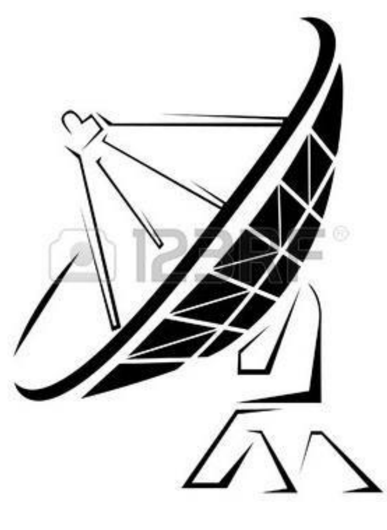
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO

FACULTAD DE INGENIERÍA EN SISTEMAS, ELECTRÓNICA E INDUSTRIAL

CARRERA DE TELECOMUNICACIONES

MÓDULO DE COMUNICACIONES DIGITALES



Docente:

Ing. Juan Pablo Pallo Noroña, Mg

CAPÍTULO II

2.1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

La teoría de la información, conocida también como teoría matemática de la comunicación o teoría matemática de la información, es una propuesta teórica presentada por Claude E. Shannon y Warren Weaver a finales de la década de los años 1940. Esta teoría está relacionada con las leyes matemáticas que rigen la transmisión y el procesamiento de la información y se ocupa de la medición de la información y de la representación de esta, así como también de la capacidad de los sistemas de comunicación para transmitir y procesar información. La teoría de la información es una rama de la teoría de la probabilidad y de las ciencias de la computación que estudia la información y todo lo relacionado con ella: canales, compresión de datos y criptografía, entre otros[1].

- **Medida de la información**

El modelo propuesto por Shannon es un sistema general de la comunicación que parte de una fuente de información desde la cual, a través de un transmisor, se emite una señal, la cual viaja por un canal, pero a lo largo de su viaje puede ser interferida por algún ruido. La señal sale del canal, llega a un receptor que decodifica la información convirtiéndola posteriormente en mensaje que pasa a un destinatario.

En 1949, Claude Shannon propuso algunas definiciones básicas acerca de la información y la velocidad de transmisión a la cual se puede transmitir sin error. Este trabajo, más otros desarrollos afines, dio origen a la Teoría de la Información. Esta es una disciplina altamente matemática y con aspectos que todavía no han sido instrumentados en la práctica. Sin embargo, ciertos aspectos significativos de la teoría han sido aplicados exitosamente en sistemas prácticos.

Consideremos un suceso **“A”** cualquiera. Cuanto menos se sepa de un suceso mayor será, digamos, nuestra sorpresa al conocer la realización de este. La ignorancia en cuanto al suceso es simplemente la incertidumbre que se tiene acerca de él. Al realizarse el suceso, la incertidumbre se convierte en certeza y hemos obtenido un conocimiento o recibido una información.

Por otro lado, la magnitud de la incertidumbre depende del grado de probabilidad de ocurrencia del suceso **“A”**. Cuanto mayor sea la probabilidad de ocurrencia del suceso, menor será nuestra incertidumbre. En consecuencia, podemos decir que la incertidumbre acerca del suceso A es función de la probabilidad de que dicho suceso ocurra.

- **Información**

Antes de analizar lo que se refiere a la capacidad y fidelidad de un canal determinado para transmitir información, es necesario que precisemos los alcances de este último concepto. El concepto de información es definido en términos estrictamente estadísticos, bajo el supuesto que puede ser tratado de manera semejante a como son tratadas las cantidades físicas como la masa y la energía. La palabra "información" no está relacionada con lo que decimos, sino más bien, con lo que podríamos decir. El concepto de información se relaciona con la libertad de elección que tenemos para seleccionar un mensaje determinado de un conjunto de posibles mensajes. Si nos encontramos en una situación en la que tenemos que elegir entre dos únicos mensajes posibles, se dice, de un modo arbitrario, que la información correspondiente a esta situación es la unidad. La Teoría de la Información, entonces, conceptualiza el término información como el grado de libertad de una fuente para elegir un mensaje de un conjunto de posibles mensajes.

El concepto de información supone la existencia de duda o incertidumbre. La incertidumbre implica que existen diferentes alternativas que deberán ser elegidas, seleccionadas o discriminadas. Las alternativas se refieren a cualquier conjunto de signos construidos para comunicarse, sean estas letras, palabras, números, ondas, etc. En este contexto, las señales contienen información en virtud de su potencial para hacer elecciones. Estas señales operan sobre las alternativas que conforman la incertidumbre del receptor y proporcionan el poder para seleccionar o discriminar entre algunas de estas alternativas[2].

Probabilidad	Cantidad de Información
1	0
0.5	Algo
0	Bastante

Tabla 1: relación de probabilidad y cantidad de la información

- **Relaciones de logaritmos**

Una representación logarítmica es una representación gráfica de una función o de un conjunto de valores numéricos, en la que el eje de abscisas y el eje de ordenadas tienen escala logarítmica. o semi curvas lineales Si la representación se hace manualmente, se emplea papel logarítmico,1 que posee la escala con las marcas adecuadas para este tipo de representaciones. Se emplean logaritmos decimales, de base 10.

$$log_{\boldsymbol{a}} b = \frac{log_{10} b}{log_{10} a} \qquad log_{\mathbf{10}} a = \frac{\ln a}{\ln 10}$$

Ecuación 1: Ampliación de la propiedad de los logaritmos

- **Cantidad de la información**

Se concibe como una medida del desorden o la peculiaridad de ciertas combinaciones. La entropía puede ser considerada como una medida de la incertidumbre y de la información necesaria para, en cualquier proceso, poder acotar, reducir o eliminar la incertidumbre. Resulta que el concepto de información y el de entropía están básicamente relacionados entre sí, aunque se necesitaron años de desarrollo de la mecánica estadística.

$$I(xi) = -log_a \, p(xi) \qquad [Shanon \,/\, símbolo] = \, bits$$

$$I(xi) = log_a \left(\frac{1}{p(xi)}\right)$$

$$I(xi) = -3.322\ log_{10}P(Xi)\ [bits]$$

Ecuación 2: ecuación de la cantidad de la información

En donde:

$P(Xi) \rightarrow Probabilidad\ de\ ocurrencia\ de\ un\ símbolo$

- **Probabilidades**

La probabilidad es simplemente qué tan posible es que ocurra un evento determinado.

Cuando no estamos seguros del resultado de un evento, podemos hablar de la probabilidad de ciertos resultados: qué tan común es que ocurran. Al análisis de los eventos gobernados por la probabilidad se le llama estadística.

La probabilidad es el cálculo matemático que evalúa las posibilidades que existen de que una cosa suceda cuando interviene el azar.

$$P(x) = \frac{nf}{nt}\ se\ cumple\ que\ (0 < P(x) < 1)$$

Ecuación 3: expresión de la probabilidad

En donde:

- $\boldsymbol{nf} = Número\ de\ eventos\ favorables$
- $\boldsymbol{nt} = Números\ de\ eventos\ totles$

- **Frecuencia relativa**

La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia absoluta de un determinado valor y el número total de datos.

La frecuencia relativa se puede expresar en tantos por ciento y se representa por fr:

$$fr = \frac{nfv}{ntv}$$

En donde:

- $\boldsymbol{nfv}$ son los eventos verificados
- $\boldsymbol{ntv}$ son los eventos totales verificados

Se cumple además que:

Si el número de eventos totales verificados es grande $\rightarrow \infty\ la\ p(x) = fr(x)$

- **Ejercicios resueltos de la cantidad de información $I(x_i)$**

1. **En lengua española se ha realizado un estudio de las probabilidades de las letras siendo la más frecuente la letra A con una probabilidad de ocurrencia de 0.241 y la menos frecuente es la letra W con una probabilidad de ocurrencia de 0.0017.**
   ¿Cuál es la cantidad de información que aporta cada letra?

Solución:

Analizando el enunciado se determina las probabilidades de ocurrencia de cada letra A y W teniendo así:

Para la letra A:

$$P(A) = 0.241$$

$$I(A) = -\,log_2\,P(A)$$

$$I(A) = \frac{-\,log_{10}\,P(0.241)}{log_{10}\,2}$$

$$\boldsymbol{I(A) = 2.052 \quad (bits)}$$

Para la letra W:

$$P(W) = 0.0017$$

$$I(W) = -\,log_2\,P(W)$$

$$I(W) = \frac{-\,log_{10}\,P(0.0017)}{log_{10}\,2}$$

$$\boldsymbol{I(W) = 9.200 \quad (bits)}$$

2. **En una red de fibra óptica se transmite aproximadamente 500000 bits de los cuales el 55% es 1 lógico.**
   ¿Qué cantidad de información se tiene?

Solución:

$$P(1L) = 0.55$$

$$I(1L) = -\,log_2\,P(1L)$$

$$I(1L) = \frac{-\,log_{10}\,P(0.55)}{log_{10}\,2}$$

$$\boldsymbol{I(1L) = 0.862 \quad (bits)}$$

3. **Una imagen de televisión se considera formada por una estructura de puntos dispuestos en 500 filas y 600 columnas aproximadamente, cada uno de sus puntos tiene 10 niveles de brillantez. Calcular la cantidad de información que tiene una imagen.**

Solución:

Se sabe que cada punto posee 10 niveles de brillantez y además que los puntos totales para formar una imagen vienen dados por la expresión:

$$P_t = Filas \times Columnas = 500 \times 600 = 3 \times 10^5$$

Por tanto, la probabilidad de un punto tenga un determinado valor de imagen, vendrá dado por:

$$P(imagen) = \frac{1}{10^{300000}} = 10^{-(3\times10^5)}$$

Luego se procede a reemplazar el valor de la probabilidad en el formula de la cantidad de la información:

$$I(imagen) = -\log_2\left(10^{-(3\times10^5)}\right)$$
$$I(imagen) = 3\times10^5 \log_2(10)$$
$$I(imagen) = 9.9\times10^5\ [bits]$$
$$\boldsymbol{I(imagen) = 0.99\ (Mbits)}$$

- **Conceptos importantes**

➢ **Generación de información**

Es el proceso de selección de un símbolo particular dentro de un conjunto de símbolos llamada alfabeto o fuente.

➢ **Recepción de información**

Es el proceso de identificación de un símbolo particular dentro del conjunto de símbolos llamado alfabeto o fuente igual al transmisor.

➢ **Información**

Se refiere a mensajes transmitidos: voz o música, transmitida por teléfono o radio, imágenes transmitidas por televisión, información digital en sistemas y redes de computadoras, se puede representar mediante conjuntos de símbolos como son:

$S = \{S1, S2, S3, S4, S5\}$

$X = \{X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7\}$

$B = \{0, 1\}$

➢ **Alfabeto**

Fuente de información que genera n símbolos diferentes.

$S = \{S1, S2, \ldots., Sn\} \rightarrow cada\ símbolo\ tiene\ una\ probabilidad\ de\ ocurrencia$

$P(S1)\ \ P(S2) \ldots\ \ P(Sn)$

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} p(si) = 1}$$

Ecuación 4: Propiedad de la probabilidad de un alfabeto

De acuerdo con el tipo de probabilidades la fuente de información se divide en dos grupos:

2.2. FUENTES DISCRETAS

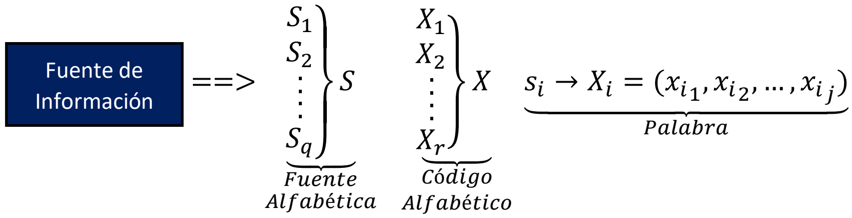


Figura 1: Estructura de la transmisión de una fuente de información

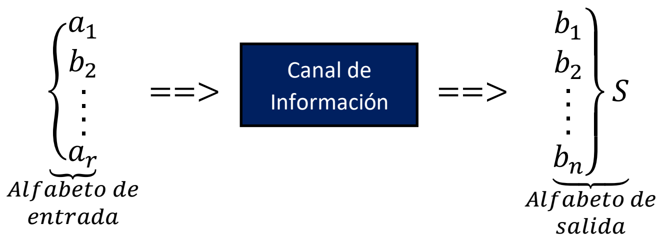


Figura 2: Estructura de la transmisión y recepción de un alfabeto

- **Fuente Discreta Sin Memoria (FDSM)**

En la naturaleza, los sucesos no surgen de manera espontánea, sino que son generados por algún mecanismo. Resultará útil, por lo tanto, plantear la descripción matemática de estos mecanismos[3].

Definimos fuente de información discreta, como aquel sistema capaz de generar una secuencia de símbolos pertenecientes a un alfabeto S, finito y fijo:

$$S = \{S1, S2, \ldots., Sq\}$$

Gráficamente una fuente de información se puede representar de la siguiente manera:

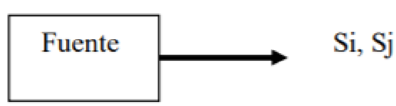


Figura 3: Representación de una FDSM

Los símbolos serán emitidos de acuerdo con una determinada ley de probabilidad. El caso más sencillo se corresponde con una fuente que los emite estadísticamente independientes, o sea, en el proceso de generar un nuevo símbolo no existe ningún tipo de influencia de los anteriormente emitidos. A este tipo de fuentes de información se les denomina de memoria nula, y quedan perfectamente caracterizadas mediante su alfabeto S de símbolos y las probabilidades con que cada uno de estos aparece:

$$P(S1)\ \ P(S2) \ldots\ \ P(Sq)$$

Ejemplos de fuentes de memoria nula son: una moneda lanzada al aire, la ruleta de un casino, el lanzamiento de un dado, un libro que se va abriendo sucesivamente por páginas al azar, etc.

Cada vez que la fuente genere un símbolo, estará proporcionando una determinada cantidad de información, que de acuerdo con la definición hecha será:

$$I(Si) = log\ \frac{1}{P(Si)} \quad (bits)$$

La probabilidad de que aparezca es precisamente $P(Si)$, de modo que la cantidad media de información por símbolo de la fuente es

$$\sum_{i=1}^{n} p(si) = 1$$

Ecuación 5: Propiedad a cumplirse en las FDSM

Donde $\sum_{Si} = 1$, indica la suma extendida a q símbolos de la fuente S. Esta magnitud, cantidad media de información por símbolo de la fuente recibe el nombre de entropía H(s) de la fuente de memoria nula.

$$H(S) = \sum\nolimits_{S} P(Si)\ log \frac{1}{P(Si)} \qquad \left(\frac{bits}{símbolo}\right)$$

Ecuación 6: Expresión de la entropía de una fuente FDSM

Donde la S del sumatorio indica que este se extiende a todos los símbolos de la fuente. Esta magnitud recibe el nombre de entropía, H(S), de la fuente, y es uno de los parámetros fundamentales en el desarrollo de la teoría de la información[3].

