{3\epsilon_0} & r < R \\ \dfrac{q\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \dfrac{\rho R^3 \boldsymbol{r}}{3\epsilon_0 r^3} & r > R \end{cases} \tag{1.1.14}$$

1.1.3 电势

电势差:

$$\varphi_{PQ} = \int_P^Q \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{1.1.15}$$

电势:

$$\varphi(P) = \int_P^\infty \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{1.1.16}$$

eg1. 点电荷电势?

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \tag{1.1.17}$$

电势的梯度:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi \tag{1.1.18}$$

静电场结构: 有源; 无旋 (保守, 有标势).

1.1.4 静电能

两个点电荷间的互能:

$$W_{互} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{1.1.19}$$

多个点电荷间的互能:

$$W_{互} = \frac{1}{2}q_i\varphi_i \tag{1.1.20}$$

1.2 静电场中的导体

静电平衡时:

$$\boldsymbol{E}_{内} \equiv 0 \tag{1.2.1}$$

电荷无体分布, 只有面分布.

导体表面电场强度:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\boldsymbol{n} \tag{1.2.2}$$

1.3 电容

孤立导体电容:

$$C = \frac{Q}{\varphi} \tag{1.3.1}$$

1.3.1 常见电容器

平行板电容器电容公式:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (\text{若板间充满介质: } C = \frac{\epsilon_0\epsilon_{\mathrm{r}} S}{d} = \frac{\epsilon S}{d}) \tag{1.3.2}$$

板间场强大小:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\ (\text{无介质}) \tag{1.3.3}$$

eg1. 圆柱形电容器, 由两个同轴金属圆筒构成, 内筒半径 R_1, 外筒半径 R_2, 单位长

度电容?

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \tag{1.3.4}$$

eg2. 球形电容器, 由两个同心球壳构成, 内球半径 R_1, 外球半径 R_2, 电容?

$$C = \frac{4\pi\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{1.3.5}$$

eg3. 两平行导线相距 d, 半径 r, 电容?

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln\frac{d}{r}} \tag{1.3.6}$$

1.3.2 电容器的串并联

串联

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \tag{1.3.7}$$

并联

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \tag{1.3.8}$$

与电阻的串并联规律相反.

1.4 电介质

1.4.1 极化规律

电极化强度

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \boldsymbol{p}}{\Delta V} \tag{1.4.1}$$

电极化公式

$$\oint_S \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\sum_{S\text{内}} q' \tag{1.4.2}$$

微分形式:

$$\rho' = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \tag{1.4.3}$$

极化电荷面密度

$$\sigma' = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n} = P_n \tag{1.4.4}$$

电介质中的 Gauss 定理

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum q_0 \tag{1.4.5}$$

微分形式:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_0 \tag{1.4.6}$$

$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{P}$ 的关系:

$$\boldsymbol{P} = \epsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \Longrightarrow \boldsymbol{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \boldsymbol{E} = \epsilon_0 \epsilon_{\mathrm{r}} \boldsymbol{E} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{1.4.7}$$

相对介电常量: $\epsilon_{\mathrm{r}} = 1 + \chi_e$, 介电常量: $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_{\mathrm{r}}$.

eg1. 全空间充满相对介电常量为 ϵ_{r} 的电介质, 空间中有匀强电场 $\boldsymbol{E}_0$, 现在挖一个球形空腔, 球心处电场强度?

$$\boldsymbol{E} = \frac{4 - \epsilon_{\mathrm{r}}}{3} \boldsymbol{E}_0 \tag{1.4.8}$$

1.4.2 电场能

平行板电容器电场能

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V \tag{1.4.9}$$

电场能量密度

$$w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \tag{1.4.10}$$

1. 各项同性介质中:

$$w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \tag{1.4.11}$$

2. 真空中:

$$w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tag{1.4.12}$$

电场能

$$W_{\mathrm{e}} = \int w_{\mathrm{e}} \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}V \tag{1.4.13}$$

eg1. 均匀带电 Q 的球体 (无极化), 在全空间的电场能量?

