Numpy vs. Sympyで学ぶ 高校数学ハンズオン（前編）

【関数のグラフ，微分編】

進行予定

7/7 前編「関数のグラフ，微分編」

・NumPyとSymPyの特徴

・関数とは

・代表的な関数（三角関数，指数関数など）のグラフ

・微分を定義から理解する

・簡単な数値微分の方法

・応用：最小二乗法の考え方

講師自己紹介

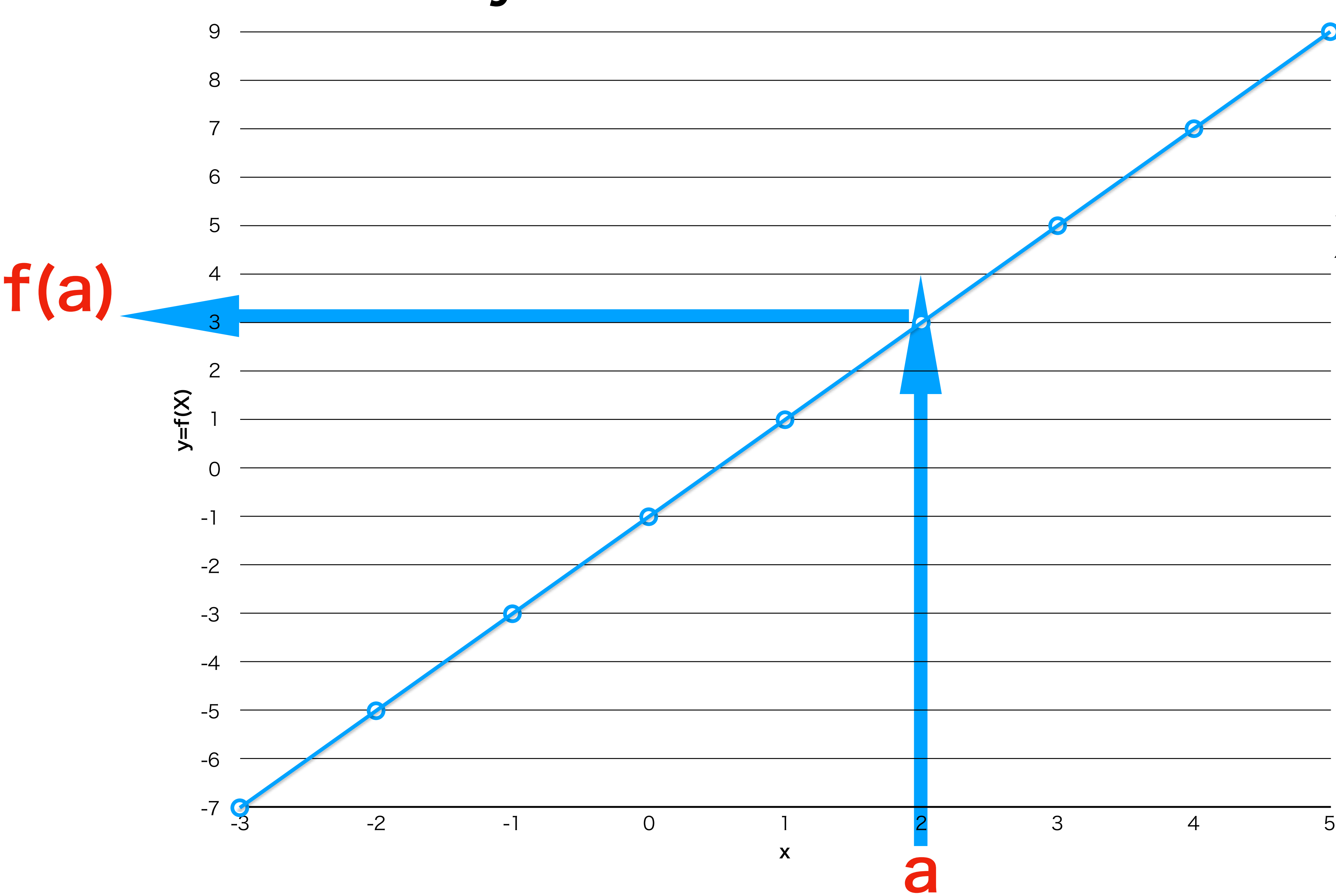
- 氏名：大久保　亮介
- 現在，薬学部4年（漢方薬専攻）
- 担当講義：基礎統計→ML，高校数学など

- 関数とは

関数とは？

xの値を定めるとyの値がただ1つ定まるとき,

yはxの関数であるという

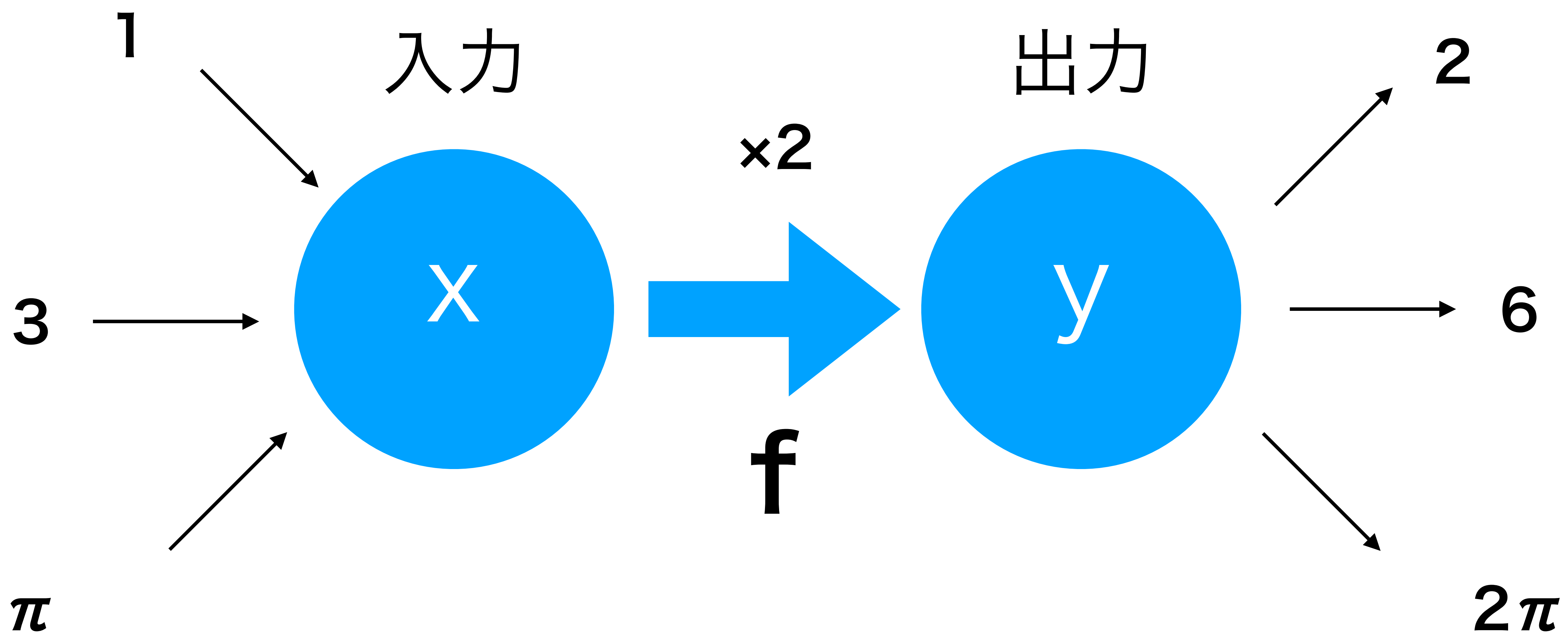


$$y = f(x)$$

x = aのとき,

y = f(a)

関数のイメージ



関数の種類（一例）

- 多項式関数
- 指数・対数関数
- 三角関数

多項式関数

一次関数 $y = ax + b$

二次関数 $y = ax^2 + bx + c$

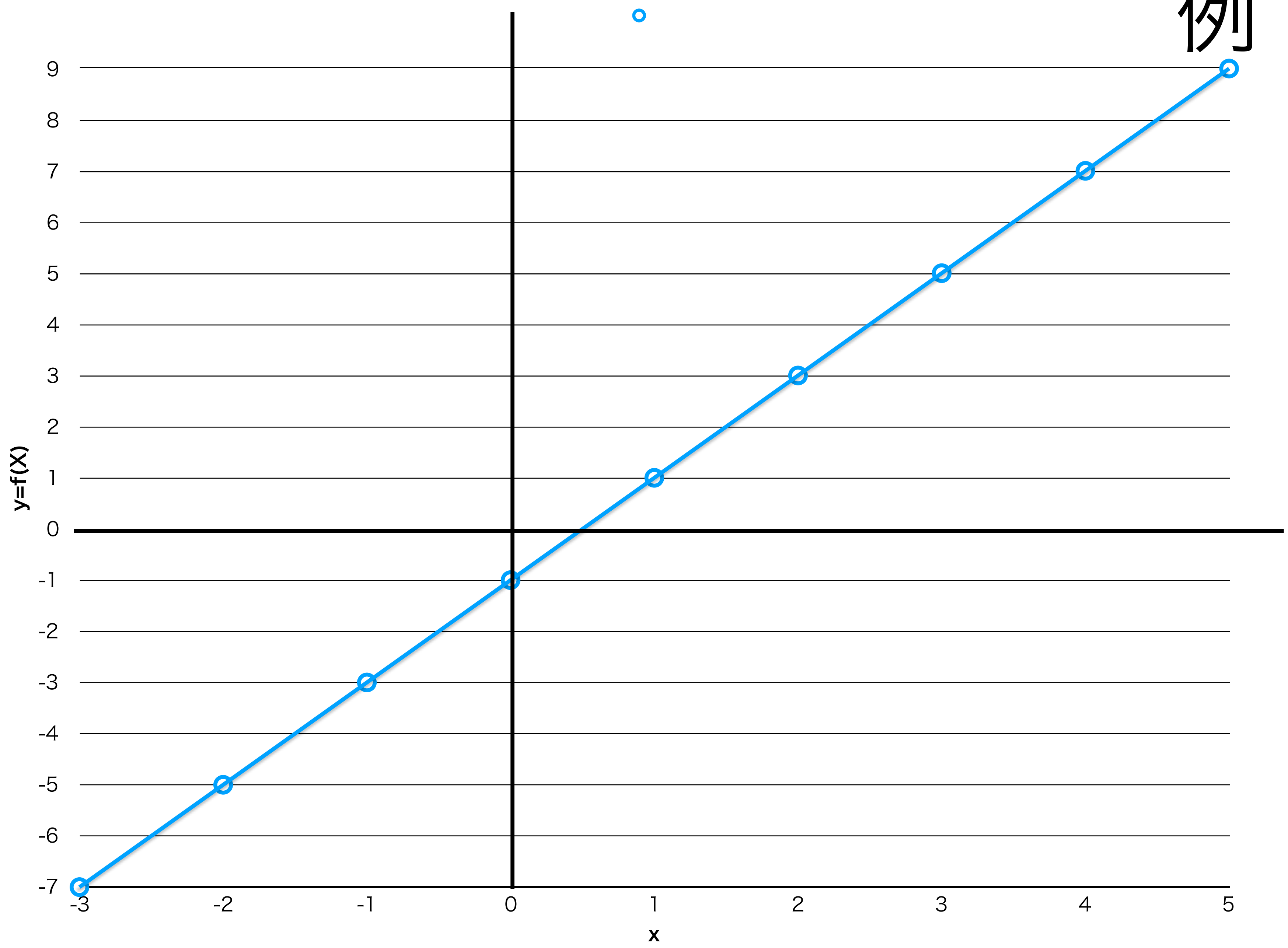
三次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

