

Força Eletromagnética, Campo Magnético e Corrente Elétrica

A Força Oculta que Guia Bússolas e Alimenta Dispositivos Eletrônicos. Este fenômeno invisível exerce um papel vital em nossa vida cotidiana, da navegação à geração de energia elétrica.

MSc Raimundo Ronis

UFPA/IFPA

2023



Sumário

1 Força Elétrica

- Introdução
- Conjunto de cargas
- Campo elétrico
 - Exemplo
- Distribuição Contínua
 - Exemplo
- Lei de Gauss

2 Magnetostática

- Força de Lorentz
- Lei de Biot-Savart
 - Exemplo
- Divergente e rotacional de \vec{B}
- Potencial Vetor

3 Conclusão

4 Referência

5 Agradecimentos

Introdução

O problema fundamental que a teoria eletromagnética quer resolver é a força que existem entre dois ou mais corpos carregados.

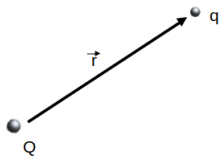


Figure: 1 - Corpo carregado Q e corpo de prova q separados por uma distância r.

A lei de Coulomb diz que a força que existem entre Q e q é:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \quad (1)$$

A constante ϵ_0 é chamada de **permissividade do espaço livre**

Força elétrica para um conjunto de cargas

Para determinarmos para mais de duas cargas, ou seja, um conjunto de carga. Usaremos o **método da superposição**. Logo a Eq.[1] ficará:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \sum_{i=1}^n \frac{q_i \hat{r}_i}{|\vec{r}_i|^2} \quad (2)$$

Na figura acima temos uma carga Q para várias cargas de prova q , isto é, $q_1, q_2, q_3 \dots$. Percebemos que a força total entre elas é feita pela soma vetorial entre elas com Q .

Campo elétrico

O campo elétrico é um *campo vetorial* constituído por uma distribuição de vetores no espaço. Podemos defini-lo matematicamente como:

$$\vec{F} = Q\vec{E} \rightarrow E = \frac{\vec{F}}{Q} \quad (3)$$

Substituindo Eq.[3] em Eq.[2], temos que:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}|_i^2} \hat{r}_i \quad (4)$$

Observando que $E(r)$ é uma função da posição r para um conjunto de cargas de prova q_i .

Exemplo

Encontre o campo elétrico (magnitude, direção e sentido) a uma distância z acima do ponto central entre duas cargas iguais, q , que estão separadas por uma distância d (Fig[2]).

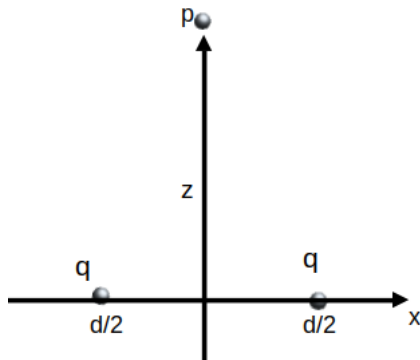


Figure: 2 - Dois corpo carregados.

Solução

Vamos usar a fórmula da Eq.[4] para o caso em que $n=2$. Temos:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^2 \frac{q_i}{|\vec{r}|_i^2} \hat{r}_i$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{r}|_1^2} \hat{r}_1 + \frac{q_2}{|\vec{r}|_2^2} \hat{r}_2 \right) \quad (5)$$

Como $|\vec{r}|_1^3 = ((d/2)^2 + z^2)^{3/2}$ e $|\vec{r}|_2^3 = ((d/2)^2 + z^2)^{3/2}$; $q_1 = q_2 = q$, $\hat{r}_1 = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}$, $\hat{r}_2 = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$, substituindo esses resultados na Eq. [5], temos:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}|_1^3} + \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}|_2^3} \right) \quad (6)$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_1}{((d/2)^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\vec{r}_2}{((d/2)^2 + z^2)^{3/2}} \right) \quad (7)$$

Solução

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0((d/2)^2 + z^2)^{3/2}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$

