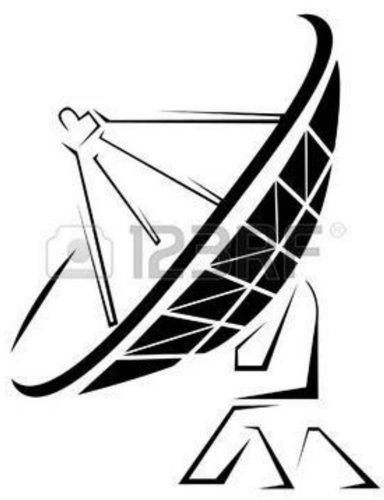
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO

FACULTAD DE INGENIERÍA EN SISTEMAS, ELECTRÓNICA E INDUSTRIAL

CARRERA DE TELECOMUNICACIONES

COMUNICACIONES DIGITALES



Docente:

Ing. Juan Pablo Pallo Noroña, Mg

CAPÍTULO I
INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE COMUNICACIÓN

Para ser transmitido un mensaje, se requiere de un sistema de comunicación que permita que la información sea transferida, a través del espacio y el tiempo, desde un punto llamado fuente hasta otro punto de destino, mediante un cable como en el caso de un teléfono o por ondas como en el caso de las radios.

Los mensajes pueden presentarse bajo diferentes formas: una secuencia de símbolos, intensidad de la luz y los colores de una imagen televisada, la presión acústica de la voz, etc.

Los sistemas de comunicación eléctrica brindan los medios para que la información, codificada en forma de señal, se transmita o intercambie.

Un sistema de comunicación consta de tres componentes esenciales: transmisor, canal de transmisión y el receptor.

El mensaje original, producido por la fuente, no es eléctrico. Debe ser convertido en señales eléctricas a través de un transductor de entrada. En el destino, otro transductor de salida cumple la función de transformar nuevamente la señal para que llegue al receptor del modo en el que fue emitido el mensaje. Se puede definir la comunicación como el proceso mediante el cual se transfiere información desde un punto en el espacio y en el tiempo, denominado "fuente de información", hasta otro punto denominado "destino de la información", con el mínimo de pérdidas o perturbaciones.

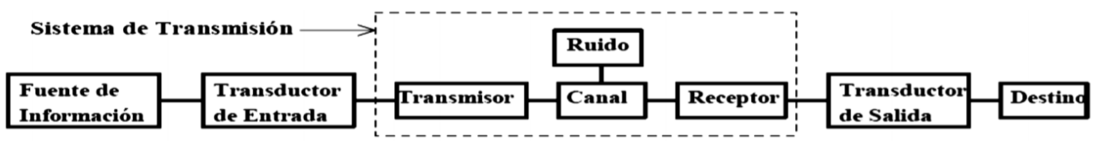


Figura 1: Esquema de un sistema de comunicación

Fuente de Información

La información o inteligencia para transmitir se origina en la fuente de información. Esta información se materializa como un conjunto finito y discreto, de N símbolos o mensajes distintos e independientes cuyo significado es conocido en el destino del sistema. La fuente de información así definida se denomina "fuente discreta sin memoria".

Hay muchas clases de fuentes de información, incluyendo personas y máquinas, de manera que los símbolos o mensajes pueden tomar una gran variedad de formas: una secuencia de símbolos discretos o letras, una magnitud que varía en el tiempo, etc.; pero cualquiera que sea el mensaje, el propósito del sistema de comunicación es el de proporcionar una réplica más o menos exacta del mismo en el destino.

Análoga

Es aquella que genera mensajes que varían con el tiempo, es decir, mensajes definidos de manera continua.

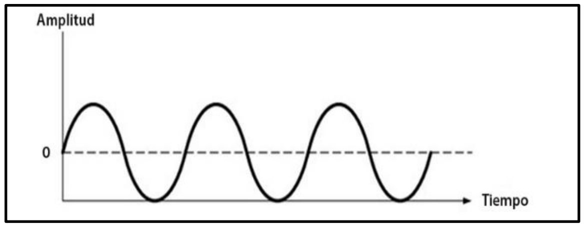


Figura 2: Señal análoga

Ejemplos:

Señales analógicas como: la voz humana.

Digital

Es aquella que produce una serie finita de posibles mensajes.

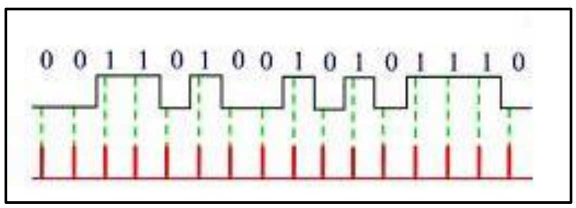


Figura 3: señal digital

Ejemplos:

Un modem, una computadora

Transductor de Entrada

El mensaje que produce la fuente no es de naturaleza eléctrica y, por lo tanto, es necesaria la presencia de un “transductor” o “codificador” que convierta el mensaje en una “señal”. Esta última es una magnitud eléctrica variable en el tiempo (corrientes o voltajes) compatible con el tipo particular de sistema de transmisión que se emplee.

Los codificadores son sistemas combinacionales construidos en forma de circuito integrado, que se encargan de transformar una serie de señales sin codificar en un conjunto de señales codificadas, que forman un código.

Los decodificadores son circuitos integrados digitales que convierten el código binario, el BCD, o algún otro, en una forma sin codificar. Un decodificador, por tanto, puede considerarse lo opuesto de un codificador.

1.2. CONCEPTOS FUNDAMENTALES EN FUENTES DE INFORMACIÓN

Información: información está constituida por un grupo de datos ya supervisados y ordenados, que sirven para construir un mensaje basado en un cierto fenómeno o ente. La información permite resolver problemas y tomar decisiones, ya que su aprovechamiento racional es la base del conocimiento.

Mensaje: es un recado que una persona envía a otra. El concepto también se utiliza para nombrar al conjunto de los signos, símbolos o señales que son objeto de una comunicación. El mensaje, por lo tanto, es el contenido de la comunicación.

Señal: las señales eléctricas son llamadas también señales análogas. Pueden tener cualquier lectura dentro del rango y sólo están limitadas por las características de los instrumentos registradores e indicadores. Transmiten al controlador en forma continua los valores. En las Redes de ordenadores, los datos a intercambiar siempre están disponibles en forma de señal Digital; no obstante, para su transmisión podemos optar por la utilización de señales digitales o analógicas.

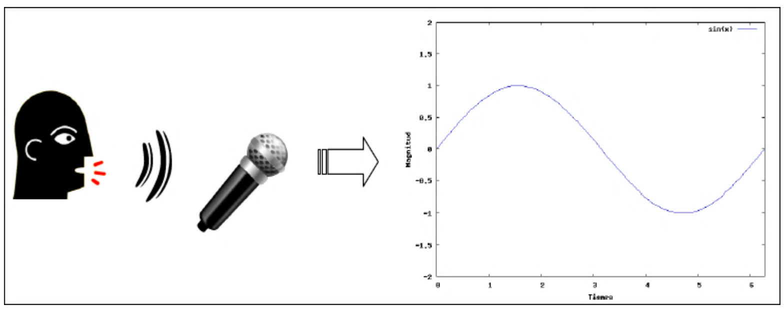


Figura 4: Medio de transmisión

Señal Digital: es un tipo de señal en que cada signo que codifica el contenido de esta puede ser analizado en término de algunas magnitudes que representan valores discretos, en lugar de valores dentro de un cierto rango. Ejemplo, el interruptor de la luz solo puede tomar dos valores o estados: abierto o cerrado

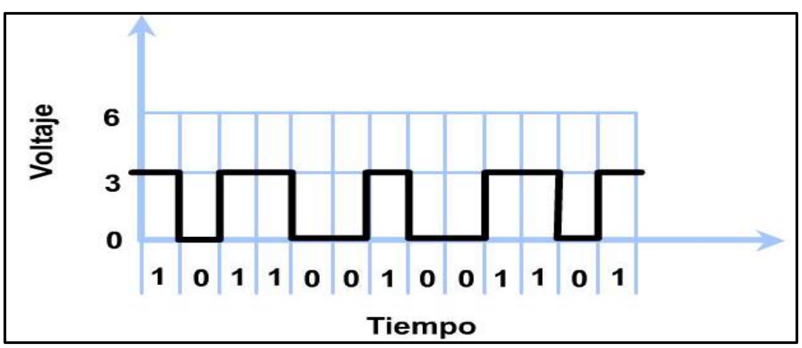


Figura 5: Transmisión de bits en el tiempo

Partes de un sistema de comunicación

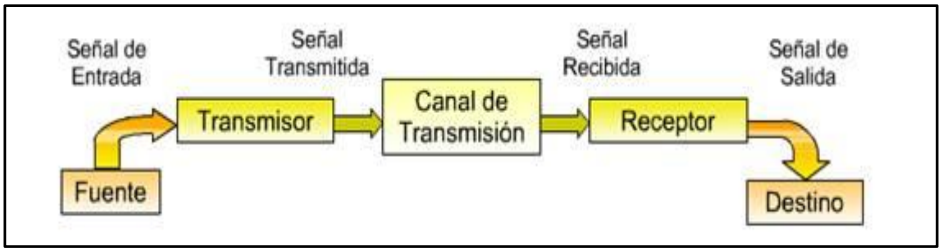


Figura 6: Estructura de un sistema de comunicaciones

Transmisor

Es el sujeto que envía el mensaje. Es el que prepara la información para que pueda ser enviada por el canal, tanto en calidad (adecuación a la naturaleza del canal) como en cantidad (amplificando la señal) La transmisión puede realizarse:

a) En banda base, o sea, en la banda de frecuencia propia de la señal, el ejemplo más claro es el habla.

b) Modulando, es decir, traspasando la información de su frecuencia propia a otra de rango distinto, esto nos va a permitir adecuar la señal a la naturaleza del canal y además nos posibilita el multiplexar el canal, con lo cual varios usuarios podrán usarlo a la vez.

Medio de Transmisión

Es el elemento a través del cual se envía la información del emisor al receptor. Desgraciadamente el medio tiene obstáculos que impiden o merman la comunicación y en este curso se convendrá en que tales obstáculos son:

- La interferencia: Todos aquellos fenómenos externos al medio que provocan merma en la comunicación.
- Ruido: Todos aquellos fenómenos inherentes al medio mismo que merman la comunicación.

Receptor

Es la entidad a la cual el mensaje está destinado, puede ser una persona, grupo de personas, un dispositivo artificial, etc.