- **Ejercicios resueltos de la entropía de una FDSM**

1. **Sea la fuente surgida de la suma de las caras obtenidas al lanzar dos dados. Su alfabeto será:**

$$\boldsymbol{S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}}$$

Con las siguientes probabilidades de cada símbolo:

$\boldsymbol{P(2) = \frac{1}{36}}$ $\boldsymbol{P(3) = \frac{2}{36}}$ $\boldsymbol{P(4) = \frac{3}{36}}$ $\boldsymbol{P(5) = \frac{4}{36}}$ $\boldsymbol{P(6) = \frac{5}{36}}$ $\boldsymbol{P(7) = \frac{6}{36}}$

$\boldsymbol{P(8) = \frac{5}{36}}$ $\boldsymbol{P(9) = \frac{4}{36}}$ $\boldsymbol{P(10) = \frac{3}{36}}$ $\boldsymbol{P(11) = \frac{2}{36}}$ $\boldsymbol{P(12) = \frac{1}{36}}$

2. Calcular la entropía de la fuente

Solución:

Aplicando la Ecuación 6 tendremos el siguiente resultado:

$$H(S) = P(2)log\frac{1}{P(2)} + P(3)log\frac{1}{P(3)} + P(4)log\frac{1}{P(4)} + \ldots\ldots + P(12)log\frac{1}{P(12)}$$

$$H(S) = \frac{1}{36}\log 36 + \frac{2}{36}log\frac{36}{2} + \frac{3}{36}log\frac{36}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{36}\log 36$$

$$\boldsymbol{H(S) = 3.27\left(\frac{bits}{símbolos}\right)}$$

Otra forma interesante, y muy útil en lo sucesivo, de interpretar la entropía, es como medida de la incertidumbre del observador ante la salida de la fuente. En cierto modo, valora el desorden interno de la fuente.

3. Sean dos fuentes, A y B, ambas con el mismo alfabeto: $\{S1, S2, S3\}$, diferenciándose en las probabilidades de sus símbolos:

$$\boldsymbol{Fuente\ A}: \quad \boldsymbol{P(S1) = \frac{1}{3}} \qquad \boldsymbol{P(S2) = \frac{1}{3}} \qquad \boldsymbol{P(S3) = \frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{Fuente\ B}: \quad \boldsymbol{P(S1) = \frac{9}{10}} \qquad \boldsymbol{P(S2) = \frac{1}{20}} \qquad \boldsymbol{P(S3) = \frac{1}{20}}$$

Hallar la entropía de cada fuente:

Solución:

Es fácil darse cuenta como la incertidumbre frente a la salida es mayor en la fuente A que en la B. Dicho de otra forma: puestos a intentar adivinar el símbolo que emitirá la fuente, en la A fallaríamos, como media, uno de cada tres, mientras que, en la B, bastaría con que continuamente dijéramos que generará el s1 para que el acierto suba a 9 de cada 10 intentos. Veamos que esto se traduce a sus entropías de acuerdo con la interpretación anterior:

$$H(A) = 1.58\ \frac{bits}{símbolo} \qquad\qquad H(B) = 0.57\ \frac{bits}{símbolo}$$

Como se puede comprobar, efectivamente, la entropía de A es mayor que la de B

4. Se Una fuente de información con memoria nula de 6 símbolos con probabilidades de ocurrencia:

$$\boldsymbol{P(s_1) = \frac{1}{2};\ P(s_2) = \frac{1}{4};\ P(s_3) = \frac{1}{8};\ P(s_4) = \frac{1}{16};\ P(s_5) = \frac{1}{32};\ P(s_6) = x}$$

$$\boldsymbol{S = \{S1, S2, S3, S4, S5, S6\}}$$

Hallar la entropía de la fuente:

Solución:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{32} \qquad \sum P(Si) = 1$$

$$P(S6) = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32}\quad\right]$$

$$P(S6) = \frac{1}{32}$$

$$H(S) = -[P(S1)\ log_2\ P(S1) + P(S2)\ log_2\ P(S2) + \cdots + P(S6)\ log_2\ P(S6)]$$

$$H(S) = -\left[\frac{1}{2}\ log_2\ 2^{-1} + \frac{1}{4}\ log_2\ 2^{-2} + \frac{1}{8}\ log_2\ 2^{-3} + \frac{1}{16}\ log_2\ 2^{-4} + 2 * \frac{1}{32}\ log_2\ 2^{-5}\right]$$

$$H(S) = -\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{8} - \frac{4}{16} - \frac{5}{16}\right]$$

$$H(s) = \left[\frac{8+8+6+4+5}{16}\right] = \frac{\mathbf{31}}{\mathbf{16}}[\boldsymbol{bits/símbolos}\ ]$$

5. **Hallar la entropía de una fuente de información con memoria nula binaria que genera símbolos equiprobables. Graficar la entropía de dicha fuente, considerando caso general.**

$$\boldsymbol{P(s_1) + P(s_1) = 1}$$
$$\boldsymbol{2P(s_1) = 1}$$
$$\boldsymbol{P(s_1) = 1/2}$$

Solución:

Aplicamos la fórmula de la entropía de la Ecuación 6 y tendremos la siguiente expresión:

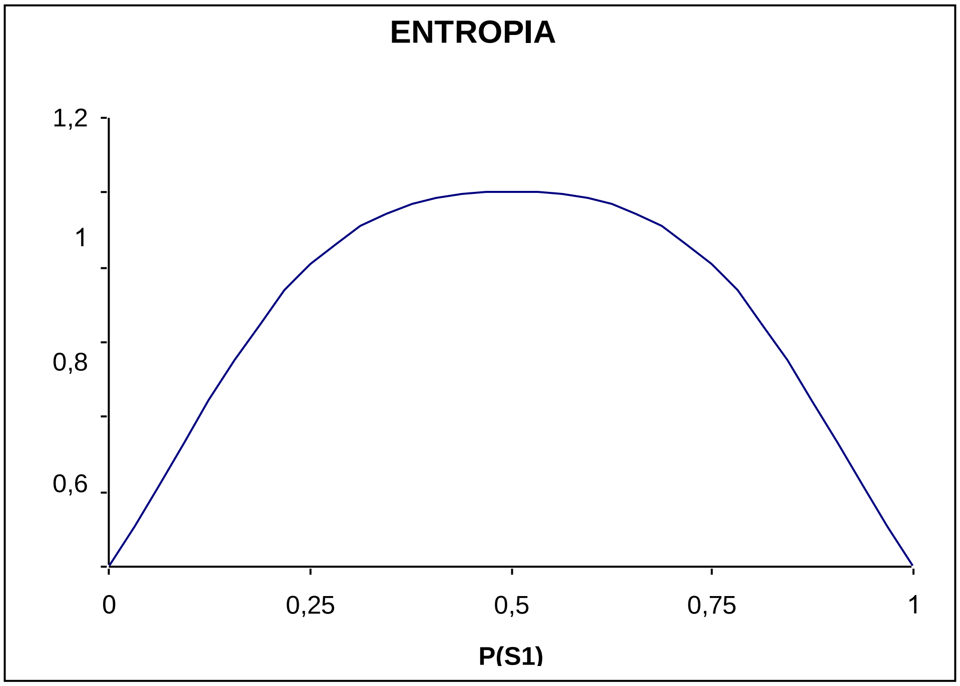
$$H(s) = -\sum_{i=1}^{n} P(s_i)\log_2\big(P(s_i)\big)\left[\frac{bits}{símbolo}\right]$$
$$H(s) = -[P(s_1)\log_2 P(s_1) + P(s_2)\log_2 P(s_2)]$$
$$H(s) = -2[P(s_1)\log_2 P(s_1)]$$
$$H(s) = -2\left[\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$H(s) = -\log_2(2^{-1})$$
$$\boldsymbol{H(s) = \log_2(2) = 1\ [bits/símbolo]}$$

Además, se puede graficar la entropía en función de las probabilidades de la fuente, mediante la siguiente función:

$$H(s) = -[P(s_1)\log_2(P(s_1)) + P(1-P(s_1))\log_2(P(1-P(s_1)))]$$

En donde se tiene la siguiente tabla:

$P(s_1)$	$H(s_1)$
0	0
0.25	0.81
0.5	1
0.75	0.81
1	0



2.3. Fuente Discreta Con Memoria (FDCM)

Cuando las probabilidades de ocurrencia de sus símbolos son condicionales. Un tipo de fuente de información de q símbolos, consiste en aquella en que la presencia de un determinado símbolo Si depende de un número finito m de símbolos precedentes. Tal fuente (llamada fuente de Markov de orden m) viene definida por su alfabeto, S, y el conjunto de probabilidades condicionales.

Examinemos el siguiente caso:

Sea una fuente capaz de generar lenguaje en castellano. Ésta emitirá secuencias de letras bajo unas determinadas reglas sintácticas, que hacen que aparezcan situaciones como las siguientes:

- Si la última letra generada es, por ejemplo, una “m”, la probabilidad de que la siguiente sea, pongamos por caso, una “r” es casi nula, mientras que la de una a es bastante mayor: la combinación “ma” es, desde luego, mucho más frecuente en castellano que la “mr”.

- Supongamos ahora que la letra generada es una “a”. En este caso, la probabilidad de que se emita a continuación una r es mucho mayor que la de que se emita una “a”, que es casi nula (la combinación “aa” en castellano es, cuando menos, muy rara).

Se tiene, entonces, que la probabilidad de emitir un símbolo depende de el/los anteriormente generados. Es inmediato observar como el modelo de fuente de memoria nula, basado en la generación de símbolos estadísticamente independientes, no es capaz de adaptarse a situaciones como la descrita, es un modelo muy limitado. Se hace, por lo tanto, necesaria la introducción de un nuevo tipo de fuente de carácter más general.

Este nuevo tipo de fuente de información se la denomina de Markov, y se caracteriza porque la probabilidad de aparición de un determinado símbolo si , depende de cuales hayan sido los m anteriormente emitidos, donde m es el orden de la fuente. Una fuente de este tipo viene descrita, entonces, por:

Su alfabeto: $S = \{S1, S2, \dots\dots, Sq\}$

El conjunto de probabilidades condicionales:

$P(Si/\,Sj1, Sj2, \dots\dots, Sjm)$ con $i = 1, 2, \dots., q$ y $j = 1, 2, \dots., q$

Donde Si será el símbolo para generar, y $Sj1, Sj2, \dots\dots, Sjm$ es la secuencia de los últimos m símbolos generados, siendo Sjm el último de ellos, es decir, que si iría detrás de Sjm.

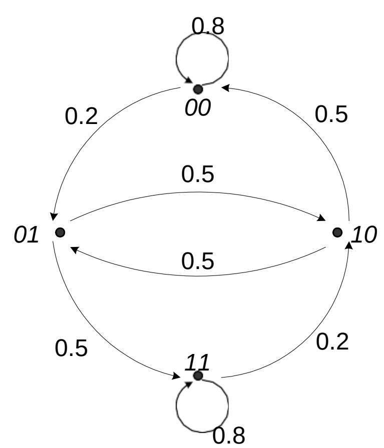


Figura 4: Diagrama de estados de una fuente de Markov de segundo orden

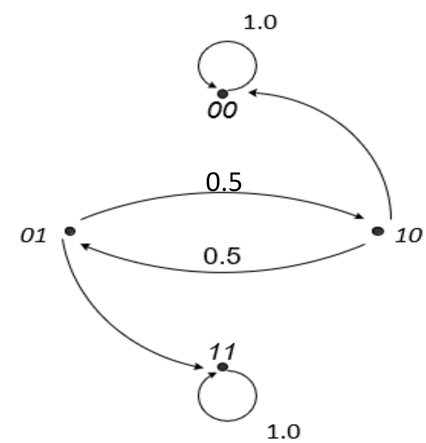


Figura 5: Diagrama de estados de una fuente no ergódica

Una fuente ergódica es meramente aquella que, observada durante un tiempo suficientemente largo, emite (con probabilidad 1) una secuencia “típica” de símbolos.

Dada una secuencia cualquiera de la fuente, sin embargo, después de una espera suficiente, encontraremos con casi absoluta seguridad todo ceros o todo unos. En otras palabras (con probabilidad 1), no existe ninguna secuencia típica; no se trata de una fuente ergódica.

- **Procedimiento para la resolución de las FDCM o de Markov**

Sea una fuente de dos símbolos y con las siguientes probabilidades:

$S = \{0, 1\}$

$P(0/00) = 0.8$ $\qquad$ $P(1/00) = 0.2$

$P(0/01) = 0.5$ $\qquad$ $P(1/01) = 0.5$

$P(0/10) = 0.5$ $\qquad$ $P(1/10) = 0.5$

$P(0/11) = 0.2$ $\qquad$ $P(1/11) = 0.8$

Cada posible combinación de las m últimas salidas, define un conjunto de probabilidades distinto sobre el siguiente símbolo a generar. Lo que tenemos, en definitiva, es que cada una de esas combinaciones define un estado diferente de la fuente, de manera que la emisión de un nuevo símbolo supone un cambio en dicho estado.

Esto nos proporciona un método gráfico de describir una fuente de Markov: mediante su diagrama de estados. En él, se representa a cada estado por un círculo, y mediante flechas que los unen las transiciones entre ellos. A cada una de estas flechas se la asocia la salida de la fuente que produce la transición y la probabilidad de ocurrencia de ésta.

