ESTATÍSTICA

Distribuições Conjuntas de Probabilidade

Livro Eletrônico

GRAN CURSOS ONLINE

Sumário

DISTRIBUIÇÕES CONJUNTAS DE PROBABILIDADE

Olá, seja bem-vindo(a) a mais uma aula de Estatística. Nessa aula, vamos abordar as distribuições conjuntas de probabilidades. Nesse pdf, vamos tratar de distribuições que se aplicam a duas variáveis.

Existem as distribuições conjuntas (ou discretas) de probabilidade, que se aplicam a variáveis discretas. Essas tendem a ser mais comuns nas questões de provas e também é um tema bem mais fácil.

Por outro lado, as questões sobre funções densidades conjuntas (ou contínuas) de probabilidade requerem o uso de integrais duplas. Por muito tempo, elas foram exclusivas de provas na área de Estatística. Porém, desde 2021, o Cespe inovou, cobrando na prova da Polícia Federal e depois repetiu a dose na PC/SE.

Então, os tempos mudaram: é possível sim que caiam questões sobre densidades conjuntas na sua prova. Porém, eu acredito que a chance de isso acontece seja pequena.

Meu conselho seria priorizar nesse pdf a parte de distribuições discretas e depois partir para os temas de Estatística Inferencial (como Intervalo de Confiança, Testes de Hipóteses e Regressão Linear) – esses sim são os mais importantes no estudo da Estatística.

Eu aconselharia você a estudar as densidades contínuas de probabilidade conjuntas somente se: você já aprendeu a parte de Estatística Inferencial ou se você tem facilidade com matemática e já tem alguma habilidade para cálculo de integrais.

Feita a apresentação, vamos começar nessa aula? Mas não se esquece de me seguir no Instagram – @math.gran.

1. Distribuições Conjuntas de Probabilidade

Uma distribuição conjunta de probabilidade consiste na descrição das probabilidades de duas (ou mais) variáveis conjuntamente. Vejamos um exemplo de distribuição sobre os gostos de um grupo de pessoas sobre cachorros (entre não gosta, Rottweiler e Maltês) e matérias (entre Português, Matemática e Direito).

Nas linhas, vamos dispor as matérias e, nas colunas, vamos dispor as raças de cachorros favoritas.

Tabela 1: Exemplo de Distribuição Conjunta de Probabilidades

	Não Gosta	Rottweiler	Maltês
Português	0,050	0,075	0,125
Matemática	0,150	0,100	0,200

	Não Gosta	Rottweiler	Maltês
Direito	0,100	0,150	0,050

A Tabela 1 exibe uma distribuição conjunta discreta de probabilidades para duas variáveis aleatórias X e Y, ambas variáveis aleatórias discretas.

A variável X é a variável raças de cachorro favoritas, que pode assumir os valores {não gosta, rottweiler, maltês}. Já a variável Y é a variável matéria favorita, que pode assumir três valores {português, matemática, direito}.

Cada célula da tabela deve ser lida como uma probabilidade de intersecção. Por exemplo, qual a probabilidade de uma pessoa gostar de Matemática e de Rottweiler? Para isso, basta ler na tabela o ponto de encontro da coluna dos Rottweilers e da linha da Matemática.

	Não Gosta	Rottweiler	Maltês
Português	0,050	0,075	0,125
Matemática	0,150	**0,100**	0,200
Direito	0,100	0,150	0,050

Dessa forma, a probabilidade de uma pessoa gostar de Matemática e gostar de Rottweiler.

$$P(X = Matemática \cap Y = Rottweiler) = 0{,}100$$

É, ainda, bastante comum a representação com uma vírgula no lugar do sinal de intersecção, como mostrado a seguir.

$$P(X = Matemática, Y = Rottweiler) = 0{,}100$$

Em qualquer distribuição de probabilidades, a soma de todas as probabilidades associadas deve ser igual a 1. É o que observamos na Tabela 1.

$$S = 0{,}050 + 0{,}075 + 0{,}125 + 0{,}150 + 0{,}100 + 0{,}200 + 0{,}100 + 0{,}150 + 0{,}050 = 1{,}000$$

1.1. Probabilidades Marginais

A probabilidade marginal consiste em isolar uma das variáveis. Suponha, por exemplo, que queremos responder simplesmente à pergunta:

qual a probabilidade de uma pessoa gostar de matemática?

Nesse caso, devemos somar todas as probabilidades associadas à matemática, independentemente da raça de cachorro favorita.

Na tabela, a matemática foi associada à segunda linha. Então, basta somar todas as probabilidades da segunda linha. Assim, teremos:

Tabela 2: Cálculo das Probabilidades Marginais Associadas às Matérias

	Não Gosta	Rottweiler	Maltês	Probabilidade Marginal das Matérias
Português	0,050	0,075	0,125	0,050+0,075 + 0,125 **= 0,250**
Matemática	0,150	0,100	0,200	0,150 + 0,100 + 0,200 **= 0,450**
Direito	0,100	0,150	0,050	0,100 + 0,150 + 0,050 **= 0,300**

Desse modo, podemos concluir que a probabilidade de a matéria favorita de um elemento desse conjunto de pessoas ser:

- português é igual a 0,250 ou 25%;
- matemática é igual a 0,450 ou 45%;
- direito é igual a 0,300 ou 30%.

Matematicamente, podemos dizer que a probabilidade marginal é:

$$P(X = Matemática) = \ 0{,}150 + 0{,}100 + 0{,}200 = 0{,}45r0 = 45\%$$

Podemos, ainda, generalizar a definição matemática de probabilidade condicional:

$$P(X = x) = \sum_{todos\ os\ valores\ de\ y} P(X = x, Y = y)$$

Analogamente, podemos calcular as probabilidades marginais relacionadas a cada uma das raças favoritas de cachorro desse conjunto de pessoas.

	Não Gosta	Rottweiler	Maltês
Português	0,050	0,075	0,125
Matemática	0,150	0,100	0,200

	Não Gosta	Rottweiler	Maltês
Direito	0,100	0,150	0,050
Probabilidade Marginal das Raças	0,050 +0,150 +0,100 **= 0,300**	0,075 + 0,100 + 0,150 **= 0,325**	0,125 + 0,200 + 0,050 **= 0,375**

Cai na Prova

Direto do Concurso

001. (FCC/TRE/PR/ANALISTA JUDICIÁRIO/2015) A função de probabilidade conjunta das variáveis X e Y é dada por:

$$f(x, y) = \frac{1}{32}(x^2 + y^2), \quad x = 0, 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad y = 0, 1.$$

Nessas condições, a média de Y e P (X + Y = 3) são dados, respectivamente, por
a) 1 e 7/16.
b) 7/16 e 13/16.
c) 7/16 e 9/16.
d) 9/16 e 7/16.
e) 9/16 e 5/16.

Podemos montar a tabela com os valores fornecidos para as probabilidades.

	X – = 0	X – = 1	X – = 2	X – = 3
Y = 0	$\frac{1}{32} \cdot (0^2 + 0^2) = 0$	$\frac{1}{32} \cdot (1^2 + 0^2) = \frac{1}{32}$	$\frac{1}{32} \cdot (2^2 + 0^2) = \frac{4}{32}$	$\frac{1}{32} \cdot (3^2 + 0^2) = \frac{9}{32}$

	X – = 0	X – = 1	X – = 2	X – = 3
Y = 1	$\frac{1}{32}\cdot(0^2+1^2) = \frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}\cdot(1^2+1^2) = \frac{2}{32}$	$\frac{1}{32}\cdot(2^2+1^2) = \frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}\cdot(3^2+1^2) = \frac{10}{32}$

Em seguida, vamos calcular as probabilidades marginais de Y.

	X – = 0	X – = 1	X – = 2	X – = 3	
Y = 0	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{9}{32}$	$= \frac{7}{16}$
Y = 1	$\frac{1}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$= \frac{9}{16}$

$$P(Y=0) = 0 + \frac{1}{32} + \frac{4}{32} + \frac{9}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$

$$P(Y=1) = \frac{1}{32} + \frac{2}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

Então, podemos calcular a média de Y como o somatório dos valores de Y pela probabilidade associada.

$$E[Y] = \frac{7}{16}\cdot 0 + \frac{9}{16}\cdot 1 = \frac{9}{16}$$

Para que a soma X + Y seja igual a 3, existem duas possibilidades: X = 2 e Y = 1; ou X = 3 e Y = 0. Assim, temos:

$$P(X+Y=3) = P(X=2 \cap Y=1) + P(X=3 \cap Y=0)$$

$$P(X+Y=3) = \frac{5}{32} + \frac{9}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$

Letra d.

1.2. Probabilidades Condicionais

A probabilidade condicional consiste em responder à pergunta:

qual a probabilidade de uma pessoa gostar de matemática, sabendo que ela gosta de maltês?

Pela definição que já estudamos no capítulo de Probabilidades, podemos escrever:

$$P(X = \ Matemática \mid Y = \ Maltês) = \frac{P(X = Mat \cap Y = Maltês)}{P(Y = \ Maltês)}$$

Observe que o denominador corresponde justamente à probabilidade marginal de Y = maltês, que foi estudada no tópico anterior.

Desse modo, podemos recorrer à tabela de probabilidades estudada.

	Não Gosta	Rottweiler	Maltês
Português	0,050	0,075	0,125
Matemática	0,150	0,100	0,200
Direito	0,100	0,150	0,050
Probabilidade Marginal das Raças	**0,300**	**0,325**	**0,375**

Assim, temos:

$$P(X = \ Mat \mid Y = \ Maltês) = \frac{P(X = Mat \cap Y = Maltês)}{P(Y = \ Maltês)} = \frac{0{,}200}{0{,}375} = 0{,}533 = 53{,}3\%$$

Tome cuidado, portanto, para não confundir a probabilidade condicional com a probabilidade conjunta. Observe que a soma de todas as probabilidades condicionais em uma linha ou coluna são sempre iguais a 1. Vejamos:

	Probabilidade Conjunta P (X = x, Y = maltês)	Probabilidade Condicional (P X = x, Y = maltês)
Português	0,125	0,333

	Probabilidade Conjunta P (X = x, Y = maltês)	Probabilidade Condicional (P X = x, Y = maltês)
Matemática	0,200	0,533
Direito	0,050	0,133
	0,375	1

Observe dois pontos importantes:

- a soma de todas as probabilidades conjuntas em uma linha ou coluna é igual à probabilidade marginal;
- a soma de todas as probabilidades condicionais em uma linha ou coluna é igual a 1.

1.3. Independência

Duas variáveis são independentes quando uma não afeta a distribuição de probabilidade da outra. Nesse caso, a probabilidade pode ser calculada pelo produto das probabilidades marginais, isto é:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Por exemplo, voltando à distribuição mostrada na Tabela 1. Ela não traz o caso de duas variáveis independentes, porque:

$$P(X = Matemática, Y = Rottweiler) = 0{,}100$$

Porém, o produto das probabilidades marginais é:

$$P(X = Matemática) \cdot P(Y = Rottweiler) = 0{,}450.0{,}325 = 0{,}14625$$

Como a probabilidade tabelada é diferente do produto das probabilidades, temos que as duas variáveis não são independentes.

Mas, considerando as probabilidades marginais que foram calculadas previamente, que são:

X	P (X = x)	Y	P (Y = y)
Português	0,250	**Não Gosta**	0,300
Matemática	0,450	**Rottweiler**	0,325
Direito	0,300	**Maltês**	0,375

Considerando essas probabilidades marginais, a distribuição conjunta de probabilidades para que as duas variáveis fossem independentes deveria ser a que é mostrada na Tabela 3.

Tabela 3: Distribuição de Probabilidades Conjuntas para que X e Y fossem independentes

	Não Gosta	Rottweiler	Maltês
Português	0,250.0,300 = 0,075	0,250.0,325 = 0,08125	0,250.0,375 = 0,09375
Matemática	0,450.0,300 = 0,135	0,450.0,325 = 0,14625	0,450.0,375 = 0,16875
Direito	0,300.0,300 = 0,090	0,300.0,325 = 0,0975	0,300.0,375 = 0,1125

1.4. Valor Esperado

No caso de uma distribuição conjunta de duas variáveis aleatórias discretas e quantitativas. Tomemos o seguinte exemplo mostrado na 4.

Tabela 4: Exemplo de uma Distribuição Conjunta de Variáveis Quantitativas

	X – = –1	X – = 0	X – = +1
Y = 0	0,050	0,075	0,125
Y = 1	0,150	0,100	0,200
Y = 2	0,100	0,150	0,050

Vamos calcular as probabilidades marginais relacionadas às variáveis X e Y.

	X – = –1	X – = 0	X – = +1	P (Y = y)
Y = 0	0,050	0,075	0,125	**0,250**
Y = 1	0,150	0,100	0,200	**0,450**
Y = 2	0,100	0,150	0,050	**0,300**
P (X = x)	**0,300**	**0,325**	**0,375**	

Com base nas probabilidades marginais, podemos calcular os valores esperados tanto de X como de Y.

$$E[X] = 0{,}300.(-1) + 0{,}325.0 + 0{,}375.1 = 0{,}75$$

$$E[Y] = 0{,}250.(0) + 0{,}450.1 + 0{,}300.2 = 1{,}05$$

1.4.1. Valor esperado condicional

É possível também calcular o valor esperado da variável X quando Y for igual a 0, que é representado por E [X | Y = 0]. Nesse caso, basta tomar uma média aritmética ponderada das observações de X pelas probabilidades de intersecção (ou condicionais) quando Y for igual a zero. Retornemos à 5.

Tabela 5: Exemplo de uma Distribuição Conjunta de Variáveis Quantitativas

	X – = –1	X – = 0	X – = +1
Y = 0	0,050	0,075	0,125
Y = 1	0,150	0,100	0,200
Y = 2	0,100	0,150	0,050

$$E[X \mid Y = 0] = \frac{0{,}075.0 + 0{,}100.1 + 0{,}150.2}{0{,}075 + 0{,}100 + 0{,}150} = \frac{0 + 0{,}1 + 0{,}3}{0{,}325} = \frac{0{,}4}{0{,}325} \cong 1{,}23$$

Essa é uma prova também de que as variáveis X e Y não são independentes. No caso de duas variáveis aleatórias independentes, o valor esperado condicional é sempre igual ao valor esperado global.

1.5. Variância e Covariância

A variância e a covariância podem ser calculadas pelas suas respectivas definições ou ainda pelas expressões alternativas:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Já calculamos anteriormente os valores esperados E[X] e E[Y]. Podemos, então, calcular os valores esperados $E[X^2]$, $E[Y^2]$ e E[XY].

Para os valores esperados $E[X^2]$ e $E[Y^2]$, podemos calcular as probabilidades marginais. Para isso, vamos calcular os quadrados dos valores previstos na Tabela 4.

	$X^2 = 1$	$X^2 = 0$	$X^2 = +1$	P (Y = y)
$Y^2 = 0$	0,050	0,075	0,125	**0,250**
$Y^2 = 1$	0,150	0,100	0,200	**0,450**
$Y^2 = 4$	0,100	0,150	0,050	**0,300**
P(X = x)	**0,300**	**0,325**	**0,375**	

Assim, podemos calcular as médias dos quadrados das variáveis X e Y. Nesse caso, teremos:

$$E[X^2] = 0{,}300.1 + 0{,}325.0 + 0{,}375.1 = 0{,}675$$

$$E[Y^2] = 0{,}250.0 + 0{,}450.1 + 0{,}300.4 = 1{,}650$$

Assim, podemos calcular as variâncias:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 0{,}675 - (0{,}75)^2 = 0{,}675 - 0{,}5625 = 0{,}1125$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 1{,}65 - (1{,}05)^2 = 1{,}65 - 1{,}1025 = 0{,}5475$$

Para calcular a média do produto XY, podemos retornar à Tabela 4 e calcular o valor do produto XY em cada um dos pontos previstos nela.