1.3. VENTAJAS DE LA COMUNICACIÓN DIGITAL

- ✓ Podemos comunicarnos con cualquier persona en el momento en el que queremos.
- ✓ Fácil acceso a la información de todas las personas.
- ✓ Facilita gestiones administrativas.
- ✓ Permite el contacto con cualquier persona en cualquier lugar del mundo
- ✓ Promueve la acción social y la participación cultural.
- ✓ Alta confiabilidad: Por su alta inmunidad al ruido, transmisión segura.
- ✓ Tratamiento de las señales digitales es sencillo.
- ✓ La conmutación es eficiente (cambios de estado).
- ✓ Mantenimiento es sencillo y centralizado.
- ✓ Tecnología RDSI (ISDN red digital de servicios integrados).
- ✓ Reducción de costos (todo equipo digital consume menos energía eléctrica)

1.4. ANÁLISIS DE FOURIER PARA SEÑALES

Fourier es una herramienta matemática que permite expresar una función por medio de la suma de funciones ortogonales, una de las principales aplicaciones del análisis de Fourier es la representación de una señal en función de su frecuencia. Esto es posible porque la función principal es una señal sinusoidal

- **Funciones Singulares**

Función Escalón

Se define a la función escalón como

$$f(x)\begin{cases}0, t < 0\\ 1, t > 0\end{cases}$$

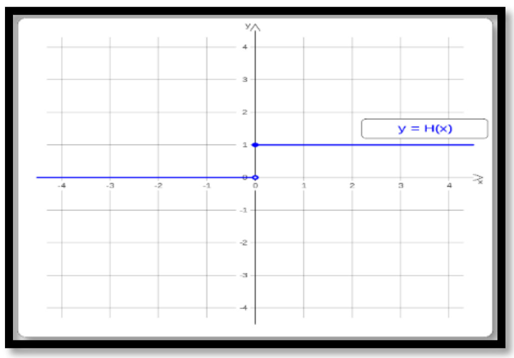


Figura 7: Función escalón unitario

Función Impulso

La función impulso es definida como

$$f(x)\begin{cases}0, t \neq 0\\ 1, t = a\end{cases}$$

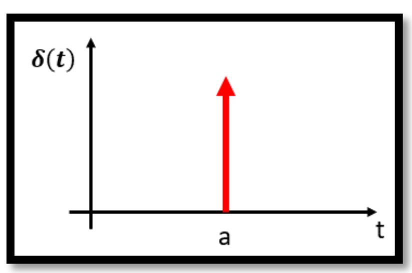


Figura 8: Función impulso

Función Rampa

Es la integral de la función escalón y se define como

$$f(x)\begin{cases}0, t < 0\\ t, t > 0\end{cases}$$

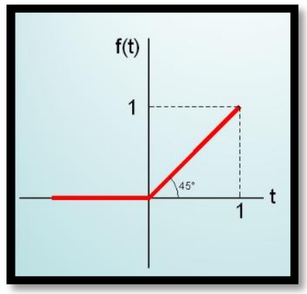


Figura 9: Función Rampa

- **Serie de Fourier**

Emplea funciones periódicas de periodo T para su posterior descomposición la misma que es factible representar mediante la suma de senos y cosenos del mismo periodo.

➢ **Serie trigonométrica de Fourier**

La serie trigonométrica de Fourier permite descomponer la función como una suma sub funciones sinusoidales respecto a la en términos del conjunto ortogonal completo de la función Sin y se expresa de la siguiente manera.

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\alpha}\left(a_n cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right)$$

Sabiendo que:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right) = w$$

La expresión con tiene un sumatorio de n=1 hasta infinito sin embargo en la práctica es imposible conocer todos los valores, pero cuando se los coeficientes a_n y b_n son considerados en gran proporción se puede representar la señal fielmente a la original.

La primera variable se obtiene mediante la siguiente ecuación.

$$a_0 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)dt$$

Los coeficientes a_n y b_n se obtienen con las siguientes expresiones donde los valores que puede tomar n son valores reales enteros

$$a_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)cos\left(\frac{\pi nt}{T}\right)dt$$

$$b_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)sen\left(\frac{\pi nt}{T}\right)dt$$

En el caso particular de no tomar en cuenta los coeficientes a_n y b_n la ecuación quedaría únicamente en función del coeficiente a_0 que en el mejor de los casos puede brindar el 77.7% de la información el mismo que es conocido como valor medio o valor rms de la señal.

Para poder definir si la señal trigonométrica de Fourier converge a la función $f(t)$ Dirichlet planteo algunos requerimiento o condiciones que debe cumplir la función.

F(t) es absolutamente integrables

$$\int_{h}^{h+T} |f(t)|dt < \infty$$

F(t) tiene un numero finito de máximos y mínimos

F(t) tiene un numero finito de discontinuidades

Las condiciones de Dirichlet permiten reescribir los coeficientes como se muestra a continuación

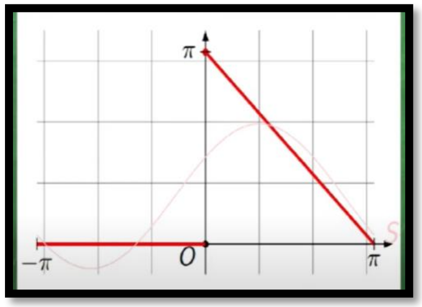
$$a_0 = \frac{1}{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cos(nW_0t)dt$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{T}{2}}\int_{-T}^{T} f(t)sen\big((nW_0t)\big)dt$$

Ejemplo:

Encontrar la serie trigonométrica de la siguiente función:



Solución

Determinando la expresión matemática de la función y aplicando fórmulas de los coeficientes se tiene:

$$f(t)\begin{cases} 0, -\pi < t < 0 \\ \pi - t, 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\pi} f(t)dt\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dt + \int_{0}^{\pi} f(\pi - t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\pi t - \frac{\pi^2}{2}\right)\right]\begin{matrix}\pi \\ 0\end{matrix}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi^2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)cos(nW_0t)dt \qquad W_0 = 1$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(0)cos(nW_0t) \int_{0}^{\pi} f(\pi - t)cos(nt)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\pi - t)cos(nt)$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\int_{0}^{\pi} f(\pi sen(nt - \cos(nt) - nsen(nt)$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sen\big((nW_0t)\big)dt \qquad W0 = 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - T)sen(nt)dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n^2}[-\pi ncos(nt) - sen(nt) + ntcos(nt)] \begin{matrix}\pi \\ 0\end{matrix}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{n}}$$

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\alpha}\big(a_n cos(nw_0t) + b_n sin(nw_0t)\big)$$

$$\boldsymbol{F(t) = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \sum_{n=1}^{\alpha}\left(\frac{a-(-1)^2}{\pi n^2}cos(nt) + \frac{1}{n}sin(nt)\right)}$$

$$Sen\, n = 1{,}2{,}3$$

Dando valores se tiene los dos primeros valores

$$Sp1 = f(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}cos(t) + sin(t)$$

$$Sp2 = f(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}cos(t) + sin(t) + \frac{1}{2}sen(2t)$$

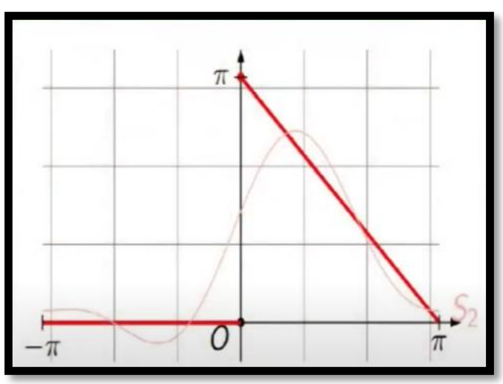
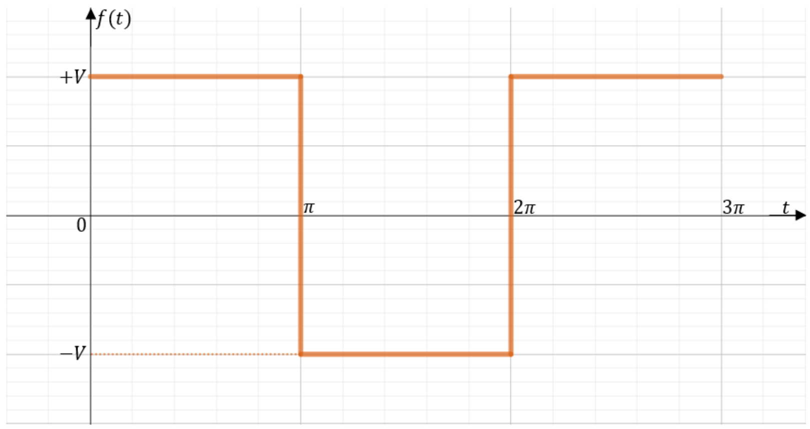


Figura 10: Serie de Fourier de la función con 2 coeficientes

Ejemplo

Determinar la serie de Fourier del siguiente grafico



1.- Análisis

$T = 2\pi$

$$f(t) = \begin{cases} 0 \leq t \leq \pi \rightarrow f(t) = +V \\ \pi \leq t \leq 2\pi \rightarrow f(t) = -V \end{cases}$$

Función Impar:

$a_n = 0$ $\qquad$ $\frac{a_0}{2} = 0$

$b_n \neq 0$

2.- Calcular los coeficientes:

Para a_0

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \cdot d(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} V \cdot d(t) + \int_{\pi}^{2\pi} -V \cdot d(t)\right]$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\left[Vt|_0^{\pi} - Vt|_{\pi}^{2\pi}\right] = \frac{V}{2\pi}\left[\overset{0}{\cancel{\pi - 0 - 2\pi + \pi}}\right] = 0$$

$$a_n = 0$$

Para b_n:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t) \cdot dt = \frac{2}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} V \cdot \sin(n\omega t) \cdot dt - \int_{\pi}^{2\pi} V \cdot \sin(n\omega t) \cdot dt\right]$$

$$b_n = \frac{V}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin(n\omega t) \cdot dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(n\omega t) \cdot dt\right] = \frac{V}{\pi}\left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\bigg|_0^{\pi} + \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\bigg|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$b_n = \frac{V}{\pi n\omega}\left[-\cos(n\omega t)|_0^{\pi} + \cos(n\omega t)|_{\pi}^{2\pi}\right]; si\ \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$b_n = \frac{V}{\pi n}\left[-\cos(nt)|_0^{\pi} + \cos(nt)|_{\pi}^{2\pi}\right] = \frac{V}{\pi n}\left[-\cos(n\pi) + \cos(0) + \cos(n2\pi) - \cos(n\pi)\right]$$

$$b_n = \frac{V}{n\pi}\left[-2\cos(n\pi) + \cos(n2\pi) + 1\right]$$

Si n es par entonces

$\boldsymbol{n = 2}$

$$b_2 = \frac{V}{2\pi}\left[-2\cancelto{1}{\cos(2\pi)} + \cancelto{1}{\cos(4\pi)} + 1\right]$$

$$b_2 = \frac{V}{2\pi}\left[\cancelto{0}{-2 + 1 + 1}\right] = 0$$

$\boldsymbol{n = 4}$

$$b_4 = \frac{V}{4\pi}\left[-2\cancelto{1}{\cos(4\pi)} + \cancelto{1}{\cos(8\pi)} + 1\right]$$

$$b_4 = \frac{V}{4\pi}\left[\cancelto{0}{-2 + 1 + 1}\right] = 0$$

$\boldsymbol{n = 6}$

$$b_6 = \frac{V}{6\pi}\left[\cancelto{0}{-2\cos(6\pi) + \cos(12\pi) + 1}\right] = 0$$

Si n es impar entonces

$\boldsymbol{n = 1}$

$$b_1 = \frac{V}{\pi}\left[-2\cancelto{-1}{\cos(\pi)} + \cancelto{1}{\cos(2\pi)} + 1\right] = \frac{V}{\pi}[2 + 1 + 1] = \frac{4V}{\pi}$$

