HMM

Renhe W.

Contents

List of Figures

List of Tables

1 HMM

隐马尔可夫模型 (Hidden Markov Model, HMM) 是一个统计模型，用于描述一个隐藏的马尔可夫链产生的观测序列.

HMM 有两个序列：一个是观测序列，另一个是隐藏的状态序列. 具体形式如图1：

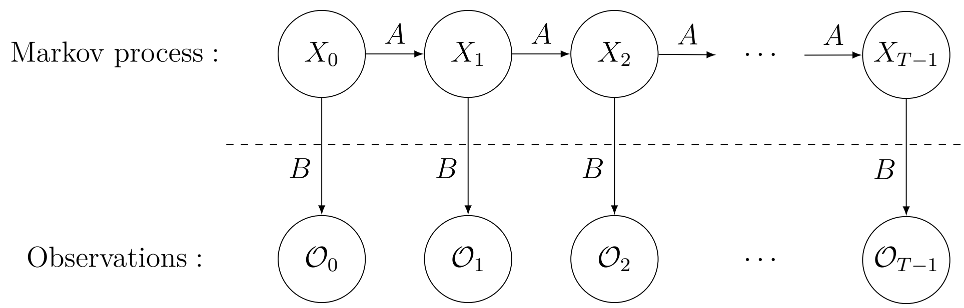

图 1. A hidden Markov model.

HMM 的参数包括:

- 状态转移概率矩阵 A: 元素 a_{ij} 表示从状态 i 转移到状态 j 的概率.
- 观测概率矩阵 B : 元素 b_{ij} 表示在状态 i 下观测到 j 的概率.
- 初始状态概率向量 π : 元素 π_i 表示模型在时间 $t = 1$ 时处于状态 i 的概率.

HMM 的求解主要包括以下三个基本问题:

1. 估计问题 (Evaluation Problem): 给定模型参数和一个观测序列，计算这个观测序列出现的概率。这个问题通常使用前向算法 (Forward Algorithm) 和后向算法 (Backward Algorithm) 来解决.
2. 解码问题 (Decoding Problem)：给定模型参数和一个观测序列，找到最有可能的隐藏状态序列。这个问题通常使用 Viterbi 算法来解决.
3. 学习问题 (Learning Problem): 给定一个观测序列，如何调整模型参数 (A, B, 和 π) 使得这个观测序列出现的概率最大。这个问题通常使用 Baum-Welch 算法 (一种特殊的 EM 算法) 来解决.

2 求解步骤

2.1 估计问题 (Evaluation Problem)

给定模型参数和一个观测序列，我们希望计算观测序列的概率.

前向算法 (Forward Algorithm): 使用前向概率 $\alpha_t(i)$ 表示到时间 t 为止，系统处于状态 i 并且观测到序列 $O_1, O_2, \ldots O_t$ 的概率.

递推公式为:

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(O_1)$$

$$\alpha_{t+1}(j) = \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i) a_{ij}\right) b_j(O_{t+1})$$

其中，N 是状态数，a_{ij} 是从状态 i 到状态 j 的转移概率，$b_j(O_t)$ 是在状态 j 下观测到 O_t 的概率.

2.2 解码问题 (Decoding Problem)

给定模型参数和观测序列，我们希望找到最有可能的隐藏状态序列.

Viterbi 算法: 定义 $\delta_t(i)$ 为时刻 t 系统处于状态 i 并且最有可能的状态序列路径的概率.

递推公式为:

$$\delta_1(i) = \pi_i b_i(O_1)$$

$$\delta_{t+1}(j) = \max_i (\delta_t(i) a_{ij}) b_j(O_{t+1})$$

2.3 学习问题 (Learning Problem)

给定观测序列，我们希望调整模型参数使得观测序列概率最大.

Baum-Welch 算法 (一种 EM 算法):

定义前向概率 $\alpha_t(i)$ 和后向概率 $\beta_t(i)$. 后向概率表示从时刻 $t+1$ 到最终时刻的部分观测序列和状态序列的概率，给定在时刻 t 的状态是 i.

递推公式为:

$$\beta_T(i) = 1$$

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$

使用 α 和 β 值，我们可以估计模型参数 A 和 B.