n次関数 $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 x^0$

一次関数

$$y = ax + b$$

例：f(x) = 2x - 1



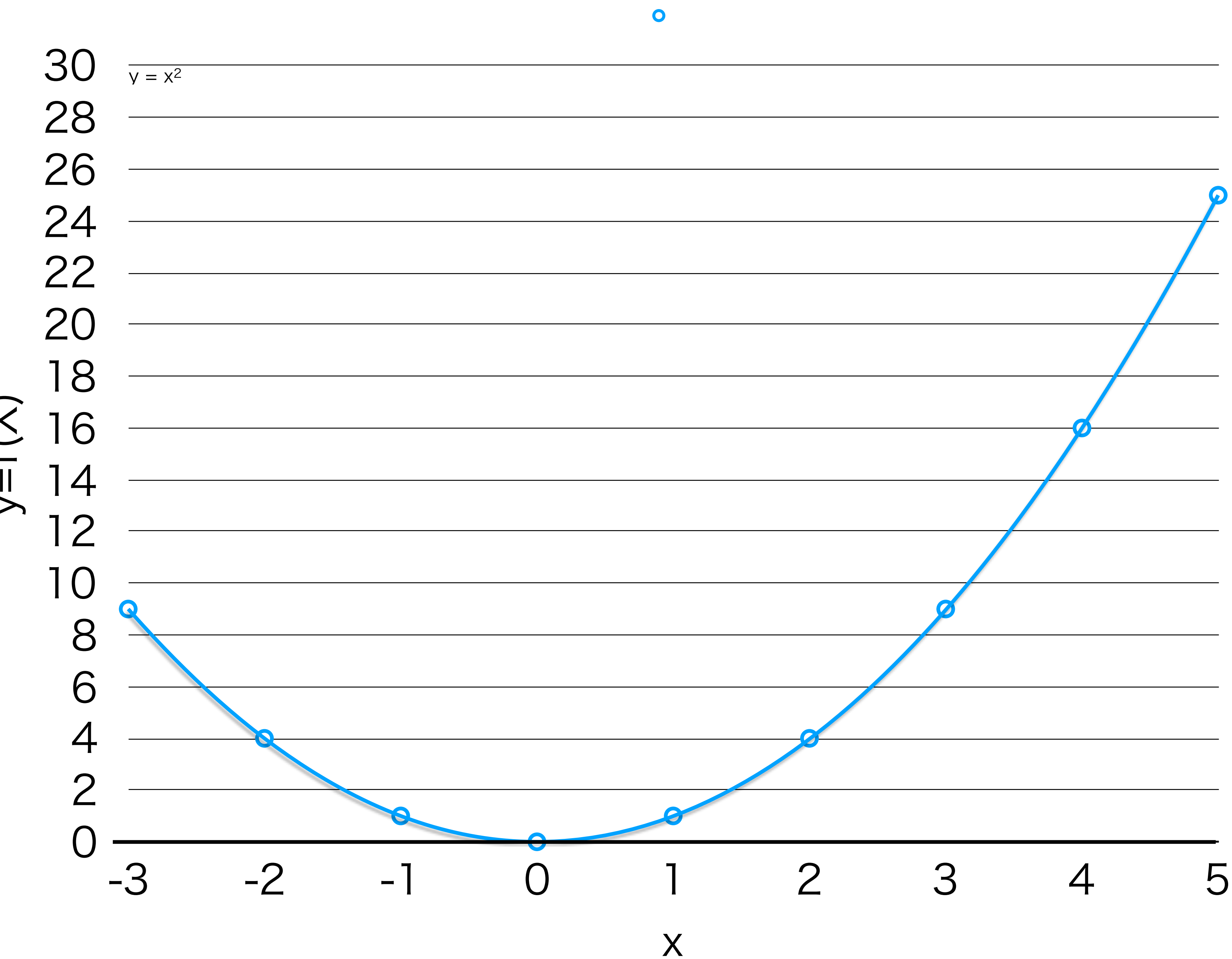
→傾きは2

切片は-1

の直線

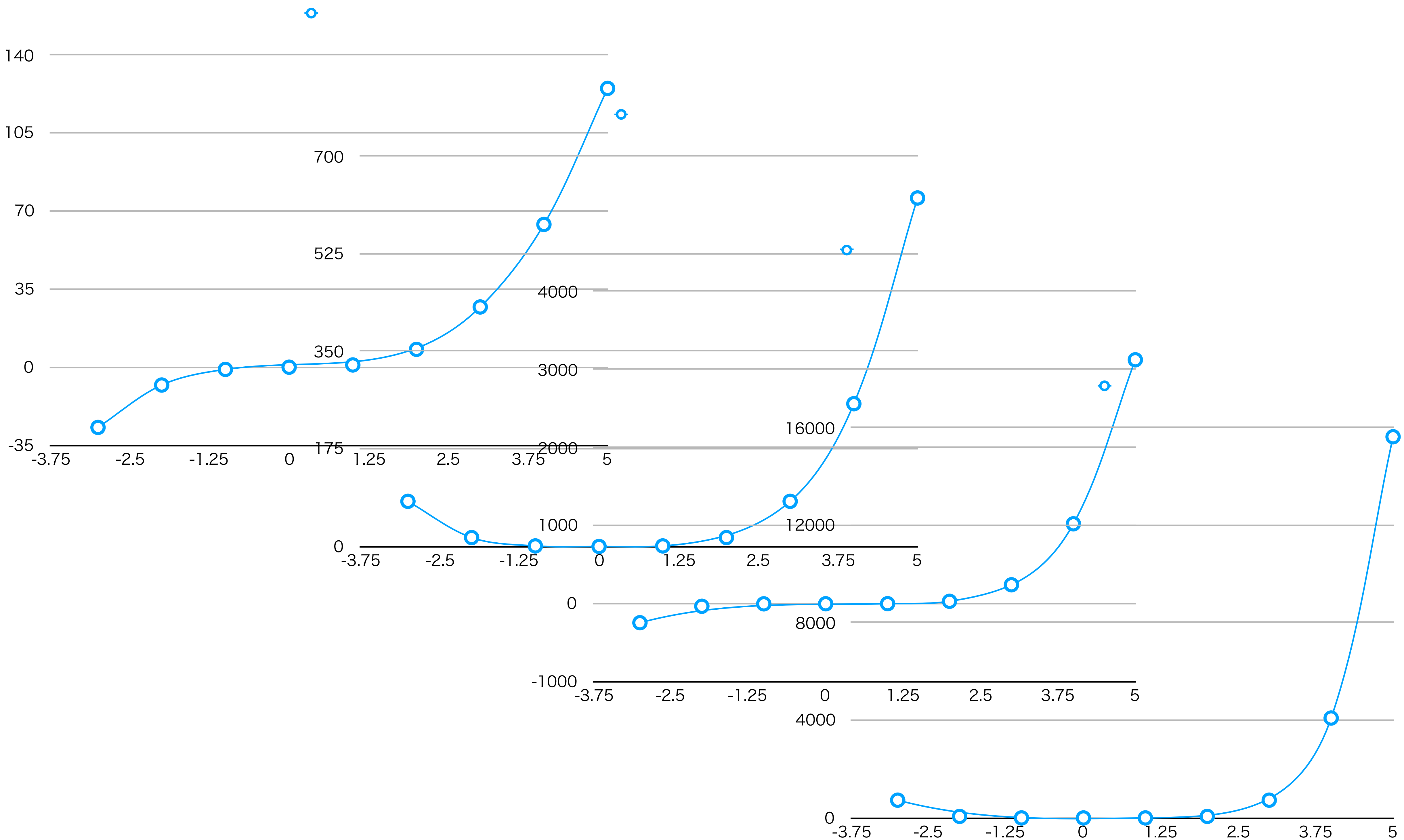
二次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$



例：$f(x) = x^2$

三次関数，　四次関数，　…



140
105
70
35
0
-35
-3.75
-2.5
-1.25
0
1.25
2.5
3.75
5
700
525
350
175
0
4000
3000
2000
1000
0
-1000
16000
12000
8000
4000
0

例題

$f(x) = x^2 + 3x + 2$ において、

$f(0)$，$f(4)$，$f(x+h)$，$f(f(x))$を求めよ

- 代表的な関数のグラフ

指数とは？

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n\text{個}}$$

例：$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$，$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$

指数法則

1 $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2 $(a^m)^n = a^{mn}$

指数法則の重要性

aをn回かけると考えず，指数法則から導出する

$$a^0 = 1$$

1において，n = 0 とすると　$a^m \times a^0 = a^m$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

