



GRADO EN INGENIERÍA AEROESPACIAL EN
AERONAVEGACIÓN

Curso Académico 2021/2022

Trabajo Fin de Grado

Regresión con Procesos Gaussianos para la estimación
y predicción de trayectorias orbitales

Autora : Rocío Navarro Villarino

Tutora : Almudena José Buelta Méndez

Índice general

Índice de figuras	V
Índice de tablas	VII
Índice de algoritmos	VIII
Índice de acrónimos	X
Resumen	XII
1. Introducción	1
1.1. Motivación y Objetivos	1
1.2. Antecedentes y la constelación NOAA	3
1.2.1. Satélite NOAA-17	4
1.3. Metodología y Herramientas	5
1.4. Cronograma	5
1.5. Estructura	6
2. Tipos de órbitas y trayectoria del satélite NOAA-17	8
2.1. Tipos de órbitas	8
2.2. Fundamentos físicos de la elipse	11
2.3. Two-Line Element, TLE	16
2.4. Tipo de órbita del satélite NOAA-17	18
2.5. Cálculo de la desviación de la posición satelital	18

3. Efectos y estimación de las perturbaciones orbitales	22
3.1. Perturbaciones	23
3.1.1. Achatamiento terrestre	23
3.1.2. Rozamiento atmosférico	24
3.1.3. Presión de la radiación solar	25
3.1.4. Modelos de perturbaciones simplificados	26
3.2. Métodos de estimación	27
3.2.1. Mínimos Cuadrados	27
3.2.2. Filtro Kalman	29
3.2.3. Regresión con Procesos Gaussianos	31
4. Regresión con Procesos Gaussianos	34
4.1. Introducción a los Procesos Gaussianos (PG)	34
4.1.1. Función media	35
4.1.2. Función de covarianza	36
4.2. Análisis del modelo: Regresión por Procesos Gaussianos	36
4.2.1. Método Bayesiano	37
4.2.2. Predicción	38
4.3. Funciones kernel	40
4.3.1. Funciones kernel simples	41
4.3.2. Funciones kernel mixtas	43
4.4. Optimización de hiperparámetros	45
4.4.1. Método de máxima verosimilitud	46
4.4.2. Búsqueda en rejilla	49
5. Implementación del método de estimación con los datos reales	51
5.1. Estimación de la posición satelital entre puntos conocidos	52
5.1.1. Resultados de la estimación en la dimensión espacial X	53
5.1.2. Resultados de la estimación en la dimensión espacial Y	57
5.1.3. Resultados de la estimación en la dimensión espacial Z	60
5.2. Predicción de la posición satelital futura	63
5.2.1. Resultados de la predicción con el kernel cuadrático-exponencial (SE)	63

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IV
5.2.2. Resultados de la predicción con el kernel lineal (<i>LIN</i>)	65
5.2.3. Resultados de la predicción con el kernel periódico (<i>PER</i>)	65
5.2.4. Resultados de la predicción con el kernel mixto: <i>LIN</i> x <i>SE</i> (<i>MX1</i>) . . .	67
5.2.5. Resultados de la predicción con el kernel mixto: <i>SE</i> x <i>SE</i> (<i>MX2</i>) . . .	69
5.2.6. Resultados de la predicción con el kernel mixto: <i>SE</i> x <i>PER</i> (<i>LP</i>) . . .	71
6. Conclusiones	73

Índice de figuras

1.1. Enlace satelital. [2]	2
1.2. Ilustración del satélite NOAA I. [4]	3
1.3. Ilustración del satélite NOAA-17. [9]	4
2.1. Altura de las órbitas. [12]	9
2.2. Inclinação de las órbitas. [13]	10
2.3. Formas de las órbitas. [14]	11
2.4. Elementos que caracterizan la elipse.	13
2.5. Anomalías del movimiento elíptico. [19]	14
2.6. Representación de los ángulos de rotación.	16
2.7. Ejemplo de los datos en formato TLE.	16
2.8. Imágenes de la órbita del satélite NOAA-17. [22]	19
3.1. Representación del achatamiento de los polos. [27]	23
3.2. Cambio de densidad en la atmósfera respecto la altura sobre el nivel del mar. . .	24
3.3. Representación de la fuerza de rozamiento, F_r [28].	25
3.4. Ejemplo de una vela solar. [29]	26
3.5. Ejemplo del método de Mínimos Cuadrados, modelo lineal. [32]	29
3.6. Esquema del filtro de Kalman. [34]	30
3.7. Función de densidad de la distribución normal. [36]	32
4.1. Ejemplo de muestras PG del prior.	38
4.2. Ejemplos de funciones kernel simples a priori.	43
4.3. Ejemplos de funciones kernel mixtas a priori.	45