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \tag{1.4.14}$$

eg2. 长 l 的电缆电荷线密度为 λ, 内筒半径 R_2, 外筒半径 R_2, 其储存的电场能量?

$$W_\mathrm{e} = \frac{\lambda^2 l}{4\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} \tag{1.4.15}$$

eg3. 平行板电容器接在电源 U 上, 将一块介质板插入其中, 已知板面积 S, 板间距与介质板厚度均为 d, 介质板相对介电常量 ϵ_r, 电场力做功?

$$A = \Delta W_\mathrm{e} = \frac{(\epsilon_\mathrm{r} - 1)\epsilon_0 S U^2}{2d} \tag{1.4.16}$$

2 静磁

2.1 恒定电流

2.1.1 电流

电流强度

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \int \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.1.1}$$

电流密度 (载流子漂移速度为 $\boldsymbol{u}$):

$$\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{u} = nq\boldsymbol{u} \tag{2.1.2}$$

电流连续方程 (电荷守恒定律)

$$\oint \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.1.3}$$

微分形式:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2.1.4}$$

守恒律普遍表达形式:

$$[\text{流密度的散度}] + [\text{空间密度的时间变化率}] = 0$$

Ohm 定律

$$U = IR \tag{2.1.5}$$

$R = \rho\dfrac{l}{S}$ 称为电阻, 单位为 Ohm (Ω), 其倒数 $G = \dfrac{1}{R}$ 称为电导, 单位为 Siemens (S); ρ 称为电阻率, 其倒数 $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ 称为电导率.

Ohm 定律微观形式:

$$\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{2.1.6}$$

电功率

$$P = UI \tag{2.1.7}$$

Joule 定律

$$Q = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t \tag{2.1.8}$$

2.1.2 电动势

$$\mathscr{E} = \oint \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{2.1.9}$$

$\boldsymbol{K}$ 为作用在单位正电荷上的非静电力 $\boldsymbol{K} = \dfrac{\boldsymbol{F}_{\text{非静电}}}{q}$.

2.1.3 电路

Kirchhoff 方程组

1. 第一方程组 (节点电流方程组): 汇于节点的各支路电流的代数和为 0, 本质为电荷守恒定律;
2. 第二方程组 (回路电压方程组): 沿回路一周, 电势降落的代数和为 0, 本质为恒定电场的环路定理.

2.2 静磁基本规律

2.2.1 磁感应强度

Ampere 定律 (两电流元间相互作用力)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2 \times (I_1 \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3} \tag{2.2.1}$$

其中 μ_0 称为真空磁导率, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$.

Biot-Savart 定律

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{2.2.2}$$

eg1. 载流导线 r 远处磁场?

设导线两端点处的矢径 (源点指向场点) 与电流方向的夹角分别为 θ_1, θ_2

$$\begin{cases} \boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \boldsymbol{e}_\theta & \text{无限长} \\[2ex] B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) & \text{有限长} \end{cases} \tag{2.2.3}$$

eg2. 半径为 R 的载流圆形线圈的磁场?

$$\begin{cases} B=\dfrac{\mu_0 I}{2R} & \text{圆周圆心处} \\ B=\dfrac{\mu_0 I\varphi}{4\pi R} & \text{圆心角为 } \varphi \text{ 的圆弧圆心处} \\ B=\dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{圆周轴线上距圆心 } x \text{ 远处} \end{cases} \tag{2.2.4}$$

eg3. 速度为 $\boldsymbol{v}$ 的运动电荷带电 q, 其产生的磁场?

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{2.2.5}$$

2.2.2 磁场的 Gauss 定理与 Ampere 环路定理

磁场的 Gauss 定理 (不仅限于恒磁场)

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{2.2.6}$$

微分形式:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{2.2.7}$$

Ampere 环路定理 (仅适用于恒磁场)

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}=\mu_0\sum_{L\text{内}} I \tag{2.2.8}$$

微分形式:

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j} \tag{2.2.9}$$

恒磁场结构: 无源; 有旋.

eg1. 无限长半径为 R 的载流圆筒, 距轴线 r 远处的磁场?

$$B=\begin{cases} 0 & r<R \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r>R \end{cases} \tag{2.2.10}$$

eg2. 无限长半径为 R 的载流圆柱体, 距轴线 r 远处的磁场?

