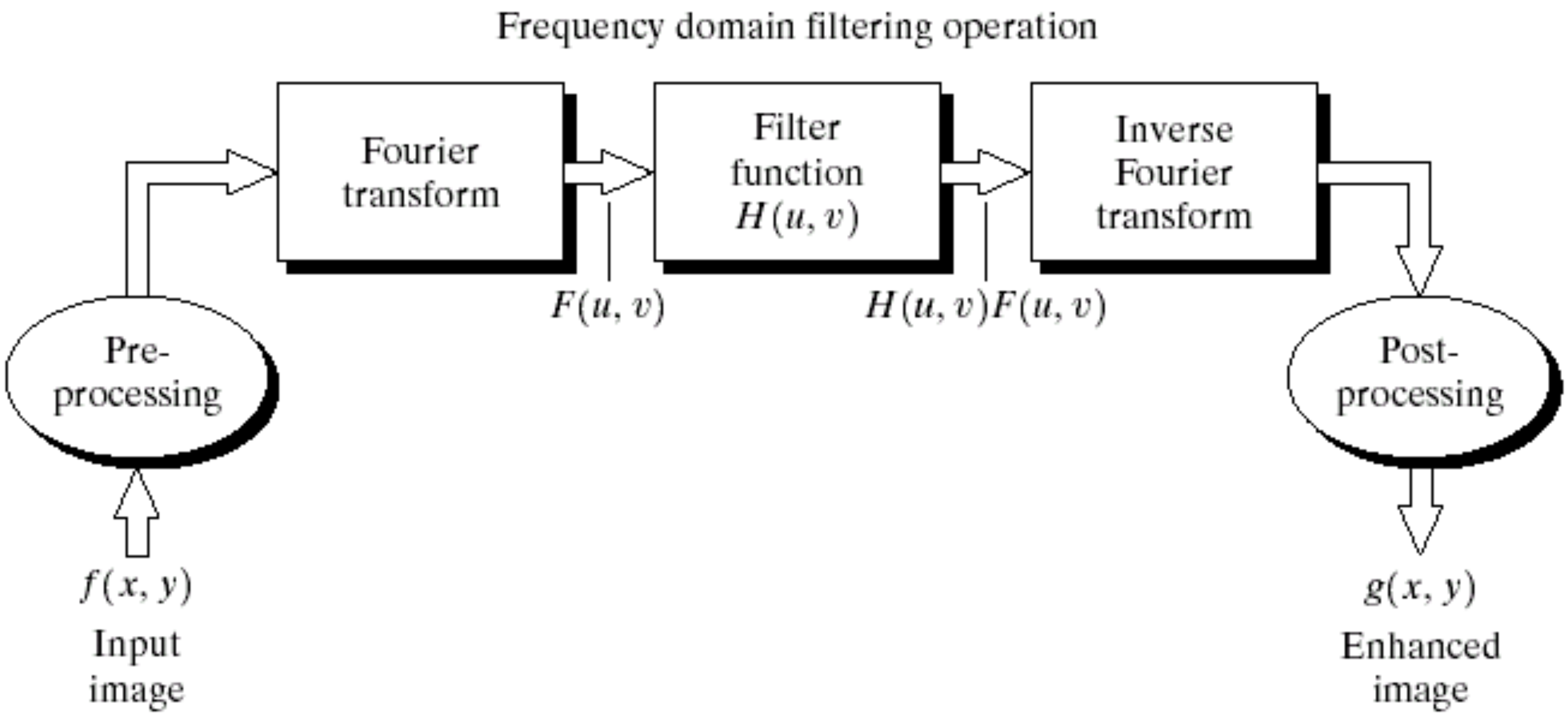
Introdução ao Processamento Digital de Imagens

Aula 7 – Processamento no Domínio da Frequência

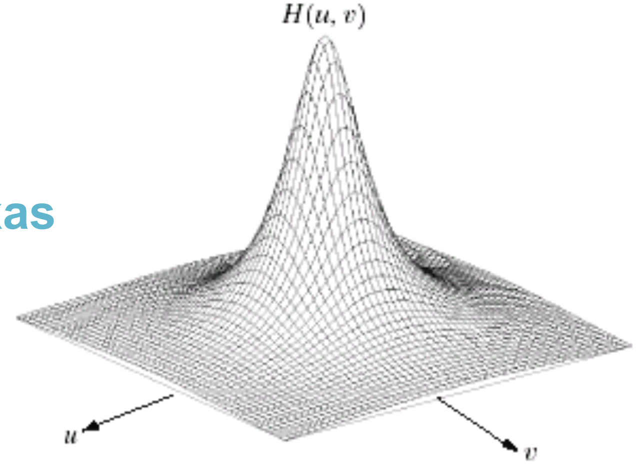
Prof. Dr. Marcelo Andrade da Costa Vieira
mvieira@sc.usp.br

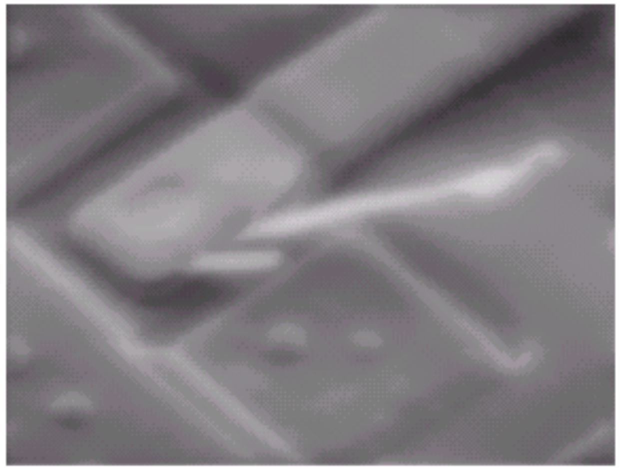
Processamento no Domínio da Frequência



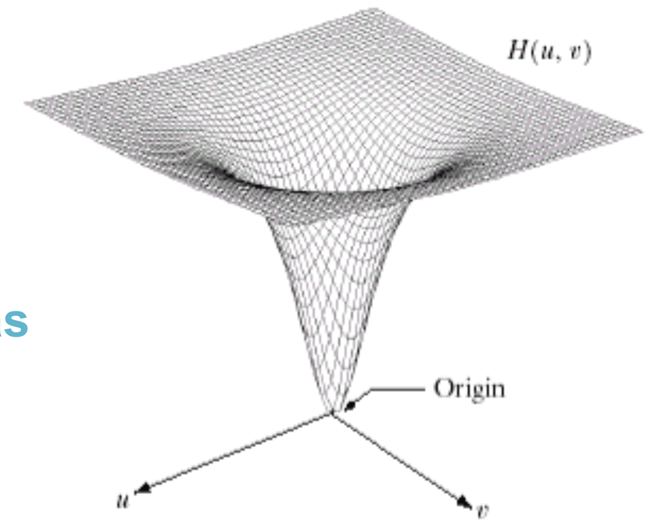
Filtros no Domínio da Frequência

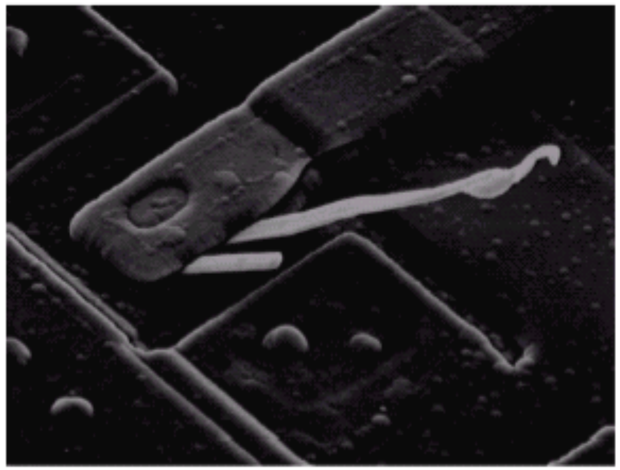
Passa-Baixas



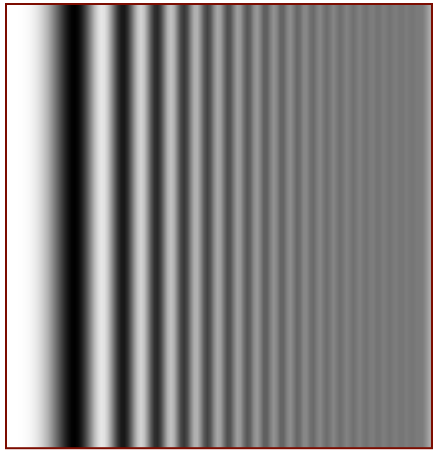


Passa-Altas

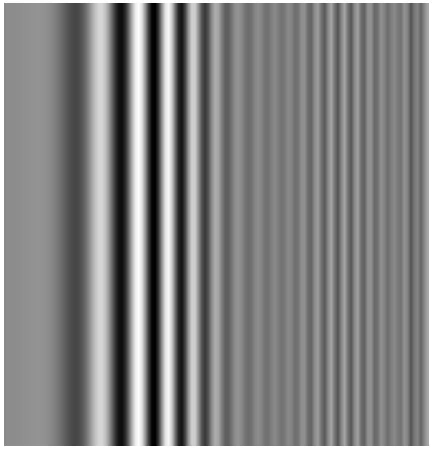




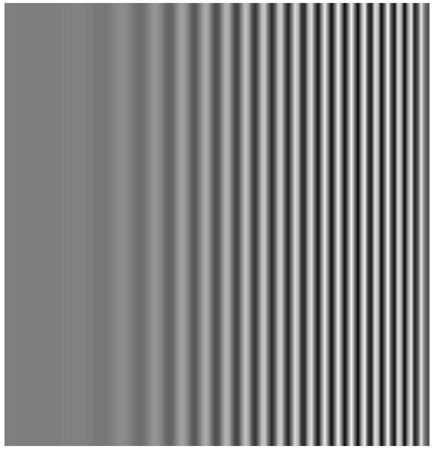
Efeito dos filtros



Filtro
passa-baixa

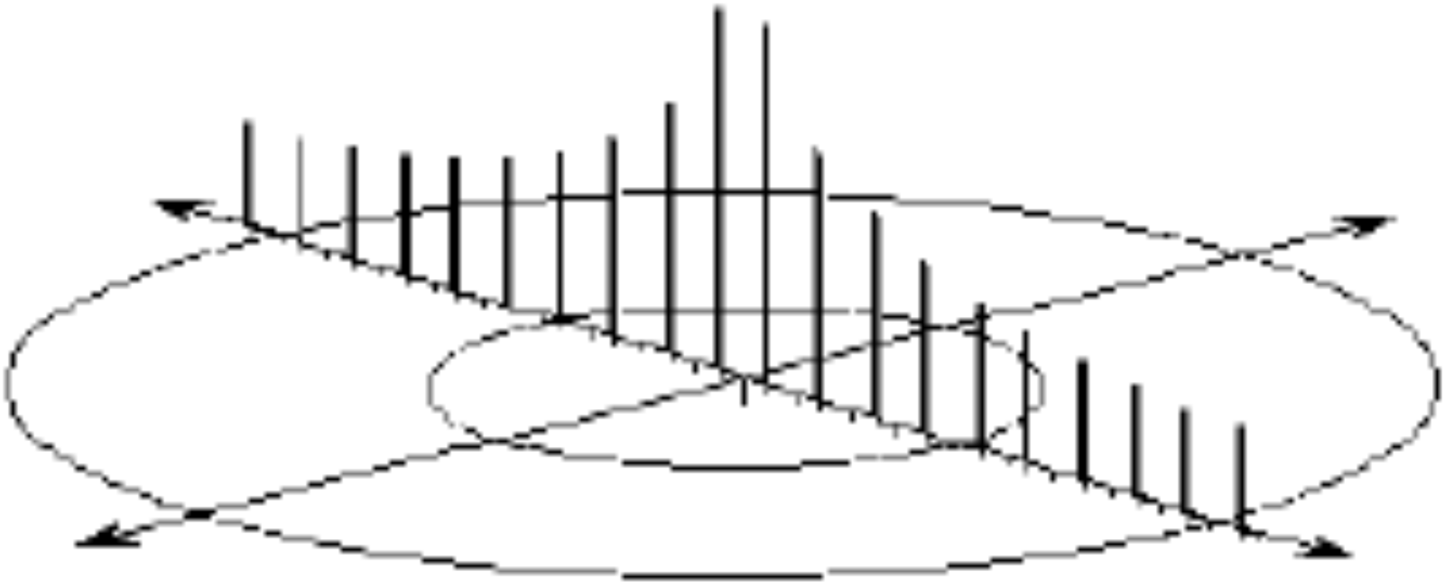


Filtro
passa-banda



Filtro
passa-alta

Os Filtros devem ser circulares e concêntricos



Filtros Passa-Baixa

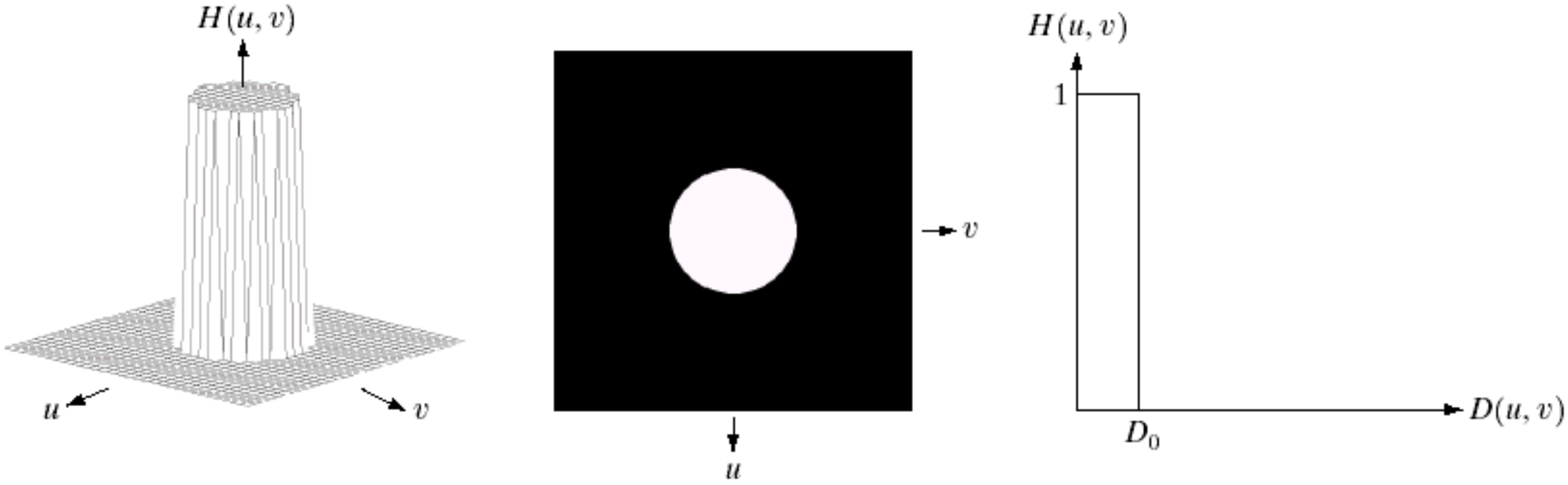
- Retira os componentes de alta-frequência da imagem, ou seja, que estão acima da frequência de corte (D_0) definida na construção do filtro;

- Mantém na imagem apenas as baixas-frequências, ou seja, que estão abaixo da freqüência de corte (D_0);

- Não há realce de nenhum componente espectral da imagem.

