

# Filtragem no Domínio da Frequência

Disciplina: Tópicos em Computação  
(Processamento Digital de Imagens)

Prof. Kelson Rômulo Teixeira Aires

Bacharelado em Ciência da Computação  
DIE - CCN - UFPI

## Algumas considerações

- A frequência é diretamente relacionada a taxas espaciais de variação;
- Não é difícil associar intuitivamente frequências na transformada com padrões de variações de intensidade em uma imagem;
- O componente de variação mais lenta ( $\mu = \nu = 0$ ) é proporcional à intensidade média de uma imagem;

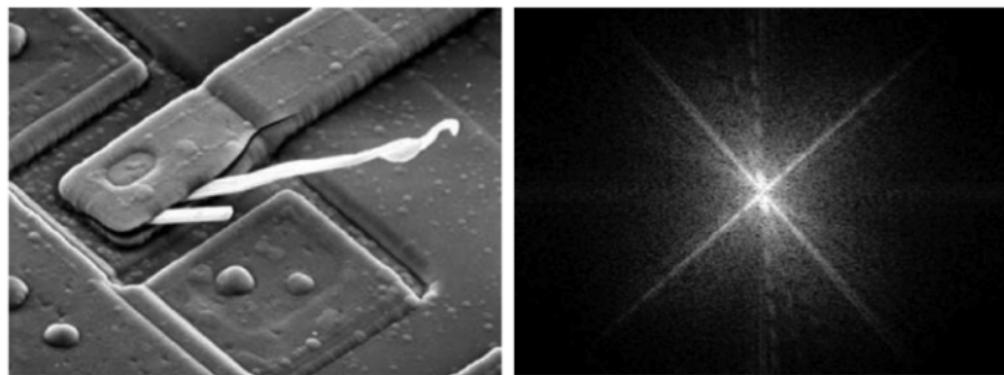


## Algumas considerações

- À medida que nos distanciamos da origem da transformada, as baixas frequências correspondem aos componentes de intensidade de variação lenta em uma imagem;
  - ▶ mudanças suaves de intensidade na parede e no piso da imagem de uma sala
- À medida que nos distanciamos da origem da transformada, as frequências mais altas começam a corresponder a variações de intensidade cada vez mais rápidas;
  - ▶ bordas de objetos e outros elementos, mudanças abruptas de intensidade

## Algumas considerações

- As técnicas de filtragem no domínio da frequência se baseiam na modificação da transformada de Fourier para atingir um objetivo específico e calcular a DFT inversa para retornar ao domínio da imagem;

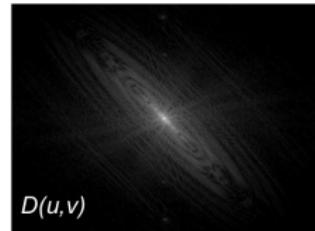
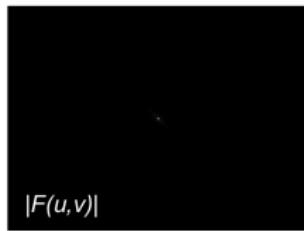
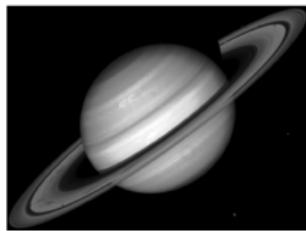


a b

**FIGURE 4.29** (a) SEM image of a damaged integrated circuit. (b) Fourier spectrum of (a). (Original image courtesy of Dr. J. M. Hudak, Brockhouse Institute for Materials Research, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.)

# Visualização da Transformada em 2D

- A transformada de Fourier Discreta bidimensional é frequentemente visualizada como uma função de intensidade;
- Para facilitar a visualização, ao invés de se apresentar  $|F(\mu, \nu)|$ , o que se apresenta é a função:  $D(\mu, \nu) = c \log [1 + |F(\mu, \nu)|]$ , onde  $c$  é uma constante arbitrária.



# Filtragem no Domínio da Frequência

- Consiste em modificar a Transformada de Fourier (DFT) de uma imagem e depois calcular a transformada inversa (IDFT) para obter o resultado processado;
- Dada uma imagem digital,  $f(x, y)$ , de tamanho  $M \times N$ , a equação básica de filtragem tem a forma:

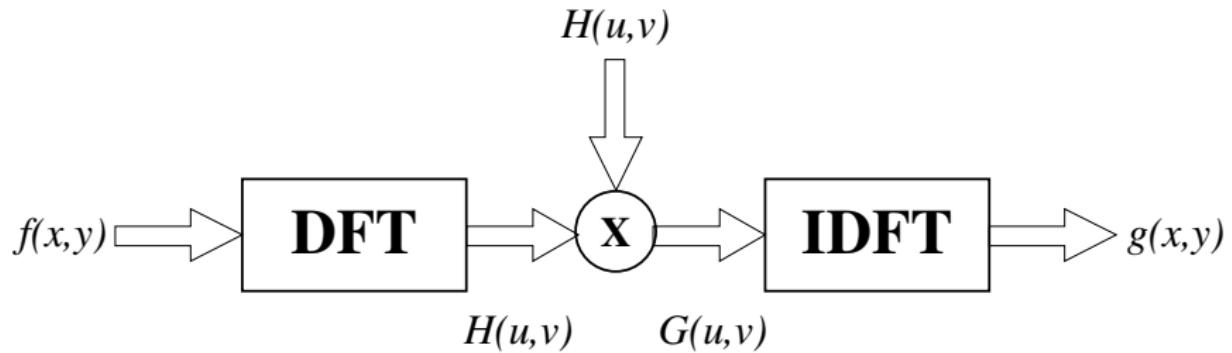
$$g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1} [H(\mu, \nu)F(\mu, \nu)]$$

onde  $\mathfrak{F}^{-1}$  é a IDFT,  $F(\mu, \nu)$  é a DFT da imagem de entrada e  $H(\mu, \nu)$  é uma *função filtro* (função de transferência).



# Filtragem no Domínio da Frequência

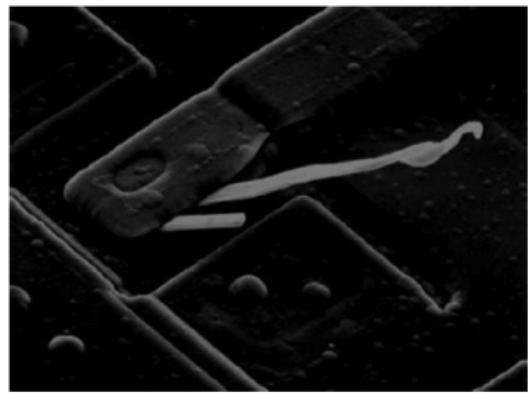
Graficamente:



## Filtro Básico: *Notch*

- Um dos filtros mais simples é um filtro  $H(\mu, \nu)$  que é 0 no centro da transformada e 1 em todos os outros termos de  $F(\mu, \nu)$ ;
- Tem a propriedade de zerar o termo *dc* (responsável pela intensidade média da imagem):
  - ▶ uma média zero implica a existência de intensidades negativas

$$H(\mu, \nu) = \begin{cases} 0 & \text{se } (\mu, \nu) = (0, 0) \\ 1 & \text{c.c.} \end{cases}$$