$\boldsymbol{n = 3}$

$$b_3 = \frac{V}{3\pi}\left[-2\cancelto{-1}{\cos(3\pi)} + \cancelto{1}{\cos(6\pi)} + 1\right] = \frac{V}{\pi}[2 + 1 + 1] = \frac{4V}{3\pi}$$

Entonces:

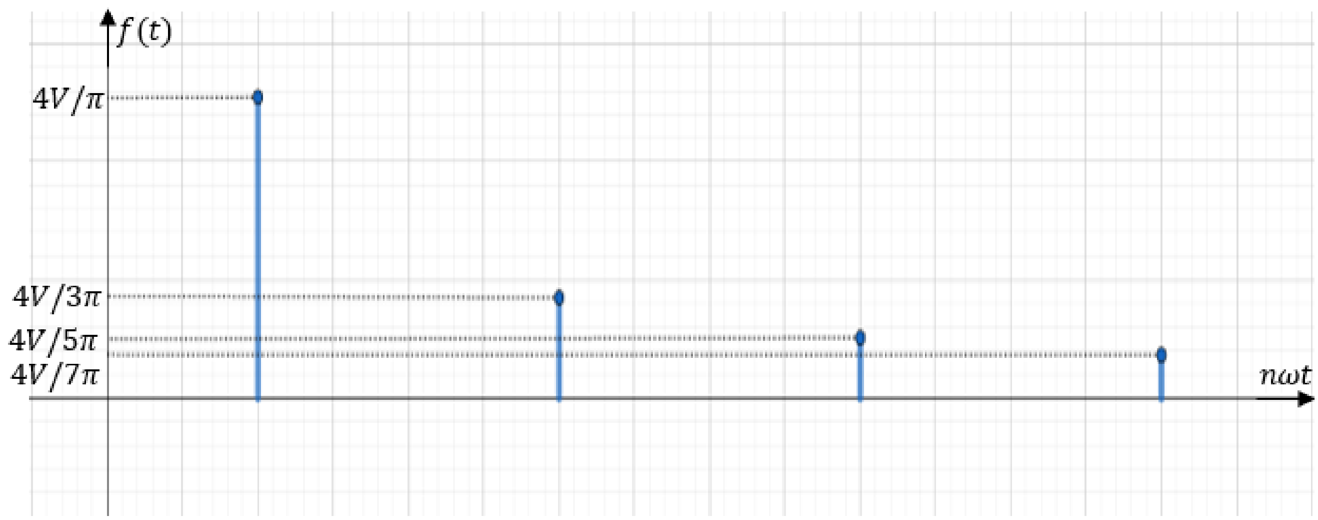
$$f(t) = \frac{\cancelto{0}{a_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cancelto{0}{a_n\cos(n\omega t)} + b_n\sin(n\omega t)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4V}{n\pi}\sin(n\omega t) = \boldsymbol{\frac{4V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\omega t)}{n}}\ ; n = impar$$

3.- Graficar la función:

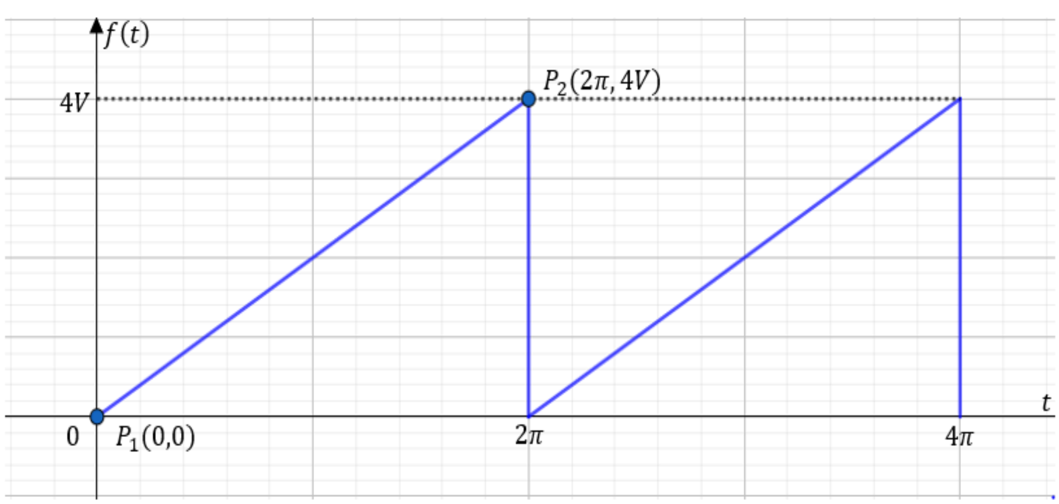
$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{4V}{n\pi}}_{Amp}\sin\left(\underbrace{n2\pi ft}_{frec.}\right)$$

Nº	Amplitud	Frecuencia
1	$4V/\pi$	$2\pi ft$
3	$4V/3\pi$	$6\pi ft$
5	$4V/5\pi$	$10\pi ft$
7	$4V/7\pi$	$14\pi ft$



Ejemplo:

Determinar la serie de Fourier de la siguiente función:



Solución:

1) Análisis

$T = 2\pi$

$P1(0;0)$
$x_1; y_1$

$P2(2\pi; 4v)$
$x_2; y_2$

$$m = \frac{y2 - y}{x2 - x}$$
$$m = \frac{4-0}{2\pi - 0}$$
$$m = \frac{2V}{\pi}$$

Ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$f(t) - 0 = \frac{2V}{\pi}(t - 0)$$
$$f(t) = \frac{2V}{\pi}t$$

Función:

IMPAR

$$\frac{a_0}{2} = 2V$$
$$a_n = 0$$
$$b_n \neq 0$$

2) Calculamos los coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\pi} f(t)dt\right]$$

$$\frac{a_o}{2} = \frac{\mathrm{V}}{\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\bigg|_0^{2\pi}\right] = \frac{\mathrm{V}}{\pi^2}\left[\frac{4\pi^2}{2} - 0\right] = 2V$$

$$\frac{a_o}{2} = 2V$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\,(nwt)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2V}\frac{2V}{\pi}t.\cos(nwt)\,dt$$

$$\boldsymbol{w = \frac{2\pi}{T} = 1}$$

$$a_n = \frac{2V}{\pi^2}\int_0^{2\pi} t.\cos\,(nt)\,dt \quad > \int u.du = uv - \int v.du$$

$$u = t \quad \int dv = \int cosnt.dt$$

$$du = dt \quad v = \frac{sen\;nt}{n}$$

$$a_n = \frac{2V}{\pi^2}\left[\frac{t\;sen(nt)}{n} - \int_0^{2\pi}\frac{sen(nt)}{n}.dt\right]$$

$$a_n = \frac{2V}{\pi^2}\left[\frac{t\;sen(nt)}{n} + \frac{cos(nt)}{n^2}\bigg|_0^{2\pi}\right] = \frac{2V}{\pi^2}\left[\frac{t\;sen(nt)}{n} + \frac{cos(n2\pi)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right]$$

$$a_n = \frac{2V}{\pi^2}\left[\frac{2\pi\;sen(n2\pi)}{n} + \frac{cos(n2\pi)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right]$$

$n = 1$

$$a_n = \frac{2V}{\pi^2}\left[\frac{2\pi\ sen(2\pi)}{1} + \frac{cos(2\pi)}{1^2} - \frac{1}{1^2}\right] = 0$$

$n = 3$

$$a_n = \frac{2V}{\pi^2}\left[\frac{2\pi\ sen(6.2\pi)}{3} + \frac{cos(6.2\pi)}{3^2} - \frac{1}{3^2}\right] = 0$$

$$\therefore \boldsymbol{a_n = 0}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathbf{sen}\ (nwt)\, dt}$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2V}{\pi}t.\cos(nwt)\,dt = \frac{2V}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{2V}{\pi}t.\cos(nt)\,dt$$

$$u = t \quad \int dv = \int sen(nt).dt$$

$$du = dt \quad v = -\frac{cos\ nt}{n}$$

$$b_n = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{t\cos(nt)}{n} + \int_0^{2\pi}\frac{cos(nt)}{n}.dt\right] = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{t\ cos(nt)}{n} + \frac{sen(nt)}{n^2}\Big|_0^{2\pi}\right]$$

$$b_n = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{2\pi\cos(n2\pi)}{n} + \frac{sen(n2\pi)}{n^2} + \frac{0\cos(n0)}{n} - \frac{\mathrm{sen}(n0)}{n^2}\right]$$

$$b_n = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{2\pi\cos(n2\pi)}{n} + \frac{sen(n2\pi)}{n^2}\right]$$

IMPARES

$n = 1$

$$b_1 = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{2\pi\cos(2\pi)}{1} + \frac{sen(2\pi)}{1^2}\right] = -\frac{4\pi v}{\pi^2} = -\frac{4v}{\pi}$$

$n = 3$

$$b_3 = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{2\pi\cos(3.2\pi)}{3} + \frac{sen(3.2\pi)}{3^2}\right] = \frac{2V}{\pi^2}\ .\frac{-2\pi}{3} = -\frac{4v}{3\pi}$$

$n = 5$

$$b_5 = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{2\pi\cos(5.2\pi)}{5} + \frac{sen(5.2\pi)}{5^2}\right] = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{2\pi}{5}\right] = -\frac{4v}{5\pi}$$

PARES

$n = 2$

$$b_2 = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{2\pi\cos(2.2\pi)}{2} + \frac{sen(2.2\pi)}{2^2}\right] = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{2\pi}{2}\right] = -\frac{2V}{\pi}$$

$n = 4$

$$b_2 = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{2\pi\cos(4.2\pi)}{4} + \frac{sen(4.2\pi)}{4^2}\right] = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{2\pi}{4}\right] = -\frac{V}{\pi}$$

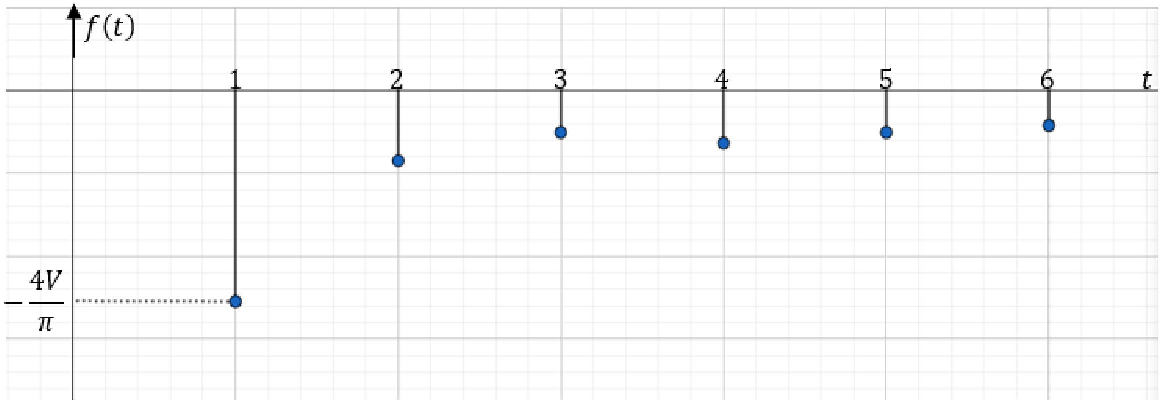
$n = 6$

$$b_2 = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{2\pi\cos(6.2\pi)}{6} + \frac{sen(6.2\pi)}{6^2}\right] = \frac{2V}{\pi^2}\left[-\frac{2\pi}{6}\right] = -\frac{4V}{6\pi}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a.ncos(nwt) + b.nsen(nwt)$$

$$f(t) = 2V + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4V}{n\pi}\right).sen(nwt) = 2V - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4V}{n\pi}\ sent$$

n	Amplitud	Frecuencia
1	$-\frac{4V}{\pi}$	t
2	$-\frac{4V}{3\pi}$	$2t$
3	$-\frac{4V}{5\pi}$	$3t$
4	$-\frac{4V}{4\pi}$	$4t$
5	$-\frac{4V}{5\pi}$	$5t$
6	$-\frac{4V}{6\pi}$	$6t$



