

מבוא למתמטיקה

מועד ב'

תשע"ו סמסטר קי"ץ.

חומר עזר – דף נוסחאות מצורפים לשאלון, מחשבון.

הוראות מיוחדות – יש לכתוב בכתב יד ברור ומסודר ולפרט כל שלב בחישובים.

השאלון מכיל 5 עמודים .

פרק א':

יש לפתור 4 שאלות מבין שאלות 1 – 5 . הציון לכל שאלה הוא 12.5 נקודות.

שאלה 1: (12.5 נק')

המרחק בין עיר א' לעיר ב' הוא 1340 ק"מ.

מונית יצאה מעיר א' לעיר ב' ונסעה במהירות קבועה של 80 קמ"ש.

שעה אחת לאחר יציאת המונית, יצאה משאית מעיר ב' לעיר א' במהירות

קבועה של 60 קמ"ש . מצא כמה שעות לאחר יציאת המונית, יפגשו שני

כלי הרכב.

שאלה 2:

א. (10 נק') נתונה הפונקציה: $y = (m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x + 4$. מצא לאלו

ערכי m הפונקציה נמצאת מעל ציר ה-x לכל ערך של x.

ב. (2.5 נק') מצא לאיזה ערך של פרמטר m $y = (m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x + 4$

היא פונקציה עולה לכל ערך של x.

שאלה 3:

א. (11 נק') מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \sqrt{2x - 5 - |2 - x|}$$

ב. (1.5 נק') הוכח כי לכל פונקציה f(x) הפונקציה f(|x|) היא פונקציה זוגית.

שאלה 4:

במעגל $x^2 + y^2 - 6x = 16$ חסום מלבן $ABCD$ ששניי מקודקודיו הם:
 $A(3,5), B(-1,3)$

- א. (4.5 נק') מצא את מרכז המעגל ואת הרדיוס.
 ב. (8 נק') מצא את 2 קודקודיים האחרים של המלבן.

שאלה 5:

נתון משולש שבו אחת הזוויות היא 60° . אורך הצלע שמול זווית זו הוא 15 ס"מ, והיחס בין שתי הצלעות האחרות הוא 1:2.
 א. (9 נק.) מצא את אורכי שתי הצלעות האחרות.
 ב. (3.5 נק.) מצא את שטח המשולש.

פרק ב':

יש לפתור 4 שאלות מבין שאלות 6 – 10. הציון לכל שאלה הוא 12.5 נקודות.

שאלה מס' 6:

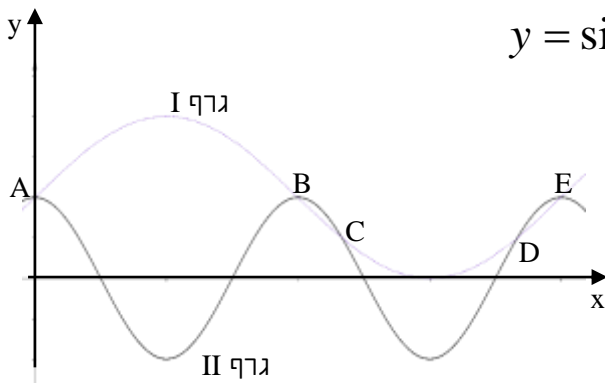
- א. (9.5 נק') נתונות הפונקציות: $f(x) = x^{\frac{\log x + 5}{3}}$ ו- $g(x) = 10^{5 + \log x}$. מצא עבור אילו ערכים של x $f(x) > g(x)$?
 ב. (3 נק') שרטט את גרף הפונקציה: $y = \log_{0.5}|x|$.

שאלה מס' 7:

- א. (10 נק') בסדרה חשבונית יש $2n$ איברים. סכומם של n האיברים הראשונים קטן ב- 288 מסכום n האיברים האחרונים. מצא את n אם נתון כי הפרש הסדרה הוא 8.
 ב. (2.5 נק') גזור את הפונקציה:

$$f(x) = \frac{(x^2 + 2x - 1)}{e^x}$$

שאלה מס' 8:



א. לפניך שרטוט של $y = \cos 2x$ ושל $y = \sin x + 1$

בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$

(1) (2 נק') זהה איזו פונקציה מתאימה לגרף I

ואיזו פונקציה מתאימה לגרף II.

(2) (8 נק') מצא את נקודות החיתוך של שתי

הפונקציות A, B, C, D, E.

ב. (2.5 נק') האם למשוואה $2\sin 3x + \cos x = 5$ יש פתרון? אם כן מצא את הפתרון

הכללי, אם לא נמק מדוע.

אין קשר בין הסעיפים א'-ו-ב'.

