<u>הסתברות-חוק בייס:</u>

.1

א. בערך 1/125 מהלידות זה תאומים לא זהים ו- 1/300 מהלידות זה של תאומים זהים. לאלביס היה אח תאום שמת בלידה. מה ההסתברות שלאלביס היה תאום זהה? (ההסתברות להולדת בן ובת שווה ל- 1/2.

<u>תשובה:</u>

נגדיר-

P(A)- הסתברות ללידת תאומים זכרים לא זהים

P(B)- הסתברות ללידת תאומים זכרים זהים

לפי השאלה ניתן להניח שהסתברות לילודת בן ובת שווה ל- 1/2. מכאן ניתן להגיד שהסיכוי למצוא זכרים תאומים שאינם זהים ושמתו בלידה, הוא בפרט מחצית מתוך החלק שמהוות הלידות של תאומים זכרים שאינם זהים.

מכיוון שהמקרה המתואר הוא תחת הנחה שלאלביס היה אח תאום שמת בלידה, ההסתברות P(A) תחושב כך-

$P(A)=1/2*1/2*1/125=1/500$

$P(B)=1/2*1/300=1/600$

$p(A)Up(B)=p(A)+p(B)=1/500+1/600=11/3000=0.0036$

כעת נוכל לחשב את ההסתברות ש- לאלביס היה אח תאום, כאשר מדובר בתאומים זהים-

$$\frac{p(B)}{P(A)UP(B)}=\frac{1/600}{0.0036}=0.4545$$

ב. יש שתי קערות של עוגיות. בקערה 1 יש 10 עוגיות שקדים ו- 30 עוגיות שוקולד. בקערה 2 יש 20 עוגיות שקדים ו-20 עוגיות שוקולד. אריק בחר קערה באקראי ובחר ממנה עוגייה באקראי. העוגייה שנבחרה היא שוקולד. מה ההסתברות שאריק בחר את קערה 1?

תשובה:

נסמן-

P(A)- הסתברות שתצא עוגיית שוקולד בקערה 1= 0.375=0.5*30/40

P(B)- הסתברות שתצא עוגיית שוקולד בקערה 2= 0.25=0.5*20/40

נקבל מהסימונים ש- P(A)UP(B) היא ההסתברות שתצא עוגיית שוקולד, נחשב הסתברות זו-

P(A)UP(B)=P(A)+P(B)=0.375+0.25=0.625

ההסתברות שנבחרת עוגיית שוקולד מקערה 1, כאשר נמדדת ביחס לכלל עוגיות שוקולד הקיימות-

$$\frac{P(B)}{\mathrm{P(A)UP(B)}}=\frac{0.375}{0.625}=0.6$$

.2

בשנת 1995 חברת M&M הוסיפה את הצבע כחול. לפני השנה הזו, התפלגות הצבעים בשקית M&M נראית כך:

30% Brown, 20% Yellow, 20% Red, 10% Green, 10% Orange, 10% Tan

החל משנת 1995, ההתפלגות נראית כך:

24% Blue , 20% Green, 16% Orange, 14% Yellow, 13% Red, 13% Brown.

לחבר שלכם יש 2 שקיות M&M, אחת משנת 1994 ואחת משנת 1996 והוא לא מוכן לגלות לכם איזו שקית שייכת לאיזו שנה. אבל הוא נותן לכם סוכריה אחת מכל שקית. סוכריה אחת היא צהובה ואחת היא ירוקה. מה הסיכוי שהסוכריה הצהובה הגיעה מהשקית של 1994?

הסתברות לבחירת צבע צהוב משקית של 1994 נסמן ב- P(A)

הסתברות לבחירת צבע צהוב משקית של 1996 נסמן ב-P(B)

ידוע שכל סוכרייה מבין ה-2 נבחרת משקית שונה ולכן יש התפלגות זהה מתוך החלק של הסוכריות הצהובות בכל שקית, כלומר נקבל-

P(A)=0.5*0.2=0.1

P(B)=0.5*0.14=0.07

ידוע שאחת מהסוכריות שהחבר נותן היא צהובה, נחשב מהי ההסתברות שסוכרייה צהובה נלקחת משקית של 1994 מתוך כלל הסוכריות הצהובות הקיימות:

$$\frac{P(A)}{\mathrm{P(A)UP(B)}} = \frac{0.1}{0.1 + 0.07} = \frac{10}{17} = 0.5882$$

3.

הלכת לדוקטור בעקבות ציפורן חודרנית. הדוקטור בחר בך **באקראי** לבצע בדיקת דם הבודקת שפעת חזירים. ידוע סטטיסטית ששפעת זו פוגעת ב-1 מתוך 10,000 אנשים באוכלוסייה. הבדיקה מדויקת ב-99 אחוז במובן שההסתברות ל false positive היא 1%. הווה אומר שהבדיקה סיווגה בטעות אדם בריא כאדם חולה היא 1 אחוז. ההסתברות ל- false negative היא 0 – אין סיכוי שהבדיקה תגיד על אדם החולה בשפעת חזירים שהוא בריא. בבדיקה יצאת חיובי (יש לך שפעת).

א. מה ההסתברות שיש לך שפעת חזירים?

נחשב תחילה מהי ההסתברות שאדם אקראי נמצא חיובי למחלה-

$$\mathrm{P(pos)} = \mathrm{P}(pos\backslash sick) * \mathrm{P(sick)} + \mathrm{P}\big((\mathrm{pos\backslash healthy})\big) * \mathrm{P(healthy)}$$

p(pos\sick) הוא בוודאות 1, הרי ההסתברות ל- False Negative היא 0, כלומר בהינתן שאדם חולה בשפעת החזירים, הבדיקה בוודאות תגיד לגביו שהוא חולה, כלומר הבדיקה שלו תצא חיובית.

מכיוון שסטטיסטית שפעת זו פוגעת ב-1 מתוך 10,000 אנשים, הסיכוי לבחור באקראי אדם שהוא אכן חולה מתקבל-

P(sick)=1/10,000=1*10^-4

P((Pos\healthy)) מתאר הסתברות שלגבי אדם בריא, הבדיקה סיווגה את האדם כחולה. זוהי המשמעות של ההסתברות למציאת דגימת False Positive שהיא 1%. כלומר- $P\big((pos\backslash healthy)\big) = 0.01$

ההסתברות למציאת אדם בריא באקראי היא המאורע המשלים למציאת האדם החולה, כלומר-

P(healthy)=1-P(sick)=1-(1*10^-4)

אם כך, ההסתברות למציאת אדם חולה ניתנת ע"י-

$$P(pos) = 1 * 10^{-4} + 0.01 * (1 - 10^{-4}) = 0.010099$$

כעת נוכל לחשב את ההסתברות שהנבדק חולה בהינתן שהבדיקה חיובית-

$$P(sick\backslash pos) = \frac{p(pos\backslash sick) * p(sick)}{p(pos)} = \frac{1 * (1 * 10^{-4})}{0.010099} = 0.0099$$

ב. נניח שחזרת מתאילנד לאחרונה ואתה יודע ש-1 מתוך 200 אנשים שחזרו לאחרונה מתאילנד, חזרו עם שפעת חזירים. בהינתן אותה סיטואציה כמו בשאלה א, מה ההסתברות (המתוקנת) שיש לך שפעת חזירים?

במקרה זה השוני ביחס לקודם היא שההסתברות שאדם אקראי אכן חולה היא 1/200.

נחשב את המקרה שהפעם יימצא אדם שהוא חיובי למחלה-

$$\mathrm{P(pos)} = \mathrm{P}(pos\backslash sick) * \mathrm{P(sick)} + \mathrm{P}\big((\mathrm{pos\backslash healthy})\big) * \mathrm{P(healthy)} =$$

$$1 * \frac{1}{200} + 0.01 * \left(1 - \frac{1}{200}\right) = 0.01495$$

ההסתברות שהנבדק שחזר מתאילנד חולה בהינתן שהבדיקה חיובית-

$$\mathrm{P}(sick\backslash pos) = \frac{p(pos\backslash sick) * p(sick)}{p(pos)} = \frac{1 * \frac{1}{200}}{0.01495} = 0.33444$$

Random Variables:

1. Roi is playing a dice game with Yael.

   Roi will roll 2 six-sided dice, and if the sum of the dice is divisible by 3, he will win 6$. If the sum is not divisible by 3, he will lose 3$.

   What is Roi's expected value of playing this game?

Answers:

options of different sums which are devisible by 3:

3-2,1\1,2 - 2 options

6-5,1\1,5\4,2\2,4\3,3- 5 options

9-6,3\3,6\5,4\4,5- 4 options

12=6+6- one option

there are 12 options to find a sum which is devisible by 3

In general, there are at total 36 options of optional sums between dices

$$P(sum\ devisible\ by\ 3) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(sum\ which\ isn't\ devisible\ by\ 3) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

The expected value: $\frac{1}{3} * 6 + \frac{2}{3} * (-3) = 0\$$

2. Sharon has challenged Alex to a round of Marker Mixup. Marker Mixup is a game where there is a bag of 5 red markers numbered 1 through 5, and another bag with 5 green markers numbered 6 through 10.

Alex will grab 1 marker from each bag, and if the 2 markers add up to more than 12, he will win 5$, 5. If the sum is exactly 12, he will break even, and If the sum is less than 12, he will lose 6$.

What is Alex's expected value of playing Marker Mixup?

each marker is numbered from 1 to 5, therefore there are 25 options for optional different sums.

<u>the options of add up above 12:</u> 3,10\4,9\4,10\5,8\5,9\5,10- 6 options

<u>the options of add up to exactly 12:</u> 2,10\3,9\4,8\5,7- 4 options

<u>the options of add up under 12:</u> It can be calculated by:

total options of sums-options of add up above 12-options of add up to exactly 12

therefore the required number: 25-6-4=15 options

$$P(getting\ sum\ above\ 12) = \frac{6}{25} = 0.24$$

$P(getting\ an\ add\ up\ to\ 12) = \frac{4}{25} = 0.16$

$P(getting\ sum\ under\ 12) = \frac{15}{25} = 0.6$

the expected value: 0.24*5+0.16*0+0.6*(-6)=-2.4$

3. A division of a company has 200 employees, 40%, percent of which are male. Each month, the company randomly selects 8 of these employees to have lunch with the CEO.

   What are the mean and standard deviation of the number of males selected each month?

according to the question, each month 8 employees are being chosen randomly from group of males in the company.

The number of employees in the company which are male-

$0.4 * 200 = 80$

each time other employees can be selected, so the mean of the number of males selected is normalized by the part of the group from all the division size, therefore the mean is calculated by:

$$\frac{8}{200} * 80 = 3.2$$

Mean=3.2

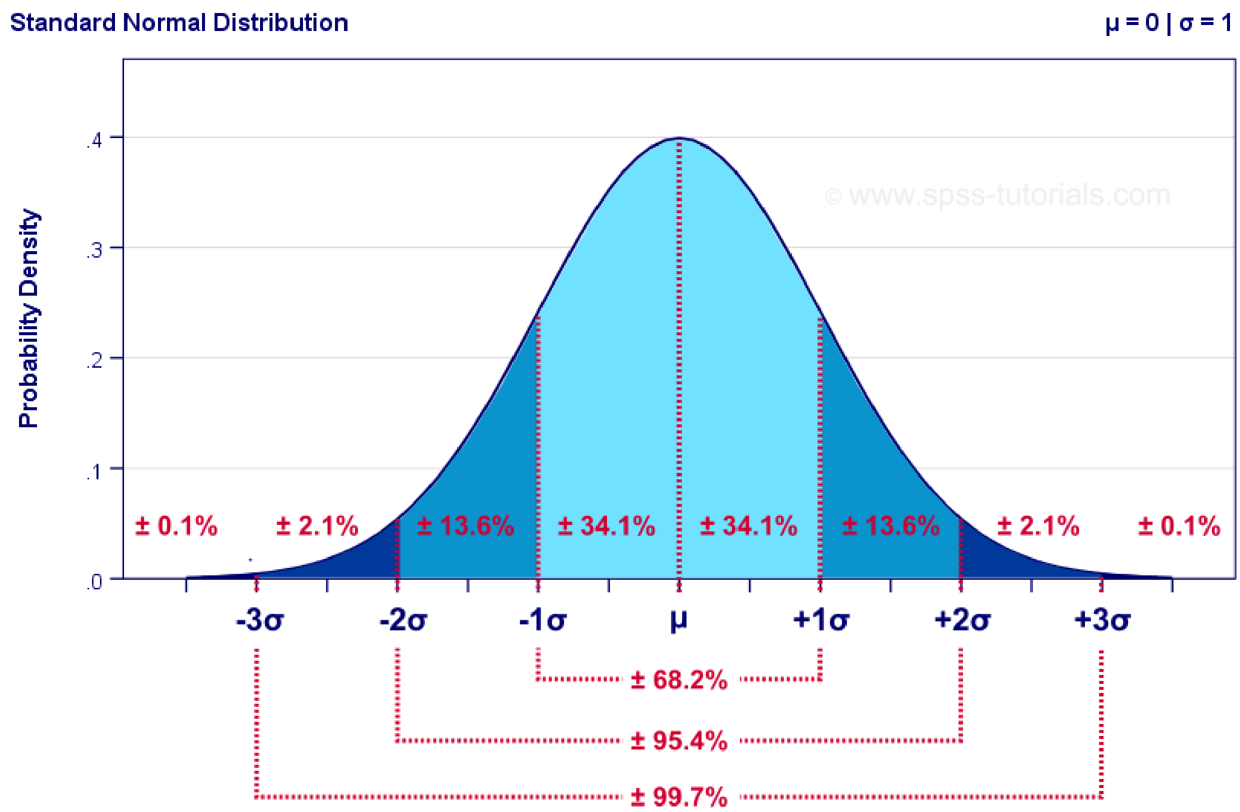
x_i in the specified scenario will contain the following values:

x_i =0,1,2, ... ,8

$$standart\ deviation = \sqrt{\frac{1}{8+1} * \sum_{0}^{9} (x_i - mean)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} * \sum_{0}^{9} (x_i - 3.2)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} * 65.76} = 2.703$$

4. Different dealers may sell the same car for different prices. The sale prices for a particular car are normally distributed with a mean and standard deviation of 26,000$ and 2,000$, respectively. Suppose we select one of these cars at random. Let $X =$ the sale price (in thousands of dollars) for the selected car.

Find P(26<X<30),



μ = Mean = 26,000 $

Standart deviation = 2,000 $

1σ = 26,000+2,000=28,000 $

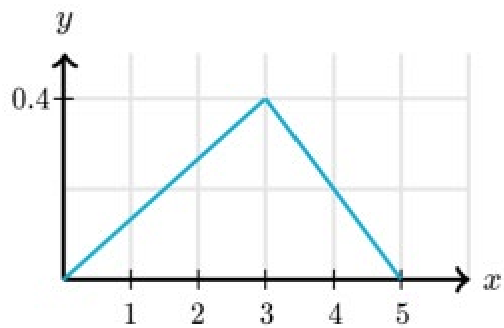
2σ = 26,000+2,000*2=30,000 $

the required range of optional price is proportional as to range $\mu<X<2\sigma$.

But we can see that the samples around the mean is distributed evenly, so probability to choose a car in the specified range, according to graph, equal to half of the area in range of -2σ to +2σ.

Thus we'd get 47.7%, which is the probability to choose such car.

5. Given the following distribution, what is P(x>3)?



Answer:

according to the probability density function, the probability that occasional variable would be found at a specified interval is integral of the density in the Interval.

Thus, the required probability is the area of the triangle in the interval between 3 and 5 is given by:

$$P(x > 3) = \frac{0.4 * (5 - 3)}{2} = 0.4$$

6. A company has 500 employees, and 60% of them have children. Suppose that we randomly select 4 of these employees.

What is the probability that exactly 3 of the 4 employees selected have children?