1において，m = -n とすると

$a^{-n} \times a^n =$

$a^0 = 1$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

2において，m = 1/n とすると

$(a^{1/n})^n =$

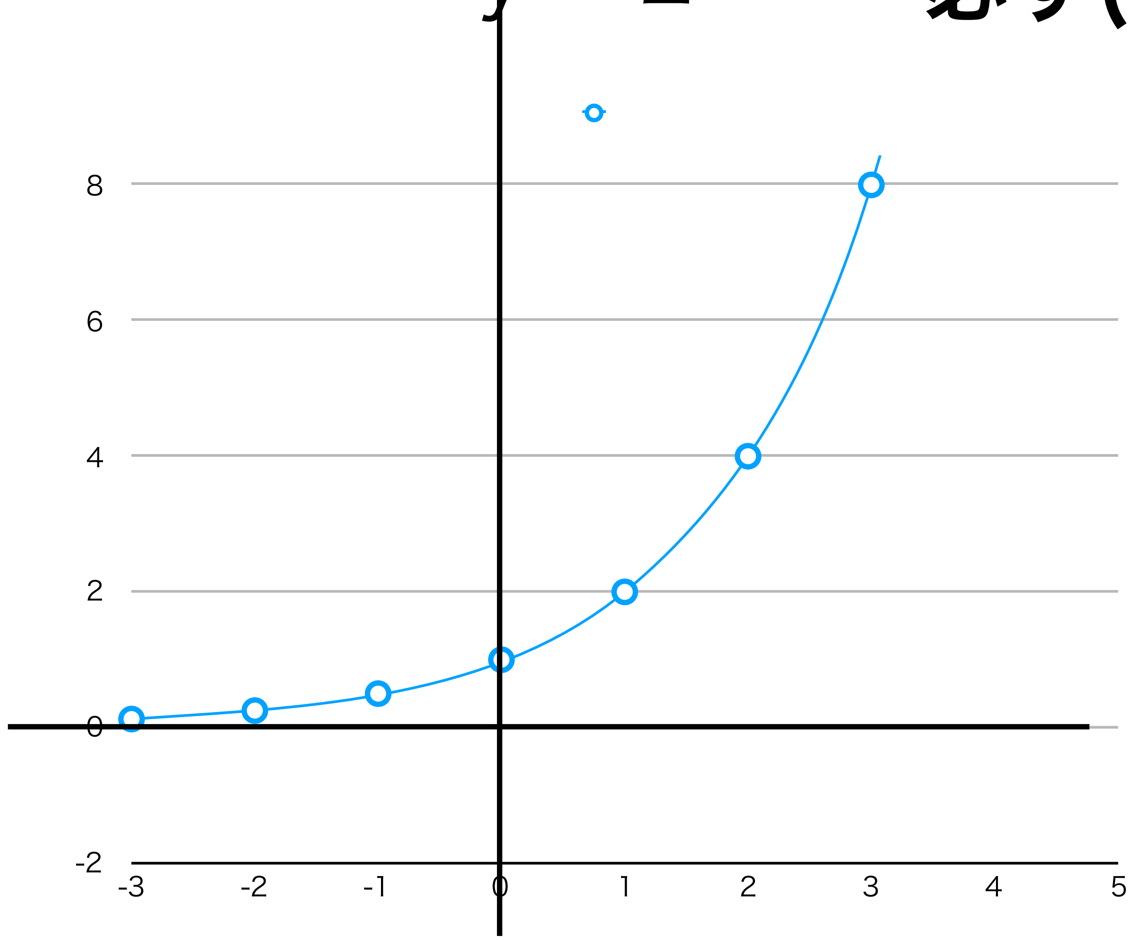
$a^1 = a$

指数関数

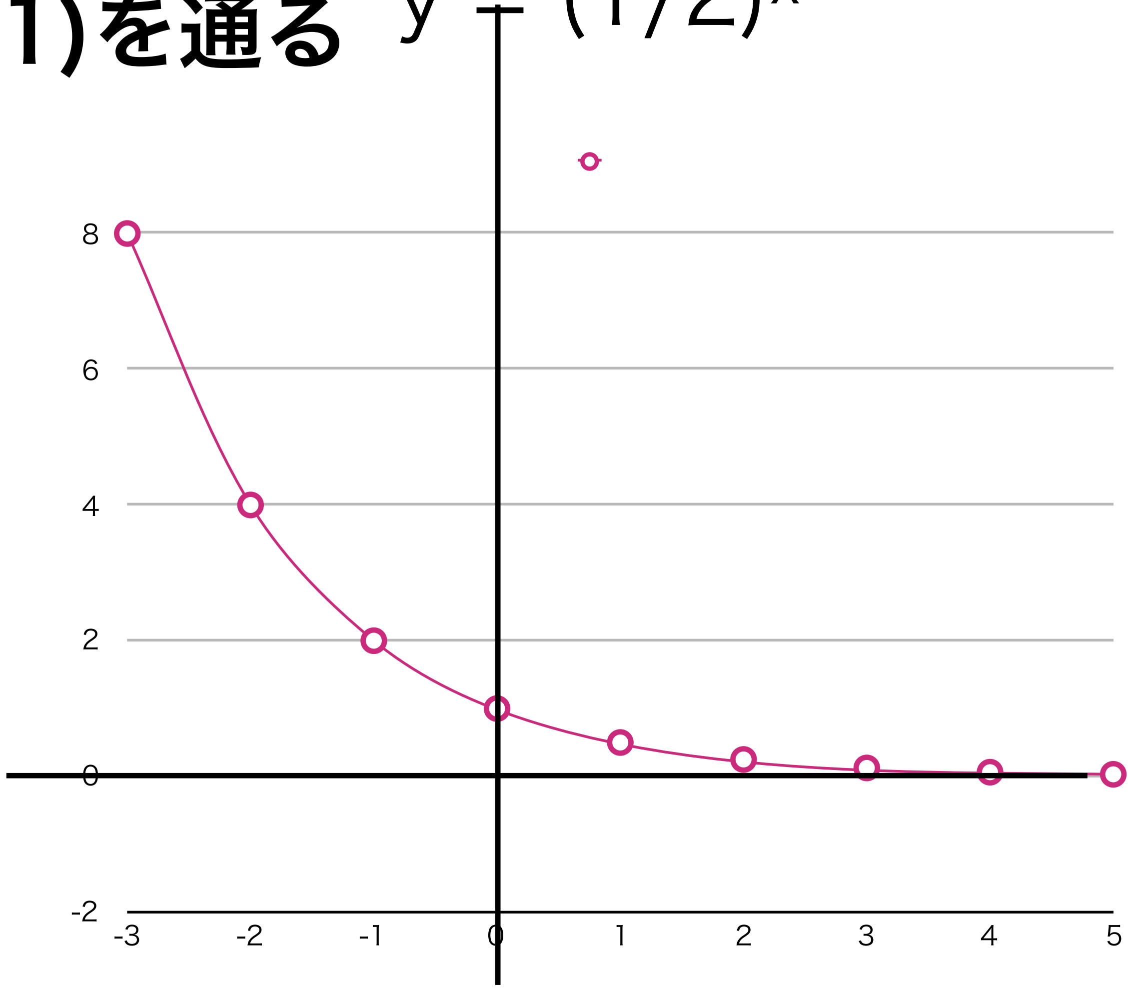
$$y = a^x$$

必ず(0,1)を通る

$y = 2^x$



$y = (1/2)^x$



指数と対数

$$a^n = M \quad \Longleftrightarrow \quad n = \log_a M$$

対数法則

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

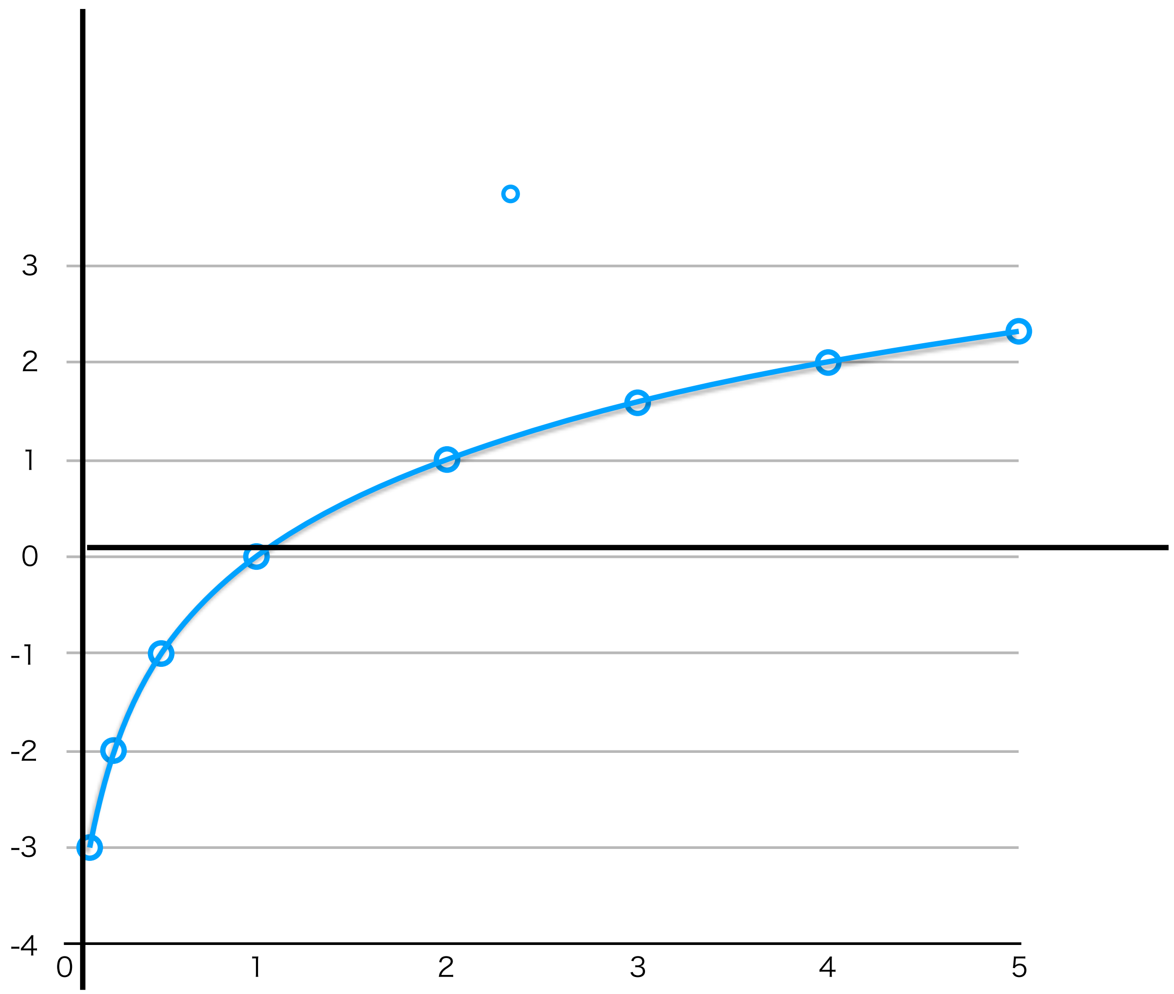
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

