微分几何 - 学习笔记

Alpha Version

潜龙勿用 容与

本笔记根据上海交通大学 Tobias Diez 老师的 Differential Geometry 课程内容编写

rongyu221104@163.com

Typeset with LaTeX

目录

1 曲线论

1.1 参数化曲线 (Parameterized Curve)

1.1.1 定义 1: 曲线 (Curve)

设 I 是一个区间, $\mathbb{R}^n$ 为 n 维 Euclidean 空间 (通常 $n = 2, 3$), c 为一个光滑的映射,

$$c : I \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto c(t) \tag{1.1.1}$$

则称 c 为**参数化曲线**. 称其像的集合 $\{c(t) \mid t \in I\}$ 为**曲线**.

参数 t 不一定代表时间, 但可借用物理背景, 定义速度矢量 $\dot{c}(t) = \dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$ 与加速度矢量 $\ddot{c}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\dot{c}}{\mathrm{d}t}$.

1.1.2 定义 2: 正则曲线 (Regular Curve)

设一条参数化曲线 c, 若 c 满足:

$$\dot{c}(t) \neq 0,\ \forall t \in I \tag{1.1.2}$$

则称 c 为一条**正则曲线**.

正则曲线没有尖点和角, 且每一点都有一个方向明确的非零切向量.

1.1.3 定义 3: 曲线的长度 (Length of a Curve)

设参数化曲线 $c : I \to \mathbb{R}^n$ $(I = [a, b]$ or $(a, b))$, c 的长度为:

$$L(c) := \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{1.1.3}$$

1.1.4 定义 4: 微分同胚 (Diffeomorphism)

设 φ 是一个映射, 若满足:

1. φ 是光滑的;
2. φ 是一个双射;
3. 其逆映射 φ^{-1} 也是光滑的;

则称 φ 为一个**微分同胚**.

1.1.5 定义 5: 重参数化 (Reparameterization)

设参数化曲线 $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$, 微分同胚 $\varphi : I_2 \to I_1$ ($\varphi'(s) > 0,\ \forall s \in I_2$), 则称另一参数化曲线 $c_2(s)$:

$$c_2 = c_1 \circ \varphi : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \& \quad c_2(s) = c_1(\varphi(s)) \tag{1.1.4}$$

为 c_1 通过 φ 的**重参数化**.

1.1.6 命题 1

若 c_2 为 c_1 的一条重参数化曲线, 则 c_1 与 c_2 长度相同. 换言之, 曲线的长度与参数化的方式无关.

$$\dot{c}_2(s) = \frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}s}(s) \xlongequal{\text{链式法则}} \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)$$

$$\Longrightarrow L(c_2) = \int_{a_2}^{b_2} \left\| \frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}s}(s) \right\| \mathrm{d}s = \int_{a_2}^{b_2} \left\| \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(\varphi(s)) \right\| \cdot \|\varphi'(s)\| \,\mathrm{d}s = \int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(t) \right\| \mathrm{d}t = L(c_1)$$

1.1.7 命题 2

若 $\|\dot{c}(t)\| = 1$, 则有

$$\dot{c}(t)\ddot{c}(t) = 0 \tag{1.1.5}$$

$$\|\dot{c}(t)\| = 1 \Longrightarrow \|\dot{c}(t)\|^2 = \dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t) = 1 \xrightarrow{\text{求导}} \ddot{c}(t) \cdot \dot{c}(t) + \dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t) = 0 \Longrightarrow \dot{c}(t)\ddot{c}(t) = 0$$

1.1.8 定义 6: 弧长参数化曲线 (Arclength Parameterized Curve)

设参数化曲线 $c : I \to \mathbb{R}^n$ 具有单位速率 (即 $\|\dot{c}(t)\| \equiv 1, \forall t \in I$), 则称其为**弧长参数化的**. 其长度为:

$$L(c_{[a,b]}) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \,\mathrm{d}t = b - a \tag{1.1.6}$$

1.1.9 命题 3

每条正则曲线都可被重参数化为一条弧长参数化曲线.