Temos que $\vec{r}_1 = -d/2\hat{x} + z\hat{z}$ e $\vec{r}_2 = d/2\hat{x} + z\hat{z}$, temos:

$$E(z, d) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0((d/2)^2 + z^2)^{3/2}} \left(-\frac{d}{2}\hat{x} + z\hat{z} + \frac{d}{2}\hat{x} + z\hat{z} \right)$$

$$E(z, d) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0((d/2)^2 + z^2)^{3/2}} (+z\hat{z} + z\hat{z})$$

$$E(z, d) = \frac{2zq}{4\pi\epsilon_0((d/2)^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{qz}{2\pi\epsilon_0((d/2)^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}} \quad (8)$$

Solução

Fazendo uma aproximação para a Eq.[8] quando $z \gg d$, temos:

$$\begin{aligned} E(z, d) &= \frac{qz}{2\pi\epsilon_0((d^2/4 + z^2)^{3/2})} \hat{z} \\ &= \frac{qz}{2\pi\epsilon_0 \left(\left\{ z^2 \left[\frac{d^2}{4z^2} + 1 \right] \right\}^{3/2} \right)} \hat{z} \end{aligned} \quad (9)$$

Após realizar esse rearranjo de termos em Eq.[8] vamos substituir a condição de $z \gg d$ em Eq.[9], teremos:

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{qz}{2\pi\epsilon_0(\{z^2[1]\}^{3/2})} \hat{z} \\ \boxed{E(z) = \frac{qz}{2\pi\epsilon_0(z^3)} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 z^2} \hat{z}} \end{aligned} \quad (10)$$

O campo elétrico em Eq.[10] se comporta como o de uma única carga localizada na origem do sistema da Fig [2].

Distribuição Contínua

Na definição de campo elétrico Eq.[4] vimos para uma distribuição discreta de cargas, mas agora vamos ver o caso de uma infinidade de cargas distribuídas em uma determinada região do espaço. Agora a equação de campo se torna uma integral:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \quad (11)$$

Os corpos carregados podem estar na geometria de uma linha, superfície ou volume. Vamos ver como a Eq.[11] se comporta para cada caso.

1º vamos ter que $dq = \lambda dl$, assim temos:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \quad (12)$$

Distribuição Contínua

2º vamos ter que $dq = \sigma da$, assim temos:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma da}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \quad (13)$$

3º vamos ter que $dq = \rho dv$, assim temos que:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dv}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \quad (14)$$

Essas funções λ , σ e ρ a priori podem depender da posição, mas do contrário se elas forem constante isso facilita nossos cálculos, pois podemos tirá-las da integral.

Exemplo

Encontre o campo elétrico que está em uma distância z acima do ponto central de um segmento de linha reta com comprimento $2L$, que tem uma densidade linear de carga uniforme λ .

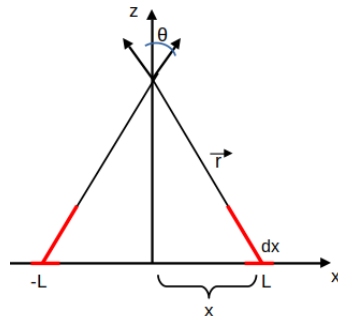


Figure: 3 - Linha linear de carga no eixo x

Solução

Usaremos a Fig. [3] para desenvolvimento da solução e depois analisar a simetria do problema em $\pm x$ uma vez que as componentes horizontais do campo se cancelam e o campo líquido resultante é:

$$E(r) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda dx}{|\vec{r}|^2} \cos(\theta) \hat{z} \quad (15)$$

Temos que $\cos(\theta) = z/|\vec{r}|$, $|\vec{r}| = \sqrt{z^2 + x^2}$ e x vai de 0 a L . Temos:

$$\begin{aligned} E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{2\lambda z}{(z^2 + x^2)^{3/2}} dx \\ &= \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{z^2 \sqrt{z^2 + x^2}} \right] \Big|_0^L \\ &\boxed{E(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z \sqrt{z^2 + L^2}}} \end{aligned}$$

Solução

Para pontos distante da linha $z \gg L$. Qual o comportamento do campo elétrico usando essa aproximação?