- **Serie Exponencial**

La principal diferencia con la serie de Fourier trigonométrica es que el intervalo toma valores negativos y positivos, aunque por definición son las mismas funciones y se define como

$$Cn = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

La mismas que se puede expresar como

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n * e^{inx}$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n * e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

Tales ecuaciones son funcionales cuando T=2 π y W=1

Sea:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t}\ \ (n = +\,y\,-) => C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-jn\omega t}dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt\,;b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

Para $n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cancelto{1}{\cos(0)}\,dt => a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

Para $n = 1$

$a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$ $\qquad\qquad e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j\sin\alpha$

$$C_{-1}e^{-j\omega t} + C_1 e^{j\omega t}$$
$$C_{-1}[\cos\omega t - j\sin\omega t] + C_1[\cos\omega t + j\sin\omega t]$$
$$C_{-1}\cos\omega t + C_1\cos\omega t - jC_{-1}\sin\omega t + jC_1\sin\omega t$$
$$\underbrace{[C_{-1} + C_1]}_{a_1}\cos\omega t + \underbrace{[jC_1 - jC_{-1}]}_{b_1}\sin\omega t$$

$a_1 = C_{-1} + C_1$ $\qquad\qquad C_{-1} \rightarrow C_{-1} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{j\omega t}dt$

$b_1 = j(C_1 + C_{-1})$ $\qquad\qquad C_1 \rightarrow C_1 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$C_{-1} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)[\cos\omega t + j\sin\omega t]$$

$$\begin{array}{rl}
 & C_{-1} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos\omega t\,dt + j\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cancelto{0}{\sin\omega t\,dt} \\
+ & C_1 \;\; = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos\omega t\,dt - j\cancel{\dfrac{1}{T}}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin\omega t\,dt \\
\hline
 & C_{-1} + C_1 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos\omega t\,dt \; = a_1
\end{array}$$

Ahora:

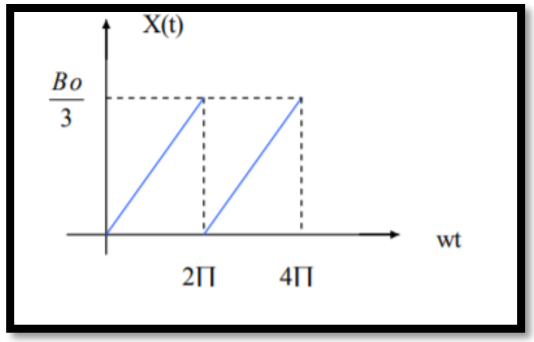
$$\begin{array}{l}
C_1 \;\; = +j\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cancelto{0}{\cos\omega t\,dt} + \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin\omega t\,dt \\
C_{-1} = -j\cancel{\dfrac{1}{T}}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos\omega t\,dt + \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin\omega t\,dt \\
\hline
j(C_{-1} - C_1) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin\omega t\,dt \; = b_1
\end{array}$$

Conclusión: $\frac{a_0}{2} = C_0$

$a_1 = C_1 + C_{-1}$ $\qquad b_1 = j(C_1 - C_{-1})$
$a_2 = C_2 + C_{-2}$ $\qquad b_2 = j(C_2 - C_{-2})$
$a_3 = C_3 + C_{-3}$ $\qquad b_3 = j(C_3 - C_{-3})$

Ejercicio:

Hallar la forma la serie de Fourier en forma exponencial para la siguiente función



Solución:

Determinando la expresión matemática de la función y aplicando fórmulas de los coeficientes se tiene:

$$m = \frac{\frac{Bo}{3} - 0}{2\pi - 0} = \frac{Bo}{6\pi}$$

$$y - y1 = m\,(x - x1)$$

$$y = m(x - x1) + y1$$

$$y = \frac{B0}{6\pi}t$$

$$u = t \rightarrow du = dt$$

$$dv = sen(nwt)dwt \rightarrow v = -\frac{\cos{(nwt)(wt}}{n}$$

$$Cn = \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(1 + \frac{4}{T}t\right)e^{-inwt}dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}}\left(1 + \frac{4}{T}t\right)e^{-inwt}dt\right]$$

$$Cn = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{e^{-inwt}}{-jwn}\right)_{-\frac{T}{2}}^{0}\right] + \frac{4}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(t)e^{-inwt}dt + \left[\frac{e^{-inwt}}{-jwn}\right]_{0}^{\frac{T}{2}} - \frac{4}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(t)e^{-inwt}dt\right]$$

$$\int_{a}^{b}te^{-intw}dt = +\frac{te^{-intw}}{-jwn} - \int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{te^{-intw}}{-jwn}dt$$

$$Cn = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{-jwn} - \frac{e^{-inw\frac{T}{2}}}{-jwn} + \frac{4}{T}\left(\frac{te^{-intw}}{-jwn} + \frac{te^{-intw}}{w^2n^2}\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{e^{-inw\frac{T}{2}}}{-jwn} - \frac{1}{-jwn} - \frac{4}{T}\left(\frac{te^{-intw}}{-jwn} + \frac{te^{-intw}}{w^2n^2}\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{e^{-inw\frac{T}{2}}}{-jwn} + \frac{e^{-inw\frac{T}{2}}}{-jwn} = \frac{2sen(nw\frac{T}{2})}{wn}\right]$$

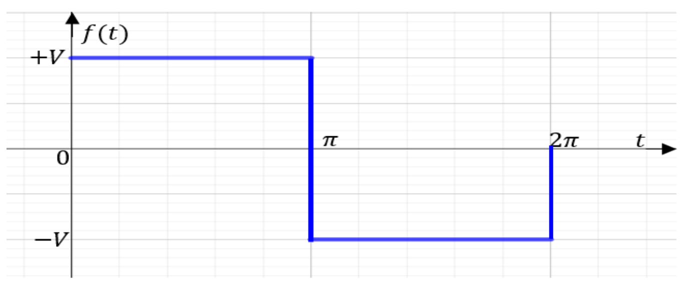
$$Cn = \frac{1}{T}\left[\frac{2sen(nw\frac{T}{2})}{wn} + \frac{4}{T}\left(\frac{1}{w^2n^2} - \frac{Te^{-in\frac{T}{2}w}}{2jwn} - \frac{e^{-inw\frac{T}{2}}}{w^2n^2}\right) - \frac{4}{T}\left(\frac{Te^{-in\frac{T}{2}w}}{2jwn} + \frac{e^{-inw\frac{T}{2}}}{w^2n^2} - \frac{1}{w^2n^2}\right)\right]$$

$$Cn = \frac{4}{T^2}\left[\left(-\frac{Te^{-in\frac{T}{2}w}}{2jwn} + \frac{e^{-inw\frac{T}{2}}}{w^2n^2} - \frac{2e^{-inw\frac{T}{2}}}{w^2n^2} + \frac{2}{w^2n^2}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{Cn = \frac{4}{T^2}\left[\left(-\frac{T}{iwn}sen\left(wn\frac{T}{2}\right) + \frac{2}{w^2n^2} - \frac{2}{w^2n^2}\cos\left(\frac{n\pi T}{2}\right)\right)\right]}$$

Ejemplo

Determinar la serie exponencial de Fourier de la siguiente función:



Solución:

1) Análisis T= 2π

$$f(t) = \begin{cases} 0 \le t \le \pi; f(t) = V \\ 0 \le t \le 2\pi; f(t) = -V \end{cases}$$

2) Calcular los coeficientes

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jnwt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[Ve^{-jnwt}dt\right] - \int_{\pi}^{2\pi} Ve^{-jnwt}dt$$

$$C_n = \frac{V}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[e^{-jnwt}dt\right] - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-jnwt}dt = \frac{V}{2\pi}\left[\frac{e^{-jnwt}}{-jnw}\Big|_0^{\pi} - \frac{e^{-jnwt}}{-jnw}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$C_n = \frac{V}{2\pi}\left[-\frac{e^{-jnwt}}{jnw} + \frac{e}{-jnw} + \frac{e^{-jnwt}}{-jnw} - \frac{e^{jnwt}}{-jnw}\right]$$

$$w = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$C_n = \frac{V}{2\pi}.\frac{1}{jn}\left[-\frac{e^{-jnwt}}{1} + 1 + \frac{e^{-jnwt}}{1} - \frac{e^{\,-jnwt}}{1}\right]$$

$$e^{\pm j\propto} = cos \propto \pm jsen \propto$$

$$C_n = \frac{V}{2\pi jn}[-cosn\pi + jsen\,n\pi + 1 + cosn2\pi - jsen\,n2\pi - cosn\pi + jsen\,n2\pi]$$

$$C_n = \frac{V}{2\pi jn}[-2cosn\pi + 2jsen\,n\pi + 1 + cosn2\pi - jsen\,n2\pi]$$

$n = 1$

$$C_1 = \frac{V}{2\pi j}[-2cos\pi + 2jsen\,\pi + 1 + cos2\pi - jsen\,2\pi] = \frac{V}{j2\pi}[2+2] = \frac{4V}{j2\pi}$$

$n = 2$

$$C_1 = \frac{V}{4\pi j}[-2cos2\pi + 2jsen2\,\pi + 1 + cos4\pi - jsen\,4\pi] = \frac{V}{j4\pi}[-2+1+1] = 0$$

$n = 3$

$$C_3 = \frac{V}{6\pi j}[-2cos3\pi + 2jsen3\pi + 1 + cos6\pi - jsen6\,\pi] = \frac{V}{6j\pi}[2+1+1] = 0$$

$n = 4$

$$C_4 = \frac{V}{8\pi j}[-2cos4\pi + 2jsen4\pi + 1 + cos8\pi - jsen8\,\pi] = \frac{V}{8j\pi}[-1+1] = 0$$

$n = 5$

$$C_5 = \frac{V}{10\pi j}[-2cos5\pi + 2jsen5\pi + 1 + cos10\pi - jsen10\pi] = \frac{V}{10j\pi}$$

$$f(t) = c_0 + \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jnwt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V}{jn2\pi}\ e^{jnwt}$$