4.4. Ejemplo de la variación del hiperparámetro longitud característica, l , en una función kernel cuadrático-exponencial.	46
4.5. Búsqueda en rejilla.	50
5.1. Estimación de la posición satelital en la dimensión espacial X con los tres tipos de kernel seleccionados: SE , $MX2$ y LP , y los dos conjuntos de entrenamiento. .	55
5.2. Estimación de la posición satelital en la dimensión espacial Y con los tres tipos de kernel seleccionados: SE , $MX2$ y LP , y los dos conjuntos de entrenamiento. .	58
5.3. Estimación de la posición satelital en la dimensión espacial Z con los tres tipos de kernel seleccionados: SE , $MX2$ y LP , y los dos conjuntos de entrenamiento. .	61
5.4. Predicción de la posición satelital en las tres dimensiones espaciales con el kernel cuadrático-exponencial (SE).	64
5.5. Predicción de la posición satelital en las tres dimensiones espaciales con el kernel lineal (LIN).	66
5.6. Predicción de la posición satelital en las tres dimensiones espaciales con el kernel periódico (PER).	67
5.7. Predicción de la posición satelital en las tres dimensiones espaciales con el kernel mixto: LIN x SE ($MX1$).	68
5.8. Predicción de la posición satelital en las tres dimensiones espaciales con el kernel mixto: SE x SE ($MX2$).	70
5.9. Predicción de la posición satelital en las tres dimensiones espaciales con el kernel mixto: SE x PER (LP).	71

Índice de tablas

1.2. Cronograma de las tareas realizadas en este proyecto.	6
5.1. Error cuadrático medio de las estimaciones realizadas en la dimensión X para dos conjuntos de datos de entrenamiento.	54
5.2. Hiperparámetros de las funciones kernel en la dimensión X para dos conjuntos de datos de entrenamiento.	56
5.3. Error cuadrático medio de las estimaciones realizadas en la dimensión Y para dos conjuntos de datos de entrenamiento.	57
5.4. Hiperparámetros de las funciones kernel en la dimensión Y para dos conjuntos de datos de entrenamiento.	59
5.5. Error cuadrático medio de las estimaciones realizadas en la dimensión Z para dos conjuntos de datos de entrenamiento.	60
5.6. Hiperparámetros de las funciones kernel en la dimensión Z para dos conjuntos de datos de entrenamiento.	62
5.7. Hiperparámetros de la función kernel SE.	65
5.8. Hiperparámetros de la función kernel PER	67
5.9. Hiperparámetros de la función kernel $MX1$	69
5.10. Hiperparámetros de la función kernel $MX2$	70
5.11. Hiperparámetros de la función kernel LP	72

Índice de algoritmos

1.	Pseudocódigo del método ascendente	49
----	--	----

Índice de acrónimos

AMSU Advanced Microwave Sounding Unit.

APT Automatic Picture Transmission.

AVHRR Advanced Very-High-Resolution Radiometer.

ECI Sistema de referencia inercial centrado en la Tierra.

GEO Geostationary Earth Orbit.

GPR Gaussian Process Regression.

HEO Highly Earth Orbit.

ISS Estación Espacial Internacional.

LEO Low Earth Orbit.

MEO Medium Earth Orbit.

NASA National Aeronautics and Space Administration.

NOAA National Oceanic and Atmospheric Administration.

NORAD Comando de Defensa Aérea de América del Norte.

PG Proceso Gaussiano.

RMSE Root Mean Square Error.

SDP Modelos Simplificados de Perturbaciones del Espacio Profundo.

SGP Modelos de Perturbaciones Generales Simplificadas.

TFG Trabajo de Fin de Grado.

TLE Two-Line Element.