Temos que:

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z(z^2 + L^2)^{1/2}} dx \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{\left(z^4 + \frac{L^2}{z^2}\right)^{1/2}} dx \end{aligned}$$

No limite que $z \gg L$, temos que $\frac{L^2}{z^2} \rightarrow 0$, temos que:

$$E(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z^2} \quad (16)$$

O que faz sentido, pois a linha se parece com uma carga pontual $q = 2\lambda L$.

Fluxo e lei de Gauss

Como visto anteriormente podemos determinar o campo Elétrico em um ponto do espaço por uma carga ou um conjunto de cargas dispostas no espaço. Assim podemos ter um conjunto de pontos do Campo Elétrico que podem formar *linhas de campo* no meio. Veremos algumas representações em figuras.

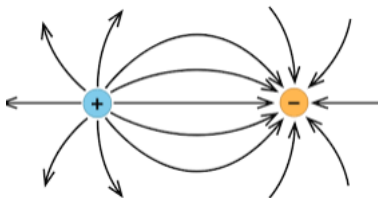


Figure: 4(a) - Cargas de mesmo módulo porém opostas.

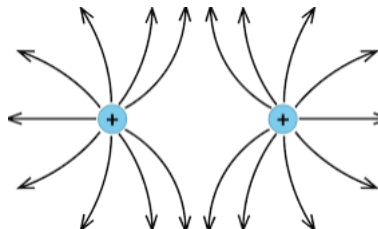


Figure: 4(b) - Cargas de mesmo módulo e de mesmo sinal.

Fluxo e lei de Gauss

Notamos que nas proximidades da carga as linhas de campo são mais próximas indicando maior intensidade do campo nesse perímetro. Claro que o campo cai com o inverso do quadrado da distância. Esses diagramas são convenientes para representar campos mais complicados. Vamos ver que o fluxo do campo elétrico passando por uma superfície S é:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} \quad (17)$$

A equação representa basicamente o número de linhas que atravessa uma superfície S .

Fluxo

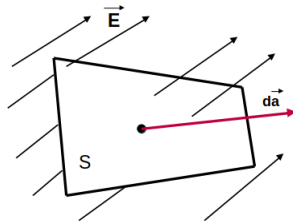


Figure: 5 - Superfície S sendo atravessa por linhas de campo elétrico E e temos que $d\vec{a}$ representa o elementos vetorial de área.

S nesse caso é uma superfície aberta que está sendo atravessada por linhas de campo, mas poderia ser uma outra superfície fechada S' fechada contendo a carga dentro da região emanando as linhas de campo para fora ou para dentro da região dependendo do sinal da carga contida no corpo.

Lei de Gauss

Para qual quer superfície fechada então temos a lei de Gauss que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc} \quad (18)$$

Temos que a Eq.[18] pode ser representada na sua forma diferencial:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho} \quad (19)$$

É a Lei de gauss na forma diferencial.

Da Eq.[19], se aplicarmos uma operação $E = -\nabla V$ nela temos a Equação de **Poisson**:

$$\boxed{\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \Leftrightarrow \nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho} \quad (20)$$

Aplicação da Lei de Gauss

Encontre o campo externo a uma esfera sólida uniformemente carregada de raio R e carga total q .

Temos a figura:

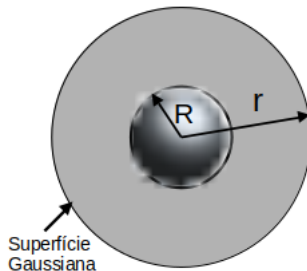


Figure: 6 - Uma esfera de raio R e sobre ela está desenhada uma superfície gaussiana de raio r para obter o campo elétrico externo do corpo de carga q .

