ESTATÍSTICA

Outras Distribuições de Probabilidade

Livro Eletrônico

GRAN CURSOS ONLINE

SUMÁRIO

OUTRAS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Nesta aula vamos falar sobre as distribuições de probabilidade contínuas e discretas.

Vamos estudar várias distribuições de probabilidade. Porém, gostaria de pontuar que as distribuições mais importantes são: Bernoulli, Binomial e Normal. Portanto, essas serão as distribuições estudadas mais profundamente neste material.

As demais distribuições costumam aparecer somente nas provas específicas da área de estatística. Porém, quando o edital fala apenas em "Distribuições de Probabilidade", elas podem teoricamente ser cobradas. Por isso as coloquei neste material.

Por fim, gostaria de lembrá-lo(a) de me seguir no Instagram (@math.gran), que é onde sempre posto muitas dicas de matemática.

1. Distribuição Uniforme

A distribuição uniforme de probabilidades é a distribuição mais simples além de ser muito frequente no dia a dia. Vejamos alguns exemplos importantes:

- a distribuição das moléculas de ar em uma sala fechada é uniforme. É por isso que você consegue respirar se você estiver deitado no chão, se você estiver sentado, em pé ou de ponta-cabeça pendurado no teto. Já imaginou se as moléculas de ar não se distribuíssem uniformemente? Poderia haver uma situação em que todas elas iriam colapsar em uma área da sala e você ficaria sem oxigênio;
- o lançamento de um dado não viciado também segue uma distribuição uniforme. Por exemplo, se ele for um dado comum, de 6 faces, isso significa que a probabilidade de se obter, em um lançamento, qualquer uma das seis faces é igual a 1/6.

Vamos ver o que acontece se fizermos uma quantidade muito grande de lançamentos.

1.1. Distribuição de Probabilidades Discreta

A distribuição uniforme discreta se aplica a fenômenos que são descritos por uma variável aleatória discreta. Alguns exemplos:

- lançamento de um dado não viciado. Se o dado tiver seis faces, a probabilidade de se obter qualquer uma dessas faces é igual a 1/6;
- lançamento de uma moeda. A probabilidade de se obter cara ou coroa é igual a 1/2;

Se uma variável qualquer admite N valores possíveis no conjunto: {1, 2, 3, ..., N}, então podemos dizer que:

- **Distribuição de Probabilidades:**

$$f(a) = P(X = a) = \frac{1}{N}; se\ a \in \{1, 2, \dots, N\}$$

$$f(a) = P(X = a) = 0; se\ a \notin \{1, 2, \dots, N\}$$

- **Valor Esperado:**

$$E[X] = \frac{N+1}{2}$$

- **Variância:**

$$Var[X] = \frac{N^2 - 1}{2}$$

Por exemplo, para o caso do lançamento de 6 faces, temos N = 6, portanto:

- a probabilidade de se obter qualquer uma das faces é igual a 1/6;
- o valor esperado ou a média dos lançamentos será igual a 3,5, porque:

$$E[X] = \frac{N+1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

- a variância dos resultados obtidos nos lançamentos será igual a 35/12, porque:

$$Var[X] = \frac{N^2 - 1}{12} = \frac{6^2 - 1}{12} = \frac{36 - 1}{12} = \frac{35}{12} = 17{,}5$$

1.1.1. Demonstrações

Vamos provar as expressões para a distribuição de probabilidades, a média e a variância de uma variável que segue distribuição uniforme.

Essa seção não é obrigatória para aprender todo o capítulo. Fica apenas como uma curiosidade para os alunos que quiserem saber como se obtém aquelas expressões já trabalhadas.

A demonstração da própria distribuição de probabilidades é decorrente dos axiomas de Kolgomorov, que estabelece que a soma de todas as probabilidades associadas é igual a 1.

$$\sum_{i=1}^{N} P(X = i) = 1$$

Como são N resultados possíveis e todas as probabilidades são iguais a P, temos:

$$N \cdot P = 1 \therefore P = \frac{1}{N}$$

Para o valor esperado, devemos utilizar a definição:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} P(X = i) \cdot i$$

As probabilidades já foram calculadas e são todas iguais a 1/N. Então, vamos substituir i = 1, i = 2, ... i = N no somatório, e teremos:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \cdot i = \frac{1 + 2 + \cdots + N}{N}$$

Portanto, o valor esperado será:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \cdot i = \frac{N \cdot (N+1)}{2} \cdot \frac{1}{N} = \frac{N+1}{2}$$

Por fim, para calcular a variância dessa distribuição, podemos utilizar a expressão de que a variância é igual à média dos quadrados menos o quadrado da média:

$$Var[X] = E[X^2] - \mu^2$$

A média dos quadrados pode ser obtida de forma semelhante ao que foi demonstrado para a média anteriormente:

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{N} P(x = i) \cdot i^2 = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + N^2}{N}$$

Podemos demonstrar que a soma dos quadrados de N números é:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + N^2 = \frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6}$$

Para fazer essa demonstração, podemos recorrer à técnica de indução finita. Para isso, devemos tomar N = 1. Nesse caso, teremos:

$$1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2.1+1)}{6} = \frac{1.2.3}{6} = 1$$

Portanto, a igualdade é válida para N = 1.

Supondo que a igualdade seja válida para k – 1, podemos mostrar que ela será válida para k. Vejamos:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 + k^2$$

Para facilitar vamos utilizar a notação S(k) para a soma dos quadrados de 1 a k:

$$S(k) = S(k-1) + k^2$$

Como supomos válida a expressão para S(k–1), temos:

$$S(k) = \frac{(k-1)\cdot(k)\cdot(2k-1)}{6} + k^2$$

$$S(k) = \frac{(k-1)\cdot(k)\cdot(2k-1)}{6} + \frac{6k^2}{6}$$

Podemos realizar o produto (k–1).(2k–1):

$$S(k) = \frac{k\cdot[2k^2 - k - 2k + 1] + 6k^2}{6} = \frac{k\cdot[2k^2 - 3k + 1] + 6k^2}{6}$$

Passando o $6k^2$ para dentro dos parênteses, temos:

$$S(k) = \frac{k\cdot(2k^2 - 3k + 6k + 1)}{6} = \frac{k\cdot(2k^2 + 3k + 1)}{6}$$

Fatorando a expressão $2k^2+3k+1$, temos:

$$S(k) = \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$$

Se ficou alguma dúvida, basta multiplicar:

$$(k+1)\cdot(2k+1) = 2k^2 + k + 2k + 1 = 2k^2 + 3k + 1$$

Desse modo, a expressão é válida para k = 1. Mas, se é válida para k = 1, ela será válida para k = 2. Se é válida para k = 2, será válida para k = 3. E, assim, por diante. Esse é a chamada demonstração por indução finita.

Feita essa demonstração, vamos calcular a média dos quadrados da variável uniforme:

$$E[X^2] = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + N^2}{N} = \frac{N\cdot(N+1)\cdot(2N+1)}{6N} = \frac{(N+1)\cdot(2N+1)}{6}$$

Utilizando a expressão da variância, temos:

$$Var[X] = E[X^2] - \mu^2 = \frac{(N+1)\cdot(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4}$$

O MMC entre 4 e 6 é igual a 12:

$$Var[X] = \frac{(N+1)\cdot(4N+2)}{12} - \frac{3\cdot(N+1)^2}{12}$$

$$Var[X] = (N+1)\cdot\left[\frac{4N+2-3\cdot(N+1)}{12}\right] = (N+1)\cdot\left[\frac{4N+2-3N-3}{12}\right]$$

$$Var[X] = (N+1)\cdot\left[\frac{N-1}{12}\right]$$

Por fim, podemos utilizar o produto notável de que o produto da soma pela diferença é igual à diferença de quadrados:

$$Var(X) = \frac{N^2-1}{12}$$

1.2. Distribuição de Probabilidades Contínua

A versão contínua da distribuição de probabilidades uniforme é um pouco menos comum.

1.2.1. Densidade de Probabilidades

Por ser uma distribuição contínua, fala-se em densidade de probabilidade uniforme.

$$f(x) = \frac{1}{b-a}; para\ a < x < b$$

$$f(x) = 0; se\ x \notin [a,b]$$

Tomemos como exemplo uma situação em que o tempo de espera de atendimento em um posto de combustível siga uma distribuição uniforme entre 5 e 25 minutos. Assim, podemos escrever:

$$f(x) = \frac{1}{25-5} = \frac{1}{20}; para\ a < x < b$$

Por ser uma densidade de probabilidades, a probabilidade de um único ponto específico é sempre nula. Desse modo, a probabilidade de que uma pessoa passe exatamente 20 minutos na fila é igual a zero. Analogamente, a probabilidade de que uma pessoa passe exatamente 12 minutos na fila também é igual a zero.

$$\boldsymbol{P(X=12)=0 \qquad P(X=20)=0}$$

A probabilidade em uma distribuição contínua só não é nula para um intervalo de valores. Nesse caso, ela será proporcional ao comprimento L do intervalo. Em outras palavras:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b - a}; se\ a < x_1, x_2 < b$$

Retornando ao nosso exemplo inicial, qual é a probabilidade de uma pessoa levar entre 12 e 20 para ser atendida?

$$P(12 < X < 20) = \frac{20 - 12}{25 - 5} = \frac{8}{20} = 0{,}40 = 40\%$$

Devemos tomar cuidado com o caso de os limites do intervalo extrapolarem os próprios limites da distribuição uniforme. Por exemplo, qual seria a probabilidade de o tempo de atendimento se situar entre 20 e 30 minutos?

Nesse caso, o limite superior de 30 minutos é maior que o tempo de 25 minutos, que é o tempo máximo da distribuição uniforme. Assim, devemos descartar toda a região entre 25 e 30 minutos. E temos:

$$P(20 < X < 30) = P(20 < X < 25) = \frac{25 - 20}{25 - 5} = \frac{5}{25} = 0{,}20 = 20\%$$

1.2.2. Valor Esperado e Variância

É possível demonstrar as expressões para o valor esperado e para a variância de uma variável contínua que segue distribuição uniforme:

- **Valor Esperado:** corresponde ao ponto médio do intervalo:

$$E[X] = \frac{a + b}{2}$$

- **Variância:** é dada em função da largura do intervalo:

$$Var[X] = \frac{(b - a)^2}{12}$$

2. Distribuição Geométrica

Embora seja relativamente comum em editais, a distribuição geométrica só costuma cair em provas específicas para a área de Estatística. Desse modo, caso você precise adiantar os seus estudos em Estatística, pode ser interessante pular essa distribuição.