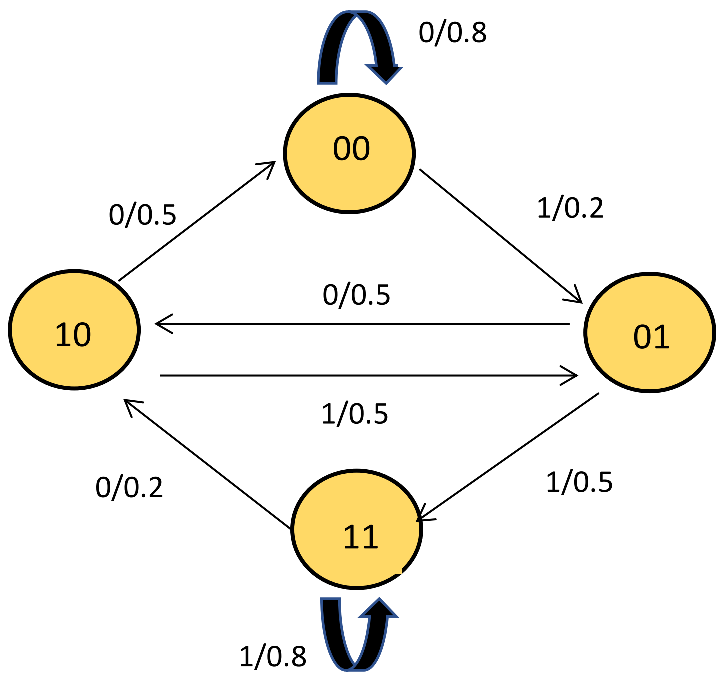


Figura 6: Diagrama de estados de la fuente dada

En una fuente de Markov, después de generarse un número suficiente de símbolos, se llega a una distribución de probabilidades estacionaria para el conjunto de estados de la fuente, siendo, además, única. Esto quiere decir, que los distintos estados irán apareciendo con una frecuencia que sólo depende de la fuente. Puesto que la distribución estacionaria no depende de la distribución inicial con que los estados son escogidos, puede calcularse directamente a partir de las probabilidades condicionales de los símbolos.

El cálculo de las probabilidades de estado a partir de las condicionales es complejo y no se aborda.

Lo que sí va a resultar de interés, es establecer la relación entre esas probabilidades, las condicionales y las del suceso simultaneo (probabilidad de estar en un estado y generar un determinado símbolo). Está relación es:

$$P(Sj1, Sj2, \ldots\ldots, Sjm, Si) = P(Sj1, Sj2, \ldots\ldots, Sjm)\, P(Si/\, Sj1, Sj2, \ldots\ldots, Sjm)$$

Al igual que hicimos con las fuentes de memoria nula, vamos a calcular la cantidad media de información suministrada por una fuente de Markov, o sea, su entropía.

La cantidad de información proporcionada por un símbolo, sabemos que depende de su probabilidad de aparición. En el caso de fuentes de Markov, ésta está condicionada por los m últimos símbolos emitidos, o, dicho de otra manera, del estado de la fuente. Tendremos, por lo tanto, que:

- Si $(Sj1, Sj2, \ldots\ldots, Sjm)$ es el estado y Si el símbolo recibido, la cantidad de información obtenida es:

$$I(Si/\, Sj1, Sj2, \ldots\ldots, Sjm) = log\frac{1}{P(Si/Sj1 + Sj2, \ldots., Sjm)}$$

A partir de esto, es inmediato calcular la cantidad media de información por símbolo proporcionada, cuando nos encontramos en el estado $(Sj1, Sj2, \ldots\ldots, Sjm)$:

$$H(S/\, Sj1, Sj2, \ldots\ldots, Sjm) = \sum_{i=1}^{q} P(Si/Sj1 + Sj2, \ldots., Sjm)\, log\frac{1}{P(Si/Sj1 + Sj2, \ldots., Sjm)}$$

Entonces, la cantidad media de información por símbolo, de una fuente de Markov de orden m, se obtendrá calculando el valor promedio de la cantidad anterior, extendido a todos los q^m posibles estados de la fuente:

$$H(S) = \sum_{S^m} P(Sj1, Sj2, \ldots., Sjm)\, H(S/Sj1, Sj2, \ldots, Sjm)$$

Sustituyendo:

$$H(S) = \sum_{S^m} P(Sj1, Sj2, \ldots., Sjm) \sum_{i=1}^{q} P(Si/Sj1, Sj2, \ldots, Sjm)\ log\frac{1}{P(Si/Sj1, Sj2, \ldots, Sjm)}$$

$$= \sum_{S^m}\sum_{i=1}^{q} P(Sj1, Sj2, \ldots., Sjm)\, P(Si/Sj1, Sj2, \ldots, Sjm)\ log\frac{1}{P(Si/Sj1, Sj2, \ldots, Sjm)}$$

Que simplificando se tiene:

$$H(S) = \sum_{S^{m+1}} P(Sj1, Sj2, \ldots., Sjm)\, log \frac{1}{P(Si/Sj1, Sj2, \ldots, Sjm)}$$

Ecuación 7: Expresión de la Entropía de una FDCM

Nótese que si m=0, la expresión anterior es igual a la de la entropía de una fuente de memoria nula, por lo que es fácil deducir que ésta es un caso particular de fuente de Markov, en concreto la de orden 0.

$$S = \{S1, S2, \ldots, Sn\}$$

$$P(S1)\ P(S2) \ldots P(Sn)$$

$$I(S1)\ I(S2) \ldots I(Sn)$$

Q	S1	S1	S2	S3	S4	S4	S2	S2	S2	S1	S3
	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0

$$Q = m1 * I(S1) + m2 * I(S2) + m3 * I(S3) + \ldots + m_n * I(Sn)$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} mi * I(si)$$

Ecuación 8: Expresión de la cantidad de información del mensaje

En donde:

- $mi =$ Número de veces que se repite un símbolo en el mensaje.
- $Q =$ Cantidad de información del mensaje.
- $mi =$ Cantidad de información individual.
- $\frac{Q}{M} = \sum_{i=1}^{n} mi * I(si)$
- $\frac{mi}{M} =$ Frecuencia relativa
- $M =$ Número total de símbolos del mensaje.
- Cuando $M \to \infty$ $P(x) = fr$

➢ **Entropía de la fuente**

Indica la cantidad de información promedio que genera por símbolo la fuente.

$$H(s) = \sum_{i=0}^{n} P(Si) * I(Si) \qquad (bit/símbolo)$$

$$H(s) = -\sum_{i=1}^{n} P(Si)\, log_2\, P(Si) \qquad (bit/símbolo)$$

Ejercicios resueltos de la entropía de una FDCM

1. Sea la fuente analizada en el Procedimiento para la resolución de las FDCM o de Markov, calcular la entropía de la fuente:

Solución:

Recapitulando los datos se tiene una fuente $S = \{0,1\}$ con probabilidades condicionantes de:

$P(0/00) = 0.8$ $\quad$ $P(1/00) = 0.2$

$P(0/01) = 0.5$ $\quad$ $P(1/01) = 0.5$

$P(0/10) = 0.5$ $\quad$ $P(1/10) = 0.5$

$P(0/11) = 0.2$ $\quad$ $P(1/11) = 0.8$

En donde el diagrama de estados se ve reflejado en la Figura 6 y aplicando la fórmula de la entropía de la Ecuación 7, se tiene:

$$\boldsymbol{H(S/00)} = P(0/00)\log\frac{1}{P(0/00)} + P(1/00)\log\frac{1}{P(1/00)} = 0.8\log\frac{1}{0.8} + 0.2\log\frac{1}{0.2} = \mathbf{0.72}\ \frac{bits}{símbolos}$$

$$\boldsymbol{H(S/01)} = P(0/01)\log\frac{1}{P(0/01)} + P(1/01)\log\frac{1}{P(1/01)} = 0.5\log\frac{1}{0.5} + 0.5\log\frac{1}{0.5} = \mathbf{1}\ \frac{bits}{símbolos}$$

$$\boldsymbol{H(S/10)} = P(0/10)\log\frac{1}{P(0/10)} + P(1/10)\log\frac{1}{P(1/10)} = 0.5\log\frac{1}{0.5} + 0.5\log\frac{1}{0.5} = \mathbf{1}\ \frac{bits}{símbolos}$$

$$\boldsymbol{H(S/11)} = P(0/11)\log\frac{1}{P(0/11)} + P(1/11)\log\frac{1}{P(1/11)} = 0.2\log\frac{1}{0.2} + 0.8\log\frac{1}{0.8} = \mathbf{0.72}\ \frac{bits}{símbolos}$$

Por lo que la entropía de la fuente será:

$$\boldsymbol{H(S)} = P(00)H(S/00) + P(01)H(S/01) + P(10)H(S/10) + P(11)H(S/11) =$$

$$\boldsymbol{H(S)} = \frac{5}{14}(0.72) + \frac{2}{14}(1) + \frac{2}{14}(1) + \frac{5}{14}(0.72) = \mathbf{0.8}\ \boldsymbol{\frac{bits}{símbolos}}$$

2. Dada la siguiente tabla de Markov ergódica determinar la entropía y las probabilidades de los símbolos 0 y 1 de la fuente:

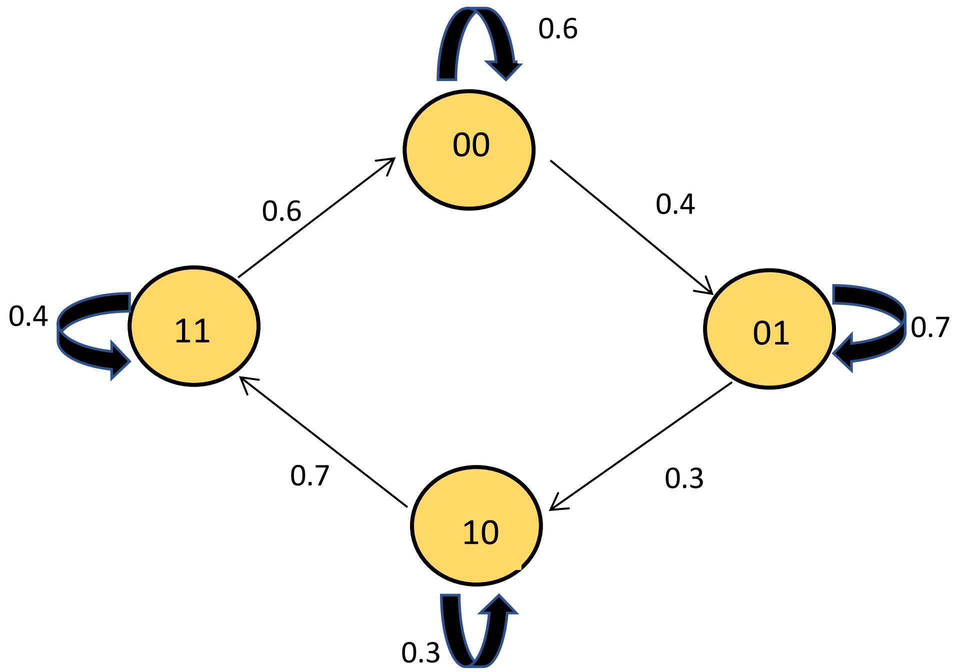


Figura 7: Diagrama de estados del ejercicio 9

Solución:

Como primer paso se debe determinar las ecuaciones de entradas de cada estado en función de la probabilidad de símbolos, es por ello, que de la Figura 7 se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$\begin{gathered}P(00) = 0.6P(00) + 0.6P(11) \rightarrow (a)\\P(01) = 0.7P(01) + 0.4P(00) \rightarrow (b)\\P(10) = 0.3P(01) + 0.3P(10) \rightarrow (c)\\P(11) = 0.7P(10) + 0.4P(11) \rightarrow (d)\end{gathered}$$

Ecuación 9: Conjunto de ecuaciones de entrada del sistema

Además, se sabe que la sumatoria de las probabilidades de todos los símbolos es igual a 1, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$P(00) + P(10) + P(01) + P(11) = 1 \rightarrow (e)$$

Ecuación 10: Propiedad de las probabilidades de una fuente

Simplificando las expresiones de la Ecuación 9, se tiene:

$$\begin{gathered}0.4P(00) = 0.6P(11) \rightarrow (f)\\0.3P(01) = 0.4P(00) \rightarrow (g)\\0.7P(10) = 0.3P(01) \rightarrow (h)\\0.6P(11) = 0.7P(10) \rightarrow (i)\end{gathered}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones de entrada del sistema y reemplazando por la probabilidad de $P(00)$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
P(11) &= \frac{0.4}{0.6}P(00) = \frac{2}{3}P(00) \\
P(01) &= \frac{0.4}{0.3}P(00) \\
P(10) &= \frac{0.3}{0.7}P(01) = \frac{\cancel{0.3}}{0.7} \times \frac{0.4}{\cancel{0.3}}P(00) \\
P(11) &= \frac{0.7}{0.6}P(10) = \frac{\cancel{0.7}}{0.6} \times \frac{0.4}{\cancel{0.7}}P(00) \\
P(11) &= \frac{2}{3}P(00)
\end{aligned}
$$

Ecuación 11: Probabilidades de los símbolos en función de $P(00)$

Una vez que todas las expresiones de la Ecuación 9 estén en función de $P(00)$, se reemplaza en la Ecuación 10:

$$
\begin{aligned}
&P(00) + \frac{4}{7}P(00) + \frac{4}{3}P(00) + \frac{2}{3}P(00) = 1 \\
&P(00)\left[1 + \frac{4}{7} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right] = 1 \\
&P(00)\left[\frac{25}{7}\right] = 1 \rightarrow \boldsymbol{P(00)} = \boldsymbol{\frac{7}{25}}
\end{aligned}
$$

Reemplazado la probabilidad de $P(00)$ en las expresiones de la Ecuación 11, se tiene el valor de las probabilidades del sistema:

$$\boldsymbol{P(11) = 14/75\,;\, P(10) = 4/25\ y\ P(01) = 28/75}$$

Una vez determinadas las probabilidades condicionantes del sistema se realiza la siguiente tabla:

ESTADOS	SÍMBOLOS	$P(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jm})$	$P(s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_{jm})$	$P(s_j, s_m, S_i)$
00	0	0.6	$^{7}/_{25}$	$^{21}/_{125}$
00	1	0.4		$^{14}/_{125}$
01	0	0.7	$^{28}/_{75}$	$^{98}/_{375}$
01	1	0.3		$^{14}/_{125}$
10	0	0.3	$^{4}/_{25}$	$^{6}/_{125}$
10	1	0.7		$^{14}/_{125}$
11	0	0.4	$^{14}/_{75}$	$^{28}/_{375}$
11	1	0.6		$^{42}/_{375}$

