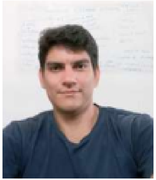
# Dinâmica da Partícula

As leis físicas devem se basear em fatos experimentais. Não podemos esperar a priori que a atração gravitacional entre dois corpos deva variar exatamente com o inverso do quadrado da distância que os separa


MSc Raimundo Ronis

Institutes of UPFA/IFPA Teams


September 20, 2023



# Contexto

# Introdução

A ciência da mecânica busca fornecer uma descrição precisa e consistente da dinâmica das partículas e dos sistemas de partículas, mas no nosso caso focaremos em única partícula.

Para isto precisamos saber conceitos de posição, tempo e conhecer a força que atua na partícula.

Nesta aula vamos compreender como os objetos se movem no espaço e no tempo.

# Leis de Newton

- Um corpo permanece em repouso ou em movimento uniforme, exceto sob a atuação de uma força.
- Um corpo sob a atuação de uma força se move de tal forma que a taxa temporal de variação da quantidade de movimento se iguala à força.
- Se dois corpos exercem forças entre si, essas forças serão iguais em magnitude e opostas em termos de direção.

# Primeira Lei de Newton

É também conhecida como a lei da inércia.
Alterar o estado de movimento de um corpo demanda a aplicação de uma ou mais forças.
Matematicamente podemos escrever da seguinte forma:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \tag{1}$$

# Segunda lei de Newton

Taxa temporal da quantidade de movimento

$$\vec{P} = m\vec{v} \tag{2}$$

Portanto a segunda lei pode ser expressa como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3}$$

# Terceira Lei de Newton

Com base na afirmação no slide 4 sobre a terceira lei temos:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \tag{4}$$

Portanto a segunda lei pode ser expressa como

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt} \tag{5}$$

Com massas contínuas

$$m_1\left(\frac{d\vec{v}_1}{dt}\right) = m_2\left(-\frac{d\vec{v}_2}{dt}\right) \tag{6}$$

Uma vez que a aceleração é a derivada da velocidade em função do tempo, temos:

$$m_1(\vec{a}_1) = m_2(-\vec{a}_2) \tag{7}$$

O sinal negativo indica que os dois vetores de aceleração tem direções opostas.

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2} \tag{8}$$

Outra interpretação da 3ª lei de Newton, diz que:

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_1) = 0 \tag{9}$$

Assim temos que:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = constante \tag{10}$$

# Sistema de referência

- Um sistema de eixos referêncial é denominado de sistema de referência inercial se as leis de Newton forem realmente válidas naquele sistema de eixos.
- Se um corpo não está sujeito a nenhuma força externa e se move em linha reta com velocidade constante (ou permanecer em repouso), o sistema de coordenadas que estabelece esse fato é um sistema de referência inercial.
- **Invariância galileana**
- Esta é uma definição operacional clara e que também deriva da teoria da relatividade geral.

# Equação de movimento para uma partícula

A equação de Newton $\vec{F} = d\vec{P}/dt$ pode ser expressa na forma:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\ddot{\vec{r}} \tag{11}$$

Considerando o fato de que m não varia com o tempo, a equação (10) é dita uma **EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE SEGUNDA ORDEM** que pode ser integrada para encontrar $\vec{r} = \vec{r}(t)$, caso $\vec{F}$ seja conhecida.

# Exemplo 1

**Se um bloco desliza sem atrito para baixo em um plano inclinado fixo com $\theta = 30^o$, qual é a aceleração do bloco?**

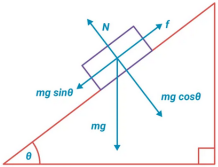



Figure: Representação esquemática das componentes

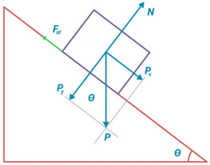



Figure: Representação esquemática

Podemos ver na Fig[1] que a força peso é deomposta em suas componentes pela geometria do problema (semelhança de triângulos e suas relações)

# Solução

Duas forças atuam nesse caso. **peso** $\vec{p}$ e a normal $\vec{N}$ que empurra o bloco para cima. Desconsiderando a força de atrito entre o bloco e a superfície inclinada.
A força total $\vec{F}_{líquida}$ é contante e se torna:

$$\vec{F}_l = \vec{F}_g + \vec{N} \tag{12}$$

Temos ainda que:

$$\vec{F}_l = m\ddot{\vec{r}} \tag{13}$$

Substituindo (11) em (12), temos:

$$\vec{F}_g + \vec{N} = m\ddot{\vec{r}} \tag{14}$$

Como (13) está sendo aplicado em 2 componentes $x$ e $y$, temos que analisar separadamente os dois casos.