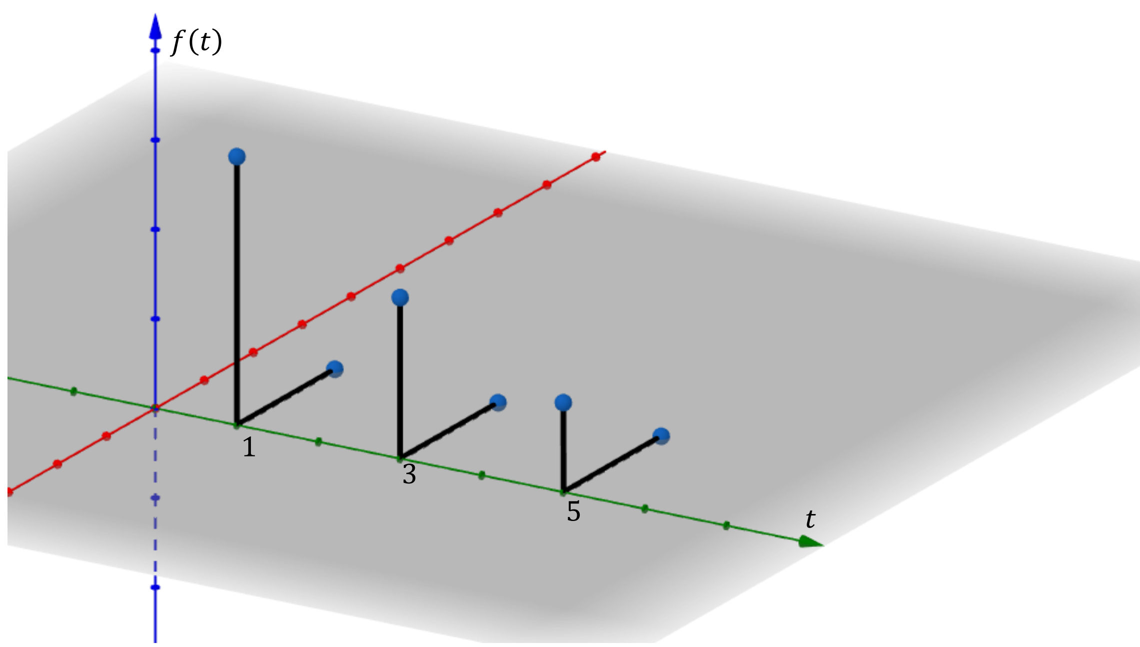
$$j = \ e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = cos\frac{\pi}{2} \pm sen\frac{\pi}{2}$$

$$f(t) = \frac{4v}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{jn} e^{jnwt}$$

$$f(t) = \frac{v}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-j\frac{\pi}{2}}. e^{jnwt}$$

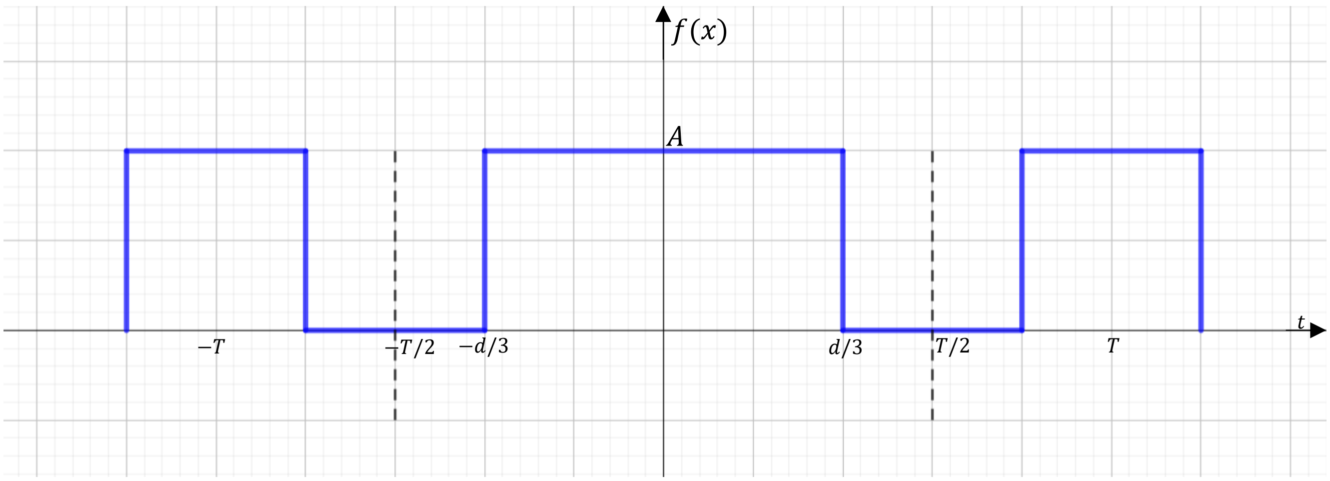
$$f(t) = \frac{v}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{j(-\frac{\pi}{2}.+nwt)}$$

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{v}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{j(nwt-\pi/2)}}$$



Ejercicio:

Encuentre la serie exponencial de Fourier y grafique los espectros respectivos de la frecuencia para la función periódica de pulsos rectangulares $f(t)$, la cual se muestra en la figura:



1 Análisis:

$$f(t) = \begin{cases} 0; -T/2 \le t \le -d/3 \\ A;\ -d/3 \le t \le d/3 \\ 0; \quad d/3 \le t \le T/2 \end{cases}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_o t}dt = \frac{1}{T}\int_{-d/3}^{d/3} Ae^{-jn\omega_o t}dt$$

$$C_n = \frac{A}{T}\int_{-d/3}^{d/3} e^{-jn\omega_o t}dt = \frac{A}{T}\left[\frac{e^{-jn\omega_o t}}{-jn\omega_o t}\bigg|_{-d/3}^{d/3}\right] = -\frac{A}{T}\left(\frac{e^{-jn\omega_o d/3} - e^{jn\omega_o d/3}}{jn\omega_o}\right)\cdot\frac{2}{2}$$

$$C_n = \frac{2A}{nT\omega_o}\left(\frac{e^{-jn\omega_o d/3} - e^{jn\omega_o d/3}}{2j}\right)$$

$$C_n = \frac{2A}{nT\omega_o}\cdot\sin(n\omega_o d/3) = \frac{2A}{nT\omega_o}\cdot sin(n\omega_o d/3)$$

$$\boldsymbol{C_n = \frac{2Ad}{3T}\left[\frac{\sin\left(\frac{n\omega_o d}{3}\right)}{\frac{n\omega_o d}{3}}\right]}$$

Para:

$$\frac{2Ad}{3T} = \frac{2A(1/10)}{3(1/2)} = \frac{2A/10}{3/2} = 2A/15$$

$$d=\frac{1}{10}\ y\ T=\frac{1}{2}=>\omega_o=\frac{2\pi}{T}=4\pi\ rad$$

$$\therefore \frac{d}{T}=\frac{1/10}{1/2}=\frac{1}{5}, ESPECTRO\ DE\ AMPLITUD$$

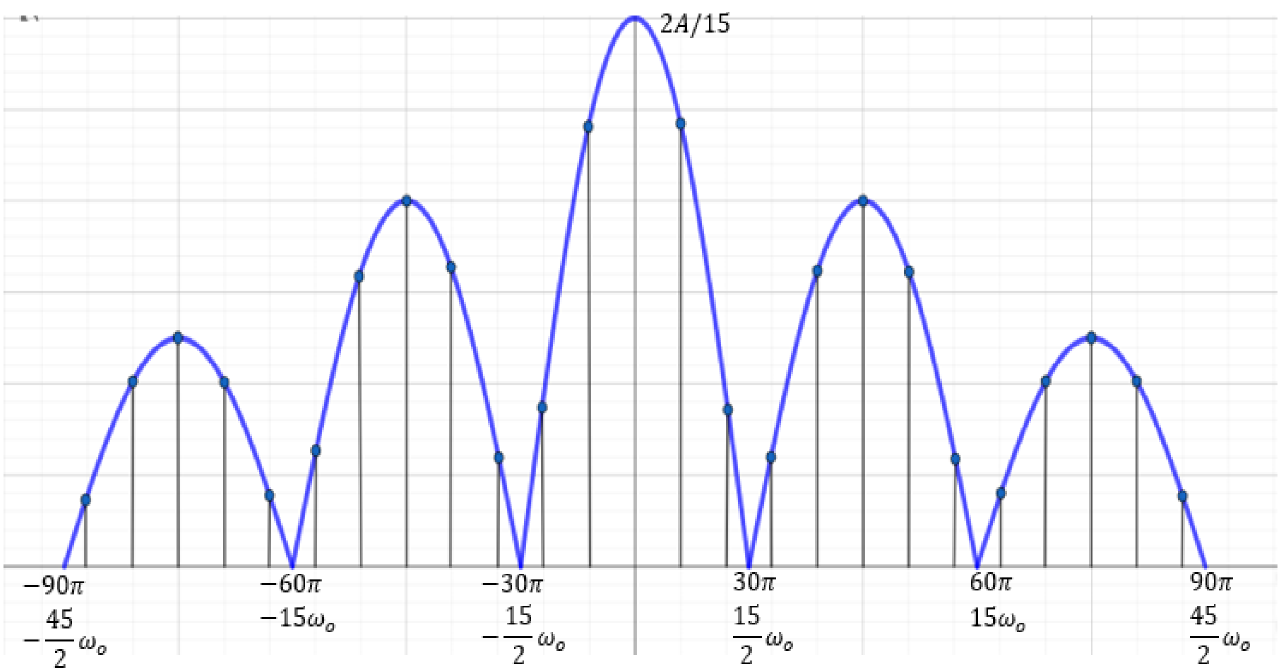
$$\sin\left(\frac{n\omega_o d}{3}\right)=0=>\frac{n\omega_o d}{3}=m\pi;\ \ m=1,2,3,\dots,K\in E$$

$$n\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1}{10}=m\pi\rightarrow n=\frac{15}{2}m$$

$$m=1,\omega_1=\pm\frac{15}{2}\cdot\omega_o=\pm 30\pi rad; n=\sin\pi \qquad n=\sin\left(\frac{15}{2}\cdot 4\pi\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}\right)=\sin(\pi)$$

$$m=2,\omega_2=\pm 15\cdot\omega_o=\pm 60\pi rad; n=\sin 2\pi \qquad n=\sin\left(15\cdot 4\pi\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}\right)=\sin(2\pi)$$

$$m=3,\omega_3=\pm\frac{45}{2}\cdot\omega_o=\pm 90\pi rad; n=\sin 3\pi \qquad n=\sin\left(\frac{45}{2}\cdot 4\pi\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}\right)=\sin(3\pi)$$



TRANSFORMADA DE FOURIER

Se puede definir como el espectro de frecuencia en una función un ejemplo práctico puede ser la funcionalidad del oído humano que toma distintas frecuencias y es lo que se escucha.

Nota: La transformada de Fourier es otra señal en función de otra variable que no es el t, que indica como se distribuye en función de la frecuencia la energía o la potencia de la señal.