# Filtros Básicos

- Filtro *Passa-Baixas* (FPB)

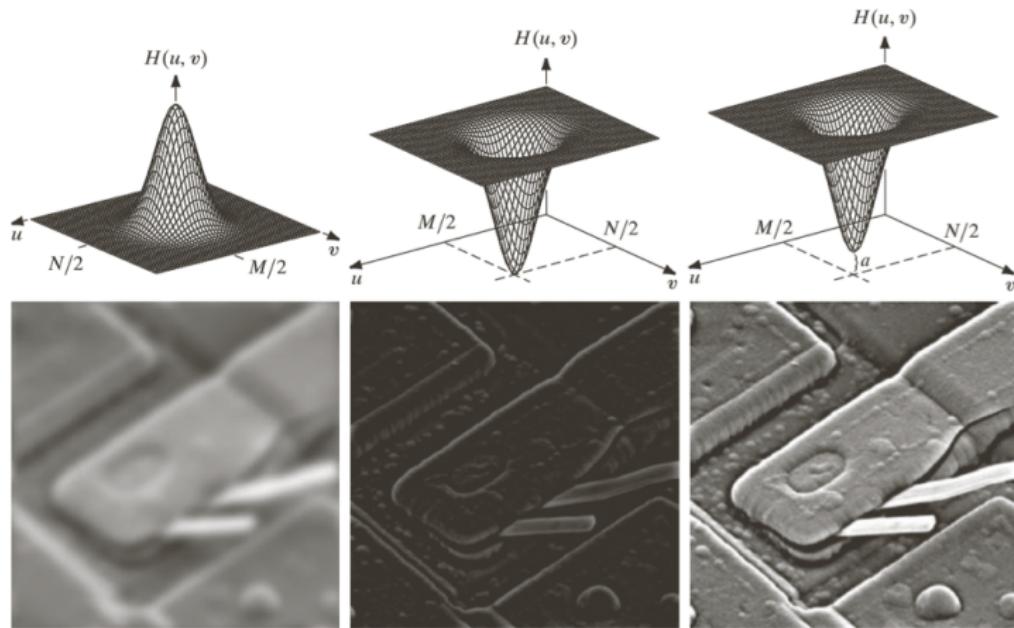
- ▶ Baixas frequências estão relacionadas a intensidades de variação lenta
- ▶ FPB tem a propriedade de borra uma imagem

- Filtro *Passa-Altas* (FPA)

- ▶ Altas frequências estão relacionadas a mudanças abruptas de intensidade
- ▶ Realçam detalhes abruptos de uma imagem



# Filtros Básicos: exemplos de FPB e FPA

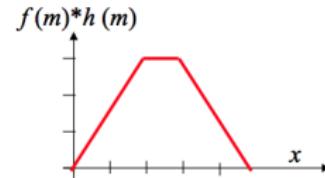
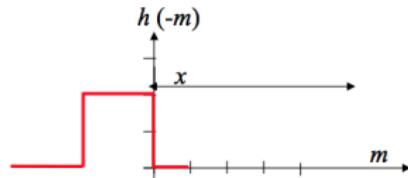
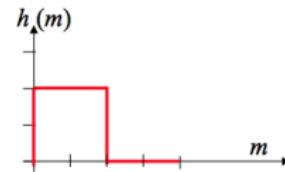
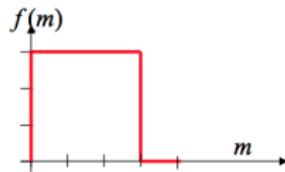


a	b	c
d	e	f

**FIGURE 4.31** Top row: frequency domain filters. Bottom row: corresponding filtered images obtained using Eq. (4.7-1). We used  $a = 0.85$  in (c) to obtain (f) (the height of the filter itself is 1). Compare (f) with Fig. 4.29(a).

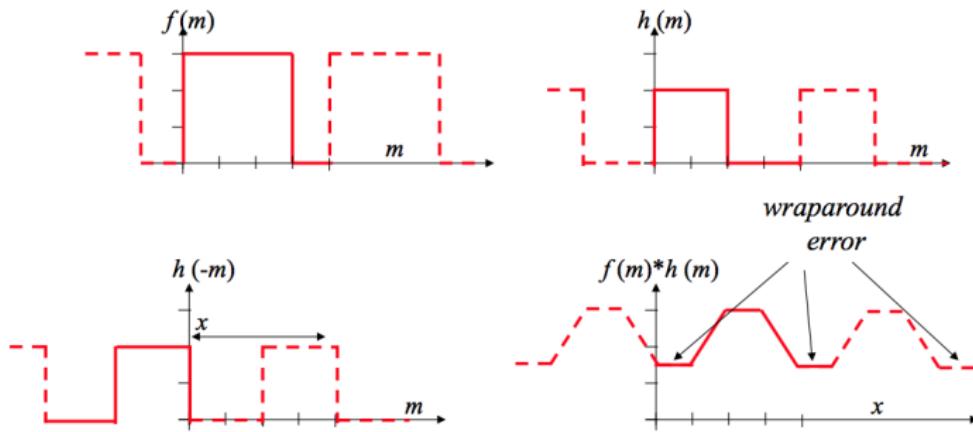
# O Erro de *wraparound*

A convolução:



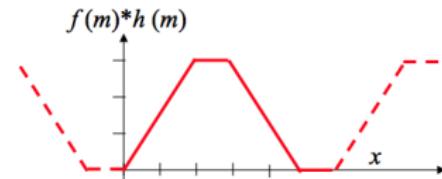
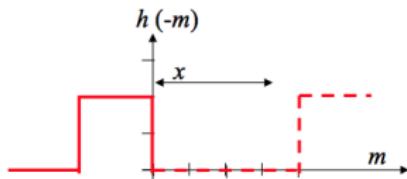
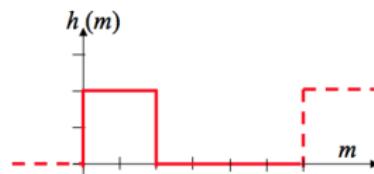
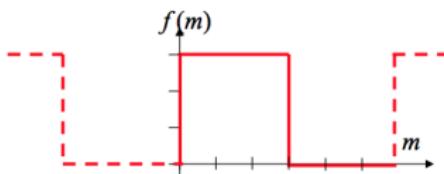
# O Erro de *wraparound*

A convolução considerando a periodicidade implícita da DFT:

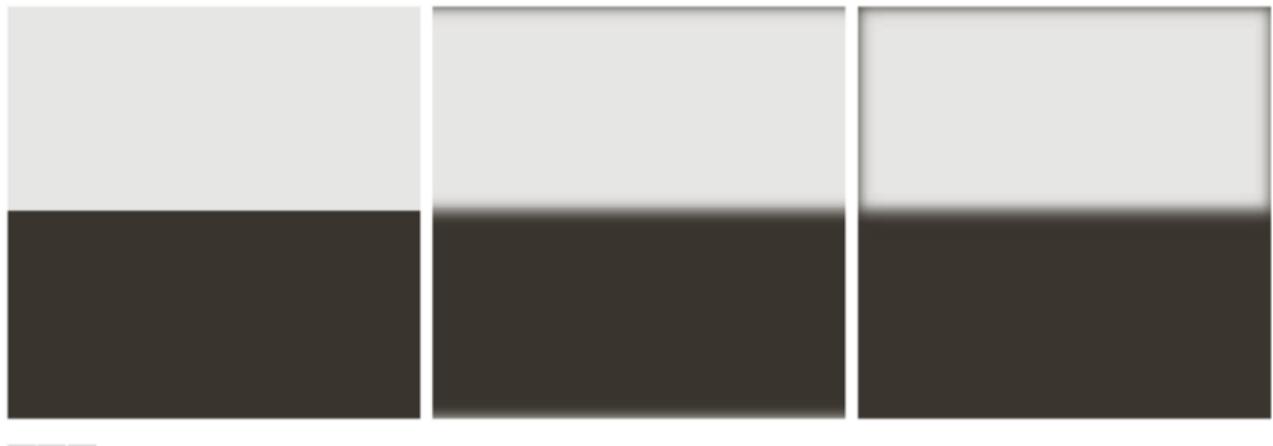


# O Erro de *wraparound*

Para contornar o problema, acrescentam-se zeros (*zero padding*):



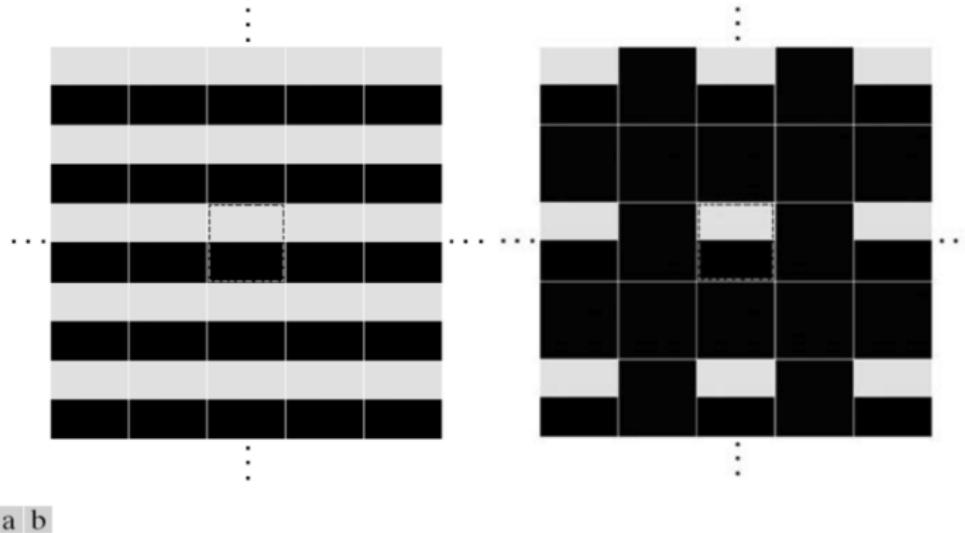
## O Erro de *wraparound*



a b c

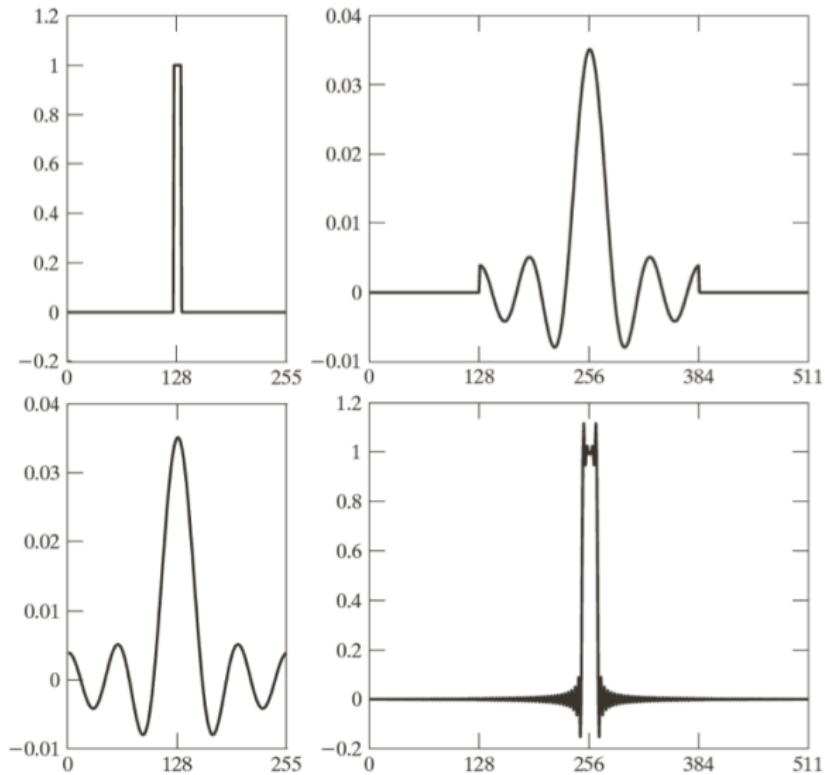
**FIGURE 4.32** (a) A simple image. (b) Result of blurring with a Gaussian lowpass filter without padding. (c) Result of lowpass filtering with padding. Compare the light area of the vertical edges in (b) and (c).

## O Erro de *wraparound*



**FIGURE 4.33** 2-D image periodicity inherent in using the DFT. (a) Periodicity without image padding. (b) Periodicity after padding with 0s (black). The dashed areas in the center correspond to the image in Fig. 4.32(a). (The thin white lines in both images are superimposed for clarity; they are not part of the data.)

# Zero Padding em Filtros

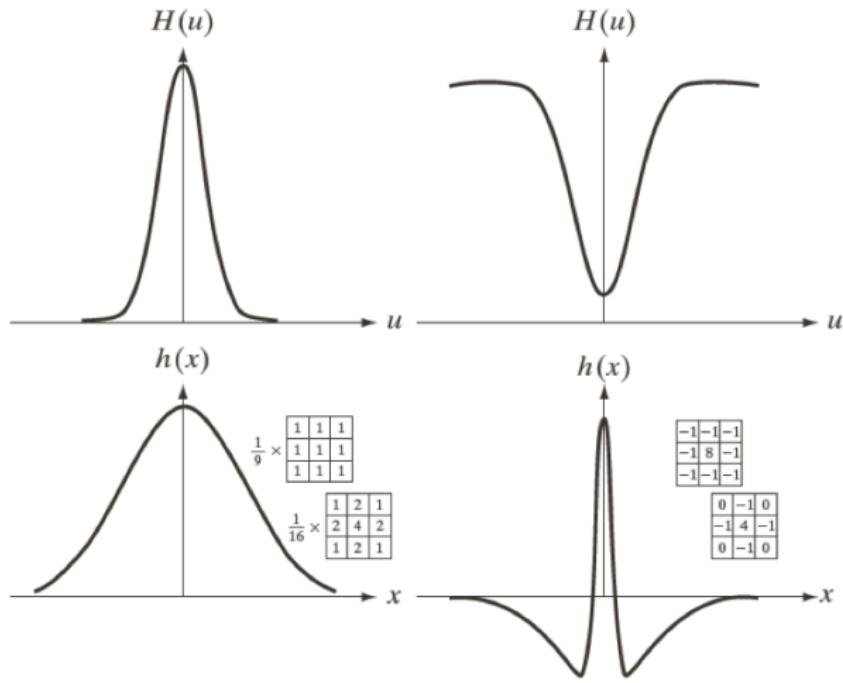


a  
b  
c  
d

**FIGURE 4.34**  
(a) Original filter specified in the (centered) frequency domain.  
(b) Spatial representation obtained by computing the IDFT of (a).  
(c) Result of padding (b) to twice its length (note the discontinuities).  
(d) Corresponding filter in the frequency domain obtained by computing the DFT of (c). Note the ringing caused by the discontinuities in (c). (The curves appear continuous because the points were joined to simplify visual analysis.)