対数関数

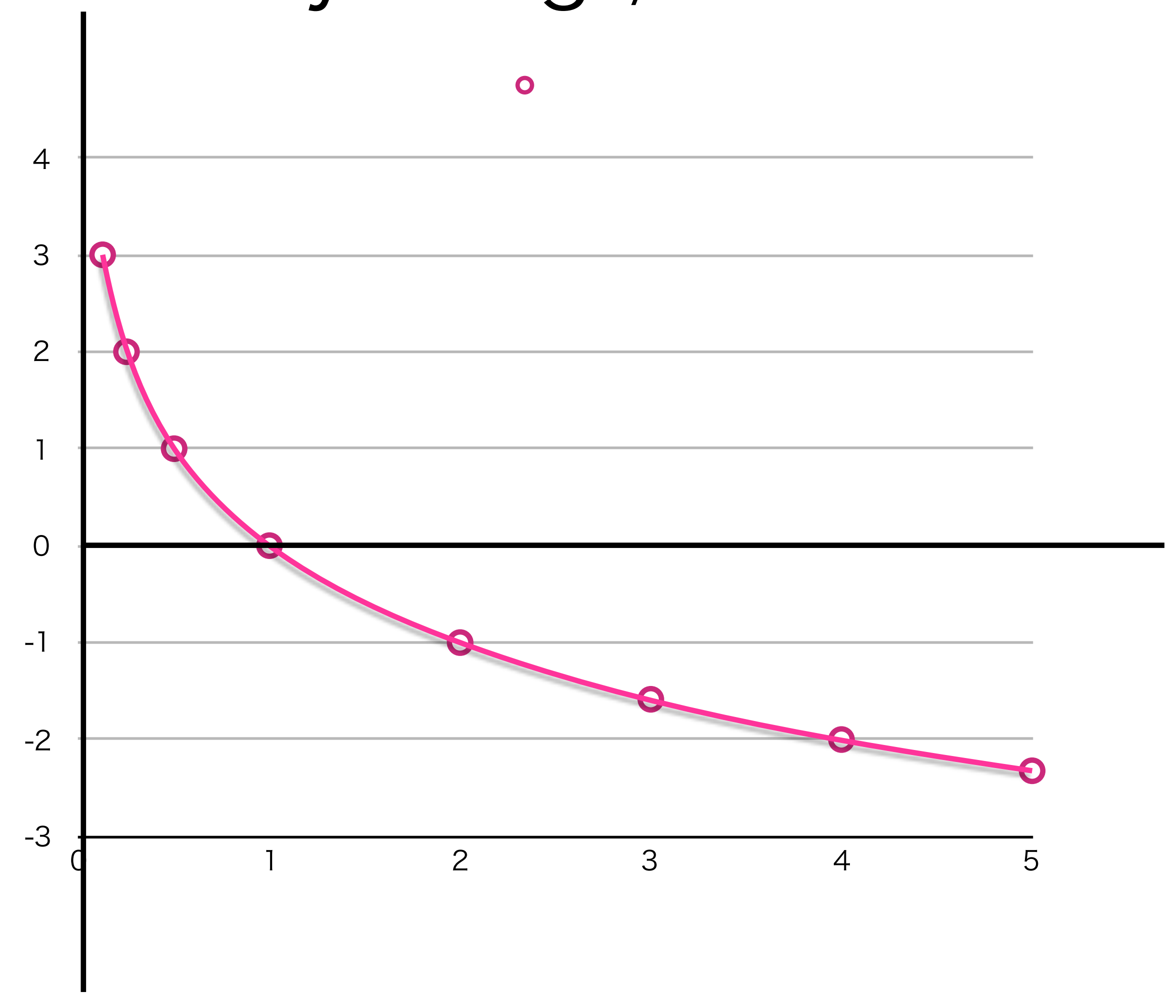
$$y = \log_a x$$

必ず(1,0)を通る

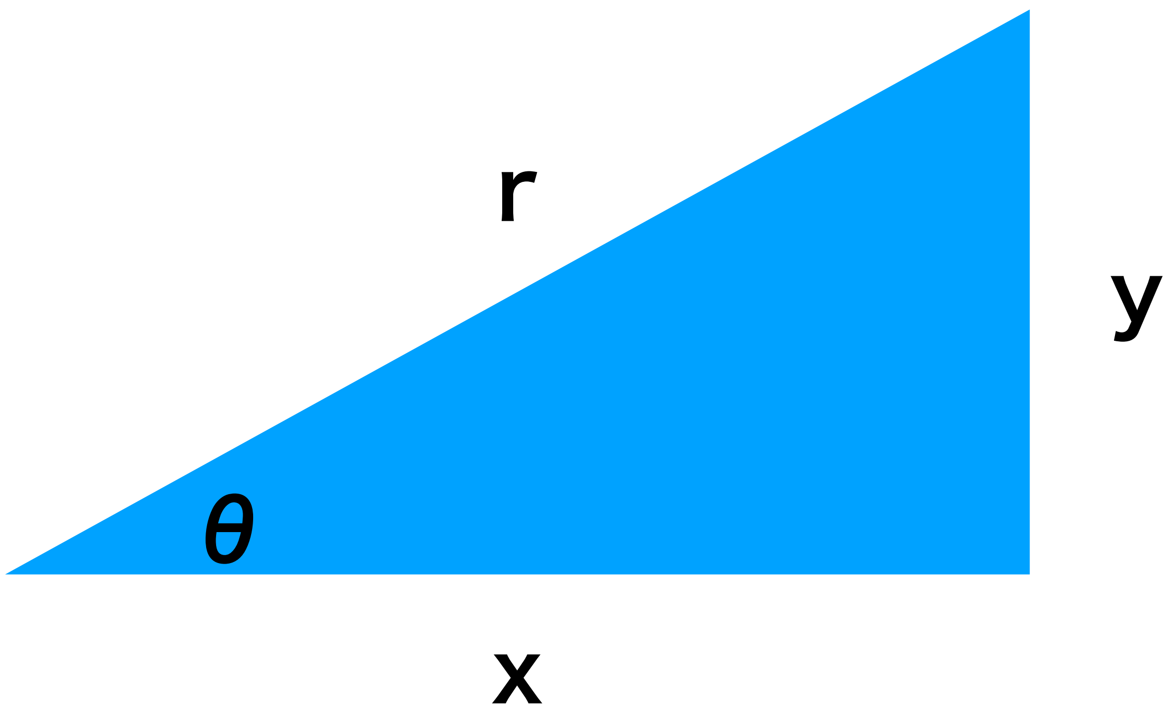
y = log2 x



y = log1/2 x



三角比



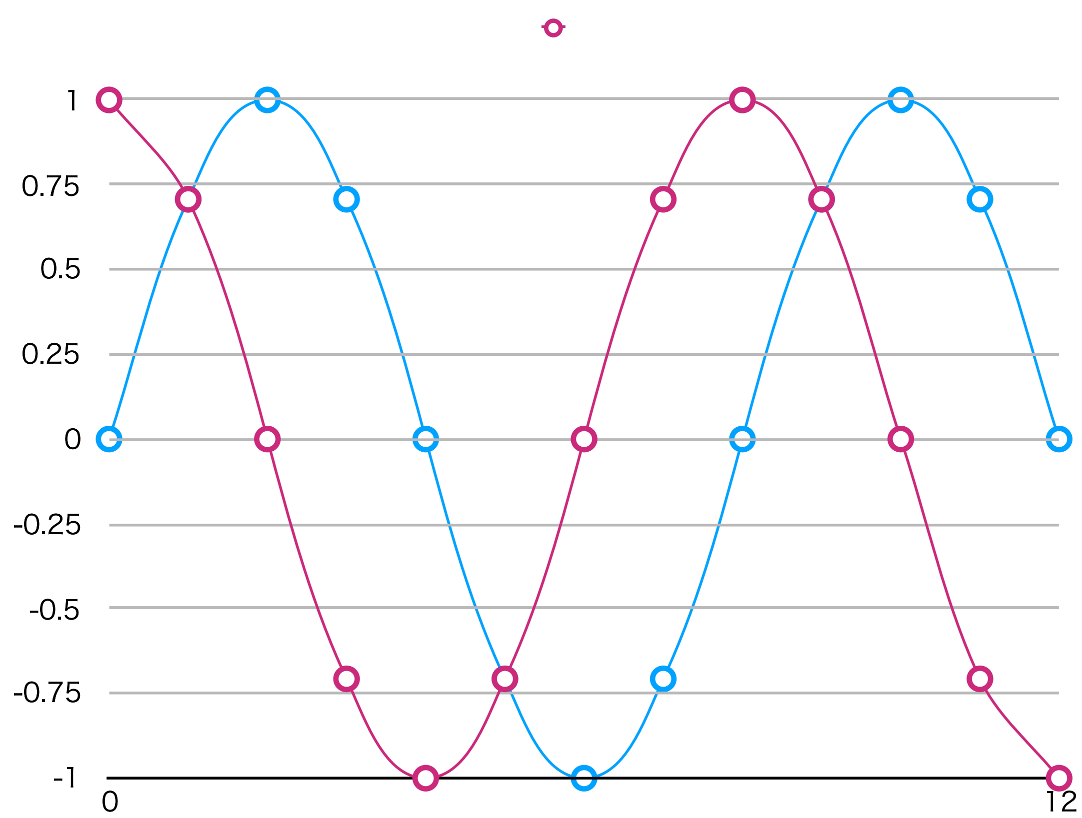
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

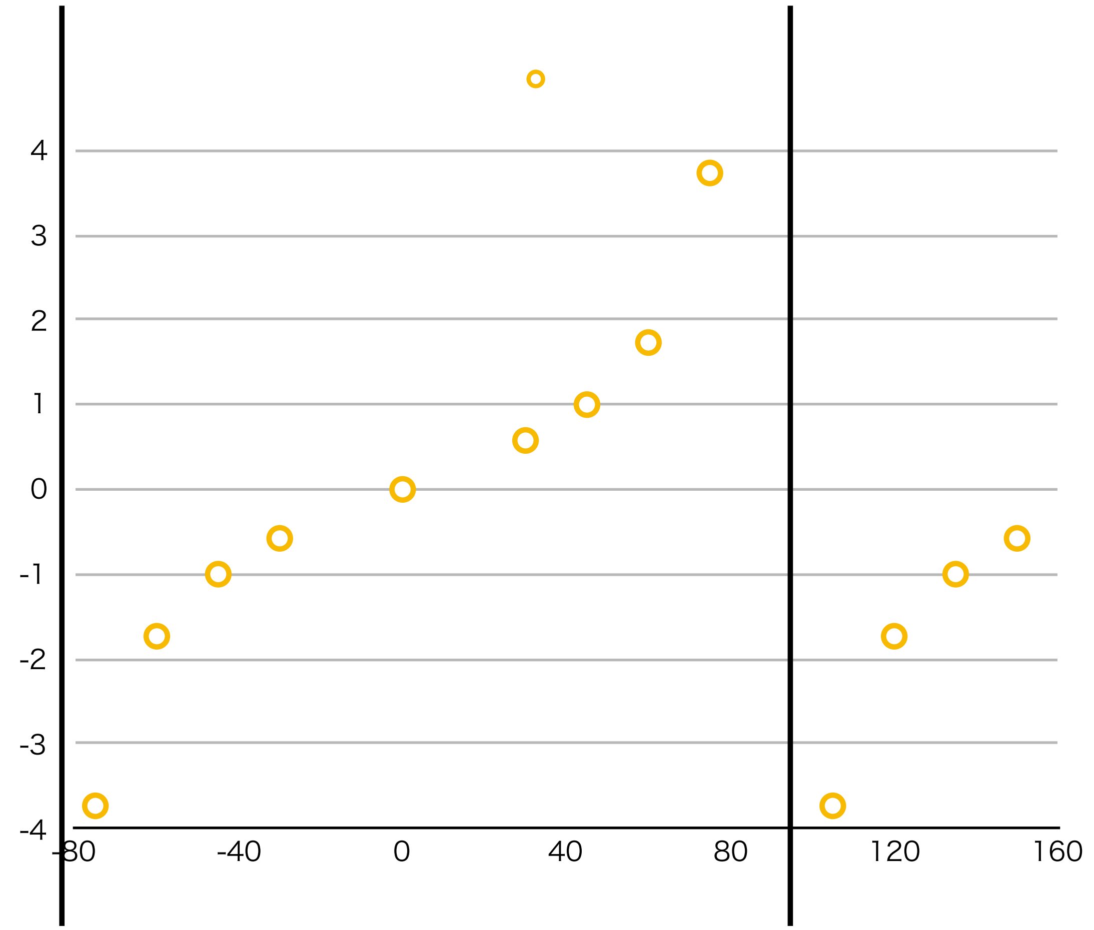
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	1/2	1/√2	√3/2	1
$\cos\theta$	1	√3/2	1/√2	1/2	0
$\tan\theta$	0	1/√3	1	√3	×