	X – = –1	X – = 0	X – = +1
Y = 0	0,050 (XY = 0)	0,075 (XY = 0)	0,125 (XY = 0)
Y = 1	0,150 (XY = –1)	0,100 (XY = 0)	0,200 (XY = 1)
Y = 2	0,100 (XY = –2)	0,150 (XY = 0)	0,050 (XY = 2)

Então, usando a definição de valor esperado, temos:

$$E[XY] = [0{,}050 + 0{,}075 + 0{,}125 + 0{,}100 + 0{,}150] \cdot 0 + 0{,}200.1 + 0{,}150.(-1) + 0{,}050.2 + 0{,}100.(-2) = -0{,}05$$

Por fim, a covariância entre as duas variáveis pode ser calculada:

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = -0{,}05 - 0{,}75.1{,}05 = -0{,}8375$$

Agora, vamos prestar atenção a um fato muito importante sobre a relação entre covariância e independência de duas variáveis aleatórias.

No caso de duas variáveis aleatórias independentes, a covariância entre elas é sempre nula. Porém, **a recíproca não é verdadeira.** Isto é, o fato de duas variáveis terem covariância nula não significa necessariamente que elas sejam independentes.

Cai na Prova

Direto do Concurso

002. (CONSULPLAN/TSE/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICO/2012) A função de densidade conjunta para as variáveis aleatórias X e Y é:

X	Y = 1	Y = 2	Y = 4
0	0	0,2	0,6
1	0,2	0	0

A covariância entre X e Y é
a) −0,4.
b) −1,2.
c) −2,4.
d) −3,6.

Vamos calcular as probabilidades marginais e também os valores dos produtos XY.

	Y = 1	Y = 2	Y = 4	
X – = 0	0 (XY = 0)	0,2 (XY = 0)	0,6 (XY = 0)	**0,8**
X – = 1	0,2 (XY = 1)	0 (XY = 2)	0 (XY = 4)	**0,2**
	0,2	**0,2**	**0,6**	

Assim, podemos calcular as esperanças de X e Y usando o somatório dos valores associados a eles multiplicados pelas respectivas probabilidades marginais.

$$E[X] = 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}2$$

$$E[Y] = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}6 \cdot 4 = 0{,}2 + 0{,}4 + 2{,}4 = 3{,}0$$

Para calcular a esperança do produto, vamos montar a tabela de probabilidades.

XY	P(XY)
0	0+0,2+0,6 = 0,8
1	0,2
2	0
4	0

Então, usando os valores e as probabilidades calculadas acima para o produto XY, temos:

$$E[XY] = 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}2$$

Por fim, a covariância é igual à esperança dos produtos menos o produto das esperanças.

$$Cov\ (X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0{,}2 - 0{,}2.3 = 0{,}2 - 0{,}6 = -0{,}4$$

Letra a.

---

003. (FCC/TRF 2ª REGIÃO/ANALISTA JUDICIÁRIO/2012) Se X e Y tem função de probabilidade conjunta dada por:

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3}, & \text{se } (x,y) = (0,0);(0,1);(1,1) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{array} \right\}, \text{ então, a covariância } (2X,2Y) \text{ é igual a:}$$

a) 1/3
b) 2/3
c) 2/9
d) 4/9
e) 1/6

Vamos montar a tabela de probabilidades e calcular as probabilidades marginais.

	X – = 0	X – = 1	
Y = 0	1/3	0	**1/3**
Y = 1	1/3	1/3	**2/3**
	2/3	**1/3**	

Diante das probabilidades marginais, podemos calcular as esperanças de X e Y, usando o somatório dos valores possíveis para essas variáveis multiplicados pelas probabilidades associadas.

$$E[X] = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$E[Y] = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Podemos também calcular os valores associados aos produtos XY.

	X – = 0	X – = 1	
Y = 0	1/3 (XY = 0)	0 (XY = 0)	**1/3**
Y = 1	1/3 (XY = 0)	1/3 (XY = 1)	**2/3**
	2/3	**1/3**	

Então, podemos montar a tabela de probabilidades para o produto XY.

XY	P(XY)
0	2/3
1	1/3

Assim, podemos calcular a esperança de XY:

$$E[XY] = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

A covariância, por fim, é igual à esperança do produto menos o produto das esperanças.

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{3-2}{9} = \frac{1}{9}$$

Por fim, vamos utilizar as propriedades da covariância: os termos multiplicativos podem ser retirados e saem multiplicando a covariância.

$$Cov(2X, 2Y) = 2.2. Cov(X, Y) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

Letra d.

2. Integrais Duplas

O tema das Distribuições Conjuntas e Contínuas de Probabilidade é um dos temas de pior custo-benefício da estatística. É raramente cobrado em provas e é bastante difícil, porque requer o cálculo de integrais duplas.

Por esse motivo, pode ser interessante para você parar esse pdf e ir para o próximo de Estatística e só retornar aqui quando você já estiver se sentindo seguro com os temas da Estatística Inferencial, que tendem a cair com muito mais frequência.

Caso você já tenha estudado os demais tópicos da Estatística ou caso você já tenha familiaridade com integrais e se sinta apto a estudar essa parte da matéria, vamos continuar o nosso pdf.

Para o estudo das distribuições conjuntas e contínuas de probabilidade, é necessário o uso de integrais duplas. Por isso, vamos aprendê-las nessa seção.

Uma integral dupla consiste em uma integral em duas variáveis. Ela pode ser representada da seguinte forma:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy$$

2.1. Técnica da Separação de Variáveis

Vamos aprendê-las. Para facilitar esse entendimento, podemos colocar um par de chaves no meio da integral dupla.

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy = 1$$

Essa notação acima significa que a variável **x** varia no intervalo [a, b] e que a variável **y** varia no intervalo [c, d]. Perceba que é muito importante não trocar a ordem entre as variáveis **x** e **y** e seus limites de integração, pois isso modifica o valor da integral.

Para realizar o cálculo da integral em **dx**, você deve considerar a variável **y** como se fosse uma constante numérica. Vejamos um exemplo.

$$S = \int_0^4 \int_0^1 xy\,dx\,dy = ?$$

Observe que, dentro da integral, podemos considerar a variável **y** como uma constante multiplicativa. Assim, teremos que a integral de y. x em dx será yx²/2. Então, basta fazer **x** variar entre 0 e +1.

$$S = \int_0^4 \left\{ \frac{yx^2}{2} \Bigg|_0^1 \right\} dy$$

Em seguida, vamos substituir os limites de integração para a variável **x**.

$$S = \int_0^4 \left\{ \frac{y.1^2}{2} - \frac{y.0^2}{2} \right\} dy = \int_0^4 \frac{y}{2} dy$$

Observe que chegamos a uma integral simples somente em função da variável **y.** Assim, temos:

$$S = \int_0^4 \frac{y}{2} dy = \frac{y^2}{4} \Bigg|_0^4 = \frac{4^2}{4} - \frac{0^2}{4} = \frac{16}{4} - 0 = 4$$

Viu que as integrais duplas não são nada do outro mundo? É só ter um pouco mais de atenção e prática.

Vale notar que é possível também que os limites de uma variável de integração sejam expressos em função da outra. Vejamos um exemplo.

$$S = \int_0^4 \int_0^y xy \, dx \, dy = ?$$

Assim como tínhamos feito no exemplo anterior, basta realizar a integração normalmente na variável **x.** A integral de xy será, portanto, yx²/2.

$$S = \int_0^4 \left\{ \frac{yx^2}{2} \Bigg|_0^y \right\} dy = ?$$

Mas, note que, ao substituir os limites de integração, devemos utilizar o valor de y em um dos extremos. Assim, yx²/2 ficará y.y²/2 = y³/2. Veja:

$$S = \int_0^4 \left\{ \frac{yx^2}{2} \Bigg|_0^y \right\} dy = \int_0^4 \left\{ \frac{y.y^2}{2} - \frac{y.0^2}{2} \right\} dy = \int_0^4 \frac{y^3}{2} dy$$

Por fim, chegamos a uma integral simples em y. Pela regra da integral do polinômio, a integral de y^3 é $y^4/4$. Como temos a integral de $y^3/2$, essa integral será $y^4/8$. Assim, temos:

$$S = \int_0^4 \frac{y^3}{2} dy = \frac{y^4}{8} \Big|_0^4 = \frac{4^4}{8} - \frac{0^4}{8} = \frac{256}{8} = 64$$

2.2. Exercícios sobre Integrais Duplas

Calcule as seguintes integrais duplas.

$$\int_0^1 \int_0^2 (5y^3) dxdy$$

Para resolver integrais duplas, devemos fazer primeiro a integral mais interna, neste caso com relação a dx, para depois resolvermos a integral externa, neste caso com relação a dy.
Logo, precisamos resolver inicialmente a seguinte integral:

$$\int_0^2 (5y^3) dx$$

Como a integral está em relação a x e o termo $5y^3$ não é dependente de x, este funcionará como uma constante para x. Logo:

$$\int_0^2 (5y^3) dx = 5y^3 \cdot \int_0^2 (1) dx$$

$$\int_0^2 (5y^3) dx = 5y^3 \cdot (x) \Big|_0^2$$

Lembre-se de que a integral é em relação a dx, então substituiremos os limites de integração somente na respectiva variável. Temos:

$$\int_0^2 (5y^3) dx = [5y^3 \cdot (2)] - [5y^3 \cdot (0)]$$

$$\int_0^2 (5y^3) dx = [10y^3] - [(0)]$$

$$\therefore \int_0^2 (5y^3) dx = 10y^3$$

Agora, basta substituir o resultado encontrado na integral mais externa, isto é, em relação a dy. Observe como fica:

$$\int_0^1 (10y^3)dy$$

Para resolver, lembre-se da regra básica de integração:

$$\boxed{\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

Assim:

$$\int_0^1 (10y^3)dy = \left[10 \cdot \left(\frac{y^{3+1}}{3+1}\right)\right]_0^1$$

$$\int_0^1 (10y^3)dy = \left[10 \cdot \left(\frac{y^4}{4}\right)\right]_0^1$$

Substituindo os limites de integração, encontramos o resultado final:

$$\int_0^1 (10y^3)dy = \left[10 \cdot \frac{(1^4)}{4}\right] - \left[10 \cdot \frac{(0^4)}{4}\right]$$

$$\int_0^1 (10y^3)dy = \left[10 \cdot \frac{(1)}{4}\right] - \left[10 \cdot \frac{(0)}{4}\right]$$

$$\int_0^1 (10y^3)dy = \left[10 \cdot \frac{(1)}{4}\right] - [0]$$

$$\int_0^1 (10y^3)dy = \frac{10}{4}$$

$$\therefore \int_0^1 (10y^3)dy = \frac{5}{2}$$

$$\int_0^2 \int_0^1 (3y^2 + 6x)dydx$$

Primeiramente, precisamos resolver a integral mais interna que está relacionada ao dy:

$$\int_0^1 (3y^2 + 6x)dy$$

Lembre-se da regra básica de integração:

$$\boxed{\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

Além disso, o termo 6x funciona como uma constante em relação a y. Logo, a resolução será desse trecho será:

$$\int_0^1 (3y^2 + 6x)dy = \left[3 \cdot \left(\frac{y^{2+1}}{2+1}\right) + (6x) \cdot y\right]_0^1$$

$$\int_0^1 (3y^2 + 6x)dy = \left[3 \cdot \left(\frac{y^3}{3}\right) + (6x) \cdot y\right]_0^1$$

$$\int_0^1 (3y^2 + 6x)dy = [y^3 + 6xy]_0^1$$

Como a integral é em relação a dy, substituiremos os limites de integração somente na respectiva variável. Temos:

$$\int_0^1 (3y^2 + 6x)dy = [(1)^3 + 6x \cdot (1)] - [(0)^3 + 6x \cdot (0)]$$

$$\int_0^1 (3y^2 + 6x)dy = [1 + 6x] - [0 + 0]$$

$$\therefore \int_0^1 (3y^2 + 6x)dy = [1 + 6x]$$

Agora, basta substituir o resultado encontrado na integral mais externa. Observe como fica:

$$\int_0^2 (1 + 6x)dx$$

Resolvendo a integral, temos:

$$\int_0^2 (1+6x\,)dx = \left[(1)\cdot x + 6\cdot\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)\right]_0^2$$

$$\int_0^2 (1+6x\,)dx = \left[x + 6\cdot\left(\frac{x^{2}}{2}\right)\right]_0^2$$

$$\int_0^2 (1+6x\,)dx = [x+3x^2]_0^2$$

Por fim, substituindo os limites de integração:

$$\int_0^2 (1+6x\,)dx = [(2)+3\cdot(2)^2] - [(0)+3\cdot(0)^2]$$

$$\int_0^2 (1+6x\,)dx = [2+12] - [0+0]$$

$$\therefore \int_0^2 (1+6x\,)dx = 14$$

$$\int_0^1 \int_{-2}^0 (5^y + \mathrm{x})dxdy$$

Primeiramente, precisamos resolver a integral mais interna que está relacionada ao dx:

$$\int_{-2}^0 (5^y + \mathrm{x})dx$$

Para resolver essa integral, precisamos lembrar da regra básica de integração:

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

Além disso, o termo 5^y funciona como uma constante para a variável x. Assim, temos a seguinte resolução:

$$\int_{-2}^{0}(5^y + \mathrm{x})dx = \left[(5^y)\cdot x + \left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)\right]_{-2}^{0}$$

$$\int_{-2}^{0}(5^y + \mathrm{x})dx = \left[5^y\cdot x + \left(\frac{x^{2}}{2}\right)\right]_{-2}^{0}$$

Como a integral é em relação a dx, substituiremos os limites de integração somente na variável x. Temos:

$$\int_{-2}^{0}(5^y + \mathrm{x})dx = \left[5^y\cdot(0) + \left(\frac{(0)^2}{2}\right)\right] - \left[5^y\cdot(-2) + \left(\frac{(-2)^2}{2}\right)\right]$$

$$\int_{-2}^{0}(5^y + \mathrm{x})dx = [(0)+(0)] - \left[5^y\cdot(-2) + \left(\frac{(-2)^2}{2}\right)\right]$$

$$\int_{-2}^{0}(5^y + \mathrm{x})dx = -\left[5^y\cdot(-2) + \left(\frac{(-2)^2}{2}\right)\right]$$

$$\int_{-2}^{0}(5^y + \mathrm{x})dx = -\left[-2\cdot 5^y + \left(\frac{4}{2}\right)\right]$$

$$\int_{-2}^{0}(5^y + \mathrm{x})dx = -[-2\cdot 5^y + 2]$$

$$\int_{-2}^{0}(5^y + \mathrm{x})dx = 2\cdot 5^y - 2$$

$$\therefore \int_{-2}^{0}(5^y + \mathrm{x})dx = 2\cdot(5^y - 1)$$

Agora, basta substituir o resultado na integral com relação a dy. Observe como fica:

$$\int_{0}^{1}(2\cdot(5^y - 1))dy$$

Retirando a constante da integral obtemos:

$$\int_{0}^{1}(2\cdot(5^y - 1))dy = 2\cdot\int_{0}^{1}(5^y - 1)dy$$

Para resolver, lembre-se da fórmula para integral de funções exponenciais:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

Logo, a integral ficará:

$$\int_0^1 (2 \cdot (5^y - 1))dy = 2 \cdot \left[\frac{5^y}{\ln(5)} - y\right]_0^1$$