# Solução

Dividindo vetorialmente os casos:
Direção em y:

$$-mgcos(\theta) + N = 0 \tag{15}$$

Direção em x:

$$\begin{aligned} mgsen(\theta) &= m\ddot{x} \\ gsen(\theta) &= \ddot{x} \\ \ddot{x} = gsen(30^o) &= \frac{g}{2} \end{aligned} \tag{16}$$

Assim podemos ver que a aceleração do bloco é constante.

# Solução

Podemos determinar a velocidade do bloco após sua movimentação a partir do repouso até uma distância $x_0$. Multiplicando a Eq. [16] por $2\dot{x}$ e integrando, temos:

$$\begin{aligned}
2\dot{x}\ddot{x} &= \frac{2\dot{x}g}{2} \\
\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) &= g\frac{dx}{dt} \\
\int_0^{v_0} d(\dot{x}^2) &= g\frac{dx}{dt}dt \\
\int_0^{v_0} d(\dot{x}^2) &= g\int_0^{x_0} dx
\end{aligned}$$

Em $t = 0$, e em $x = \dot{x} = 0$, e em $t > 0$, $x = x_0$, a velocidade $\dot{x} = v_0$, temos:

# Solução

O resultado da equação integral é:

$$
\begin{aligned}
v_0^2 &= g x_0 \\
v_0 &= \sqrt{g x_0}
\end{aligned}
$$

# Exemplo 2

**Se o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano no exemplo precedente é $\mu_e = 0,4$, em qual ângulo $\theta$ o bloco começará a deslizar se ele estava inicialmente estático?**

Olhando agora com cuidado a figura [1] e como a direção de f está orientada no sistema de eixos que escolhemos a força de atrito estático tem valor máximo aproximado de:

$$\vec{f}_{max} = \mu_e \vec{N} \tag{17}$$

# Solução

A equação [11] se torna, na forma de componentes,
Direção y:

$$-mgcos(\theta) + N = 0 \tag{18}$$

Direção x:

$$-f + mgsen(\theta) = m\ddot{\vec{x}} \tag{19}$$

A força de atrito estático $f_e$ precisará ter um valor $f_e \leq f_{max}$ necessário para manter $\ddot{x} = 0$
A medida que o ângulo $\theta$ aumenta a força $f_e$ será incapaz de manter o bloco em repouso, neste ângulo $\theta'$, temos:

$$f_e(\theta = \theta') = f_{max} = \mu_e N = (\theta)$$

$$m\ddot{x} = mgsen(\theta) - f_{max} \tag{20}$$

# Solução

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= mgsen(\theta) - \mu_e mgcos(\theta) \\
\ddot{x} &= g(sen(\theta) - \mu_e cos(\theta))
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Imediatamente antes do início do deslizamento, temos que $\ddot{x} = 0$, assim:

$$
\begin{aligned}
0 &= g(sen(\theta) - \mu_e cos(\theta)) \\
tg(\theta) &= \mu_e = 0,4 \\
\theta &= tg^{-1}(0,4) = 22^o
\end{aligned}
\tag{22}
$$

# Teorema da conservação

Derivando um teorema muito importante em termos de quantidades conservadas em se tratando da mecânica newtoniana de uma única partícula este fato é uma consequência das leis da dinâmica de Newton.
O caso é que esses teoremas da conservação têm sido realmente comprovados como sendo válidos em muitas instâncias.

O primeiro dos teoremas da conservação diz repeito à **quantidade de movimento linear**:

*A quantidade de movimento linear $\vec{P}$ total de uma partícula é conservada quando a força total sobre ele é zero*

Em termos de equação vetorial, temos:

$$\dot{\vec{P}} = 0 \tag{23}$$

# Momento angular

A quantidade de momento angular $\vec{L}$ de uma partícula em relação a origem em que conhecemmos o vetor posição $\vec{r}$ é dado por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{24}$$

O **Torque** ou **momento da força** $\tau$ em relação a mesma origem é:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{25}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição a partir da origem até o ponto onde a força $\vec{F}$ é aplicada.

# Momento angular

Derivando a Eq.[24] no tempo, temos:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = (\dot{\vec{r}} \times \vec{p}) + (\vec{r} \times \dot{\vec{p}})$$

mas

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} = m(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) \equiv 0$$

Desta forma,

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \tau \qquad (26)$$

# Momento angular e energia

**O segundo teorema importante da conservação diz:**

*O momento angular de uma partícula não sujeita a qualquer torque é conservado.*

Se uma força $\vec{F}$ exerce um trabalho sobre a partícula do ponto 1 para um ponto 2, esse trabalho é definido como sendo:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{27}$$

Se $\vec{F}$ é a força líquida, temos:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}dt = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt \\ &= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v})dt = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v^2)dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \end{aligned} \tag{28}$$

# Momento angular e energia

Colocando a Eq. [28] em Eq.[27], obteremos:

$$W_{12} = \left[\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\right]_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1 \tag{29}$$

onte $T \equiv \frac{1}{2}mv^2$ é a **energia cinética** da partícula.
Note que se $T_1 > T_2$ então $W_{12} < 0$.