设微分同胚 $\varphi : I \to I$ ($s \overset{\varphi}{\mapsto} t$) 使正则曲线 $c(t)$ 重参数化为弧长参数化曲线 $\tilde{c}(s)$,

$$s = \psi(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{c}(t)\| \,\mathrm{d}t = L(c_{[t_0,t]}),\ t_0 \in I \quad \left(\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} = \|\dot{c}(t)\| > 0 \right)$$

$$\psi^{-1} \equiv \varphi \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}(\varphi(s))} = \frac{1}{\|\dot{c}(\varphi(s))\|}$$

$$\left\|\dot{\tilde{c}}(s)\right\| = \left\|\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(\varphi(s))\right\| \cdot \|\varphi'(s)\| = \left\|\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(\varphi(s))\right\| \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(\varphi(s))\|} = 1$$

1.1.10 定理 1: 活动标架 (Moving Frame)

设 $c: I \to \mathbb{R}^n$ 为一条单位速度曲线, 且 $\|\ddot{c}\| \neq 0$, $\forall t \in I$, 其切向量 (Tangent Vector) 与法向量 (Normal Vector) 为:

$$T(t) := \dot{c}(t) \quad N(t) := \frac{\ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|} \tag{1.1.7}$$

$T(t)$ 与 $N(t)$ 均长度为 1 且相互垂直, 构成一对正交归一向量.

若 c 位于二维 Euclidean 空间中, 则 $T(t), N(t)$ 构成一个沿 c 移动的标准正交基, 称其为 c 的**活动标架 (Moving Frame)** 或称 **Frenet-Serret 标架**.

1.1.11 定义 7: 曲率 (Curvature)

设弧长参数化曲线 $c: I \to \mathbb{R}^n$, 有

$$\kappa(t) = \|\ddot{c}(t)\| \in [0, \infty) \tag{1.1.8}$$

称 $\kappa(t)$ 为 c 在 t 处的**曲率**.

1.1.12 非弧长参数化曲线的曲率

若正则曲线 c 是非弧长参数化的, 令 $\tilde{c} = c \circ \varphi$ 为其弧长参数化映射, $\tilde{\kappa}$ 为 $\tilde{c}$ 的曲率, 则 c 的曲率为:

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}\left(\varphi^{-1}(t)\right) \tag{1.1.9}$$

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2 - \dot{v}^2(t)}}{v^2(t)} = \frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2 - [\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t)]^2}}{v^3(t)} \tag{1.1.10}$$

其中, 速率 $v(t) = \|\dot{c}(t)\|$.

$$\mathrm{d}s = \|\dot{c}(t)\| \,\mathrm{d}t \Longrightarrow v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$T(s) = \frac{\dot{c}(t)}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{c}(t)}{v(t)} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}T/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{1}{v(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\dot{c}(t)}{v(t)}\right) = \frac{\ddot{c}(t)v(t) - \dot{v}(t)\dot{c}(t)}{v^3(t)}$$

$$\dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\dot{c}(t)\| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t)} = \frac{\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t)}{v(t)} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \frac{\ddot{c}(t)v^2(t) - \dot{c}(t)\left[\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t)\right]}{v^4(t)}$$

$$\kappa(t)=\left\|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\right\|=\frac{1}{v^4(t)}\sqrt{\{\ddot{c}(t)v^2(t)-\dot{c}(t)\left[\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)\right]\}^2}=\frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2-\left[\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)\right]^2}}{v^3(t)}$$

$$\xRightarrow{\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)=\dot{v}(t)v(t)}\kappa(t)=\frac{\sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2-\dot{v}^2(t)}}{v^2(t)}$$

1.2 曲线的局部性质与整体结构

1.2.1 定义 8: 回路 (Loop) & 简单回路 (Simple Loop)

设参数化曲线 $c:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, 若 $c(a)=c(b)$, 且 c 在端点 a 和 b 处的所有单侧导数均相等, 即

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=a}c(t)=\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=b}c(t),\quad \forall k\geq 1 \tag{1.2.1}$$

则称 c 为**回路**.