A distribuição geométrica é também uma distribuição de probabilidades que parte da distribuição de Bernoulli. Ela visa a determinar qual a probabilidade de que **a primeira ocorrência de sucesso** ocorra **somente na k-ésima repetição do experimento.**

Para isso, devemos ter as mesmas restrições que já estudamos na distribuição binomial:

- cada repetição do experimento tem exclusivamente como resultado duas possibilidades, isto é, cada repetição individual do experimento é descrita por uma variável de Bernoulli;
- o resultado de cada tentativa é independente das demais;
- a probabilidade de sucesso a cada repetição do experimento é constante e igual a **p**.

Note que, ao contrário da distribuição binomial, **o único parâmetro da distribuição geométrica é a probabilidade de sucesso p.** Por esse motivo, uma forma de dizer que uma variável aleatória X segue uma distribuição geométrica é dizer $X \sim Geo\,(p)$.

Essa diferença existe, porque, na distribuição binomial, o número de repetições era apenas um parâmetro da distribuição. Já na distribuição geométrica, o número de repetições é exatamente a variável aleatória pesquisada.

Vejamos alguns exemplos de perguntas que remetem a uma distribuição geométrica:

- Em um lançamento sucessivo de uma moeda, qual a probabilidade de que a primeira "cara" seja observada somente no 6º lançamento?
- Em um lançamento sucessivo de um dado, qual a probabilidade de que o primeiro número 6 seja obtido no 3º lançamento?

Pela definição da distribuição geométrica, para que o sucesso aconteça somente no k-ésimo lançamento, devemos ter:

- (k – 1) falhas – cada falha tem probabilidade de ocorrência (1 – p);
- e, na sequência, um sucesso, cuja probabilidade de ocorrência é igual a p.

Assim, podemos representar graficamente essa situação:

$(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})$	x	$(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})$	x		x	$(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})$	x	$(\boldsymbol{p})$
1ª Falha		**2ª Falha**		**...**		**(k-1)ª Falha**		**Sucesso**

Como são (k – 1) falhas, note que estamos multiplicando (1 – p) por (1 – p) exatamente (k – 1) vezes consecutivas. Isso representa uma potência, então chegamos à seguinte expressão:

$$X \sim Geo\ (p) \therefore P(X = k) = (1 - p)^{k-1}.p$$

Com base nessa expressão, vamos responder aos exemplos apresentados.

Em um lançamento sucessivo de uma moeda, qual a probabilidade de que a primeira “cara” seja observada somente no 6º lançamento?

Nessa situação, a probabilidade de sucesso é p = 1/2, porque o lançamento de uma moeda só tem dois resultados possíveis: cara ou coroa. Então, podemos escrever:

$$1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 6) = (1 - p)^{n-1} \cdot p = \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$P(X = 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$$

Em um lançamento sucessivo de um dado, qual a probabilidade de que o primeiro número 6 seja obtido no 3º lançamento?

Nessa situação, a probabilidade de sucesso é p = 1/6, porque o lançamento de um dado tem seis resultados possíveis. Então, podemos escrever:

$$1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(X = 2) = (1 - p)^{n-1} \cdot p = \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$P(X = 2) = \left(\frac{5}{6}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

Outro ponto interessante é que o domínio da distribuição geométrica corresponde a todo o conjunto dos números naturais. Isso significa que podemos calcular o valor da probabilidade para qualquer número natural, mesmo que seja muito grande.

Isso quer dizer que existe uma probabilidade – pequena, mas existe – de que o primeiro número 6 seja obtido somente depois de 1 milhão de lançamentos de um dado.

Vamos, agora, obter os valores de uma distribuição geométrica com parâmetro p = 1/6.

k	P		k	P
1	0,166667		**9**	0,038761
2	0,138889		**10**	0,032301
3	0,115741		**11**	0,026918
4	0,096451		**12**	0,022431
5	0,080376		**13**	0,018693
6	0,06698		**14**	0,015577
7	0,055816		**15**	0,012981
8	0,046514			

Tabela: Valores Calculados para a Distribuição Binomial com p = 1/6

Se plotarmos o gráfico da distribuição geométrica, notaremos uma distribuição de probabilidade sempre decrescente:

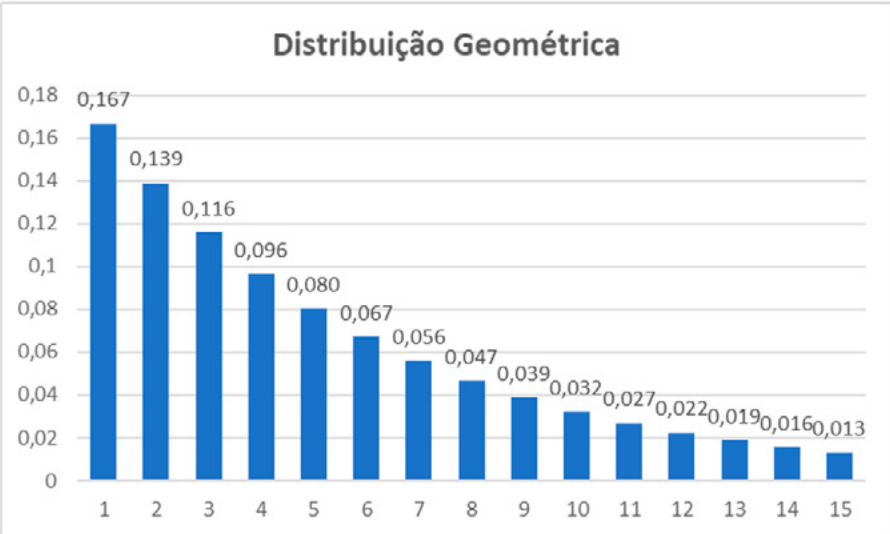


Figura: Distribuição Geométrica

2.1. Condição de Validade

Uma demonstração interessante que devemos fazer é que a soma de todos os valores possíveis das probabilidades de uma distribuição geométrica são iguais a 1. Essa é uma das condições impostas pelos Aaxiomas de Kolgomorov.

Embora essa demonstração seja interessante do ponto de vista matemático, gostaria de destacar que ela requer conhecimentos prévios de Progressão Geométrica. Portanto, caso você não tenha estudado esse conteúdo ainda, recomendo que você não veja essa demonstração e passe para a próxima seção. Basta se lembrar da condição imposta por Kolgomorov de que a soma das probabilidades deve ser igual a 1. Vale notar que, em questões de concurso, eu nunca vi demonstrações sendo cobradas. Elas servem apenas como curiosidade matemática.

Bom, se você ainda está por aqui nesta seção, então eu entendo que você quer aprender como demonstramos que a distribuição geométrica é uma distribuição de probabilidades válida. Então, vamos lá.

Como vimos, é possível calcular o valor da distribuição geométrica para qualquer número natural. Podemos escrever:

$$P(X = 1) = (1 - p)^0 \cdot p$$

$$P(X = 2) = (1 - p)^1 \cdot p$$

$$P(X = 3) = (1 - p)^2 \cdot p$$

$$\ldots$$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

Vamos montar o somatório de todas essas probabilidades:

$$S = P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = k)$$

$$S = (1 - p)^0 \cdot p + (1 - p)^1 \cdot p + \cdots + (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

Para facilitar as notações, podemos substituir q = 1 – p. Assim, teremos:

$$S = q^0 \cdot p + q^1 \cdot p + \cdots + q^{k-2} \cdot p + q^{k-1} \cdot p$$

Podemos, então, usar um artifício matemático interessante: basta multiplicar todo o somatório por **q.**

$$Sq = q^1 \cdot p + q^2 \cdot p + \cdots + q^{k-1} \cdot p + q^k \cdot p$$

Vamos, agora, realizar a subtração Sq – S, notando que seremos capazes de cortar vários termos:

$$Sq = \cancel{q^1 \cdot p} + \cancel{q^2 \cdot p} + \cancel{\cdots} + \cancel{q^{k-1} \cdot p} + \mathbf{q^k \cdot p}$$

$$(-) \quad S = \mathbf{q^0 \cdot p} + \cancel{q^1 \cdot p} + \cancel{\cdots} + \cancel{q^{k-2} \cdot p} + \cancel{q^{k-1} \cdot p}$$

$$Sq - S = q^k \cdot p - q^0 \cdot p$$

Assim, a diferença calculada é:

$$Sq - S = q^k \cdot p - q^0 \cdot p$$

$$S(q-1) = p \cdot [q^k - 1]$$

Como a distribuição geométrica abrange todos os números naturais, o último termo é $k \to \infty$. Nesse caso, o termo q^k tende a zero.

$$S(q-1) = p \cdot [0 - 1]$$

$$\therefore S = \frac{-p}{q-1}$$

Agora, vamos usar a substituição $q = 1 - p$:

$$\therefore S = \frac{-p}{q-1} = \frac{-p}{(1-p)-1} = \frac{-p}{-p} = 1$$

Portanto, a distribuição geométrica atende aos axiomas de Kolgomorov.

Obs.: Caso você tenha ficado em dúvida de por que q^k tende a zero, quando k tende a infinito, você pode tomar um exemplo. Pense em q = 1/2 e uma calculadora.

A conta $(1/2)^6$ consiste em pegar o número 1 e dividir por 2 seis vezes. O resultado a que você chegará é 0,015625.

Se você continuar a conta, isto é, continuar dividindo por 2, você pegará novas potências de 2. E, cada vez mais, os números vão ficando pequenos. Vai chegar um momento em que a conta vai ficar tão pequena que a sua calculadora simplesmente dirá o valor 0.

2.2. Média e Variância

Primeiramente, vamos anotar a média e a variância de uma variável aleatória distribuída geometricamente, com probabilidade de sucesso a cada tentativa **p:**

$\boldsymbol{E[X] = \frac{1}{p}}$	$\boldsymbol{Var[X] = \frac{1-p}{p^2}}$

A esperança da distribuição geométrica é bastante intuitiva. Pense no exemplo do lançamento de um dado. Quantos lançamentos serão necessários para que o primeiro número 6 seja obtido?

Ora, sabendo que a probabilidade de o dado dar 6 é igual a 1/6, é de se esperar que, na média, a cada 6 lançamentos, 1 deles retorne o número 6. Portanto, seriam necessários 6 lançamentos, em média, para garantir que teremos um sucesso.

Mais uma vez, é possível provar ambos os resultados matematicamente. Porém, essas demonstrações utilizarão também conceitos de Progressão Geométrica. Fica a mesma consideração da seção anterior: se você não estudou esse conteúdo, recomendo pular para a próxima seção.