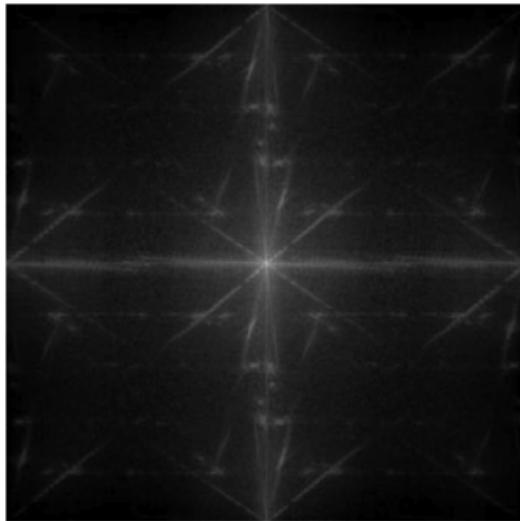
# Filtragem no Domínio Espacial e da Frequência: relação



**FIGURE 4.37**

(a) A 1-D Gaussian lowpass filter in the frequency domain.  
(b) Spatial lowpass filter corresponding to (a). (c) Gaussian highpass filter in the frequency domain.  
(d) Spatial highpass filter corresponding to (c). The small 2-D masks shown are spatial filters we used in Chapter 3.

# Filtragem no Domínio Espacial e da Frequência: relação

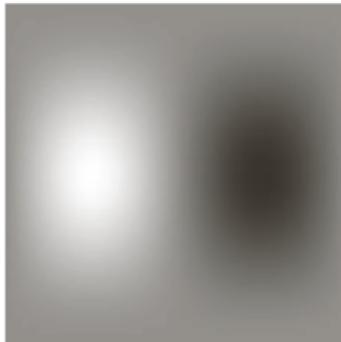
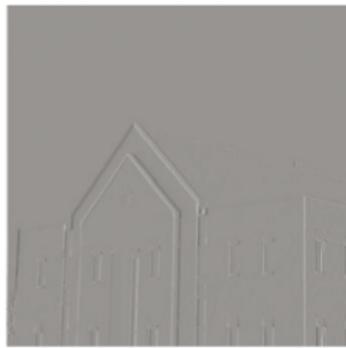


a b

**FIGURE 4.38**  
(a) Image of a  
building, and  
(b) its spectrum.

# Filtragem no Domínio Espacial e da Frequência: relação

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1



a  
b  
c  
d

**FIGURE 4.39**  
(a) A spatial mask and perspective plot of its corresponding frequency domain filter. (b) Filter shown as an image. (c) Result of filtering Fig. 4.38(a) in the frequency domain with the filter in (b). (d) Result of filtering the same image with the spatial filter in (a). The results are identical.

## Filtro Passa-Baixa Ideal (ILPF)

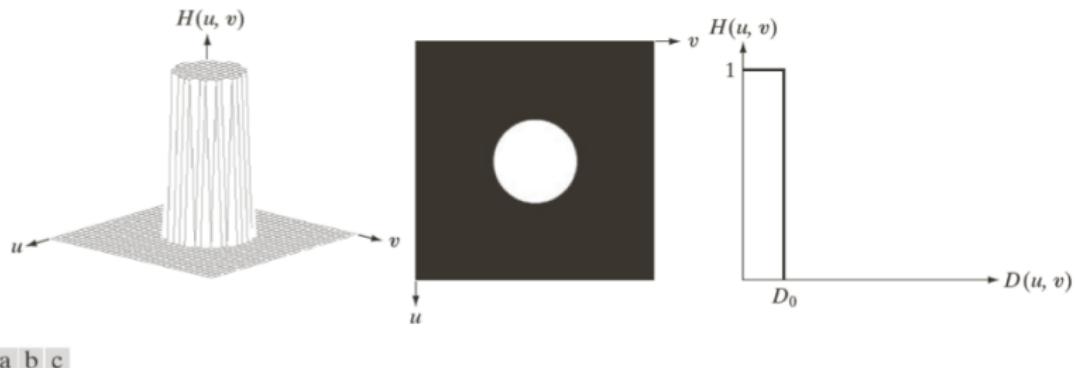
- Um filtro passa-baixa 2D que deixa passar, *sem atenuação*, todas as frequências em um círculo de raio  $D_0$  a partir da origem e "recorta" todas as frequências fora desse círculo;
- Determinado pela função:

$$H(\mu, \nu) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(\mu, \nu) \leq D_0 \\ 0 & \text{se } D(\mu, \nu) > D_0 \end{cases}$$

sendo que  $D_0$  é uma constante positiva, e  $D(\mu, \nu)$  é a distância entre um ponto  $(\mu, \nu)$  no domínio da frequência e o centro do retângulo de frequência.



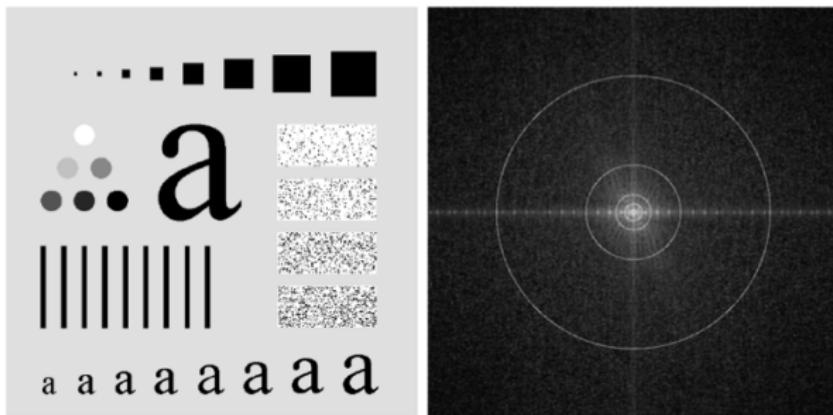
# Filtro Passa-Baixa Ideal (ILPF)



a b c

**FIGURE 4.40** (a) Perspective plot of an ideal lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.

# Filtro Passa-Baixa Ideal (ILPF)



a b

**FIGURE 4.41** (a) Test pattern of size  $688 \times 688$  pixels, and (b) its Fourier spectrum. The spectrum is double the image size due to padding but is shown in half size so that it fits in the page. The superimposed circles have radii equal to 10, 30, 60, 160, and 460 with respect to the full-size spectrum image. These radii enclose 87.0, 93.1, 95.7, 97.8, and 99.2% of the padded image power, respectively.