Agradecimientos

Quiero agradecer el apoyo recibido a lo largo de mi periodo académico a todas las personas que me han ayudado a conseguirlo.

En primer lugar, me gustaría agradecerse a mis padres por su apoyo incondicional en todo momento. Gracias por ayudarme a crecer y a conseguir mis objetivos.

Quiero agradecer el apoyo recibido a mis amigos, quienes han estado a mi lado en todo momento y han conseguido distraerme de mis estudios, en ciertos momentos, para descansar y seguir con más energía e ilusión. Sin ánimo de dejar a nadie excluido, agradecer especialmente a Pulido, Iara y Xiaomin.

En el ámbito académico, me gustaría agradecerle a mi tutora Almudena Buelta, por su esfuerzo y trabajo en este proyecto y el tiempo invertido en mí. También, me gustaría agradecer a mis compañeros de carrera, que han sido mi segunda familia en estos seis años.

Por último, agradecer en gran medida a Carlos, quien ha sido un pilar fundamental todos estos años y me ha ofrecido todo su apoyo y cariño, incluso en mis peores días.

Per aspera ad astra

Resumen

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado es la predicción de la posición de un satélite de la constelación National Oceanic and Atmospheric Administration. Para ello, se ha empleado el método de estimación basado en el método Gaussian Process Regression. En la actualidad, los satélites artificiales que orbitan la Tierra se han convertido en una herramienta fundamental para establecer las comunicaciones entre diferentes puntos de la Tierra. Además, también proporcionan información de uso militar y científico, como las imágenes que ayudan a la comprensión de los fenómenos meteorológicos, que afectan a los océanos y a la atmósfera.

Los satélites artificiales que orbitan la Tierra definen diferentes trayectorias según las características y funciones que ofrecen, sin embargo, todos ellos se ven afectados por diversos fenómenos físicos que pueden alterar su órbita y perjudicar las comunicaciones establecidas. Estas alteraciones son una de las principales causas por las que los equipos de recepción no son capaces de realizar un seguimiento óptimo del satélite. En consecuencia, es necesario un conocimiento continuo de la posición satelital a lo largo del tiempo, para establecer una correcta comunicación entre el satélite y la Tierra.

El presente trabajo pretende ofrecer un método de estimación para predecir la posición real del satélite a partir de las posiciones orbitales ya conocidas. En primer lugar, se realiza un análisis de los tipos de órbitas, enfocado en la trayectoria que recorren los satélites meteorológicos NOAA, en particular el satélite NOAA-17. Para llevar a cabo la estimación de la trayectoria, se ha estudiado el modelo de predicción Gaussian Process Regression, que a partir de la posición real del satélite, obtenida de los datos en formato Two-Line Element, y de la posición calculada en base a las ecuaciones orbitales, se obtiene la estimación de la desviación del satélite en diferentes instantes temporales.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y Objetivos

La observación de la Tierra y la mejora de las telecomunicaciones son dos propósitos de los satélites que orbitan nuestro planeta. Sus señales de radio, televisión, telefonía e incluso imágenes meteorológicas son la base de muchos de los avances tecnológicos en la actualidad. Las comunicaciones de radioenlace se definen como cualquier interconexión entre dos dispositivos de telecomunicaciones mediante ondas electromagnéticas, en un medio no guiado [1]. Con el fin de obtener una comunicación estable entre los satélites y los equipos de recepción terrestres, se debe realizar un estudio sobre el canal de transmisión de la señal, el cual se ve afectado por algunas características del medio de transmisión, como la distancia entre equipos, y por factores de los equipos de recepción (potencia de transmisión, relación señal/ruido, ganancia, diagrama de radiación, polarización, etc.). En la Figura 1.1 se muestra un esquema del enlace entre un satélite y dos estaciones terrenas. El enlace ascendente, o *up-link*, hace referencia al enlace de comunicaciones que comienza en la estación transmisora terrena y finaliza en el satélite. Y, por otro lado, el enlace descendente, o *down-link*, realiza el camino inverso, finalizando en la estación receptora en la Tierra. Por otro lado, es fundamental conocer la posición del satélite con el fin de orientar los equipos de recepción y transmisión y, conseguir una comunicación viable entre ambos.