三角関数のグラフ



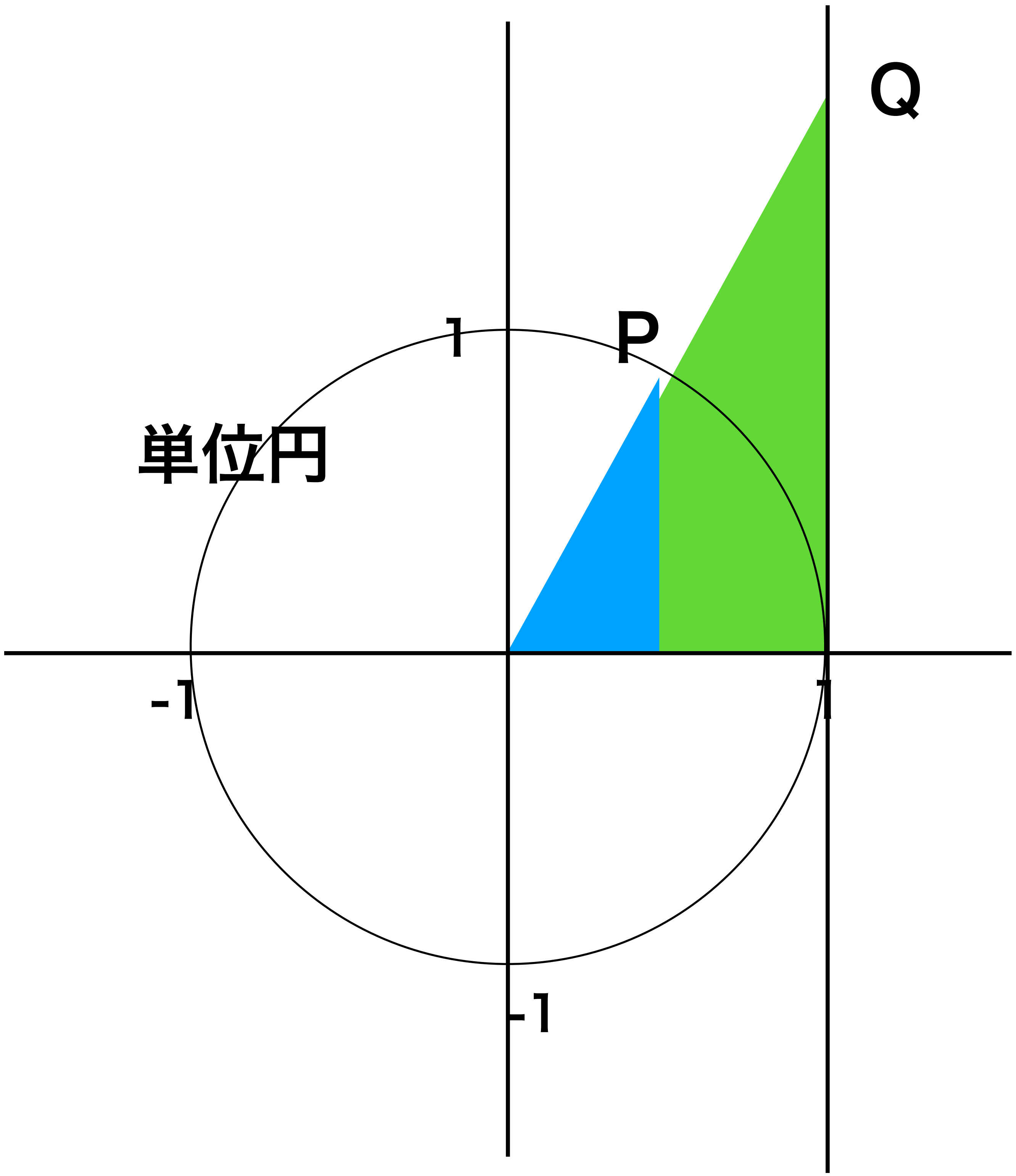
$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$



$$y = \tan x$$

三角比の拡張



P(cos θ　, sin θ)

Q(1, tan θ)

例題

次の関数のグラフを描け。

$$(1) y = e^x$$

$$(2) y = \log_e x$$

- 微分を定義から理解する

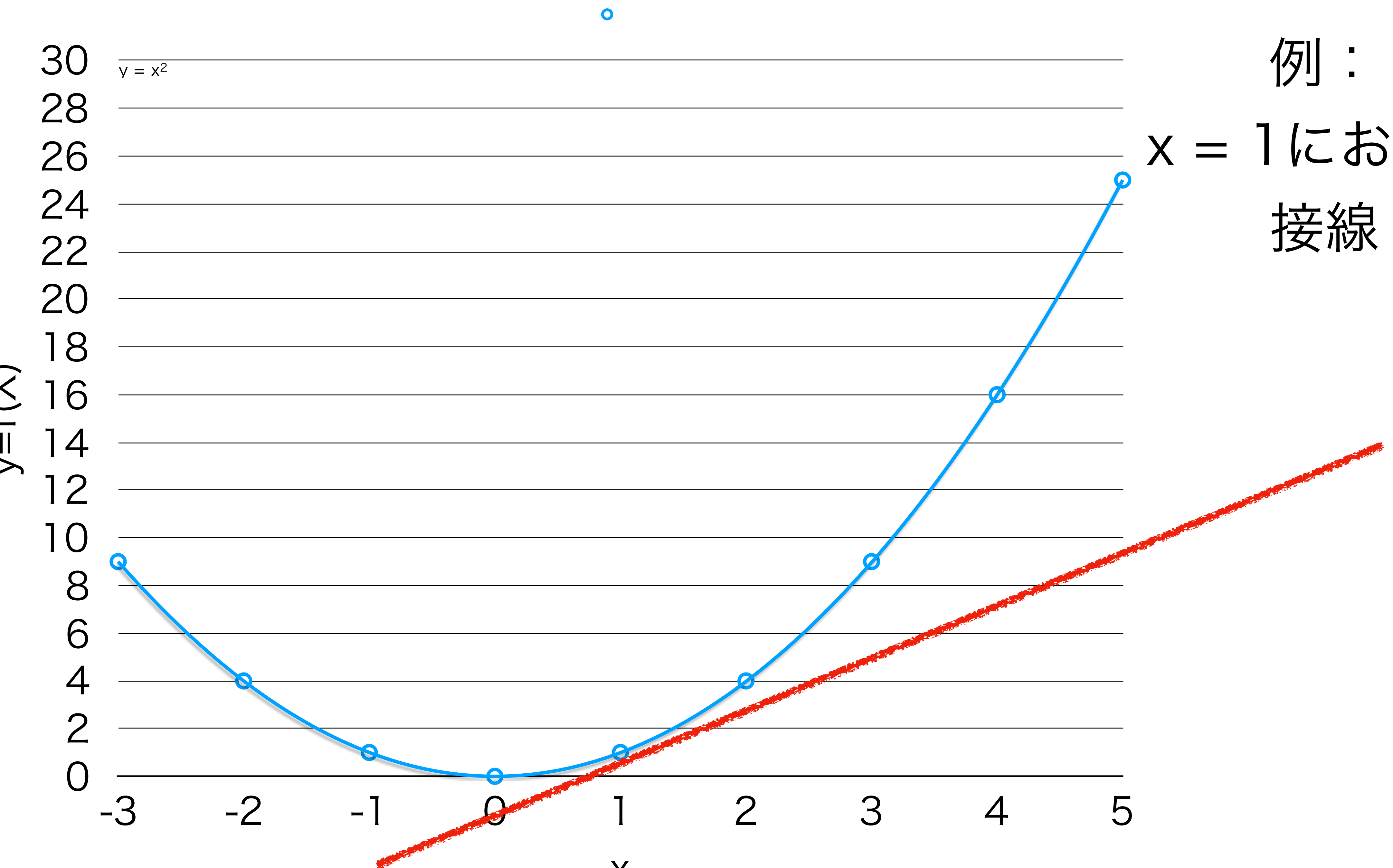
微分とは？

要するに，曲線の**接線の傾き**である

例：

x = 1における

接線



なんで？

2015センター試験数ⅡBの悲劇

平均点27.7

関数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めよう.

h が 0 でないとき, x が a から $a+h$ まで変化するときの $f(x)$ の

平均変化率は $\boxed{\text{ア}}+\dfrac{h}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

したがって, 求める微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to\boxed{\text{ウ}}}\left(\boxed{\text{ア}}+\frac{h}{\boxed{\text{イ}}}\right)=\boxed{\text{エ}}$$

である.

(以降省略)

[2015 センター試験　数学Ⅱ・数学B　第 2 問]