# Filtro Passa-Baixa Ideal (ILPF)

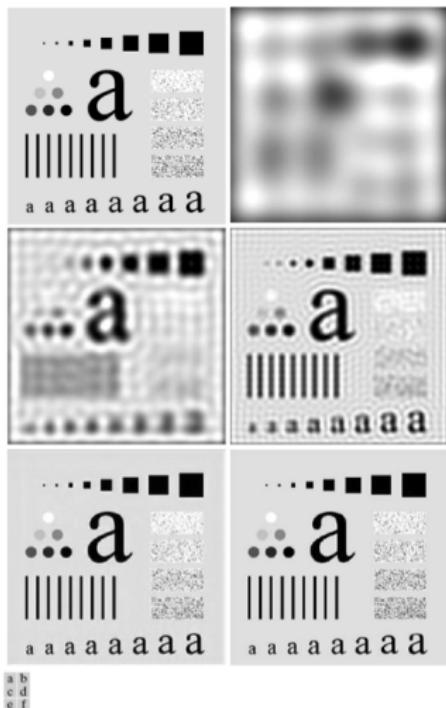


FIGURE 4.42 (a) Original image. (b)-(f) Results of filtering using ILPFs with cutoff frequencies set at radii values 10, 30, 60, 160, and 460, as shown in Fig. 4.41(b). The power removed by these filters was 13, 6.9, 4.3, 2.2, and 0.8% of the total, respectively.

## Filtro Passa-Baixa *Butterworth*

- A função de transferência do filtro passa-baixa *Butterworth* (BLFP) de ordem  $n$ , e com frequência de corte a uma distância  $D_0$  da origem é definida como

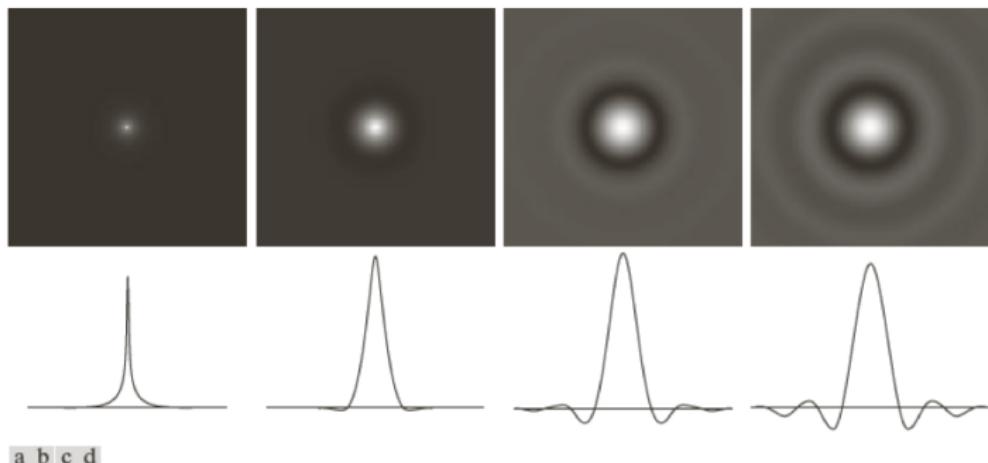
$$H(\mu, \nu) = \frac{1}{1 + [D(\mu, \nu)/D_0]^{2n}}$$

onde  $D(\mu, \nu)$  é a distância entre um ponto  $(\mu, \nu)$  no domínio da frequência e o centro da função de frequência;

- Diferente do filtro ideal, a função de transferência BLFP não tem uma descontinuidade abrupta que resulta em um corte bem definido;



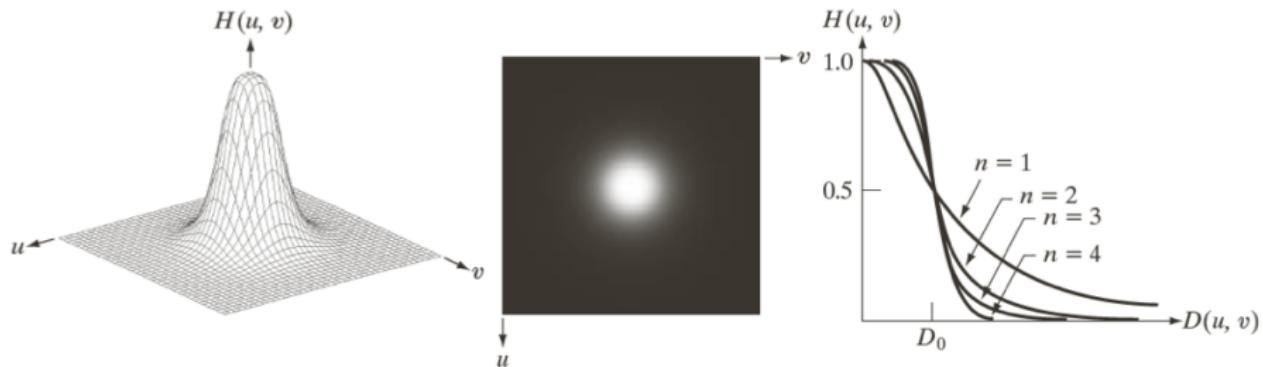
# Filtro Passa-Baixa Butterworth



a b c d

**FIGURE 4.46** (a)–(d) Spatial representation of BLPFs of order 1, 2, 5, and 20, and corresponding intensity profiles through the center of the filters (the size in all cases is  $1000 \times 1000$  and the cutoff frequency is 5). Observe how ringing increases as a function of filter order.

# Filtro Passa-Baixa Butterworth



a | b | c

**FIGURE 4.44** (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

# Filtro Passa-Baixa Butterworth

Comparando com os resultados do ILFP:

- Transição suave do borramento em função do aumento da frequência de corte;
- Nenhum *ringing* é visível em qualquer uma das imagens processadas;

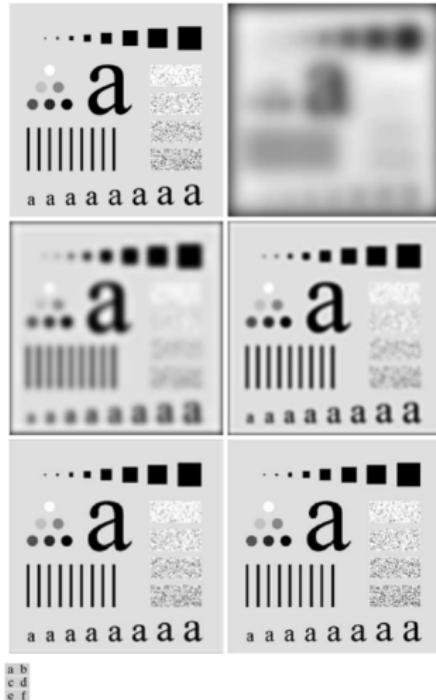


FIGURE 4.45 (a) Original image. (b)-(f) Results of filtering using BLPFs of order 2, with cutoff frequencies at the radii shown in Fig. 4.41. Compare with Fig. 4.42.