La trayectoria orbital del satélite no permanece inalterable a lo largo del tiempo, dado que puede ser perturbada por fuerzas como la atracción del Sol y de la Luna, la presión de la radiación solar o los efectos del campo magnético terrestre. Es posible conocer los efectos de determinadas

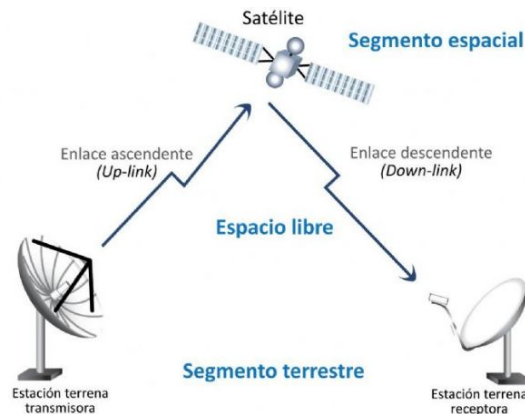


Figura 1.1: Enlace satelital. [2]

fuerzas que actúan sobre las órbitas, calculándose con exactitud las posiciones de los satélites. Sin embargo, hay ciertas fuerzas que no son predecibles, tales como las actividades referentes al Sol o la densidad de la atmósfera en sus capas altas, que producen distorsiones en la posición satelital que no se pueden estimar con exactitud.

El presente proyecto tiene como objetivo la estimación de la posición satelital a partir de los datos obtenidos de los históricos Two-Line Element (TLE) y los fundamentos físicos de las órbitas. El conocimiento de esta estimación ayudará a la correcta orientación de los equipos de recepción terrestres para una conexión óptima con el satélite y a la actualización periódica de la posición satelital, cuando deje de estar activo y no se conozca con exactitud su trayectoria, con el objetivo de evitar colisiones con otros objetos en el espacio.

Por último, el tema principal del proyecto ha sido escogido con la finalidad de proporcionar el conocimiento sobre el pase de los satélites meteorológicos National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA). Esta información es necesaria en otros proyectos, dado que es fundamental conocer el pase del satélite para colocar y orientar la antena de recepción, en el momento y posición correctos. Por tanto, los resultados de la estimación de este proyecto pueden ser una base para los proyectos de construcción e implementación de una estación de recepción terrena, cuyo objetivo es recibir las imágenes meteorológicas en formato Automatic Picture Transmission (APT), transmitidas por los satélites NOAA.

1.2. Antecedentes y la constelación NOAA

En la actualidad, hay 4.085 satélites artificiales orbitando alrededor de nuestro planeta [3]. Gran cantidad de estos satélites tienen como misión la observación y recogida de datos de la superficie terrestre, con el fin de proporcionar información relevante sobre la meteorología de nuestro planeta.

La NOAA es la oficina nacional de Estados Unidos encargada de comunicar y predecir cambios en los océanos, el espacio y la atmósfera terrestre, gracias a la información recogida por su constelación de satélites. Los primeros satélites lanzados por dicha organización fueron los NOAA 1-5 (Figura 1.2), entre 1970 y 1979. Estos satélites fueron los primeros en dar información sobre la cobertura de nubes, proporcionar sondeos sobre la temperatura de la atmósfera y obtener datos globales de los flujo de protones solares. La órbita que recorren es Low Earth Orbit (LEO) (850 kilómetros de altura sobre la Tierra), helio-síncrona y polar, lo que proporciona una visión de cualquier lugar de la superficie terrestre.

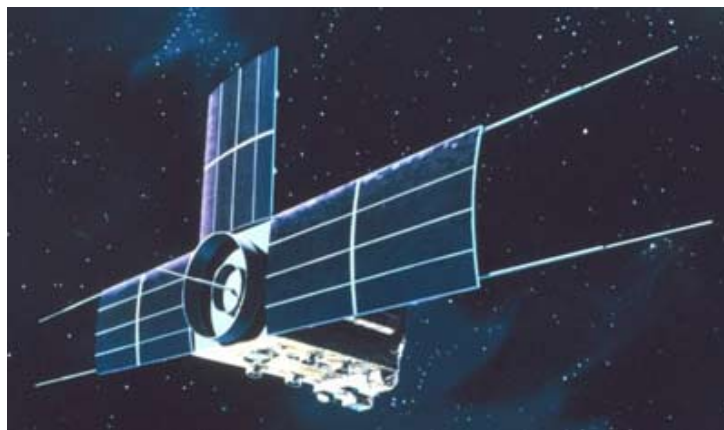


Figura 1.2: Ilustración del satélite NOAA I. [4]