若 c 不与自身相交, 即

$$c(t_1)\neq c(t_2),\quad \forall t_1,t_2\in(a,b)\ 且\ t_1\neq t_2 \tag{1.2.2}$$

则称 c 为**简单回路**.

1.2.2 定理 2: Jordan 曲线定理

平面 $\mathbb{R}^2$ 上的每条简单回路, 都将平面分成两个集合: 一个是有界的, 称为回路的内部; 另一个是无界的, 称为回路的外部.

1.2.3 定理 3: 等周不等式 (Isoperimetric Inequality)

设简单回路 $c:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, 长度为 L, 所围区域的面积为 A, 则有

$$4\pi A\leq L^2 \tag{1.2.3}$$

当且仅当 c 为一个圆周时, 等号成立.

1.2.4 引理

设一条简单正则回路 $c:I\to\mathbb{R}^2$, 则一定存在 $t_0\in I$, 使得在 c 处的密切圆存在, 且在回路内部.

定义 p 点处的极大圆 (maximal circle) c_p: 与 c 相切于 p 且位于 c 内部的半径最大的圆, c_p 与 c 至少还有另一个交点 q. 择一参数 $t\in[a,b]$, 使得 $p=c(t)$, 那么

1. 若 c 在 p 处的密切圆位于 c 内部, 则符合上述引理;
2. 假设该密切圆不在 c 内部, 则 p 处极大圆的半径一定严格小于该密切圆, 密切圆作为曲线的二阶近似, 保证了在 p 的某一邻域内，其极大圆与 c 不再相交.

1.2.5 定理 4: Moon in the Puddle (Pestov & Ionin, 1959)

设 $c: I \to \mathbb{R}^2$ 是一条简单正则回路, 若

$$\kappa(t) \leq 1, \quad \forall t \in I$$

则 c 所围区域一定包含一个单位圆 (unit disc).

其中, "$\kappa(t) \leq 1$" 为曲线的局部性质, "一定包含一个单位圆" 为曲线的整体性质, 该定理将二者关联了起来.

假设曲线 c 上存在一点 $p = c(t_0)$, 使得该点处的密切圆 σ 位于曲线内部, σ 的半径 $r = \dfrac{1}{\kappa(t_0)} \geq 1$ 因此, 其一定包含一个单位圆.

1.2.6 定义 9: 环绕数 (Winding Number)

设 $c: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ 为一个环路, P_0 为不在 c 上的一点, 将 c 沿逆时针绕过 P_0 圈数称为**环绕数**, 记作 $W(c, P_0)$. 显然有 $W(c, P_0) \in \mathbb{Z}$.

1.2.7 命题 4: 环绕数的性质

1. $W(c, P_0)$ 的值依赖于 P_0 的选取;
2. 若 P_1 与 P_2 能被一条不与 c 相交的曲线相连, 则有 $W(c, P_1) = W(c, P_2)$;
3. 若 c 的连续形变不经过 P_0, 则 $W(c, P_0)$ 在该形变下保持不变, 即: 设 c_δ 为一族回路, 且有
$$c_\delta(t) \neq P_0,\ \forall \delta, t$$
则 $W(c_{\delta,} P_0)$ 的取值与 δ 无关.

1.2.8 环绕数公式

$$W(c, O) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} \, \mathrm{d}t \tag{1.2.4}$$

将 P_0 平移到坐标原点 O, 替换到极坐标系下, 有 $c(t)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\theta\\r\sin\theta\end{pmatrix}$, 回路 c 绕 O 的环绕数为 $W(c,O)=\dfrac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}$,

$$\dot c(t)\begin{pmatrix}\dot x\\\dot y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot r\cos\theta-r\dot\theta\sin\theta\\\dot r\sin\theta+r\dot\theta\cos\theta\end{pmatrix}=\dot r\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}+r\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}=\frac{\dot r}{r}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\dot\theta\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}\dot x\\\dot y\end{pmatrix}(-y,x)=\frac{\dot r}{r}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}(-y,x)+\dot\theta\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}(-y,x)\Longrightarrow\dot\theta=\frac{x\dot y-y\dot x}{x^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow W(c,O)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{x\dot y-y\dot x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}t$$