- Podem ser de vários tipos. Os mais comuns são: Ideal, Butterworth e Gaussiano.

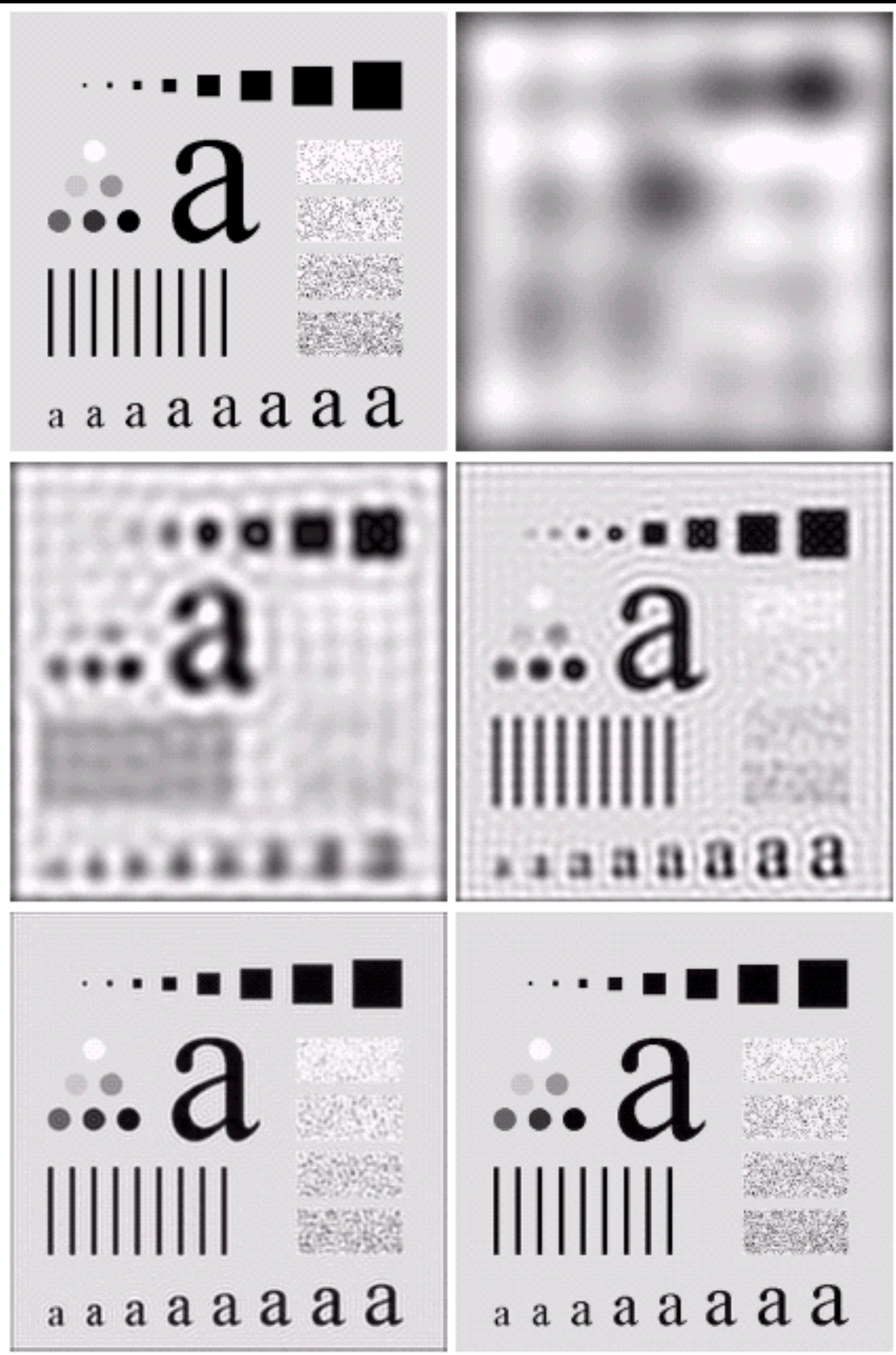
Filtro Passa-Baixa Ideal



$$H(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{se } D(u,v) \le D_0 \\ 0, & \text{se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- Todas as frequências acima da frequência de corte (D_0) são retiradas da imagem;
- As frequências mais baixas que D_0 não são alteradas.

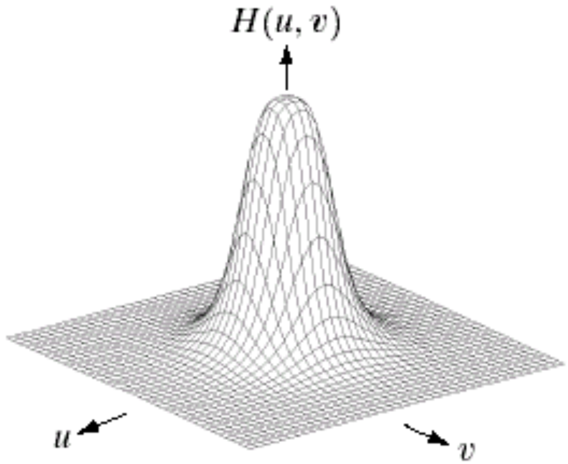
Filtro Passa-Baixas **Ideal:**

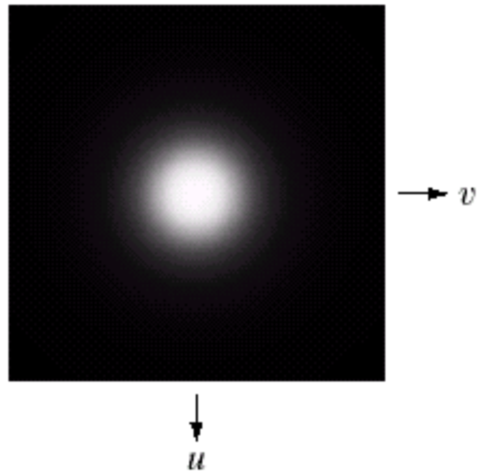


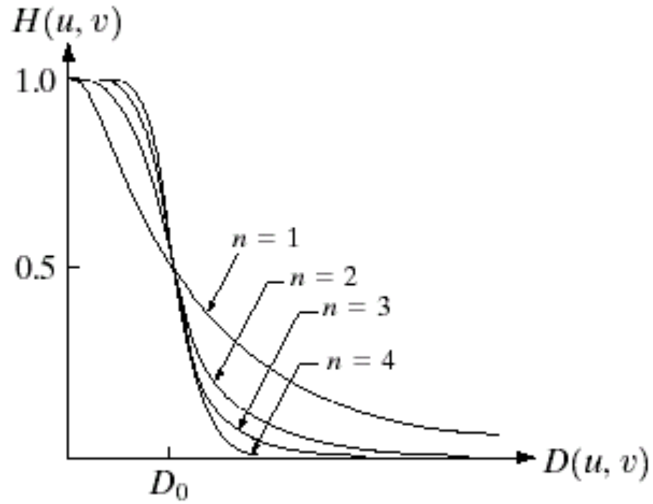
Resultados obtidos à medida que se aumenta a frequência de corte

Efeito indesejado de *ringing*

Filtro Passa-Baixa **Butterworth**



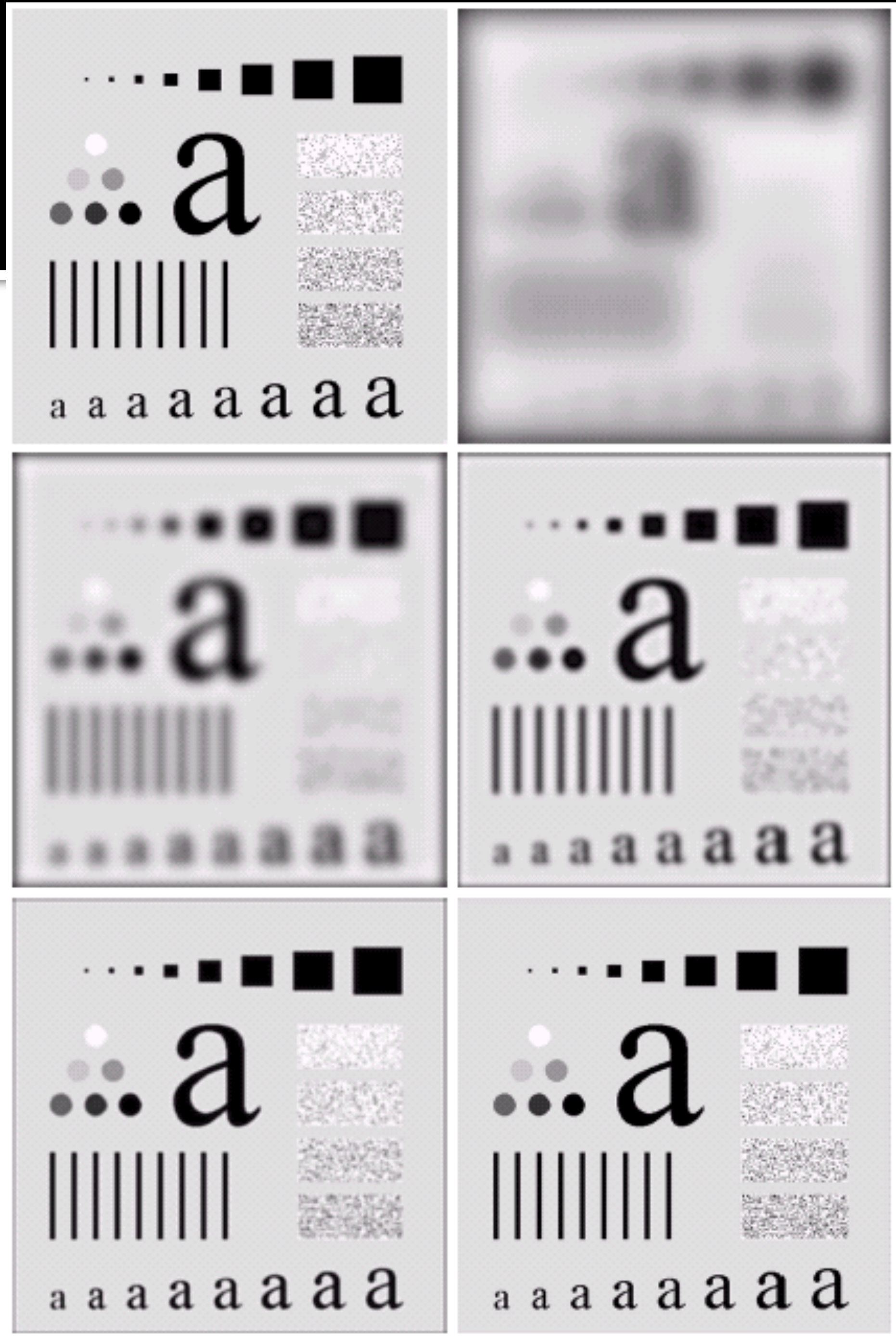




$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u,v)}{D_0}\right]^{2n}}$$

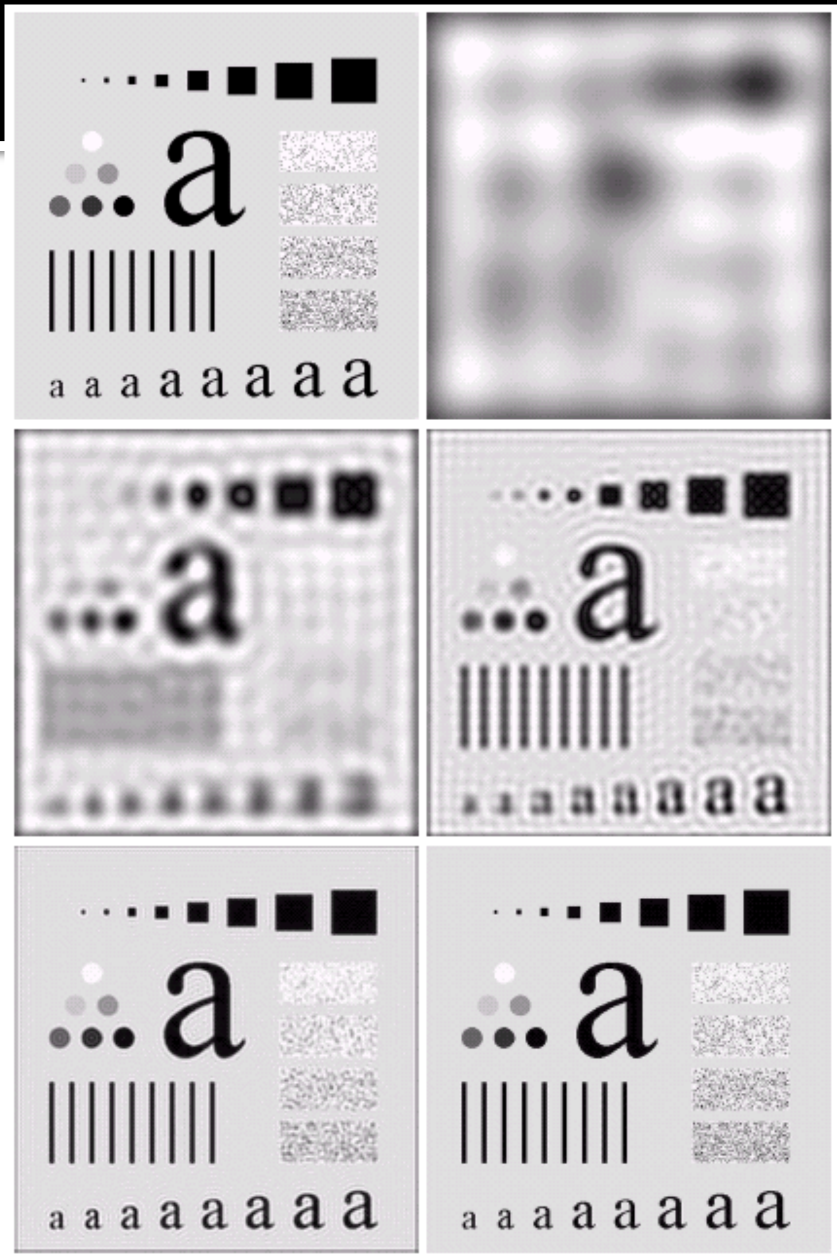
- A frequência de corte (D_0) define o valor onde a amplitude do espectro é reduzida em 50%;
- As altas-frequências são cada vez mais atenuadas na imagem a medida que são maiores que D_0 , ou seja, o filtro possui transição mais suave que o filtro ideal;
- O valor de n (ordem do filtro) determina a "suavidade" do filtro.