Answer:

we can look at the situation described at 4 different optional scenarios:

At the first one, we can look at employee as one that don't have children, but the other do have.

On the second one, the second employee don't have but others do have kids.

We have two more that either the third employee don't have or the fourth employee don't have.

Thus, the probability that just one employee out of 4 don't have kids will be the same in all scenarios, but the option to find such employee is differently ordered. note that as (1)

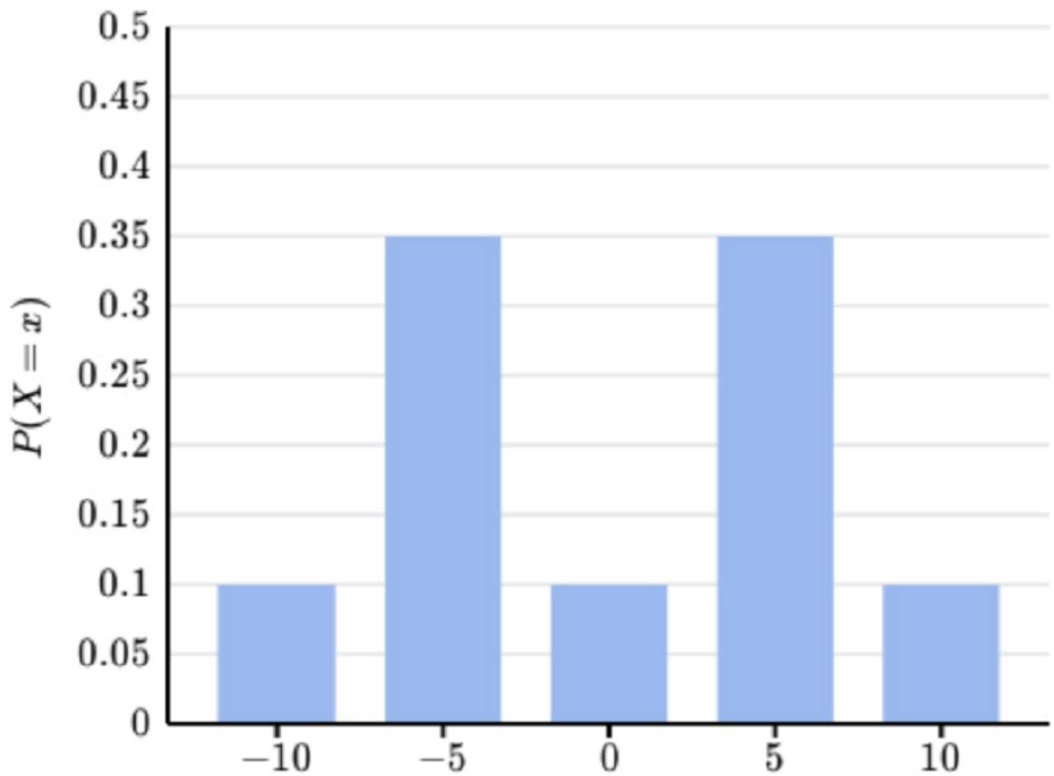
we'd calculate the number of employees that don't have children, since 60 precents of the 500 employees have children, 40 precents of them don't have children, in numbers there are 200 employees that don't have children.

P(the first discussed employee don't have, the rest have)=$\frac{200}{500} * \frac{300}{499} * \frac{299}{498} * \frac{298}{497} = 0.0865$

from (1), as to the fact that employees with such attributes are differently ordered, the probability to choose 3 of the 4 employees randomly can be calculated by:

P(just 1 employee don't have)=0.0865*4=0.3462

7. Look at the next Graph. What is the expected value of X?



we can see that the chance to get appropriate value to the median value in X for each column, have the same probability along its column.

From expected value definition, this term symbolize the value to get some X most frequently, therefore the calculation will be as followed:

expected value: 0.1*(-10)+0.35*(-5)+0.1*0+0.35*5+0.1*10=0$