# Filtro Passa-Baixa Gaussiano

- Os filtros passa-baixa gaussianos (GLPF) de duas dimensões têm a forma:

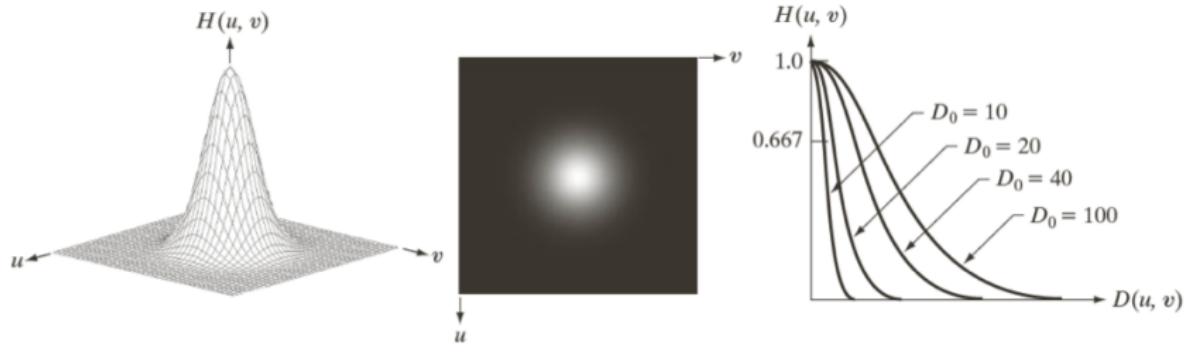
$$H(\mu, \nu) = e^{-D^2(\mu, \nu)/2D_0^2}$$

sendo  $D(\mu, \nu)$  a distância a partir do centro do triângulo de frequência e  $D_0$  a frequência de corte.

- quando  $D(\mu, \nu) = D_0$ , o GLPF é reduzido para 0,607 de seu valor máximo
- A transformada inversa do GLPF também é uma gaussiana;
- Não apresenta efeito de *ringing*.



# Filtro Passa-Baixa Gaussiano



a b c

**FIGURE 4.47** (a) Perspective plot of a GLPF transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections for various values of  $D_0$ .

# Filtro Passa-Baixa Gaussiano



FIGURE 4.48 (a) Original image. (b)-(f) Results of filtering using GLPFs with cutoff frequencies at the radii shown in Fig. 4.41. Compare with Figs. 4.42 and 4.45.

# Filtros Passa-Baixa: resumo

**TABLE 4.4**

Lowpass filters.  $D_0$  is the cutoff frequency and  $n$  is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$	$H(u, v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

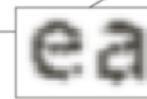


# Filtragem Passa-Baixa: exemplos adicionais

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



a b

**FIGURE 4.49**  
(a) Sample text of low resolution (note broken characters in magnified view).  
(b) Result of filtering with a GLPF (broken character segments were joined).

# Filtragem Passa-Baixa: exemplos adicionais

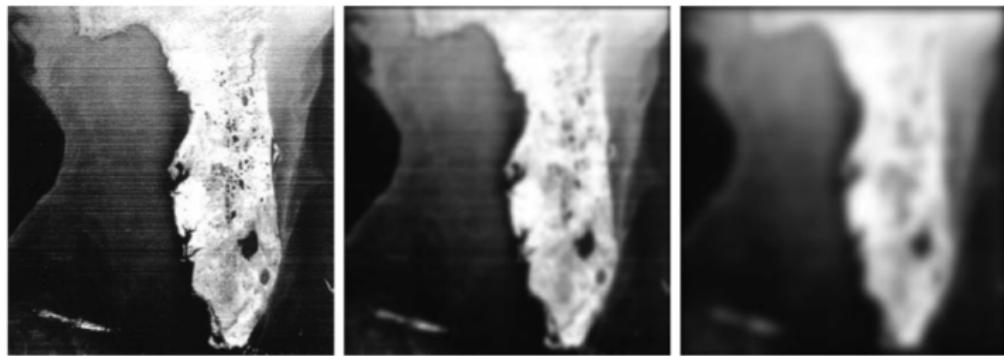


a b c

**FIGURE 4.50** (a) Original image ( $784 \times 732$  pixels). (b) Result of filtering using a GLPF with  $D_0 = 100$ . (c) Result of filtering using a GLPF with  $D_0 = 80$ . Note the reduction in fine skin lines in the magnified sections in (b) and (c).



# Filtragem Passa-Baixa: exemplos adicionais



a b c

**FIGURE 4.51** (a) Image showing prominent horizontal scan lines. (b) Result of filtering using a GLPF with  $D_0 = 50$ . (c) Result of using a GLPF with  $D_0 = 20$ . (Original image courtesy of NOAA.)

# Filtros Passa-Alta

- Aguçamento de imagens: realça componentes de alta frequência da imagem;
- Os filtros passa-alta são obtidos a partir dos filtros passa-baixa:
  - ▶ Filtro passa-alta ideal:

$$H_{IHPF} = 1 - H_{ILPF}$$

- ▶ Filtro passa-alta *Butterworth*:

$$H_{BHPF} = 1 - H_{BLPF}$$

- ▶ Filtro passa-alta gaussiano:

$$H_{GHPF} = 1 - H_{GLPF}$$



# Filtros Passa-Alta

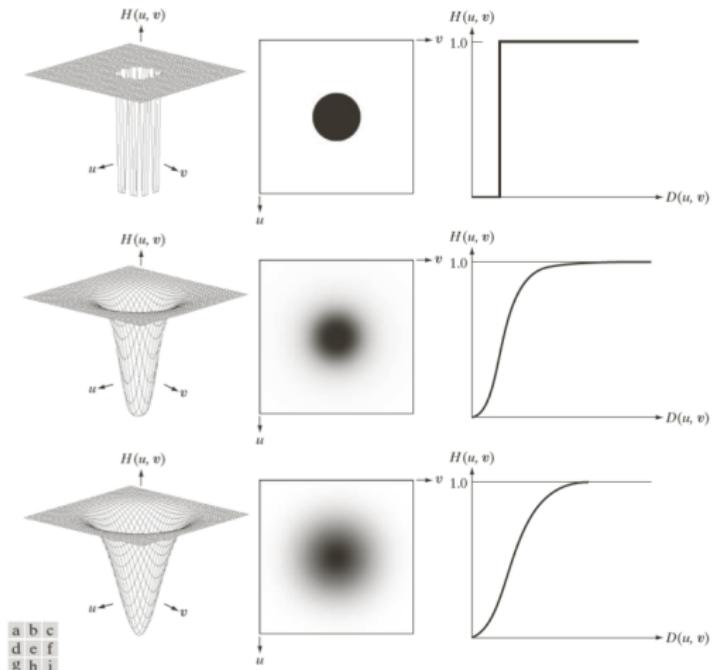
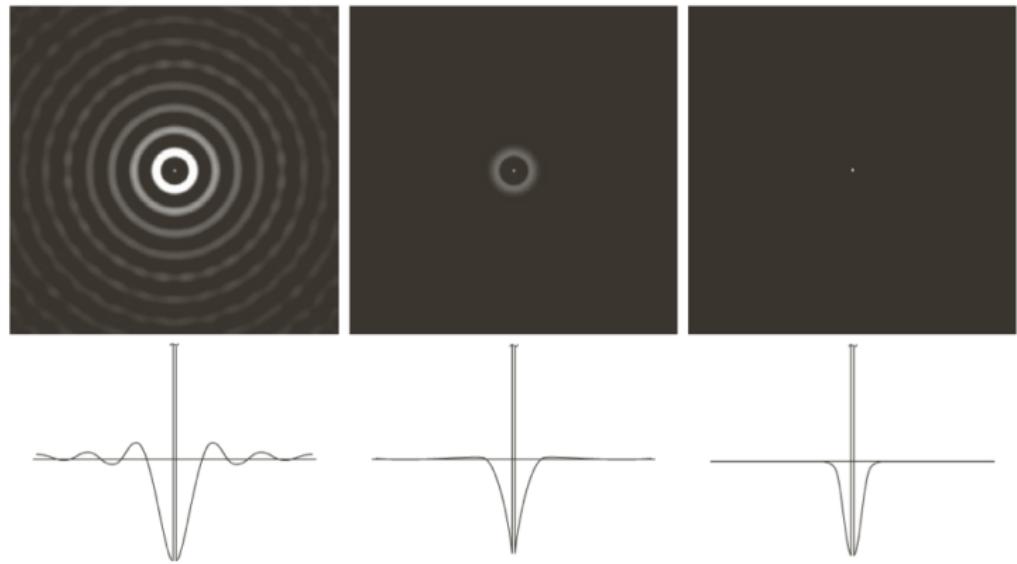