Filtro Passa-Baixa **Butterworth** (n=2)



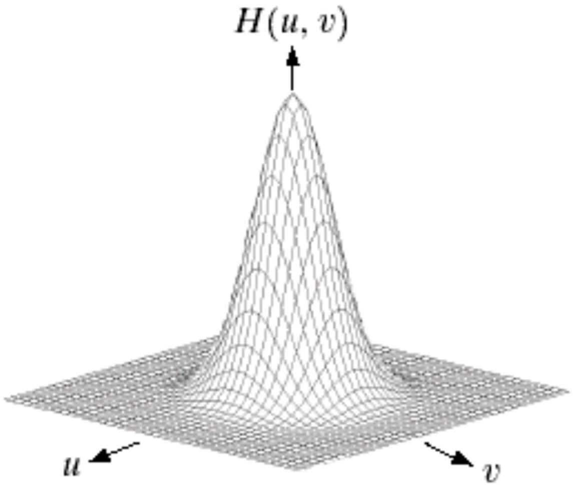
Resultados obtidos à medida que se aumenta a frequência de corte

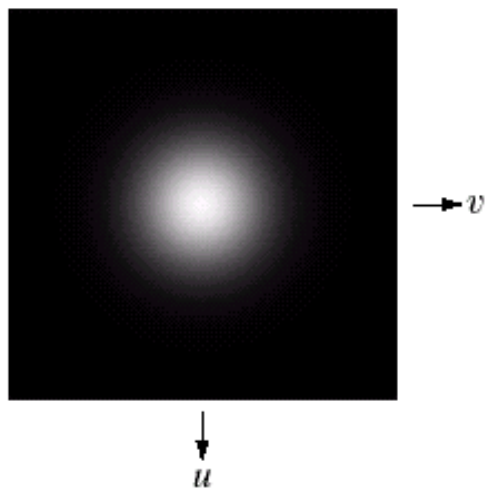
Filtro PB Ideal

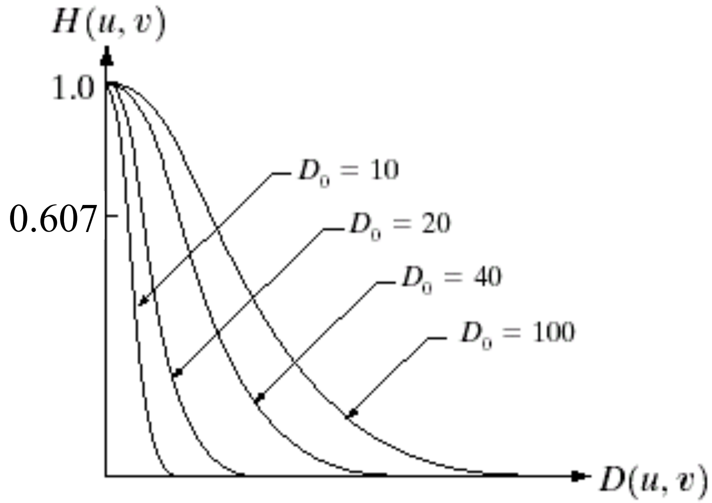


Filtro PB Butterworth

Filtro Passa-Baixa **Gaussiano**



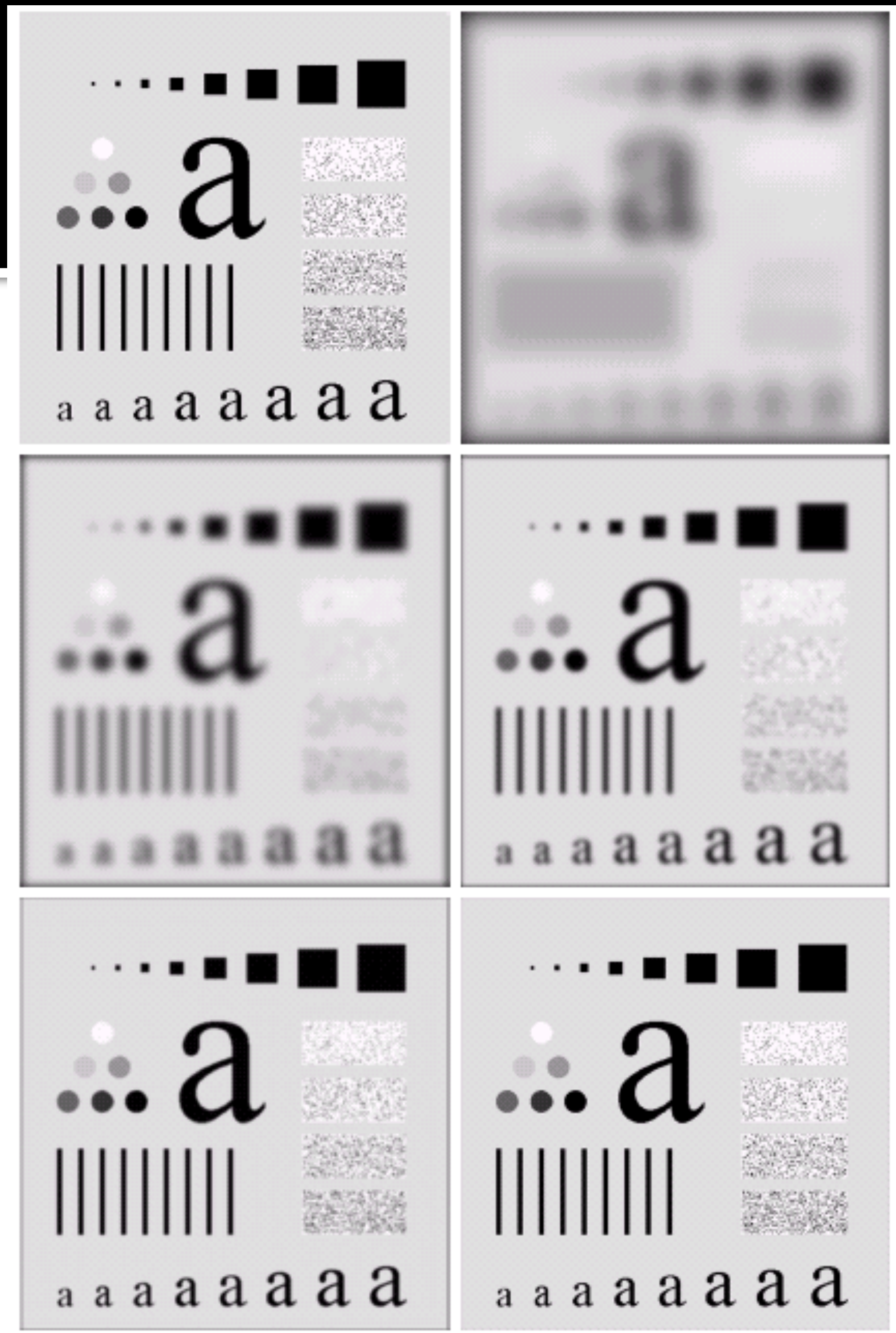




$$H(u,v) = e^{\frac{-[D(u,v)^2]}{2D_0^{\,2}}}$$

- A frequência de corte (D_0) define o valor onde a amplitude do espectro é reduzida em 60,7%;
- Altas-frequências são cada vez mais atenuadas na imagem a medida que são maiores que D_0 , ou seja, o filtro possui transição mais suave que o filtro ideal;
- O filtro Gaussiano pode ser bem mais suave que o filtro Butterworth.

Filtro Passa-Baixa **Gaussiano**



Resultados obtidos à medida que se aumenta a frequência de corte

Filtro PB Butterworth (n=2)

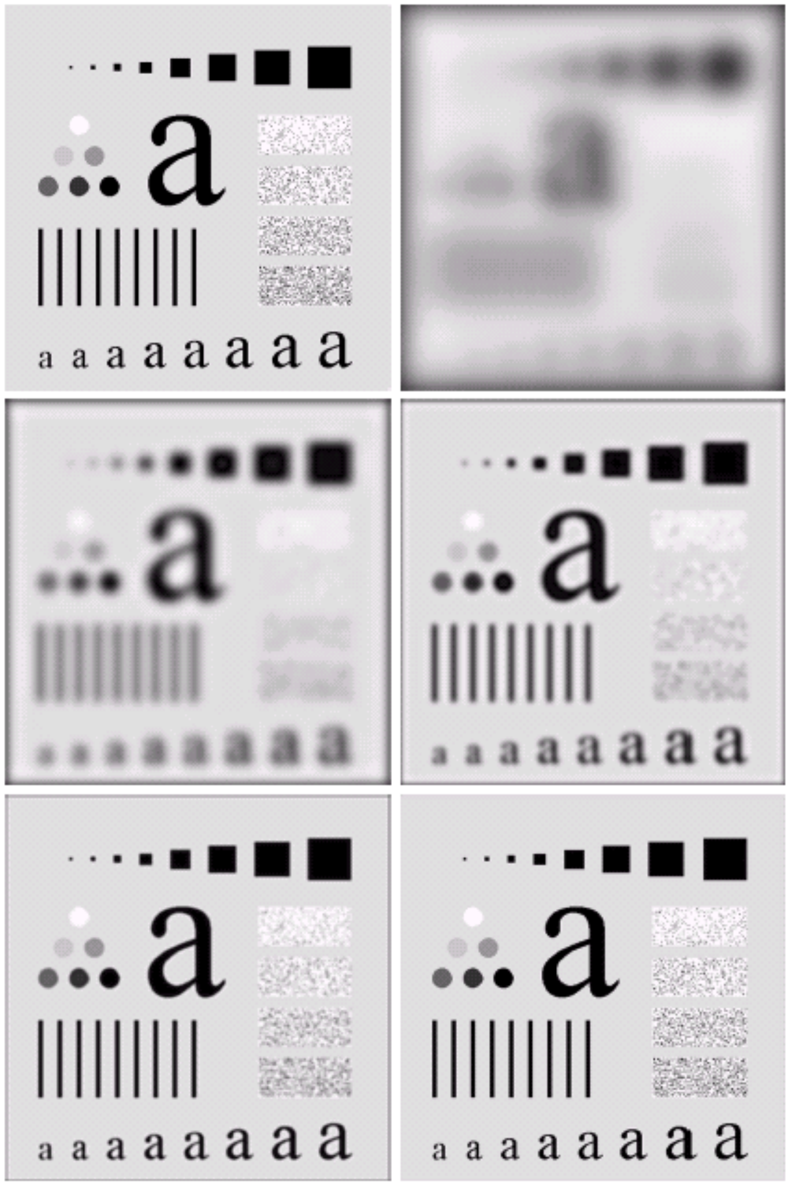


FIGURE 4.15 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering with BLPFs of order 2, with cutoff frequencies at radii of 5, 15, 30, 80, and 230, as shown in Fig. 4.11(b). Compare with Fig. 4.12.

Filtro PB Gaussiano

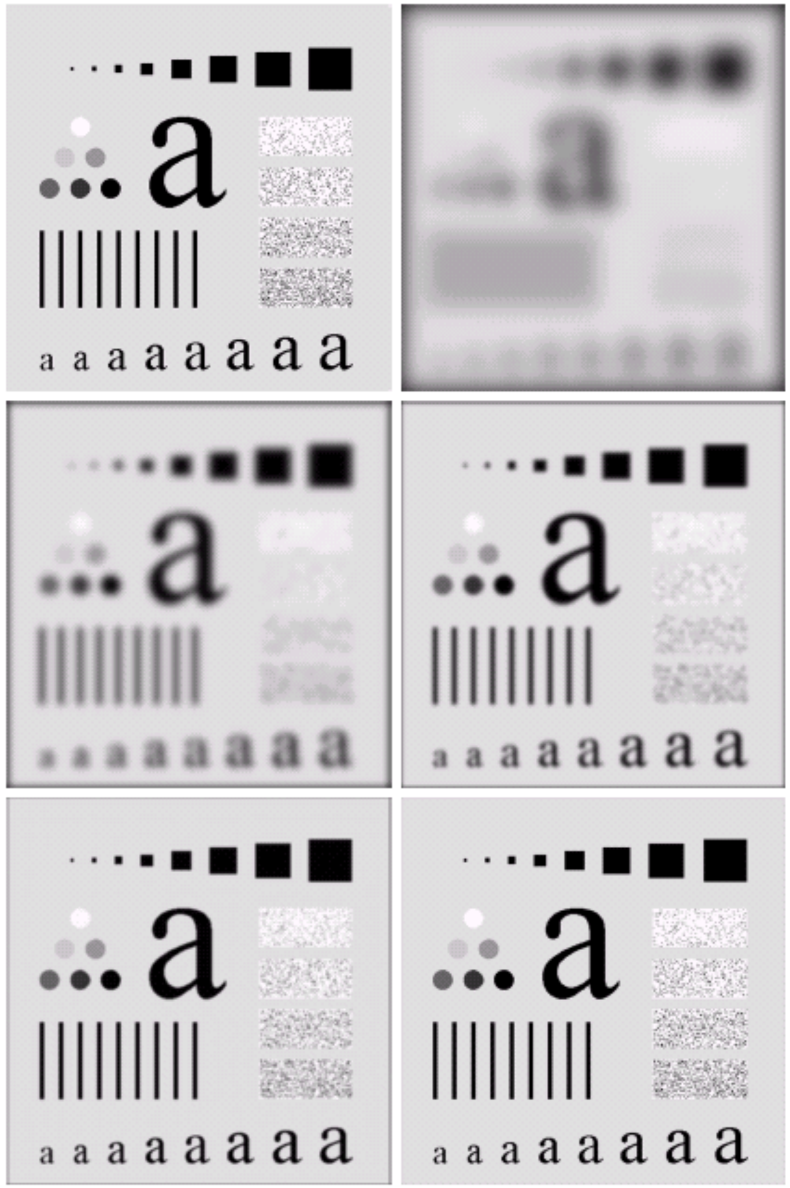
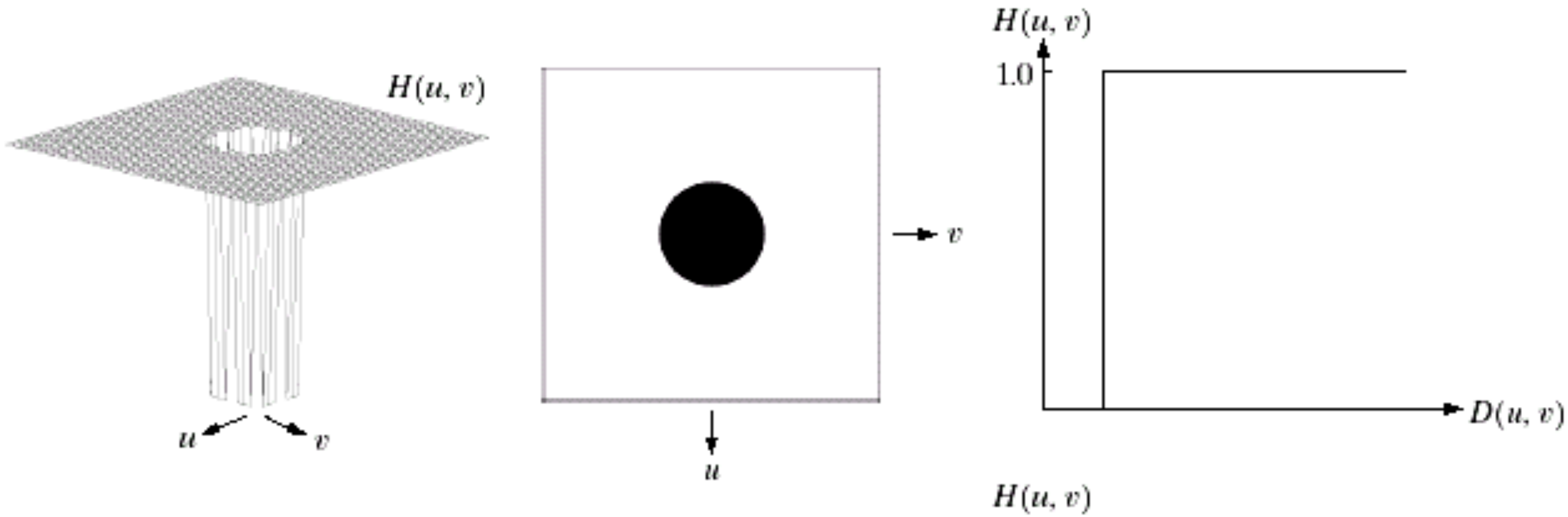


FIGURE 4.18 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering with Gaussian lowpass filters with cutoff frequencies set at radii values of 5, 15, 30, 80, and 230, as shown in Fig. 4.11(b). Compare with Figs. 4.12 and 4.15.