שאלה מס' 9:

א. (8.5 נק') פתור את המשוואה: $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$

ב. בתחרות באולימפיאדה מתמודדים 4 ספורטאים מארה"ב, 3 מיפן, 2 מבריטניה, 1

מישראל, 1 מספרד ו 1 מיוון.

(1) (2 נק') בכמה אופנים ניתן לחלק למתחרים 3 פרסים כספיים זהים?

(2) (2 נק') בכמה אופנים ניתן לסדרם במעגל כך שנציגי ארה"ב יעמדו כולם זה לצד

זה?

שאלה מס' 10:

א. (9 נק') פתור את המשוואה $\frac{z + 10i - 5}{\bar{z} + 1} = z - 5$

ב. (3.5 נק') מצא את $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1}$ והסבר את המשמעות הגרפית של גבול זה.

בהצלחה!

S	t	V ק"מ
80t	t	80
60(t-1)	t-1	60

מנוף

מכאן

$$\begin{aligned} 80t + 60(t-1) &= 1340 \\ 80t + 60t - 60 &= 1340 \\ 140t &= 1400 \\ t &= 10 \end{aligned}$$

תשובה: 10 שנים

שאלה מס' 2

י) $y = (m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x + 4$

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \quad \text{פונקציה}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

קו ישר

$$\begin{aligned} \Delta &= (m+3)^2 - 4 \cdot (m^2 - 9) \cdot 4 = \\ &= (m+3)[(m+3) - 16(m-3)] = (m+3)(-15m+51) \end{aligned}$$

פונקציה

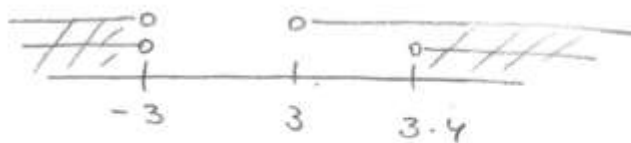
$$\begin{aligned} \Delta < 0 &\Rightarrow (m+3)(-15m+51) < 0 \\ &\Rightarrow \boxed{m < -3 \text{ או } m > 3.4} \end{aligned}$$



$$a > 0 \quad m^2 - 9 > 0$$



$$\boxed{m < -3 \text{ או } m > 3}$$



$$\boxed{m < -3 \text{ או } m > 3.4}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m + 3 = 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

קו ישר

$$\boxed{m = -3}$$

$$\boxed{m \leq -3 \text{ או } m > 3.4} \quad \text{תשובה סופית}$$

ב) $m = 3 \quad y = 6x + 4$

פונקציה ישרה עם זריק של x

שאלה מס' 3

1] $f(x) = \sqrt{2x-5-12-x}$

$$2x-5-12-x \geq 0$$

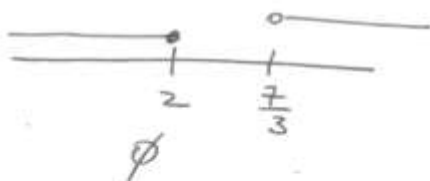
$$x \leq 2$$

$$2x-5-(2-x) \geq 0$$

$$2x-5-2+x \geq 0$$

$$3x \geq 7$$

$$x \geq \frac{7}{3}$$



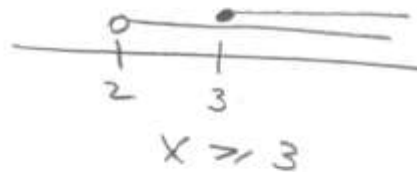
$$\begin{array}{c|c} x \leq 2 & x \geq 2 \\ 2-x & + \quad - \end{array}$$

$$x \geq 2$$

$$2x-5+(2-x) \geq 0$$

$$2x-5+2-x \geq 0$$

$$x \geq 3$$



תוצאה סופית: $x \geq 3$

2] $g(x) = f(|x|)$ נכון

$$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$$

$g(x)$ פונקציה זוגית

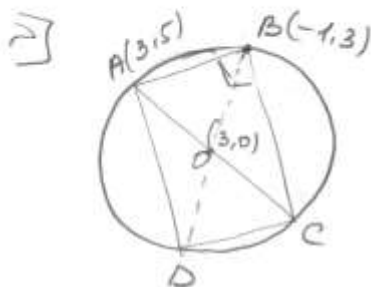
שאלה מס' 4

1] $x^2 + y^2 - 6x = 16$

$$x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + y^2 = 16$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 25$$