FIGURE 4.52 Top row: Perspective plot, image representation, and cross section of a typical ideal highpass filter. Middle and bottom rows: The same sequence for typical Butterworth and Gaussian highpass filters.



# Filtros Passa-Alta



a b c

**FIGURE 4.53** Spatial representation of typical (a) ideal, (b) Butterworth, and (c) Gaussian frequency domain highpass filters, and corresponding intensity profiles through their centers.



# Filtro Passa-Alta Ideal

Um filtro passa-alta ideal 2D é definido como:

$$H(\mu, \nu) = \begin{cases} 0 & \text{se } D(\mu, \nu) \leq D_0 \\ 1 & \text{se } D(\mu, \nu) > D_0 \end{cases}$$

onde  $D_0$  é a frequência de corte.



a b c

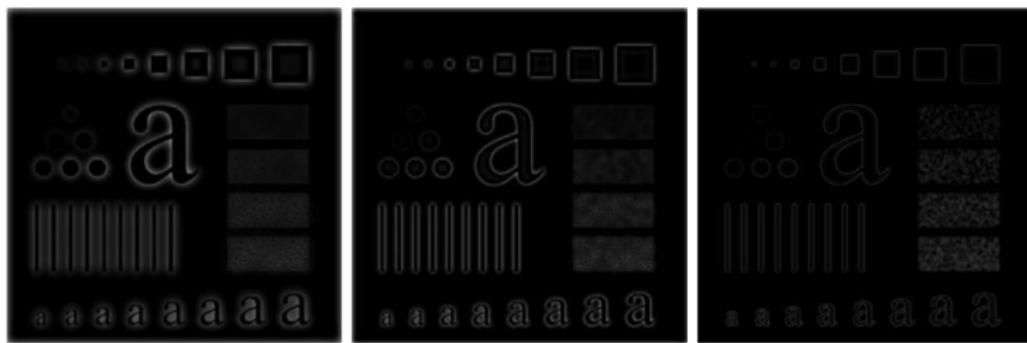
**FIGURE 4.54** Results of highpass filtering the image in Fig. 4.41(a) using an IHPF with  $D_0 = 30, 60$ , and  $160$ .

## Filtro Passa-Alta Butterworth

Um filtro passa-alta *Butterworth* 2D de ordem  $n$  é definido como:

$$H(\mu, \nu) = \frac{1}{1 + [D_0/D(\mu, \nu)]^{2n}}$$

onde  $D_0$  é a frequência de corte.



a b c

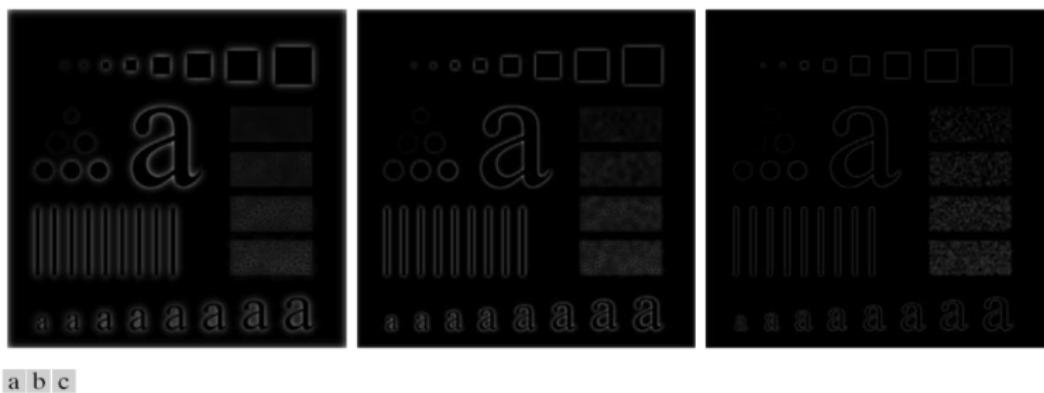
**FIGURE 4.55** Results of highpass filtering the image in Fig. 4.41(a) using a BHPF of order 2 with  $D_0 = 30, 60$ , and  $160$ , corresponding to the circles in Fig. 4.41(b). These results are much smoother than those obtained with an IHPF.

## Filtro Passa-Alta Gaussiano

Um filtro passa-alta gaussiano 2D é definido como:

$$H(\mu, \nu) = 1 - e^{-D^2(\mu, \nu)/2D_0^2}$$

onde  $D_0$  é a frequência de corte.



a b c

**FIGURE 4.56** Results of highpass filtering the image in Fig. 4.41(a) using a GHPF with  $D_0 = 30, 60$ , and  $160$ , corresponding to the circles in Fig. 4.41(b). Compare with Figs. 4.54 and 4.55.