Entre 1997 y 1998 se ha lanzado el conjunto de satélites NOAA 6-14. Este conjunto de satélites iban incorporando grandes mejoras para la monitorización periódica de las capas de hielo y nieve, la agricultura o el ozono. Desde 1998 hasta la actualidad, se han lanzado, además, los satélites NOAA 15-19. Cabe destacar el NOAA-15, que fue lanzado en 1998 con un tiempo operativo de dos años, sin embargo, estuvo en pleno funcionamiento hasta el 2018. Actualmente, sirve como satélite secundario para el NOAA-20 en el periodo a.m. [5].

1.2.1. Satélite NOAA-17

El 24 de junio de 2002 se produjo el lanzamiento del satélite NOAA-17, desde el Complejo de Lanzamiento Espacial Vandenberg 4, California. El objetivo de la misión era la recogida de datos sobre la composición de la atmósfera por medio del conjunto de instrumentos a bordo. El sistema AMSU [6] es un radiómetro de microondas multicanal, que proporciona información sobre el agua atmosférica en todas sus formas. Por otro lado, el sensor AVHRR/3 permite monitorizar las nubes y medir la emisión térmica de la Tierra [7].

Este satélite recopilaba la información durante la mitad del día (a.m.) y su compañero NOAA-18 realizaba la misma función la otra mitad (p.m.) ya que ambos satélites estaban compuestos por una instrumentación similar. NOAA-17 estuvo en pleno funcionamiento durante 11 años, y el 10 de abril de 2013 fue dado de baja. Mientras que, a partir de 2009, NOAA-18 comenzó a ser el satélite secundario del NOAA-20 en el periodo p.m..

Finalmente, el 10 de marzo de 2021, el satélite NOAA-17 se desintegró en órbita sin indicios de colisión. Por otro lado, se rastrearon algunos escombros asociados a su desintegración, pero no se halló ningún riesgo para el resto de activo espacial.

Los datos de partida de este proyecto son las líneas TLE del satélite NOAA-17 [8]. Por otro lado, como se ha mencionado anteriormente, el satélite no está actualmente activo, y los datos del archivo son anteriores al año 2005.



Figura 1.3: Ilustración del satélite NOAA-17. [9]

1.3. Metodología y Herramientas

La estimación de la posición del satélite se realizará mediante los métodos de regresión con procesos gaussianos. Gaussian Process Regression (GPR) es una herramienta matemática empleada en la caracterización de modelos de acuerdo a los datos y a la elección de la función kernel. En este proyecto se estudiarán varios kernel como el Exponencial Cuadrático, el Lineal, el Periódico y algunos kernel mixtos, para ajustar el modelo. Los datos empleados en la estimación serán los errores de posición en las tres dimensiones espaciales, calculados como la diferencia entre la posición obtenida a partir de datos reales y la posición basada en los fundamentos físicos de la órbita. Los datos reales son los obtenidos de los archivos históricos TLE del Comando de Defensa Aérea de América del Norte (NORAD), el cual es un formato de datos que caracteriza con diferentes parámetros la órbita que recorre el satélite y la posición del mismo en un periodo de tiempo. Las ecuaciones orbitales serán la base para obtener la trayectoria que debería recorrer el satélite teniendo en cuenta los fenómenos físicos en los que se fundamentan los principios de la órbita.

El proyecto se ha realizado sobre *Matlab* R2020b [10], puesto que es una herramienta que proporciona un entorno de trabajo conocido y versátil para el desarrollo de funciones y métodos matemáticos. Se desarrollará el método de regresión desde los inicios, sin el uso de funciones ya implementadas en toolbox, para la realización del modelo GPR y sus diversos kernel, con el objetivo de realizar un estudio completo del modelo y su total comprensión.

1.4. Cronograma

El siguiente trabajo se ha desarrollado a partir de la realización de diferentes tareas, siguiendo el orden cronológico definido en la Tabla 1.2. Las actividades que componen este Trabajo de Fin de Grado (TFG) se describen con más detalle en la Sección 1.5.