定義の理解が重要

平均変化率

関数 y=f(x) において、x がAからBまで変化したとき

yの増加量/xの増加量　を平均変化率という。

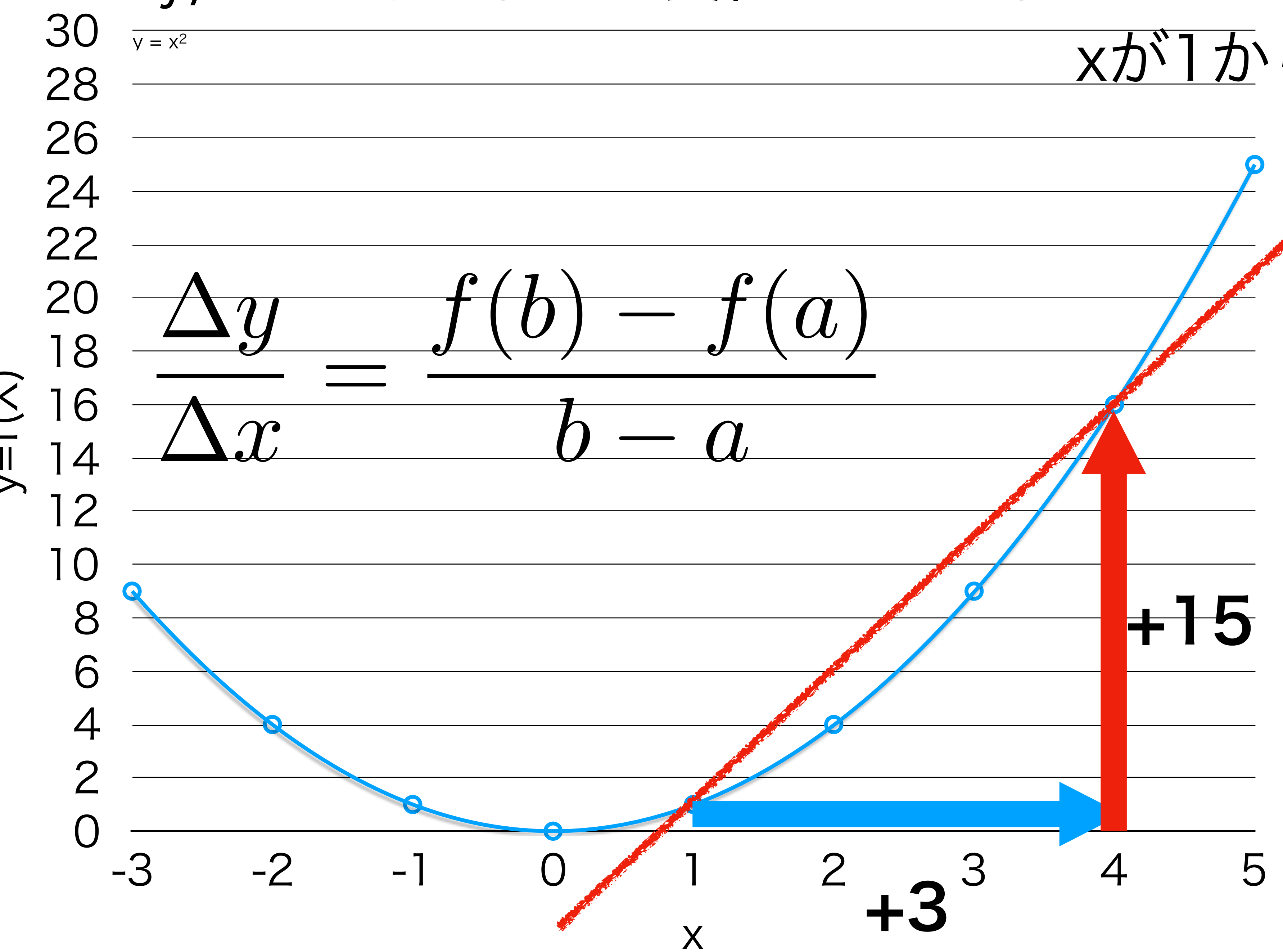
Δy/Δx と表す。Δは変化量のこと。

例：

$f(x) = x^2$において,

xが1から4まで変化するときの

平均変化率



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

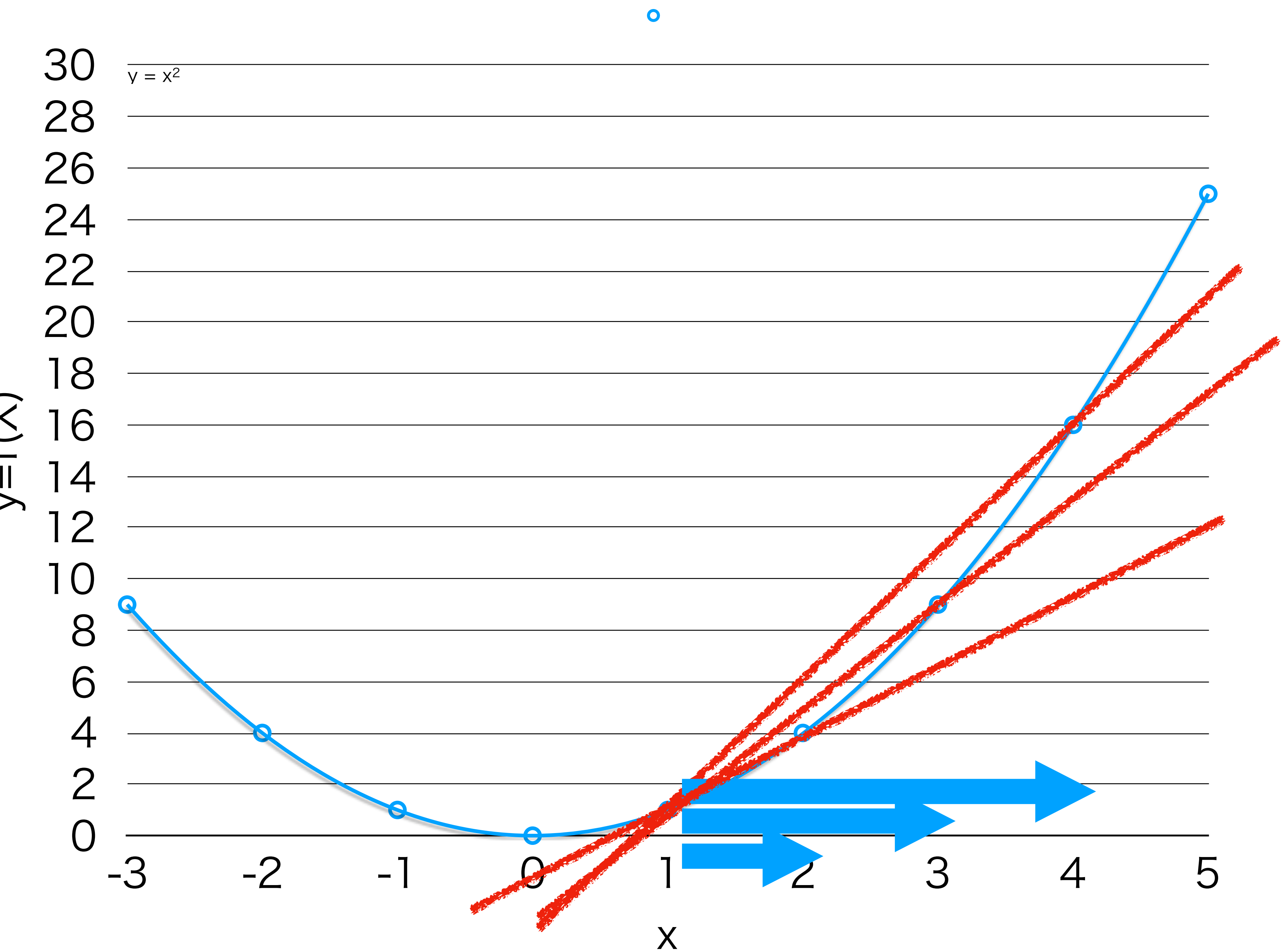
= 15/3

=5

平均変化率から微分係数へ

Δxを限りなく0に近づけていくと,

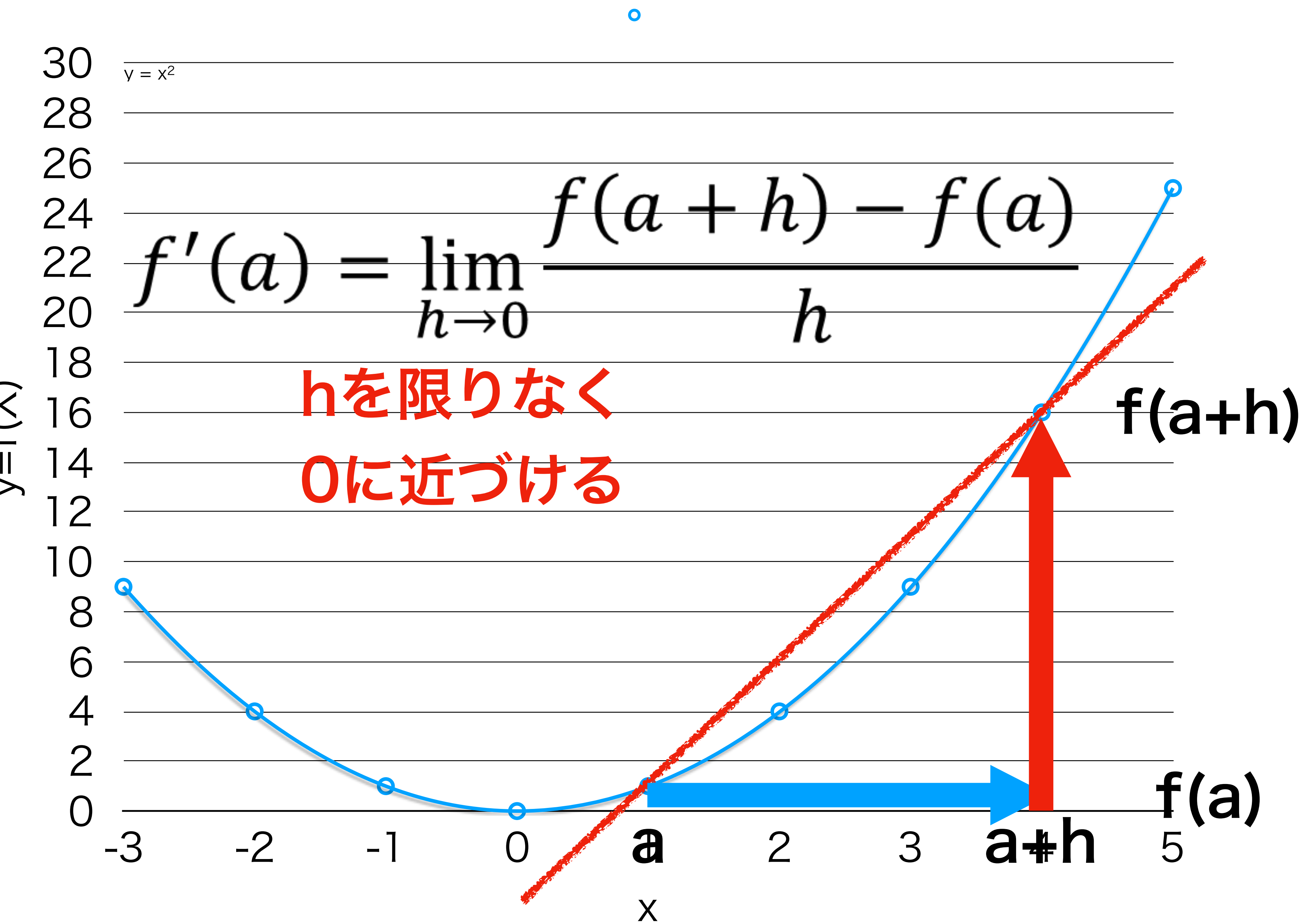
曲線上のある1点の傾きが求まる。　→微分係数



微分係数

関数f(x)のx = aにおける微分係数f’(a)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



導関数

f’(x) が求まれば、x=1,2,3,...に対し f’(1),f’(2),f’(3)と対応させられれ、各点の微分係数が求められる。関数f(x)から新たに関数f’(x)を導くf’(x)を関数 f(x) の導関数という。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

微分の公式

任意の実数でも成り立つ

$(n = \text{自然数})y = x^n$ を微分すると、

$$y' = nx^{n-1}$$

例：f(x) = x^2において，f'(x) = 2x

その他の公式：http://examist.jp/mathematics/math-3/derivation/bibunkousiki/

例題

$f(x) = x^2$ の微分を以下の微分の定義式を用いて行え。また，公式を用いて確認せよ。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- 簡単な数値微分の方法

平均変化率を求める

例：

f(x) = x²において，xが1から4まで変化するときの平均変化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

微分係数（？）を求める

例：

$f(x) = x^2$の $x = 1$における微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

hを限りなく
0に近づける
←h = 0ではない！

h = 0のとき，計算できない

h	f'
1	3
0.1	2.1
0.01	2.01
0.001	2.001
…	…
0	?