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & r < R \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R \end{cases} \tag{2.2.11}$$

eg3. 无限长以匝密度为 n 密绕的螺线管产生的磁场?

$$B = \mu_0 n I \tag{2.2.12}$$

内部磁场处处相等, 外部无磁场分布.

2.3 磁场力

2.3.1 Ampere 力

Ampere 公式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B} \tag{2.3.1}$$

Ampere 力的微观本质是 Lorentz 力的叠加.

eg1. 平行无线长直导线间的相互作用, 两导线相距 a, 分别载流 I_1 与 I_2, 力的线密度?

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \tag{2.3.2}$$

eg2. 矩形载流线圈在均匀磁场中所受力矩?

$$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{B} \tag{2.3.3}$$

定义磁矩: $\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S}$, 则力矩: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$

eg3. 以角速度 ω, 轨道半径 R, 绕轴做圆周运动的带电体产生的环形电流的磁矩?

$$\begin{cases} m = \dfrac{qwR^2}{2} & \text{点电荷 } q \\ m = \pi\lambda\omega R^3 & \text{线电荷密度为 } \lambda \text{ 的均匀带电圆环} \\ m = \dfrac{\pi\sigma\omega R^4}{4} & \text{面电荷密度为 } \sigma \text{ 的均匀带电圆盘} \end{cases} \tag{2.3.4}$$

2.3.2 Lorentz 力

带电粒子所受磁场力:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{2.3.5}$$

Lorentz 力 (带电粒子在电磁场中所受总力):

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{2.3.6}$$

2.4 磁介质

2.4.1 磁化规律

磁化强度

$$\boldsymbol{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \boldsymbol{m}}{\Delta V} = n\boldsymbol{m} = nI\boldsymbol{S} \tag{2.4.1}$$

磁化面电流

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n} \tag{2.4.2}$$

磁介质公式

$$\oint_L \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \sum_{L内} I' \tag{2.4.3}$$

磁场强度

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \tag{2.4.4}$$

磁介质中的 Ampere 环路定理

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \sum I_0 \tag{2.4.5}$$

微分形式:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_0 \tag{2.4.6}$$

$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{M}$ 的关系:

$$\boldsymbol{M} = \chi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H} \Longleftrightarrow \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + \mu_0\boldsymbol{M} = \mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}})\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H} \tag{2.4.7}$$

相对磁导率: $\mu_r = 1 + \chi_{\mathrm{m}}$, 磁导率: $\mu = \mu_0\mu_r$.

2.4.2 边界条件

$\boldsymbol{B}$ 的法向连续性:

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 \quad \text{或} \quad B_{2\mathrm{n}}=B_{1\mathrm{n}} \tag{2.4.8}$$

$\boldsymbol{H}$ 的切向连续性 (界面上无传导面电流):

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0 \quad \text{或} \quad H_{2\mathrm{t}}=H_{1\mathrm{t}} \tag{2.4.9}$$

$\boldsymbol{B}$ 的切向不连续:

$$\frac{B_{1\mathrm{t}}}{\mu_1}=\frac{B_{2\mathrm{t}}}{\mu_2} \tag{2.4.10}$$

磁感线的折射定理:

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{2.4.11}$$

一般情况磁场边界条件:

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0\\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{f},\ \text{其中}\ \boldsymbol{\alpha}_\mathrm{f}\ \text{为传导面电流}\end{cases}$$

2.4.3 磁路定理

$$NI_0=\sum H_il_i=\mathit{\Phi}_B\sum R_{\mathrm{m}i}=\Phi_B\sum\frac{l_i}{\mu_0\mu_{ri}S_i} \tag{2.4.12}$$

即闭合磁路的磁动势等于各段磁路上磁势降落和

电路	电动势 $\mathscr{E}$	电流 I	电导率 σ_i	电阻 $R_i=\dfrac{l_i}{\sigma_iS_i}$	电势降落 IR_i
磁路	磁动势 NI_0	磁通量 $\mathit{\Phi}_B$	磁导率 $\mu_0\mu_{ri}$	磁阻 $\dfrac{l_i}{\mu_0\mu_{ri}S_i}$	磁势降落 $H_il_i=\mathit{\Phi}_B\dfrac{l_i}{\mu_0\mu_{ri}S_i}$