Luego se aplica la fórmula de la entropía para FDCM

$$H(s) = \sum_{s^{m+1}} P\left(s_{j1}; s_{j2}; s_{jm}; s_i\right) \cdot \log_2\left(\frac{1}{P\left(s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}\right)}\right)$$

$$\begin{aligned} H(s_i) = -\Big[& P\left({}^{00}/_{0}\right) \cdot \log_2\left(P\left({}^{00}/_{0}\right)\right) + P\left({}^{00}/_{1}\right) \cdot \log_2\left(P\left({}^{00}/_{1}\right)\right) + P\left({}^{01}/_{0}\right) \cdot \log_2\left(P\left({}^{01}/_{0}\right)\right) \\ & + P\left({}^{01}/_{1}\right) \cdot \log_2\left(P\left({}^{01}/_{1}\right)\right) + P\left({}^{10}/_{0}\right) \cdot \log_2\left(P\left({}^{10}/_{0}\right)\right) + P\left({}^{10}/_{1}\right) \cdot \log_2\left(P\left({}^{10}/_{1}\right)\right) \\ & + P\left({}^{11}/_{0}\right) \cdot \log_2\left(P\left({}^{11}/_{0}\right)\right) + P\left({}^{11}/_{1}\right) \cdot \log_2\left(P\left({}^{11}/_{1}\right)\right)\Big] \end{aligned}$$

$$H(s_i) = -\left[\frac{21}{125}\log_2(0.6) + \frac{14}{125}\log_2(0.4) + \frac{98}{375}\log_2(0.7) + \cdots + \frac{42}{375}\log_2(0.6)\right]$$

$$H(s_i) = 0.86\ bits/símbolo$$

Para determinar la probabilidad de cada símbolo en la fuente, es necesario entender la siguiente expresión:

$$P(s_i) = \sum_{j=1}^{m} P(s_i, s_j)\ \ c/símbolos$$

$$P(0) = \sum_{j=1} P\left(0, s_j\right)$$

$$P(0) = P(00) + P(01)$$

$$P(0) = \frac{7}{25} + \frac{28}{75}$$

$$\boldsymbol{P(0) = \frac{49}{75}}$$

$$P(1) = \sum_{j=1} P\left(1, s_j\right)$$

$$P(1) = P(11) + P(10)$$

$$P(1) = \frac{14}{75} + \frac{4}{25}$$

$$\boldsymbol{P(1) = \frac{26}{75}}$$

Recapitulación de las Fuentes Discretas

$$I(s_i) = \log\left(\frac{1}{P(s_i)}\right)[bits]\ ;\ I(s_i) = -log_2\big(P(s_i)\big)[bits]$$

Ecuación 12: Expresiones de la cantidad de la información

$$I(x_i) = -3{,}32\log_{10}\big(P(x_i)\big)\ ;\sum_{i=1}^{n} P(s_i) = 1$$

Ecuación 13: Cantidad de la información en función del logaritmo base 10

$$H(s) = \sum_{0} P(s_i)\log_2\left(\frac{1}{P(s_i)}\right)[bits/simbolos]$$

Ecuación 14: Expresión de la entropía

La entropía es la cantidad de información promedio producida por una fuente en un intervalo arbitrario de símbolos.

2.4. FUENTES DE MARKOV

Dado una fuente de la información que produce un alfabeto S con un conjunto de símbolos, cada símbolo produce una probabilidad condicional de la siguiente manera:

$P(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm})$ para $i = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, m$

La probabilidad de un símbolo viene determinada por los m símbolos que lo preceden, por eso se dice que la fuentes de Markov son condicionantes de un símbolo precedente a otro.

Entonces sí:

q símbolos diferentes y de orden m, entonces la fuente de Markov tendrá q^m estados posibles, dichos estados se deberá representarlo por medio de diagramas de estado en donde que cada estado se representa por un punto y mediante flechas las transiciones entre ellas.

Probabilidades condicionantes

En fuentes de Markov la probabilidad de cada símbolo viene representado por:

$$P(s_i/\underbrace{s_{j1}, s_{j2}, s_{j3} \dots, s_{jm}}_{q^m => Probabilidades})$$

Entonces se tiene la siguiente relación:

$$P(s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}, s_i) = P(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}) \cdot P(s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm})$$

Siendo $s_j \rightarrow$ probabilidad condicional, con la relación anterior se define la cantidad de información mediante la siguiente expresión:

$$I(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}) = \log_2 \frac{1}{P(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm})}$$

La cantidad de información es la cantidad con la que se representa mediante la probabilidad un símbolo.

La entropía es el valor promedio de la cantidad de información que contiene la fuente de información y para fuentes FDCM viene dado por:

$$H(s/s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}) = \sum_{s} P(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}) \cdot \ I(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm})$$

Teniendo que: $s^m = (s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm})$ se reemplaza y se tiene:

$$H(s) = \sum_{s^m} P\left(s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}\right) \cdot \sum_{s} P\left(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}\right) \cdot \log\left(\frac{1}{P\left(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}\right)}\right)$$

$$H(s) = \sum_{s^{m+1}} P\left(s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}\right) \cdot P\left(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}\right) \cdot \log\left(\frac{1}{P\left(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}\right)}\right)$$

$$\boldsymbol{H(s) = \sum_{s^{m+1}} P\left(s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}, s_i\right) \cdot \log \frac{1}{P\left(s_i/s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jm}\right)}}$$

Se debe considerar además que en un emisor transmite un mensaje que consta de varios símbolos $(x_i \wedge s_i)$ en donde se debe considerar conceptos como:

- Q la cantidad de información del mensaje
- m_i número de veces que se repite un símbolo en un mensaje
- $I(s_i)$ es la cantidad de información de un símbolo

En el receptor de la información, la cantidad de información vendrá dado por la sumatoria del número de veces que se repite los símbolo por la cantidad de información de esos símbolos como se expresa en la siguiente ecuación:

$$Q = m_1 \cdot I(s_1) + m_2 \cdot I(s_2) + m_3 \cdot I(s_3) + \cdots + m_n \cdot I(s_n)$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot I(s_i)$$

Si a la expresión anterior dividimos para M que es el número total de símbolos del mensaje se tiene:

$$\underbrace{\frac{Q}{M}}_{Entropía} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{m_i}{M}}_{\substack{Frecuencia \\ Relativa}} \cdot I(s_i)$$

A partir de estos términos se deduce que la entropía es la sumatoria de 1 hasta n de la cantidad del número de veces que se repite un símbolo sobre el número total de símbolos del mensaje por la cantidad de probabilidades que tiene cada símbolo, como se expresa en la siguiente ecuación:

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{mi}{M} I(x_i)$$

Además, se debe considerar la velocidad de señal digital v_s que viene expresada por:

$$v_s = \frac{H(s)}{\tau}$$

En donde:

- $H(s)$ es la entropía
- τ es el intervalo de duración de 1 símbolo

FDSM (Fuente Discreta Sin Memoria)

Discreta debido a que posee número finito de símbolos y sin memoria debido a que es una fuente estacionaria con símbolos con independencia estadística.

2.5. VARIEDAD DE LA INFORMACIÓN

$Fuente \rightarrow n$ Símbolos que agrupamos de m en m

$$N = n^m$$

N = El número diferente de posibles mensajes.

$$log_a N = log n^m$$

$$V = m\, log_a\, n \quad (bits)$$

$$V = m\, log_2\, n \quad (bits)$$

$$V = \text{Variedad de información}$$

$$V = m * k \ \rightarrow k = log_a\, n$$

Fuente binaria: n = 2

$$V = m\, log_2\, n \quad (bits)$$

$$V = m$$

$$m = 1 = 1\, bit$$

DIBIT: Es un pulso de duración τ que tiene cuatro niveles distintos.

$0V, 2V, 4V, 6V \qquad n = 4 \quad y \quad m = 1$

$V = m\, log_2\, n \quad (bits)$

$V = 1\, log_2\, 4$

$V = 2\ \ bits$

Cada pulso dibit se puede representar por bits

Dibit	Binario
V0	00
V1	01
V2	10
V3	11

TRIBIT: Es el pulso de duración τ que tiene 8 niveles diferentes

$\mathrm{n} = 2^3 = 8 \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{m} = 1$

$V = m\, log_2\, n \quad (bits)$

$V = 1\, log_2\, 2^3 \quad (bits)$

$V = 3 \quad (bits)$

$\frac{\tau}{3}$ Intervalo de tiempo de cada pulso

Tribit	Binario
V0	000
V1	001
V2	010
V3	011
V4	100
V5	101
V6	110
V7	111

2.5.1. Velocidad de una señal

En los sistemas de comunicación es de especial importancia conocer la cantidad de información que se produce o se transfiere por unidad de tiempo, es decir, la velocidad de la información.

Concepto Dinámico de la Generación de Símbolos (tiempo).

$$V_S = \frac{v}{\tau} \left(\frac{bit}{seg}\right) (bps)$$

$V = m\, log_2\, n \quad (bits)$

Velocidad de una señal

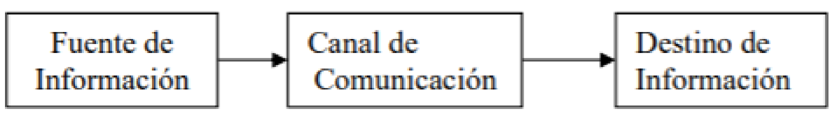
$$V_S = \frac{v}{\tau}$$

τ → Intervalo de tiempo que dura cada símbolo

Una fuente produce S (símbolos) en ΔT en T segundos

$$\tau = \frac{T}{S}$$

$$V_S = \frac{S}{T}\, V\ (bps)$$



2.6. Capacidad de transmisión de un canal

Se llama capacidad del canal a la velocidad a la que se pueden transmitir los datos en un canal de comunicación de datos. La velocidad de transmisión de los datos es expresada en bits por segundo (bps).

La capacidad de un canal depende del ancho de banda (que depende del transmisor y de la naturaleza del medio de transmisión), el ruido y la tasa de errores permitida. Para un ancho de banda dado se puede alcanzar la mayor velocidad de transmisión posible, pero hay que evitar que se supere la tasa de errores aconsejable. Para conseguirlo, el mayor inconveniente es el ruido.

Para definir una medida de la eficacia con la cual un canal transmite información y para determinar su límite superior, Shannon introdujo el concepto de “capacidad de un canal”, que comúnmente se representa con la letra C.

El Teorema Fundamental de Shannon establece que si la velocidad de información Vi de la fuente es igual o menor que la capacidad C del canal, entonces existe una técnica de codificación que permite la transmisión sobre el canal con una frecuencia de errores arbitrariamente pequeña, no obstante, la presencia de ruido. Es decir, si

$$0 < Vi \leq C$$

se puede transmitir sin error, pero si Vi > C entonces no es posible transmitir sin error.

La capacidad del canal es entonces la máxima velocidad a la cual el canal puede transportar información confiable hasta el destinatario. La capacidad C se expresa en bits por segundo (bps). Es la cantidad máxima de la entropía cuando analizamos dos fuentes

$$C = H_{MAX}(X, Y)$$

Según el teorema de Shannon y Hartley la capacidad del canal viene dada por:

$$C = B \cdot log_2(1 + SNR)$$

Ecuación 15: Expresión de la capacidad de transmisión

En donde:

- C es la capacidad del canal $[bps]$
- B es el ancho de banda $[Hz]$
- SNR es la relación de señal-ruido $[w]$

2.6.1. ANCHO DE BANDA ANÁLOGO Y DIGITAL

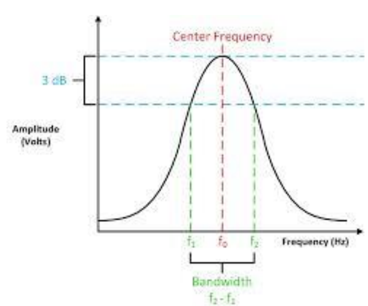


Figura 8: Ancho de banda análogo

En comunicaciones analógicas, el ancho de banda es el rango de frecuencias de una señal analógica, se expresa en términos de la diferencia entre la frecuencia superior y la frecuencia inferior, y como estamos hablando de frecuencia el ancho de banda se mide en Hz y sus prefijos, ejemplo:

La voz humana es una fuente de información análoga que puede producir un rango de frecuencias entre $300\ a\ 3300\ Hz$, ¿Cuál es el ancho de banda?

$$AB = f_{superio} - f_{inferior}$$
$$AB = 3300Hz - 300Hz$$
$$AB = 3000Hz\ o\ 3\ KHz$$

Media	Description	Bandwidth (in bits per second)
Voice	Phone quality (4 bits/sample; 8 kHz sample freq.)	32 Kbps
	High quality (8 bits/sample; 8 kHz sample freq.)	64 Kbps
Audio	CD quality (16 bits/sample; 44.1 kHz sample freq.)	1.4 Mbps
	MPEG audio with aprox. CD quality	200 to 300 Kbps
Video	VHS quality (352x240pix;24bits/pix; 30fr/s)	60 Mbps
	MPEG video with aprox. VHS quality	1.5 to 2 Mbps
	Pal/Secam quality (544x480pix; 24bits/pix; 30fr/s)	188 Mbps
	MPEG video with aprox. Pal/Secam quality	4 to 6 Mbps
	HDTV quality (~1200 lines; 24bits/pix; 30fr/s)	1 Gbps
	MPEG video with aprox. HTDV quality	20 to 60 Mbps

Table 1 - Typical Bandwidth of Different Classes of Continuous Media

Figura 9: Anchos de banda para distintos medios y formatos

El ancho de banda digital es una medida la cual permite conocer cuanta información se puede transportar en un periodo de tiempo por lo general es segundos $[s]$ de un lugar a otro, la medida son los bps y sus prefijos.

K = kilo = 1,000 bits

M = mega = 1,000 kilo = 1,000,000 bits

G = giga = 1,000 mega = 1,000,000,000 bits

T = tera = 1,000 giga = 1,000,000,000,000 bits

El ancho de banda es el medio de transmisión en el cual se indica la cantidad máxima de la información que se puede transmitir sin distorsión.

2.6.2. RELACIÓN SEÑAL/RUIDO

La relación señal/ruido es la relación entre la señal útil y el nivel de ruido, en dB. Cuanto mayor sea la señal de ruido, menor será la cantidad de ruido.

Se evalúa para una frecuencia de 1 KHz.

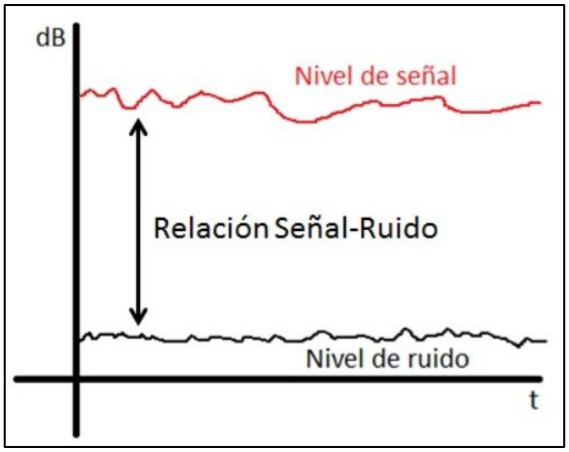


Figura 10: Relación señal a ruido

Nos da la calidad de la transmisión.

SNR debe ser números altos

$$SNR = \frac{P_S}{P_R}$$

Ecuación 16: Relación señal a ruido SNR

2.6.3. VELOCIDAD DE MODULACIÓN

Es el número de sucesos (eventos), o cambios de señal, que se producen en 1 segundo. Se mide en baudios. (En un evento de cambio de señal se pueden representar uno o más bits de información, por lo que esta medida no corresponde con la velocidad de transmisión).