どうしよう？

微分係数を近似的に求める

例：

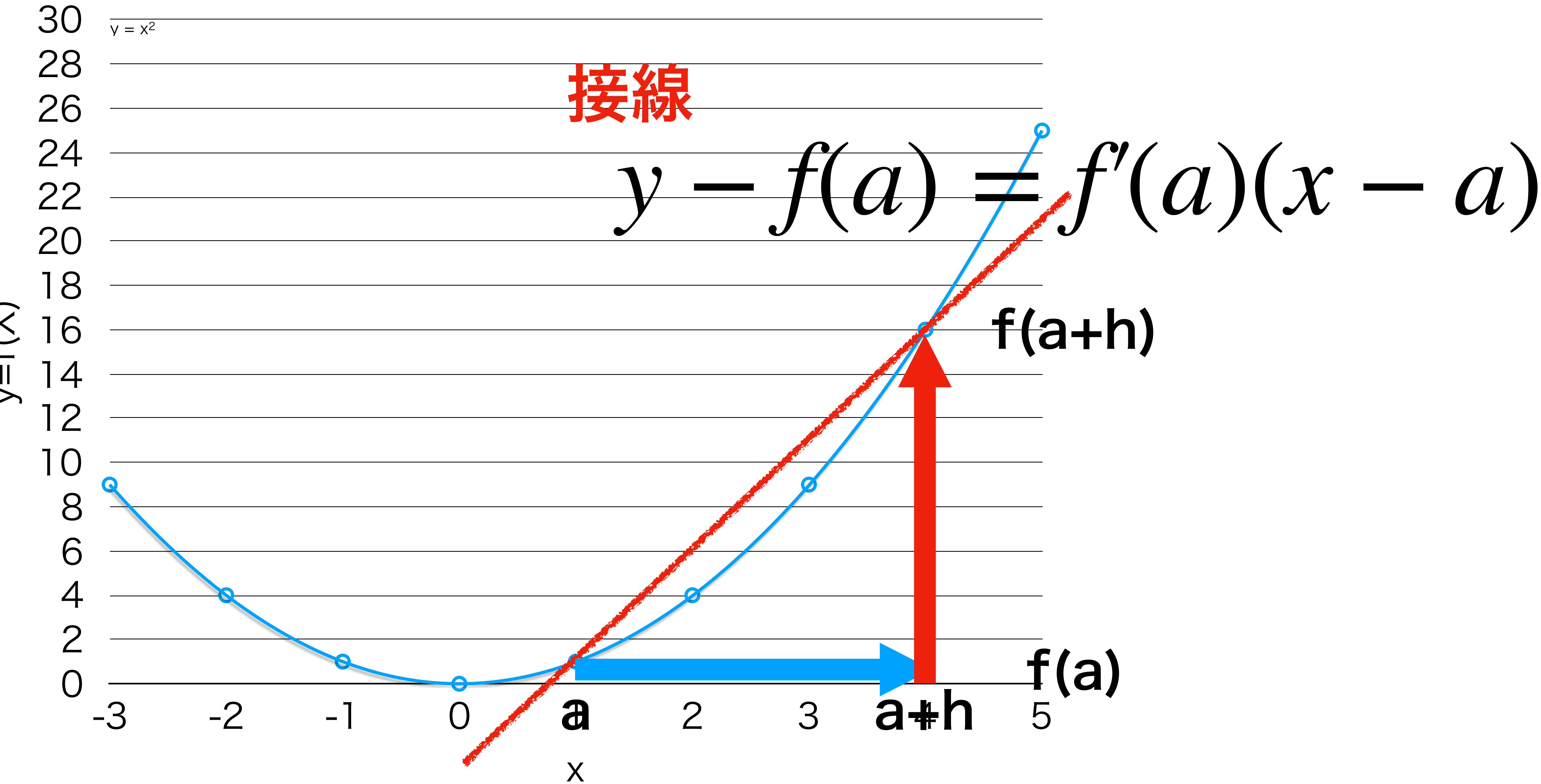
f(x) = x²の x = 1における微分係数

$$f'(a) \sim \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

h	f’
1	3
0.1	2.1
0.01	2.01
0.001	2.001
…	…

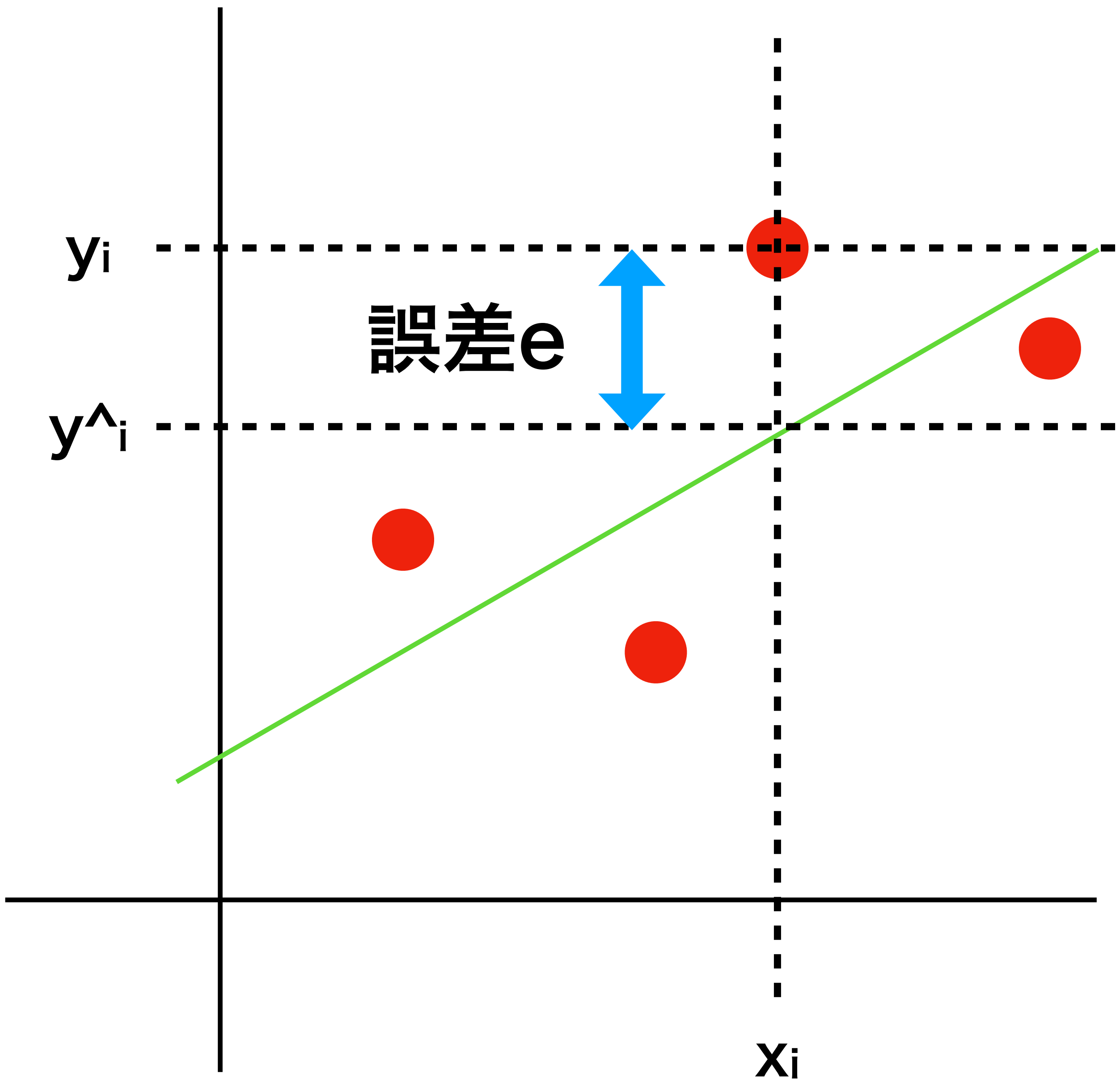
接線をひく

$$f'(a) \sim \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ →接線の傾き



- 最小二乗法の考え方

最小二乗法



$$\hat{y} = \hat{w}x + \hat{b}$$

$$E = \sum (y_i - \hat{y_i})^2$$
$$= \sum (y_i - \hat{w}x_i - \hat{b})^2$$

→Eが最小になる
wとbを推測する

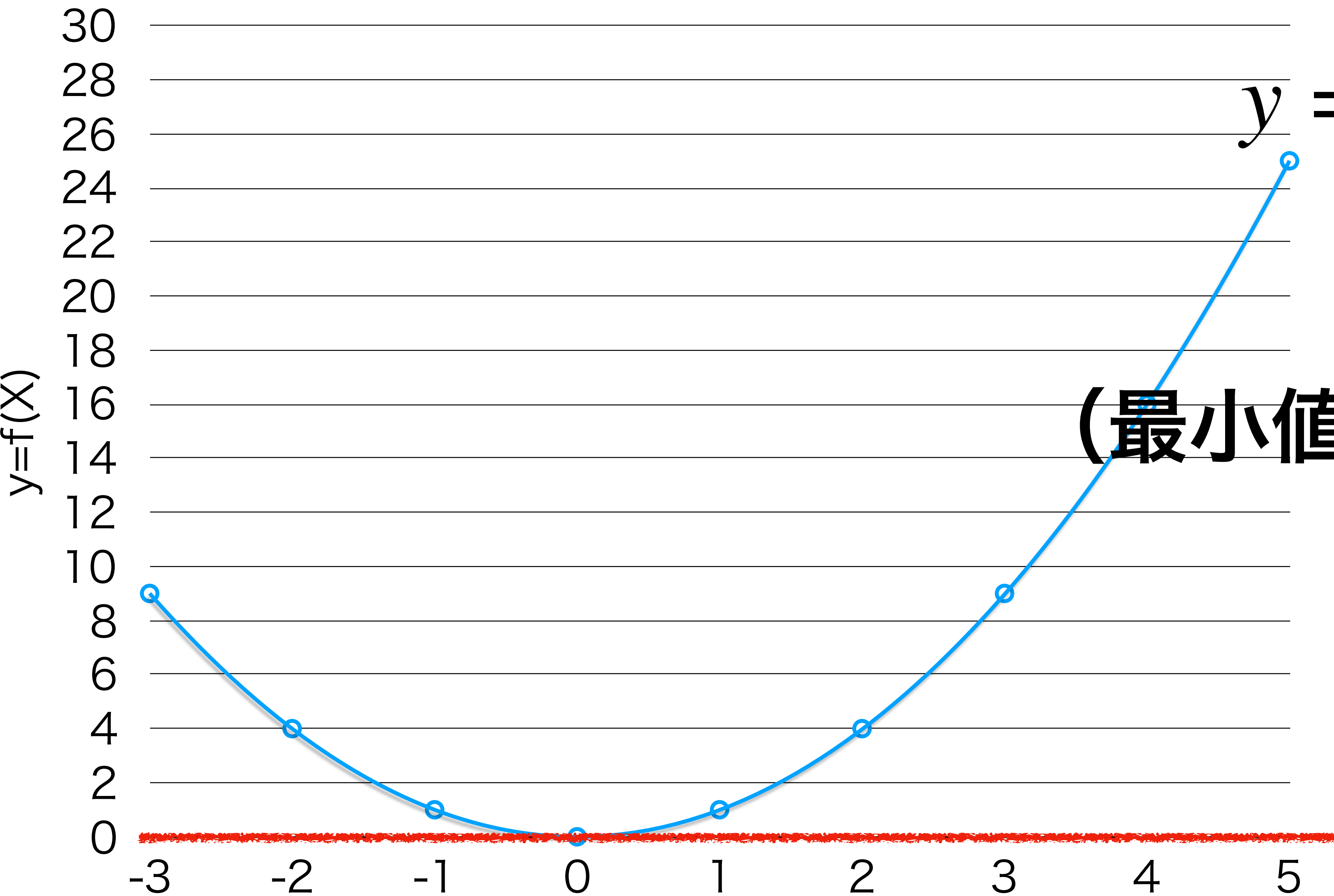
最適化計算 1

1. 最小2乗法を用いる，厳密解

$$E = \sum (y_i - \hat{w}x_i - \hat{b})^2$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\partial E}{\partial w} = 0 \quad \dfrac{\partial E}{\partial b} = 0$ となるw，bを求める