2.4.4 磁场能

磁场的能量密度

$$w_\mathrm{m}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} \tag{2.4.13}$$

自感线圈磁场能量

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}LI^2 \tag{2.4.14}$$

两个线圈的总磁场能

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int \mu_0\mu_r(H_1^2 + H_2^2 + 2\boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2)\,\mathrm{d}V \tag{2.4.15}$$

其中自感磁能:

$$\frac{1}{2}\int \mu_0\mu_r H_1^2\,\mathrm{d}V \quad \& \quad \frac{1}{2}\int \mu_0\mu_r H_2^2\,\mathrm{d}V \tag{2.4.16}$$

互感磁能:

$$\int \mu_0\mu_r \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2\,\mathrm{d}V \tag{2.4.17}$$

互感磁能密度

$$w_{\mathrm{m}} = \mu \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2 \tag{2.4.18}$$

eg1. 同轴载流 I 的圆筒内径为 R_1, 外径为 R_2, 单位长度储存的磁场能量?

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{\mu I^2}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} \tag{2.4.19}$$

3 时变电场

3.1 电磁感应

3.1.1 Faraday 电磁感应定律

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_B}{\mathrm{d}t} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \tag{3.1.1}$$

微分形式:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3.1.2}$$

eg1. 匀强磁场中有一面积为 S 可绕轴转动的 N 匝矩形线圈, 以角速度 ω 匀速转动, 线圈中感应电动势?

$$\mathscr{E} = NBS\omega \sin \omega t \tag{3.1.3}$$

3.1.2 动生电动势

$$\mathscr{E} = \int (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{3.1.4}$$

3.1.3 感生电动势

$$\mathscr{E} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.1.5}$$

3.2 电感

3.2.1 自感

自感效应

$$\Psi_B = N\Phi_B = LI \tag{3.2.1}$$

自感电动势

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_B}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{3.2.2}$$

计算自感系数L:

$$\text{假设通入电流 } I \to \text{计算 } \boldsymbol{B} \to \Psi_B = N\int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \to L = \frac{\Psi_B}{I}$$

eg1. 直螺线管单位长度匝数(匝密度)为 n, 其自感系数?

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} = \mu_0 (\frac{N}{l})^2 l S = \mu_0 n^2 V \tag{3.2.3}$$

eg2. 电缆(两同轴无限长圆柱), 内半径为 R_1, 外半径 R_2, 其自感系数?

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \tag{3.2.4}$$

单位长度自感系数:

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \tag{3.2.5}$$

eg3. 环形螺线管截面为矩形, 高为 h, 总匝数为 N, 内半径为 R_1, 外半径为 R_2, 其自感系数?

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \tag{3.2.6}$$

3.2.2 互感

互感效应

$$\Psi_{12} = N_1 \Phi_{12} = M I_2 \quad \& \quad \Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = M I_1 \tag{3.2.7}$$

互感电动势

$$\mathscr{E}_{12} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{12}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \quad \& \quad \mathscr{E}_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{3.2.8}$$

计算互感系数 M:

$$\text{选择一个易于计算的线圈并假设通入电流 } I \rightarrow \text{计算在另一线圈处的 } \boldsymbol{B}$$

$$\rightarrow \Psi_B = N \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rightarrow M = \frac{\Psi_B}{I}$$

3.2.3 串联线圈的自感系数

顺接:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_{12} + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_{21} = -(L_1\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}) - (L_2\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}) = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow L = L_1 + L_2 + 2M \tag{3.2.9}$$

反接:

$$L = L_1 + L_2 - 2M \tag{3.2.10}$$

无漏磁的情况下:

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \Longrightarrow L = L_1 + L_2 \pm 2\sqrt{L_1 L_2} \tag{3.2.11}$$

一般情况下是有漏磁的:

$$M = K\sqrt{L_1 L_2} \tag{3.2.12}$$

K 称为耦合系数, 反映两回路磁场耦合的松紧程度, $0 \le K \le 1$.