Bom, já que você está aqui, vamos fazer a nossa demonstração. Vamos nos lembrar de como é distribuída a variável geométrica:

k	$P(X = k)$
1	$(1-p)^0.p$
2	$(1-p)^1.p$
3	$(1-p)^2.p$
...	...
k	$(1-p)^{k-1}.p$

Pela definição de esperança, basta somar os valores de **k** multiplicados pelas probabilidades a eles associadas.

$$E[X] = 1.(1-p)^0p^1 + 2.(1-p)^1.p + \cdots + k.(1-p)^{k-1}.p$$

Mais uma vez, vamos recorrer à substituição q = 1 – p para facilitar nossas contas:

$$E[X] = 1.q^0p^1 + 2.q^1.p^1 + \cdots + k.q^{k-1}.q$$

Vamos, mais uma vez, multiplicar:

$$q.E[X] = 1.q^1p^1 + 2.q^2.p^1 + \cdots + k.q^k.q$$

Pode-se, então, tomar a diferença:

$$\begin{array}{rrccl} & E[X] = 1.q^0p^1 + & \boxed{2.q^1.p^1} & + \boxed{3.q^2\text{p} \ldots} & + k.q^{k-1}.q \\ (-) & q.E[X] = & \boxed{1.q^1p^1} & + \boxed{2.q^2.p^1 + \cdots} & + k.q^k.q \\ \hline & E[X] - q.E[X] = 1.q^0p + & \boxed{(2-1)q^1p} & + \boxed{(3-2)q^2p} & + \cdots \end{array}$$

Observe que a diferença E[X] – qE[X] resultou em uma soma já conhecida:

$$E[X] - q.E[X] = q^0p + q^1p + q^2.p + q^3.p + \cdots$$

A soma ao lado direito é exatamente igual a 1, pois é a soma de todas as probabilidades associadas à distribuição geométrica. Então, temos:

$$E[X] - q.E[X] = 1$$

$$E[X].[1 - q] = 1$$

$$\therefore E[X] = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

Já a demonstração da variância requer o uso de integral e momentos, então, ficará para outra ocasião, pois a teoria que temos até o momento não é suficiente.

2.3. Probabilidade Acumulada

Assim como no caso da distribuição binomial, é possível que uma questão de prova cobre o somatório dos termos de uma distribuição geométrica.

Essa situação aparecerá quando aparecerem **palavras-chave** como "no mínimo", "no máximo" e "entre". Suponha, por exemplo, que um enunciado pergunte o seguinte:

Qual a probabilidade de que, no lançamento sucessivo de uma moeda, a primeira cara ocorra até o kº lançamento?

Nesse caso, o enunciado pediu que a primeira cara aconteça até o kº lançamento, isto é, ela pode acontecer no primeiro lançamento (X = 1), no segundo lançamento (X = 2), no terceiro lançamento (X = 3), e assim por diante, até o k-ésimo lançamento (X = k). Logo, podemos escrever essa soma:

$$P(X \leq k) = P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = k)$$

Agora, vamos substituir os valores da distribuição geométrica:

$$P(X \leq k) = p + (1-p).p + (1-p)^2.p + \cdots + (1-p)^{k-1}.p$$

Observe que temos a soma dos termos de uma progressão geométrica. Usando a fórmula da soma dos termos da PG, teremos:

$$P(X \leq k) = \frac{[1-(1-p)^k]}{1-(1-p)} \cdot p$$

$$P(X \leq k) = \frac{[1-(1-p)^k]}{p} \cdot p$$

$$\therefore P(X \le k) = [1 - (1-p)^k]$$

Dessa forma, se a pergunta fosse: qual a probabilidade de que a primeira cara aconteça até o terceiro lançamento?

Nesse caso, a pergunta foi P (X ≤ 3)? Basta substituir na fórmula:

$$P(X \le 3) = [1 - (1-p)^3]$$

$$P(X \le 3) = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3\right]$$

$$P(X \le 3) = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \left[1 - \frac{1}{8}\right] = \frac{7}{8}$$

Outra expressão que pode ser pedida é a probabilidade complementar. Pense, por exemplo, em uma pergunta como a seguinte:

Qual a probabilidade de que, no lançamento sucessivo de uma moeda, a primeira cara não ocorra até o kº lançamento?

Nessa situação, queremos P (X > k), pois queremos que o primeiro sucesso aconteça somente a partir do lançamento k + 1 – ésimo. Observe que essa é exatamente a probabilidade complementar à que foi calculada anteriormente. Então, podemos escrever:

$$P(X > k) = 1 - P(X \le k) = 1 - [1 - (1-p)^k]$$

$$\therefore P(X > k) = (1-p)^k$$

2.4. Esquecimento

A distribuição geométrica é semelhante a um interessante peixe retratado no filme Procurando Nemo: a Dory.

De forma semelhante à simpática Dory, a distribuição geométrica esquece o passado.

O que isso significa, professor?

Imagine que desejamos determinar a probabilidade de que, no lançamento sucessivo de uma moeda, a primeira coroa seja obtida no 6º lançamento.

Agora, suponha que já começamos a fazer os lançamentos e que, em determinado ponto, já fizemos três tentativas e, até o momento, não foi obtido nenhum sucesso. Assim, já sabemos que X > 3, pois o primeiro sucesso só poderá ser obtido a partir da 4ª tentativa.

Restam, portanto, mais 3 tentativas para chegar ao 6º lançamento, que era o desejado.

Podemos nos fazer, então, duas perguntas: Sabendo que já foram realizadas três tentativas, qual é a probabilidade de que, agora, o primeiro sucesso seja obtido somente depois de mais 6 lançamentos?

Ter o primeiro sucesso obtido nessa situação é uma situação equivalente a obter o primeiro sucesso somente no 9º lançamento, contando a partir do lançamento original, sabendo que X > 3, porque já foram feitos 3 lançamentos malsucedidos.

$$P(X = 9 \mid X > 3) = P(X = 6)$$

É possível, sim, demonstrar essa propriedade. A probabilidade condicional é dada pela definição:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Substituindo A por X = 9 e B por X > 3, teremos:

$$P(A|B) = \frac{(1-p)^8.p}{P(X > 3)}$$

Como vimos na seção anterior, P (X > 3) = $(1-p)^3$. Então, podemos escrever:

$$P(X = 9|X > 3) = \frac{(1-p)^8.p}{(1-p)^3} = (1-p)^5.p = P(X = 6)$$

Podemos, então, generalizar a propriedade de esquecimento da distribuição geométrica:

$$\boxed{P(X = b\ |X > a) = P(X = b - a)}$$

O significado dessa expressão é que a probabilidade de que o primeiro sucesso seja obtido depois de 6 lançamentos é a mesma, independentemente de já termos começado os lançamentos ou não.

001. (INÉDITA/2021) Um oftalmologista realiza um teste de estimulação da retina, que tem probabilidade de sucesso igual a 80%. Caso o teste não seja bem-sucedido, ele precisa realizar novamente o teste. Assim que o teste for bem-sucedido, ele poderá fazer a cirurgia. Sabendo que o médico leva 10 minutos para realizar um teste, determine:

a) A probabilidade de que precise de 3 tentativas para poder realizar a cirurgia.

b) A probabilidade de que o oftalmologista precise de mais de 40 minutos para testar a estimulação da retina antes de realizar a cirurgia.

c) O tempo médio que o cirurgião leva para fazer a estimulação da retina de seus pacientes.

O sucesso na estimulação da retina do paciente é uma variável de Bernoulli. E essa questão estuda a distribuição de probabilidade do primeiro sucesso.

a) A probabilidade de que ele precise de 3 tentativas é dada pela distribuição geométrica: o oftalmologista precisa de 2 falhas e um sucesso.

$$P(3) = (1 - p)^2 \cdot p$$

$$P(3) = (1 - 0{,}80)^2 \cdot 0{,}80 = (0{,}20)^2 \cdot 0{,}80$$

$$P(3) = (0{,}04) \cdot 0{,}80 = 0{,}032$$

Portanto, essa probabilidade é igual a 3,2%.

b) Para que o cirurgião gaste mais de 40 minutos, ele precisa de pelo menos 4 tentativas. Essa probabilidade é a complementar da probabilidade acumulada da distribuição binomial.

$$P(X > 4) = (1 - p)^4 = (1 - 0{,}80)^4 = (0{,}20)^4 = 0{,}0016 = 0{,}16\%$$

c) O valor esperado de uma distribuição geométrica é igual ao inverso da probabilidade de sucesso de cada evento. Então, podemos escrever:

$$E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}80} = 1{,}25$$

Como cada tentativa leva 10 minutos, então o tempo necessário é:

$$t = 1{,}25.10 = 12{,}5\ min$$

a) 3,2%; b) 0,16%; c) t = 12,5 min.

Direto do Concurso

002. (CESPE/TELEBRAS/ESPECIALISTA EM GESTÃO DE TELECOMUNICAÇÕES/ESTATÍSTICA/2013) O número X de realizações de determinado experimento necessárias para obter o primeiro sucesso segue a distribuição geométrica $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. Considerando $(x_1,..., x_n)$ uma amostra de *X*, julgue o item subsequente. O estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro *p* é dado por $\hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$, em que $\bar{x}$ é a média amostral.

Na distribuição geométrica, a média amostral do número de tentativas necessárias para se obter o primeiro sucesso é igual ao inverso do parâmetro **p**. Então, a afirmação está correta.

Certo.

003. (FGV/DPE-RJ/TÉCNICO SUPERIOR ESPECIALIZADO/ESTATÍSTICA/2019) Para que as pessoas que aguardam atendimento em uma repartição pública fiquem acomodadas com relativo conforto, é necessário que o recinto seja dimensionado à razão de um metro quadrado de espaço para cada cidadão em espera.

Se o número de pessoas que comparece, por dia, tem distribuição geométrica, com parâmetro p = 0,2, é correto afirmar que:

a) em função da distribuição do número de pessoas, o tamanho médio ideal do recinto deve ser de 16 metros quadrados;

b) a probabilidade de que uma sala de espera com 4 metros quadrados não seja confortável em certo dia é $(0,2).(0,8)^4$;

c) a probabilidade de que uma sala com 3 metros quadrados fique subutilizada em certo dia é igual a 0,448;

d) considerando uma sala de espera que tem 20 metros quadrados e o fato de que 18 pessoas já estão aguardando, a probabilidade de que atinja sua lotação exata é igual a 0,16;

e) a distribuição de probabilidade do tamanho (A) de sala ideal, a cada dia, é dada por P (A = x) = $(0,2)^2.(0,8)^{2x}$ para X = 1,2,3,...