$(3,0)$ מרכז
5 רדיוס



* נקודות הקפת שווה 90°
נמצאת על הקוטר

$$A(3,5) \quad O(3,0) \quad C(x,y)$$

$$\frac{3+x}{2} = 3 \quad \frac{5+y}{2} = 0$$

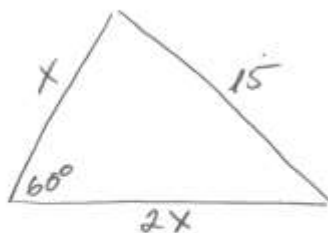
$$x=3, y=-5 \quad \boxed{C(3,-5)}$$

$$B(-1,3) \quad O(3,0) \quad D(x,y)$$

$$\frac{-1+x}{2} = 3 \quad \frac{3+y}{2} = 0 \quad \boxed{D(7,-3)}$$

$$x=7 \quad y=-3$$

שאלה מס' 5 [א]



$$15^2 = X^2 + 4X^2 - 2X \cdot 2X \cdot \cos 60^\circ$$

$$225 = 5X^2 - 2X^2$$

$$X = 5\sqrt{3}$$

תשובה

$$S = \frac{5\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3}}{2} \sin 60^\circ = \frac{75\sqrt{3}}{2}$$

נ"ב 10√3, נ"ב 5√3

בטענה

$$f(x) = x^{\frac{\log x + 5}{3}} \quad g(x) = 10^{5 + \log x}$$

$$x^{\frac{\log x + 5}{3}} > 10^{5 + \log x}$$

$$x^{\frac{\log x + 5}{3}} = 10^{5 + \log x} \quad x > 0 \quad \text{נ"ב}$$

$$\log x \cdot \frac{\log x + 5}{3} = \log 10^{5 + \log x}$$

$$\left(\frac{\log x + 5}{3}\right) \cdot \log x = 5 + \log x \quad \log x = t$$

$$(t+5)t = 3(5+t)$$

$$t^2 + 5t - 3t - 15 = 0$$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$t_{1,2} < \begin{matrix} -5 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\log x = -5$$

$$x = 10^{-5}$$

$$\log x = 3$$

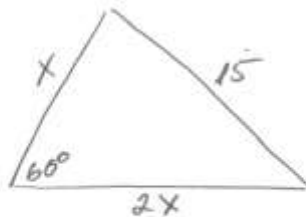
$$x = 10^3$$

$$x^{\frac{\log x + 5}{3}} - 10^{5 + \log x} > 0$$

0 < x < 10⁻⁵ ו/או x > 10³

שאלה מס' 5

[א]



$$15^2 = X^2 + 4X^2 - 2X \cdot 2X \cdot \cos 60^\circ$$

$$225 = 5X^2 - 2X^2$$

$$X = 5\sqrt{3}$$

[ב]

נ"ב 10√3, נ"א 5√3

תשובה

$$S = \frac{5\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3}}{2} \sin 60^\circ = \frac{75\sqrt{3}}{2}$$

שאלה מס' 6

$$f(x) = x^{\frac{\log x + 5}{3}} \quad g(x) = 10^{5 + \log x}$$

$$x^{\frac{\log x + 5}{3}} > 10^{5 + \log x}$$

$$x^{\frac{\log x + 5}{3}} = 10^{5 + \log x} \quad x > 0 \quad \text{נ"ה}$$

$$\log x \cdot \frac{\log x + 5}{3} = \log 10^{5 + \log x}$$

$$\left(\frac{\log x + 5}{3}\right) \cdot \log x = 5 + \log x \quad \log x = t$$

$$(t+5)t = 3(5+t)$$

$$t^2 + 5t - 3t - 15 = 0$$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

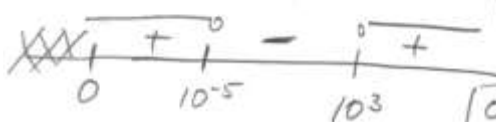
$$t_{1,2} < \begin{matrix} -5 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\log x = -5$$

$$x = 10^{-5}$$

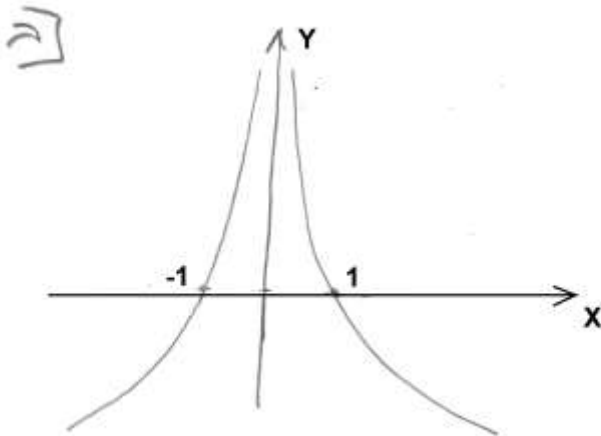
$$\log x = 3$$

$$x = 10^3$$



$$x^{\frac{\log x + 5}{3}} - 10^{5 + \log x} > 0$$

$$0 < x < 10^{-5} \quad \text{or} \quad x > 10^3$$



שאלה מס' 7

כ] $N = 2n$ $S_n + 288 = S_n$ $d = 8$

$$\frac{[2a_1 + (n-1) \cdot 8] \cdot n}{2} + 288 = \frac{[2a_{n+1} + (n-1) \cdot 8] \cdot n}{2}$$