3.2.4 电感磁能

自感磁能

$$W_{\mathrm{ind}} = \frac{1}{2} L I^2 \tag{3.2.13}$$

互感磁能

$$W_{\mathrm{mut}} = M I_1 I_2 \tag{3.2.14}$$

3.3 暂态过程

3.3.1 RL 电路的暂态过程

充电:

$$\mathscr{E} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = IR \Rightarrow I = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \tag{3.3.1}$$

放电:

$$-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = IR \Rightarrow I = \frac{\mathscr{E}}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \tag{3.3.2}$$

3.3.2 RC 电路的暂态过程

充电:

$$\mathscr{E} = IR + \frac{q}{C} \Rightarrow q = C\mathscr{E}(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) \tag{3.3.3}$$

放电:

$$IR + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow q = C\mathscr{E}e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{3.3.4}$$

3.3.3 LCR 电路的暂态过程

充电:

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=\mathscr{E} \tag{3.3.5}$$

放电:

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=0 \tag{3.3.6}$$

LC 电路振荡频率与周期:

$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \& \quad T_0=2\pi\sqrt{LC} \tag{3.3.7}$$

LCR 电路振荡频率与周期:

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}} \quad \& \quad T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}} \tag{3.3.8}$$

4 Maxwell 电磁理论

4.1 Maxwell 方程组的导出

4.1.1 电磁现象基本实验规律

静电场的 Gauss 定理

$$\oint \boldsymbol{D}_\mathrm{s} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q_0 \tag{4.1.1}$$

表明静电场是有源场.

静电场的环路定理

$$\oint \boldsymbol{E}_\mathrm{s} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0 \tag{4.1.2}$$

表明静电场是无旋场 (保守场, 有势场).

恒定磁场的 Gauss 定理

$$\oint \boldsymbol{B}_\mathrm{s} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{4.1.3}$$

表明恒定磁场是无源场.

恒定磁场的环路定理

$$\oint \boldsymbol{H}_\mathrm{s} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = I_0 \tag{4.1.4}$$

表明恒定磁场是有旋场.

电磁感应定律

$$\oint \boldsymbol{E}_\mathrm{k} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4.1.5}$$

表明变化的磁场可以产生涡旋电场.

微分形式:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D}_\mathrm{s} = \rho_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E}_\mathrm{s} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B}_\mathrm{s} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H}_\mathrm{s} = \boldsymbol{j}_0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E}_\mathrm{k} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \end{cases}$$

4.1.2 位移电流

位移电流

$$I_\mathrm{d} = \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} \tag{4.1.6}$$

位移电流密度

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{d}}=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{4.1.7}$$

4.1.3 Maxwell 方程组

真空中 Maxwell 方程组

$$\begin{cases}\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\dfrac{q}{\epsilon_0}\\ \oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}=-\displaystyle\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ \oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\\ \oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}=\mu_0 I+\mu_0\epsilon_0\displaystyle\int \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\nabla\cdot \boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0}\\ \nabla\times \boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot \boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\end{cases} \tag{4.1.8}$$

介质中 Maxwell 方程组

$$\begin{cases}\nabla\cdot \boldsymbol{D}=\rho_{\mathrm{f}}\\ \nabla\times \boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot \boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times \boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_{\mathrm{f}}+\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\end{cases} \tag{4.1.9}$$

本构关系:

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}\end{cases} \tag{4.1.10}$$

边界条件:

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\sigma_{\mathrm{f}}\\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0\\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0\\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{f}}\end{cases} \tag{4.1.11}$$

Maxwell 方程组的积分形式与微分形式并不完全等价: 在介质界面处, 微分形式失去意义, 此时需要使用积分形式, 或者补充边界条件.

4.2 电磁波

无源空间 ($\rho = 0, \boldsymbol{j} = 0$) 中 Maxwell 方程组:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{4.2.1}$$

真空中电磁波方程

$$\begin{cases} \text{电场波动方程: } \nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \boldsymbol{E} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \text{磁场波动方程: } \nabla^2 \boldsymbol{B} - \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \boldsymbol{B} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \tag{4.2.2}$$

定义 **d'Alembert 算符**:

$$\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{4.2.3}$$

则电磁波方程化为:

$$\begin{cases} \Box \boldsymbol{E} = 0 \\ \Box \boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \tag{4.2.4}$$