Essa questão não tem muito sentido, tendo em vista que a distribuição geométrica não costuma ser aplicada nesse contexto. Seria um contexto mais adequado para a distribuição de Poisson. Porém, nós não vamos discutir com o enunciado e vamos julgar as afirmações com base na distribuição geométrica.

a) A média de uma distribuição geométrica é igual ao inverso do parâmetro de probabilidade. Portanto, nesse caso, a média é igual a:

$$E[X] = \frac{1}{0,2} = 5$$

Como o tamanho médio do recinto é igual a 1 metro quadrado por pessoa, esse tamanho médio será igual a 5 metros quadrados.

b) Para isso, deve-se ter mais de 4 pessoas nessa sala. A probabilidade de ocorrência de mais de 4 pessoas pode ser calculada pelo complementar da probabilidade acumulada, como mostrado a seguir:

$$P[X > 4] = (1 - p)^4 = (1 - 0,2)^4 = (0,8)^4$$

c) Para que a sala seja subutilizada, é preciso que somente 1 ou 2 pessoas estejam presentes na sala. Na distribuição geométrica, a probabilidade do 0 é nula. Então, podemos recorrer à probabilidade acumulada:

$$P(X \leq 3) = 1 - (1 - p)^3 = 1 - (1 - 0,2)^3$$

$$P(X \leq 3) = 1 - (0,8)^3 = 1 - 0,512 = 0,488$$

Portanto, a afirmação está errada.

d) Como já há 18 pessoas na sala, é preciso que mais 2 cheguem para que ela atinja a sua lotação exata. Então, teríamos:

$$P(X = 2) = (0{,}8)^1 \cdot 0{,}2 = 0{,}8.0{,}2 = 0{,}16$$

Afirmação certa.

e) A expressão da distribuição geométrica é:

$$P(x) = (1 - p)^{x-1} \cdot p = (1 - 0{,}2)^{x-1} \cdot 0{,}2$$

$$P(x) = (0{,}8)^{x-1} \cdot 0{,}2$$

Portanto, a afirmação está errada.

Letra d.

---

004. (FCC/TCE-RR/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA/2015) Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes com distribuição geométrica com médias dadas, respectivamente, por 3 e 4. Considere que X e Y representam o número de repetições do experimento até a ocorrência do primeiro sucesso. Nessas condições, a probabilidade denotada por P(X ≤ 2,Y = 3) é igual a:

a) 3/25.
b) 5/48.
c) 5/64.
d) 7/64.
e) 5/32.

Essa questão rigorosamente cobra uma distribuição de duas variáveis aleatórias independentes. Porém, isso não vai ser diferente do que estamos acostumados.

A probabilidade de dois eventos independentes é igual ao produto das probabilidades.

Então, devemos primeiramente obter as duas probabilidades separadas, isto é, P (X ≤ 2) e P (Y = 3). Como essas duas variáveis são distribuídas geometricamente, o valor esperado é igual ao inverso da probabilidade. Assim, podemos calcular as probabilidades associadas às distribuições X e Y:

$$E[X] = \frac{1}{p_X} \therefore p_X = \frac{1}{E[X]} = \frac{1}{3}$$

$$E[Y] = \frac{1}{p_Y} \therefore p_Y = \frac{1}{E[Y]} = \frac{1}{4}$$

Agora, podemos calcular as probabilidades. Para a variável aleatória Y, podemos escrever:

$$P(Y=3)=(1-p)^2\cdot p$$

$$P(Y=3)=\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$$

E, agora, vamos calcular P (X≤2), lembrando-nos da probabilidade acumulada na distribuição geométrica:

$$P(X\le 2)=1-(1-p)^2=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$P(X\le 2)=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

Dessa forma, a probabilidade desejada pode ser obtida como o produto dos dois passos calculados anteriormente:

$$P(X\le 2,Y=3)=P(X\le 2)\cdot P(Y=3)=\frac{9}{64}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{64}$$

Letra c.

---

005. (CESPE/TELEBRAS/ESPECIALISTA EM GESTÃO DE TELECOMUNICAÇÕES/ESTATÍSTICA/2013) O número X de realizações de determinado experimento necessárias para obter o primeiro sucesso segue a distribuição geométrica $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. Considerando $(x_1,\ldots, x_n)$ uma amostra de *X*, julgue o item subsequente. Se, após realizadas cinco séries do experimento, cada série tiver terminado com o primeiro sucesso e os números de experimentos, em cada série, tiverem sido 4, 7, 6, 5 e 3, então o estimador de máxima verossimilhança para *p* é igual a 0,2.

Vamos calcular a média amostral:

$$\mu=\frac{4+7+6+5+3}{5}=\frac{25}{5}=5$$

No estimador de máxima verossimilhança, consideramos que a média populacional da variável é igual à média amostral, no caso, igual a 5. Em uma distribuição geométrica, podemos estabelecer a relação entre a média populacional e o parâmetro de probabilidade:

$$E[X]=\frac{1}{p}\therefore p=\frac{1}{E[X]}=\frac{1}{5}=0{,}2$$

Certo.

---

006. (FCC/CNMP/ESTATÍSTICA/2015) Utilizando o método dos momentos, deseja-se obter uma estimativa do parâmetro p da distribuição geométrica $P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}$, em que x = 1, 2, 3,... Para isto, observou-se em 6 experiências quando determinado evento com probabilidade p ocorreu pela primeira vez. A tabela abaixo apresenta o resultado destas observações:

Experiência Ocorrência pela primeira vez

1 segunda.

2 quarta.

3 primeira.

4 segunda.

5 terceira.

6 terceira.

O valor desta estimativa, com base nestas experiências, é, em %, de:

a) 15.

b) 30.

c) 75.

d) 60.

e) 40.

Obs.: Considere que o método dos momentos nada mais é do que o estimador de máxima verossimilhança.

Para o estimador de máxima verossimilhança, vamos calcular a média amostral:

$$\mu = \frac{2+4+1+2+3+3}{6} = \frac{15}{6} = 2{,}5$$

Em uma distribuição geométrica, podemos estabelecer a relação entre a média populacional e o parâmetro de probabilidade:

$$E[X] = \frac{1}{p} \therefore p = \frac{1}{E[X]} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4 = 40\%$$

Letra e.

007. (FCC/TRT-19ª REGIÃO AL/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA/2014) Em uma realização de 4 experiências, verificou-se que um acontecimento, cuja probabilidade é p, ocorreu, pela primeira vez, na terceira, segunda, terceira e primeira experiências, respectivamente. Com base nestas experiências e utilizando o método dos momentos, deseja-se obter uma estimativa pontual do parâmetro p da distribuição geométrica $P(X = x) = (1-p)^{x-1}\, p$ (x = 1, 2, 3...). O valor encontrado para esta estimativa é de:

a) 3/4.
b) 1/2.
c) 1/3.
d) 2/3.
e) 4/9.

Para o estimador de máxima verossimilhança, vamos calcular a média amostral:

$$\mu = \frac{3+2+3+1}{4} = \frac{9}{4}$$

Em uma distribuição geométrica, podemos estabelecer a relação entre a média populacional e o parâmetro de probabilidade:

$$E[X] = \frac{1}{p} \therefore p = \frac{1}{E[X]} = \frac{4}{9}$$

Letra e.

3. Distribuição de Poisson

Assim como a distribuição geométrica, é bastante comum que a distribuição de Poisson esteja frequentemente em editais. Porém, questões de provas dessa distribuição são mais cobradas somente nos concursos específicos da área de Estatística.

Você também pode pular essa distribuição. Porém, essa é uma distribuição bem simples, com poucas fórmulas, então, pode ser que o custo-benefício dela compense.

A distribuição de Poisson expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer, isto é, a quantidade de ocorrências de um determinado fenômeno em um intervalo de tempo T.

Pense, por exemplo, que, em média, chegam 4 clientes por hora em um supermercado. A probabilidade de que cheguem 10 clientes em uma mesma hora naquele supermercado pode ser calculada pela distribuição de Poisson.

Essa distribuição média tem um único parâmetro: o parâmetro λ. Esse parâmetro é justamente a média de ocorrência dos eventos. Assim, a distribuição de probabilidade é dada por:

$$X \sim Po\ (\lambda) \therefore P\{X = k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Nessa expressão, P {X = k} representa a probabilidade de k ocorrências no intervalo de tempo considerado.

O número "**e**" é conhecido como **Número de Euler** e é uma importante referência para o estudo de funções exponenciais. Esse número é um número irracional, sendo aproximadamente igual a:

$$e \cong 2{,}71828 \ldots$$

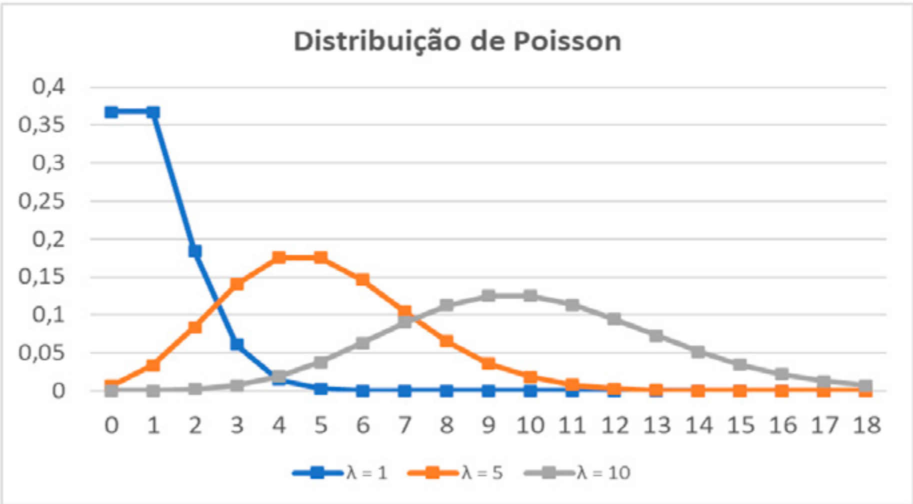
Considero desnecessário saber o valor aproximado do número de Euler. O enunciado fornecerá para você diretamente as potências necessárias para calcular a distribuição de probabilidade de que trata a questão.

É bastante complicado provar a condição de validade para a distribuição de Poisson, bem como sua média e variância. Por isso, não faremos a demonstração aqui neste material.

Memorize, então, uma interessante propriedade: a variância de uma distribuição de Poisson é igual à sua média.

$$E[X] = \lambda$$
$$Var[X] = \lambda$$

Vamos desenhar o gráfico referente a essa distribuição de probabilidade:



Memorize, então, uma interessante propriedade: a variância de uma distribuição de Poisson é igual à sua média.

$$E[X] = \lambda$$
$$Var[X] = \lambda$$

Vamos desenhar o gráfico referente a essa distribuição de probabilidade.

Observe que a distribuição sempre atinge um pico para k muito próximo do parâmetro λ. Além disso, quanto maior o parâmetro λ, mais espalhada será a distribuição de probabilidades.

Pense, por exemplo, que o número médio de clientes que chegam a um supermercado seja igual a 10 clientes por hora. Nesse caso, para expressar a probabilidade de que **k** clientes cheguem em uma determinada hora, teríamos uma distribuição de Poisson, cujo parâmetro é λ = 10.

Por outro lado, pense que o número médio de clientes que chegam em uma loja de ternos seja igual a 1 cliente por hora. Nesse caso, teríamos uma distribuição de Poisson, com parâmetro λ = 1.

Concorda comigo que, se chega 1 cliente por hora na loja de ternos, é muito pouco provável que, em uma determinada hora, cheguem 5 clientes de uma vez, não é?

Por outro lado, no supermercado, é relativamente provável que haja um horário de movimento mais fraco, em que apareçam 5 clientes em uma hora. Também é relativamente provável que, em outro horário, o movimento esteja melhor e que apareçam 15 clientes em uma única hora.

Direto do Concurso

008. (FEPESE/ISS CRICIÚMA/AUDITOR-FISCAL DE RENDAS E TRIBUTOS/2017) Considere as seguintes descrições de distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias:

- **Distribuição 1:** expressa a probabilidade de que uma dada quantidade de eventos ocorra em um dado intervalo de tempo, se conhecemos a taxa média de ocorrência desses eventos nesse intervalo de tempo, e se a ocorrência de um evento é independente do momento da ocorrência do evento anterior.
- **Distribuição 2:** expressa o número de sucessos numa sequência de **n** experimentos feitos de forma que: cada experimento tem exclusivamente como resultado duas possibilidades, sucesso ou fracasso; cada experimento é independente dos demais; e a probabilidade de sucesso em cada evento é sempre a mesma.

As distribuições descritas acima são, respectivamente:

a) 1: normal • 2: qui-quadrado.
b) 1: de Poisson • 2: normal.
c) 1: de Poisson • 2: binomial.
d) 1: qui-quadrado • 2: normal.
e) 1: qui-quadrado • 2: binomial.

A definição de uma distribuição de Poisson trata sobre eventos com taxa média de ocorrência conhecida. Ela diz respeito a um intervalo de tempo e permite o cálculo da probabilidade de ocorrência de eventos neste intervalo. A distribuição 1 é a de Poisson.
A respeito da definição de distribuição binomial, sabemos que possui as variáveis n (número de experimentos), k (ocorrências desejadas, sucessos) e p (probabilidade destas ocorrências acontecerem), que, para este caso, é igual para todas as tentativas. Na distribuição binomial, há apenas duas alternativas para cada tentativa: sucesso ou falha. A distribuição 2 é a binomial.
Letra c.

(CESPE/EBSERH/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICO/2018) O total diário – X – de pessoas recebidas em uma unidade de pronto atendimento (UPA) para atendimento ambulatorial, e o total diário - Y - de pessoas recebidas nessa mesma UPA para atendimento de urgência segue processos de Poisson homogêneos, com médias, respectivamente, iguais a 20 pacientes/dia e 10 pacientes/dia, e as variáveis aleatórias X e Y são independentes. Sabe-se que, em média, a necessidade de cuidados hospitalares atinge 10% dos pacientes do atendimento ambulatorial e 90% dos pacientes do atendimento de urgência.

A partir dessa situação hipotética, julgue o próximo item, considerando que o registro da necessidade de cuidados hospitalares seja feito no momento em que o paciente chegue à UPA e que H seja a quantidade diária registrada de pacientes com necessidades de cuidados hospitalares.

009. (CESPE/EBSERH/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICO/2018) A média da variável aleatória H é igual a 11 pacientes/dia.

Observe que os pacientes do atendimento ambulatorial chegam a uma taxa média de 20 pacientes por dia e que 10% deles necessitam de cuidados hospitalares – portanto, são 2 em média por dia; já os pacientes do atendimento de urgência chegam a uma taxa média de 10 pacientes por dia e que 90% deles necessitam de cuidados hospitalares – portanto, são 9 em média por dia.

Assim, a média da variável H pode ser expressa matematicamente pelo valor esperado:

$$E[H] = 0{,}10.20 + 0{,}90.10 = 2 + 9 = 11$$

Certo.

010. (CESPE/EBSERH/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICO/2018) Considerando a equivalência 1 dia=24 horas, então o tempo médio de chegada entre dois pacientes consecutivos para o atendimento de urgência nessa UPA é inferior a 3 horas.

Note que são 10 pacientes que chegam por dia para o atendimento de urgência. Como 1 dia tem 24 horas, então o tempo médio de chegada de um paciente é:

$$t = \frac{24}{10} = 2{,}4\ h$$

De fato, o tempo médio de chegada é inferior a 3 horas.

Certo.

011. (CESPE/EBSERH/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICO/2018) Supunha que, nessa UPA, o sistema de atendimento seja descrito por um modelo de fila simples com servidor único e baseado no processo de nascimento e morte, e que X +Y seja o total diário de pessoas atendidas na UPA. Nessa situação, o processo estará em estado de equilíbrio se a taxa de atendimento de pacientes for igual ou superior a 30 pacientes por dia.

O valor esperado é um operador linear. Portanto, a esperança da soma é igual à soma das esperanças:

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[X+Y] = 20 + 10 = 30$$

Portanto, a taxa de atendimento de equilíbrio é igual a 30 pacientes por dia. Como o enunciado fala em "igual ou superior", a afirmação está correta, até porque "igual ou superior" já inclui o "igual".

Certo.

---

012. (CESPE/EBSERH/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICO/2018) A soma X + Y segue uma distribuição de Poisson com média e variância respectivamente iguais a 30 e 900.

O valor esperado é um operador linear. Portanto, a esperança da soma é igual à soma das esperanças:

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[X+Y] = 20 + 10 = 30$$

Assim, de fato, a média é igual a 30. Porém, na distribuição de Poisson, a média é igual à variância. Dessa forma, a variância deveria ser igual a 30, e não 900.

Errado.

---

013. (FCC/SEFAZ-BA/ESTATÍSTICO/2019) Uma variável aleatória X representa o número de contribuintes que chega a cada hora para ser atendido em um órgão público. Supõe-se que X tem distribuição de Poisson, com parâmetro λ, ou seja, $P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, sendo e a base do logaritmo (ln) tal que ln(e) = 1. Se P(x = 2) = P(x = 3), então a probabilidade de que menos de 3 contribuintes cheguem em 1 hora é:

Dados:

$e^{-1} = 0{,}37$,

$e^{-2} = 0{,}14$, e

$e^{-3} = 0{,}05$.

a) 30,0%.

b) 42,5%.

c) 22,5%.

d) 57,5%.

e) 37,5%.

Questão bastante direta sobre a distribuição de Poisson.

$$P(X = 2) = P(X = 3)$$

$$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{\lambda^3 . e^{-\lambda}}{3!}$$

Cortando as exponenciais dos dois lados, temos:

$$\frac{\lambda^2}{2.1} = \frac{\lambda^3}{3.2.1}$$

$$\frac{\lambda^2}{2} = \frac{\lambda^3}{6}$$

Dessa forma, como $\lambda \neq 0$, podemos simplificar dos dois lados:

$$\frac{1}{2} = \frac{\lambda}{6} \therefore \lambda = \frac{6}{2} = 3$$

Encontramos o parâmetro da exponencial. Com isso, vamos calcular a expressão pedida.

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

Precisamos calcular as três probabilidades envolvidas:

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = \frac{1. e^{-3}}{1} = 0{,}05$$

$$P(X = 1) = \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = \frac{3^1 . e^{-3}}{1} = 3.0{,}05 = 0{,}15$$

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{3^2 . e^{-3}}{2.1} = \frac{9.0{,}05}{2} = 0{,}225$$

De posse dos três valores de probabilidade, podemos calcular a expressão pedida:

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X < 3) = 0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}225 = 0{,}425 = 42{,}5\%$$

Letra b.

014. (FCC/DPE-SP/ESTATÍSTICO/2015/ADAPTADA) Suponha que o número mensal de prisões em flagrante, comunicadas a uma Defensoria Pública de uma determinada região, tenha distribuição de Poisson com média 9. Nessas condições, a probabilidade de serem comunicadas, à Defensoria, pelo menos 3 prisões em flagrante em um período de 10 dias é igual a:
Dados:
$e^{-2} = 0{,}14$; $e^{-3} = 0{,}05$.
a) 0,575.
b) 0,425.
c) 0,525.
d) 0.475.
e) 0,555.

A média da distribuição de Poisson é dada pelo próprio parâmetro λ. Foi fornecida a média mensal (30 dias), que é $\lambda_{30} = 9$. Para o período de 10 dias, a média seria proporcional:

$$\frac{\lambda_{10}}{10} = \frac{\lambda_{30}}{30}$$

$$\frac{\lambda_{10}}{10} = \frac{9}{30}$$

$$\therefore \lambda_{10} = \frac{9}{30} \cdot 10 = \frac{9}{3} = 3$$

Dessa forma, a média da Poisson é igual a 3.
Queremos calcular a probabilidade de pelo menos 4 prisões em flagrante. Para isso, é mais fácil calcular a probabilidade complementar: ou seja, de haver 3 ou menos prisões em flagrante.

$$P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3)$$

Dessa forma, basta calcular P (X = 0), P (X = 1) e P (X = 2):

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = \frac{1.0{,}05}{1!} = 0{,}05$$

$$P(X = 1) = \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = \frac{3.0{,}05}{1!} = 0{,}15$$

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{3^2.0{,}05}{2!} = \frac{9.0{,}05}{2.1} = 0{,}225$$

Assim, temos:

$$P(X \leq 3) = 0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}225 = 0{,}425$$

Por fim, temos:

$$P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0{,}425 = 0{,}575$$

Letra a.

---

015. (FGV/TJ-RO/ESTATÍSTICO/2015) O número de recursos em um processo é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λ = 5. Então a probabilidade de que um processo tenha menos do que 2 recursos é:

a) $31e^{-5}$.
b) $6e^{-5}$.
c) $5e^{-5}$.
d)$1 - 6e^{-5}$.
e) $1 - 31e^{-5}$.

Questão bastante direta sobre a distribuição de Poisson.

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = \frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!}$$

$$P = e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!}\right) = e^{-5}\left(\frac{1}{1} + \frac{5}{1}\right) = 6e^{-5}$$

Letra b.

016. (FCC/SEFAZ-PI/ANALISTA DO TESOURO ESTADUAL/2015) O número de falhas mensais de um computador é uma variável que tem distribuição de Poisson com média λ. Sabe-se que λ é igual à média de uma distribuição uniforme no intervalo [2, 4]. Nessas condições, a probabilidade de o computador apresentar exatamente duas falhas no período de 15 dias é igual a:

Dados: $e^{-3} = 0,05$; $e^{-1,5} = 0,22$.

a) 22,50%.
b) 12,50%.
c) 24,15%.
d) 15,25%.
e) 24,75%.

O número de falhas mensais terá a média exatamente igual ao ponto médio do intervalo fornecido:

$$\lambda_{30} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Porém, não nos interessam as falhas mensais. Estamos interessados apenas nas falhas no período de 15 dias. Se a média de falhas em 30 dias é de 3 falhas, então, a média de falhas em metade do período será também a metade, portanto 1,5 falhas.

$$\therefore \lambda_{15} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Agora, podemos calcular a probabilidade de ocorrência de exatamente duas falhas:

$$P(X=2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-1{,}5}(1{,}5)^2}{2!} = \frac{0{,}22.2{,}25}{2}$$

$$P(X=2) = 0{,}11.2{,}25 = 0{,}2475 = 24{,}75\%$$

Letra e.

---

017. (FCC/TRE-SP/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA/2012) Suponha que o número de eleitores que chegam a uma seção de uma Zona Eleitoral no dia de uma determinada eleição, siga a uma distribuição de Poisson com uma média de chegada de 30 eleitores por meia hora. A probabilidade de que cheguem menos de 3 eleitores em 5 minutos é:

a) 12,5 e^{-5}.
b) 12,5 e^{-6}.
c)18,5 e^{-5}.
d) 17,5 e^{-5}.
e)17,5 e^{-6}.

A média de eleitores que chegam em 5 minutos deve ser tomada como proporcional a 5 minutos.

$$\lambda_5 = \frac{30}{6} = 5$$

Como queremos que cheguem menos de 3 eleitores, queremos:

$$P = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}$$

$$P = e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!}\right) = e^{-5}\left(\frac{1}{1} + \frac{5}{1} + \frac{25}{2}\right) = 18{,}5e^{-5}$$

Letra c.

---

018. (FCC/TRT-11ª REGIÃO/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA/2017) Suponha que:

I – A variável X, que representa o número mensal de suicídios no país A, tem distribuição de Poisson com média mensal 2.

II – A variável Y, que representa o número mensal de suicídios no país B, tem distribuição de Poisson com média mensal 4.

III – As variáveis X e Y são independentes.

Nessas condições, a probabilidade de em determinado mês ocorrerem menos de 2 suicídios no país A e exatamente 2 no país B é igual a:

Dados:

$e^{-1} = 0{,}37$.

$e^{-2} = 0{,}135$.

$e^{-4} = 0{,}018$.

a) 4,122%.

b) 5,548%.

c) 5,832%.

d) 3,565%.

e) 4,468%.

Primeiramente vamos calcular P(A), que representa a probabilidade de ocorrerem menos de dois suicídios no país A:

$$P(A) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = \frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!}\text{p}$$

$$P(A) = \frac{0{,}135.1}{1} + \frac{0{,}135.2}{1} = 0{,}135 + 0{,}27 = 0{,}405$$

Agora, vamos calcular a probabilidade de ocorrerem exatamente dois suicídios no país B:

$$P(B) = P(Y = 2) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^2}{2!} = \frac{e^{-4}.4^2}{2} = \frac{0{,}018.16}{2} = 0{,}144$$

Por fim, queremos a probabilidade da intersecção, pois o enunciado usa a palavra E:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0{,}405.0{,}144 = 0{,}05832 = 5{,}832\%$$

Letra c.

---

019. (FCC/INFRAERO/ESTATÍSTICO/2011) O número de passageiros que chegam a um posto de atendimento de uma empresa de aviação para fazer o check-in às quartas-feiras pela manhã tem distribuição de Poisson com taxa média de 5 passageiros por minuto. A probabilidade de chegar a esse mesmo posto, numa quarta-feira pela manhã, pelo menos 2 passageiros em 30 segundos, é de:

Dados: $e^{-1} = 0{,}368$; $e^{-2} = 0{,}135$; $e^{-2{,}5} = 0{,}082$.

a) 0,575.

b) 0,682.

c) 0,713.

d) 0,754.

e) 0,814.

Devemos nos lembrar de que a média de chegada de passageiros em 30 segundos é metade da média por minuto:

$$\lambda_{30} = \frac{5}{2} = 2,5$$

A probabilidade de chegar pelo menos 2 passageiros pode ser mais facilmente calculada pela probabilidade da exclusão:

$$P = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} - \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}$$

$$P = 1 - \frac{e^{-2,5}(2,5)^0}{0!} - \frac{e^{-2,5}(2,5)^1}{1!}$$

$$P = 1 - \frac{0,082.1}{1} - \frac{0,082.2,5}{1} = 1 - 0,082 - 0,205 = 1 - 0,287 = 0,713$$

Letra c.

020. (FCC/SEFAZ-SP/AGENTE FISCAL DE RENDAS/2009) O número de pessoas que chega ao guichê de uma repartição pública para autuação de processos apresenta uma distribuição de Poisson a uma taxa de duas pessoas por minuto. A probabilidade de que nos próximos 2 minutos chegue pelo menos uma pessoa neste guichê é:

a) $(e^4 - 1).e^{-4}$.
b) $4.e^{-4}$.
c) $(e^4 - 4).e^{-4}$.
d) $2.[(e^2 - 1)].e^{-2}$.
e) $(e^2 - 2).e^{-2}$.

A média de chegada é de duas pessoas por minuto. Portanto, em dois minutos, temos uma média de quatro pessoas chegando. Sendo assim, devemos usar λ = 4.

Agora, a probabilidade de chegar pelo menos uma pessoa é igual ao complementar da probabilidade de não chegar ninguém.

$$P = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-4}.\frac{4^0}{0!} = 1 - e^{-4}$$

Podemos fazer um certo trabalho com a expressão:

$$1 - e^{-4} = e^{-4}(e^4 - 1)$$

Letra a.

021. (FGV/SEFAZ-RJ/AGENTE FISCAL DE RENDAS/2009) O número de clientes que buscam, em cada dia, os serviços de um renomado cirurgião tem uma distribuição de Poisson com média de 2 pacientes por dia.

Para cada cirurgia efetuada, o cirurgião recebe R$ 10.000,00. No entanto, ele consegue fazer o máximo de duas cirurgias em um dia; clientes excedentes são perdidos para outros cirurgiões.

Assinale a alternativa que indique o valor esperado da receita diária do cirurgião.

Dado: $e^{-2} = 0,14$.

a) R$5.600,00.
b) R$8.400,00.
c) R$10.000,00.
d) R$14.400,00.
e) R$20.000,00.

Se não chegar nenhum paciente, o cirurgião não terá receita. Se chegar apenas um, a sua receita será de R$10.000. Se chegarem dois ou mais, a sua receita será de R$20.000, porque ele não poderá atender mais pacientes. Portanto, vamos calcular as probabilidades associadas:

$$P(X=0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-2}.2^0}{0!} = \frac{0,14.1}{1} = 0,14$$

$$P(X=1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-2}.2^1}{1!} = \frac{0,14.2}{1} = 0,28$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - 0,14 - 0,28 = 1 - 0,42 = 0,58$$

Montemos a tabela de probabilidades:

Número de Clientes	Probabilidade	Receita
0	0,14	R$0
1	0,28	R$10.000
≥ 2	0,58	R$20.000

Sendo assim, o valor esperado da receita do cirurgião é:

$$E[X] = 0,14.0 + 0,28.10000 + 0,58.20000$$

$$E[X] = 0 + 2800 + 11600 = 14400$$

Letra d.

4. Outras Distribuições Contínuas

Há uma grande quantidade de distribuições contínuas de probabilidade. De maneira geral, cada área do conhecimento deduz suas próprias distribuições, tendo em vista que a curva normal nem sempre se adapta bem a todos os fenômenos.

Por exemplo, a distribuição de Maxwell-Boltzmann estabelece a distribuição das velocidades das partículas de um gás em função da temperatura. Na figura a seguir, mostramos a distribuição em duas temperaturas diferentes:

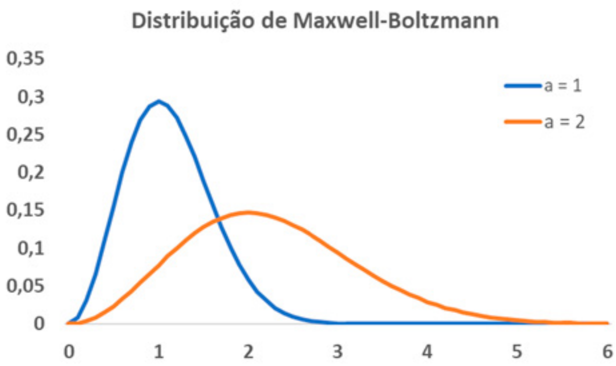
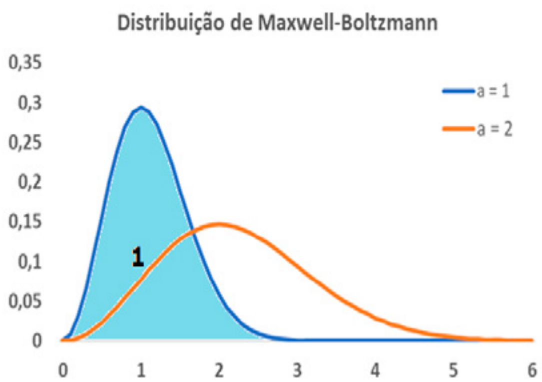


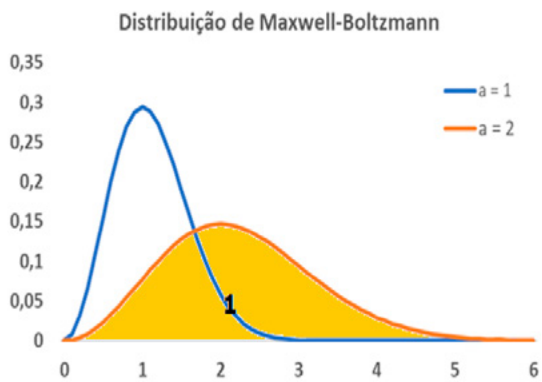
Figura: Distribuição de Maxwell-Boltzmann

Desse modo, não é o nosso objetivo esgotar a teoria sobre todas as distribuições contínuas. Mas, aqui, vamos trabalhar alguns conceitos essenciais.

- **Condição de validade:** pelos axiomas de Kolgomorov, a probabilidade total, isto é, **a área debaixo da curva da distribuição de velocidade é sempre igual a 1;**

Por exemplo, em ambos os casos, as áreas debaixo das curvas da distribuição de Maxwell-Boltzmann é igual a 1:





- **Assimetria:** embora a distribuição normal seja perfeitamente simétrica, outras distribuições contínuas podem não ser. Para identificar uma assimetria, o modo mais simples é observar a moda principal, isto é, o maior valor obtido na amostra. Lembre-se de que a assimetria se encontra no lado oposto à moda principal.

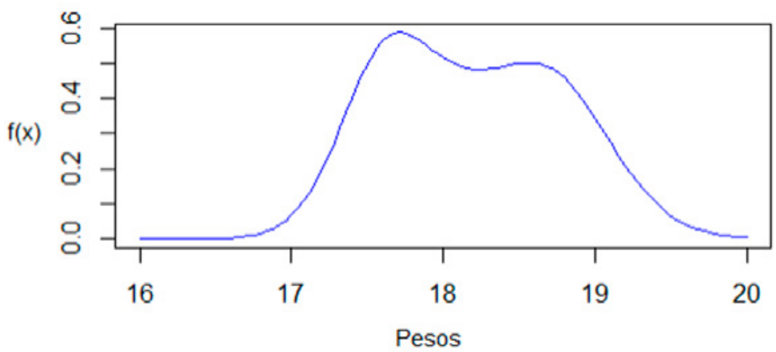
Se a moda principal estiver desviada para a esquerda, a distribuição será assimétrica à direita. Por outro lado, se a moda estiver desviada para a direita, a distribuição será assimétrica à esquerda.

Por exemplo, a distribuição de Maxwell-Boltzmann com a = 1 é um excelente exemplo de uma distribuição assimétrica à direita.

- **Moda:** corresponde aos picos dos gráficos das distribuições. É importante notar que, no caso de uma distribuição estatística, uma moda corresponde a um pico do gráfico, não necessariamente ao pico máximo.
- **Média e variância:** só podem ser obtidas por cálculo integral, então, não faz parte do escopo deste material desenvolver uma teoria geral para as variáveis contínuas.
- **Densidade de probabilidade acumulada:** é bastante possível que você trabalhe com uma densidade de probabilidade acumulada, desde que sejam fornecidas tabelas semelhantes às que vimos na distribuição normal. Nesse caso, o procedimento será o mesmo.

DIRETO DO CONCURSO

022. (UFAC/ESTATÍSTICO/2019) Ângelo é um agricultor da Zona Rural do Município de Rio Branco. Todos os anos Ângelo retira duas safras de Melancia, em kg. A distribuição da produção da variável peso de cada melancia está representada conforme a distribuição descrita abaixo:



Com base nas informações da figura é correto afirmar que:

a) A distribuição é unimodal.
b) A distribuição é bimodal simétrica.
c) A distribuição é bimodal assimétrica à esquerda.
d) A distribuição é bimodal assimétrica à direita.
e) A distribuição é normal com média 18 e variância 400.

A questão é sobre análise de gráficos de distribuições.

Devemos ter em mente o seguinte:

Para distribuições unimodais (há apenas um pico):

- se a cauda (parte mais achatada) está mais alongada para o lado positivo, então se trata de uma distribuição unimodal assimétrica à direita;
- se a cauda está mais alongada para o lado negativo, então se trata de uma distribuição unimodal assimétrica à esquerda.

Para distribuições bimodais (há dois picos):

- se os dois picos estiverem concentrados para o lado direito, se trata de uma distribuição bimodal assimétrica à direita;
- se os dois picos estiverem concentrados mais para ao lado esquerdo, se trata de uma distribuição bimodal assimétrica à esquerda.

Com as definições acima, vemos que nosso gráfico se trata de uma distribuição bimodal assimétrica à direita.

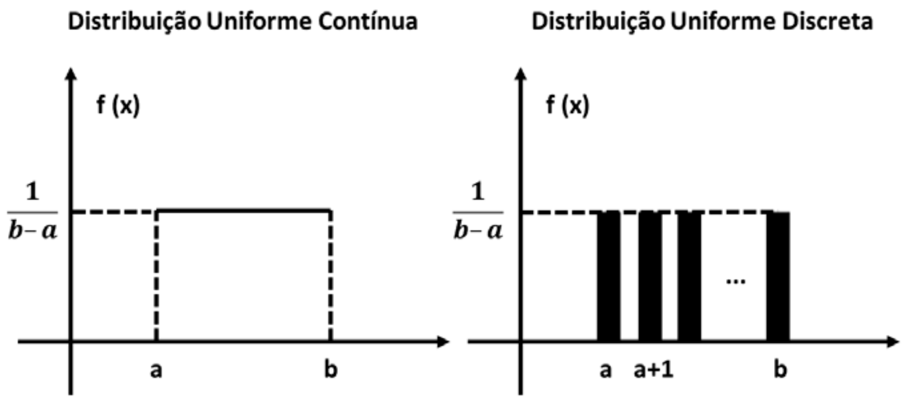
Letra d.

4.1. Distribuição Uniforme

Na distribuição uniforme, há um conjunto de dados em um intervalo [a, b], em que todo o conjunto de dados tem a mesma densidade de probabilidades.

- **Função densidade de probabilidade:** ela é nula fora do intervalo [a, b] e constante dentro desse intervalo:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, se\ a \leq x \leq b$$



- **Valor esperado:** corresponde ao ponto médio do domínio:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- **Variância:** depende somente da amplitude do intervalo:

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

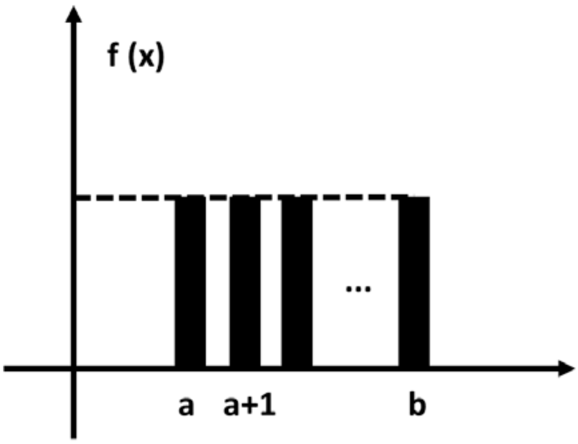
Direto do Concurso

023. (AOCP/UFGD/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ECONOMIA/2014) A distribuição que apresenta o caso mais simples de variável aleatória discreta, em que cada valor possível ocorre com a mesma probabilidade, é a:

a) Distribuição Binomial.
b) Distribuição de Poisson.
c) Distribuição Uniforme Discreta.
d) Distribuição de Bernoulli.
e) Distribuição Tripla.

Essa é a característica-chave da distribuição uniforme: todos os valores possíveis de serem observados possuem a mesma probabilidade, como mostrado a seguir:

Distribuição Uniforme Discreta



Letra c.

---

024. (PUC-PR/TJ-MS/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR/2017) A distribuição uniforme de uma variável aleatória X definida no intervalo com $a \leq x \leq b$ tem como função densidade probabilidade: $f(x) = 1/(b-a)$.

A média dessa distribuição é:

a) $E(X) = (a - b)/2$.
b) $E(X) = (a + b)/12$.
c) $E(X) = (a - b)/12$.
d) $E(X) = (b - a)/3$.
e) $E(X) = (a + b)/2$.

A média de uma distribuição uniforme corresponde ao ponto médio do intervalo em que ela é definida. Então:

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

Letra e.

025. (FCC/TRT-12ª REGIÃO-SC/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA/2013) Uma amostra aleatória de tamanho 5 de uma variável aleatória X com distribuição uniforme no intervalo (0, M) forneceu os seguintes valores: 1,5; 0,6; 1,4; 0,8; 1,7. O valor de M, obtido pelo método dos momentos, com base nesta amostra, é igual a:

a) 2,8.
b) 1,7.
c) 2,4.
d) 1,4.
e) 3,4.

A estimativa da média pode ser obtida como a própria média amostral:

$$\mu = \frac{1{,}5 + 0{,}6 + 1{,}4 + 0{,}8 + 1{,}7}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Em uma distribuição uniforme, a média pode ser avaliada como o ponto médio dos extremos. Como já sabemos um dos extremos, para calcular o outro, basta fazer:

$$1{,}2 = \frac{a+b}{2} \therefore a + b = 2.1{,}2 = 2{,}4$$

$$0 + b = 2{,}4 \therefore b = 2{,}4$$

Letra c.

026. (CESPE/TCE-PA/AUDITOR DE CONTROLE EXTERNO/2016) A respeito de uma variável aleatória contínua *U*, uniformemente distribuída no intervalo [0, 1], julgue o seguinte item.
A variância de *U* é inferior a 1/10.

A variância de uma distribuição uniforme é dada por:

$$Var = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

Essa conta é realmente inferior a 1/10, porque, quanto maior o denominador, menor o resultado da conta.

Certo.

---

027. (FCC/TRE-RR/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA/2015) Uma variável aleatória X tem distribuição uniforme contínua com média igual a 4 e variância igual a 12. Nessas condições, P(X < 7) é igual a:

a) 0,45.
b) 0,75.
c) 0,25.
d) 0,60.
e) 0,67.

A variância de uma distribuição uniforme é dada por:

$$Var = \frac{(b-a)^2}{12} = 12 \therefore (b-a)^2 = 12.12 = 144$$

$$\therefore b - a = \sqrt{144} = 12$$

Por outro lado, a média da distribuição é dada pelo ponto médio:

$$\mu = \frac{a+b}{2} = 4 \therefore a + b = 4.2 = 8$$

Chegamos a um sistema com duas equações e duas incógnitas. Ele pode ser resolvido pelo método da adição. Somando as duas equações, teremos:

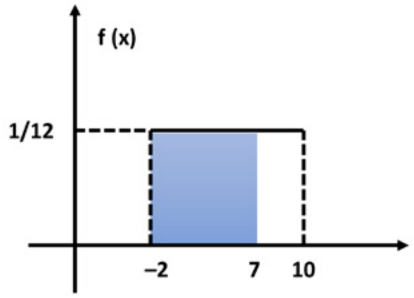
$$(a+b) + (b-a) = 8 + 12$$

$$2b = 20 \therefore b = \frac{20}{2} = 10$$

Para o coeficiente a, teremos:

$$a + b = 8 \therefore a = 8 - b = 8 - 10 = -2$$

Então, a distribuição uniforme é dada por:



Nessa situação, a probabilidade corresponde à área pedida:

$$P = \frac{1}{12} \cdot [7 - (-2)] = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Letra b.

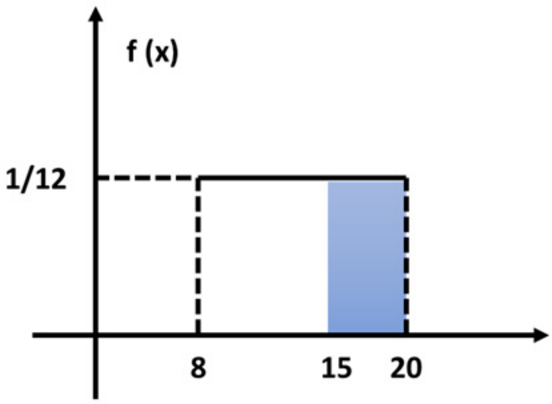
---

028. (FGV/IBGE/MÉTODOS QUANTITATIVOS/2017) Sabe-se que o tempo de aplicação de um questionário em uma pesquisa de campo é uma variável com distribuição uniforme entre 8 e 20 minutos. Um entrevistador pretende aplicar três questionários.
Logo, é correto afirmar que:
a) a probabilidade de que todas as entrevistas durem mais do que 15 minutos é de 27/64.
b) a probabilidade de que duas das entrevistas durem mais do que a média é igual a 5/8.
c) o desvio padrão do tempo de duração de cada entrevista é igual a 2 minutos.
d) a probabilidade de que apenas uma das entrevistas leve menos da metade do tempo máximo é igual a 25/72.
e) a probabilidade do tempo total de entrevista exceder 40 minutos é igual a 0,5.

A densidade de probabilidade para a distribuição uniforme é dada:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{20-8} = \frac{1}{12}$$

a) A probabilidade pode ser medida pela área do gráfico abaixo da curva:



A área pintada é um retângulo, portanto pode ser calculada como o produto bases vezes altura:

$$P(X > 15) = \frac{1}{12} \cdot (20 - 5) = \frac{5}{12}$$

Afirmação errada.
b) Na distribuição uniforme, a probabilidade de que uma entrevista dure mais que a média é igual a 50%. Mas note que a entrevista dura mais que 50% ou não é uma variável de Bernoulli, porque só tem dois resultados possíveis: SUCESSO ou FRACASSO. Portanto, a probabilidade de que, dentre três entrevistas, é expressa por uma binomial:

$$P\ (Y = 2) = \binom{3}{2} \cdot (0{,}50)^2 \cdot (0{,}50)^{3-2} =$$

$$P\ (Y = 2) = \frac{3!}{2!\,1!} \cdot (0{,}50)^2 \cdot (0{,}50)^1 = \frac{3.2!}{2!\,.1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$$

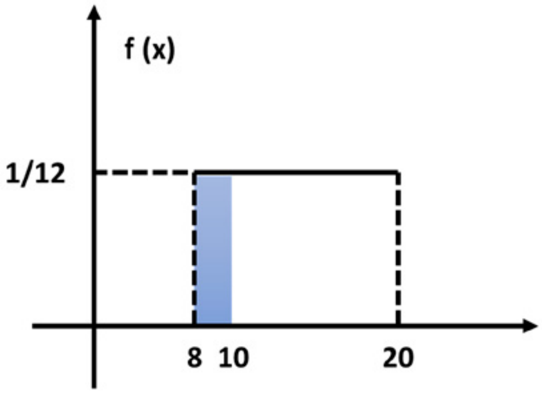
Afirmação errada.

c) A variância da distribuição uniforme é:

$$Var\ (X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(20-8)^2}{12} = \frac{12^2}{12} = 12$$

Portanto, o desvio padrão dessa variável aleatória pode ser obtido como a raiz quadrada de 12, e não é igual a 2. Afirmação errada.

d) A probabilidade de uma entrevista específica durar menos de 10 minutos é dada pela área do retângulo a seguir:



$$P\ (X < 10) = \frac{1}{12} \cdot (10-8) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Considerando que serão feitas três entrevistas, a probabilidade de que exatamente uma delas tenha um tempo inferior a 10 minutos é dada pela binomial:

$$f(1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{6.12} = \frac{25}{72}$$

Afirmação certa.

e) Fora do intervalo de 8 a 20 minutos, a probabilidade de ocorrência de uma entrevista é igual a zero.

Letra d.

4.2. Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial é utilizada para modelar o tempo de ocorrência entre dois eventos. Ela é a versão contínua da distribuição geométrica.

Essa distribuição possui um único parâmetro, conhecido como média da distribuição (λ):

$$X \sim Exp\,(\lambda) \rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Também é possível demonstrar que a densidade de probabilidade acumulada é:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Vamos nos recordar de que a probabilidade de um intervalo qualquer é dada pela diferença entre as funções de densidade acumuladas nos dois extremos desse intervalo:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Além disso, podemos destacar as seguintes propriedades:

- **Média:** é igual ao inverso do parâmetro. Então:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

- **Variância:** é o quadrado da média:

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Direto do Concurso

029. (NUCEPE/FMS/ESTATÍSTICO/2019) Considere o tempo de vida de 4 computadores (em anos) dados por {2,4,6,8}. Considerando que a variável tem distribuição Exponencial (λ), o estimador de máxima verossimilhança para a variância é dado por:

a) 5.
b) 20/3.
c) 20/4.
d) 20.
e) 25.

Pela estimativa de máxima verossimilhança, a média estimada para a variável exponencial pode ser obtida como a razão:

$$\mu = \frac{2+4+6+8}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Na distribuição exponencial, a variância é igual ao quadrado da média, então podemos escrever:

$$Var = \mu^2 = 5^2 = 25$$

Observe que não devemos tomar a variância da distribuição como a variância amostral, que seria igual a 20/3, porque, no método dos momentos, a preferência é sempre do cálculo da média.

Letra e.

---

030. (FGV/IBGE/ANALISTA CENSITÁRIO/MÉTODOS QUANTITATIVOS/2017) Suponha que o tempo de vida útil da lâmpada de um Scanner seja distribuído exponencialmente com parâmetro β = 600 horas.

Se T representa a durabilidade da lâmpada, é correto afirmar que:

a) P (T > 600)= 0,50.
b) P (200 < T < 600) = 0,25.
c) P (T > 1500) = 1 - e^{-2}.
d) P (T > 1200 | T > 300) = P(Y > 900).
e) P (T < 450) = 1 - $e^{-2/5}$.

Dados: e^{-1} = 0,37; $e^{-2,5}$ = 0,72.

A função densidade de probabilidade acumulada da exponencial é:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

O parâmetro lambda é o inverso da média, então, podemos escrever:

$$F(x) = 1 - e^{-x/600}$$

a) Vamos calcular a probabilidade:

$$P\,(T > 600) = 1 - e^{-\frac{600}{600}} = 1 - e^{-1} = 1 - 0,37 \cong 0,63$$

Afirmação errada.

b)

$$P\,(200 < \; T < 600) = F(600) - F(200)$$

$$F(600) - F(200) = \left(1 - e^{-\frac{600}{600}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{200}{600}}\right)$$

$$P = (1 - e^{-1}) - \left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right) = e^{-\frac{1}{3}} - e^{-1} = 0,72 - 0,37 = 0,35$$

c)

$$P\,(\,T > 1500) = 1 - F(1500)$$

$$P\,(\,T > 1500) = 1 - e^{-\frac{1500}{600}} = 1 - e^{-2,5}$$

Afirmação errada.

d) Pela definição de probabilidade condicional, temos:

$$P\ (T > 1200 \mid T > 300) = \frac{P\ (T > 1200 \cap T > 300)}{P(T > 300)} = \frac{P(T > 1200)}{P(T > 300)}$$

$$P = \frac{e^{-\frac{1200}{600}}}{e^{-\frac{300}{600}}} = \frac{e^{-2}}{e^{-0,5}} = e^{-2+0,5} = e^{-1,5}$$

Agora, façamos a segunda parte da igualdade:

$$P\ (T > 900) = e^{-\frac{900}{600}} = e^{-1,5}$$

Afirmação certa.

e)

$$P\ (T < 450) = 1 - e^{-\frac{450}{600}} = e^{-0,75}$$

Afirmação errada.

Letra d.

RESUMO

Distribuição Uniforme

- Distribuição: $f(x) = \frac{1}{b-a}, para\ a < x < b$
- Média: $\mu = \frac{a+b}{2}$
- Variância: $Var = \frac{(b-a)^2}{12}$

Distribuição Geométrica

- Distribuição: $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$
- Média: $\mu = \frac{1}{p}$
- Variância: $Var = \frac{1-p}{p^2}$

Distribuição de Poisson

- Distribuição: $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- Média: $\mu = \lambda$
- Variância: $Var = \lambda$

Distribuição Exponencial

- Distribuição: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- Média: $\mu = \frac{1}{\lambda}$
- Variância: $Var = \frac{1}{\lambda^2}$

GABARITO

1. a) 3,2% b) 0,16%
   c) t=12,5 min
2. C
3. d
4. c
5. C
6. e
7. e
8. c
9. C
10. C
11. C
12. E
13. b
14. a
15. b
16. e
17. c
18. c
19. c
20. a
21. d
22. d
23. c
24. e
25. c
26. C
27. b
28. d
29. e
30. d

Thiago Cardoso

Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.


LEI Nº 8.666/1993 - LICITAÇÃO
Avaliação
Comentário
Seu feedback é valioso. Você gostaria de deixar um comentário e assim nos ajudar a melhorar nossos produtos e serviços?
Obs: A avaliação da aula em pdf é exclusivamente pedagógica. Clique aqui para relatar problemas técnicos, pois serão desconsiderados deste canal.
Sim, salvar comentário.
Não, obrigado.
NÃO SE ESQUEÇA DE AVALIAR ESTA AULA!
SUA OPINIÃO É MUITO IMPORTANTE PARA MELHORARMOS AINDA MAIS NOSSOS MATERIAIS.
ESPERAMOS QUE TENHA GOSTADO DESTA AULA!
PARA AVALIAR, BASTA CLICAR EM LER A AULA E, DEPOIS, EM AVALIAR AULA.
AVALIAR