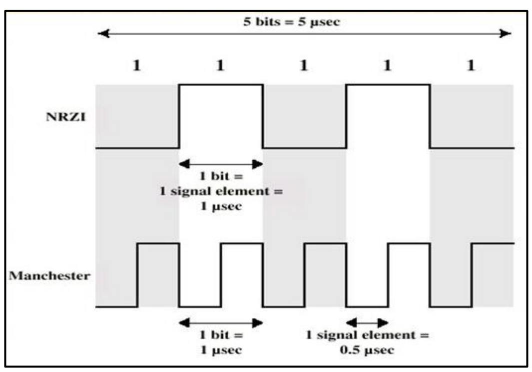


Figura 11: Secuencia de Bits

Ancho de banda para transmitir sin distorsión

$$B = \frac{1}{2\tau min}$$

$$C = B\ log_2\left(1 + \frac{S}{R}\right)\ \ [bps]$$

$$Vs \leq C$$

C = Velocidad máxima para transmitir información a través de un canal

Ejercicios Resueltos de la capacidad y variedad de información

1. Un canal telefónico tiene un AB de 5.2 KHz. En la parte de recepción se tiene una relación S/N de 35 dB. Calcular la capacidad de transmisión del canal.

Solución:

$$(S/N)dB = 10\ log_{10}(S/N)$$

$$35 = 10\ log_{10}(S/N)$$

$$(S/N) = anti\ log\ \frac{32}{10} = 3162.27$$

$$C = B\ log_2\left(1 + \frac{S}{R}\right)\ \ [bps]$$

$$C = 5.2\ KHz *\ log_2(1 + 3162.27)\ \ [bps]$$

$$\boldsymbol{C = 60461.44\ \ [bps]}$$

2. **Calcular la relación S/N que se requieren en dB para tener una capacidad de transmisión de un canal de 90 Kbps. Si el canal de comunicación tiene un ancho de banda de 20 KHz.**

Solución:

$$C = AB\ log_2\left(1 + \frac{S}{R}\right)\ \ [bps]$$

$$\frac{C}{AB} = \frac{log_{10}\left(1 + \frac{S}{N}\right)}{log_{10}(2)}$$

$$\frac{C}{AB} *\ log_{10}(2) =\ log_{10}\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

$$anti \log\left[\frac{90KHz}{20KHz} *\ log_{10}(2)\right] =\ 1 + \frac{S}{N}$$

$$\frac{S}{N} = 22.62\ W$$

$$(S/N)dB = 10\ log_{10}(S/N)$$

$$(S/N)dB = 10\ log_{10}(21.62)$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{S}{N}\right) dB = 13.34\ dB}$$

3. **Una televisión de blanco y negro tiene los siguientes datos: Número de líneas de barrido: 525**
   Factor de utilización vertical : 0.94

Factor de utilización horizontal: 0.84
Banda de señal de video de : 0 a 4.2 MHz
Resolución horizontal : 0.90
Resolución vertical : 0.90
Frecuencia de exposición : 30 cuadros/seg Factor de ruido para una buena imagen : 50 dB

Geometría de la pantalla : $\frac{H}{v} = \frac{4}{3}v$

Calcular la variedad de imagen y la capacidad de transmisión del canal.

Solución:

Para encontrar la variedad de Imagen, se debe encontrar los números de elementos tanto verticales como horizontales:

Número de elementos verticales

$$m1 = 0.94 \times 525 = 493$$
$$m = m1 \times m2$$
$$m = 593 \times 529$$
$$m = 260797$$

Número de elementos horizontales

$$m2 = 0.84 \times \frac{4}{3}v$$
$$m2 = 0.84 \times \frac{4}{3} \times 0.90v$$
$$m2 = 0.84 \times \frac{4}{3} \times 0.90 \times 525$$
$$m2 = 529$$

$$50 = 10\log\left({}^{S}/_{N}\right)_p$$
$$\left({}^{S}/_{N}\right)_p = 10^5$$
$$\eta\sqrt{1 + {}^{S}/_{N_{max}}}$$
$$\eta\sqrt{1 + 10^5}$$
$$V = m\log_2 n \ \left({}^{bit}/_{imagen}\right)$$
$$V = 260797\log_2(316)$$
$$\boldsymbol{V = 2.17\left({}^{Mbit}/_{imagen}\right)}$$

Para encontrar la capacidad de transmisión del canal:

$$C = AB \times \log_2\left(1 + {}^{S}/_{N}\right)$$
$$C = 4.2\ MHz \times \log_2(1 + 10^5)$$
$$\boldsymbol{C = 69.76\ Mbps}$$

$$V_s = \frac{s}{\tau} \times V$$
$$V_s = 30\,\frac{imagenes}{sg} \times 2.17\,\frac{Mbps}{imagenes}$$
$$V_s = 65.1\ Mbps$$

2.7. CODIFICACIÓN DE LAS FUENTES DISCRETAS SIN MEMORIA FDSM

2.7.1. ALFABETO CÓDIGO Y ALFABETO FUENTE

Definición. Denominemos a $S = \{S1, S2, \dots, Sq\}$ al conjunto de símbolos de un alfabeto dado. Se define un código como la correspondencia de todas las secuencias posibles de símbolos de S a secuencias de símbolos de algún otro alfabeto a X= $\{X1, X2, \dots, Xq\}$. S recibe el nombre de alfabeto fuente, y X alfabeto código.

La primera propiedad exigida es que el código constituya un código bloque.

a. Código Bloque

Un código bloque es aquel que asigna cada uno de los símbolos del alfabeto fuente S a una secuencia fija de símbolos del alfabeto código X. Esas secuencias fijas (secuencias de Xj) reciben el nombre de palabras código. Denominaremos Xi a la palabra código que corresponde al símbolo Si.

La siguiente tabla da un ejemplo de código bloque binario.

Símbolos de la fuente	Código
S1	0
S2	11
S3	00
S4	11

A primera vista el requisito de codificar uno por uno los símbolos de la fuente en secuencias fijas de símbolos código resulta demasiado riguroso. Hay que destacar, sin embargo, que, si un código hace corresponder todas las secuencias de longitud n de símbolos de la fuente con secuencias fijas de símbolos código, el código hace también corresponder cada símbolo de la extensión de orden *n* de la fuente original con una secuencia fija de símbolos código, constituyendo realmente un código bloque del alfabeto fuente S^n. Un conjunto de reglas que determinen la transformación de un alfabeto fuente en un alfabeto código puede cumplir la definición de código bloque solamente al tener en cuenta los símbolos de la extensión de orden *n* de la fuente.

b. Códigos unívocamente decodificables.

Es evidente, según se desprende del ejemplo anterior, que si se desea utilizar los códigos bloque han de imponerse ciertas restricciones; una restricción natural es que todas las palabras código X, sean distintas. Nótese que las X¡ y X, del código dado en la tabla 3-1 no lo eran.

Definición: Un código bloque se denomina no singular si todas sus palabras son distintas

La tabla siguiente muestra un ejemplo de código bloque no singular.

Símbolos de la fuente	Código
S1	0
S2	11
S3	00
S4	11

Aun cuando todas las palabras del código del ejemplo anterior son diferentes, es posible encontrar algún caso en que una secuencia dada puede tener un origen indefinido. Por ejemplo, la secuencia 0011 puede corresponder a S3 S2 o S1 S2. Es decir, el código de la tabla 3-2, aun cuando es no singular en su detalle, es singular considerado de forma más general.

Definición. La extensión de orden n de un código bloque que hace corresponder los símbolos Si, con las palabras código Xi, es el código bloque que hace corresponder las secuencias de símbolos de la fuente $S_i, S_{i2}, \dots, S_{in}$ con las secuencias de las palabras código $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$

Según esta definición, la extensión de orden n de un código bloque es también un código bloque.

La tabla siguiente representa la extensión do segundo orden del código bloque de la tabla anterior

Segunda extensión de un código bloque

Símbolos de la fuente	Código	Símbolos de la fuente	Código
S1 S1	00	*S3 S1*	000
S1 S2	011	*S3 S2*	0011
S1 S3	000	*S3 S3*	0000
S1 S4	001	*S3 S4*	0001
S2 S1	110	*S4 S1*	010
S2 S2	1111	*S4 S2*	0111
S2 S3	1100	*S4 S3*	0100
S2 S4	1101	*S4 S4*	0101

Definición. Un código bloque se dice unívocamente decodificable si, y solamente si, su extensión de orden n es no singular para cualquier valor finito de n.

Códigos instantáneos.

En la tabla siguiente aparecen dos ejemplos de códigos unívocamente decodificables.
Dos códigos unívocamente decodificables

Símbolos de la fuente	Código A	Código B
S1	00	0
S2	01	10
S3	10	110
S4	11	1110

La capacidad de reconocer cuando una palabra código, inmersa en una secuencia finita de símbolos, llega a su final, podría considerarse como propia, de la configuración de los dos códigos particulares considerados. En realidad, esta propiedad está íntimamente asociada con el concepto de código unívocamente decodificable.

Símbolos de la fuente	Código C
S1	0
S2	01
S3	011
S4	0111

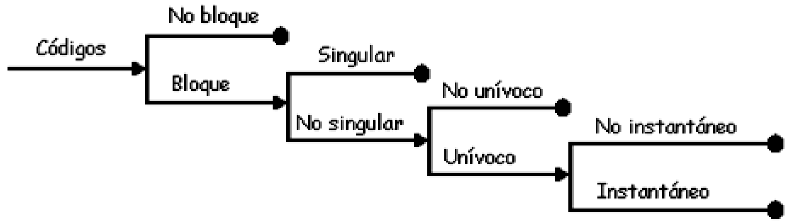
El código C difiere de A y B en un aspecto importante. Si recibimos una secuencia binaria compuesta de palabras del código C, no seríamos capaces de decodificar la sentencia en sus palabras, según las vamos recibiendo.

Definición. Un código unívocamente decodificable se denomina instantáneo cuando es posible decodificar las palabras de una secuencia sin precisar el conocimiento de los símbolos que las suceden.

Definición. Sea $Xi = x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}$ una palabra de un código. Se denomina prefijo de esta palabra a la secuencia de símbolos $xi_1, xi_2, \dots, xi_j$, donde ; j ≤ m.

Puede enunciarse la regla siguiente: La condición necesaria y suficiente para que un código sea instantáneo es que ninguna palabra del código coincida con el prefijo de otra.

La figura siguiente muestra la ramificación seguida en el árbol de subclases de códigos para llegar finalmente a la subclase correspondiente a los códigos instantáneos.



c. Inecuación de Kraft. Definición y discusión

Consideremos un código instantáneo con un alfabeto fuente

$$S = \{S1, S2, \dots, xq\}$$

y un alfabeto código $Xi = \{x1, x2, \dots, xr\}$. Sean $x1, x2, \dots, xq$, las palabras del código y, por definición, li la longitud (es decir, el número de símbolos del código) de la palabra Xi.

Normalmente es interesante que las longitudes, de las palabras del código sean lo más cortas posible. La condición necesaria y suficiente para que exista un código instantáneo con palabras de longitud $I1, I2, \dots, Iq$, viene definida por la inecuación de Kraft (Kraft, 1949).

La condición necesaria y suficiente para la existencia de un código instantáneo de longitudes $I1, I2, \dots, Iq$, es que

$$\sum_{i=1}^{q} r^{-Ii} \leq 1$$

donde r es el número de símbolos diferentes que constituyen el alfabeto código.

En el caso de alfabeto binario, la inecuación de Kraft se transforma en:

$$\sum_{i=1}^{q} r^{-Ii} \leq 1$$

donde la suma se extiende a todas las palabras del código bloque. Antes de probar esta inecuación, es interesante ver en qué forma puede utilizarse para determinar si las li de una secuencia dada de li, pueden constituir las longitudes de las palabras de un código instantáneo.

Ejemplos:

Tomemos una fuente de información con cuatro símbolos posibles S1, S2, S3, S4 . En la tabla siguiente se exponen los cinco códigos que pueden adoptarse para codificar estos símbolos en alfabeto binario.

Cinco códigos binarios

Símbolos de la fuente	Código A	Código B	Código C	Código D	Código E
S1	00	0	0	0	0
S2	01	10	10	100	10
S3	10	110	110	110	110
S4	11	1110	111	11	11

Calcularemos el valor de $\sum_{i=1}^{4} 2^{-Ii}$ para cada uno de estos códigos.
Vemos, para el código A, que

$$\sum_{i=1}^{4} 2^{-Ii} = 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-2}$$

$$= 1$$

Para el código B

$$\sum_{i=1}^{4} 2^{-Ii} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3}$$

$$= 1$$

El código C es idéntico al B, excepto la segunda palabra de la que se ha suprimido un bit.

Calculando

$$\sum_{i=1}^{4} 2^{-Ii} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3}$$

$$= 1$$

Luego el código D no es instantáneo.

Finalmente, calculamos para el código E de la tabla, el valor de la suma

$$\sum_{i=1}^{4} 2^{-Ii} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-2}$$

$$= \frac{11}{8}$$

Este código no requiere más análisis. Las longitudes de sus paladas no satisfacen la inecuación de Kraft y, en consecuencia, no puede ser un código bloque instantáneo

d. Fuente Reducida

$$\begin{array}{ccccc} S = \{ S_1, & S_2, & S_3, & \dots, & S_n \} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ P(s_1) & P(s_2) & P(s_3) & & P(s_n) \end{array}$$

$(n = m + 1)$ → elementos códigos

Para hallar la fuente reducida, seguimos estos pasos:

1. Los elementos fuente se ordenan en forma decreciente de probabilidad.
2. Agrupar los elementos de menor probabilidad de m en n para formar un nuevo elemento, en la cual su probabilidad es igual a la suma de la probabilidad de sus componentes.
3. Comprobar si la fuente reducida tiene m elementos y si no tiene m elementos regresar al paso 2.