$$2a_1 \cdot n + (n-1) \cdot 8n + 576 = 2a_{n+1} \cdot n + (n-1) \cdot 8n$$

$$2a_1 \cdot n + 576 = 2a_{n+1} \cdot n$$

$$2a_1 \cdot n + 576 = 2(a_1 + n \cdot 8) \cdot n$$

$$2a_1 \cdot n + 576 = 2a_1 \cdot n + 16n^2$$

$$16n^2 = 576$$

$$n^2 = 36$$

$$n = 6$$

ג] $f(x) = \frac{(x^2 + 2x - 1)}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)e^x - (x^2+2x-1)e^x}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(-x^2+3)}{e^{2x}} \quad f'(x) = \frac{-x^2+3}{e^x}$$

שאלה מס' 8

(1) $y = \cos 2x$ (II פרק)
 $y = \sin x + 1$ (I פרק)

(2) $\cos 2x = \sin x + 1$
 $1 - 2\sin^2 x = \sin x + 1$

$\sin x = t$

$t + 2t^2 = 0$

$t(1 + 2t) = 0$

$t = 0$ $t = -\frac{1}{2}$

$\sin x = 0$ $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x_1 = \pi k$ $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$

$k=0$	$x=0$	$x = -\frac{\pi}{6}$	$x = \frac{7\pi}{6}$
$k=1$	$x=\pi$	$x = \frac{11\pi}{6}$	
$k=2$	$x=2\pi$		
$k=-1$			

$y(0) = \sin 0 + 1 = 1$

$y(\frac{11\pi}{6}) = \sin \frac{11\pi}{6} + 1 = \frac{1}{2}$

$y(2\pi) = \sin 2\pi + 1 = 1$

$y(\frac{7\pi}{6}) = \sin \frac{7\pi}{6} + 1 = \frac{1}{2}$

$y(\pi) = \sin \pi + 1 = 1$

$A(0, 1)$ $B(\pi, 1)$ $C(\frac{7\pi}{6}, \frac{1}{2})$ $D(\frac{11\pi}{6}, \frac{1}{2})$

$E(2\pi, 1)$

2] $2 \sin 3x + \cos x = 5$

שאלה מס' 9

$-1 \leq \sin 3x \leq 1$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-3 \leq 2 \sin 3x + \cos x \leq 3$

א' / פתרון

שאלה מס' 9

10] $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$

$\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = -\frac{2}{3}$

$\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^x = -\frac{2}{3} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = t$

$t^2 - \frac{5}{3}t + \frac{2}{3} = 0$

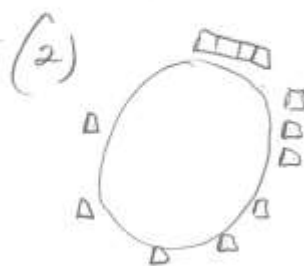
$3t^2 - 5t + 2 = 0$

$t_{1,2} < \frac{1}{\frac{2}{3}}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$
 $x = 0$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)$
 $x = 1$

2] (1) $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!9!} = 220$



$(9-1)! \cdot 4! = 8! \cdot 4!$

שאלה מס' 10

$$\boxed{10} \quad \frac{z+10i-5}{\bar{z}+1} = z-5 \quad \left| \begin{array}{l} \bar{z}+1 \neq 0 \\ \bar{z} \neq -1 \\ z \neq -1 \end{array} \right.$$

$$z+10i-5 = (z-5)(\bar{z}+1)$$

$$z+10i-5 = z \cdot \bar{z} + z - 5\bar{z} - 5 \quad \boxed{\begin{array}{l} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{array}}$$

$$10i = z \cdot \bar{z} - 5\bar{z}$$

$$10i = x^2 + y^2 - 5(x-iy)$$

$$10i = x^2 + y^2 - 5x + 5iy$$

$$\begin{cases} 10 = 5y \\ x^2 + y^2 - 5x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x^2 + 4 - 5x = 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = 4+2i \\ z_2 = 1+2i \end{array}}$$

$$\boxed{2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+2-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)} = \frac{3}{2 \cdot 4} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