Filtros Passa-Alta

- Retira os componentes de baixa-frequência da imagem, ou seja, que estão abaixo da freqüência de corte (D_0) definida na construção do filtro;
- Mantém na imagem apenas as altas-frequências, ou seja, que estão acima da freqüência de corte (D_0);
- Não há realce de nenhum componente espectral da imagem.
- Podem ser de vários tipos. Os mais comuns são: Ideal, Butterworth e Gaussiano.

Filtros Passa-Alta Ideal

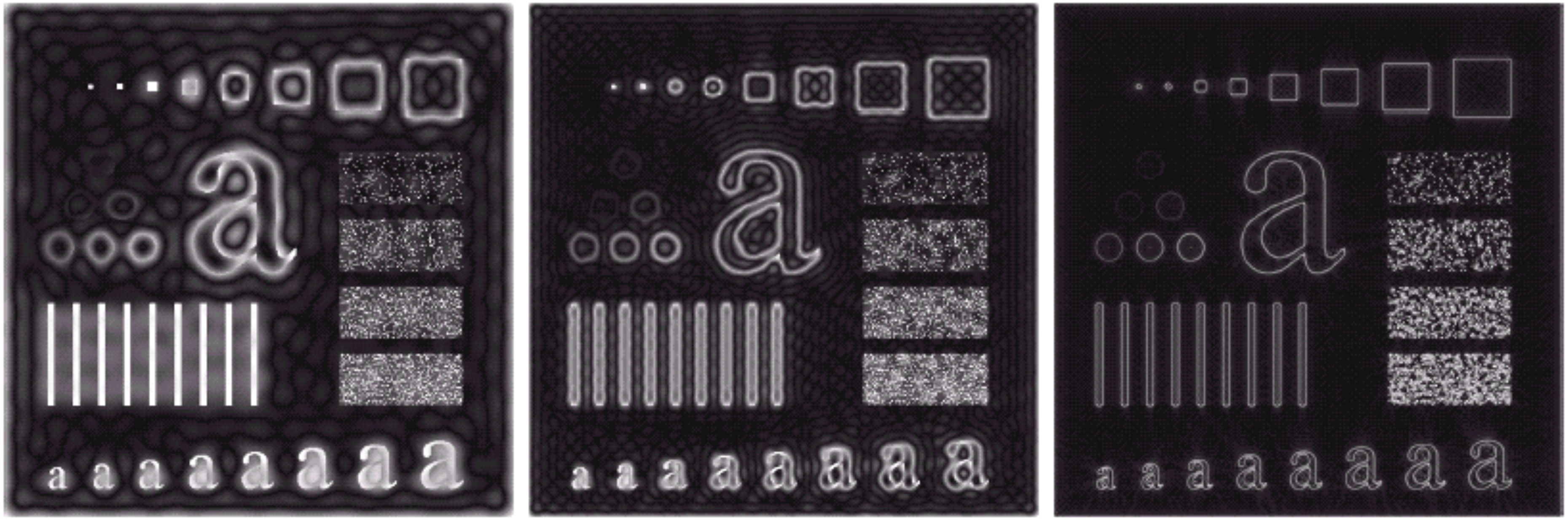


$$H(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{se } D(u,v) \le D_0 \\ 1, & \text{se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- Todas as frequências abaixo da frequência de corte (D_0) são retiradas da imagem;
- As frequências mais altas que D_0 não são alteradas.

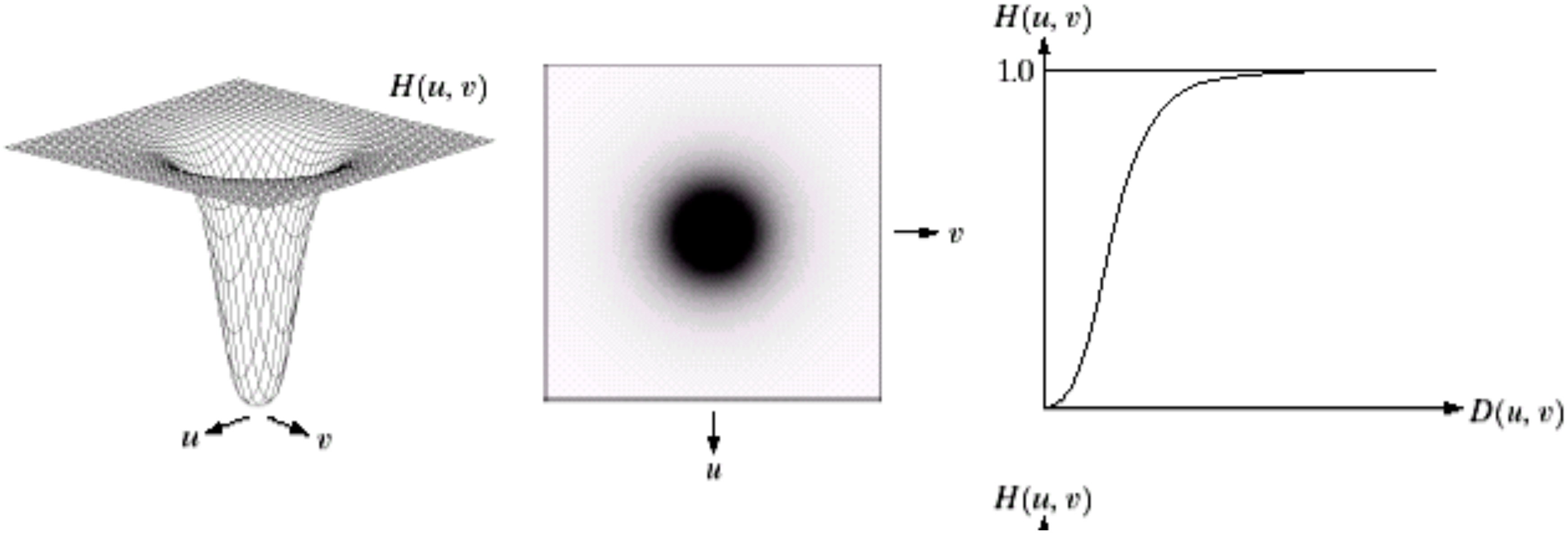
Filtro Passa-Alta **Ideal**

Resultados obtidos à medida que se aumenta a frequência de corte



Efeito indesejado de *ringing*

Filtro Passa-Alta **Butterworth**

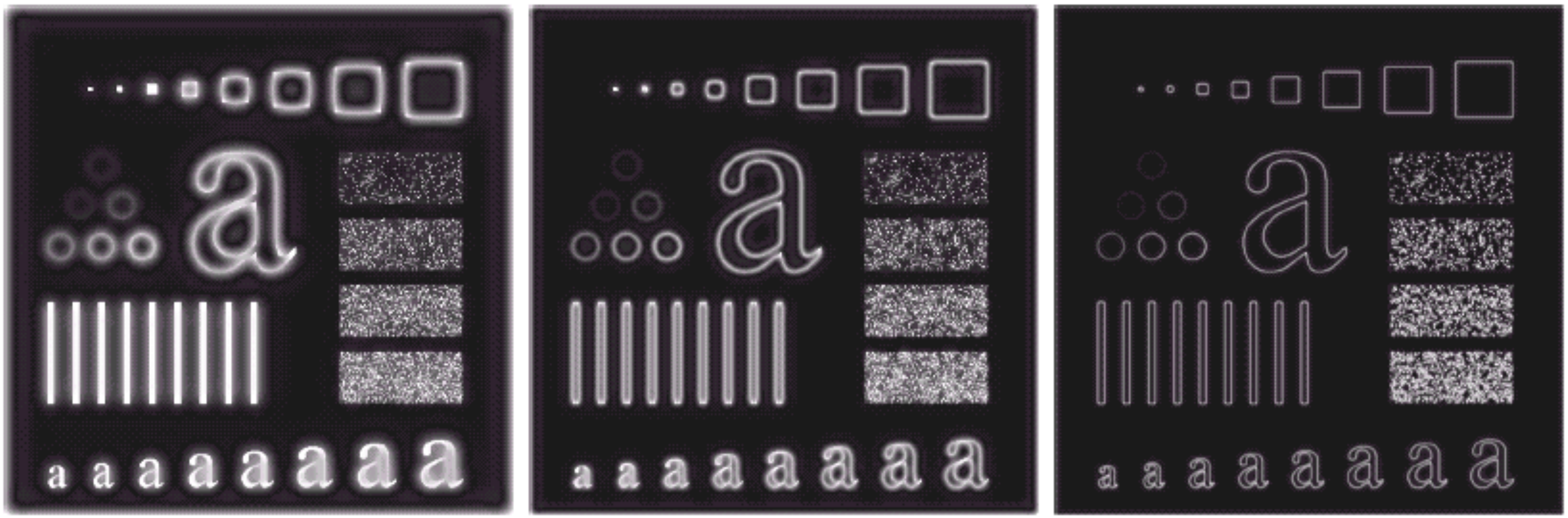


$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[\frac{D_0}{D(u,v)}\right]^{2n}}$$

- A frequência de corte (D_0) define o valor onde a amplitude do espectro é reduzida em 50%;
- Baixas-frequências são cada vez mais atenuadas na imagem a medida que são menores que D_0 , ou seja, o filtro possui transição mais suave que o filtro ideal;
- O valor de n (ordem do filtro) determina a "suavidade" do filtro.

Filtro Passa-Alta **Butterworth** (n=2)

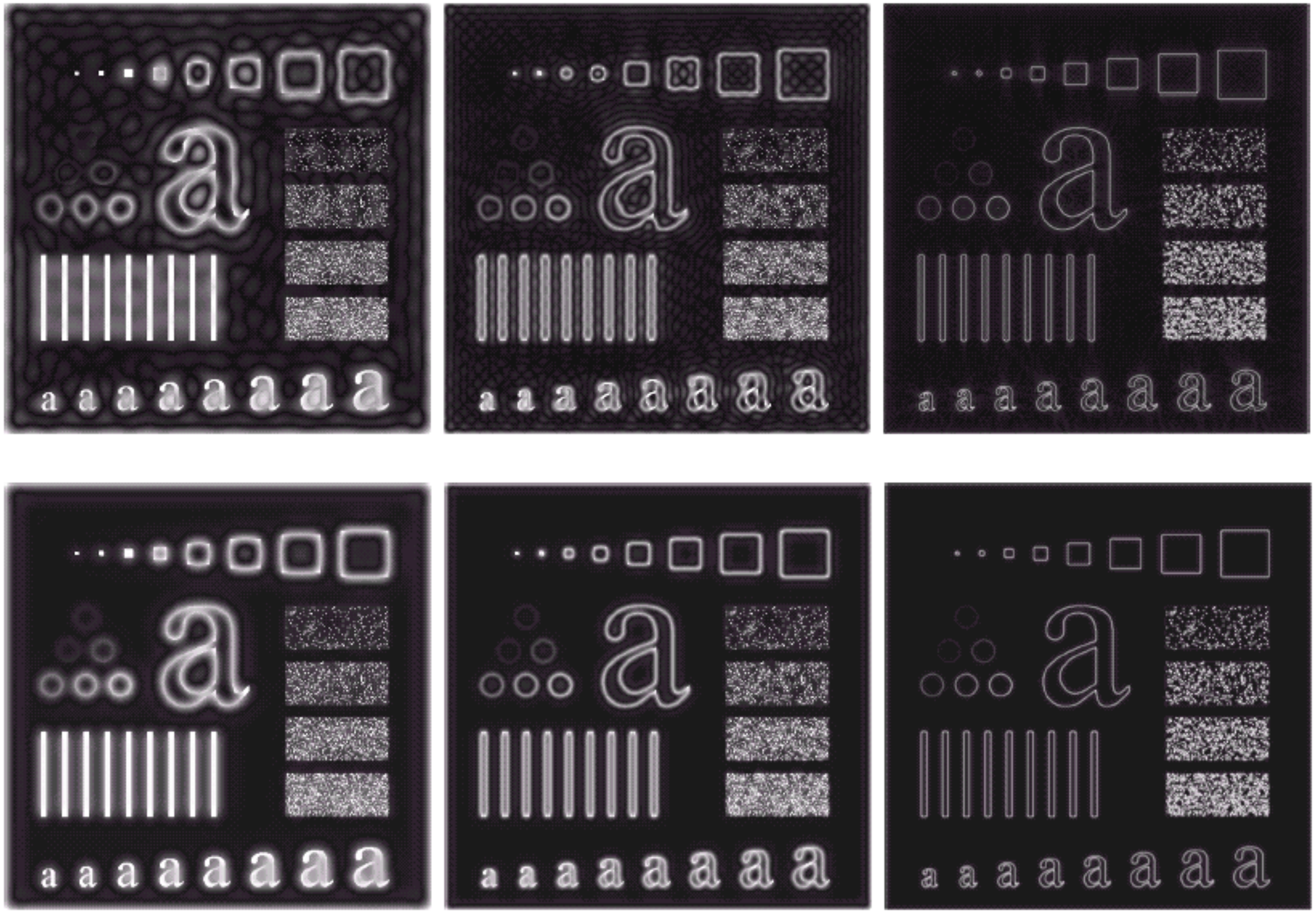
Resultados obtidos à medida que se aumenta a frequência de corte



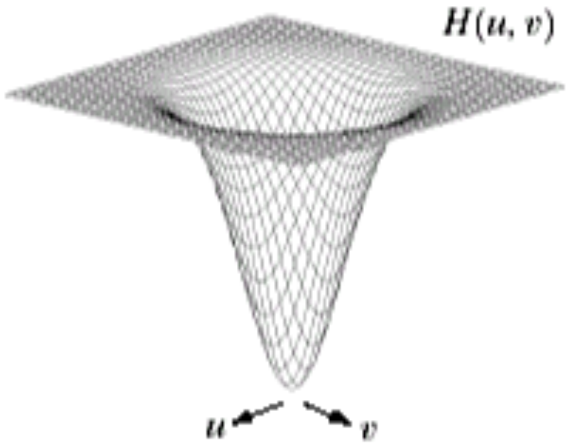
Filtros Passa-Alta

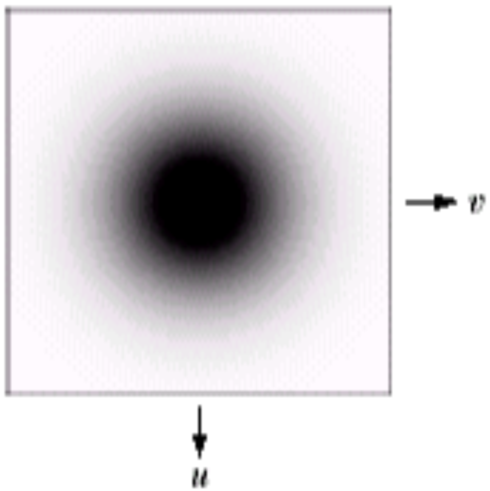
Ideal

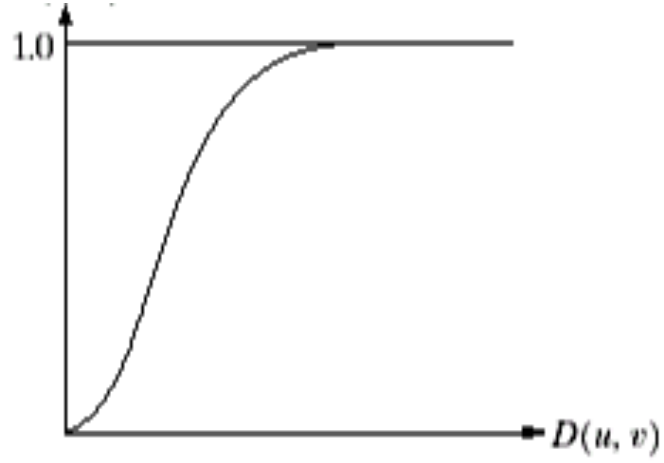
Butterworth



Filtro Passa-Alta **Gaussiano**







$$H(u,v) = 1 - e^{\frac{-[D(u,v)^2]}{2D_0^2}}$$

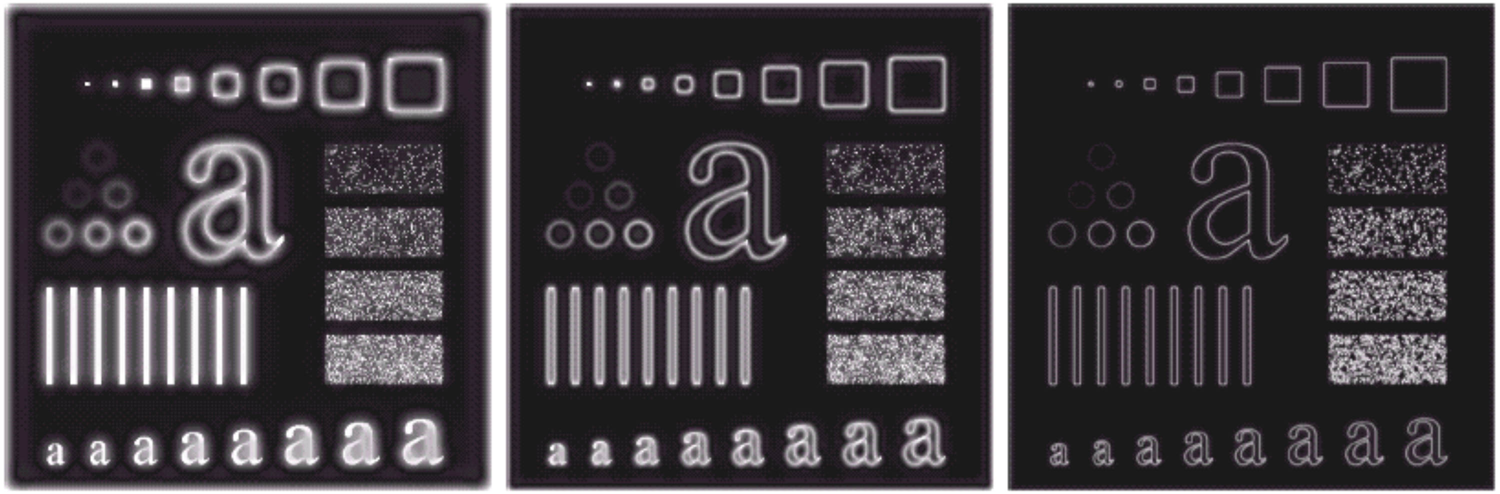
- A frequência de corte (D_0) define o valor onde a amplitude do espectro é reduzida em 60,7%;
- Baixas-frequências são cada vez mais atenuadas na imagem a medida que são menores que D_0 , ou seja, o filtro possui transição mais suave que o filtro ideal;
- O filtro Gaussiano pode ser bem mais suave que o filtro Butterworth.

Filtro Passa-Alta **Gaussiano**

Resultados obtidos à medida que se aumenta a frequência de corte

Filtros Passa-Alta

Butterworth



Gaussiano

Filtros

Rejeita-Banda e

Passa-Banda

Filtros Rejeita-Banda

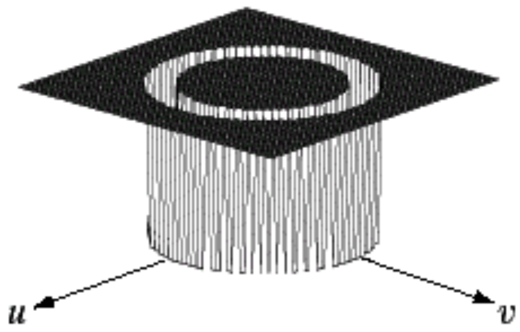
- Retira os componentes que estão dentro de uma faixa (banda) de frequência da imagem, definida na construção do filtro;

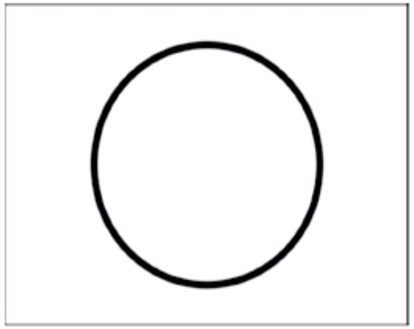
- Mantém na imagem apenas as frequências que estão fora da banda definida;

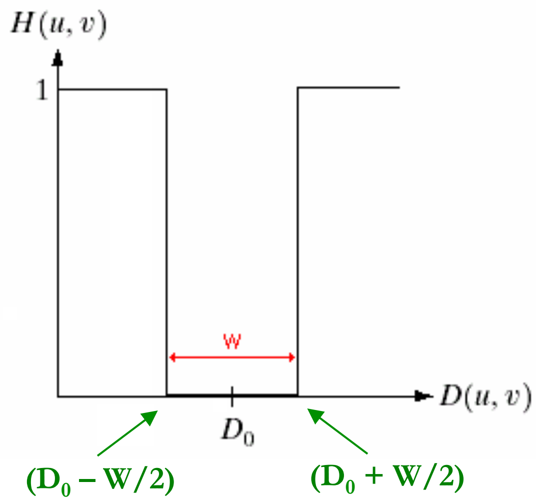
- Não há realce de nenhum componente espectral da imagem.

- Podem ser de vários tipos. Os mais comuns são: Ideal, Butterworth e Gaussiano.

Filtro Rejeita-Banda **Ideal**



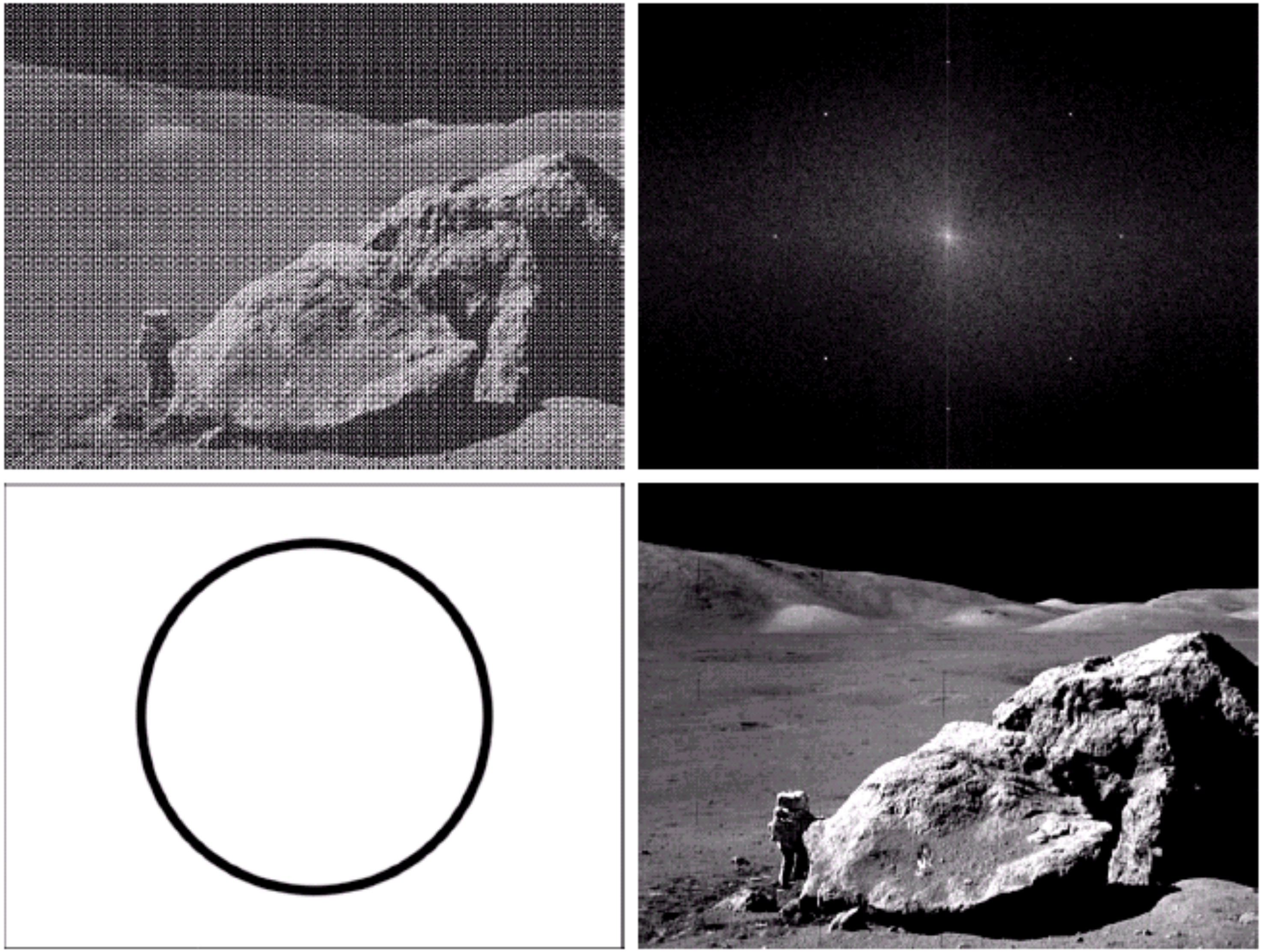




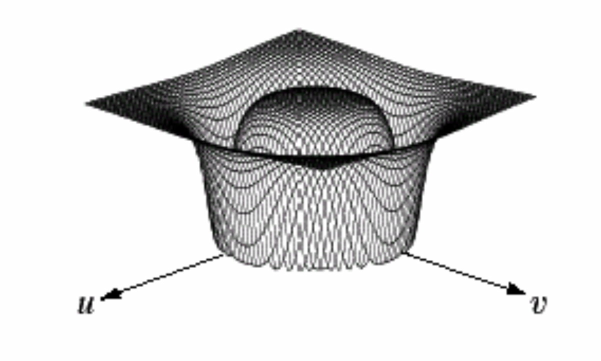
$$H(u,v) = \begin{cases} 1, \text{ se } D(u,v) < (D_0 - W/2) \\ 0, \text{ se } (D_0 - W/2) \leq D(u,v) \leq (D_0 + W/2) \\ 1, \text{ se } D(u,v) > (D_0 + W/2) \end{cases}$$

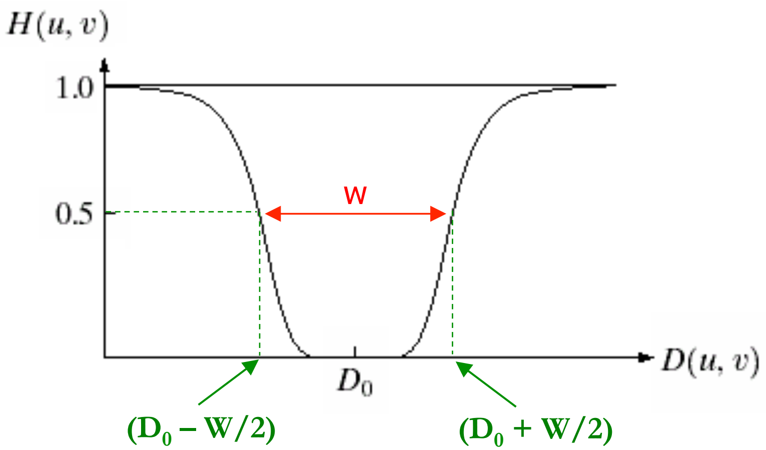
- Todas as frequências que pertencem à faixa definida por W (banda) são retiradas da imagem. As frequências externas à banda W não são alteradas;
- A frequência de corte corresponde ao centro da banda W.