Ejemplos

Determinar las fuentes reducidas para obtener un código binario del siguiente Alfabeto fuente

$P(S1) = 0.3, \quad P(S2) = 0.4, \quad P(S3) = 0.06, \quad P(S4) = 0.1, \quad P(S5) = 0.04$

$S2 = 0.4, \quad S1 = 0.3, \quad S4 = 0.1, \quad S6 = 0.1, \quad S3 = 0.06, \quad S5 = 0.04$

Fuente original		Fuentes reducida			
Símbolos	Probabilidades	FR_1	FR_2	FR_3	FR_4

s_2	0.4	0.4	0.4	0.4	0.6
s_1	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
s_4	0.1	0.1	0.2	0.3	
s_6	0.1	0.1	0.1		
s_3	0.06	0.1			
s_5	0.04				

La construcción de un código binario compacto se realiza en tres pasos sucesivos. En primer lugar, se forma una secuencia de fuentes reducidas de la fuente original. A continuación, se busca un código compacto para cualquiera de las fuentes de la secuencia, y, finalmente, se procede a recorrer la secuencia, en sentido inverso, construyendo códigos compactos a partir del hallado, hasta formar el correspondiente a la fuente original S

Fuente original			Fuentes reducida							
Símbolos	Probabilidades	Código	FR1		FR2		FR3		FR4	
s_2	0.4	1	0.4	1	0.4	1	0.4	1	0.6	0
s_1	0.3	00	0.3	00	0.3	00	0.3	00	0.4	1
s_4	0.1	011	0.1	011	0.2	010	0.3	01		
s_6	0.1	0100	0.1	0100	0.1	011				
s_3	0.06	0110	0.1	0101						
s_5	0.04	0111								

El código compacto de la columna de la izquierda se ha formado en los tres pasos explicados. Primero se construye una secuencia de fuentes reducidas de la fuente original S. Se asignan a continuación los códigos 0 y 1 a la última fuente de la secuencia (en nuestro caso FR4) y, finalmente se llega al código componiendo las secuencias fuentes reducidas. Al hacerlo, una palabra del código primitivo da lugar a dos palabras del nuevo código.

e. Códigos compactos r-arios

Cuando se desea formar un código compacto *r-ario*, se deberán combinar r símbolos de manera que constituyen uno solo de la fuente reducida. Sin embargo, aparece un inconveniente que no aparecía en el caso binario. Entonces, cada fuente de las secuencias reducidas contenía un símbolo menos que la fuente anterior. En el caso *r-ario*, por combinar r símbolos en uno solo, cada fuente tendrá *r-1* símbolos menos que la precedente, siendo de esperar que la última de la secuencia tenga exactamente r símbolos (lo que permitiría construir fácilmente un código compacto para la fuente). Ahora bien, La última fuente tendrá r símbolos solamente si la fuente original estaba formada por $r + \alpha(r-1)$ símbolos, siendo α un número entero. Por lo tanto, si la fuente original no tiene este número de símbolos, deberemos añadir unos cuantos “falsos” símbolos en número suficiente para alcanzarlo. A los falsos símbolos se atribuye probabilidad nula, de modo que pueden ser ignorados una vez que el código haya sido construido.

Ejemplo:

Consideremos la siguiente fuente S de 11 símbolos. Se desea formar una secuencia de fuentes reducidas antes de codificar la fuente en un código cuaternario (código de cuatro símbolos). Si la última fuente de esta secuencia ha de tener cuatro símbolos, S deberá tener $4 + 3\alpha$, siendo α un número entero. Puesto que 11 no es de la forma $4 + 3\alpha$, añadiremos dos falsos símbolos, de modo que obtengamos un total de 13 símbolos. A continuación, reduciendo la fuente por grupos de cuatro símbolos, alcanzaremos una última fuente de exactamente cuatro símbolos.

Fuente original		Fuentes reducida		
Símbolos	Probabilidades	FR1	FR2	FR3
s_1	0.22	0.22	0.23	0.40
s_2	0.15	0.15	0.22	0.23
s_3	0.12	0.12	0.15	0.22
s_4	0.10	0.10	0.12	0.15
s_5	0.10	0.10	0.10	
s_6	0.08	0.08	0.10	
s_7	0.06	0.07	0.08	
s_8	0.05	0.06		
s_9	0.05	0.05		
s_{10}	0.04	0.05		
s_{11}	0.03			
s_{12}	0.00			
s_{13}	0.00			

Habiendo formado las reducciones se procederá a sintetizar un código compacto. Se asignarán *r* palabras, de longitud unidad, a la última reducida con objeto de constituir un código compacto de esta fuente.

Se alarga después este código, exactamente como en el caso binario, formando códigos compactos de cada una de las fuentes precedentes.

Cada vez que se pasa de una fuente a la anterior se definen r nuevos símbolos a partir de uno solo, alcanzando un aumento neto de *r – 1* símbolos.

Fuente original			Fuentes reducida					
Símbolos	Probabilidades	Palabra	FR1		FR2		FR3	
s_1	0.22	2	0.22	2	0.23	1	0.40	0
s_2	0.15	3	0.15	3	0.22	2	0.23	1
s_3	0.12	00	0.12	00	0.15	3	0.22	2
s_4	0.10	01	0.10	01	0.12	00	0.15	3
s_5	0.10	02	0.10	02	0.10	01		
s_6	0.08	03	0.08	03	0.10	02		
s_7	0.06	11	0.07	10	0.08	03		
s_8	0.05	12	0.06	11				
s_9	0.05	13	0.05	12				
s_{10}	0.04	100	0.05	13				
s_{11}	0.03	101						
s_{12}	0.00	102						
s_{13}	0.00	103						

f. Longitud media de un código

Sea un código bloque que asocia los símbolos de una fuente $S_1, S_2, \ldots, S_q$ con las palabras $X_1, X_2, \ldots, X_q$. Supongamos que las probabilidades de los símbolos de la fuente son $P_1, P_2, \ldots, P_q$ P1, y las longitudes de las palabras $I_1, I_2, \ldots, I_q$. Definiremos la longitud media del código, L, por la ecuación

$$L = \sum_{i=1}^{q} P_i\, I_i$$

g. Rendimiento y redundancia de un código

El valor de un símbolo de una fuente S puede definirse en términos del número equivalente de dígitos binarios necesario para representarlo; el valor medio de un símbolo de S es H(S). De forma más general, el valor medio de un símbolo de S, en dígitos *r – arios*, es Hr(S).

Supongamos que L es la longitud media de un código *r – ario*, unívoco, de la fuente S. L no puede ser inferior a Hr(S). Según esto, se define η, rendimiento del código, como

$$\eta = \frac{H_r(S)}{L}$$

Igualmente, puede definirse la redundancia de un código

Redundancia $= 1 - \eta$

$$R = \frac{L - H_r(S)}{L}$$

Ejemplo:

Consideremos una fuente de memoria nula $S = \{S1, S2\}$, con $P(S1) = \frac{3}{4}$ y $P(S2) = \frac{1}{2}$.

$H(S)$ valdrá:

$$H(S) = \sum_{S} P(Si) \log \frac{1}{P(Si)}$$

$$H(S) = \frac{1}{4}\log 4 + \frac{3}{4}\log\frac{4}{3}$$

$$H(S) = 0.811 \ \ bits$$

Si	P(si)	Código compacto
S2	3/4	0
S1	1/4	1

La longitud media del código es 1,

$$L = \sum_{i=1}^{q} P_i \, I_i$$

$$L = \frac{3}{4} * 1 + \frac{1}{4} * 1$$

$$L = 1$$

de modo que el rendimiento tendrá el valor de

$$\eta = \frac{H_r(S)}{L}$$

$$\eta = \frac{0.811}{1}$$

$$\eta = 0.811$$

La redundancia tendrá un valor de

$$R = \frac{L - H_r(S)}{L}$$

$$R = \frac{1 - 0.811}{1}$$

$$R = 0.819$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En una red de fibra óptica se transmite aproximadamente 1000000 bits de los cuales el 65% es 1 lógico.
¿Qué cantidad de información se tiene?

Solución:

$$P(1L) = 0.65$$

$$I(1L) = -\,log_2\, P(1L)$$

$$I(1L) = \frac{-\,log_{10}\, P(0.65)}{log_{10}\, 2}$$

$$\boldsymbol{I(1L) = 0.621 \quad (bits)}$$

2. Sea la fuente surgida de la suma de las caras obtenidas al lanzar dos dados hallar la entropía si su alfabeto es:

$\boldsymbol{S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,\}}$

Con las siguientes probabilidades de cada símbolo, determine la entropía:

$P(2) = \frac{1}{24}$ $P(3) = \frac{2}{24}$ $P(4) = \frac{3}{24}$ $P(5) = \frac{4}{24}$ $P(6) = \frac{5}{24}$ $P(7) = \frac{6}{24}$

$P(8) = \frac{5}{24}$ $P(9) = \frac{4}{24}$ $P(10) = \frac{3}{24}$

Solución:

$$H(S) = P(2)log\frac{1}{P(2)} + P(3)log\frac{1}{P(3)} + P(4)log\frac{1}{P(4)} + \ldots\ldots + P(10)log\frac{1}{P(10)} =$$

$$= \frac{1}{24}\log 24 + \frac{2}{24}log\frac{24}{2} + \frac{3}{24}log\frac{24}{3} + \ldots\ldots + \frac{3}{24}\log\frac{24}{3} = \mathbf{3.163}\ \left(\boldsymbol{\frac{bits}{símbolos}}\right)$$

3. Calcular la entropía de la siguiente fuente

$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$

$P(0/00) = 0.7$ $\quad$ $P(1/00) = 0.3$

$P(0/01) = 0.4$ $\quad$ $P(1/01) = 0.6$

$P(0/10) = 0.4$ $\quad$ $P(1/10) = 0.6$

$P(0/11) = 0.5$ $\quad$ $P(1/11) = 0.5$

Solución:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{00}) = P(0/00)\log\frac{1}{P(0/00)} + P(1/00)\log\frac{1}{P(1/00)} = 0.7\log\frac{1}{0.7} + 0.3\log\frac{1}{0.3} = \boldsymbol{0.26}\ \ \frac{bits}{símbolos}$$

$$\boldsymbol{H}\left(\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{01}}\right) = P\left(\frac{0}{01}\right)\log\frac{1}{P\left(\frac{0}{01}\right)} + P\left(\frac{1}{01}\right)\log\frac{1}{P\left(\frac{1}{01}\right)} = 0.4\log\frac{1}{0.4} + 0.6\log\frac{1}{0.6} = \boldsymbol{0.29}\ \ \frac{bits}{símbolos}$$

$$\boldsymbol{H}\left(\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{01}}\right) = P\left(\frac{0}{01}\right)\log\frac{1}{P\left(\frac{0}{01}\right)} + P\left(\frac{1}{01}\right)\log\frac{1}{P\left(\frac{1}{01}\right)} = 0.4\log\frac{1}{0.4} + 0.6\log\frac{1}{0.6} = \boldsymbol{0.29}\ \ \frac{bits}{símbolos}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{10}) = P(0/10)\log\frac{1}{P(0/10)} + P(1/10)\log\frac{1}{P(1/10)} = 0.5\log\frac{1}{0.5} + 0.5\log\frac{1}{0.5} = \boldsymbol{1}\ \ \frac{bits}{símbolos}$$

Por lo que la entropía de la fuente será:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{S}) = P(00)H\left(\frac{S}{00}\right) + P(01)H\left(\frac{S}{01}\right) + P(10)H\left(\frac{S}{10}\right) + P(11)H\left(\frac{S}{11}\right) =$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{S}) = \frac{5}{14}(0.26) + \frac{2}{14}(0.29) + \frac{2}{14}(0.29) + \frac{5}{14}(1) = \boldsymbol{0.948}\ \ \frac{bits}{símbolos}$$

4. Calcular la relación S/N que se requieren en dB para tener una capacidad de transmisión de un canal de 120 Kbps. Si el canal de comunicación tiene un ancho de banda de 45 KHz.

Solución:

$$C = AB\ log_2\left(1 + \frac{S}{R}\right)\ \ [bps]$$

$$\frac{C}{AB} = \frac{log_{10}\left(1 + \frac{S}{N}\right)}{log_{10}(2)}$$

$$\frac{C}{AB} *\ log_{10}(2) =\ log_{10}\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

$$anti\log\left[\frac{120KHz}{45KHz} *\ log_{10}(2)\right] =\ 1 + \frac{S}{N}$$

$$\frac{S}{N} = 16\ W$$

$$(S/N)dB = 10\ log_{10}(S/N)$$

$$(S/N)dB = 10\ log_{10}(16)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)dB = 12.04\ dB$$

5. Una fuente de información con memoria nula de 8 símbolos con probabilidades de ocurrencia:

$$\mathbf{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}}$$

$$S = \{S1, S2, S3, S4, S5, S6\}$$

Solución:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64} \quad \frac{1}{64} \qquad \sum P(Si) = 1$$

$$P(S6) = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64}\right]$$

$$P(S6) = \frac{1}{64}$$

$$H(S) = -[P(S1)\ log_2\ P(S1) + P(S2)\ log_2\ P(S2) + \cdots + P(S8)\ log_2\ P(S8)]$$

$$H(S) = -\left[\frac{1}{2}\ log_2\ 2^{-1} + \frac{1}{4}\ log_2\ 2^{-2} + \frac{1}{8}\ log_2\ 2^{-3} + \frac{1}{16}\ log_2\ 2^{-4} + \frac{1}{32}\ log_2\ 2^{-5} + 2 * \frac{1}{64}\ log_2\ 2^{-6} +\right]$$

$$H(S) = 1.937\ \frac{bits}{símbolos}$$

2.8. INTERFERENCIA INTERSÍMBOLOS

Más conocido como (ISI) conforma una distorsión en la señal en el cual un símbolo afecta con los símbolos posteriores, este suceso produce que los símbolos posteriores actúen en un proceder similar al del ruido produciendo una comunicación más inestable. Es producido generalmente por propagación de señales en trayectos múltiples o respuestas de frecuencia lineal o no lineal.

La presencia de ISI en el sistema conlleva a errores en el dispositivo de decisión en la salida del receptor. Por lo tanto, en el diseño de los filtros de transmisión y recepción, el objeto es minimizar los efectos del ISI, y así mandar los datos digitales a su destino con la menor tasa de error posible. Cuando deseamos transmitir un mensaje, el objetivo primordial es que éste sea recibido de manera íntegra. Sin embargo, debido a ciertas limitaciones en el sistema, se dan los casos en el que el mensaje llega completamente distorsionado.

El caso de un filtro ideal no genera distorsión en su fase o amplitud a la señal, por lo que la señal a la salida del filtro deberá ser igual a la señal de entrada. Pero, en el caso real, el filtro presenta imperfecciones, por lo que la respuesta recibirá distorsión como se muestra en la imagen a continuación, en la cual se observa que los pulsos de salida se recaen en el tiempo, interfiriendo con los pulsos siguientes. Dicho de otra manera, los extremos de los pulsos se solapan. Los pulsos rectangulares no mantendrán su forma siempre que el ancho de banda para el proceso de transmisión sea finito. Mientras más pequeño sea el ancho de banda, los pulsos se dispersarán, interfiriendo con el siguiente pulso transmitido[4].