*Devemos, portanto, considerar a energia de um sistema material como a quantidade da qual podemos determinar o aumento ou a diminuição à medida que o sistema passa de uma condição definida para outra. O valor absoluto da energia na condição padrão é desconhecido e não teria nenhum valor se o conhecêssemos, pois todos os fenômenos dependem das variações de energia e não de seu valor absoluto.* [**J. Maxwell** (1831-1879)].

# Energia

A energia total de uma partícula como sendo a soma das energias cinética e potencial.

$$E = T + U \tag{30}$$

A derivada temporal da energia total é:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \tag{31}$$

Para analisar a derivada usaremos a Eq. [28] vamos reescrever a mesma da seguinte forma:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dT \tag{32}$$

Dividindo por dt, temos:

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \tag{33}$$

# Energia

Temos também que:

$$
\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \\
&= \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial t} \\
&= (\vec{\nabla} U)\cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial U}{\partial t}
\end{aligned}
$$

(34)

Substituindo a Eq. [34] e Eq. [33] em Eq. [31], temos:

$$
\frac{dE}{dt} = \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} + (\vec{\nabla} U)\cdot\dot{\vec{r}} + \frac{\partial U}{\partial t}
$$

# Energia

$$\frac{dE}{dt} = (\vec{F} + \vec{\nabla} U) \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial U}{\partial t}$$

Como $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$, temos que:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} \tag{35}$$

Se U não é uma função explícita no tempo, então temos que $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ e o campo de forças $\vec{F}$ é **conservativo**.

**Sob estes fatos temos o terceiro teorema da conservação da energia:**

*A energia total E de uma partícula em um campo de força conservativo é constante no tempo.*

# Exemplo

**Um camundongo de massa m salta sobre a borda externa de um ventilador de teto de giro livre e com inércia rotacional I e raio R. Qual será a razão de alteração da velocidade angular?**

Solução:
O momento angular deverá ser conservado durante o processo.
Usando o conceito de inércia rotacional com quantidade de momento angular $L = I\omega$.
Início $\rightarrow$ a quantidade de movimento angular será L (ventilador mais camundongo)
Fim $\rightarrow$ a velocidade do camundongo é $v = \omega R$.

# Solução

$$L = I\omega + mvR = \frac{v}{R}(I + mR^2)$$
$$L = L_0 = I\omega_0$$
$$\frac{v}{R}(I + mR^2) = I\frac{v_0}{R}$$
$$\frac{v}{v_0} = \frac{I}{I + mR^2}$$
$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{I}{I + mR^2}$$

# Energia

O conceito de energia não era tão popular no tempo de Newton como nos dias de hoje, diferentes da formulacão de Newton, os métodos Lagrangiano e Hamiltoniano hoje são mais sofisticados.

Em meados do século 19, ficou claro que o calor era outra forma de energia e não uma forma de fluido (denominado "calórico") que fluía entre corpos quentes e frios.

Para Hamilton nós atribuimos um sistema fechado em que somamos a energia cinética total de um sistema com a energia potencial total. Da seguinte maneira matemática:

$$H = \sum_i T_i + \sum_i U_i \tag{36}$$

Para Lagrange, temos o seguinte modelo matemático:

$$L = \sum_i T_i - \sum_i U_i \tag{37}$$

# Conclusão

A dinâmica da partícula é a essência da física que nos permite entender como os objetos se movem e por que eles se movem.

Através do estudo das forças, acelerações e movimento, somos capazes de prever, explicar e controlar o comportamento de partículas no universo.

Esses princípios são a base para inúmeras aplicações em engenharia, ciência e tecnologia, capacitando-nos a moldar o mundo à nossa volta.

# Referências Bibliográficas


Figure: 8 - (a)

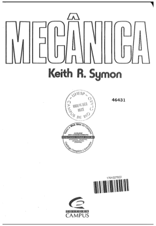



Figure: 8 - (b)

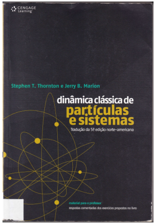



Figure: 8 - (c)

# Agradecimentos

*Obrigado pela atenção!*

Início