Por fim, substituindo os limites de integração, obtemos o resultado:

$$\int_0^1 (2 \cdot (5^y - 1))dy = 2 \cdot \left[\left(\frac{5^{(1)}}{\ln(5)} - (1)\right) - \left(\frac{5^{(0)}}{\ln(5)} - (0)\right)\right]$$

$$\int_0^1 (2 \cdot (5^y - 1))dy = 2 \cdot \left[\left(\frac{5}{\ln(5)} - (1)\right) - \left(\frac{1}{\ln(5)} - (0)\right)\right]$$

$$\int_0^1 (2 \cdot (5^y - 1))dy = 2 \cdot \left[\left(\frac{5}{\ln(5)} - 1\right) - \left(\frac{1}{\ln(5)}\right)\right]$$

$$\int_0^1 (2 \cdot (5^y - 1))dy = 2 \cdot \left[\frac{5}{\ln(5)} - \frac{1}{\ln(5)} - 1\right]$$

$$\int_0^1 (2 \cdot (5^y - 1))dy = 2 \cdot \left[\frac{4}{\ln(5)} - 1\right]$$

$$\therefore \int_0^1 (2 \cdot (5^y - 1))dy = \frac{8}{\ln(5)} - 2$$

$$\int_0^4 \int_0^5 (4xy)dxdy$$

Primeiramente, precisamos resolver a integral mais interna que está relacionada ao dx:

$$\int_0^5 (4xy)dx$$

Perceba que o termo 4y funciona como uma constante para a variável x. Logo, basta utilizar a seguinte fórmula:

$$\boxed{\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

Assim, a primeira integral ficará:

$$\int_0^5 (4xy)dx = \left[4y \cdot \left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)\right]_0^5$$

$$\int_0^5 (4xy)dx = \left[4y \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^5$$

$$\int_0^5 (4xy)dx = [2y \cdot (x^2)]_0^5$$

Como a integral é em relação a dx, substituiremos os limites de integração somente na variável x. Temos:

$$\int_0^5 (4xy)dx = [2y \cdot (5^2)] - [2y \cdot (0^2)]$$

$$\int_0^5 (4xy)dx = [2y \cdot (25)] - [2y \cdot (0)]$$

$$\therefore \int_0^5 (4xy)dx = 50y$$

Agora, basta substituir o resultado na integral com relação a dy. Observe:

$$\int_0^4 (50y)dy$$

Analogamente às regras de integração ditas anteriormente, temos:

$$\int_0^4 (50y)dy = \left[50 \cdot \left(\frac{y^{1+1}}{1+1}\right)\right]_0^4$$

$$\int_0^4 (50y)dy = \left[50 \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)\right]_0^4$$

$$\int_0^4 (50y)dy = [25 \cdot (y^2)]_0^4$$

Por fim, substituindo os limites de integração, obtemos o resultado:

$$\int_0^4 (50y)dy = [25 \cdot (4^2)] - [25 \cdot (0^2)]$$

$$\int_0^4 (50y)dy = [25 \cdot (16)] - [25 \cdot (0)]$$

$$\therefore \int_0^4 (50y)dy = 400$$

$$\int_0^3 \int_{-1}^0 (2x^3 + 4y^3 + y)dydx$$

Primeiramente, precisamos resolver a integral mais interna que está relacionada ao dy:

$$\int_{-1}^0 (2x^3 + 4y^3 + y)dy$$

Perceba que o termo $2x^3$ funciona como uma constante para a variável y. Além disso, lembre-se de utilizar a seguinte fórmula:

$$\boxed{\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

Assim, a integral mais interna ficará:

$$\int_{-1}^0 (2x^3 + 4y^3 + y)dy = \left[(2x^3) \cdot y + 4 \cdot \left(\frac{y^{3+1}}{3+1}\right) + \left(\frac{y^{1+1}}{1+1}\right)\right]_{-1}^0$$

$$\int_{-1}^0 (2x^3 + 4y^3 + y)dy = \left[(2x^3) \cdot y + 4 \cdot \left(\frac{y^4}{4}\right) + \left(\frac{y^2}{2}\right)\right]_{-1}^0$$

$$\int_{-1}^0 (2x^3 + 4y^3 + y)dy = \left[2x^3 \cdot (y) + (y^4) + \left(\frac{y^2}{2}\right)\right]_{-1}^0$$

Como a integral é em relação a dy, substituiremos os limites de integração somente na variável y. Temos, então:

$$\int_{-1}^{0}(2x^3+4y^3+y)dy=\left[2x^3\cdot(0)+(0^4)+\left(\frac{0^2}{2}\right)\right]-\left[2x^3\cdot(-1)+(-1)^4+\left(\frac{(-1)^2}{2}\right)\right]$$

$$\int_{-1}^{0}(2x^3+4y^3+y)dy=[(0)+(0)+(0)]-\left[2x^3\cdot(-1)+(-1)^4+\left(\frac{(-1)^2}{2}\right)\right]$$

$$\int_{-1}^{0}(2x^3+4y^3+y)dy=-\left[-2x^3+1+\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\int_{-1}^{0}(2x^3+4y^3+y)dy=-\left[-2x^3+\frac{3}{2}\right]$$

$$\therefore\int_{-1}^{0}(2x^3+4y^3+y)dy=2x^3-\frac{3}{2}$$

Agora, basta substituir o resultado obtido na integral mais externa, isto é, com relação a dx. Observe:

$$\int_{0}^{3}\left(2x^3-\frac{3}{2}\right)dx$$

Resolvendo, temos:

$$\int_{0}^{3}\left(2x^3-\frac{3}{2}\right)dx=\left[2\cdot\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right)-\frac{3}{2}\cdot(x)\right]_0^3$$

$$\int_{0}^{3}\left(2x^3-\frac{3}{2}\right)dx=\left[2\cdot\left(\frac{x^4}{4}\right)-\frac{3}{2}\cdot(x)\right]_0^3$$

$$\int_{0}^{3}\left(2x^3-\frac{3}{2}\right)dx=\left[\frac{(x^4)}{2}-\frac{3}{2}\cdot(x)\right]_0^3$$

Por fim, substituindo os limites de integração, obtemos o resultado:

$$\int_0^3 \left(2x^3 - \frac{3}{2}\right) dx = \left[\frac{(3^4)}{2} - \frac{3}{2}\cdot(3)\right] - \left[\frac{(0^4)}{2} - \frac{3}{2}\cdot(0)\right]$$

$$\int_0^3 \left(2x^3 - \frac{3}{2}\right) dx = \left[\frac{(3^4)}{2} - \frac{3}{2}\cdot(3)\right] - [0 - 0]$$

$$\int_0^3 \left(2x^3 - \frac{3}{2}\right) dx = \frac{(3^4)}{2} - \frac{9}{2}$$

$$\int_0^3 \left(2x^3 - \frac{3}{2}\right) dx = \frac{81}{2} - \frac{9}{2}$$

$$\int_0^3 \left(2x^3 - \frac{3}{2}\right) dx = \frac{81 - 9}{2}$$

$$\int_0^3 \left(2x^3 - \frac{3}{2}\right) dx = \frac{72}{2}$$

$$\therefore \int_0^3 \left(2x^3 - \frac{3}{2}\right) dx = 36$$

I

$$\int_0^3 \int_0^2 (3x^2 \cdot e^{3y}) dx dy$$

Primeiramente, precisamos resolver a integral mais interna que está relacionada ao dx:

$$\int_0^2 (3x^2 \cdot e^{3y})\, dx$$

Perceba que o termo e^{3y} funciona como uma constante para a variável x. Para resolver a integral, precisamos relembrar a seguinte fórmula:

$$\boxed{\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

Assim, a primeira integral ficará:

$$\int_0^2 (3x^2 \cdot e^{3y})\,dx = e^{3y} \cdot \int_0^2 (3x^2)\,dx$$

$$\int_0^2 (3x^2 \cdot e^{3y})\,dx = e^{3y} \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)\right]_0^2$$

$$\int_0^2 (3x^2 \cdot e^{3y})\,dx = e^{3y} \cdot \left[3 \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^2$$

$$\int_0^2 (3x^2 \cdot e^{3y})\,dx = e^{3y} \cdot [x^3]_0^2$$

Como a integral é em relação a dx, substituiremos os limites de integração somente na variável x. Temos:

$$\int_0^2 (3x^2 \cdot e^{3y})\,dx = e^{3y} \cdot [(2)^3 - (0)^3]$$

$$\int_0^2 (3x^2 \cdot e^{3y})\,dx = e^{3y} \cdot [8 - 0]$$

$$\therefore \int_0^2 (3x^2 \cdot e^{3y})\,dx = 8 \cdot e^{3y}$$

Agora, basta substituir o resultado obtido na integral mais externa, isto é, com relação a dy. Observe:

$$\int_0^3 (8 \cdot e^{3y})dy$$

Essa nova integral pode ser resolvida através de uma substituição simples de variáveis. Relembre:

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

onde: $u = g(x)$
$du = g'(x)dx$

Assim, faremos:

$$u = 3y$$

$$du = 3dy, \text{então } dy = \frac{du}{3}$$

Substituindo essas novas variáveis na integral dada, temos:

$$8 \cdot \int_0^3 (e^{3y})dy = 8 \cdot \int_0^3 (e^u)\frac{du}{3}$$

Colocando a constante para fora da integral:

$$8 \cdot \int_0^3 (e^u)\frac{du}{3} = \frac{8}{3} \cdot \int_0^3 (e^u)du$$

Sabendo que a integral de e^u tem como resposta o próprio e^u, encontramos que:

$$\frac{8}{3} \cdot \int_0^3 (e^u)du = \frac{8}{3} \cdot e^u$$

Voltando à variável antes da substituição, encontramos:

$$\int_0^3 (8 \cdot e^{3y})dy = \left[\frac{8}{3} \cdot e^{3y}\right]_0^3$$

Por fim, substituindo os limites de integração, obtemos a resposta:

$$\int_0^3 (8 \cdot e^{3y})dy = \left[\frac{8}{3} \cdot e^{3y}\right]_0^3$$

$$\int_0^3 (8 \cdot e^{3y})dy = \left[\frac{8}{3} \cdot e^{3\cdot(3)}\right] - \left[\frac{8}{3} \cdot e^{3\cdot(0)}\right]$$

$$\int_0^3 (8 \cdot e^{3y})dy = \left[\frac{8}{3} \cdot e^9\right] - \left[\frac{8}{3} \cdot e^0\right]$$

$$\int_0^3 (8 \cdot e^{3y})dy = \left[\frac{8}{3} \cdot e^9\right] - \left[\frac{8}{3} \cdot 1\right]$$

$$\therefore \int_0^3 (8 \cdot e^{3y})dy = \frac{8}{3} \cdot (e^9 - 1)$$

$$\int_1^4 \int_0^{y^2} (y + 9)dxdy$$

Primeiramente, precisamos resolver a integral mais interna que está relacionada ao dx:

$$\int_0^{y^2} (y + 9)\ dx$$

O termo (y + 9) funciona como uma constante para a variável x. Logo, a resolução dessa integral é bastante simples. Observe:

$$\int_0^{y^2} (y+9)\,dx = [(y+9)\cdot x]_0^{y^2}$$

Como a integral é em relação a dx, substituiremos os limites de integração somente na variável x. Temos:

$$\int_0^{y^2} (y+9)\,dx = [(y+9)\cdot(y^2)] - [(y+9)\cdot(0^2)]$$

$$\int_0^{y^2} (y+9)\,dx = [(y+9)\cdot(y^2)]$$

$$\therefore \int_0^{y^2} (y+9)\,dx = y^3 + 9y^2$$

Agora, substituindo o resultado da integral interna na integral externa, temos:

$$\int_1^4 (y^3 + 9y^2)\,dy$$

Para resolvê-la, lembre-se da regra básica de integração:

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

Resolvendo a integral, temos:

$$\int_1^4 (y^3 + 9y^2)\,dy = \left[\left(\frac{y^{3+1}}{3+1}\right) + 9\cdot\left(\frac{y^{2+1}}{2+1}\right)\right]_1^4$$

$$\int_1^4 (y^3 + 9y^2)\,dy = \left[\left(\frac{y^4}{4}\right) + 9\cdot\left(\frac{y^3}{3}\right)\right]_1^4$$

$$\int_1^4 (y^3 + 9y^2)\,dy = \left[\left(\frac{y^4}{4}\right) + 3\cdot(y^3)\right]_1^4$$

Por fim, substituindo os limites de integração encontraremos o resultado. Observe:

$$\int_1^4 (y^3 + 9y^2)\,dy = \left[\frac{(4^4)}{4} + 3\cdot(4^3)\right] - \left[\frac{(1^4)}{4} + 3\cdot(1^3)\right]$$

$$\int_1^4 (y^3 + 9y^2)\,dy = [(4^3) + 3\cdot(4^3)] - \left[\frac{(1)}{4} + 3\cdot(1)\right]$$

$$\int_1^4 (y^3 + 9y^2)\,dy = [(1+3)\cdot(4^3)] - \left[\frac{1}{4} + 3\right]$$

$$\int_1^4 (y^3 + 9y^2)\,dy = [\,4\cdot(4^3)] - \left[\frac{1}{4} + 3\right]$$

$$\int_1^4 (y^3 + 9y^2)\,dy = 256 - \frac{1}{4} - 3$$

$$\int_1^4 (y^3 + 9y^2)\,dy = 253 - \frac{1}{4}$$

Fazendo o MMC, obtemos o resultado final:

$$\int_1^4 (y^3 + 9y^2)\,dy = \frac{4\cdot 253 - 1}{4}$$

$$\int_1^4 (y^3 + 9y^2)\,dy = \frac{1012 - 1}{4}$$

$$\therefore \int_1^4 (y^3 + 9y^2)\,dy = \frac{1011}{4}$$

$$\int_0^2 \int_0^{2y} (x^2 + \mathrm{y}^2) dxdy$$

Primeiro resolveremos a integral mais interna, que está relacionada ao dx. Observe:

$$\int_0^{2y} (x^2 + \mathrm{y}^2)\,dx$$

Lembre-se da fórmula.

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Além disso, lembre-se de que o termo funciona como uma constante para a variável x. Resolvendo a integral, temos:

$$\int_0^{2y} (x^2 + y^2)\, dx = \left[\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + y^2 \cdot (x)\right]_0^{2y}$$

$$\int_0^{2y} (x^2 + y^2)\, dx = \left[\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + y^2 \cdot (x)\right]_0^{2y}$$

$$\int_0^{2y} (x^2 + y^2)\, dx = \left[\left(\frac{x^3}{3}\right) + y^2 \cdot (x)\right]_0^{2y}$$

Como a integral é em relação a dx, substituiremos os limites de integração somente na variável x. Temos:

$$\int_0^{2y} (x^2 + y^2)\, dx = \left[\frac{(2y)^3}{3} + y^2 \cdot (2y)\right] - \left[\frac{(0)^3}{3} + y^2 \cdot (0)\right]$$

$$\int_0^{2y} (x^2 + y^2)\, dx = \left[\frac{(2y)^3}{3} + y^2 \cdot (2y)\right] - [0 + 0]$$

$$\int_0^{2y} (x^2 + y^2)\, dx = \left[\frac{(2^3 \cdot y^3)}{3} + y^2 \cdot (2y)\right]$$

$$\int_0^{2y} (x^2 + y^2)\, dx = \left[\frac{(8 \cdot y^3)}{3} + 2 \cdot y^3\right]$$

Colocando o termo em evidência:

$$\int_0^{2y} (x^2 + y^2)\, dx = \left(\frac{8}{3} + 2\right) \cdot y^3$$

Agora, fazendo o MMC encontramos:

$$\int_0^{2y} (x^2 + y^2)\, dx = \left(\frac{1 \cdot 8 + 3 \cdot 2}{3}\right) \cdot y^3$$

$$\int_0^{2y} (x^2 + y^2)\, dx = \left(\frac{8 + 6}{3}\right) \cdot y^3$$

$$\therefore \int_0^{2y} (x^2 + y^2)\, dx = \frac{14}{3} \cdot y^3$$

Com esse resultado, podemos resolver a segunda integral:

$$\int_0^{2} \left(\frac{14}{3} \cdot y^3\right) dy$$

$$\int_0^{2} \left(\frac{14}{3} \cdot y^3\right) dy = \left[\frac{14}{3} \cdot \left(\frac{y^{3+1}}{3+1}\right)\right]_0^2$$

$$\int_0^{2} \left(\frac{14}{3} \cdot y^3\right) dy = \left[\frac{14}{3} \cdot \left(\frac{y^4}{4}\right)\right]_0^2$$

$$\int_0^{2} \left(\frac{14}{3} \cdot y^3\right) dy = \left[\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{y^4}{2}\right)\right]_0^2$$

$$\int_0^{2} \left(\frac{14}{3} \cdot y^3\right) dy = \left[\frac{7}{6} \cdot (y^4)\right]_0^2$$