Se define ala transformada de Fourier como:

$$F[f(t)] = F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jwt}d(t)$$

La misma que puede ser reversible siendo factible la transformación en os dos dominios y se define como

$$F^{-1}[F(W)] = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(w)e^{jwt}d(w)$$

Condiciones:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{x(t)}| \cdot \boldsymbol{dt} = \boldsymbol{M}$ en donde $M < \infty$, es decir que sea absolutamente integrable
2. Cualquier intervalo finito, número finito de máximo y mínimo
3. Número finito de discontinuidades

Además, se debe considerar las siguientes expresiones:

$$x(f) => x(t)$$
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df$$
$$F[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

Ecuación 1: Transformada directa de Fourier

$$F^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

Ecuación 2: Transformada directa de Fourier

$$F(\omega) = Re(\omega) + jX(\omega)$$

Ecuación 3: Función Compleja

De esta última expresión se tiene:

$$|F(\omega)| = \sqrt{Re(\omega)^2 + X^2(\omega)}$$

Ecuación 4: Magnitud $f(t)$

$$\phi F(\omega) = tg^{-1}\left(\frac{X(\omega)}{Re(\omega)}\right)$$

Ecuación 5: Espectro de Fase $f(t)$

- **Propiedades de la transformada de Fourier**

Propiedades principales

Traslación

$$F\{f(t-a)\}(\varepsilon) = e^{j\pi\varepsilon a}F\{f\}(\varepsilon) =$$

Traslación en la variedad transformada

$$F\{f\}[\varepsilon - a] = \left\{Fe^{j\pi at}f(t)\right\}(\varepsilon)$$

Transformada de la derivada

$$F\{f'\}(\varepsilon) = 2\pi i\varepsilon. F\{f\}(\varepsilon)$$

$$F\left\{f(t)e^{jwot}\right\} = F\{W - Wo\}$$

$$F\{f(t - t0)\} = Fw\; e^{j\pi\varepsilon a}$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$$

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) \cdot e^{-j\omega t_o}$$
$$f(t)e^{j\omega_o t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_o)$$

$$f(t)\cos(\omega_o t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_o)$$

$$f(t)\,\mathrm{sen}(\omega_o t) \leftrightarrow \frac{1}{2j}F(\omega - \omega_o) + \frac{1}{2j}F(\omega + \omega_o)$$

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$$

$$f'(t) \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

$$-jtf(t) \leftrightarrow F'(\omega)$$

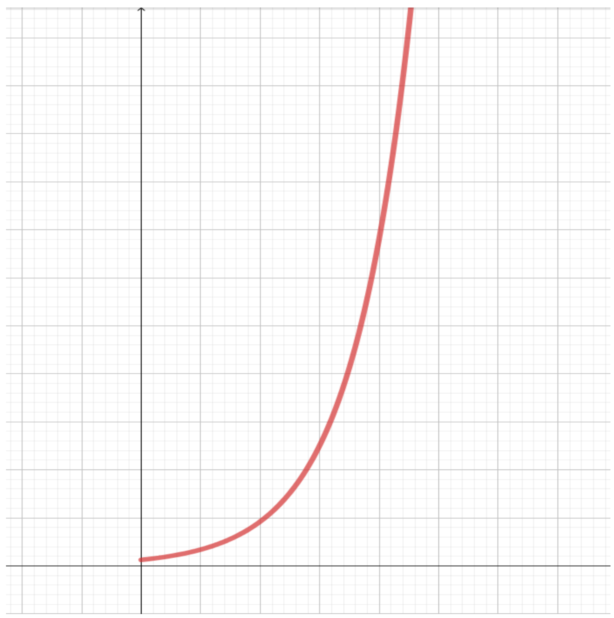
$$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow F^n(\omega)$$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(t-x) \cdot dx \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

Ejemplo:

Determinar la transformada de Fourier de la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{m}{2} e^{\left(\frac{-v}{E}\right)t} . u - 1(t)}$$



Solución:

$$\boldsymbol{F(w) = \int_0^{\infty} f(t). e^{-jwt} dt = \int_0^{\infty} \frac{m}{2} e^{\left(\frac{-v}{E}\right)t} . e^{-jmt} dt}$$

$$\boldsymbol{F(w) = \frac{m}{2} \int_0^{\infty} e^{\left(\frac{-v}{E}\right)t} dt = \frac{m_0}{2} \left[\frac{e^{\left(\frac{-v}{E}\right)t}}{-\left(\frac{v}{E} + jm\right)} \Big|_0^{\infty} \right]}$$

$$\boldsymbol{F(w) = \frac{m_0}{2} \frac{e^{\infty}}{\left(\frac{v}{E} + jm\right)} - \frac{m_0}{2} \frac{e^{0}}{\left(\frac{v}{E} + jm\right)} = \frac{m_0}{2} \frac{1}{\left(\frac{v}{E} + jm\right)}}$$

$$\boldsymbol{F(w) = \frac{m_0}{2\left(\frac{v}{E} + jm\right)} * \frac{\frac{v}{E} - jm}{\frac{v}{E} - jm} = \frac{m_0\left(\frac{v}{E} - jm\right)}{2\left(\left(\frac{v^2}{E}\right) + w^2\right)} = \frac{m_0\left(\frac{v}{E}\right)}{\left(2\left(\frac{v^2}{E}\right) + 2w^2\right)} - j\frac{m_0 w}{\left(2\left(\frac{v^2}{E}\right) + 2w^2\right)}}$$

$$F(w)=\sqrt{R(w^2)+X(w^2)}=\sqrt{\left(\frac{m_0\left(\frac{v}{E}\right)}{\left(2\left(\frac{v^2}{E}\right)+2w^2\right)}^2\right)-\left(\frac{m_0 w}{\left(2\left(\frac{v^2}{E}\right)+2w^2\right)}^2\right)}$$

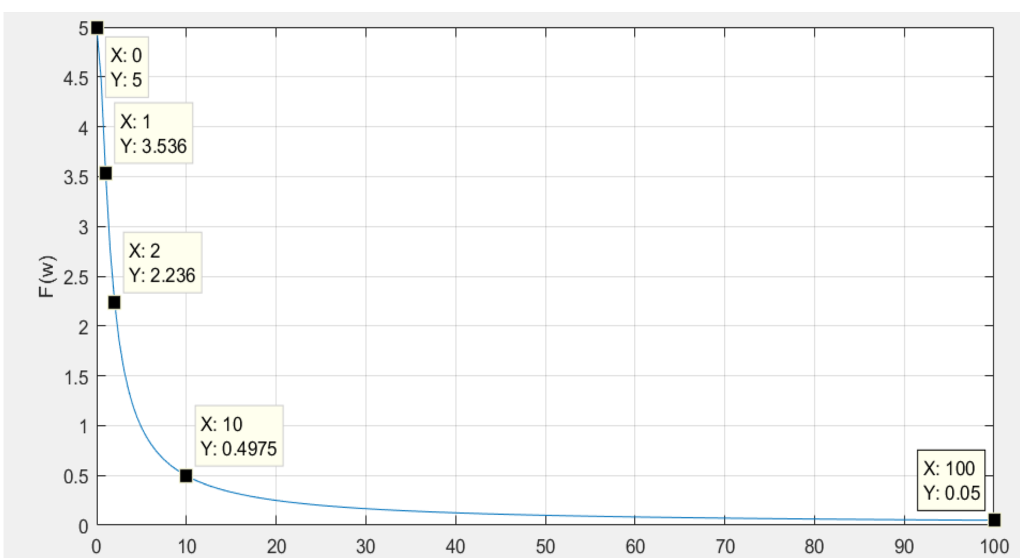
$$F(w)=\sqrt{\left(\frac{{m_0}^2\left(\frac{v}{E}\right)^2+{m_0}^2w^2}{\left(2\left(\frac{v}{E}\right)^2+2w^2\right)^2}\right)}$$

$$F(w)=\sqrt{\frac{{m_0}^2\left(\frac{v}{E}\right)^2+w^2}{\left(2\left(\frac{v}{E}\right)^2+2w^2\right)^2}}$$

$$\emptyset F(w)=tan^{-1}\frac{X(w)}{X(w)}=\frac{\frac{m_0 w}{2\left(\frac{v}{E}\right)^2+2w^2}}{\frac{m_0\frac{v}{E}}{2\left(\frac{v}{E}\right)^2+2w^2}}=\frac{m_0 w}{m_0\frac{v}{E}}=tan^{-1}\left(-\frac{wE}{V}\right)$$

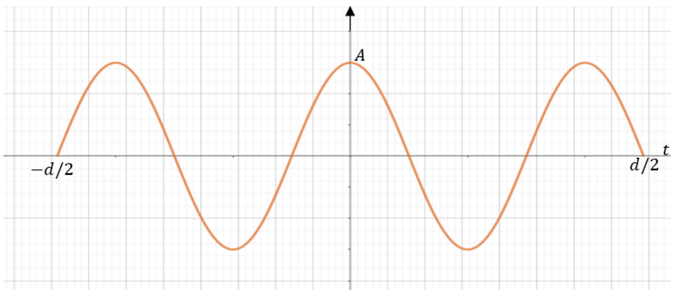
W	F(W)
0	5
1	3.535
2	2.23
10	0.5
100	0.00

Tabla 1: Valores obtenidos si $m_0 = 10$ *y* $V/E = 1$



Ejemplo:

Hallar la transformada de Fourier de la siguiente gráfica:



$$f(t) = \begin{cases} 0\; t < -d/2 \\ A\cos t \\ -\dfrac{d}{2} \le t \le d/2 \end{cases}$$

1.- Análisis

$$f(t) = \cos \omega_o t \qquad \cos \omega_o t = \frac{e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}}{2}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \mathfrak{F}[\mathrm{a} \cdot \cos \omega_o t] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_o t \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}}{2} \right) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_o t} \cdot e^{-j\omega t} + e^{-j\omega_o t} \cdot e^{-j\omega t}}{2} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{j(\omega_o - \omega)\,t} + e^{-j(\omega_o + \omega)\,t} \right] dt$$

$$= \frac{A}{2} \left[\left. \frac{e^{j(\omega_o - \omega)t}}{j(\omega_o - \omega)} \right|_{-d/2}^{d/2} + \left. \frac{e^{-j(\omega_o + \omega)t}}{-j(\omega_o + \omega)} \right|_{-d/2}^{d/2} \right]$$

$$= \frac{A}{2} \left[\frac{e^{-j(\omega_o - \omega)d/2}}{j(\omega_o - \omega)} - \frac{e^{-j(\omega_o - \omega)d/2}}{j(\omega_o - \omega)} + \frac{e^{-j(\omega_o + \omega)d/2}}{-j(\omega_o + \omega)} - \frac{e^{j(\omega_o + \omega)d/2}}{-j(\omega_o + \omega)} \right]$$