# Filtros Passa-Alta: resumo

**TABLE 4.5**

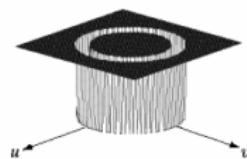
Highpass filters.  $D_0$  is the cutoff frequency and  $n$  is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

# Filtros Rejeita-Faixa

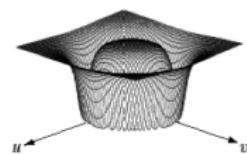
**Ideal**

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u,v) < D_0 - W/2 \\ 0 & \text{se } D_0 - W/2 \leq D(u,v) \leq D_0 + W/2 \\ 1 & \text{se } D(u,v) > D_0 + W/2 \end{cases}$$



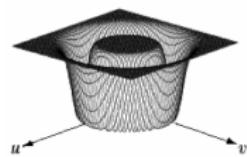
**Butterworth**

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{D(u,v)W}{D^2(u,v) - D_0^2} \right]^{2n}}$$

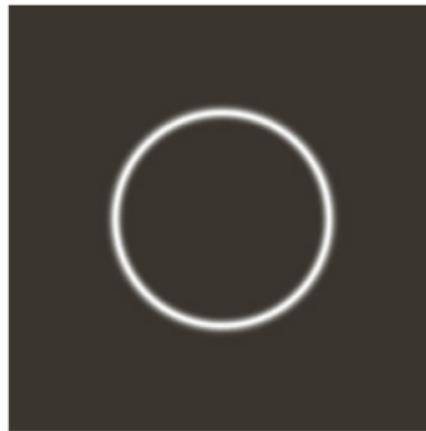
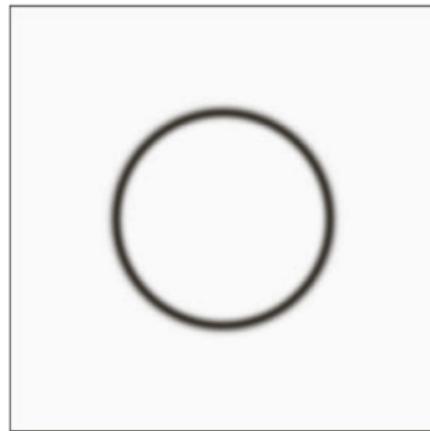


**Gaussiano**

$$H(u,v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{D^2(u,v) - D_0^2}{D(u,v)W} \right]^2}$$



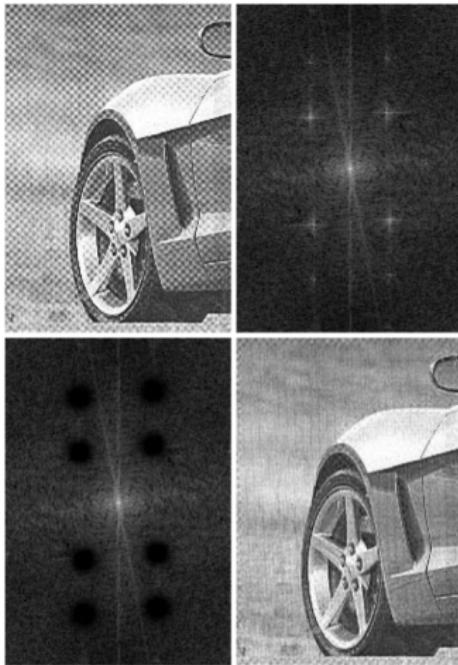
# Filtro Passa-Faixa Gaussiano



a b

**FIGURE 4.63**  
(a) Bandreject  
Gaussian filter.  
(b) Corresponding  
bandpass filter.  
The thin black  
border in (a) was  
added for clarity; it  
is not part of the  
data.

# Filtro Passa-Faixa *Butterworth*



a  
b  
c  
d

**FIGURE 4.64**

- (a) Sampled newspaper image showing a moiré pattern.
- (b) Spectrum.
- (c) Butterworth notch reject filter multiplied by the Fourier transform.
- (d) Filtered image.

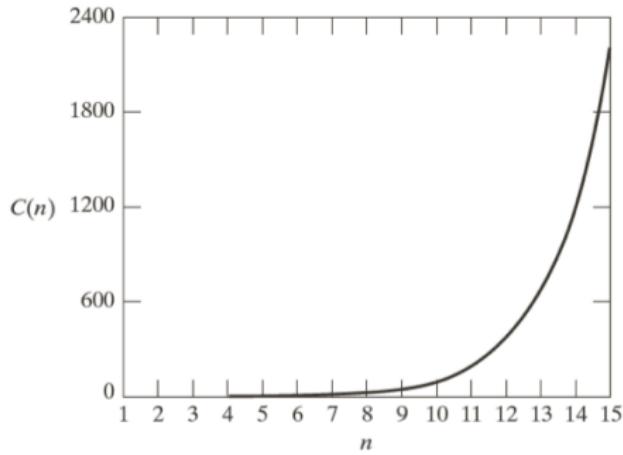


# A Transformada Rápida de Fourier - FFT

- Implementar as equações da DFT não constitui tarefa simples;
- FFT proporciona uma redução nos cálculos envolvidos;
- Ex.: Transformada de Fourier de uma imagem  $1024 \times 1024$ 
  - ▶ DFT-2D: + 1 trilhão de operações
  - ▶ FFT: aprox. 20 milhões
- Matlab: *fft*



# A Transformada Rápida de Fourier



**FIGURE 4.67**  
Computational advantage of the FFT over a direct implementation of the 1-D DFT. Note that the advantage increases rapidly as a function of  $n$ .

# Filtragem no Domínio da Frequência: implementação

```
%-----  
% Procedimento de Filtragem  
%-----  
% Carrega a imagem, seja lá de onde for  
load imdemos  
f=im2double(flower);  
[M,N]=size(f);  
% Cria as matrizes contendo as coordenadas u e v nas mesmas dimensões da imagem  
[u,v]=freqspace([2*M 2*N],'meshgrid');  
  
% Define os parâmetros do filtro, no caso, de Butterworth rejeita-faixa  
W= 0.1; n=1; D0=.7;  
  
%-----  
% Construção da Função de Transferencia  
%-----  
% Cria uma matriz que contem o D(u,v)  
D=sqrt(u.^2 +v.^2);  
  
% Monta a função de transferencia  
H=1./(1+((D.*W)./(D.^2-D0.^2)).^(2*n));  
  
%-----  
% Filtragem no Domínio da Freqüência  
%-----  
H=fftshift(H);  
F=fft2(f,[2*M 2*N]);  
G=H.*F;  
g=real(ifft2(G));  
g=g(1:M,1:N);  
% coloca a origem no canto superior esquerdo de H  
% Calcula a transformada da imagem de saída apendando zeros  
% Filtragem no domínio da freqüência  
% Parte real da transformada inversa  
% Recorta a área correspondente a imagem original
```

# Filtragem no Domínio da Frequência: implementação

```
%-----  
% Visualizacao  
%-----  
figure(1)  
surf(fftshift(H));  
shading interp;  
colormap copper  
  
figure(2)  
subplot(2,2,1);imshow(f);title('Imagen de Entrada')  
subplot(2,2,2); imshow(real(g)); title('Imagen Filtrada')  
  
% Prepara a Visualizacao da Transformada da Imagem de Entrada  
Faux=log(1+(abs(F)));  
Faux=Faux-min(Faux(:));  
Faux=Faux./max(Faux(:));  
subplot(2,2,3); imshow(fftshift(Faux));  
title('Transformada da Imagen de Entrada') % Visualiza Transformada da Imagem de Entrada  
  
% Prepara a Visualizacao da Transformada da Imagem Filtrada  
Gaux=log(1+(abs(G)));  
Gaux=Gaux-min(Gaux(:));  
Gaux=Gaux./max(Gaux(:));  
subplot(2,2,4); imshow(fftshift(Gaux));  
title('Transformada da Imagen Filtrada') % Visualiza Transformada da Imagem de Entrada  
%-----
```