Por fim, substituindo os limites de integração, encontramos o seguinte resultado:

$$\int_0^2 \left(\frac{14}{3} \cdot y^3\right) dy = \left[\frac{7}{6} \cdot (2^4)\right] - \left[\frac{7}{6} \cdot (0^4)\right]$$

$$\int_0^2 \left(\frac{14}{3} \cdot y^3\right) dy = \left[\frac{7}{6} \cdot (2^4)\right] - [0]$$

$$\int_0^2 \left(\frac{14}{3} \cdot y^3\right) dy = \left[\frac{7}{6} \cdot (16)\right]$$

$$\int_0^2 \left(\frac{14}{3} \cdot y^3\right) dy = \frac{112}{6}$$

$$\therefore \int_0^2 \left(\frac{14}{3} \cdot y^3\right) dy = \frac{56}{3}$$

$$\int_0^1 \int_0^{4y} \left(e^{y^2}\right) dx dy$$

Primeiramente, precisamos resolver a integral mais interna que está relacionada ao dx:

$$\int_0^{4y} \left(e^{y^2}\right) dx$$

Perceba que todo o termo e^{y^2} funciona como uma constante para a variável x. Assim, podemos colocar esse termo para fora da integral. Veja como fica:

$$e^{y^2} \cdot \int_0^{4y} (1)\, dx$$

Logo, a primeira integral terá como resultado:

$$\int_0^{4y} \left(e^{y^2}\right) dx = e^{y^2} \cdot [x]_0^{4y}$$

Como a integral é em relação a dx, substituiremos os limites de integração somente na variável x. Então:

$$\int_0^{4y} \left(e^{y^2}\right) dx = e^{y^2} \cdot [(4y) - (0)]$$

$$\therefore \int_0^{4y} \left(e^{y^2}\right) dx = 4y \cdot e^{y^2}$$

A partir desse resultado, construímos a próxima integral, agora com relação a dy. Observe:

$$\int_0^{1} \left(4y \cdot e^{y^2}\right) dy = 4 \cdot \int_0^{1} \left(e^{y^2} \cdot y\right) dy$$

Para resolver essa integral, precisamos aplicar o método da substituição simples. Relembre:

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

onde: $u = g(x)$

$du = g'(x)dx$

Assim, faremos:

$$u = y^2$$

$$du = (2y)\, dy, \qquad \text{então } (y\, dy) = \frac{du}{2}$$

Substituindo essas novas variáveis na integral dada, temos:

$$\int_0^{1} \left(4y \cdot e^{y^2}\right) dy = 4 \cdot \int_0^{1} (e^{u}) \frac{du}{2}$$

Colocando a constante ½ para fora da integral:

$$\int_0^{1} \left(4y \cdot e^{y^2}\right) dy = 2 \cdot \int_0^{1} (e^{u}) du$$

Sabendo que a integral de e^u tem como resposta o próprio e^u, encontramos que:

$$\int_0^{1} \left(4y \cdot e^{y^2}\right) dy = [2 \cdot e^{u}]_0^1$$

Voltando à variável antes da substituição, encontramos:

$$\int_0^{1} \left(4y \cdot e^{y^2}\right) dy = \left[2 \cdot e^{y^2}\right]_0^1$$

Por fim, substituindo os limites de integração, obtemos:

$$\int_0^1 \left(4y \cdot e^{y^2}\right) dy = \left[2 \cdot e^{(1)^2}\right] - \left[2 \cdot e^{(0)^2}\right]$$

$$\int_0^1 \left(4y \cdot e^{y^2}\right) dy = \left[2 \cdot e^1\right] - \left[2 \cdot e^0\right]$$

Sabendo que, o resultado final da integral dupla é:

$$\int_0^1 \left(4y \cdot e^{y^2}\right) dy = [2 \cdot e] - [2 \cdot 1]$$

$$\therefore \int_0^1 \left(4y \cdot e^{y^2}\right) dy = 2 \cdot (e - 1)$$

1. $\int_0^4 \int_{-1}^4 (4x + 4)^4 + y^4 \, dxdy.$

Primeira, vamos calcular a integral mais interna. Temos:

$$\int_{-1}^4 (4x + 4)^4 + y^4 \, dx$$

Será explicada uma das formas de resolver esse problema. Observe que podemos separar em duas integrais:

$$\int_{-1}^4 (4x + 4)^4 + y^4 \, dx = \int_{-1}^4 (4x + 4)^4 dx + \int_{-1}^4 y^4 \, dx \qquad (I)$$

O termo funciona como uma constante para a variável x. Logo, a segunda integral $\int_{-1}^4 y^4 \, dx$ é fácil de resolver. Observe:

$$\int_{-1}^4 y^4 \, dx = [y^4 \cdot x]_{-1}^4$$

$$\int_{-1}^4 y^4 \, dx = [y^4 \cdot (4)] - [y^4 \cdot (-1)]$$

$$\int_{-1}^4 y^4 \, dx = 4 \cdot (y^4) + (y^4)$$

$$\therefore \int_0^4 y^4 \, dx = 5y^4 \qquad (II)$$

Agora, para a integral $\int_{-1}^{4}(4x+4)^4 dx$, basta fazer uma substituição simples de variáveis. Relembre esse método:

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

$$\boxed{\begin{array}{l} \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \\ \text{onde:} \quad u = g(x) \\ \qquad\qquad du = g'(x)dx \end{array}}$$

Considere, então a seguinte substituição:

$$u = 4x + 4$$

Assim, a derivada de u será:

$$du = 4dx, \qquad então\ dx = \frac{du}{4}$$

Substituindo essas novas variáveis na integral:

$$\int_{-1}^{4}(4x+4)^4\,dx = \int_{-1}^{4}(u)^4\,\frac{du}{4}$$

Retirando a constante para fora da integral, temos:

$$\int_{-1}^{4}(4x+4)^4\,dx = \frac{1}{4}\cdot\int_{-1}^{4}(u)^4\,du$$

Agora, usando a regra básica da integração:

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

Obtemos:

$$\int_{-1}^{4}(4x+4)^4\,dx = \left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{u^{4+1}}{4+1}\right)\right]_{-1}^{4}$$

$$\int_{-1}^{4}(4x+4)^4\,dx = \left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{u^5}{5}\right)\right]_{-1}^{4}$$

$$\int_{-1}^{4}(4x+4)^4\,dx = \left[\frac{u^5}{20}\right]_{-1}^{4}$$

Voltando à variável antes da substituição, temos:

$$\int_{-1}^{4} (4x+4)^4\, dx = \left[\frac{(4x+4)^5}{20}\right]_{-1}^{4}$$

Como a integral é em relação a dx, substituiremos os limites de integração somente na variável x. Observe:

$$\int_{-1}^{4} (4x+4)^4\, dx = \left[\frac{(4\cdot(4)+4)^5}{20}\right] - \left[\frac{(4\cdot(-1)+4)^5}{20}\right]$$

$$\int_{-1}^{4} (4x+4)^4\, dx = \left[\frac{(16+4)^5}{20}\right] - \left[\frac{(-4+4)^5}{20}\right]$$

$$\int_{-1}^{4} (4x+4)^4\, dx = \left[\frac{(20)^5}{20}\right] - \left[\frac{(0)^5}{20}\right]$$

$$\therefore \int_{-1}^{4} (4x+4)^4\, dx = (20)^4 \quad (III)$$

Assim, voltando para a equação I, temos que esta será a soma das equações II e III. Logo:

$$\int_{-1}^{4} (4x+4)^4 + y^4\, dx = (20)^4 + 5y^4$$

Com esse resultado, podemos resolver a integral mais externa, isto é, a integral em relação a dy. Observe como fica:

$$\int_{0}^{4} (20)^4 + 5y^4\, dy$$

Resolvendo:

$$\int_{0}^{4} (20)^4 + 5y^4\, dy = \left[(20)^4\cdot y + 5\cdot\left(\frac{y^{4+1}}{4+1}\right)\right]_0^4$$

$$\int_{0}^{4} (20)^4 + 5y^4\, dy = \left[(20)^4\cdot y + 5\cdot\left(\frac{y^{5}}{5}\right)\right]_0^4$$

$$\int_{0}^{4} (20)^4 + 5y^4\, dy = [(20)^4\cdot y + (y^5)]_0^4$$

Por fim, substituindo os limites de integração, obtemos:

$$\int_0^4 (20)^4 + 5y^4\, dy = [20^4 \cdot (4) + (4^5)] - [20^4 \cdot (0) + (0^5)\,]$$

$$\int_0^4 (20)^4 + 5y^4\, dy = [20^4 \cdot (4) + (4^5)] - [0]$$

$$\int_0^4 (20)^4 + 5y^4\, dy = [20^4 \cdot (4) + (4^5)]$$

Até aqui, já temos a resposta do problema. Porém, podemos decompor o número 20 para simplificar ainda mais:

$$\int_0^4 (20)^4 + 5y^4\, dy = [(5 \cdot 4)^4 \cdot (4) + (4^5)]$$

$$\int_0^4 (20)^4 + 5y^4\, dy = [(5^4 \cdot 4^4) \cdot (4) + (4^5)]$$

$$\int_0^4 (20)^4 + 5y^4\, dy = [(5^4 \cdot 4^5) + (4^5)]$$

$$\int_0^4 (20)^4 + 5y^4\, dy = 4^5 \cdot (5^4 + 1)$$

$$\int_0^4 (20)^4 + 5y^4\, dy = (2^2)^5 \cdot (5^4 + 1)$$

$$\therefore \int_0^4 (20)^4 + 5y^4\, dy = 2^{10} \cdot (5^4 + 1)$$

Agora que você já aprendeu como funcionam as integrais duplas, vamos nos aprofundar nas distribuições conjuntas de probabilidade.

3. Densidades Conjuntas Contínuas de Probabilidade

As funções densidade de probabilidade conjuntas se aplicam a variáveis contínuas e são muito semelhantes ao que já estudamos nos capítulos anteriores.

As ferramentas para as analisar são semelhantes às que foram estudadas no capítulo sobre Momentos de Variáveis Aleatórias, com a diferença que serão necessárias integrais duplas.

3.1. Condição de Validade

Assim como vimos no capítulo de Momentos de Variáveis Aleatórias, a integral da função distribuição conjunta sobre todo o seu domínio deve ser igual a 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

Tomemos como exemplo a seguinte densidade de probabilidades, em que γ é uma constante:

$$f(x,y) = \begin{cases} \gamma xy & , se\ 0 \leq x \leq 2\ e\ 1 \leq y \leq 3 \\ 0 & , em\ outros\ casos \end{cases}$$

Qual o valor da constante γ para que a função densidade acima seja uma distribuição válida?

O modo mais simples de resolver esse tipo de problema é calculando o valor da integral sem a constante gama.

$$S = \int_{1}^{3}\int_{0}^{2} xy\ dxdy$$

Nesse caso, note que:

$$\gamma . S = 1 \therefore \gamma = \frac{1}{S}$$

Então, vamos calcular a integral S.

$$S = \int_{1}^{3} \left\{ \frac{yx^2}{2} \Big|_{0}^{2} \right\} dy = \int_{1}^{3} \left\{ \frac{y.2^2}{2} - \frac{y.0^2}{2} \right\} dy = \int_{1}^{3} 2ydy$$

Podemos, então, integrar a função 2y, notando que a integral de y é y²/2. Então, a integral de 2y será y².

$$S \int_{1}^{3} 2ydy = y^2 \Big|_{1}^{3} = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

Então, a constante será:

$$\gamma = \frac{1}{S} = \frac{1}{8}$$

Portanto, a função densidade de probabilidades conjunta é:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{8} & , se\ 0 \leq x \leq 2\ e\ 1 \leq y \leq 3 \\ 0 & , em\ outros\ casos \end{cases}$$

Cai na Prova

Direto do Concurso

004. (CESGRANRIO/IBGE/TECNOLOGISTA – ESTATÍSTICO/2013) A função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x,y) = \begin{cases} c(y-x)^2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A constante c do modelo conjunto vale:

a) 1
b) 4
c) 6
d) 12
e) 16

Devemos observar que os limites de integração para a variável **x** são [0,y] e que os limites de integração para a variável **y** são [0,1].

$$\int_0^1 \int_0^y c.(y-x)^2\,dx\ dy = 1$$

$$c \cdot \int_0^1 \int_0^y (y-x)^2\,dx\ dy = 1$$

Passando o **c** para o outro lado, teremos:

$$\therefore \int_0^1 \int_0^y (y-x)^2 \, dx \; dy = \frac{1}{c}$$

Podemos, então, fazer a integral da densidade de probabilidade sem a constante de integração **c**.

$$S = \int_0^1 \int_0^y (y-x)^2 \, dx \; dy = \frac{1}{c}$$

Podemos integrar para a variável x, usando a integral do polinômio. Sabemos que:

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}$$

Então:

$$\int_0^y (y-x)^2 \, dx = \frac{(y-x)^3}{3}\bigg|_0^y = \frac{(y-y)^3}{3} - \frac{(y-0)^3}{3} = \frac{0^3}{3} - \frac{y^3}{3} = -\frac{y^3}{3}$$

Façamos, então, a segunda integral:

$$\int_0^1 \frac{y^3}{3} \, dy = \frac{y^4}{3.4}\bigg|_0^1 = \frac{1^4}{12} - \frac{0^4}{12} = \frac{1}{12}$$

Retornemos à distribuição de probabilidade original.

$$S = \int_0^1 \int_0^y (y-x)^2 \, dx \; dy = \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{c} \therefore c = 12$$

Letra d.

3.2. Cálculo de Probabilidades

Da mesma forma como fazíamos nas densidades contínuas comuns de probabilidade, o cálculo de uma probabilidade qualquer deve ser feita integrando sobre todo o espaço pedido.

Por exemplo, vamos retornar à função densidade em estudo na seção anterior.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{8} & ,se\ 0 \leq x \leq 2\ e\ 1 \leq y \leq 3 \\ 0 & ,em\ outros\ casos \end{cases}$$

Qual seria a probabilidade de X < 1 e Y > 2. Em outras, palavras, qual $P(X < 1 \cap Y > 2)$?

Para isso, devemos integrar a função densidade de probabilidade usando os limites de integração pedidos.

$$P = \frac{1}{8} \cdot \int_{2}^{3} \int_{0}^{1} xy\, dx\, dy$$

Vamos fazer a primeira integral. A integral de x dx é x²/2. Assim, temos:

$$\int_{0}^{1} xy\, dx = \frac{x^2 y}{2} \Big|_{0}^{1} = \frac{(1^2 - 0^2)y}{2} = \frac{y}{2}$$

Então, façamos a segunda integral.

$$P = \frac{1}{8} \cdot \int_{2}^{3} \frac{y}{2} dy = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{2}^{3} = \frac{y^2}{32} \Big|_{2}^{3} = \frac{(3^2 - 2^2)}{32} = \frac{9-4}{32} = \frac{5}{32}$$

Portanto, a probabilidade pedida é 5/32.

Cai na Prova

Direto do Concurso

005. (PUC/PR/ESTATÍSTICO/2012) Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade de probabilidade conjunta dada por:

f (x, y) = (x + y), se 0 < x < 1 e 0 < y < 1

0 nos demais casos

A probabilidade conjunta de que X seja menor do que 0,5 e Y seja menor do que 0,6 é:

a) 0,165

b) 0,523

c) 0,326
d) 0,655
e) 0,052

Para obter a probabilidade, basta integrar sobre o espaço desejado.

$$P = \int_0^{0,6}\int_0^{0,5} (x+y)dxdy = \int_0^{0,6}\int_0^{0,5} xdxdy + \int_0^{0,6}\int_0^{0,5} ydxdy$$

Observe que a integral de x dx é x²/2 e que a integral de y dx é yx, porque y deve ser visto como uma constante.

$$\int_0^{0,5} xdx + \int_0^{0,5} ydx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,5} + xy\Big|_0^{0,5} = \frac{(0,5)^2 - 0^2}{2} + (0,5-0)y = \frac{0,25}{2} + 0,5y$$

Em seguida, vamos integrar novamente.

$$P = \int_0^{0,6} [0,125 + 0,5y]dy = 0,125 \cdot (0,6-0) + \frac{0,5y^2}{2}\Big|_0^{0,6}$$

$$P = 0,125.0,6 + 0,25 \cdot [(0,6)^2 - 0^2] = 0,075 + 0,25.0,36$$

$$P = 0,075 + 0,09 = 0,165$$

Letra a.

---

006. (FCC/TRT – 3ª REGIÃO (MG)/ANALISTA JUDICIÁRIO/2015) Sabe-se que a função de distribuição conjunta das variáveis X e Y é dada por

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + y^2x}{2}, & \text{se} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Nessas condições, P (0,3 < X < 0,7) é, em %, igual a
a) 36.
b) 30.
c) 42.
d) 22.
e) 40.