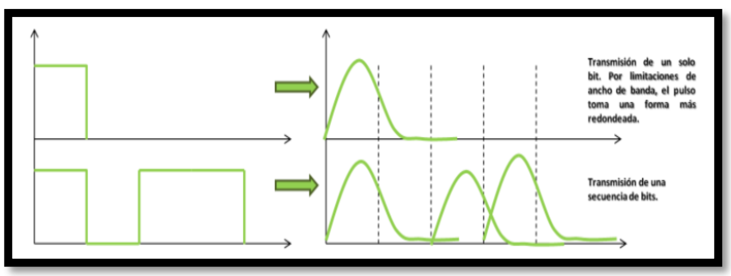


Figura 12: Solapamiento

La interferencia puede ser provocada por cuatro causas principales

Problemas con la sincronización, distorsión de amplitud, distorsión de fase, o limitación del ancho de banda del canal.

La forma de onda de salida es

$$Wsalida(t) = \left[\sum_n a_n \delta(t - nT_S)\right] * h_e(t) = \sum_n a_n h_e(t - nT_s)$$

Donde $$h_e(t) = h(t) * h_T(t) * h_C(t) * h_R(t)$$

$$H_e(f) = H(f) * H_T(f) * H_C(f) * H_R(f)$$

Siendo

$$H_{.}(f) = ב\left[\prod\left(\frac{t}{T_s}\right)\right] = T_s\left(\frac{sen\pi T_s f}{\pi T_s f}\right)$$

El filtro colocado en la etapa de recepción se representa como

$$H_R(f) = \left(\frac{H_e(f)}{H(f)H_T(f)H_C(f)}\right)$$

Cuando $H_R(f)$ se selecciona para reducir al mínimo la interferencia intersímbolos entonces este filtro es llamado filtro de ecualización.

a. Criterio de Nyquist

El criterio de Nyquist consiste en utilizar una función de transferencia equivalente $H_e(f)$, tal que su respuesta al impulso satisfaga:

$$h_e(kT_s + \tau) = \begin{cases} C, & K = 0 \\ 0, & K \neq 0 \end{cases}$$

Así, la respuesta al impulso no provoca interferencia entre símbolos para instantes de tiempo $t = kT_s$ con $K \neq 0$. Este es el caso de pulsos con forma de onda seno[5].

$$h_e(t) = \frac{sen\pi f_s t}{\pi f_s t}$$

Lo que daría lugar a una función de transferencia equivalente a.

$$H_e(f) = \frac{1}{f_s}\prod\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

Esta función de transferencia es apropiada a las necesidades, ya que presenta $B_{minimo} = \frac{f_s}{2}$, lo que permite una velocidad en baudios de 2B pulsos/s. Sin embargo, plantea una serie de problemas prácticos.

- No se puede realizar físicamente (cresta plana y transiciones verticales)
- La sincronización debe ser casi perfecta durante la etapa de muestreo (la envolvente de sin(x)/x decae sólo 1/x, por lo que cualquier error de sincronismo producirá ISI durante muchas ranuras de tiempo adyacentes)

2.9. CÓDIGOS DE LÍNEA

Los códigos de comunicación o transmisión de datos son secuencias de bits prescritas, usadas para codificar caracteres y símbolos. Consecuentemente, los códigos de comunicación de datos frecuentemente se llaman conjuntos de caracteres, códigos de caracteres, códigos de símbolo, o lenguaje de caracteres.

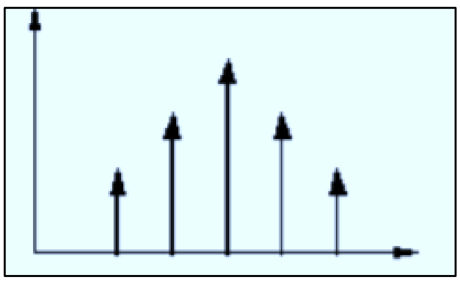
Es el sistema de codificación usado para la representación de textos, o procesadores de instrucciones de computadora, utilizando el sistema binario (sistema numérico de dos dígitos, o bit: el "0" y el "1"). En informática y telecomunicaciones, el código binario se utiliza en la codificación de datos, tales como cadenas de caracteres, o cadenas de bits Por ejemplo en el caso de un CD, las señales que reflejarán el "láser" que rebotará en el CD y será receptado por un sensor de distinta forma indicando así, si es un cero o un uno.

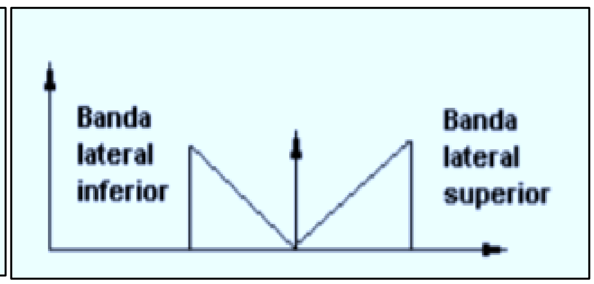
En un código binario de ancho fijo, cada letra, dígito, u otros símbolos, están representados por una cadena de bits de la misma longitud, como un número binario que, por lo general, aparece en las tablas en notación octal, decimal o hexadecimal.

Es frecuente también ver la palabra bit referida bien a la ausencia de señal, expresada con el dígito "0", o bien referida a la existencia de esta, expresada con el dígito "1". El byte es un grupo de 8 bits, es decir en él tenemos 256 posibles estados binarios.

Requisitos:

- No debe tener voltaje o corriente continua (los componentes de baja frecuencia mínimos)
- Se debe mantener el espectro de la señal con su banda de frecuencias bajas, para que la atenuación sea lo más bajo posible.





- Debe existir la posibilidad de transmitir secuencias de bits direccionales (independencia de bit) o sea secuencias largas de 0 o secuencias largas de 1.
- Los códigos deben tener facilidad de poder extraer la señal de sincronismo, la posibilidad de que el receptor extraiga la misma señal del reloj del transmisor.

a. Código NRZ (No retorno a cero)

La forma más frecuente y fácil de transmitir señales digitales es mediante la utilización de un nivel diferente de tensión para cada uno de los bits. Los códigos que siguen esta estrategia comparten la propiedad de que el nivel de tensión se mantiene constante durante la duración del bit, es decir, no hay transiciones (no hay retorno al nivel cero de tensión). Por ejemplo, la ausencia de tensión se puede utilizar para representar un 0 binario, mientras que un nivel constante y positivo de tensión puede representar el 1.

En telecomunicaciones, se denomina NRZ porque el voltaje no vuelve a cero entre bits consecutivos de valor uno.

Figura 13: Secuencia NRZ-L

- Se trata de una señal polar y sin retorno a cero.
- También se usa un muestreo para reconocer cada bit de información.
- El umbral de decisión es cero.
- Lo tenemos a la salida de los circuitos digitales sincrónicos

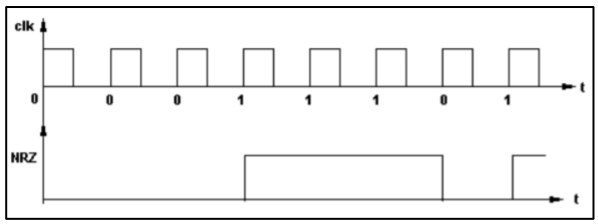


Figura 14: Bits NRZ

b. Código RZ (Retorno a Cero)

Se caracteriza por utilizar pulsos cuya amplitud es igual a la mitad del intervalo. Existe un mejor sincronismo, pero el ancho de banda del medio debe ser el doble.

- El código RZ neutral codifica el 0 como un nivel alto +A y una transición a 0V en la mitad del Intervalo de duración del bit, mientras que para el 1 se mantiene el nivel bajo sin transición.
- El código RZ polar representa el 0 como una transición de +A a -A en la mitad del intervalo de duración del bit. Para 1, no hay transición.
- El código RZ bipolar codifica el 1 sin transiciones. En cambio, para el 0, utiliza niveles alternativos con transiciones a mitad del intervalo.

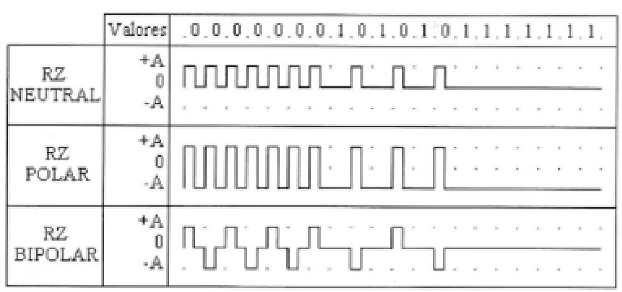


Figura 15: Tipos de codificación RZ

- Se trata de una señal polar sin retorno a cero.

- Este tipo de señal se llama auto-sincronizante, el reloj del receptor queda sincronizado por los pulsos que emite el transmisor.

La información está contenida en la primera mitad de la señal de reloj.

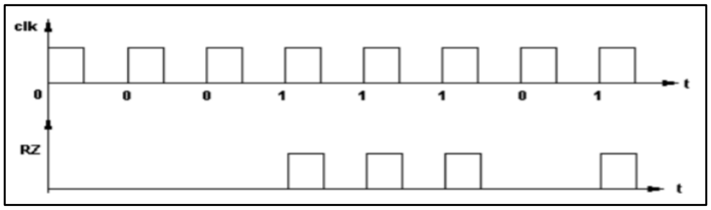
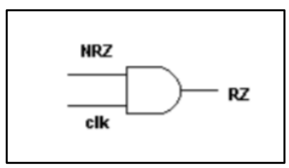


Figura 16: Ejemplo de señal RZ

Codificador (Transmisor)

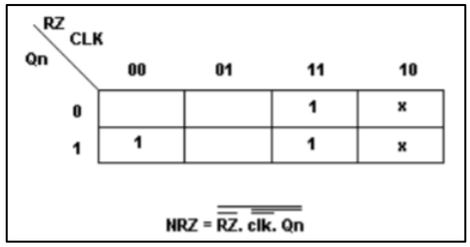
NRZ	CLK	RZ
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Circuito Codificador

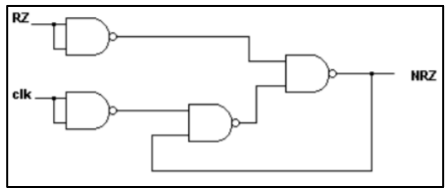


Decodificador (Receptor)

RZ	CLK	Qn	NRZ(Qn+1)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	X
1	0	1	X
1	1	0	1
1	1	1	1



Circuito Decodificador



c. Código BRZ o AMI (Marca Inversa Alternada)

Bipolar NRZ:

- Se trata de una señal bipolar con pulsos para los dígitos 1 y sin retorno a cero.
- También se le denomina Código AMI (“Alternative Mark Inversion”, Inversión Alternativa de Marcas).
- Usa pulsos de mayor duración que Bipolar RZ y requiere un ancho de banda menor

	Primera mitad de CLK	Segunda mitad de CLK
“0 Lógico”	0	0
“1 Lógico”	1 (+, -)	0

Codificador

NRZ	CLK	BRZ
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1 (+, -)

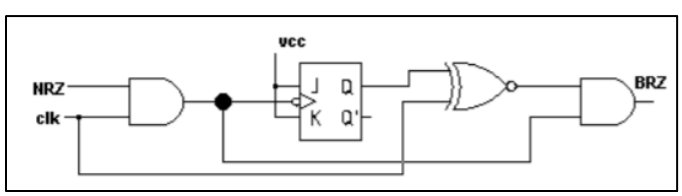


Figura 17: Circuito Codificador BRZ

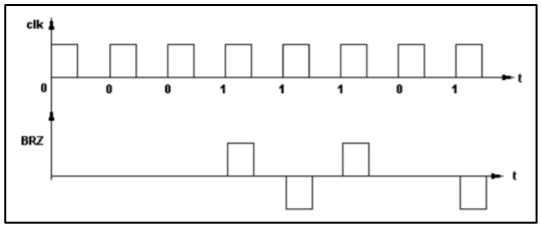


Figura 18: señal de la codificación BRZ

d. Código HDBn

- Variante del Código AMI
- Cuando tenemos 1 lógico los pulsos son alternados
- No permite tener más de n ceros consecutivos, esto se logra agregando pulsos de
- Violación [V]
- Los pulsos bipolares van alternados.
- Los pulsos de violación van alternados.

Polaridad del último pulso	# de 1 después de la última violación	
	PAR	**IMPAR**
+	B V -00-	000+ V
-	B V +00+	000- V

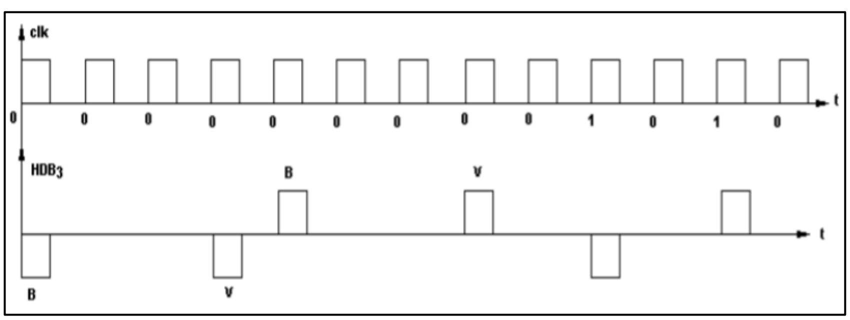


Figura 19: señal de la codificación HDB3

e. Código BnZS (Código bipolar con sustitución de n ceros)

- No permite tener n ceros consecutivos esto se logra agregando pulsos de Violación [V]
- Cuando tenemos 1 lógico los pulsos son alternados
- Los pulsos bipolares van alternados.

- Los pulsos de violación van alternados.