$$si: \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

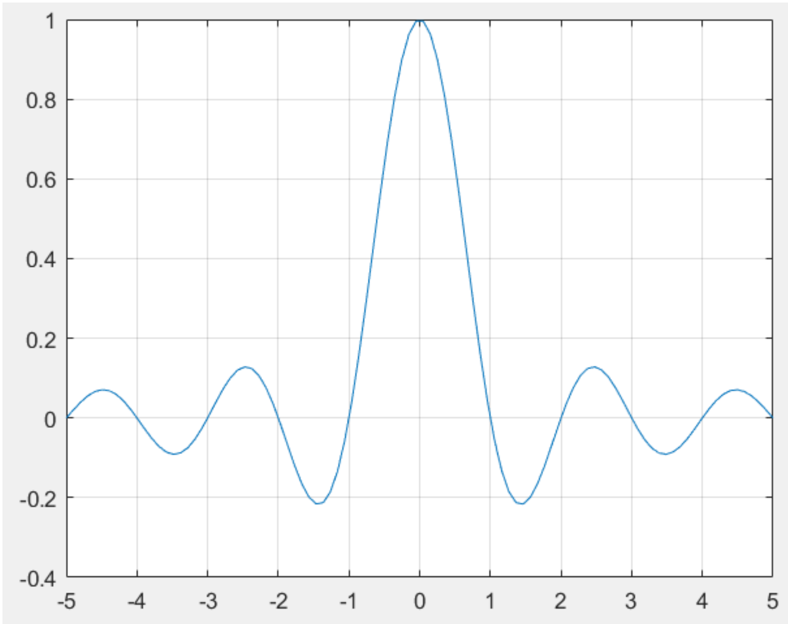
$$= \frac{A}{2} \left[\frac{2\sin(\omega_o - \omega)\, d/2}{\omega_o - \omega} + \frac{2\sin(\omega_o + \omega)\, d/2}{\omega_o + \omega} \right] \cdot \frac{d/2}{d/2}$$

$$= \frac{Ad}{2} \left[\frac{2\sin(\omega_o - \omega)\, d/2}{(\omega_o - \omega)d/2} + \frac{2\sin(\omega_o + \omega)\, d/2}{(\omega_o + \omega)d/2} \right]$$

$$F(\omega) = \frac{Ad}{2} [Sa(\omega_o - \omega)d/2 + Sa(\omega_o + \omega)d/2]$$

$$\frac{\sin(\omega_o - \omega)\, d/2}{(\omega_o - \omega)d/2} \qquad si\ \omega = 0 \quad => \quad \frac{\sin \omega_o\, d/2}{\omega_o d/2} \qquad si\ A = 10; d/2 = 5$$

$$\frac{\sin \omega_o\, d/2}{\omega_o d/2} \quad => \quad 50 \sin 10\pi$$



$$Sa(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, t \neq 0 \\ 1, t = 0 \end{cases}$$

- **Densidad espectral**

Es la función que informa cómo está distribuida la potencia o energía en una señal.

$$E(x) = \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2\, dt$$

$$E(x) = \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$$

- **Densidad espectral de potencia**

Es la variación de energía que posee una señal vibratoria, en función de la frecuencia por unidad de masa.

$$P(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |X(t)|^2\, dt$$

Siendo X(t) una función periódica de periodo T

Auto correlación de señales

Es el proceso de acoplamiento de una señal con una versión retardada de la misma.

Versión de la señal retardada Rx (No periódica)

$$Rx(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)\, dt$$

Propiedades

$$Rx(\tau) = R_x(-\tau)$$

$$Rx(\tau) \leq R_x(0)$$

$$Rx(\tau) \leftrightarrow \gamma_x(f)$$

$$Rx(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,(t)dt$$

Versión de la señal retardada Rx (Periódica)

$$Rx(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)\,dt$$

Propiedades

$$Rx(\tau) = R_x(-\tau)$$

$$Rx(\tau) \leq R_x(0)$$

$$Rx(\tau) \leftrightarrow G_x(f)$$

$$Rx(0) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,(t)dt$$

- **Energía de una señal**

En general toda señal tiene duración finita, por lo que la energía es finita. No se considera solo como energía el área bajo la curva, o integral de la señal, debido a que puede contener áreas de signo negativo que pueden cancelar la media, la mayor parte de energía debe estar concentrada en un intervalo de tiempo finito.

$$P = V * I = \frac{V^2}{R} = I^2 * R$$

$$P(t) = \frac{v^2(t)}{R} = i^2(t) * R$$

Energía disipada

$$E = \int_{t1}^{t2} |f^2(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f^2(t)|\,dt \quad < \infty$$

Potencia media disipada

$$P = \frac{1}{t2 - t1}\int_{t1}^{t2} |f^2(t)|\,dt \quad < \infty$$

Densidad Espectral. - Nos indica cómo está distribuida la energía o la potencia en el dominio de la frecuencia. Es útil es sistemas de comunicaciones, para la filtración de señales.

$$Ex(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{x^2}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^2\,(f)df \rightarrow Teorema\ de\ parseval$$

$X(f)$ Es la transformada de Fourier de x(t) → Señales no periodicas

$$Ex(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(f)df \left[\frac{Joule}{Hz}\right] = f$$

$\varphi_x(f) = X^2(f)$ →Forma de onda de la derivada espectral de energia (DEE)

La señal es simétrica alrededor del origen.

$$[f(t)\,, f(-)]$$

$Ex = 2\int_0^{\infty} \varphi_x(f)df$ →Señales no periódicas

$Px = \frac{1}{T}\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x^2(t)dt$ →Señal periódica

$Px = \frac{1}{T}\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{n} |Cn|^2.$

Cx(f) La función de onda de la densidad espectral de potencial

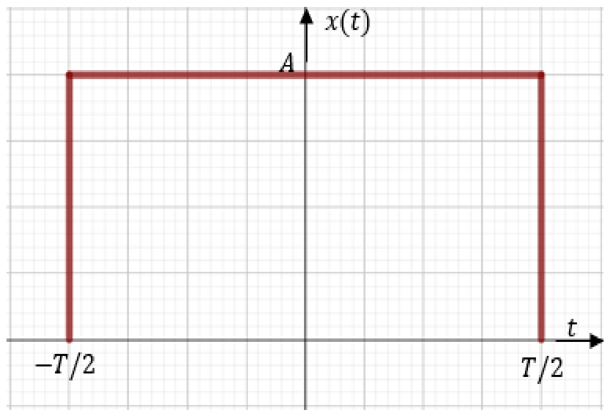
$$Cx(f) = \sum_{n=-\infty}^{n} |Cn|^2\,\delta(f - nf0)$$

$$Px = \int_{\infty}^{\infty} Cx(f)df$$

$$Px = 2\int_{0}^{\infty} Cx(f)df$$

Ejercicio:

Calcular la energía total del pulso rectangular que se muestra en la figura:



Solución:

$$E(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2(t)dt = A^2 t|_{-T/2}^{T/2}$$

$$\boldsymbol{E(t) = A^2\left(\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right) = A^2T[J/Hz]}$$

Calcular la potencia del pulso rectangular:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt$$

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = \frac{1}{T}A^2T = A^2 \qquad \therefore \boldsymbol{P = A^2}$$

Se debe considerar, además:

Señal continua no periódica	
$\boldsymbol{P = \frac{1}{T}; P = 0\ \ porque\ T = \infty}$	
Señales Periódicas	Señales No Periódicas
$\boldsymbol{E = \infty}$	$E = Valor$
$\boldsymbol{P = Valor}$	$P = 0$

Ejercicio:

Hallar la potencia promedio normalizada de:

$$x(t) = 5Cos(2\pi f_0 t)$$

Solución:
Usando Ts promedio

$$Px = \frac{1}{T}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x^2(t)dt.$$

$$Px = \frac{1}{T0}\int_{-\frac{t_2}{2}}^{\frac{t_2}{2}} 25cos^2(2\pi f_0 t)dt.$$

$$Px = \frac{25}{T0}\int_{-\frac{t_2}{2}}^{\frac{t_2}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{Cos(4\pi f_0 t)dt}{2}\right) dt.$$

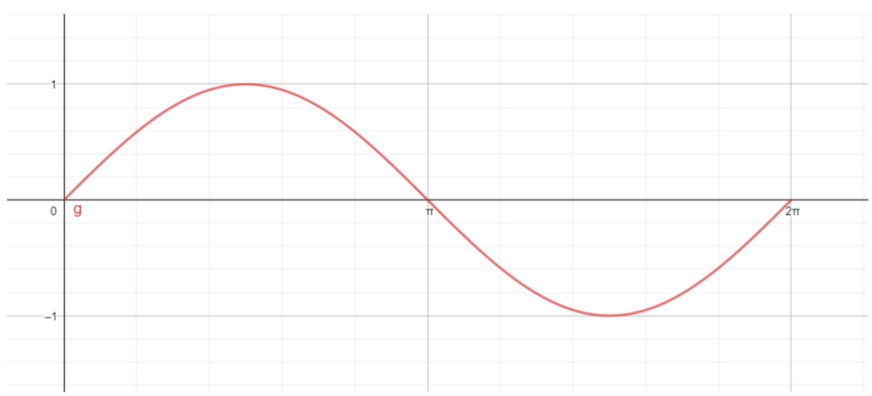
$$Px = \frac{25}{T0}\left[\left(\frac{t}{2} + \frac{Cos(4\pi f_0 t)dt}{2}\right)_{-\frac{T0}{2}}^{\frac{T0}{2}}\right]$$

$$Px = \frac{25}{T0}\left[\left(\frac{T0}{2}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{Px = 12.5\left[\frac{Watts}{Hz}\right]}$$

Ejercicio:

Encontrar la potencia de la siguiente función:



Solución:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)^2|dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin t|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \cos\frac{2t}{2}\right)dt$$

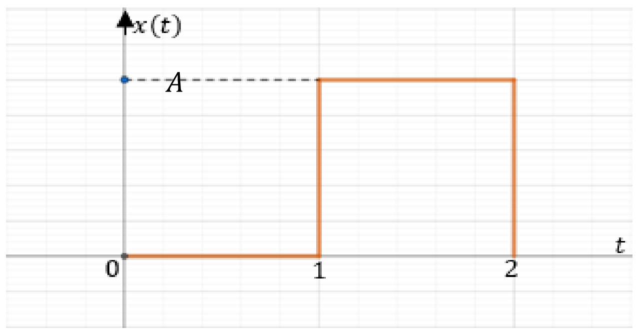
$$P = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt = \frac{1}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi}\cos 2t\, dt\right]$$

$$P = \frac{1}{4\pi}\left[t|_0^{2\pi} - \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[2\pi - 0 - \frac{\sin 4\pi}{2} - \sin 0\right]$$

$$P = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}[Watt/Hz]$$

Ejercicio

Encontrar la energía de la siguiente función

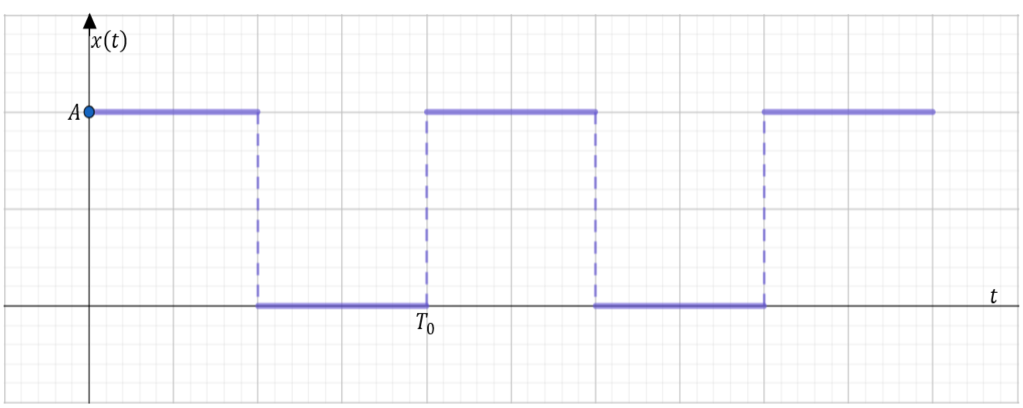


Solución:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)^2| dt = \int_{1}^{2} |A|^2 dt = A^2(2-1) = \boldsymbol{A^2[Joule/Hz]}$$