1.3 三维空间中曲线的性质

1.3.1 定义 10: $\mathbb{R}^3$ 中曲线的 Frenet-Serret 标架

设 c 为 $\mathbb{R}^3$ 中的参数化曲线, 其切向量为 $T(t)$, 曲率 $\kappa(t)=|\ddot c(t)|$. 假设 $\kappa>0$, 则 $N(t)=\dfrac{\ddot c(t)}{|\ddot c(t)|}$, 且有**副法向量** (binormal vector):

$$B(t)=T(t)\times N(t)\tag{1.3.1}$$

称 $\{T,N,B\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中曲线的 Frenet-Serret 标架.

1.3.2 定义 11: 挠率 (Torsion)

设 c 为 $\mathbb{R}^3$ 中的弧长参数化曲线, N,B 分别为 c 的主法向量和副法向量, 称

$$\tau(s)=-\dot B(s)\cdot N(s)\tag{1.3.2}$$

为 c 在 s 处的**挠率**.

1.3.3 定理 5: Frenet-Serret 公式

设参数化曲线 $c:I\to\mathbb{R}^3$ 有 Frenet-Serret 标架 T,N,B, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\-\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix}=(\tau T+\kappa B)\times\begin{pmatrix}T\\N\\B\end{pmatrix}\tag{1.3.3}$$

$\dot{T}=\ddot{c}=\kappa N$, 假设存在 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 使得 $\dot{N}=aT+bN+cB$,

$$\begin{cases} N\cdot T=0 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \underbrace{\dot{N}\cdot T}_{a}+\underbrace{N\cdot\dot{T}}_{\kappa}=0 & \Longrightarrow a=-\kappa \\ N\cdot N=1 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} 2\underbrace{\dot{N}\cdot N}_{b}=0 & \Longrightarrow b=0 \\ N\cdot B=0 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \underbrace{\dot{N}\cdot B}_{c}+N\cdot\dot{B}=0 & \Longrightarrow c=-N\cdot\dot{B} \end{cases}$$

令 $c=\dot{N}\cdot B=-N\cdot\dot{B}\equiv\tau$, 设 $\dot{B}=\tilde{a}T+\tilde{b}N+\tilde{c}B$,

$$\begin{cases} B\cdot B=1 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} 2\underbrace{\dot{B}\cdot B}_{\tilde{c}}=0 & \Longrightarrow \tilde{c}=0 \\ B\cdot T=0 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \underbrace{\dot{B}\cdot T}_{\tilde{a}}+\underbrace{B\cdot\dot{T}}_{=B\cdot\kappa N=0}=0 & \Longrightarrow \tilde{a}=0 \\ B\cdot N=0 \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \underbrace{\dot{B}\cdot N}_{\tilde{b}}+\underbrace{B\cdot\dot{N}}_{\tau}=0 & \Longrightarrow \tilde{b}=-\tau \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{T}=\kappa N \\ \dot{N}=-\kappa T+\tau B \\ \dot{B}=-\tau N \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} T\\ N\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T\\ N\\ B\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} T\\ N\\ B\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \kappa N\\ -\kappa T+\tau B\\ -\tau N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \kappa B\times T\\ -\kappa N\times B+\tau T\times N\\ -\tau B\times T\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tau T\times T+\kappa B\times T\\ \tau T\times N+\kappa B\times N\\ \tau T\times B+\kappa B\times B\end{pmatrix}=(\tau T+\kappa B)\times\begin{pmatrix} T\\ N\\ B\end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3.4 曲率与挠率的几何意义

曲率 κ 度量了标架绕 B 的转动; 而挠率 τ 度量了标架绕 T 的转动.

$$\varOmega=\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix} \tag{1.3.4}$$