Essa questão foi bastante estranha. Primeiramente, a distribuição fornecida não é válida, porque a sua integral não é igual a 1. Vejamos:
Vamos obter a distribuição marginal de X, integrando sobre todo o espaço na variável Y.

$$f(x) = \int_0^1 \left[\frac{x^2y + y^2x}{2}\right] dy = \frac{y^2x^2}{4}\Big|_0^1 + \frac{y^3x}{6}\Big|_0^1$$

$$f(x) = \frac{x^2.(1^2 - 0^2)}{4} + \frac{x(1^3 - 0^2)}{6} = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{6}$$

E, agora, vamos fazer a integral em **dx.**

$$S = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{4}\right] dx + \int_0^1 \left[\frac{x}{6}\right] dx = \frac{x^3}{12}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{12}\Big|_0^1 = \frac{1^3 - 0^3}{12} + \frac{1^2 - 0^2}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Portanto, a integral sobre todo o domínio da função é 1/6, e não 1 como deveria ser. Desse modo, a distribuição correta é a probabilidade ser multiplicada por 6, chegando a:

$$f(x, y) = 3[x^2y + xy^2]\,, para\ 0 < x < 1\ e\ 0 < y < 1$$

Por fim, para calcular a probabilidade P (0,3 < X < 0,7), basta integrar nesse intervalo. Além disso, vamos multiplicar por 6 a distribuição marginal obtida, em razão do argumento mostrado acima.

$$P = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left[\frac{6x^2}{4}\right] dx + \int_0^1 [x]dx$$

$$P = \frac{x^3}{2}\Big|_{0,3}^{0,7} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0,3}^{0,7} = \frac{(0{,}7^3 - 0{,}3^3)}{2} + \frac{(0{,}7^2 - 0{,}3^2)}{2}$$

$$P = \frac{(0{,}343 - 0{,}027)}{2} + \frac{(0{,}49 - 0{,}09)}{2} = \frac{0{,}716}{2} \cong 0{,}358 = 35{,}8\%$$

Portanto, o mais próximo seria letra A (36%).
Letra a.

---

007. (CONSULPLAN/TRF 2ª REGIÃO/ANALISTA JUDICIÁRIO/2017) Seja f(x, y) uma função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y, sua função de densidade de probabilidade é:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)} & 0 < x < \infty \text{ e } 0 < y < \infty \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de P (X < Y)?

a) 1/2.
b) 1/3.
c) 1/4.
d) 2/3.

A probabilidade P (X < Y) deve ser calculada impondo que o limite de integração de x é [0, y], pois 0 < x < y.

$$P = \int_0^{+\infty} \int_0^{y} 2.e^{(-2x+y)}\,dxdy = \int_0^{+\infty} \int_0^{y} 2.e^{-y}.e^{-2x}\,dxdy$$

Para fazer a integração de uma exponencial, basta dividir pelo coeficiente que acompanha o x nessa potência. Isto é, a integral de e^{-2x} será $e^{-2x}/(-2)$.

Então, a primeira integral será:

$$-e^{-y}e^{-2x}\Big|_0^y = -e^{-y}.e^{-2y} - (-e^{-y}.e^{0}) = e^{-y} - e^{-3y}$$

Integrando novamente agora em y, temos:

$$P = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy - \int_0^{+\infty} e^{-3y}\,dy = -e^{-y}\Big|_0^{\infty} - \left[-\frac{e^{-3y}}{3}\Big|_0^{\infty}\right]$$

Observe que a integral de e^{-3y} é $e^{-3y}/(-3)$, de forma semelhante ao que fizemos no passo anterior. Por fim, fazendo as contas com cuidado, temos:

$$P = [0 - (-1)] - \frac{1}{3}[0 - (-e^{0})] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Letra d.

3.3. Densidade Marginal de Probabilidades

De forma semelhante ao que vimos nas distribuições conjuntas e discretas, para obter a função densidade de probabilidade marginal da variável X, devemos integrar a função densidade de probabilidade somente em relação a **x** em todo o espaço.

$$f_y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

Vejamos o caso da distribuição utilizada no exemplo anterior. Note que y varia entre 1 e 3. Então, devemos integrar a função somente em y nesse intervalo de integração.

$$f_y(x) = \int_1^3 \frac{xy}{8}dy = \frac{xy^2}{16}\Bigg|_1^3 = \frac{x.3^2}{16} - \frac{x.1^2}{16} = \frac{9x - x}{16} = \frac{8x}{16} = \frac{x}{2}$$

Portanto, a função densidade marginal da variável aleatória X é $f_y(x) = x/2$. Note que a integral em todo o espaço dessa distribuição marginal será igual a 1. Isso mostra que a densidade marginal é também uma distribuição de probabilidades válida.

$$f_y(x) = \int_0^2 \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{0^2}{4} = \frac{4}{4} - 0 = 1$$

Vale notar que a densidade marginal da variável X deve ser uma função exclusiva de **x**, enquanto a densidade marginal da variável Y deve ser uma função exclusiva de **y.**

Para continuarmos treinando, vamos calcular a densidade marginal para a variável Y. Para isso, devemos integrar a função sobre toda a variável X no seu domínio que é entre 0 e 2.

$$f_x(y) = \int_0^2 \frac{xy}{8}dx = \frac{x^2y}{16}\Bigg|_0^2 = \frac{y.2^2}{16} - \frac{x.0^2}{16} = \frac{4y - 0y}{16} = \frac{4y}{16} = \frac{y}{4}$$

3.3.1. Valor esperado

Um problema muito comum é calcular um valor esperado de uma função qualquer g (X,Y) das variáveis X e Y. Nesse caso, basta integrar sobre todo o domínio da densidade de probabilidade o produto da função **g** pela função densidade de probabilidade conjunta. Matematicamente, temos:

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\cdot F(x,y)\,dx\,dy$$

Quando temos uma função exclusiva de uma das variáveis (X ou Y), podemos ainda utilizar suas respectivas densidades marginais de probabilidades. Nesse caso, temos a vantagem de não precisar mais de uma integral dupla. Em vez disso, podemos usar uma integral simples. Isto é:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_Y(x)\, dx$$

$$E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \cdot f_x(y)\ dy$$

Eu sei que pode ter ficado um pouco confuso para você, mas você verá que, na realidade, chegamos a uma situação relativamente tranquila de calcular. Por exemplo, para o valor esperado das variáveis X e Y, teríamos:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_Y(x)\, dx$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_x(y)\ dy$$

É muito comum também precisarmos calcular a variância das distribuições X e Y. Nesse caso, precisamos calcular E[X²] e E[Y²].

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_y(x)\ dx$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_x(y)\ dy$$

Vamos a um exemplo numérico para entendermos melhor. vamos considerar a seguinte distribuição de probabilidades:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{8} & ,se\ 0 \leq x \leq 2\ e\ 1 \leq y \leq 3 \\ 0 & ,em\ outros\ casos \end{cases}$$

Qual seria o valor esperado de X e o valor esperado de Y?

Vale notar que, nos passos anteriores, já calculamos as densidades marginais de probabilidades para as variáveis X e Y. Neles, obtivemos:

$$f_y(x) = \frac{x}{2}$$

$$f_x(y) = \frac{y}{4}$$

Vamos, então, utilizar a densidade marginal de X para calcular o valor esperado de X.

$$E[X] = \int x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} \cdot dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx$$

Usando a integral do polinômio, sabemos que a integral de x^2 dx é $x^3/3$. Portanto, a integral de $x^2/2$ é $x^3/6$.

$$E[X] = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 = \frac{(2^3 - 0^3)}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Podemos fazer o mesmo para Y.

$$E[Y] = \int y \cdot f(y) \cdot dy = \int_1^3 y \cdot \frac{y}{4} \cdot dy = \int_1^3 \frac{y^2}{4} dx = \left.\frac{y^3}{12}\right|_1^3$$

$$E[Y] = \frac{(3^3 - 1^3)}{12} = \frac{27 - 1}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}$$

Podemos ir além também. Por exemplo, se quiséssemos calcular as variâncias de X e Y, precisaríamos primeiro calcular os valores esperados de $E[X^2]$ e $E[Y^2]$. Assim, teríamos:

$$E[X^2] = \int x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} \cdot dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = \left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2 = \frac{(2^4 - 0^4)}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

$$E[Y^2] = \int y^2 \cdot f(y) \cdot dy = \int_1^3 y^2 \cdot \frac{y}{4} \cdot dy = \int_1^3 \frac{y^3}{4} dx = \left.\frac{y^4}{16}\right|_1^3$$

$$E[Y^2] = \frac{(3^4 - 1^4)}{16} = \frac{(81 - 1)}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

Então, usando a propriedade de que a variância é igual à média dos quadrados menos o quadrado da média, teremos:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{18-16}{9} = \frac{2}{9}$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 5 - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = 5 - \frac{169}{36} = \frac{180-169}{36} = \frac{11}{36}$$

Vamos treinar com algumas questões de provas?

Cai na Prova

Direto do Concurso

008. (AOCP/IBGE/ANALISTA CENSITÁRIO/MÉTODOS QUANTITATIVOS/ ADAPTADA/2019) Sendo X e Y duas variáveis aleatórias contínuas com função de densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x+y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e considerando as variáveis aleatórias X e Y e a função de densidade conjunta, julgue os seguintes itens.

$$f_X(x) = \frac{1}{2}(x+1),\ 0 \le x \le 1.$$

A distribuição de densidade marginal para X pode obtida integrando sobre Y em todo o domínio [0,2]. Observe que a integral de 2x em y é 2xy, porque x se comporta como uma constante para y. Por outro lado, a integral de y dy é y²/2, que é a típica integral do polinômio.

$$f(x) = \frac{1}{4}\int_0^2 (2x + y)dy = \frac{1}{4} \cdot 2xy \Big|_0^2 + \frac{y^2}{8}\Big|_0^2$$

$$f(x) = \frac{2x.(2-0)}{4} + \frac{(2^2 - 0^2)}{8} = x + \frac{4}{8} = x + \frac{1}{2}$$

Portanto, a afirmação está incorreta.
Errado.

---

009. (AOCP/IBGE/ANALISTA CENSITÁRIO/MÉTODOS QUANTITATIVOS/ ADAPTADA/2019) Sendo X e Y duas variáveis aleatórias contínuas com função de densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x + y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e considerando as variáveis aleatórias X e Y e a função de densidade conjunta, julgue os seguintes itens.

$$f_Y(y) = \frac{1}{4}(2 + y),\ 0 \le y \le 2.$$

Analogamente, a densidade marginal para Y pode ser obtida integrando-se em X sobre todo o domínio, que é [0,1].

$$g(y) = \frac{1}{4}\int_0^1 (2x + y)dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{4} \cdot xy\Big|_0^1 = \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 + \frac{xy}{4}\Big|_0^1$$

$$g(y) = \frac{(1^2 - 0)}{4} + \frac{(1-0)y}{4} = \frac{1}{4} + \frac{y}{4} = \frac{(y+1)}{4}$$

Errado.

---

010. (FCC/DPE/SP/ESTATÍSTICO/2015) A função de densidade conjunta da variável aleatória bidimensional (X, Y) é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x + 2y - 4xy, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

Nessas condições, a variância de Y é igual a

a) 3/2.
b) 1/6.
c) 1/5.
d) 2/5.
e) 1/12.

Vamos obter a densidade de probabilidade marginal para a variável Y. Para isso, devemos integrar em **x.**

$$\int_0^1 [2x + 2y - 4xy]dx = x^2 \Big|_0^1 + 2xy \Big|_0^1 - 2x^2y \Big|_0^1$$

$$f(y) = (1^2 - 0^2) + 2y.(1 - 0) - 2y(1^2 - 0^2)$$

$$f(y) = 1 + 2y - 2y = 1$$

Desse modo, Y segue distribuição uniforme no intervalo [0,1]. Assim, a variância de Y é dada por:

$$Var(Y) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

Letra e.

011. (FADESP/UEPA/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR/ESTATÍSTICA/ ADAPTADA/2020) Suponha que a função densidade de probabilidade (fdp) conjunta da variável (X, Y) seja dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\{-y\} & \text{para } x > 0, y > x \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Julgue o seguinte item: a função de densidade marginal de X tem distribuição exponencial com parâmetro de escala igual a 1.

Vamos analisar as afirmações.

I – Para obter a densidade marginal de Y, basta realizar a integração na variável X em todo o domínio da função. Para realizar a integral, devemos observar que:

- pela definição do enunciado, os limites de integração de y são [x, +∞);
- a integral de e^{-y} é $-e^{-y}$;
- $e^{-\infty}$ tende a zero.

$$F_Y(x) = \int_x^{+\infty} e^{-y}dy = -e^{-y}\Big|_x^{+\infty} = -0 - (-e^{-x}) = +e^{-x}$$

Portanto, é sim uma função exponencial com λ = 1. Afirmação correta.

Certo.

---

012. (FADESP/UEPA/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR/ESTATÍSTICA/ ADAPTADA/2020) Suponha que a função densidade de probabilidade (fdp) conjunta da variável (X, Y) seja dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp\{-y\} & \text{para } x > 0, y > x \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Julgue o seguinte item: II – X e Y são independentes.

Como X está dentro dos limites de integração de Y, as duas variáveis não são independentes. Outra forma de resolver esse problema é usando a definição. Podemos calcular a distribuição de probabilidade marginal de Y. Para isso, basta integrar sobre todo o domínio da variável X. Devemos observar que os limites de integração de x são [0, y], porque a restrição da densidade de probabilidade é x > 0 e y > x, o que significa que x < y.

$$g(y) = \int_0^y e^{-y}\,dx = e^{-y}\cdot(y-0) = y.e^{-y}$$

Assim, o produto das densidades marginais é:

$$f(x)g(y) = (e^{-x})\cdot(ye^{-y}) = ye^{-(x+y)}$$

Observe que isso é diferente da função densidade de probabilidade original. Portanto, as duas variáveis não são independentes.

Afirmação incorreta.

Errado.

3.3.2. Covariância

Para calcular a covariância entre duas variáveis X e Y, podemos utilizar a ideia de que a covariância é igual à esperança do produto menos o produto das esperanças. Ademais, a esperança do produto é:

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x,y)dx\,dy$$

Tomemos o exemplo da seguinte densidade de probabilidade:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{8} & , se\ 0 \leq x \leq 2\ e\ 1 \leq y \leq 3 \\ 0 & , em\ outros\ casos \end{cases}$$

Assim,

$$E[XY] = \int_1^3 \int_0^2 xy \cdot \left(\frac{xy}{8}\right) dx\,dy = \frac{1}{8} \int_1^3 \int_0^2 x^2y^2 dx\,dy$$

Podemos realizar a primeira integral em dx, notando que a integral de x² é igual a x³/3.

$$\frac{1}{8} \cdot \int_0^2 x^2y^2 dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^3y^2}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{(2^3 - 0^3).y}{3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8y^2}{3} = \frac{y^2}{3}$$

Agora, façamos a segunda integral em dy:

$$\int_1^3 \frac{y^2}{3} dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{y^3}{3}\Bigg|_1^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3^3 - 1^3)}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(27 - 1)}{3} = \frac{26}{9}$$

Utilizando a definição de covariância como a esperança do produto menos o produto das esperanças e lembrando que já havíamos calculado antes as esperanças de X e Y, temos:

$$Cov\,(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{26}{9} - \frac{4}{3} \cdot \frac{13}{6} = \frac{26}{9} - \frac{26}{9} = 0$$

Portanto, a covariância entre as duas variâncias é igual a 0.

Cai na Prova

Direto do Concurso

013. (AOCP/IBGE/ANALISTA CENSITÁRIO/MÉTODOS QUANTITATIVOS/ ADAPTADA/2019) Sendo X e Y duas variáveis aleatórias contínuas com função de densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x+y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

E considerando as variáveis aleatórias X e Y e a função de densidade conjunta, julgue os seguintes itens.
O coeficiente de correlação entre X e Y é igual a 0 (zero).