Filtro Rejeita-Banda **Ideal**



Filtro Rejeita-Banda **Butterworth**

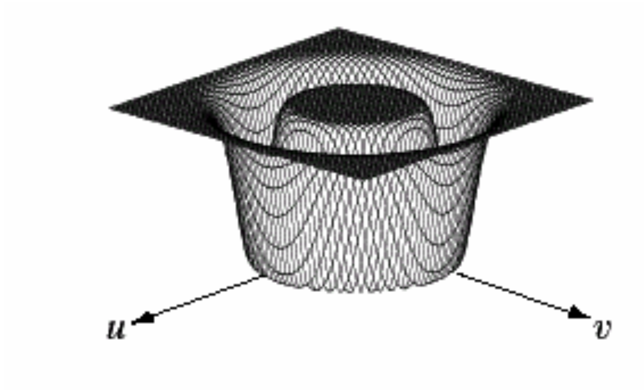


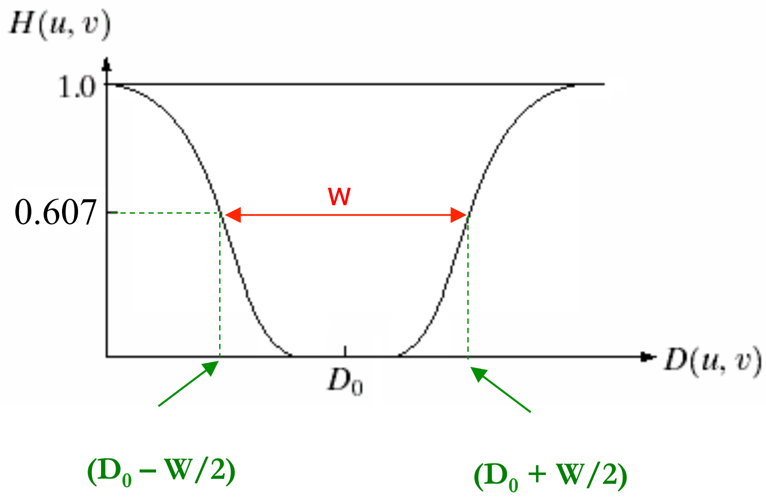


$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\dfrac{D(u,v)\cdot W}{D(u,v)^2 - D_0{}^2}\right]^{2n}}$$

- A frequência de corte (D_0) define o valor onde a amplitude do espectro é reduzida em 50%;
- Frequências dentro da faixa definida são cada vez mais atenuadas na imagem a medida que se aproximam de D_0, ou seja, o filtro possui transição mais suave que o filtro ideal;
- O valor de n (ordem do filtro) determina a "suavidade" do filtro.

Filtro Rejeita-Banda **Gaussiano**





$$H(u,v) = 1 - e^{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{D(u,v)^2 - D_0^{\,2}}{D(u,v)\cdot W}\right]}$$

- A frequência de corte (D_0) define o valor onde a amplitude do espectro é reduzida em 60,7%;
- Frequências dentro da faixa definida são cada vez mais atenuadas na imagem a medida que se aproximam de D_0, ou seja, o filtro possui transição mais suave que o filtro ideal;
- O filtro Gaussiano pode ser bem mais suave que o filtro Butterworth.

Filtros Passa-Banda

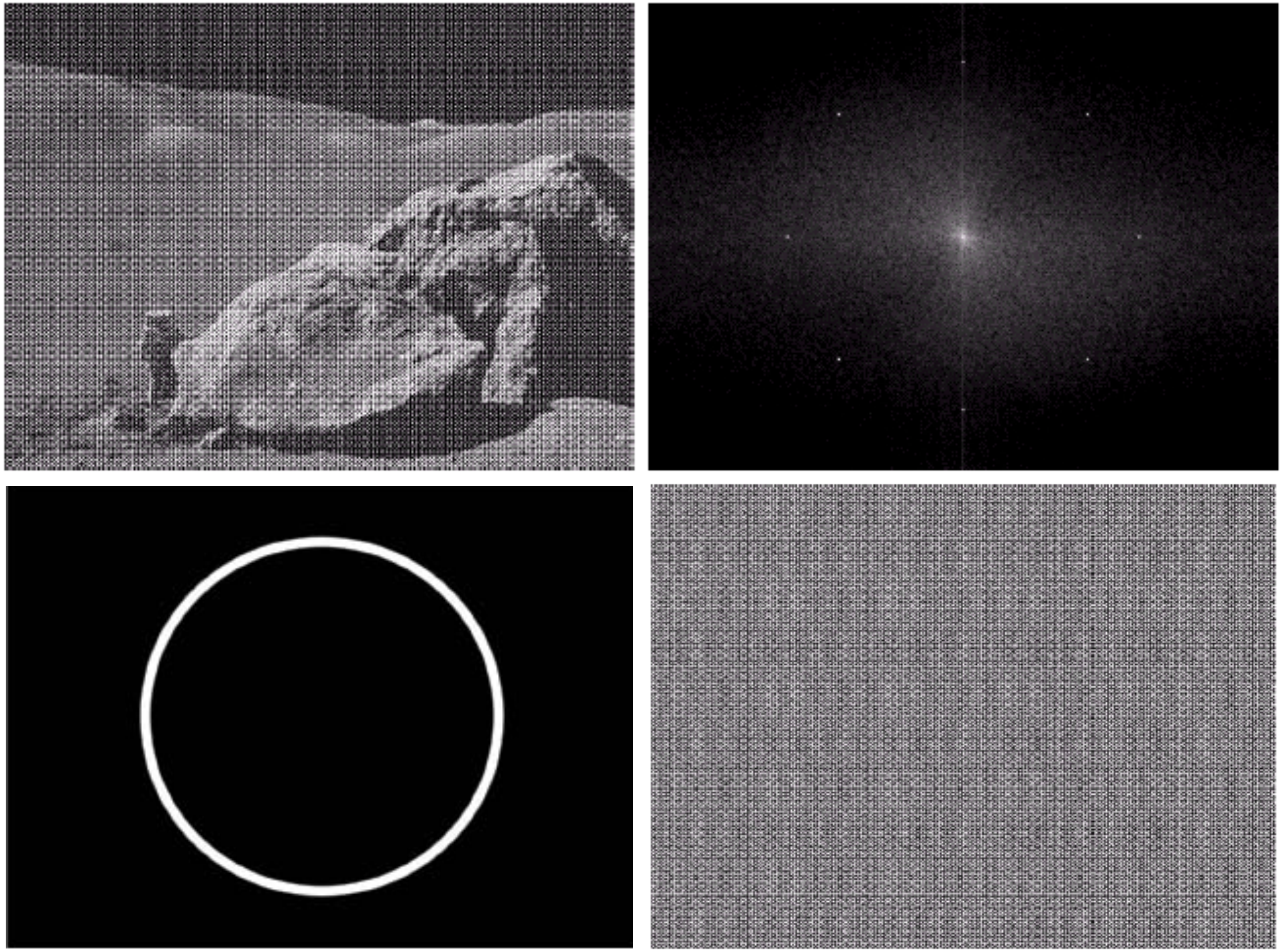
- Retira os componentes que estão fora de uma faixa (banda) de frequência da imagem, definida na construção do filtro;
- Mantém na imagem apenas as frequências que estão dentro da banda definida;
- Não há realce de nenhum componente espectral da imagem.
- Podem ser de vários tipos. Os mais comuns são: Ideal, Butterworth e Gaussiano.

Filtros Passa-Banda

As equações dos filtros Passa-Banda podem ser obtidos a partir das equações dos filtros Rejeita-Banda:

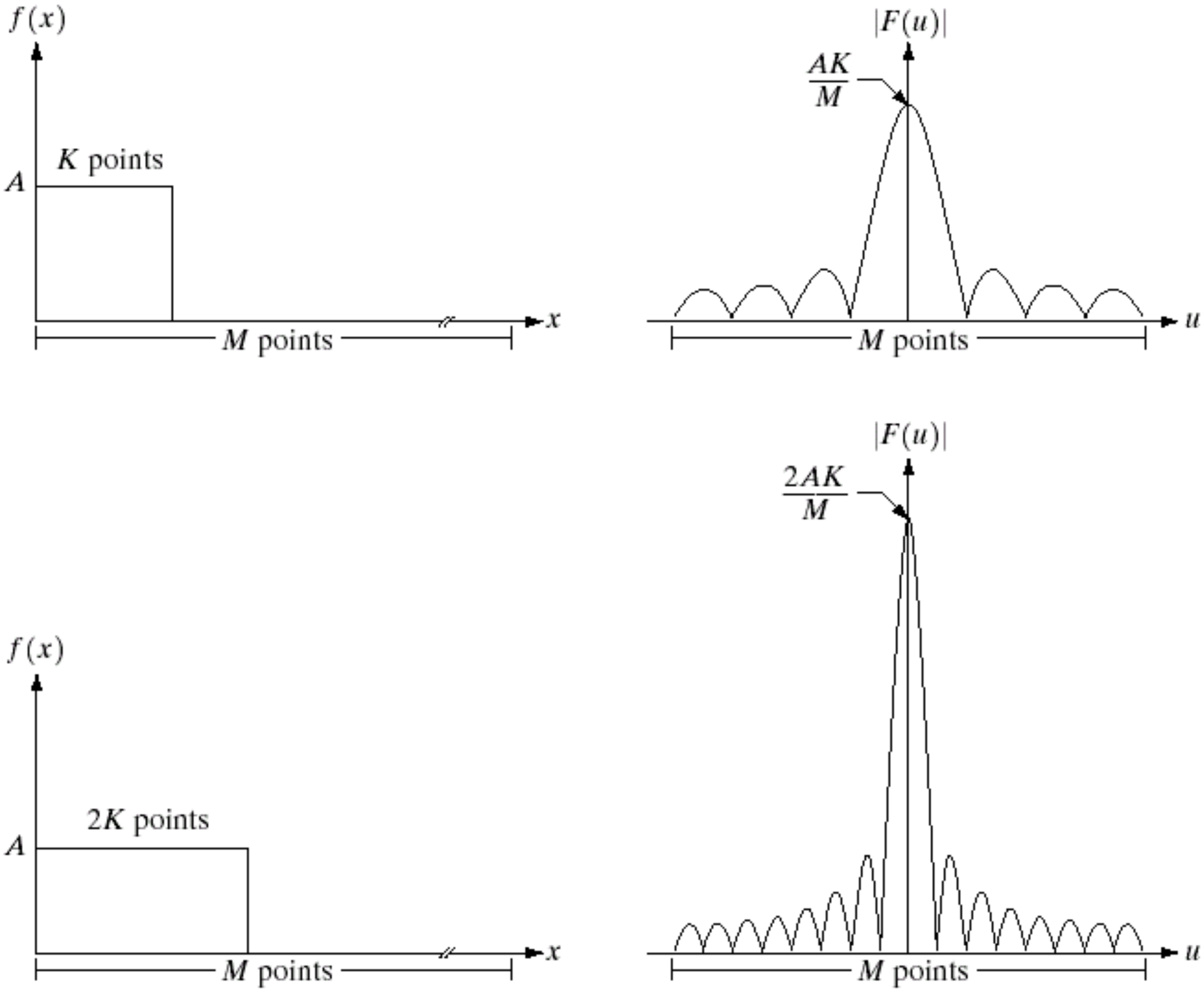
$$H(u,v)_{PB} = 1 - H(u,v)_{RB}$$

Filtro Passa-Banda **Ideal**



Relação entre a posição do pixel e a frequência espacial

DFT 2-D



f(x)
K points
A
M points
x
|F(u)|
AK/M
u
M points
|F(u)|
2AK/M
f(x)
2K points
A
M points
x
M points
u

Intervalo de frequência a partir do centro (passo)

Imagem M x N pixels

$$\Delta u = \frac{1}{M \cdot \Delta x} \qquad \Delta v = \frac{1}{N \cdot \Delta y}$$

Em uma imagem digital, qual o valor da frequência máxima representada no espectro de Fourier?

Intervalo de frequência a partir do centro (passo) =

$$\Delta u = \frac{1}{M \cdot \Delta x}$$

Frequência Máxima

(Teorema de Nyquist) =

$$u_{máx} = \frac{1}{2\Delta x}$$

Image Padding

Preenchimento com zeros

Multiplicação e Convolução

$$f(x,y)*g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)G(u,v)$$

$$f(x,y)g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)*G(u,v)$$

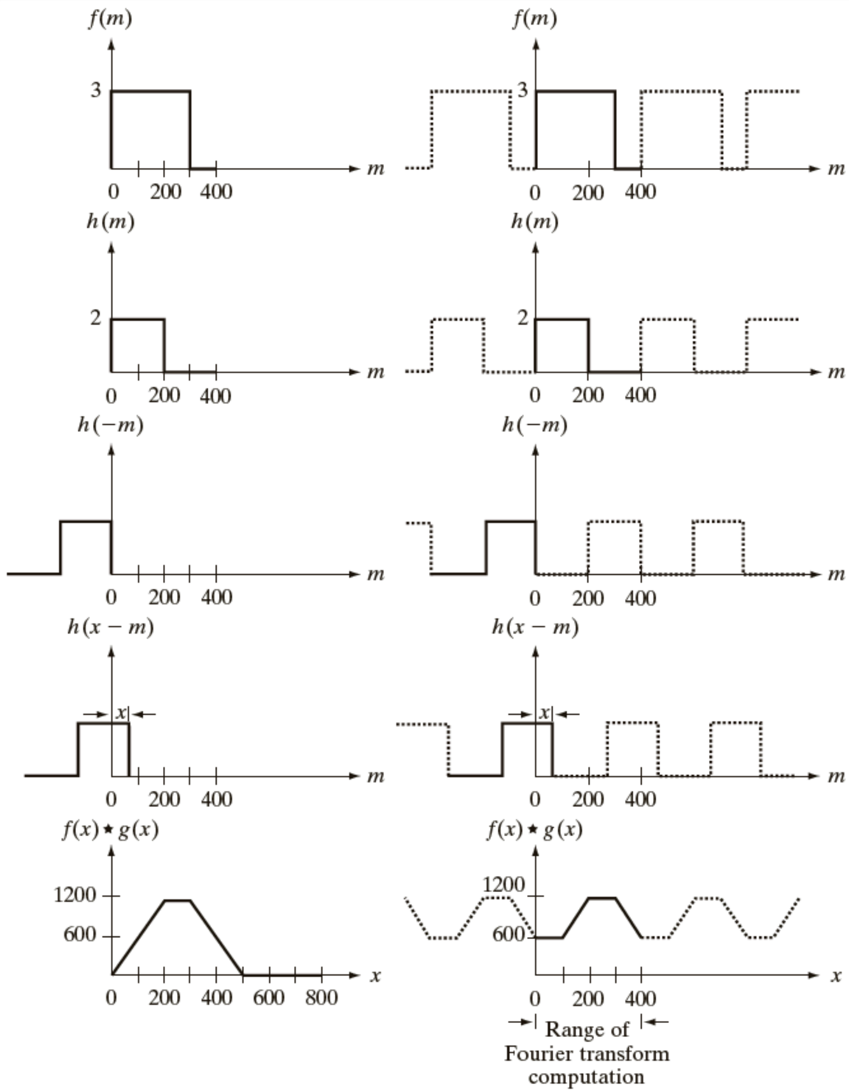
Convolução *no domínio do tempo/espaço* ⟺ ***Multiplicação*** *no domínio da frequência*

Multiplicação *no domínio do tempo/espaço* ⟺ ***Convolução*** *no domínio da frequência*

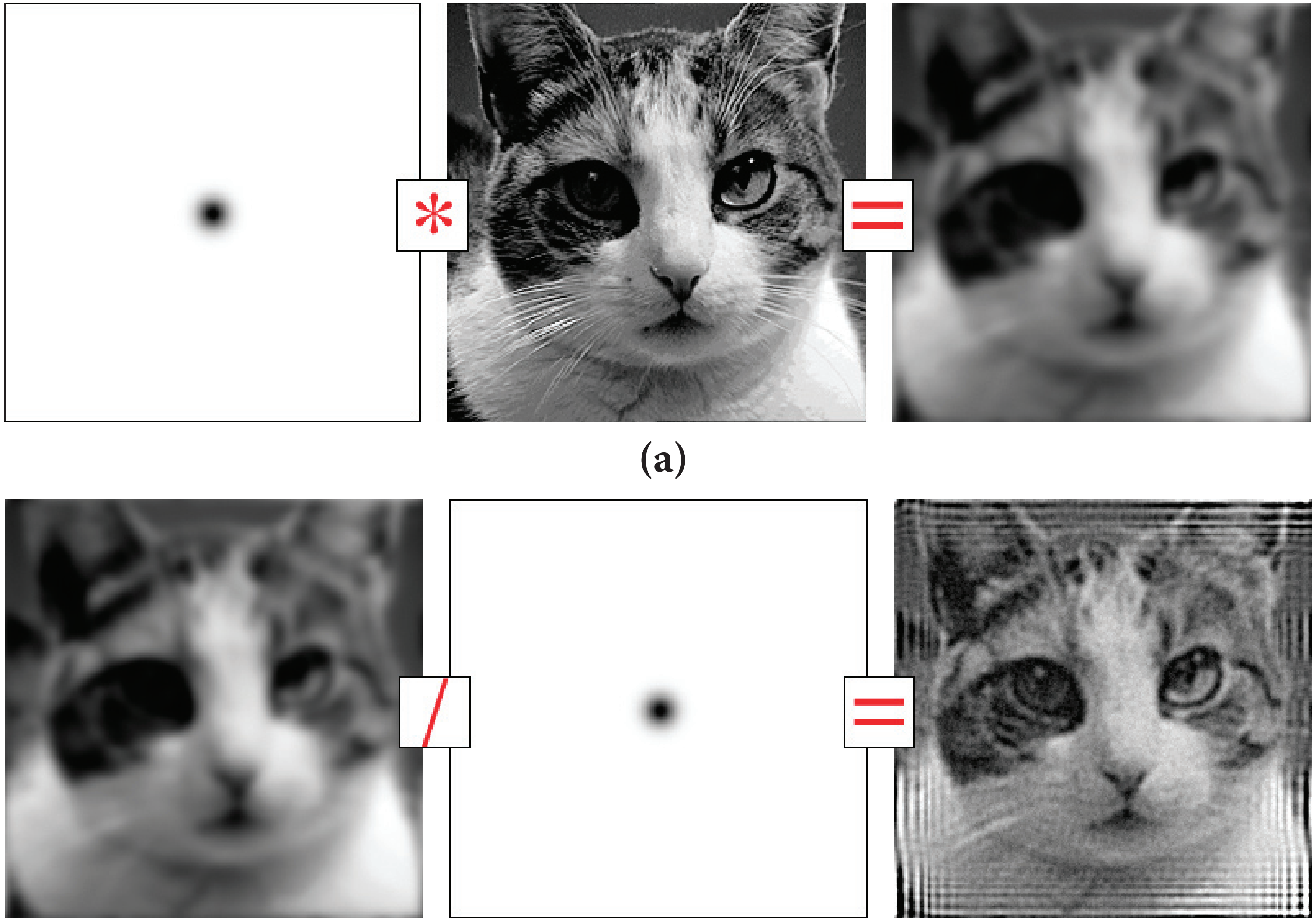
Wrap-around Error

Como a DFT é periódica. A multiplicação no domínio da frequência equivale a uma convolução <u>circular</u> no domínio do espaço.

Isso gera um erro na convolução



Wrap-around Error



(a)

Image Padding

A solução é preencher (padding) com zeros as funções a serem multiplicadas para evitar o erro na convolução

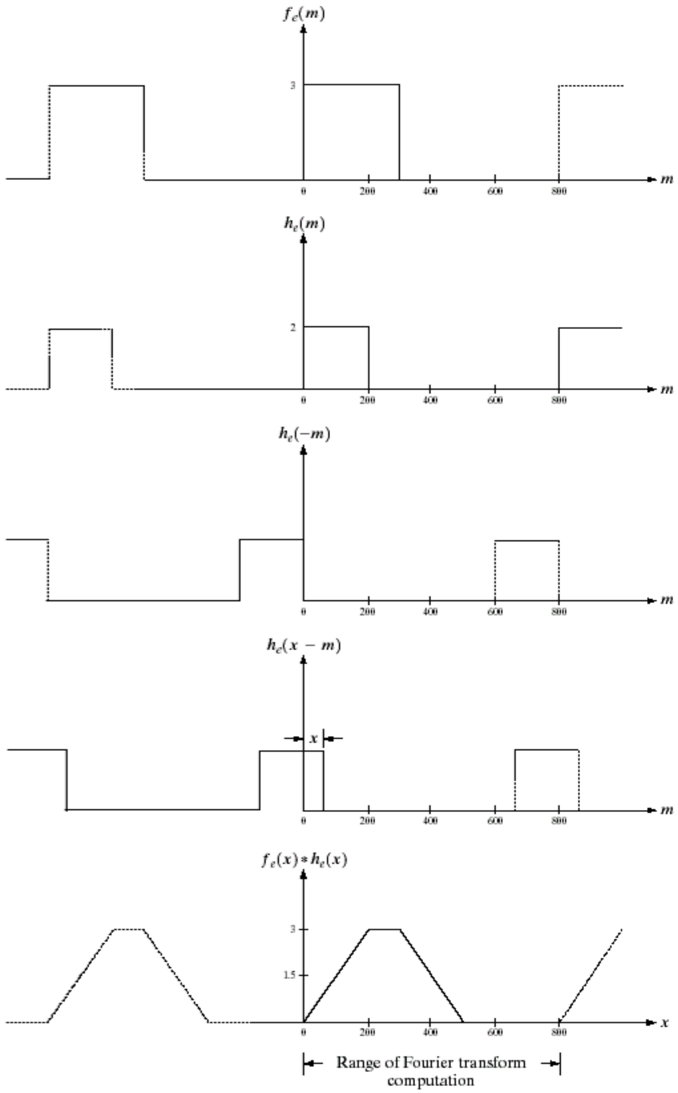


Image Padding

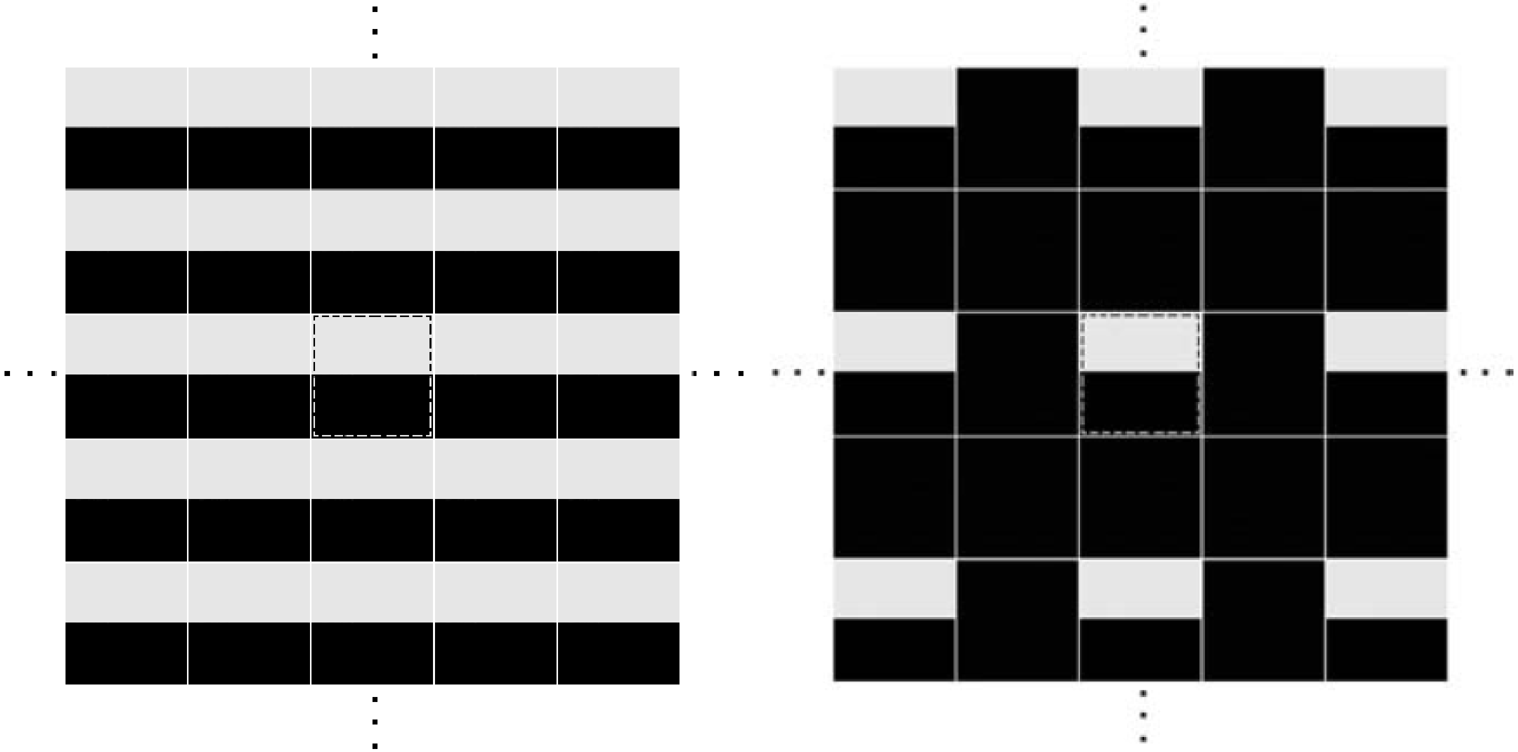
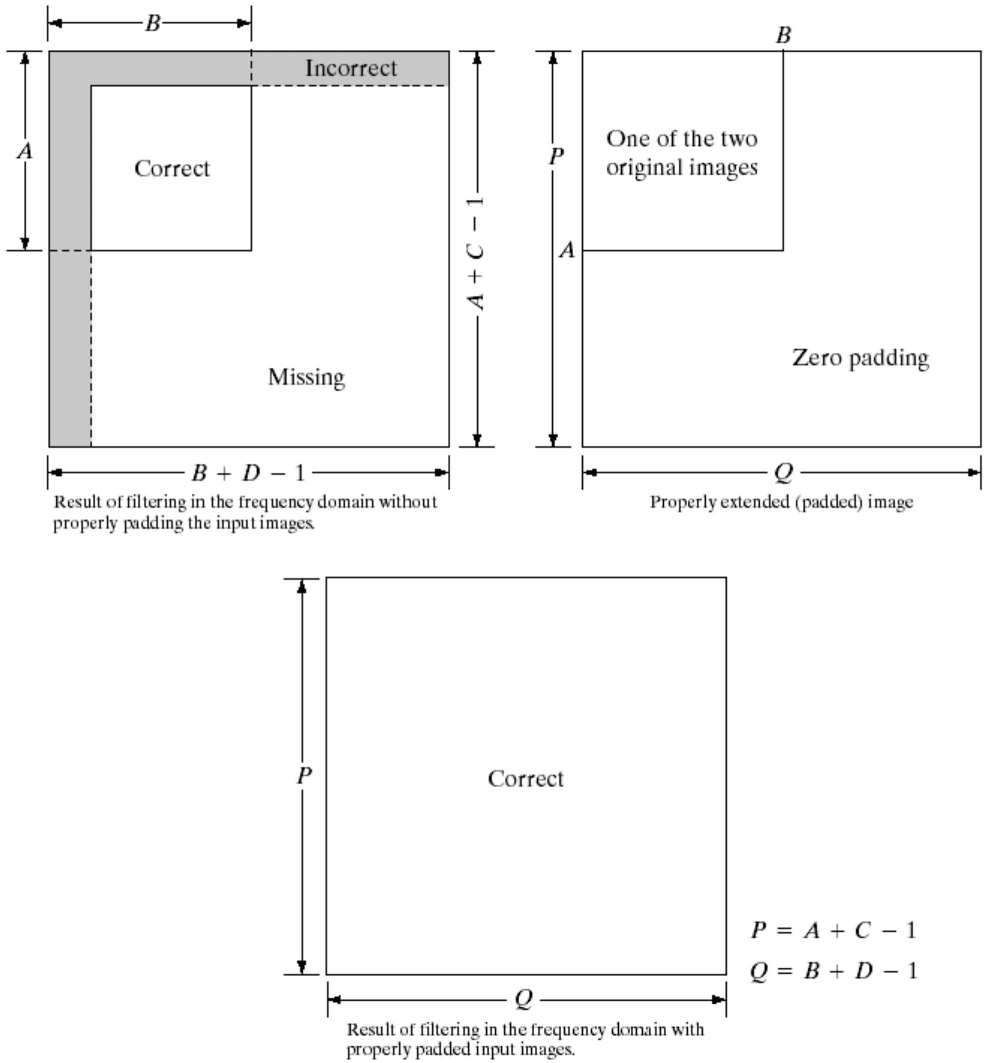


FIGURE 4.33 2-D image periodicity inherent in using the DFT. (a) Periodicity without image padding. (b) Periodicity after padding with 0s (black). The dashed areas in the center correspond to the image in Fig. 4.32(a). (The thin white lines in both images are superimposed for clarity; they are not part of the data.)

Image Padding



$P = A + C - 1$

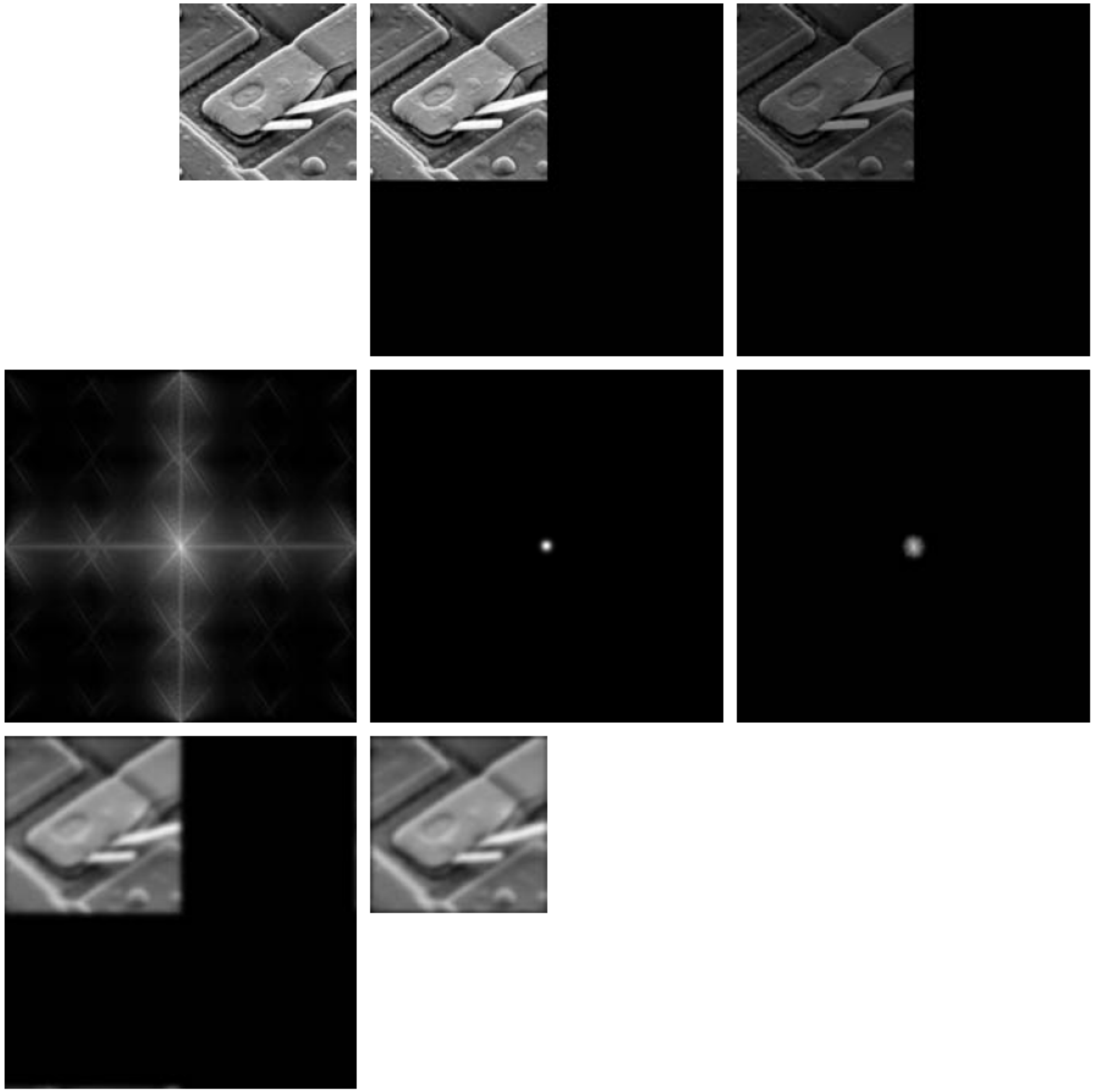
$Q = B + D - 1$

a b
c

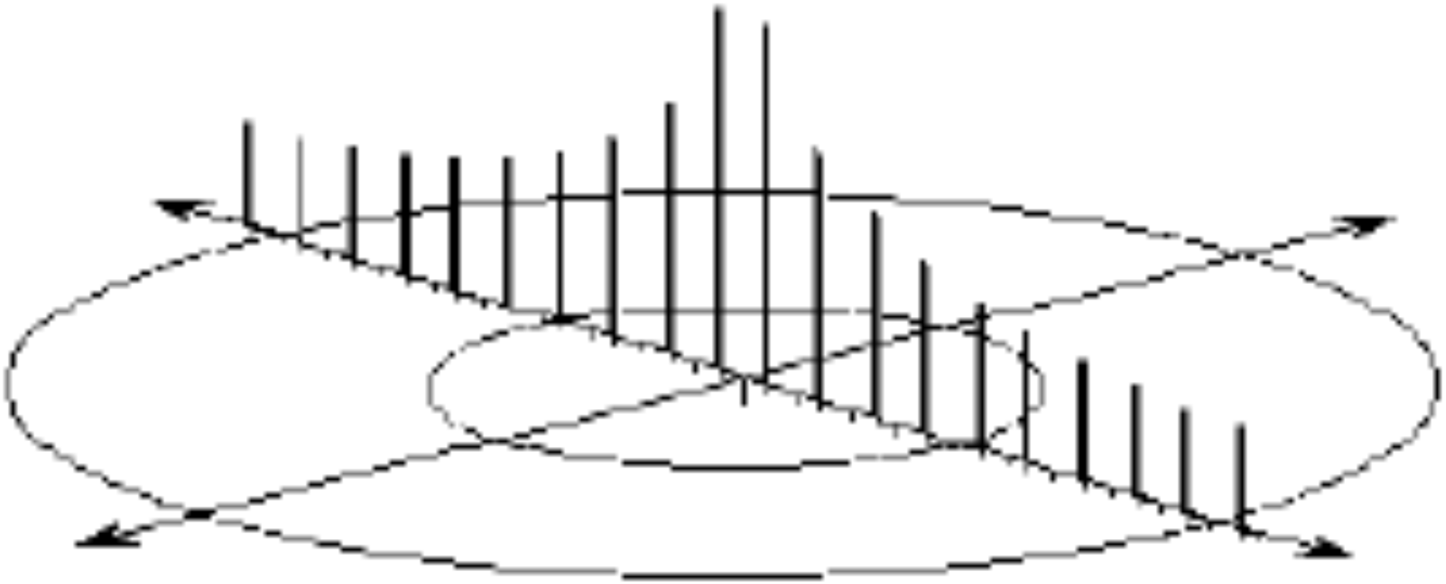
FIGURE 4.38 Illustration of the need for function padding. (a) Result of performing 2-D convolution without padding. (b) Proper function padding. (c) Correct convolution result.

Image Padding

Image Padding



Os Filtros devem ser circulares e concêntricos



Métricas de Distância

- Os filtros circulares devem ser construídos calculando-se as distâncias dos pixels em relação ao ponto central do espectro (frequência zero).
- À medida que a distância aumenta, a frequência de corte também aumenta.

Distância Euclidiana:

$$D_e(p,q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Distância City-Block:

$$D_{cb}(p,q) = | x_1 - x_2 | + | y_1 - y_2 |$$

Distância Chessboard:

$$D_{ch}(p,q) = \max\{| x_1 - x_2 |, | y_1 - y_2 |\}$$

Onde fica a frequência espacial ZERO?

Distribuição de Frequências após a Transformada de Fourier

Matriz de Tamanho Ímpar 7x7

Y \ X	1	2	3	4	5	6	7
1	0,30822 - 3,557i	7,4462 + 0,26201i	9,2165 + 1,4641i	**-6,9946 - 4,3351i**	-9,145 - 12,2i	7,7022 + 14,61i	-1,0266 - 3,3356i
2	2,2726 + 0,65998i	19,807 - 9,3154i	-15,659 + 12,658i	**-22,223 + 6,7232i**	15,244 - 2,057i	-3,0456 + 5,3591i	1,7265 + 4,6776i
3	19,809 - 4,2954i	35,918 + 47,943i	36,384 - 8,7932i	**5,2174 - 50,745i**	15,072 - 27,215i	6,5109 + 14,033i	11,957 - 5,9855i
4	**2,4511 - 4,7286i**	**-34,496 - 39,76i**	**-44,456 - 93,287i**	4927	**-44,456 + 93,287i**	**-34,496 + 39,76i**	**2,4511 + 4,7286i**
5	11,957 + 5,9855i	6,5109 - 14,033i	15,072 + 27,215i	**5,2174 + 50,745i**	36,384 + 8,7932i	35,918 - 47,943i	19,809 + 4,2954i
6	1,7265 - 4,6776i	-3,0456 - 5,3591i	15,244 + 2,057i	**-22,223 - 6,7232i**	-15,659 - 12,658i	19,807 + 9,3154i	2,2726 - 0,65998i
7	-1,0266 + 3,3356i	7,7022 - 14,61i	-9,145 + 12,2i	**-6,9946 + 4,3351i**	9,2165 - 1,4641i	7,4462 - 0,26201i	0,30822 + 3,557i

Distribuição de Frequências após a Transformada de Fourier

Matriz de Tamanho Par 6 x 6

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	7	8 - 1,7321i	1 + 13,856i	**-7**	1 - 13,856i	8 + 1,7321i
2	7 + 5,1962i	11,5 + 12,99i	-8 - 8,6603i	**-20 - 6,9282i**	5,5 + 6,0622i	7 - 3,4641i
3	13 + 12,124i	-4 + 22,517i	38,5 + 12,99i	**20 - 27,713i**	7 - 17,321i	24,5 + 12,99i
4	**-11**	**-8 - 39,837i**	**-35 - 65,818i**	**3583**	**-35 + 65,818i**	**-8 + 39,837i**
5	13 - 12,124i	24,5 - 12,99i	7 + 17,321i	**20 + 27,713i**	38,5 - 12,99i	-4 - 22,517i
6	7 - 5,1962i	7 + 3,4641i	5,5 - 6,0622i	**-20 + 6,9282i**	-8 + 8,6603i	11,5 - 12,99i

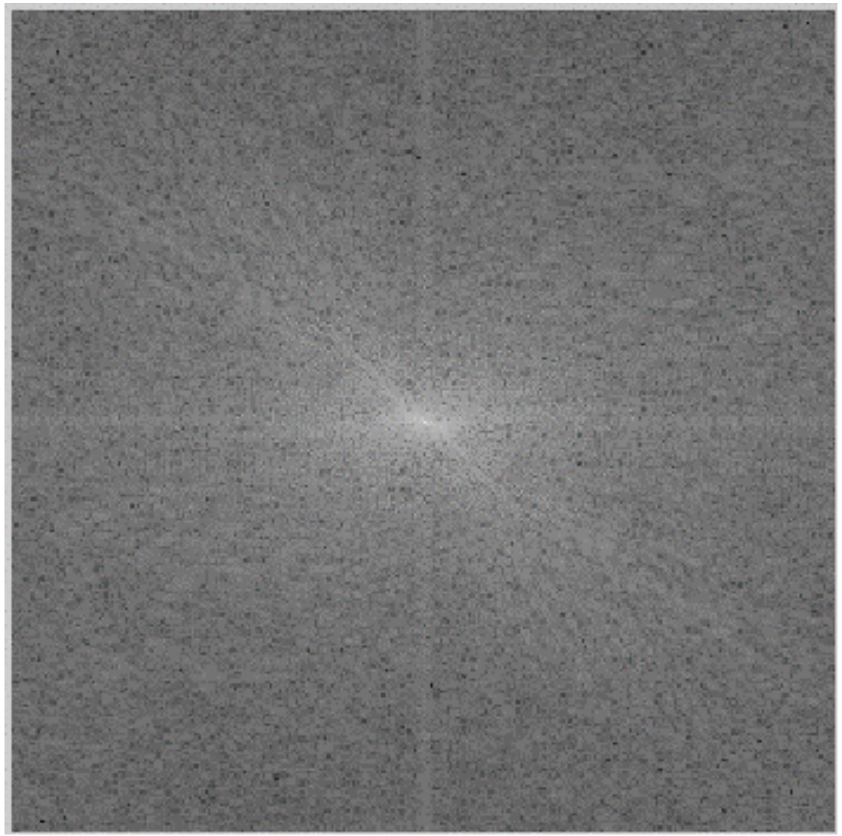
Distribuição de Frequências de um filtro

Y \ X	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	**0**	0	0	0
2	0	0	0	**0**	0	0	0
3	0	0	0	**0**	0	0	0
4	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
5	0	0	0	**0**	0	0	0
6	0	0	0	**0**	0	0	0
7	0	0	0	**0**	0	0	0

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	**0**	0	0
2	0	0	0	**0**	0	0
3	0	0	0	**0**	0	0
4	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
5	0	0	0	**0**	0	0
6	0	0	0	**0**	0	0

Filtragem com o MATLAB

Espectro de Fourier



Visualização do Espectro de Fourier

```
clear all
close all
clc

a = imread ('lenna.gif');
imshow(a);

b = fft2(double(a));
b = fftshift(b);

% Visualizar espectro do Fourier
c = abs(b);
c = 15*log(1+c);
c = uint8(c); % transforma em imagem
figure, imshow(c);
```

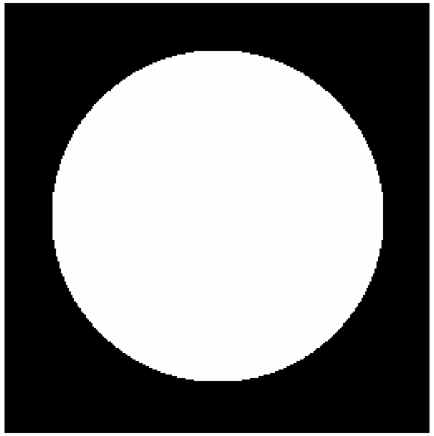
Filtragem e Transformada Inversa

```
%Processamento no Domínio da Frequencia
x1 = b.*h1;
b = x1;

% Visualizar após o filtro
c = abs(b);
c = 15*log(1+c);
c = uint8(c); % transforma em imagem
figure, imshow(c);

% Transformada Inversa
i1 = ifft2(b);
i1 = abs(i1);
i1 = uint8(i1);
figure, imshow(i1)
```

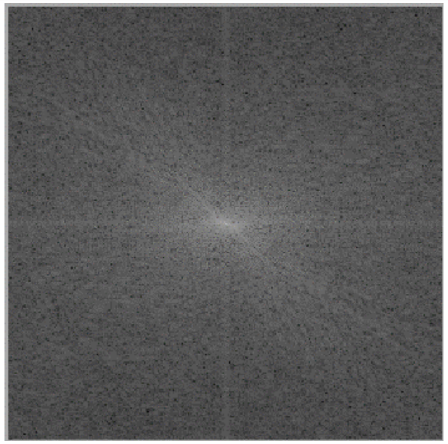
Filtro Passa-Baixa Ideal ‘Circular’

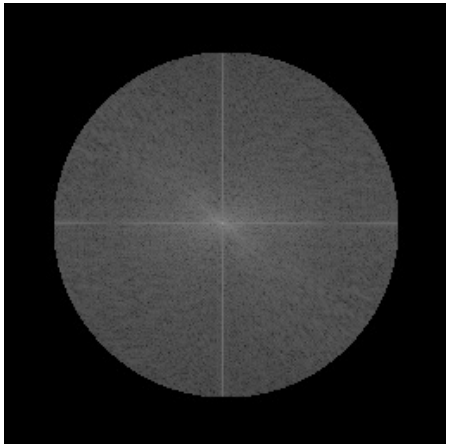
```
% Calculo de Filtro passa baixa circular ideal
% M x N corresponde ao tamanho do filtro
% fcorte corresponde a frequencia de corte, em pixels, a partir da origem.
clear all
clc
% Parametros
M = 256;
N = 256;
fcorte = 100;
% Rotina
filtro = zeros (M,N);
cx = floor(M/2)+1;
cy = floor(N/2)+1;
for x = 1:M
    for y = 1:N
        D = sqrt(power((x-cx),2)+power((y-cy),2));
        if D < fcorte
            filtro (x,y)  = 1;
        else
        end
    end
end
imshow(filtro);
```

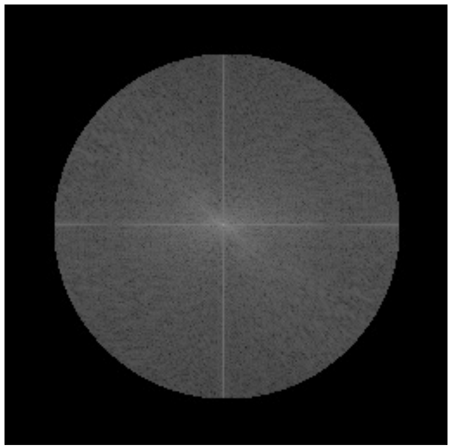
Filtro Passa-Baixa Ideal



X





IFFT2 {  } =

FIM