显然 $\varOmega$ 是一个斜对称矩阵 (skew-symmetric matrix):

$$\varOmega^{\mathrm{T}}=-\varOmega \tag{1.3.5}$$

Ω 描述了标架如何变化

1.3.5 曲线参数方程在一点的标准展开

在 $t=0$ 附近对一条弧长参数化曲线作 Taylor 展开:

$$c(t) = c(0) + t\dot{c}(0) + \frac{t^2}{2}\ddot{c}(0) + \frac{t^3}{6}\dddot{c}(0) + \cdots \tag{1.3.6}$$

$$\begin{aligned} \dot{c}(0) &= T(0) \\ \ddot{c}(0) &= \kappa(0)N(0) \\ \dddot{c}(0) &= \dot{\kappa}(0)N(0) - \kappa(0)^2 T(0) + \kappa(0)\tau(0)B(0) \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

$$c(t) \approx c(0) + tT(0) + \frac{t^2}{2}\kappa(0)N(0) + \frac{t^3}{6}\kappa(0)\tau(0)B(0) \tag{1.3.8}$$

1. $c(0) + tT(0)$ 表示曲线在切方向上的线性运动;
2. $c(0) + tT(0) + \dfrac{t^2}{2}\kappa(0)N(0)$ 表示曲线在 T-N 平面上的抛物运动 (取决于曲率 κ);
3. $\dfrac{t^3}{6}\kappa(0)\tau(0)B(0)$ 表示垂直于 T-N 平面的运动 (取决于挠率 τ).

1.3.6 命题 5: 空间曲线平面性的判定

设 $c: I \to \mathbb{R}^3$ 是一条弧长参数化曲线, 其曲率 $\kappa > 0$, 当且仅当挠率 $\tau = 0$ 时, c 位于一个平面内.

1.3.7 定理 6: 曲线论基本定理 (Frenet-Serret 定理)

若给定可微函数 $\begin{cases} \kappa: [0, L] \to (0, \infty) \\ \tau: [0, L] \to \mathbb{R} \end{cases}$, 点 $p_0 \in \mathbb{R}^3$, 与标准正交基 $T_0, N_0, B_0 \in \mathbb{R}^3$, 则存在唯一的弧长参数化曲线 $c: [0, L] \to \mathbb{R}^3$, 使得:

1. 其曲率为 $\kappa(s)$, 挠率为 $\tau(s)$;
2. 初始点为 $c(0) = p_0$;
3. 初始 F-S 标架为 $T(0) = T_0, N(0) = N_0, B(0) = B_0$.

该定理表明: 曲线的曲率和挠率完全决定了曲线的形状 (或称在刚体运动下唯一).

注记

通常, 确定一条曲线需要三个函数, 即 $c(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}$. 在该定理中, 三个函数分别为: κ, τ, 与 $v\equiv 1$.

2 曲面论

2.1

2.1.1 定义 1: 开球 (Open Ball), 开圆盘 (Open Disc)

设 $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, 则称

$$B_r(p) = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - p|^2 = (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 < r^2 \right\} \tag{2.1.1}$$

为 $\mathbb{R}^2$ 中的**开球**或**开圆盘**.

开球的概念可推广至 $\mathbb{R}^n$, 开圆盘为开球在 $\mathbb{R}^2$ 的特例.

2.1.2 定义 2: $\mathbb{R}^2$ 中的开集 (Open Subset)

设一个集合 $D \in \mathbb{R}^2$, 若对于每一点 $p \in D$, 都存在一个半径 r, 使得 D 包含开球 $B_r(p)$, 则称 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个**开集**.

2.1.3 定义 3: 高维映射的可微性 (Differentiability)

设一个连续映射 $\varPhi : D \to \mathbb{R}^3$ ($D \in \mathbb{R}^2$), 若对于每一点 $p = (p_1, p_2) \in D$, 都存在一个开球 $B_r(p) \subseteq D$, 使得映射

$$\begin{aligned} c_x &: (-r, +r) \to \mathbb{R}^3,\ c_x(t) = \varPhi(p_1 + t, p_2) \\ c_y &: (-r, +r) \to \mathbb{R}^3,\ c_y(t) = \varPhi(p_1, p_2 + t) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

均可微, 则称 $\varPhi$ 是**可微的**.