Polaridad del último pulso	# de 1 después de la última violación	
	PAR	**IMPAR**
+	B V -0-	00+ V
-	B V +0+	00- V

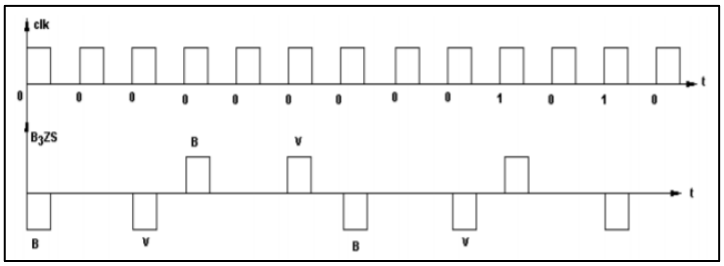


Figura 20: señal de la codificación BnZS

f. Código Bifase (Fase dividida o Manchester dos)

Código de Manchester:

- ✓ Un bit 1 se representa por una transición positiva en la mitad del intervalo.
- ✓ Un bit 0 se representa igual, pero la transición es negativa.
- ✓ Se puede sincronizar la señal de reloj (un pulso por bit).
- ✓ Se puede eliminar la componente continua de la señal, si se usan valores positivos y negativos para representar sus niveles
- ✓ Transiciones de nivel a la mitad de cada señal de reloj

	Primera mitad de CLK	**Segunda mitad de CLK**
"0 Lógico"	+ voltaje (+V)	- voltaje (-V)
"1 Lógico"	- voltaje (-V)	+ voltaje (+V)

Circuito Codificador

NRZ	CLK	BIFASE
0	0	-V
0	1	+V
1	0	+V
1	1	-V

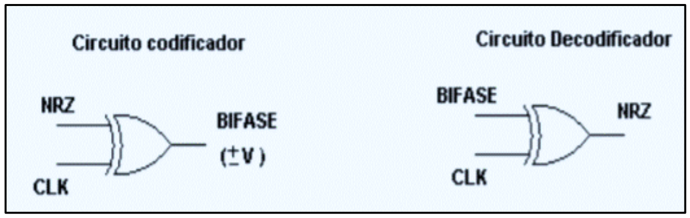


Figura 21: Circuitos codificadores y decodificadores Bifase

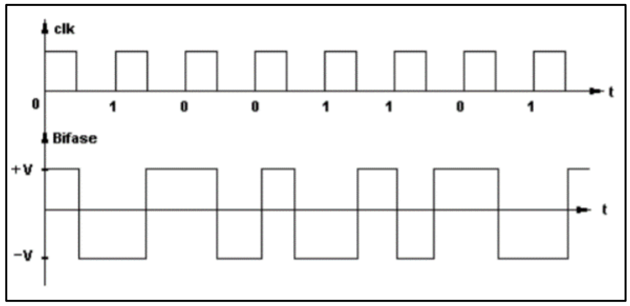


Figura 22: señal de la codificación Bifase

g. Código Inverso de Marca (CMI)

	Primera mitad de CLK	Segunda mitad de CLK
"0 Lógico"	- voltaje (-V)	+ voltaje (+V)
"1 Lógico"	Pulsos Alterados	

En los pulsos alternados nosotros tomamos el valor inicial o sea voltaje positivo o voltaje negativo.

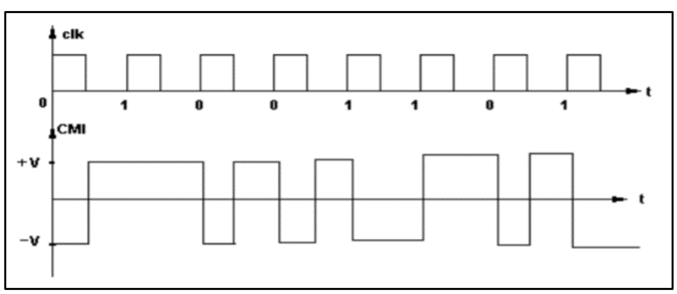


Figura 23: señal de la codificación CMI

h. Código Bifase Diferencial

- Trabaja en la primera mitad de la señal de reloj.
- Es inestable, o sea que no podemos transmitir a largas distancias por ser señal continua

	Primera mitad de CLK	Segunda mitad de CLK
“0 Lógico”	Mantiene estado anterior	Cambia al estado opuesto
“1 Lógico”	Cambia a lo anterior	Cambia al estado opuesto

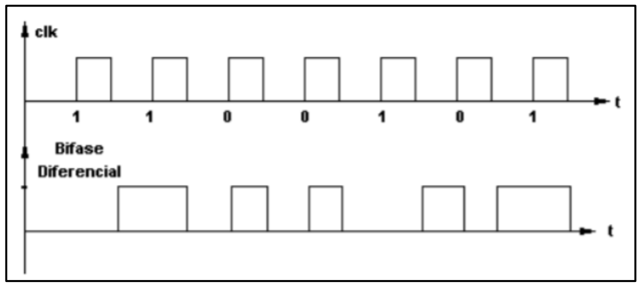
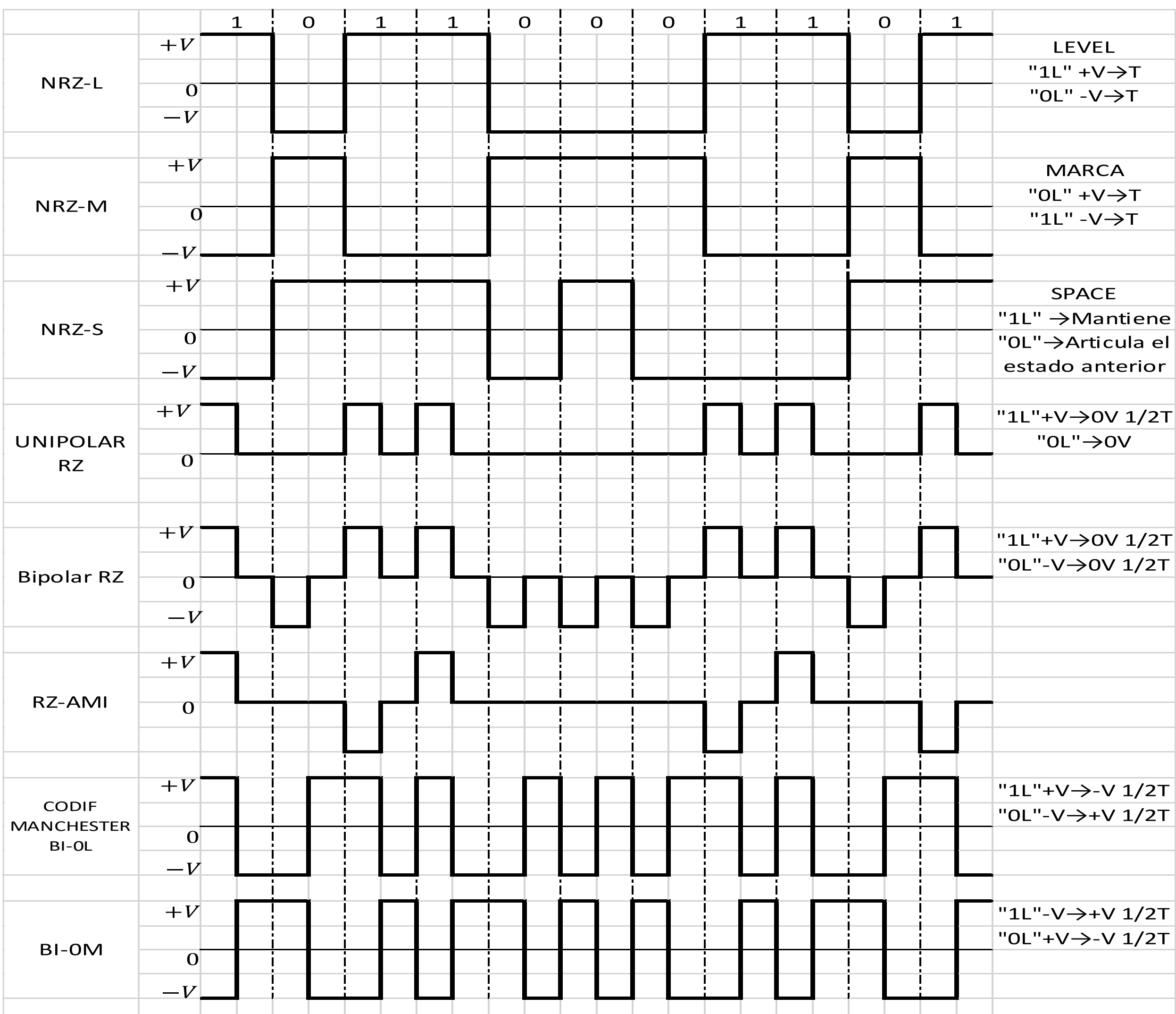
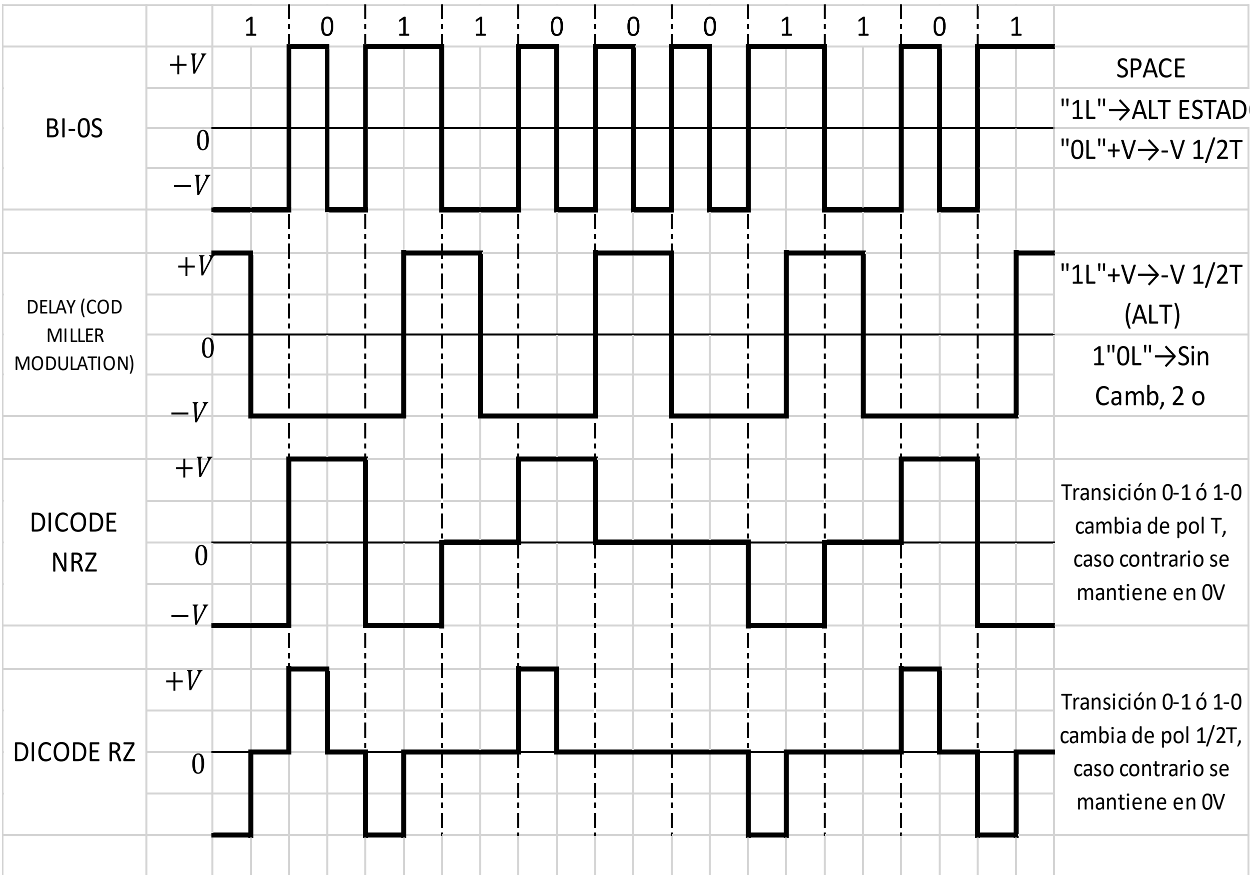


Figura 24: señal de la codificación bifase diferencial

3. Resumen de los códigos de línea más importantes

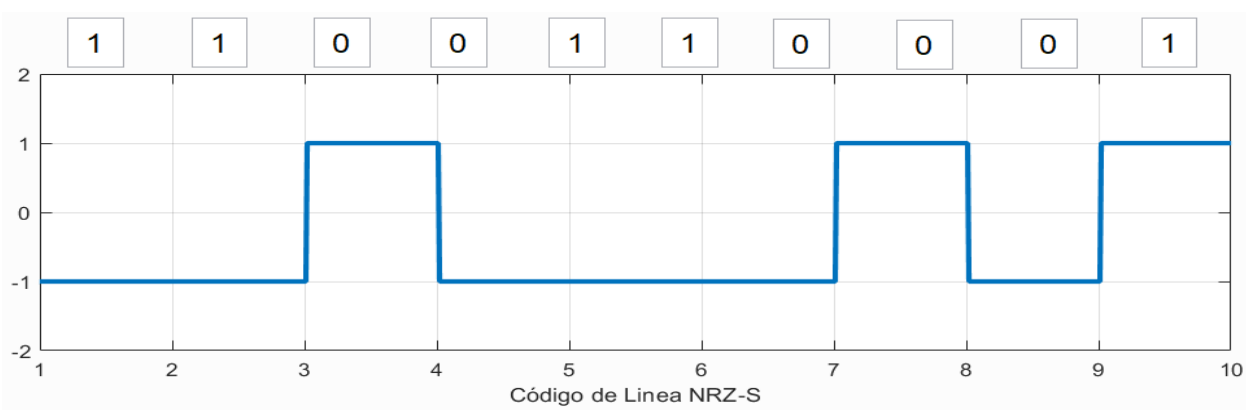




EJERCICIOS PROPUESTOS

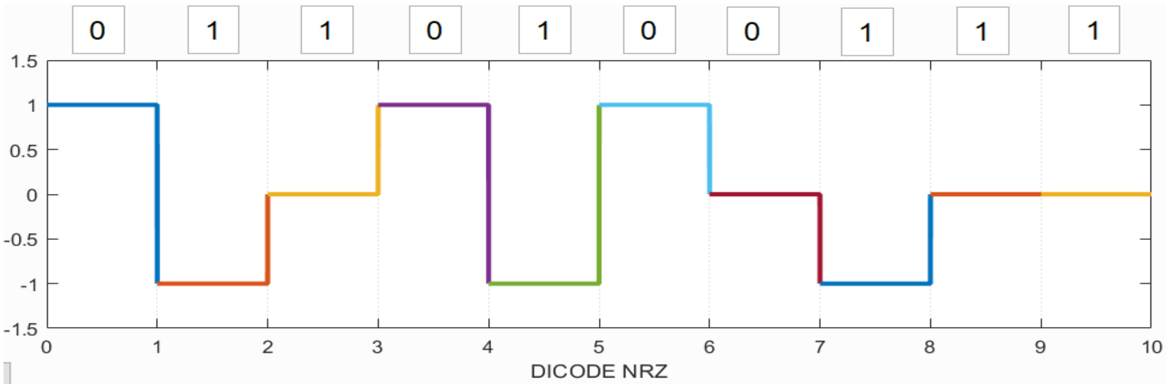
1. **Determinar la codificación NRZ-S del siguiente código "1100110001"**

Solución:



2. Determinar la codificación DICODE NRZ del siguiente código "0110100111"

Solución:



3. Determinar la codificación Miller Delay del siguiente código "1011111010"

Solución: