Measure Theory

R.H. Wang

Contents

1 基本概念回顾

1.1 Sets

2 测度空间

Definition 2.1. (测度) 测度是定义在某个集合上的一个函数，它赋予集合一个非负实数（或 ∞），用以表示该集合的“大小”. 一个函数 μ 被称为测度，如果它满足以下条件：

1. **非负性：**对于任何集合 A，测度满足 $\mu(A) \geq 0$.
2. **空集的测度为零：**$\mu(\emptyset) = 0$.
3. **可数可加性（σ-加性）：**
   如果 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一系列两两不相交的集合，则
   $$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

2.1 σ 代数

Definition 2.2. (σ-代数（Sigma Algebra）) σ-代数是一个集合族，它对于补集和可数并集封闭，具体来说，一个集合族 $\mathcal{F}$ 是 σ-代数，满足以下条件：

1. **包含全集：**如果集合 X 是全集，那么 $X \in \mathcal{F}$.
2. **封闭性对于补集:** 如果 $A \in \mathcal{F}$，则其补集 $A^c = X \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. **封闭性对于可数并集:** 如果 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Example 2.1. 以下是一些关于 σ-代数的例子：

1. **最小的 σ-代数（平凡 σ-代数）：**
   在任何集合 X 上，$\{\emptyset, X\}$ 是最简单的 σ-代数，只包含空集和全集.

2. **最大的 σ-代数（离散 σ-代数）：**
   在集合 X 上，2^X（X 的幂集，包含 X 的所有子集）是一个 σ-代数，称为离散 σ-代数.

3. **Borel σ-代数:**
   在 $\mathbb{R}$ 上，由所有开区间 (a, b) 生成的 σ-代数是 Borel σ-代数，记为 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. 它包含所有开集、闭集、可数并和交的集合等.

4. **Lebesgue σ-代数：**在 $\mathbb{R}$ 上，Lebesgue σ-代数是由 Borel σ-代数通过添加所有测度为零的集合（Lebesgue 测度）得到的 σ-代数.

2.2 Borel σ-代数

Definition 2.3. 设 M 是一个集合，定义在某个基础集合 X 上. 由 M 生成的 σ-代数，记为 $\sigma(M)$，是包含 M 的所有 σ-代数的交集. 形式上，这可以描述为：

$$\sigma(M) = \bigcap \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ 是包含} M \text{ 的} \sigma\text{-代数, 定义在} X \text{ 上}\}$$

这意味着 $\sigma(M)$ 是最小的 σ-代数，包含集合 M，并且满足 σ-代数的三个基本条件：包含全集 X，对于补集封闭，以及对于可数并集封闭.

如何生成 σ-代数〈过程〉

生成 σ-代数的过程涉及以下步骤：

1. **包含 M：**首先，确保所有在 M 中的集合都包含在 σ-代数中.

2. **包含补集：**对于 $\sigma(M)$ 中的每个集合 A，其补集 $X \setminus A$ 也必须包含在 $\sigma(M)$ 中.

3. **包含可数并：** 对于 $\sigma(M)$ 中的任何可数集合序列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$，其并集 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 也必须包含在 $\sigma(M)$ 中.

4. **最小性：** $\sigma(M)$ 必须是所有满足以上条件的 σ-代数中最小的一个，即任何包含 M 并满足 σ-代数定义的集合系统都必须包含 $\sigma(M)$.

Example 2.2. 这里展示生成 σ-代数的一些例子:

1. **单点集合的生成 σ-代数**
   - 设 $X = \mathbb{R}$，$M = \{\{0\}\}$，即 M 只包含实数线上的单点集合 $\{0\}$
   - 生成的 σ-代数 $\sigma(M)$ 将包括 $\{0\}$ 的所有可能的可数并集和补集，这些包括所有包含 0 或不包含 0 的集合，例如 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$，$\{0\}$，$\emptyset$ 和 $\mathbb{R}$.

2. **开区间的生成 σ-代数（Borel σ-代数）**
   - 设 $X = \mathbb{R}$，$M = \{(a, b) : a < b\}$，包含 $\mathbb{R}$ 上的所有开区间
   - 生成的 σ-代数 $\sigma(M)$ 是实数线上的 Borel σ-代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$，包括所有开集、闭集、G_δ 集（开集的可数交）、F_σ 集（闭集的可数并）等

通过这些步骤和例子，我们看到生成 σ-代数是构建测度理论和概率论模型的基础过程，为我们提供了一种系统化地处理集合操作的方法，保证了数学模型的严密性和完整性.

Definition 2.4. (Borel σ-代数) Borel σ-代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是在拓扑空间（如实数 $\mathbb{R}$）上所有开集通过可数并、可数交和补集操作生成的最小 σ-代数. 即：

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\text{所有开区间}(a, b))$$

Example 2.3. 这里列举 Borel σ-代数的例子：
在实数线 $\mathbb{R}$ 上的例子:

1. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 包括所有单点集合，因为每个单点可以表示为开区间的可数交.

2. 它包含所有实数线上的开集和闭集.
3. 它还包括所有 G_δ 集和 F_σ 集，这些集合分别是开集的可数交和闭集的可数并.

应用 在实数 $\mathbb{R}^n$ 上，Borel σ-代数可以通过考虑所有形如 $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ 的开矩形区间生成. 这表明在 $\mathbb{R}^n$ 上，Borel σ-代数是由所有开球生成的，因为每个开球都可以用开矩形区间来逼近.

References