微分が0の意味



$y = x^2$

極値

（最小値，最大値を含む）

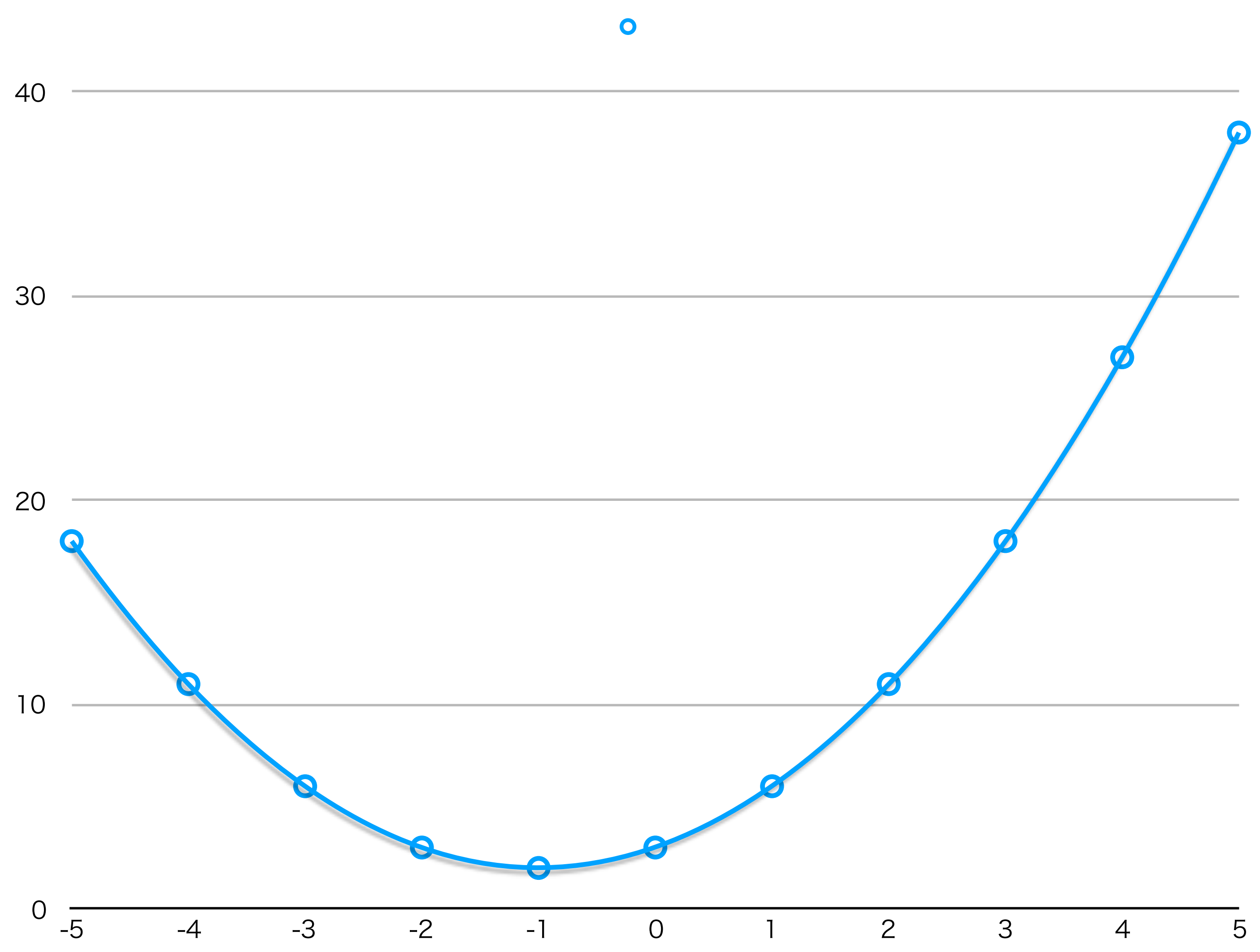
$$f'(x) = 0$$

例：f'(x) $\overset{x}{=}$ 2x = 0より，

x = 0のとき，最小値f(x) = 0

例題

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ が最小値をとる際のxと最小値を導関数（微分）を用いて求めよ。



最適化計算2

2. 勾配降下法を用いる，近似解

$$E = \sum (y_i - \hat{w}x_i - \hat{b})^2$$

$$\Rightarrow \quad w_{i,t+1} = w_{i,t} - \mu \frac{\partial f}{\partial x_i} \ (i \in N)$$

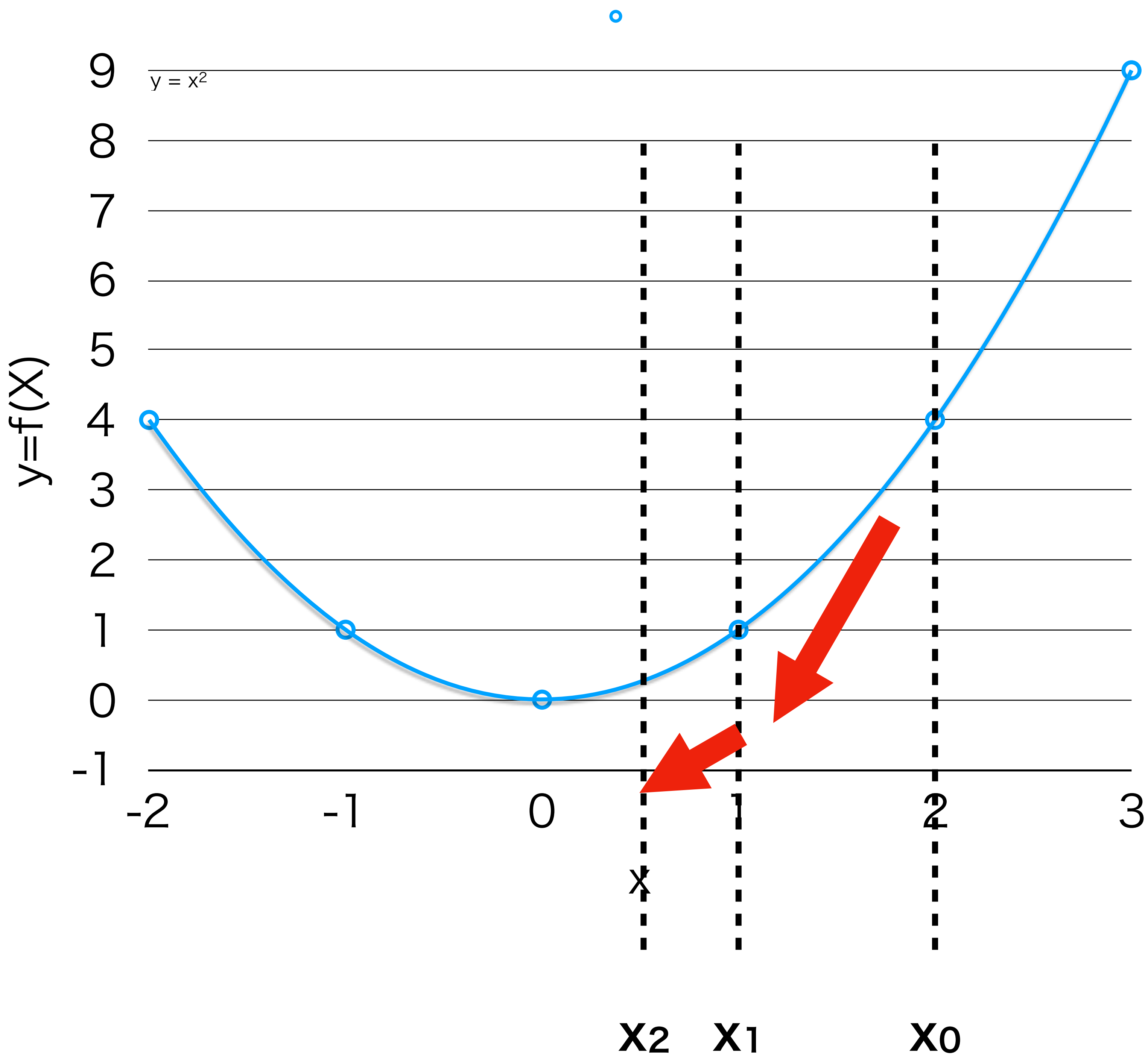
例題　勾配降下法と等比数列

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $x_0 = 2$の時、下記の勾配降下法の式を用いて、x_1 , x_2, x_n を求めよ。

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \alpha f'(x_n)}$$

ただし学習率αは0.25とする。

勾配降下法のイメージ

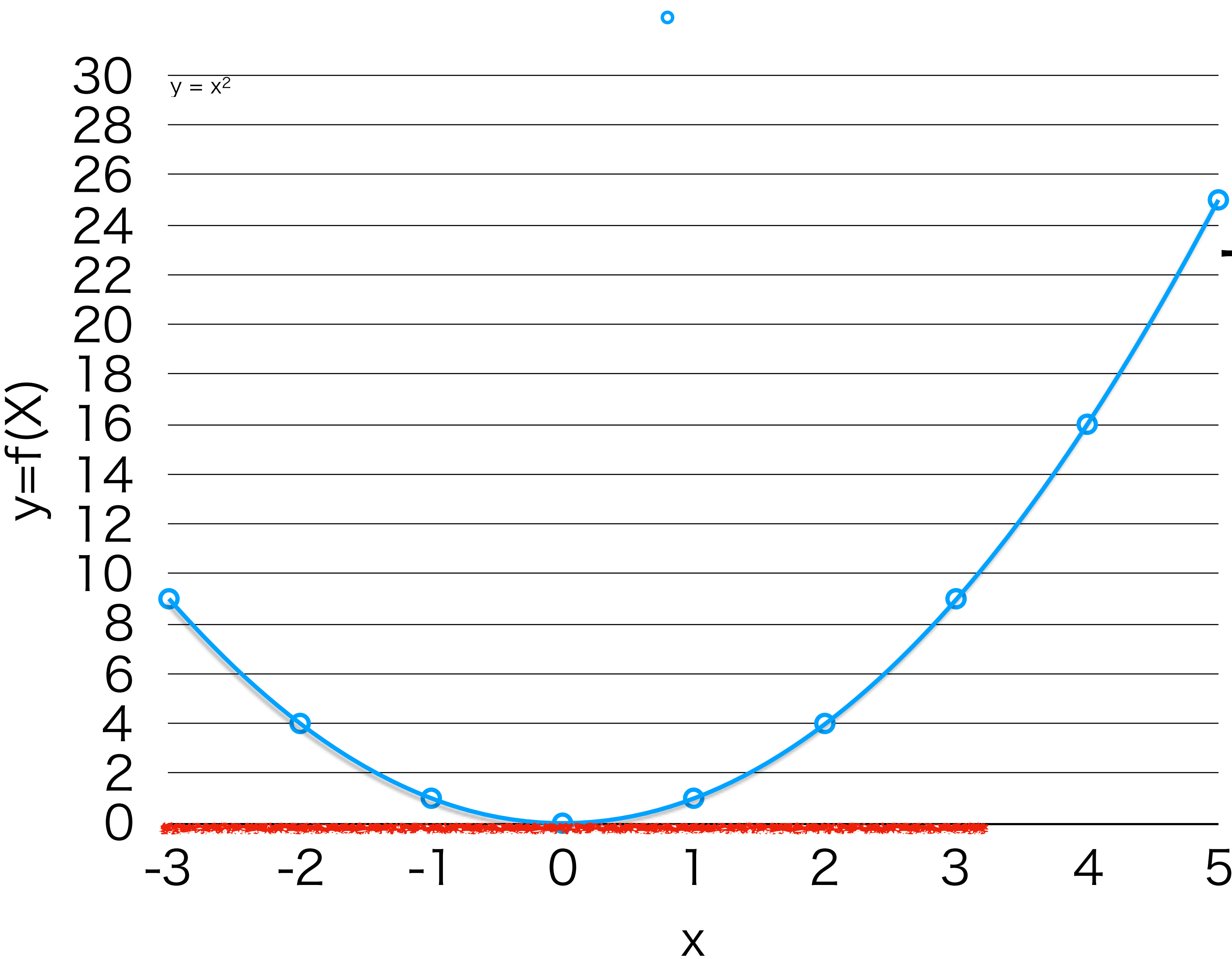


$x_0 = 2 \quad f'(x_0) = 4$

$x_1 = 1 \quad f'(x_1) = 2$

$x_2 = 0.5 \quad f'(x_2) = 1$

勾配降下法のイメージ



$x_n = 2\times(0.5)^{n-1}$

$f'(x_n) = 4\times(0.5)^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

最小値と一致

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \mathbf{0}$$