Tarea 6. Modelos AR, MA y ARIMA

Nombre: Verónica Vanessa Aguilar Ortiz
Matricula: 1855188
Unidad de aprendizaje: Estadistica Aplicada
Grupo: 051

1. Para el siguiente proceso:
$Y_t = \varepsilon_t$ donde $\varepsilon \sim iid\ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ por tanto $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$

a) Encuentra su media
$E(Y_t) = E(\varepsilon_t) = 0$

b) muestra que $var(Y_t) = \sigma_\varepsilon^2$ y que $\sigma_\varepsilon^2 = E(\varepsilon_t^2)$
$Var(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = E(\varepsilon_t - 0)^2 = E(\varepsilon_t)^2 = \sigma_\varepsilon^2$
$= E$

c) calcula su covarianza
$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_{t+k} - \mu_{t+k})] = E[(\varepsilon_t - 0)(\varepsilon_{t+k} - 0)]$
$= E[(\varepsilon_t)(\varepsilon_{t+k})] = 0$

d) señale si el proceso es estacionario y por qué
El proceso si es estacionario por que tiene su media, varianza y covarianza constante

② Para el proceso

$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$ donde $\varepsilon \sim iid\ N(0, \sigma^2_\varepsilon)$

por tanto $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$

a) ¿Qué condición garantiza la convergencia de la sumatoria infinita del proceso?

Que $|\phi| < 1$

b) Encuentra su media

$E(Y_t) = c + \phi_1 E(Y_{t-1}) + E(Y_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$

$\mu = c + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu + 0$

$\mu(1 - \phi_1 - \phi_2) = c$

$\mu = \dfrac{c}{1-\phi_1-\phi_2}$, donde $\phi_1 + \phi_2 \neq 1$

c) Encuentra su varianza

$Y_t = c + \phi_1 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

$Y_t = \mu(1-\phi_1-\phi_2) + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

$\tilde{Y}_t = \phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \varepsilon_t$

$\Rightarrow \gamma_0 = Var(Y_t) = E(\tilde{Y}_t^2) = E[(\phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \varepsilon_t)^2] =$

$= E[\phi_1^2 \tilde{Y}_{t-1}^2 + \phi_2^2 \tilde{Y}_{t-2}^2 + \varepsilon_t^2 + 2\phi_1\phi_2 \tilde{Y}_{t-1}\tilde{Y}_{t-2} + \ldots$

$\ldots 2\phi_1 \tilde{Y}_{t-1}\varepsilon_t + 2\phi_2 \tilde{Y}_{t-2}\varepsilon_t] = \phi_1^2 \gamma_0 + \phi_2^2 \gamma_0 + \sigma^2_\varepsilon +$

$\ldots 2\phi_1\phi_2 \gamma_1$

$\gamma_0 = E[(Y_t - \mu)^2] = E(\tilde{Y}_t^2)$

$\gamma_1 = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)] = E[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-1}]$

$E[(\phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \varepsilon_t)(\tilde{Y}_{t-1})] = E[\phi_1 \tilde{Y}_{t-1}^2 + \phi_2 \tilde{Y}_{t-1}\tilde{Y}_{t-2} + \varepsilon_t \tilde{Y}_{t-1}]$

$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1$

$\gamma_1 - \phi_2 \gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 = \dfrac{\phi_1 \gamma_0}{1-\phi_2}$

$\gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \phi_2^2 \gamma_0 + \sigma^2_\varepsilon + 2\phi_1\phi_2 \left(\dfrac{\phi_1 \gamma_0}{1-\phi_2}\right)$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2-\phi_2^2-2\phi_1\phi_2\left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\right)} = \frac{(1-\phi_2)\sigma_\varepsilon^2}{1+\phi_2\,[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2)]}$$

d) encuentra la covarianza con el primer rezago

$Cov(Y_t, Y_{t-1})$

$\gamma_1 = Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[(Y_t-\mu)(Y_{t-1}-\mu)] = E[\tilde{Y}_t \cdot \tilde{Y}_{t-1}]$

$E[(\phi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \varepsilon_t)(\tilde{Y}_{t-1})] = E[\phi_1 \tilde{Y}_{t-1}^2 + \phi_2 \tilde{Y}_{t-1}$
$\tilde{Y}_{t-2} + \varepsilon_t \cdot \tilde{Y}_{t-1}]$

$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = \dfrac{\phi_1 \gamma_0}{1-\phi_2}$

f) Calcula ρ_1

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\right)\gamma_0}{\gamma_0} = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}.$$

③ Para el siguiente proceso

$Y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

donde $\varepsilon \sim iid\ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ por tanto $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$

a) Encuentra su media

$E(Y_t) = E[\theta_1 \varepsilon_{t-1}] + E[\theta_2 \varepsilon_{t-2}] + E[\varepsilon_t] + E[\mu]$
$= 0 + \mu = \mu$

b) Encuentra su varianza

$\gamma_0 = Var(Y_t) = E[(Y_0-\mu)^2] = E[(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t + \mu - \mu)^2]$
$= E[(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)^2] = \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2$
$= (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2$

c) Encuentra la covarianza con el rezago k

$Cov(Y_t, Y_{t-k})$

$$\gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t-k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] = E[(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)$$
$$(\theta_1 \varepsilon_{t-k-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-k-2} + \varepsilon_{t-k})] = E[\theta_1^2 \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1} + \theta_1\theta_2 \varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2}$$
$$+ \theta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-k-1} + \theta_1\theta_2 \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2} + \theta_2^2 \varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2} + \theta_2 \varepsilon_t \varepsilon_{t-k-2}$$
$$+ \theta_1 \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0$$

a) Encuentra ρ_k

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{0}{\cancel{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2}} = 0$$

e) Grafica la función de auto correlación del proceso, $\rho_1 \cdots \rho_{10}$