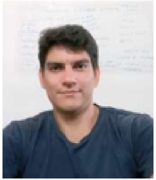
Centro de Massa

O centro de massa de um sistemas de partículas é o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada em um único ponto e todas as forças externas estivesse aplicadas nesse único ponto

MSc Raimundo Ronis

Institutes of UPFA/IFPA Teams

September 7, 2023



Contexto

Introdução

Nesta aula discutiremos a forma para determinar a localização do **centro de massa** de um sistema de partículas.

Inicializando com poucas partículas.

Generalizando para N partículas.

Saberemos como o **centro de massa de um sistema** se move quando o mesmo está submetido à **forças externas.**

Sistema de Partículas

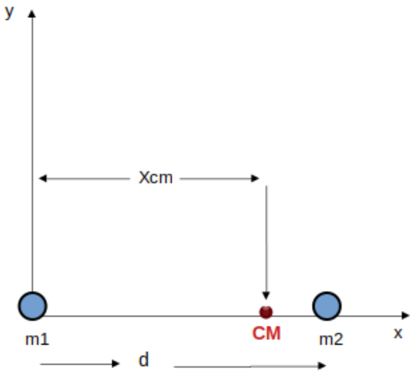


Figure: 1 - Duas partículas de massa m_1 e m_2 separadas por uma distância d. O ponto marcado como CM mostra a posição do centro de massa

Sistema de partículas

Escolhendo arbitrariamente como a origem do eixo (0,0) a posição da partícula m_1.
Definimos a posição do centro de massa (CM) desse sistema de duas partículas como:

$$x_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \tag{1}$$

Sistema de partículas

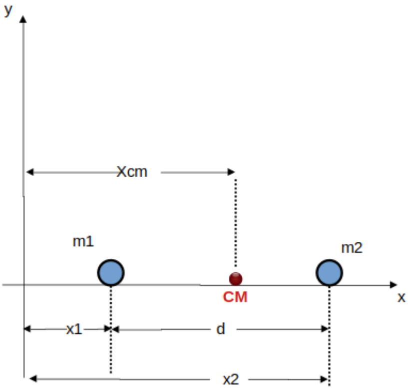


Figure: 2 - Duas partículas de massa m_1 e m_2 separadas por uma distância d. O ponto marcado como CM mostra a posição do centro de massa

Sistema de partículas

Na Fig. [2] deslocamos a posição de m_1 para o sentido positivo do eixo x. Reescrevendo a fórmula da posição do centro de massa como:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m2} \tag{2}$$

Observe que se $x_1 = 0$ voltamos ao caso anterior Eq.[1], pois $d = x_2$, caso isto ocorra. Como era de esperar.

Sistema de partículas

Note que a distância entre as partículas x_1 e x_2 continua a mesma, mesmo deslocando as mesmas na direção positiva de x. Podemos reescrever a Eq.[2] da seguinte maneira:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \tag{3}$$

M é a massa total do sistema em que $M = m_1 + m_2$. Generalizando para n partículas posicionadas ao lono do eixo x. Nesse caso $M = m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n$. Agora a posição do centro de massa para esta condição generalizada é:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + ... + m_n x_n}{M} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \tag{4}$$

Sistema de partículas

Vamos generalizar as dimensões para o caso 3-D. Agora as coordenadas do CM deve ser especificado por três coordenadas extendendo a Eq.[4], temos:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i}^{n} m_i x_i \quad y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i}^{n} m_i y_i \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i}^{n} m_i z_i \tag{5}$$

Vamos generalizar para para o formalismo de vetores, relembrando que a posição de uma partícula no espaço 3-D é $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$.

Sistema de partículas

Os índices identifica a partícula, e $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ são os vetores unitários que apontam no sentido positivo dos eixos x,y e z. Assim temos que a representação matemática vetorial do CM é:

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k} \tag{6}$$

Conectando Eq.[5] com Eq.[6], temos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \tag{7}$$

Onde M é novamente a massa total do sistema. Substituindo $\vec{r}$ e $\vec{r}_{CM}$ em Eq.[7] os resultados voltam a ser escalares.