O coeficiente de correlação pode ser obtido como a esperança do produto menos o produto das esperanças.

$$E[XY] = \int_0^2 \int_0^1 xy\,dxdy = \frac{1}{4} \cdot \int_0^2 \int_0^1 2x^2y + xy^2\,dxdy$$

$$E[XY] = \frac{1}{4} \cdot \int_0^2 \int_0^1 2x^2y\,dxdy + \frac{1}{4} \cdot \int_0^2 \int_0^1 xy^2\,dxdy$$

Primeiramente vamos integrar em x, observando que a integral de $2x^2$ é $2x^3/3$ e que a integral de xy^2 é $x^2y^2/2$, usando a integral do polinômio. Lembre-se de que, na integral dupla, a variável y deve ser considerada como uma constante. Fazendo a primeira integral, temos:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2x^3y}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{x^3y}{6}\Big|_0^1 + \frac{x^2y^2}{8}\Big|_0^1 = \frac{(1^3-0^3)y}{6} + \frac{(1^2-0^2)y^2}{8} = \frac{y}{6} + \frac{y^2}{8}$$

Em seguida, façamos a segunda integral, dessa vez em y, usando o intervalo de integração [0, 2].

$$E[XY] = \int_0^2 \left(\frac{y}{6} + \frac{y^2}{8}\right) dy = \frac{y^2}{12}\Bigg|_0^2 + \frac{y^3}{24}\Bigg|_0^2$$

$$E[XY] = \frac{(2^2 - 0^2)}{12} + \frac{(2^3 - 0^3)}{24} = \frac{4}{12} + \frac{8}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

A seguir, podemos calcular as esperanças das variáveis X e Y usando as densidades marginais de probabilidade.

$$E[X] = \int_0^1 x\, f(x)dx = \int_0^1 x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{x}{2} dx$$

A integral de x^2 é $x^3/3$ e a integral de x é $x^2/2$, portanto, a integral de $x/2$ é $x^2/4$.

$$E[X] = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{x^2}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1^3 - 0^3}{3} + \frac{1^2 - 0^2}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$$

Façamos o mesmo para Y usando sua densidade marginal, integrando em todo o seu domínio, que é [0,2].

$$E[Y] = \int_0^2 y\, g(y)dx = \int_0^2 y \cdot \left(\frac{y+1}{4}\right) dy = \frac{1}{4} \cdot \int_0^2 y^2 dy + \frac{1}{4} \cdot \int_0^2 y\, dy$$

$$E[Y] = \frac{y^3}{4.3}\Bigg|_0^2 + \frac{y^2}{4.2}\Bigg|_0^2 = \frac{(2^3 - 0^2)}{12} + \frac{(2^2 - 0^2)}{8} = \frac{8}{12} + \frac{4}{8} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$$

Por fim, a covariância é dada pela esperança do produto menos o produto das esperanças.

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{2}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{6} = \frac{2}{3} - \frac{49}{72} = \frac{48-49}{72} = -\frac{1}{72}$$

Afirmação incorreta.

Errado.

3.4. Função Densidade Condicional de Probabilidades

A probabilidade condicional pode ser obtida como a razão entre a probabilidade de intersecção e a probabilidade marginal da variável condicionante.

$$f(x \mid Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_X(y)}$$

Vejamos um exemplo. Tomando a distribuição já estudada anteriormente:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{8} & , se\ 0 \leq x \leq 2\ e\ 1 \leq y \leq 3 \\ 0 & , em\ outros\ casos \end{cases}$$

Qual a função densidade de probabilidade de X, sabendo que Y = 2?

Para isso, precisamos obter a densidade marginal de Y.

$$f_X(y) = \int_0^2 \frac{xy}{8} dx = \frac{yx^2}{16} \Big|_0^2 = \frac{y.2^2}{16} - \frac{y.0^2}{16} = \frac{4y}{16} - 0 = \frac{y}{4}$$

Então, basta dividir:

$$f(x \mid Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_X(y)} = \frac{xy/8}{y/4} = \frac{x}{2}$$

Nesse caso, a densidade condicional de probabilidades foi igual à densidade marginal para a variável X. Quando isso acontece, dizemos que as variáveis X e Y são independentes.

Vejamos um outro caso de densidade de probabilidades em que as variáveis não sejam independentes. Vamos utilizar a seguinte função densidade de probabilidades conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot (2x + y) & , se\ 0 \leq x \leq 1\ e\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , em\ outros\ casos \end{cases}$$

Nesse caso, qual seria a densidade conjunta P [X | Y = y]?

Nesse caso, precisamos obter as densidades marginais para Y. Para isso, basta integrar sobre a variável x em todo o domínio, que é [0,1]. Assim, teremos:

$$f_x(y) = \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 (2x + y)\, dx = \int_0^1 \frac{4x}{3} dx + \int_0^1 \frac{2y}{3} dx$$

$$f_x(y) = \frac{2x^2}{3}\Big|_0^1 + \frac{2xy}{3}\Big|_0^1 = \frac{2.(1^2 - 0^2)}{3} + \frac{2.(1-0).y}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2y}{3} = \frac{2}{3} \cdot (y+1)$$

Assim, usando a definição,

$$f(X\,|Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_x(y)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot (2x+y)}{\frac{2}{3} \cdot (y+1)} = \frac{2x+y}{y+1}$$

3.4.1 Esperança condicional

Podemos também calcular a esperança condicional de X dado Y. É importante observar que, nesse caso, a esperança será uma função de Y.

Para isso, devemos aplicar a definição de valor esperado usando a densidade condicional de probabilidade.

$$E[X\,|\,Y] = \int x \cdot f(x|Y)\, dx = \int_0^1 x \cdot \frac{(2x+y)}{y+1}\, dx = \int_0^1 \frac{2x^2}{y+1}\, dx + \int_0^1 \frac{xy}{y+1}\, dx$$

A integral pode parecer complicada, mas, na realidade, nem é tanto, porque y é considerado como uma constante em relação a x na hora de integrar. Aí, nesse caso, podemos tratá-lo como uma simples constante multiplicativa.

$$E[X\,|\,Y] = \frac{2}{y+1} \cdot \int_0^1 x^2\, dx + \frac{y}{y+1} \cdot \int_0^1 x\, dx$$

Por fim, vamos utilizar a integral polinomial: a integral de x dx é $x^2/2$ e a integral de x^2 dx é $x^3/3$. Assim, teremos:

$$E[X \mid Y] = \frac{2}{y+1} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{y}{y+1} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1$$

$$E[X \mid Y] = \frac{2}{y+1} \cdot \frac{(1^3 - 0^3)}{3} + \frac{y}{y+1} \cdot \frac{(1^2 - 0^2)}{2} = \frac{2}{3(y+1)} + \frac{y}{2(y+1)}$$

$$E[X \mid Y] = \frac{4+3y}{6(y+1)}$$

Se, por acaso, fosse pedida a esperança condicional em relação a um valor específico de Y, por exemplo, qual a esperança de X sabendo que Y = 0,2? Nesse caso, podemos simplesmente substituir acima.

$$E[X \mid Y = 0{,}2] = \frac{4+3y}{6(y+1)} = \frac{4+3.0{,}2}{6.(0{,}2+1)} = \frac{4+1{,}2}{6.1{,}2} = \frac{5{,}2}{7{,}2} = \frac{13}{18}$$

3.5. Independência

Da mesma forma que vimos nas distribuições conjuntas discretas de probabilidades, duas variáveis aleatórias são independentes quando suas distribuições de probabilidade condicionais são iguais às distribuições marginais.

Vimos, no caso anterior, um exemplo disso. A distribuição marginal de X é $f_Y(x) = x/2$, que é a mesma distribuição condicional f (x | Y = 2).

A forma mais simples de reconhecer quando duas variáveis são independentes é quando ela atende a duas condições:

- os limites de integração são retangulares, isto é, uma variável não interfere nos limites de integração da outra;
- a distribuição conjunta pode ser expressa como o produto de uma função exclusiva de **x** e uma função exclusiva de **y**, como mostrado a seguir.

$$f(x,y) = F(x) \cdot G(y)$$

Por exemplo, a função distribuição:

$$f(x,y) = \frac{xy}{8}$$

Podemos tomar as próprias distribuições marginais como funções de separação dessa distribuição de probabilidades.

$$F(x) = \frac{x}{2} \; e \; G(y) = \frac{y}{4}$$

Observe, então, que a distribuição f (x,y) = xy/8 pode ser expressa como o produto das duas funções acima. É por isso que, nesse caso, as variáveis aleatórias X e Y são independentes.

Algumas propriedades das distribuições independentes:

- o produto das densidades marginais é igual à função de probabilidade total, isto é:

$$F(x,y) = f_y(x) \cdot f_x(y)$$

- a densidade de probabilidade condicional é igual à densidade de probabilidade marginal:

$$f(x\,|Y = y) = f_y(x)$$

- a esperança condicional de X é constante e igual ao próprio valor esperado de X:

$$E[X|Y = y] = E[X]$$

E, agora, vamos estudar com mais algumas questões?

Cai na Prova

Direto do Concurso

014. (FUMARC/PC/MG/ANALISTA DA POLÍCIA CIVIL/2013) Seja $f(x,y) = \begin{cases} 21x^2y^3, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ a densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y. A densidade condicional de Y dado X = x e a esperança de condicional de Y dado X = x são, respectivamente:

(A) $\frac{3x^2}{y^3}$ e $\frac{3y}{4}$

(B) $\frac{4y^3}{1-x^4}$ e $\frac{3y}{4}$

(C) $\frac{3x^2}{y^3}$ e $\frac{4(1-x^5)}{5(1-x^4)}$

(D) $\frac{4y^3}{1-x^4}$ e $\frac{4(1-x^5)}{5(1-x^4)}$

Para o cálculo da densidade marginal em relação a X, devemos integrar sobre Y em todo o espaço. Vale notar que os limites de integração de y são [x, 1], conforme escrito no enunciado.

$$f(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \int_x^1 [21x^2y^3]dy = \frac{21x^2y^4}{4}\Bigg|_x^1 = \frac{21x^2}{4}(1^4 - x^4) = \frac{21x^2(1-x^4)}{4}$$

Na equação acima, utilizamos a integral de y^3dy é igual a $y^4/4$, que é a típica integral do polinômio. Em seguida, podemos utilizar a definição de densidade de probabilidade condicional.

$$f(y\,|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{21x^2y^3}{\frac{21x^2(1-x^4)}{4}}$$

A razão de frações pode ser resolvida multiplicando-se a primeira pelo inverso da segunda. Observe que vamos simplificar o $21x^2$ no numerador e no denominador.

$$f(y|x) = \frac{21x^2y^3}{1}\cdot\frac{4}{21x^2(1-x^4)} = \frac{4y^3}{(1-x^4)}$$

Para a esperança condicional, devemos simplesmente integrar em todo o espaço o produto y vezes a função densidade condicional.

$$E(Y\,|X=x) = \int_x^1 y\cdot f(y|x)dy = \int_x^1 y\cdot\frac{4y^3}{(1-x^4)}dy$$

$$E(Y\,|X=x) = \int_x^1 \frac{4y^4}{(1-x^4)}dy = \frac{4y^5}{5.(1-x^4)}\Bigg|_x^1 = \frac{4(1-x^5)}{5.(1-x^4)}$$

Observe que a integral de y^4dy é igual a $y^5/5$ pela integral polinomial.

Letra d.

---

015. (AOCP/IBGE/ANALISTA CENSITÁRIO/MÉTODOS QUANTITATIVOS/ ADAPTADA/2019) Sendo X e Y duas variáveis aleatórias contínuas com função de densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x+y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

E considerando as variáveis aleatórias X e Y e a função de densidade conjunta, julgue os seguintes itens.

$$E[X/Y=y] = \frac{4+3y}{6(1+y)}.$$

Primeiramente, podemos calcular a distribuição de probabilidades condicional utilizando a definição: probabilidade da intersecção dividida pela probabilidade marginal.

$$f[X \mid Y=y] = \frac{F(x,y)}{g(y)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot(2x+y)}{\frac{1}{4}\cdot(y+1)} = \frac{2x+y}{y+1}$$

Para calcular a esperança de X basta integrar em X a função densidade de probabilidade condicional, observando que x se limita ao intervalo [0,1].

$$E[X \mid Y=y] = \int_0^1 x\cdot f(x \mid Y=y)\,dx = \int_0^1 x\cdot\frac{2x+y}{y+1}dx$$

$$E[X \mid Y=y] = \frac{1}{y+1}\cdot\int_0^1 2x^2dx + \frac{y}{y+1}\cdot\int_0^1 x\,dx$$

Usando o fato de que a integral de 2x² dx é 2x³/3 e que a integral de x dx é x²/2, temos:

$$E[X \mid Y=y] = \left.\frac{2x^3}{3(y+1)}\right|_0^1 + \frac{y}{y+1}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{2.(1^3-0^3)}{3(y+1)} + \frac{y}{y+1}\cdot\frac{(1^2-0^2)}{2}$$

Portanto, a afirmação está correta.

$$E[X \mid Y=y] = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y+1} + \frac{y}{y+1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2.2+3y}{6(y+1)} = \frac{4+3y}{6(y+1)}$$

Certo.

016. (AOCP/IBGE/ANALISTA CENSITÁRIO/MÉTODOS QUANTITATIVOS/ ADAPTADA/2019) Sendo X e Y duas variáveis aleatórias contínuas com função de densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x+y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

E considerando as variáveis aleatórias X e Y e a função de densidade conjunta, julgue os seguintes itens.
As variáveis aleatórias X e Y são independentes.

Como a covariância não é nula, automaticamente as variáveis não são independentes. Outra forma de ver é que duas variáveis somente serão independentes quando a sua distribuição de probabilidade total for igual ao produto das marginais.

$$F(x,y) = \frac{1}{4}(2x+y)$$

$$f(x)g(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{y+1}{4}\right)$$

Observe que isso não acontece. A distribuição total é diferente do produto das marginais. Afirmação incorreta.
Errado.

RESUMO

Condição de Validade

- a integral da distribuição de probabilidade deve ser igual a 1 em todo o espaço;

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

Cálculo de Probabilidades

- corresponde à integral no intervalo pedido para as duas variáveis;
- é sempre positiva;
- o sinal de igualdade é irrelevante, pois a probabilidade de um ponto qualquer é sempre nula.

$$P(a < X < b \cap c < Y < d) = \int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x,y)dxdy$$

Densidade Marginal de Probabilidades

- a densidade marginal de X é obtida integrando-se a função densidade em todo o domínio da variável Y, e vice-versa;
- a densidade marginal de X é uma função exclusiva de X e a densidade marginal de Y é uma função exclusiva de Y.

$$f_y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \quad f_x(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Valor Esperado

- basta realizar a integral multiplicando-se a função desejada pela densidade de probabilidade;

$$\boldsymbol{E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) \cdot f_y(x)dx \qquad E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x,y)dx}$$

- se a função for de uma única incógnita, podemos utilizar a densidade marginal

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_y(x)dx \qquad E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_y(x)dx \qquad E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_y(x)dx$$

Densidade Condicional de Probabilidades

- é obtida dividindo-se a probabilidade conjunta pela densidade marginal:

$$f(x\,|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_X(y)} \qquad f(y\,|X=x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(x)}$$

- observe que a densidade marginal usada no denominador é a da variável condicionante;
- a esperança condicional pode ser obtida integrando-se a densidade condicional multiplicada por x:

$$E[X\,|Y=y] = \int x\,f(x\,|Y=y)dx$$

Independência

- duas variáveis X e Y são independentes quando a densidade conjunta de probabilidades é igual ao produto das densidades marginais;
- quando isso acontece, uma não interfere nos limites de integração da outra; e
- a função densidade conjunta pode ser expressa como o produto de duas funções, uma exclusiva de X e outra exclusiva de Y.

QUESTÕES DE CONCURSO

001. (CESPE/PC-SE/2021) Considere duas variáveis aleatórias contínuas, X e Y, tais que P (X > 0) = 1, P (X ≤ 1) = 1/10, P (X ≤ 1 | Y > 1) = 3/10, Var (X) = Var (Y) = 1, e Cov (X, Y) = 0.
Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.
X – e Y são independentes.

002. (CESPE/PC-SE/2021) Considere duas variáveis aleatórias contínuas, X e Y, tais que P (X > 0) = 1, P (X ≤ 1) = 1/10, P (X ≤ 1 | Y > 1) = 3/10, Var (X) = Var (Y) = 1, e Cov (X, Y) = 0.
Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.
Var (X – Y) = 2.

003. (CESPE/PC-SE/2021) Considere duas variáveis aleatórias contínuas, X e Y, tais que P (X > 0) = 1, P (X ≤ 1) = 1/10, P (X ≤ 1 | Y > 1) = 3/10, Var (X) = Var (Y) = 1, e Cov (X, Y) = 0.
Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.
O valor esperado da variável aleatória X é igual a zero.