Inicialmente, se ha realizado un estudio de los tipos de órbitas que realizan los satélites artificiales, con el objetivo de comprender la trayectoria que recorren los satélites NOAA alrededor de la Tierra. Por otro lado, es necesario un análisis previo del formato de los datos orbitales TLE. A partir de esta documentación, se han obtenidos los datos de la desviación de la posición satelital respecto al modelo orbital. La segunda parte de este proyecto se basa en el

estudio de los diferentes modelos de estimación, enfocándose en el modelo GPR. Por otra parte, en base a este conocimiento, se ha desarrollado el código necesario para la implementación del método de estimación GPR con diferentes funciones de covarianza. Finalmente, se ha elaborado la memoria de este trabajo con el fin de exponer la documentación y los resultados obtenidos.

Actividades	Meses										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1. Estudio de las órbitas y los satélites NOAA											
2. Estudio del formato TLE											
3. Cálculo de la desviación de la posición de los datos observados											
4. Análisis de diferentes métodos de estimación											
5. Estudio e implementación del método GPR											
6. Desarrollo e implementación de la optimización de los hiperparámetros del método GPR											
7. Elaboración de la memoria del proyecto											

Tabla 1.2: Cronograma de las tareas realizadas en este proyecto.

1.5. Estructura

A continuación, se presenta la estructura del proyecto, con el objetivo de aportar una breve descripción de los capítulos que lo componen.

En el capítulo 2 se analizan los diferentes tipos de trayectorias orbitales de los satélites artificiales alrededor de la Tierra, clasificándolas en grupos según la altura, la inclinación o la forma del recorrido. Además, se analiza la órbita del satélite central del modelo de estimación, el NOAA-17. Por otro lado, se realiza un estudio de los dos tipos de datos utilizados en el modelo: las posiciones consideradas reales en este trabajo, obtenidas del formato TLE y las posiciones obtenidas a partir de las ecuaciones orbitales, basadas en los fundamentos físicos de las órbitas. Además, se calculan los errores de posición de la trayectoria satelital, en las tres dimensiones espaciales, con el objetivo de utilizarlos como datos de entrenamiento del modelo de estimación.

En el capítulo 3 se describen las alteraciones que se producen en la trayectoria orbital, las cuales reciben el nombre de perturbaciones. Existen diferentes tipos de perturbaciones orbitales que afectan a la posición del satélite en su recorrido alrededor de la Tierra. Al mismo tiempo, también se estudian los modelos orbitales que incluyen las perturbaciones en sus hipótesis. En un intento de simplificar dichos modelos, se desarrollan modelos de estimación de la posición satelital como el método de *Mínimos cuadrados*, el *Filtro de Kalman* o el modelo estudiado en este proyecto *Regresión mediante procesos Gaussianos*.

Después de un breve análisis de los Procesos Gaussianos en el capítulo anterior, el capítulo 4 desarrolla en profundidad el modelo de *Regresión mediante Procesos Gaussianos*. Además, se introducen las definiciones de función media y covarianza, además de las funciones kernel utilizadas en este proyecto. Finalmente, se analiza la optimización de los hiperparámetros de las funciones kernel para hallar una mejora en la caracterización de la función a estimar.

En el capítulo 5 se presentan los resultados de la utilización del modelo GPR en el análisis de la estimación de la trayectoria satelital. Se analizan los diferentes tipos de funciones kernel, definidas en el capítulo 4, según los datos de entrenamiento de este proyecto, seleccionando el kernel que mejor caracteriza los datos.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones del presente TFG y, se plantean algunas recomendaciones para un desarrollo más eficaz del método de estimación.

Capítulo 2

Tipos de órbitas y trayectoria del satélite

NOAA-17

La órbita es la trayectoria curva que describe un cuerpo en el espacio alrededor de un segundo cuerpo más grande. Este movimiento se produce por la fuerza gravitacional ejercida por el cuerpo central. En este trabajo, el satélite NOAA-17 es el cuerpo que describe la trayectoria orbital y la Tierra es el cuerpo celeste central de la órbita.