Ejercicio

Encontrar la energía de la siguiente función



Solución:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)^2| dt$$

$$P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |(A)^2| dt = \frac{1}{T_0}\left[A^2 t|_0^{T_0/2}\right]$$

$$P = \frac{A^2}{T_0}\left(\frac{T_0}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{A^2}{2}}\,[\boldsymbol{Watt/Hz}]$$

$$E = \frac{A^2}{2}\cdot T_o [J/Hz]$$

Ejercicio

Si $S(t) = A\cos(\omega_o t + \theta_o)$ calcular P_s

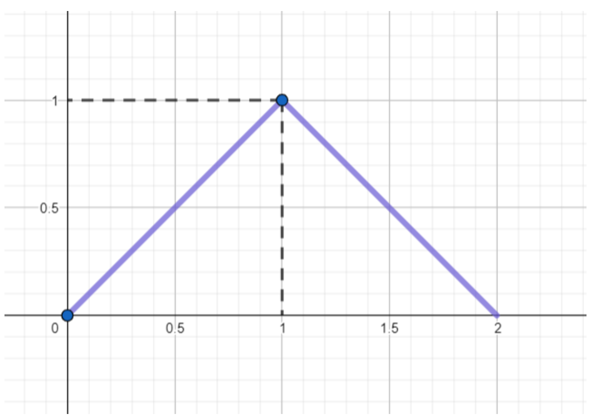
Solución:

$$P_s = \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} A^2\cos^2(\omega_o t + \theta_o) dt$$

$$P_s = \frac{A^2}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} \frac{1}{2} + \frac{cos\,(2\omega_o t + \theta_o)}{2} dt$$

$$P_s = \frac{A^2}{T_o}\left(\frac{t}{2}\Big|_{-T_o/2}^{T_o/2}\right) = \frac{A^2}{2T_o}\left(\frac{T_o}{2} + \frac{T_o}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{A^2}{2}}$$

Ejercicio



$$x(t)\begin{cases} t; 0 \le t \le 1 \\ 2-t; 1 \le t \le 2 \\ 0;\ t \le 2 \end{cases}$$

$P1(0;0)$
$x_1; y_1$

$P2(1;1)$
$x_2; y_2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = x \rightarrow \boldsymbol{x(t) = t}$$

$P1(1;1)$
$x_1; y_1$

$P2(2;0)$
$x_2; y_2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = 2 - x \rightarrow \boldsymbol{x(t) = 2 - t}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)^2| dt = \int_0^1 |t^2| dt + \int_1^2 |(2-t)^2| dt$$

$$E = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + \int_1^2 (4 - 4t + t^2) dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + \left[4t|_1^2 - \frac{4t^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{t^3}{3}\Big|_1^2\right]$$

$$E = \frac{1}{3} + \left[8 - 4 + \frac{16}{2} + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3} + \left[-4 + 2 + \frac{7}{3}\right]$$

$$E = \frac{1}{3} + 4 + 2 + \frac{7}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}[\boldsymbol{Joule/Hz}]$$

Ejercicio

Sea la función $x(t) = 5\cos(\pi t) + \sin(5\pi t)\,;\ -\infty < t < \infty$, determinar la potencia

Solución:

$$A\cos(\omega_o t) = \omega_o - f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$$

$$\omega_o = \pi \rightarrow f_o = \frac{1}{2}; T_o = 2$$
$$\omega_1 = 5\pi \rightarrow f_1 = \frac{5}{2}; T_o = \frac{2}{5}$$

$$f_x = f_o \rightarrow frecuencia\ fundamental\ f_o = nf_x$$
$$f_1 = 5f_o \rightarrow armónico$$

$$P(x) = \frac{5^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \frac{25+1}{2} = \frac{26}{2} = 13[Watt/Hz]$$

- **CONVOLUCIÓN**

Es un producto entre dos funciones y se tiene una nueva función en el tiempo, sea:

$$x(t) \wedge y(t) \rightarrow \{x * y\}(t) = h(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(-\tau + t) \cdot d\tau$$

Ecuación 6: Teorema de la Convolución

Condiciones:

$$x(t) => x(-t)$$
$$x(t) \rightarrow x(t+a)$$
$$x(t) \rightarrow x(-t+a)$$

Teorema de Convolución

$$f(t) \cdot g(t) = \int_0^t f(\tau) + g(t-\tau)d\tau \qquad en\ donde\ \tau\ es\ la\ variable$$

$$g(t) \cdot f(t) = \int_0^t g(\tau) + f(t-\tau)d\tau$$

Ejemplo:

$h(t) = t \cdot e^{t-1}$

$\int_0^t \tau e^{t-\tau-1} \cdot d\tau$ $\qquad\qquad$ $\int_0^t e^{\tau-1}(t-\tau)d\tau$

$= e^{-1}\int_0^t (e^{\tau}t - \tau e^{\tau})d\tau = e^{-1}\int_0^t e^{\tau}t \cdot d\tau - e^{-1}\int_0^t \tau e^{\tau} \cdot d\tau$

$u = \tau \qquad \int dv = \int e^{\tau}d\tau$
$du = d\tau \qquad v = e^{\tau}$

$\therefore \int \tau e^{\tau} \cdot d\tau = \tau e^{\tau} - \int e^{\tau} \cdot d\tau$

$= te^{-1}\int_0^t e^{\tau} \cdot d\tau - e^{-1}[\tau e^{\tau} - e^{\tau}]|_0^t$
$= te^{-1}\left[e^{\tau}|_0^t - e^{-1}[te^t - e^t - 0e^0 - (-1)]\right]$
$= te^{-1}[e^t - 1] - e^{-1}(te^t - e^t + 1)$
$= te^{-1}e^t - te^{-1} - te^{-1}e^t + e^{-1}e^t - e^{-1}$
$= \boldsymbol{-te^{-1} + e^t e^{-1} - e^{-1}}$

$\mathcal{L}\{f(t) \cdot g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = F(S)\, G(S)$

$\mathcal{L}\{t \cdot e^{t-1}\} = \mathcal{L}\{e^{t-1} \cdot t\} = \int_0^t e^{\tau-1} \cdot (t-\tau) \cdot d\tau$

$\mathcal{L}\{e^t \cdot e^{-1} - te^{-1} - e^{-1}\} = e^{-1}\mathcal{L}\{t\} - e^{-1}\mathcal{L}\{1\}$

$e^{-1}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right] = e^{-1}\left[\frac{s^2}{(s-1)s^2} - \frac{(s-1)}{(s-1)s^2} - \frac{s(s-1)}{(s-1)s^2}\right]$

$e^{-1}\left[\frac{s^2 - s + 1 - s^2 + s}{(s-1)s^2}\right] = \boldsymbol{\frac{e^{-1}}{(s-1)s^2}}$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{L}\{t \cdot e^{t-1}\}$

$= \frac{1}{s^2}\ \mathcal{L}[e^t \cdot e^{-1}]$

$= \boldsymbol{\frac{e^{-1}}{(s-1)s^2}}$

Transformada Inversa Teorema de Convolución

$\mathcal{L}\{f(t) \cdot g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = F(S)\, G(S)$

$f(t) \cdot g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s+1)}\cdot\frac{1}{(s^2+1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\cdot\frac{2s+1}{(s+1)}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)}\right\}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s+1)}\right\}=e^{-t}\cdot\left[\frac{2s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$=\boldsymbol{e^{t}\cdot(2\,cos\,t+sin\,t)}$$

$$=\boldsymbol{\int_0^t(2\,cos\,t+sin\,t)\cdot e^{-(t-\tau)}\cdot d\tau}$$

- **Autocorrelación de señales**

La correlación es un proceso de acoplamiento mientras que la autocorrelación es el proceso de acoplamiento de la señal con una versión retardad de la misma:

$x(t) \rightarrow$ Sistema de comunicación $\rightarrow x'(t)$

En donde:

$x'(t)=x(t+\tau)$

$Rx(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot x(t+\tau)\cdot d\tau$ para señales no periódicas

Propiedades:

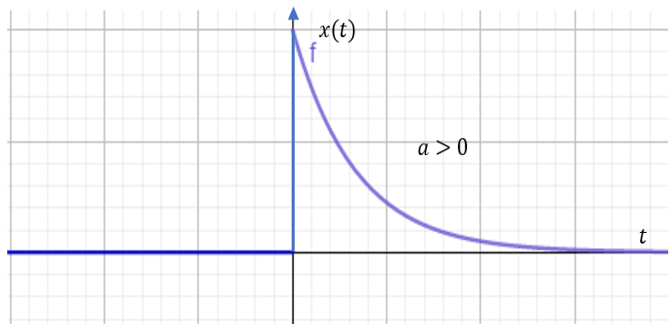
1) $Rx(\tau)=Rx(-\tau)$ simetría par
2) $Rx(\tau)\leq Rx(0)$
3) $Rx(\tau)\leftrightarrow Gx(f)$
4) $Rx(0)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)\cdot dt$ señales periódicas

   $Rx(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot(t+\tau)\cdot d\tau$ con señales no periódicas

1.1. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Determinar la transformada de Fourier de la siguiente función:**

$$\boldsymbol{x(t)=e^{-at}\cdot u(t)}$$



Solución:

$$a > 0$$

$$x(f) = TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt$$

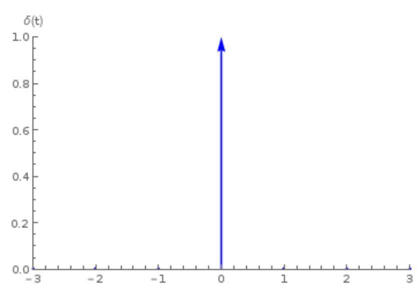
$$= \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt = \int_{0}^{\infty} e^{t(-a-j2\pi f)} \cdot dt$$

$$= \left.\frac{e^{t(-a-j2\pi f)}}{-a-j2\pi f}\right|_{0}^{\infty} = \left(\frac{e^{\infty}}{-a-j2\pi f} \nearrow 0 - \frac{e^{0}}{-a-j2\pi f} \nearrow 1\right)$$

$$= \frac{1}{a+2j\pi f} \Rightarrow \quad \boldsymbol{x(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} \quad a > 0}$$

2. **Determinar la transformada de Fourier de la función impulso:**

$$\boldsymbol{f(t) = \delta(t)}$$



Solución:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt$$

Propiedad de la función impulso:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) \cdot dt = f(0) \Rightarrow \textit{función evaluada en cero}$$

Por tanto:

$$F(\omega) = \left. e^{-j\omega t}\right|_{t=0} = e^{-j\omega(0)} = 1$$

$$\therefore \boldsymbol{F(\omega) = 1}$$