2.1.4 定义 4: 高维映射的偏导数 (Partial Derivative)

映射 $\varPhi$ 在 $p \in D$ 处的**偏导数**定义为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varPhi}{\partial x} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} c_x(t) \\ \frac{\partial \varPhi}{\partial y} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} c_y(t) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

若 $\varPhi(x,y)=\begin{pmatrix}\varPhi_1(x,y)\\ \varPhi_2(x,y)\\ \varPhi_3(x,y)\end{pmatrix}$, 则 $\dfrac{\partial\varPhi}{\partial x}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varPhi_1}{\partial x}(x,y)\\ \dfrac{\partial\varPhi_2}{\partial x}(x,y)\\ \dfrac{\partial\varPhi_3}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}$. 于是, 映射的偏导数可构成新的映射:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varPhi}{\partial x}:&D\to\mathbb{R}^3\quad(D\in\mathbb{R}^2)\\ &(p_1,p_2)\mapsto\frac{\partial\varPhi}{\partial x}(p_1,p_2)\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

2.1.5 定义 5: 切映射 (Tangent Map)

曲线 c 在 t 处沿 v 方向的**切映射**为

$$T_tc(v)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}c(t+\varepsilon v)=v\cdot\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t c\tag{2.1.5}$$

切映射 $T_tc:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 包含了与 $\dot{c}$ 相同的几何信息, 但此时将其视作一个映射.

定义 $\varPhi$ 在 $p\in D$ 处的**切映射** $T_p\varPhi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$:

$$T_p\varPhi\left(v_1,v_2\right)=\left(\frac{\partial\varPhi}{\partial x}\left(p\right),\frac{\partial\varPhi}{\partial y}\left(p\right)\right)\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=v_1\frac{\partial\varPhi}{\partial x}\left(p\right)+v_2\frac{\partial\varPhi}{\partial y}\left(p\right)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}c_v(\varepsilon)\tag{2.1.6}$$

其中 $c_v(\varepsilon)=\varPhi(p+\varepsilon v)=\varPhi(p_1+\varepsilon v_1,p_2+\varepsilon v_2)$. $T_p\varPhi$ 包含了与 $\left(\dfrac{\partial\varPhi}{\partial x},\dfrac{\partial\varPhi}{\partial y}\right)$ 相同的几何信息, 但此时将其视作一个映射. $T_p\varPhi$ 为 $\varPhi$ 的一阶近似.

2.1.6 定义 6: 高维映射的 Jacobian 矩阵

$\varPhi$ 在 p 处的 **Jacobian 矩阵**为:

$$\mathbf{J}_{\varPhi}(p)=\left(\frac{\partial\varPhi}{\partial x},\frac{\partial\varPhi}{\partial y}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varPhi_1}{\partial x}&\dfrac{\partial\varPhi_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\varPhi_2}{\partial x}&\dfrac{\partial\varPhi_2}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\varPhi_3}{\partial x}&\dfrac{\partial\varPhi_3}{\partial y}\end{pmatrix}\tag{2.1.7}$$

$\varPhi:D\to\mathbb{R}^3$ $(D\in\mathbb{R}^2)\Longrightarrow$ Jacobian 矩阵是一个 3×2 矩阵.

2.1.7 定义 7: 高维映射的正则性 (Regularity)

$\varPhi$ 是**正则的**, 或者称**非退化的** (non-degenerate), 当且仅当:

1. $\forall p \in D$, 切映射 $T_p\Phi$ 的像均是 2 维的 (正则的参数化曲面 Φ 每一点都有唯一的切平面);
2. 偏导数 $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(p)$ 与 $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(p)$ 线性无关, 即二者非零且不平行;
3. $\forall p \in D$, $\operatorname{rank} \mathbf{J}_\Phi(p) = 2$;

以上均为正则性的等价表述.

2.1.8 定义 8: 参数化曲面