004. (CESPE/PC-SE/2021) Considere duas variáveis aleatórias contínuas, X e Y, tais que P (X > 0) = 1, P (X ≤ 1) = 1/10, P (X ≤ 1 | Y > 1) = 3/10, Var (X) = Var (Y) = 1, e Cov (X, Y) = 0.
Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.
P (X ≥ 1) = P (X > 1) = 0,9.

005. (CESPE/PF/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL/2021) Considere que X e Y sejam variáveis aleatórias contínuas que se distribuem conjuntamente conforme a função de densidade
f (x + y) = x + y,
na qual 0 < x < 1 e 0 < y < 1. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.
Y é uma variável aleatória uniforme no intervalo (0,1).

006. (CESPE/PF/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL/2021) Considere que X e Y sejam variáveis aleatórias contínuas que se distribuem conjuntamente conforme a função de densidade
f (x + y) = x + y,
na qual 0 < x < 1 e 0 < y < 1. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.
X – e Y são variáveis aleatórias independentes.

007. (CESPE/PF/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL/2021) Considere que □ e □ sejam variáveis aleatórias contínuas que se distribuem conjuntamente conforme a função de densidade
f (x + y) = x + y,
na qual 0 < x < 1 e 0 < y < 1. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.
E [X + Y | X = ½] = 14/12.

008. (FGV/DPE-RJ/TÉCNICO SUPERIOR ESPECIALIZADO/ ESTATÍSTICA/2019) Seja a distribuição de probabilidade conjunta de variáveis aleatórias discretas conforme abaixo,

(X , Y)		X			
		-1	0	1	2
Y	1	0.14	0.08	0.16	k1
	2	0.03	0.12	k2	0.25

onde k1 e k2 são probabilidades inicialmente desconhecidas. Sendo assim:

a) para que os eventos X = 0 e Y = 2 sejam independentes, é necessário que k1 = 0,02;

b) para que os eventos X = -1 e Y = 1 sejam independentes, é necessário que k2 = 0,15;

c) se k1 = 0,08, então a esperança condicional de Y dado X = 1, E(Y/X=1) é superior a 1,5;

d) para que a média de X seja igual a 0,75, é necessário que k1 = 0,12 e k2 = 0,10;

e) para que a média de Y seja igual a 1,40, é necessário que k1 = 0,15 e k2 = 0,07.

009. (FCC/TRE-PR/ANALISTA JUDICIÁRIO/2015) A função de probabilidade conjunta das variáveis X e Y é dada por:

$$f(x, y) = \frac{1}{24}(x + 2y); \quad x = 0, 1, 2 \quad \text{e} \quad y = 1,2.$$

Nessas condições, a esperança condicional de X dado que Y é igual a 2, denotada por E (X | Y = 2) é igual, a

a) 25/24

b) 12/7

c) 18/11

d) 17/15

e) 7/12

010. (AOCP/IBGE/ANALISTA CENSITÁRIO/MÉTODOS QUANTITATIVOS/ 2019) Sendo X e Y duas variáveis aleatórias contínuas com função de densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x + y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

E considerando as variáveis aleatórias X e Y e a função de densidade conjunta, é correto afirmar que:

a) $f_X(x) = \frac{1}{2}(x+1),\ 0 \leq x \leq 1$

b) $f_Y(y) = \frac{1}{4}(2+y),\ 0 \leq y \leq 2$

c) o coeficiente de correlação entre X e Y é igual a 0 (zero).

d) $E[X/Y=y] = \dfrac{4+3y}{6(1+y)}$

e) as variáveis aleatórias X e Y são independentes.

011. (FADESP/UEPA/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR – ESTATÍSTICA/ DESAFIO/2020) Suponha que a função densidade de probabilidade (fdp) conjunta da variável (X, Y) seja dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\{-y\} & \text{para } x > 0, y > x \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

I – A função de densidade marginal de X tem distribuição exponencial com parâmetro de escala igual a 1;

II – X e Y são independentes;

III – P (X > 2 | Y < 4) = (3 – exp(2))/(5 – exp(4)).

GABARITO

1. E
2. C
3. E
4. C
5. E
6. E
7. E
8. a
9. d
10. d
11. c

GABARITO COMENTADO

001. (CESPE/PC-SE/2021) Considere duas variáveis aleatórias contínuas, X e Y, tais que P (X > 0) = 1, P (X ≤ 1) = 1/10, P (X ≤ 1 | Y > 1) = 3/10, Var (X) = Var (Y) = 1, e Cov (X, Y) = 0.
Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.
X – e Y são independentes.

Para que duas variáveis sejam independentes, a probabilidade condicional tem que ser igual à probabilidade incondicional. Como o fato de saber que Y > 1 altera a probabilidade de que P (X ≤ 1), podemos concluir que Y interfere na variável X. Logo, elas não são independentes.
É importante destacar que a covariância nula é uma condição necessária, mas não é suficiente para garantir que as duas variáveis são independentes.
Errado.

002. (CESPE/PC-SE/2021) Considere duas variáveis aleatórias contínuas, X e Y, tais que P (X > 0) = 1, P (X ≤ 1) = 1/10, P (X ≤ 1 | Y > 1) = 3/10, Var (X) = Var (Y) = 1, e Cov (X, Y) = 0.
Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.
Var (X – Y) = 2.

A variância da diferença de duas variáveis aleatórias é dada por:

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2.Cov\,(X, Y)$$

$$Var(X - Y) = 1 + 1 - 2.0 = 2 - 0 = 2$$

Certo.

003. (CESPE/PC-SE/2021) Considere duas variáveis aleatórias contínuas, X e Y, tais que P (X > 0) = 1, P (X ≤ 1) = 1/10, P (X ≤ 1 | Y > 1) = 3/10, Var (X) = Var (Y) = 1, e Cov (X, Y) = 0.
Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.
O valor esperado da variável aleatória X é igual a zero.

Observe que X não pode assumir valores negativos e que:

$$P(X > 1) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

Assim, podemos desenhar o esquema para a distribuição de probabilidades:

1/10	9/10

0 1 ...

Portanto, podemos dizer que, no mínimo:

$$E[X] \geq \frac{1}{10} \cdot 0 + \frac{9}{10} \cdot 1 = \frac{9}{10}$$

Assim, a esperança não pode ser nula.

Errado.

---

004. (CESPE/PC-SE/2021) Considere duas variáveis aleatórias contínuas, X e Y, tais que P (X > 0) = 1, P (X ≤ 1) = 1/10, P (X ≤ 1 | Y > 1) = 3/10, Var (X) = Var (Y) = 1, e Cov (X, Y) = 0.
Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.
P (X ≥ 1) = P (X > 1) = 0,9.

Como X é uma variável aleatória contínua, a probabilidade de um único ponto é sempre nula. Portanto, incluí-lo ou retirá-lo no campo de possibilidades é irrelevante. Assim, temos:

$$P(X \geq 1) = P(X > 1)$$

Essa probabilidade é a complementar de P (X ≤ 1). Assim, temos:

$$P(X \geq 1) = P(X > 1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

Certo.

---

005. (CESPE/PF/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL/2021) Considere que X e Y sejam variáveis aleatórias contínuas que se distribuem conjuntamente conforme a função de densidade
f (x + y) = x + y,
na qual 0 < x < 1 e 0 < y < 1. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.
Y é uma variável aleatória uniforme no intervalo (0,1).

Em uma distribuição uniforme, a probabilidade é constante. Não é o caso dessa distribuição. Um exemplo de distribuição uniforme seria:

$$f(x,y) = 1, com\ 0 < x < 1\ e\ 0 < y < 1$$

Errado.

---

006. (CESPE/PF/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL/2021) Considere que e sejam variáveis aleatórias contínuas que se distribuem conjuntamente conforme a função de densidade
f (x + y) = x + y,
na qual 0 < x < 1 e 0 < y < 1. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.
X – e Y são variáveis aleatórias independentes.

Duas variáveis aleatórias são independentes quando a função distribuição de probabilidade conjunta pode ser desmembrada.

$$f(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

Não é o caso dessa distribuição. Ela não pode ser obtida como o produto de uma função exclusiva de **x** e uma função exclusiva de **y.**
Errado.

007. (CESPE/PF/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL/2021) Considere que e sejam variáveis aleatórias contínuas que se distribuem conjuntamente conforme a função de densidade
f (x + y) = x + y,
na qual 0 < x < 1 e 0 < y < 1. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.
E [X + Y | X = ½] = 14/12.

O primeiro ponto que devemos saber é que o valor esperado é um operador linear, portanto, o valor esperado da soma é igual à soma dos valores esperados. Assim, temos:

$$E[X+Y \mid X=1/2] = E\left[X|X=\frac{1}{2}\right] + E\left[Y|X=\frac{1}{2}\right]$$

$$E[X+Y \mid X=1/2] = \frac{1}{2} + E\left[Y|X=\frac{1}{2}\right]$$

Vamos escrever a distribuição condicional de Y, sabendo que X é igual a ½.

$$f(y\,|X=1/2) = \frac{f(x,y)}{f_y(x)}$$

A probabilidade marginal pode ser obtida integrando-se em **x:**

$$f_y(x) = \int_0^1 (x+y)dx = yx\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = x.1 - x.0 + \frac{1^2}{2} = x + \frac{1}{2}$$

Para X = ½, temos, então:

$$f_y(x) = x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Assim, a distribuição condicional de Y dado X = ½ é:

$$f(y\,|X = 1/2) = \frac{f(x,y)}{f_y(x)} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} = \frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{y+\frac{1}{2}}{1} = y + \frac{1}{2}$$

Agora, basta utilizar a definição de valor esperado para uma distribuição contínua de probabilidades para obter o valor esperado condicional. Vale lembrar que devemos tomar a integral do produto y vezes a distribuição condicional.

$$E\left[Y \mid X = \frac{1}{2}\right] = \int_0^1 \left(y + \frac{1}{2}\right) y dy = \int_0^1 y^2 dy + \int_0^1 \frac{y}{2} dy$$

$$E\left[Y \mid X = \frac{1}{2}\right] = \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{y^2}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \frac{1^2}{4} - \frac{0^2}{4}$$

$$E\left[Y \mid X = \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$$

Então, somando os dois valores esperados, temos:

$$E[X + Y \mid X = 1/2] = \frac{1}{2} + E\left[Y|X = \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{7}{12} = \frac{6+7}{12} = \frac{13}{12}$$

Errado.

---

008. (FGV/DPE-RJ/TÉCNICO SUPERIOR ESPECIALIZADO/ESTATÍSTICA/2019) Seja a distribuição de probabilidade conjunta de variáveis aleatórias discretas conforme abaixo,

(X , Y)		X			
		-1	0	1	2
Y	1	0.14	0.08	0.16	k1
	2	0.03	0.12	k2	0.25

onde k1 e k2 são probabilidades inicialmente desconhecidas. Sendo assim:

a) para que os eventos X = 0 e Y = 2 sejam independentes, é necessário que k1 = 0,02;

b) para que os eventos X = -1 e Y = 1 sejam independentes, é necessário que k2 = 0,15;

c) se k1 = 0,08, então a esperança condicional de Y dado X = 1, E(Y/X=1) é superior a 1,5;
d) para que a média de X seja igual a 0,75, é necessário que k1 = 0,12 e k2 = 0,10;
e) para que a média de Y seja igual a 1,40, é necessário que k1 = 0,15 e k2 = 0,07.

O primeiro ponto que devemos observar é que a soma de todas as probabilidades é igual a 1.

$$0{,}14 + 0{,}08 + 0{,}16 + k_1 + 0{,}03 + 0{,}12 + k_2 + 0{,}25 = 1$$

$$0{,}78 + k_1 + k_2 = 1$$

$$\therefore k_1 + k_2 = 1 - 0{,}78 = 0{,}22$$

a) Certa. Para que os eventos sejam independentes, é necessário que a probabilidade da intersecção é igual ao produto das probabilidades. A probabilidade de intersecção foi dada no diagrama.

$$P\ (X = 0 \cap Y = 2) = 0{,}12$$

As probabilidades marginais P(X = 0) e P(Y=2) podem ser obtidas somando-se:

$$P(X = 0) = 0{,}08 + 0{,}12 = 0{,}20$$

$$P(Y = 2) = 0{,}03 + 0{,}12 + k_2 + 0{,}25 = 0{,}40 + k_2$$

Observe também que:

$$k_1 + k_2 = 0{,}22$$

Se k_2 = 0,02, podemos calcular k_1:

$$k_1 = 0{,}22 - k_2 = 0{,}22 - 0{,}02 = 0{,}20$$

Assim, concluímos que:

$$P(X = 0) = 0{,}20$$

$$P(Y = 2) = 0{,}40 + k_2 = 0{,}40 + 0{,}20 = 0{,}60$$

Então, vamos verificar se o produto das probabilidades marginais é igual à probabilidade da intersecção.

$$P(X = 0 \cap Y = 2) = 0{,}12$$

$$P(X = 0) \cdot P(Y = 2) = 0{,}20 \cdot 0{,}60 = 0{,}12$$

b) Errada. Analogamente ao item anterior, foi fornecida a probabilidade da intersecção.

Como foi fornecido k_2 = 0,15, teremos que k_1 = 0,07, porque a soma dos dois é igual a 0,22. Então, vamos obter as probabilidades marginais.

$$P(X=-1)=0{,}14+0{,}03=0{,}17$$

$$P(Y=1)=0{,}14+0{,}08+0{,}16+k_1=0{,}38+k_1=0{,}38+0{,}07=0{,}45$$

Utilizando a definição de independência, vamos verificar se a probabilidade da intersecção deve ser igual ao produto das probabilidades marginais.

$$P(X=-1)\cdot P(Y=1)=0{,}17\cdot 0{,}45=0{,}0765$$

Como deu diferente, os dois eventos não são independentes na situação fornecida pelo enunciado.

c) Errada. Se k_1 = 0,08, podemos calcular o valor de k_2 sabendo que a soma de todas as probabilidades deve ser igual a 1.

$$k_2=0{,}22-k_1=0{,}22-0{,}08=0{,}14$$

Chegamos, portanto, à seguinte tabela de probabilidades.

	X – = 1	P (Y | X = 1)
Y = 1	0,16	$=\frac{0{,}16}{0{,}30}$
Y = 2	0,14	$=\frac{0{,}14}{0{,}30}$
	0,30	

Assim, temos a esperança condicional como o somatório dos produtos dos valores de Y pelas probabilidades condicionais a eles associados.

$$E[Y\,|X=1]=\frac{0{,}16}{0{,}30}\cdot 1+\frac{0{,}14}{0{,}30}\cdot 2=\frac{16+28}{30}=\frac{44}{30}\cong 1{,}467<1{,}5$$

d) Errada. Vamos substituir os valores fornecidos no enunciado e calcular as probabilidades marginais para X.

	X – = –1	X – = 0	X – = 1	X – = 2
Y = 1	0,14	0,08	0,16	0,12

	X – = –1	X – = 0	X – = 1	X – = 2
Y = 2	0,03	0,12	0,10	0,25
	0,17	**0,20**	**0,26**	**0,37**

Assim, a média de X será dada pela soma dos produtos dos valores de X pelas probabilidades associadas a eles.

$$E[X] = 0{,}17 \cdot (-1) + 0{,}20 \cdot 0 + 0{,}26 \cdot 1 + 0{,}37 \cdot 2 = -0{,}17 + 0 + 0{,}26 + 0{,}74 = 0{,}83$$

Portanto, a média de X não será igual a 0,75.
e) Errada. Vamos substituir os valores de k_1 e k_2 e calcular a probabilidade marginal de Y.

	X – = –1	X – = 0	X – = 1	X – = 2	
Y = 1	0,14	0,08	0,16	0,15	**0,53**
Y = 2	0,03	0,12	0,07	0,25	**0,47**

Façamos, então, a média de Y.

$$E[Y] = 0{,}53 \cdot 1 + 0{,}47 \cdot 2 = 0{,}53 + 0{,}94 = 1{,}47$$

Portanto, a média de Y não será igual a 1,40.
Letra a.

---

009. (FCC/TRE-PR/ANALISTA JUDICIÁRIO/2015) A função de probabilidade conjunta das variáveis X e Y é dada por:

$$f(x, y) = \frac{1}{24}(x + 2y); \qquad x = 0,\ 1,\ 2 \quad \text{e} \quad y = 1{,}2.$$

Nessas condições, a esperança condicional de X dado que Y é igual a 2, denotada por E (X | Y = 2) é igual, a

a) 25/24
b) 12/7
c) 18/11
d) 17/15
e) 7/12

Observe que foi dada uma distribuição discreta de probabilidade. Como ela é uma distribuição pequena, podemos montar uma tabela de distribuições de probabilidades totais.

	X – = 0	X – = 1	X – = 2
Y = 1	$\frac{1}{24}\cdot(0+2.1)=\frac{2}{24}$ $=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}\cdot(1+2.1)=\frac{3}{24}$ $=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}\cdot(2+2.1)=\frac{4}{24}$ $=\frac{1}{6}$
Y = 2	$\frac{1}{24}\cdot(0+2.2)=\frac{4}{24}$ $=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}\cdot(1+2.2)=\frac{5}{24}$ $=\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}\cdot(2+2.2)=\frac{6}{24}$ $=\frac{1}{4}$

Então, vamos usar a definição de probabilidade condicional: a razão entre a probabilidade da intersecção e a probabilidade marginal.

$$P(X\,|Y=2)=\frac{P[X\cap Y=2]}{P[Y=2]}$$

A densidade de probabilidade marginal de Y pode ser obtida somando-se todos os valores da linha da tabela para Y = 2.

	X – = 0	X – = 1	X – = 2	
Y = 1	$=\frac{1}{12}$	$=\frac{1}{8}$	$=\frac{1}{6}$	
Y = 2	$=\frac{1}{6}$	$=\frac{5}{24}$	$=\frac{1}{4}$	$P[Y=2)=\frac{1}{6}+\frac{5}{24}+\frac{1}{4}=\frac{4+5+6}{24}=\frac{15}{24}$

Então, podemos calcular os valores da distribuição condicional para X.

$$P(X = 0\,|Y = 2) = \frac{P(X = 0 \cap Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{1/6}{15/24} = \frac{1}{6} \cdot \frac{24}{15} = \frac{4}{15}$$

$$P(X = 1\,|Y = 2) = \frac{P(X = 1 \cap Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{5/24}{15/24} = \frac{5}{24} \cdot \frac{24}{15} = \frac{5}{15}$$

$$P(X = 2\,|Y = 2) = \frac{P(X = 2 \cap Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{1/4}{15/24} = \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{15} = \frac{6}{15}$$

Por fim, para calcular o valor esperado, devemos somar os produtos das probabilidades pelos valores de X associados.

$$E[X\,|\,Y = 2] = \frac{4}{15} \cdot 0 + \frac{5}{15} \cdot 1 + \frac{6}{15} \cdot 2 = 0 + \frac{5}{15} + \frac{12}{15} = \frac{17}{15}$$

Letra d.

---

010. (AOCP/IBGE/ANALISTA CENSITÁRIO/MÉTODOS QUANTITATIVOS/2019) Sendo X e Y duas variáveis aleatórias contínuas com função de densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x + y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

E considerando as variáveis aleatórias X e Y e a função de densidade conjunta, é correto afirmar que:

a) $f_X(x) = \frac{1}{2}(x + 1),\ 0 \le x \le 1$

b) $f_Y(y) = \frac{1}{4}(2 + y),\ 0 \le y \le 2$

c) o coeficiente de correlação entre X e Y é igual a 0 (zero).

d) $E[X/Y=y] = \frac{4 + 3y}{6(1 + y)}$

e) as variáveis aleatórias X e Y são independentes.

Essa foi uma questão extremamente longa. Repleta de conceitos muito importantes e uma verdadeira aula sobre distribuições de probabilidades conjuntas.

a) Errada. A distribuição de densidade marginal para X pode obtida integrando sobre Y em todo o domínio [0,2]. Observe que a integral de 2x em y é 2xy, porque x se comporta como uma constante para y. Por outro lado, a integral de y dy é y²/2, que é a típica integral do polinômio.

$$f(x) = \frac{1}{4}\int_0^2 (2x+y)dy = \frac{1}{4}\cdot 2xy \Big|_0^2 + \frac{y^2}{8}\Big|_0^2$$

$$f(x) = \frac{2x.(2-0)}{4} + \frac{(2^2-0^2)}{8} = x + \frac{4}{8} = x + \frac{1}{2}$$

Portanto, a afirmação está incorreta.

b) Errada. Analogamente, a densidade marginal para Y pode ser obtida integrando-se em X sobre todo o domínio, que é [0,1].

$$g(y) = \frac{1}{4}\int_0^1 (2x+y)dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{2x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\cdot xy\Big|_0^1 = \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 + \frac{xy}{4}\Big|_0^1$$

$$g(y) = \frac{(1^2-0)}{4} + \frac{(1-0)y}{4} = \frac{1}{4} + \frac{y}{4} = \frac{(y+1)}{4}$$

c) Errada. O coeficiente de correlação pode ser obtido como a esperança do produto menos o produto das esperanças.

$$E[XY] = \int_0^2\int_0^1 xy\,dxdy = \frac{1}{4}\cdot\int_0^2\int_0^1 2x^2y + xy^2\,dxdy$$

$$E[XY] = \frac{1}{4}\cdot\int_0^2\int_0^1 2x^2y\,dxdy + \frac{1}{4}\cdot\int_0^2\int_0^1 xy^2\,dxdy$$

Primeiramente vamos integrar em x, observando que a integral de 2x² é 2x³/3 e que a integral de xy² é x²y²/2, usando a integral do polinômio. Lembre-se de que, na integral dupla, a variável y deve ser considerada como uma constante. Fazendo a primeira integral, temos:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{2x^3y}{3}\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{x^3y}{6}\Big|_0^1 + \frac{x^2y^2}{8}\Big|_0^1 = \frac{(1^3-0^3)y}{6} + \frac{(1^2-0^2)y^2}{8} = \frac{y}{6} + \frac{y^2}{8}$$

Em seguida, façamos a segunda integral, dessa vez em y, usando o intervalo de integração [0, 2].

$$E[XY] = \int_0^2 \left(\frac{y}{6} + \frac{y^2}{8}\right) dy = \frac{y^2}{12}\Big|_0^2 + \frac{y^3}{24}\Big|_0^2$$

$$E[XY] = \frac{(2^2 - 0^2)}{12} + \frac{(2^3 - 0^3)}{24} = \frac{4}{12} + \frac{8}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

A seguir, podemos calcular as esperanças das variáveis X e Y usando as densidades marginais de probabilidade.

$$E[X] = \int_0^1 x\, f(x)dx = \int_0^1 x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 \frac{x}{2} dx$$

A integral de x² é x³/3 e a integral de x é x²/2, portanto, a integral de x/2 é x²/4.

$$E[X] = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{1^3 - 0^3}{3} + \frac{1^2 - 0^2}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$$

Façamos o mesmo para Y usando sua densidade marginal, integrando em todo o seu domínio, que é [0,2].

$$E[Y] = \int_0^2 y\, g(y)dx = \int_0^2 y \cdot \left(\frac{y+1}{4}\right) dy = \frac{1}{4} \cdot \int_0^2 y^2 dy + \frac{1}{4} \cdot \int_0^2 y\, dy$$

$$E[Y] = \frac{y^3}{4.3}\Big|_0^2 + \frac{y^2}{4.2}\Big|_0^2 = \frac{(2^3 - 0^2)}{12} + \frac{(2^2 - 0^2)}{8} = \frac{8}{12} + \frac{4}{8} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$$

Por fim, a covariância é dada pela esperança do produto menos o produto das esperanças.

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{2}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{6} = \frac{2}{3} - \frac{49}{72} = \frac{48-49}{72} = -\frac{1}{72}$$

d) Certa. Primeiramente, podemos calcular a distribuição de probabilidades condicional utilizando a definição: probabilidade da intersecção dividida pela probabilidade marginal.

$$f[X \mid Y = y] = \frac{F(x,y)}{g(y)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (2x + y)}{\frac{1}{4} \cdot (y+1)} = \frac{2x + y}{y + 1}$$

Para calcular a esperança de X basta integrar em X a função densidade de probabilidade condicional, observando que x se limita ao intervalo [0,1].

$$E[X\,|Y=y]=\int_0^1 x\cdot f(x\,|Y=y)\,dx=\int_0^1 x\cdot\frac{2x+y}{y+1}dx$$

$$E[X\,|Y=y]\;=\frac{1}{y+1}\cdot\int_0^1 2x^2dx+\frac{y}{y+1}\cdot\int_0^1 x\,dx$$

Usando o fato de que a integral de 2x² dx é 2x³/3 e que a integral de x dx é x²/2, temos:

$$E[X\,|Y=y]=\frac{2x^3}{3(y+1)}\Bigg|_0^1+\frac{y}{y+1}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{2.\,(1^3-0^3)}{3(y+1)}+\frac{y}{y+1}\cdot\frac{(1^2-0^2)}{2}$$

$$E[X\,|Y=y]=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y+1}+\frac{y}{y+1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2.2+3y}{6(y+1)}=\frac{4+3y}{6(y+1)}$$

Portanto, a afirmação está correta.

e) Errada. Como a covariância não é nula, automaticamente as variáveis não são independentes. Outra forma de ver é que duas variáveis somente serão independentes quando a sua distribuição de probabilidade total for igual ao produto das marginais.

$$F(x,y)=\frac{1}{4}(2x+y)$$

$$f(x)g(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{y+1}{4}\right)$$

Observe que isso não acontece. A distribuição total é diferente do produto das marginais.

Letra d.

---

011. (FADESP/UEPA/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR – ESTATÍSTICA/DESAFIO/2020) Suponha que a função densidade de probabilidade (fdp) conjunta da variável (X, Y) seja dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\exp\{-y\} & \text{para } x>0, y>x\\ 0, & \text{c.c.}\end{cases}$$

I – A função de densidade marginal de X tem distribuição exponencial com parâmetro de escala igual a 1;

II – X e Y são independentes;

III – P (X > 2 | Y < 4) = (3 – exp(2))/(5 – exp(4)).

Vamos analisar as afirmações.

I – Certa. Para obter a densidade marginal de Y, basta realizar a integração na variável X em todo o domínio da função. Para realizar a integral, devemos observar que:

- pela definição do enunciado, os limites de integração de y são [x, +∞);
- a integral de e^{-y} é $-e^{-y}$;
- $e^{-\infty}$ tende a zero.

$$F_Y(x) = \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_x^{+\infty} = -0 - (-e^{-x}) = +e^{-x}$$

Portanto, é sim uma função exponencial com λ = 1.

II – Errada. Como X está dentro dos limites de integração de Y, as duas variáveis não são independentes.

Outra forma de resolver esse problema é usando a definição. Podemos calcular a distribuição de probabilidade marginal de Y. Para isso, basta integrar sobre todo o domínio da variável X. Devemos observar que os limites de integração de x são [0, y], porque a restrição da densidade de probabilidade é x > 0 e y > x, o que significa que x < y.

$$g(y) = \int_0^y e^{-y}\, dx = e^{-y} \cdot (y - 0) = y.e^{-y}$$

Assim, o produto das densidades marginais é:

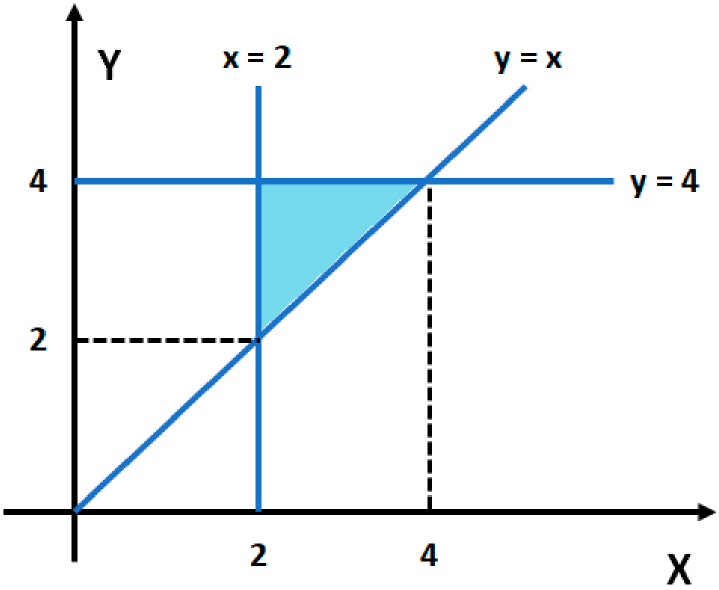
$$f(x)g(y) = (e^{-x}) \cdot (ye^{-y}) = ye^{-(x+y)}$$

Observe que isso é diferente da função densidade de probabilidade original. Portanto, as duas variáveis não são independentes.

III – Vamos utilizar a definição de probabilidade condicional.

$$P(X > 2 \mid Y < 4) = \frac{P(X > 2 \cap Y < 4)}{P(Y < 4)}$$

A probabilidade da intersecção $P(X > 2 \cap Y < 4)$ pode ser calculada integrando-se a distribuição de probabilidade conjunta no espaço exigido. Para facilitar a compreensão dos intervalos de compreensão, vamos desenhar todos os limites envolvidos.



Desse modo, a variável X varia entre [2,4] e a variável Y varia entre [x, 4].

$$P(X > 2 \cap Y < 4) = \int_2^4 \int_x^4 e^{-y} dy\, dx$$

Façamos a primeira integral em dy, observando que a integral de e^{-y} é $-e^{-y}$.

$$\int_x^4 e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_x^4 = -e^{-4} - (-e^{-x}) = e^{-x} - e^{-4}$$

Agora, façamos a segunda integral em dx.

$$P(X > 2 \cap Y < 4) = \int_2^4 e^{-x}\, dx - \int_2^4 e^{-4}\, dx$$

$$P(X > 2 \cap Y < 4) = -e^{-y} \Big|_2^4 - e^{-4}x \Big|_2^4 = [-e^{-4} - (-e^{-2})] - [e^{-4}(4-2)]$$

$$P(X > 2 \cap Y < 4) = [e^{-2} - e^{-4}] - 2e^{-4} = e^{-2} - 3.e^{-4}$$

Agora, vamos calcular P (Y < 4). Para isso, podemos utilizar a distribuição de probabilidade marginal, observando que os limites de integração de x são [0, y], porque a restrição da densidade de probabilidade é x > 0 e y > x, o que significa que x < y.

$$g(y) = \int_0^y e^{-y}\, dx = e^{-y} \cdot (y - 0) = y.e^{-y}$$

Para integrar essa distribuição marginal, podemos recorrer à regra da cadeia:

$$u = y \therefore u' = 1$$

$$v = e^{-y} \therefore v' = -e^{-y}$$

Assim, temos:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int ye^{-y}\, dy = -y.e^{-y} + \int e^{-y}.1.dy = -y.e^{-y} - e^{-y} = -e^{-y}(1+y)$$

Aplicando a integral definida para Y < 4, teremos:

$$\int ye^{-y}\, dy = -e^{-y}(1+y)\Big|_0^4 = -e^{-4}(1+4) - e^{-0}(1+0) = 1 - 5.e^{-4}$$

Então, a probabilidade condicional pedida é:

$$P(X > 2|Y < 4) = \frac{P(X > 2 \cap Y < 4)}{P(Y < 4)} = \frac{e^{-2} - 3e^{-4}}{1 - 5e^{-4}}$$

Podemos multiplicar numerador e denominador por e^4 e teremos:

$$P(X > 2|Y < 4) = \frac{e^2 - 3}{e^4 - 5} = \frac{3 - e^2}{5 - e^4}$$

Letra c.

Thiago Cardoso

Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.

LEI Nº 8.666/1993 - LICITAÇÃO
Avaliação
Comentário
Seu feedback é valioso. Você gostaria de deixar um comentário e assim nos ajudar a melhorar nossos produtos e serviços?
Obs: A avaliação da aula em pdf é exclusivamente pedagógica. Clique aqui para relatar problemas técnicos, pois serão desconsiderados deste canal.
Sim, salvar comentário.
Não, obrigado.
NÃO SE ESQUEÇA DE AVALIAR ESTA AULA!
SUA OPINIÃO É MUITO IMPORTANTE PARA MELHORARMOS AINDA MAIS NOSSOS MATERIAIS.
ESPERAMOS QUE TENHA GOSTADO DESTA AULA!
PARA AVALIAR, BASTA CLICAR EM LER A AULA E, DEPOIS, EM AVALIAR AULA.
AVALIAR