Exemplo

Três partículas de massa $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2,5$ kg e $m_3 = 3,4$ kg formam um triângulo equilátero de lado a=140 cm. Onde fica localizado o centro de massa desse sistema?

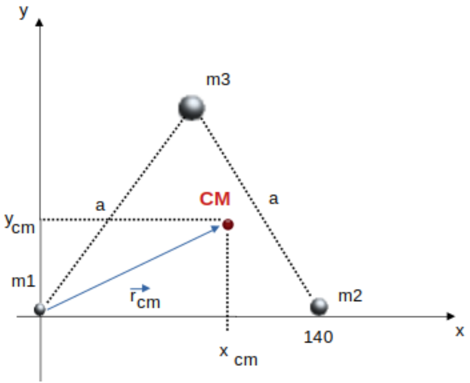


Figure: 3 - Três partículas formam um triângulo equilátero

Solução

Como estamos lidando com 3 partículas usaremos a Eq. [5] para resolver esse problema. Uma vez que o problema é 2-D precisamos encontrar somente x_{CM} e y_{CM}. Distribuindo os valores em tabela:

Partícula	Massa (Kg)	x(cm)	y(cm)
1	1,2	0	0
2	2,5	140	0
3	3,4	70	120

Table: 1

A massa total do sistema é M=7,1 Kg. Vamos desenvolver os resultados nessa Tab. 1 colocando na fórmula [5].

Solução

Determinando primeiro para o x_{CM}, assim temos que:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M}$$

O somatório vai até 3 no índice superior porque se trata de 3 partículas apenas. Substituindo os devidos valores da Tab. [1], temos:

$$x_{CM} = \frac{(1,2kg)(0) + (2,5kg)(140cm) + (3,4kg)(70cm)}{7,1kg}$$

$$x_{CM} = 83cm$$

Encontramos a componente em x do CM. Agora vamos determinar a componente em y.

Solução

Partindo da Eq.[5], temos que:

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M} = \frac{(1,2kg)(0) + (2,5kg)(0) + (3,4kg)(120cm)}{7,1kg} \tag{8}$$

$$= 58cm$$

Dessa forma termos que o vetor posição do CM $\vec{r}_{CM} = 83\hat{i} + 58\hat{j}$ é o vetor que aponta para o centro de massa do sistema.

Caso contínuo do centro de massa

Agora veremos os casos de corpos maciços.
Ex. Bola de basketball existem uma infinidade de partículas (átomos) que aproximamos para uma distribuição contínua.
As partículas são elementos infinitesimais de massa dm.
A equação Eq. [5] se torna integrais.

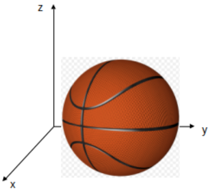


Figure: 4 - Bola de Basketball

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm, \quad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm, \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\, dm \tag{9}$$

M é a massa total do objeto.

Caso contínuo do centro de massa

Temos uma relação da densidade dos corpos com suas massas pela Equação a baixo de forma:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} \tag{10}$$

dV é o volume ocupado por um elemento de massa dm e V é o volume total do corpo. Substituindo Eq. [10] em Eq.[9], temos:

$$x_{CM} = \frac{1}{V}\int x\, dV, \;\; y_{CM} = \frac{1}{V}\int y\, dV, \;\; z_{CM} = \frac{1}{V}\int z\, dV \tag{11}$$

Exemplo

A Fig. [5] mostra uma placa de metal uniforme P de raio 2R, da qual um disco de raio R foi removido em uma linha de montagem. Usando o sistema de coordenadas xy da figura, localize o centro de massa (CM_P) da placa.

Exemplo

No caso de corpos de uma infinidade de pontos de massas distribuidos uniformamente, geralmente o CM está no próprio corpo localizado do ponto de simetria do objeto. Assim, por exemplo, o centro de massa de uma esfera está localizado no seu centro geométrico.

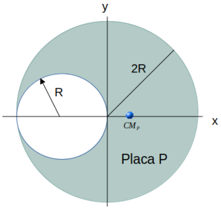


Figure: 5 - (a) A placa P é uma placa de metal de raio 2R, com um furo circular de raio R.

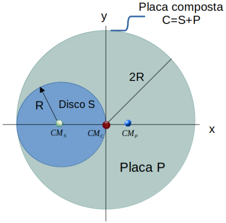


Figure: 5 - (b) Disco S foi colocado de volta para formar a placa C.

Solução

- Em primeiro lugar vamos determinar a localização do CM da placa P usando simetria.
- Observe que a placa P é simétrica em relação ao eixo x.
- Isso significa que o centro de massa da placa está localizado nesse eixo.
- A placa P perde a simetria em relçao ao eixo y por que o disco S foi removido.
- Isso significa que existe um pouco mais de massa do lado direito de y e como consequência o CM_P está localizado um pouco a direita de y como mostra a Fig.[5].

Solução

Colocando o disco S no lugar e a nova placa vamos chamar de "Placa C" como mostra na Fig.[6] e realizar as considerações:

- Devido a simetria o centro de CM_S está no centro de S exatamente na posição x=-R.
- Novamente por simetria o CM_C da placa C está no centro de C na posição x=0. Assim vamos ter a relação:

Paca	Centro de massa	Posição do CM	Massa
P	CM_P	$x_P = ?$	m_P
S	CM_S	$x_S = -R$	m_S
C	CM_C	$x_C = 0$	$m_C = m_S + m_P$

Table: 2

Solução

Supondo que a massa m_S do disco S esteja concentrada em uma partícula em $x_S = -R$ e que a massa m_P esteja concentrada em x_P. Vamos tratar como se fosse duas partículas e usar a Eq.[11]. Teremos:

$$x_{S+P} = \frac{m_S x_S + m_P x_P}{m_S + m_P} \tag{12}$$

Dessa forma a posição x_{S+P} do CM_{S+P} coincide com a posição x_C do M_C que está em $x_{S+P} = x_C = 0$. Substituindo esses resultados na Eq.[12], temos:

$$x_P = -x_S \frac{m_S}{m_P} \tag{13}$$

Solução

Relacionando as massas com suas devidas áreas de S e P, notando que:

$massa = massa\, específica \times\ volume$

$massa =$massa específica$\times$ $espessura \times área$

Assim, $\frac{m_s}{m_P} = \frac{massaespecífica_S}{massaespecífica_P} \times \frac{espessura_S}{espessura_P} \times \frac{área_S}{área_P}$

Como as placas são uniformes (densidades iguais), temos:

$$\frac{m_S}{m_P} = \frac{área_S}{áres_P} = \frac{área_S}{área_C - área_S}$$
$$= \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}$$

Substituindo esse resultado e fazendo $x_S = -R$ na Eq.[13], temos:

$$x_P = \frac{1}{3}R \tag{14}$$

Estática do corpo extenso

As equações que regem a estática do corpo rígido é:

$$m\ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}^{ex} \tag{15}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{N}_{iO}^{ex} \tag{16}$$

A Eq.[15] determina o movimento do centro de massa localizado pelo vetor $\vec{R}$. A Eq.[16] determinado o movimento de rotação em relação ao ponto O. Conhecendo-se as forças externas total e o torque do corpo rígido seu movimento estará **determinado.**.

Estática do corpo extenso

Vamos omitir o expoente ex das Eqs. [15] e [16] e depois como obter o torque a partir de Eq.[16] em relação a outro ponto de referência O'. Temos que:

$$\sum_i \vec{N}_{iO'} = \sum_i \vec{N}_{iO} + (\vec{r}_O - \vec{r}_{O'}) \times \vec{F}_i \qquad (17)$$

Onde $\vec{r}_O$ e $\vec{r}_{O'}$ são vetores desenhados a partir de O e O'. No próximo slide vamos

demonstrar essa equação [17].

Estática do corpo extenso

Considere $\vec{r}_i$ seja o vetor da origem ao ponto onde $\vec{F}_i$ age. Temos:

$$
\begin{aligned}
\sum_i \vec{N}_{iO'} &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{O'}) \times \vec{F}_i \\
&= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O + \vec{r}_O - \vec{r}_{O'}) \times \vec{F}_i \\
&= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{F}_i + \sum_i (\vec{r}_O - \vec{r}_{O'}) \times \vec{F}_i \\
\sum_i \vec{N}_{iO'} &= \sum_i \vec{N}_{iO} + (\vec{r}_O - \vec{r}_{O'}) \times \sum_i \vec{F}_i
\end{aligned}
\tag{18}
$$

O torque é independendo do ponto ao longo da linha de ação em que a força $\vec{F}_i$ age.

Estática do corpo extenso

Se no caso particular o corpo rígido estiver em repouso isso implica que $\sum_i \vec{F}_i = 0$ e $\sum_i \vec{N}_i = 0$, nesse caso as condições de equilíbrio são estabelecidas.
Para provar que $\sum_i \vec{N}_i$ é realmente nulo basta substituir a soma das forças nula na Eq. [18]

$$\begin{aligned}
\sum_i \vec{N}_{iO'} &= \sum_i \vec{N}_{iO} + (\vec{r}_O - \vec{r}_{O'}) \times \sum_i \vec{F}_i \\
\sum_i \vec{N}_{iO'} &= \sum_i \vec{N}_{iO} + (\vec{r}_O - \vec{r}_{O'}) \times 0 \\
\sum_i \vec{N}_{iO'} = \sum_i \vec{N}_{iO} &= \sum_i \vec{N}_{iO'} - \sum_i \vec{N}_{iO} = 0 \\
\sum_i \vec{N}_i &= 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Exemplo

Uma caixa de peso 100 N é mantida em equilíbrio, conforme ilustra a figura a baixo:

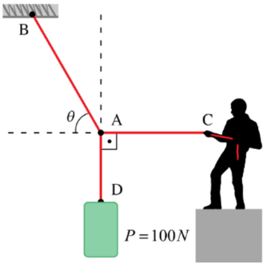


Figure: 6 - Sistema de 3 cordas inextensíveis, a pessoa que puxa AC mantém a caixa de peso = 100N em repouso. A corda AD tem posição vertical graças ao peso.

Sendo $cos(\theta) = 0,60$ **determinar a intensidade de cada tensão nas cordas.**

Solução

Para solução do problema usaremos a $\sum_i \vec{F}_i = 0$ e algumas considerações.

- No ponto de equilíbrio A atuam 3 forças (diagrama de formas).
- A força tensora em AD é conhecida (peso).
- Se o $cos(\theta) = 0,6$ entaõ $cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$, assim temos que $sen(\theta) = 0,8$.
- Encontrando a solução pelo método geométrico.
- Podemos aferir que $T_3 = 125N$.
- Podemos também aferir que $T_2 = 75N$.

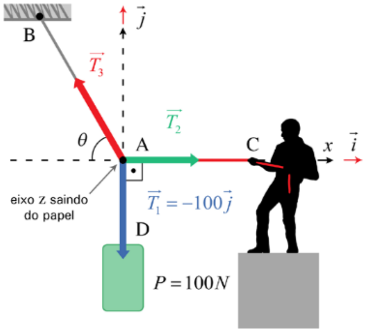


Figure: 7 - Diagrama do corpo livre

Conclusão

Aprendemos a representar um objeto complexo por um único ponto onde toda a sua massa está concentrada.

Em estática do corpo rígido, exploramos o equilíbrio de objetos sob ação de forças.

Esses princípios são fundamentais para a mecânica e têm aplicações em várias áreas, da física à engenharia.

Referências Bibliográficas

Figure: 8 - (a)

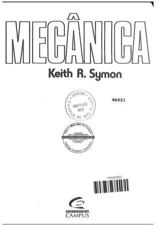


Figure: 8 - (b)

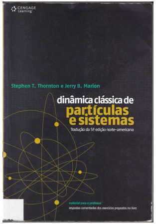


Figure: 8 - (c)

Agradecimentos

Obrigado pela atenção!

Início