Solução

Vamos então fazer uso da Eq.[18] para desenvolver essa questão. E que $Q_{enc} = q$ podemos ver que essa ideia não nos leva muito longe por que a quantidade que queremos é \vec{E} e o mesmo se faz presente dentro da integral de superfície. Por sorte podemos extrair de dentro devido a simetria do problema. Outra característica é que \vec{E} aponta radialmente para fora bem como $d\vec{a}$.

$$\begin{aligned}
 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} &= \int_S |\vec{E}| da \\
 &= |\vec{E}| \int_S da = |\vec{E}| 4\pi r^2 \\
 |\vec{E}| 4\pi r^2 &= \frac{1}{\epsilon_0} q \\
 |\vec{E}| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} q \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}}
 \end{aligned}$$

Magnetostática

Vimos nos slides anteriores que cargas elétricas geram campos elétricos, porém cargas em movimento induzem campos magnéticos em sua vizinhança.

A força magnética acontece entre dois polos de **ímãs** ou **eletroímãs**.

Até o devido momento não se conhece **monopolos magnéticos**.

A **Força Magnética** pode ser determinada pela seguinte equação:

$$\vec{F}_{mag} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (21)$$

Onde termos que q é a carga da partícula carregada, \vec{v} é a velocidade dessa partícula no espaço e \vec{B} é o campo magnético produzido por essa carga em movimento no espaço.

Magnetostática

Podemos fazer uma generalização da Lei de Coulomb com a Eq.[21] da seguinte maneira:

$$\vec{F} = q[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})] \quad (22)$$

Vejamos que quando o termo de força magnética for nulo recuperamos a lei de Coulomb. Se tivermos um caso em que não há campo elétrico temos uma situação de magnetismo puro.

A Eq. [22] é chamada de **Lei de Força de Lorentz**.

Uma característica importante:

Forças Magnéticas não realizam trabalho

Corrente e Eq. da Continuidade

Densidade superficial de corrente \vec{K} . Considere uma fita de largura infinitesimal dl_{\perp} disposta paralelamente ao fluxo. Se a corrente nessa fita é $d\vec{I}$. Temos:

$$\vec{K} \equiv \frac{d\vec{I}}{dl_{\perp}} \quad (23)$$

Como temos α densidade superficial de superficial e \vec{v} sua velocidade. Temos:

$$\vec{K} = \alpha \vec{v} \quad (24)$$

Em geral \vec{K} varia ponto a ponto sobre a superfície. A força magnética sobre a corrente superficial é:

$$F_{mag} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \alpha da = \int (\vec{K} \times \vec{B}) da \quad (25)$$

Corrente e Eq. da Continuidade

Densidade volumétrica de corrente \vec{K} . Temos que ρ é a densidade volumétrica de corrente. Se a densidade volumétrica de carga móvel tem velocidade \vec{v} , então temos que:

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \quad (26)$$

A força magnética em uma corrente volumétrica é então:

$$\vec{F}_{mag} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \rho dv = \int (\vec{K} \times \vec{B}) dv \quad (27)$$

Segundo a Eq.[23] temos que uma corrente em uma superfície S é:

$$I = \int_S J da_{\perp} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}. \quad (28)$$

Corrente e Eq. da Continuidade

A carga total por unidade de tempo que sai de uma volume V é:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dv \quad (29)$$

Como a carga é conservada, temos:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) dv = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv = - \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

(30)

Lei de Biot-Savart

Corrente estacionária → É um fluxo contínuo que existe sempre e não acumula cargas elétricas. Este fato produz um campo magnético estático(MAGNETOSTÁTICA).

Considerando este fato temos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (31)$$

O campo magnético de uma linha de corrente estacionária é dado pela **Lei de Biot-Savart**.

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I} \times \hat{r}}{|\vec{r}|^2} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} |\vec{I}| \int \frac{d\vec{L} \times \hat{r}}{|\vec{r}|^2} \quad (32)$$

Temos que μ_0 é a permeabilidade do espaço livre.

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2.$$

Exemplo

Encontre o campo magnético a uma distância s de um fio longo e reto pelo qual passa uma corrente estacionária I .

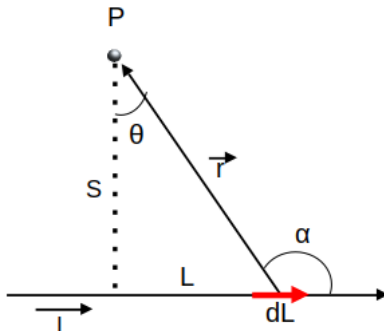


Figure: 7 - Campo magnético gerado por um elemento de corrente $d\vec{I}$.

Solução

No diagrama $(d\vec{L} \times \hat{r})$ aponta para fora da página e tem magnitude:

$$dL \sin(\alpha) = dL \cos(\theta) \quad (33)$$

Também, $L = s \operatorname{tg}(\theta)$, portanto:

$$dL = \frac{s}{\cos^2(\theta)} d\theta, \quad (34)$$

e $s = r \cos(\theta)$, então:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2(\theta)}{s^2}$$

Solução

Assim temos:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\cos^2(\theta)}{s^2} \right) \left(\frac{s}{\cos^2(\theta)} \right) \cos(\theta) d\theta \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(\theta) d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1))
 \end{aligned} \tag{35}$$

A Eq. [35] dá o campo de qualquer seguimento reto de fio. Para a questão de um fio infinito seria complicado, mas se imaginarmos o fio dando uma volta completa sobre si, então teríamos $\theta_1 = -\pi/2$ e $\theta_2 = \pi/2$. De tal maneira que teríamos:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}} \tag{36}$$

Divergente e rotacional de \vec{B}

Da Eq.[32] temos que o campo é uma função da posição. Sendo assim vamos aplicar a essa equação o divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2} \right) dl \quad (37)$$

Temos que pela regra do produto, temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2} \right) = \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{J}) - \vec{J} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2} \right). \quad (38)$$

Mas $\vec{\nabla} \times \vec{J} = 0$, pois \vec{J} não depende das variáveis, $p(x,y,z)$ fora da distribuição da matéria do corpo. Estamos assumindo que $\vec{J}(x', y', z')$. Também temos que $\vec{r} = (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k}$. A operação $\vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2} = 0$, então:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (39)$$

Rotacional de \vec{B}

Aplicando o rotacional à Eq. [32], temos:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2} \right) = \vec{J} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2} \right) - (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2} \quad (40)$$

O segundo termo desse resultado dá zero. O outro que fica é:

$$\vec{J} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{|\vec{r}|^2} \right) = \vec{J} 4\pi \delta^3(\vec{r}) \quad (41)$$

Concluimos então que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') dV' = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$

(42)

Potencial Vetorial Magnético

Assim como $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, nos permitiu introduzir o potencial como:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (43)$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ também nos convida a introdução de:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (44)$$

Aplicando o rotacional em Eq.[44], temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (45)$$

Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ então:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (46)$$

Potencial vetor Magnético

Assumindo que \vec{J} tende a zero no infinito, podemos escrever como determinar o potencial vetor no formato diferencial como:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}|} dv' \quad (47)$$

Para uma corrente se propagando em superfície, temos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r}|} da' \quad (48)$$

Em uma linha temos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r}|} dl' \quad (49)$$

Conclusão

A interação entre corrente elétrica e campo magnético revela a força eletromagnética, um fenômeno essencial na geração de movimento e funcionamento de dispositivos elétricos. Esta sinergia entre eletricidade e magnetismo é a base de inovações tecnológicas, desde motores elétricos até a transmissão de energia sem fio, destacando a intrincada união entre corrente elétrica, campo magnético e avanços em engenharia. Vimos como está conectado o magnetismo com a eletrostática e mostramos suas analogias entre ambas, vimos quão importante são essas junções.

Referências Bibliográficas

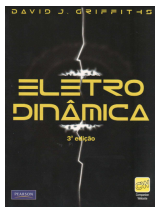


Figure: 8 - (a)



Figure: 8 - (b)



Figure: 8 - (c)

Agradecimentos

Obrigado pela atenção!

► Início