En este capítulo se presentan los diferentes tipos de órbitas descritas por los satélites artificiales alrededor de la Tierra, analizando sus características y parámetros principales. Después, se realiza el estudio del modelo orbital que caracteriza la órbita elíptica y la presentación de los datos en formato TLE, que definen la trayectoria de los satélites. Finalmente, el análisis se centra en las características orbitales del satélite NOAA-17 y se plantea el cálculo de la desviación de posición que experimenta en su trayectoria orbital.

2.1. Tipos de órbitas

En el espacio se describen numerosos tipos de órbitas con diversas características. Por ello, las órbitas se clasifican en grupos según la altura, la inclinación o la forma [11]

1. **Altura:** en esta clasificación se diferencian las órbitas según la distancia a la que se encuentra el satélite de la Tierra, ver Figura 2.1.

a) LEO: se refieren a órbitas terrestres bajas. Su altura respecto la superficie del planeta

es entre 200 y 2.000 kilómetros, aproximadamente. Producto de su cercanía a la Tierra, la fuerza gravitacional que deben contrarrestar es de gran magnitud, por ello, la velocidad de los satélites es elevada (27.000 kilómetros/hora). El periodo orbital es bastante corto, siendo de una duración de minutos o pocas horas. La Estación Espacial Internacional (ISS) y los satélites meteorológicos recorren este tipo de trayectorias.

- b)* Medium Earth Orbit (MEO): son órbitas terrestres medias cuya franja de altura se encuentra entre 2.000 y 36.000 kilómetros. Los satélites de observación, como GPS, GLONASS y Galileo, recorren órbitas MEO. La duración de su periodo es cercano a 12 horas.
- c)* Geostationary Earth Orbit (GEO): a aproximadamente 35.700 kilómetros de la superficie terrestre, se encuentran los satélites que recorren una órbita geoestacionaria, cuyo periodo orbital es de 24 horas sobre el Ecuador. Este periodo produce un efecto de inmovilidad respecto a la Tierra, lo que produce que los satélites se observen como un punto fijo en el cielo. Para cubrir una superficie completa es necesario un menor número de satélites que en la órbita MEO, debido a su altura.
- d)* Highly Earth Orbit (HEO): los satélites de órbita alta se encuentran a una distancia superior a 36.000 kilómetros respecto la superficie terrestre. La duración de su periodo orbital es superior a 24 horas.

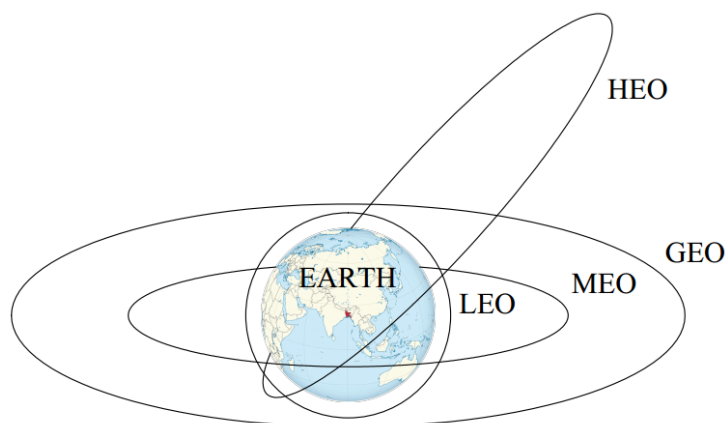


Figura 2.1: Altura de las órbitas. [12]

2. **Inclinación:** esta característica orbital hace referencia al ángulo formado por el plano

orbital del satélite y el plano de referencia escogido. Las órbitas terrestres toman como plano de referencia el plano de la eclíptica de la Tierra, que se define como el plano en el que está contenida la órbita de la Tierra alrededor del Sol. Este plano se encuentra inclinado $23^{\circ}27'$. En la Figura 2.2 se ilustran los diferentes tipos de órbitas según su inclinación.

- a) Ecuatorial: la inclinación en este tipo de órbitas es de 0° , por tanto, el eje de rotación de la Tierra y el plano orbital del satélite son perpendiculares. Esta trayectoria recibe el nombre *ecuatorial*, dado que recorre el plano ecuatorial terrestre.
- b) Polar: el ángulo formado entre el plano de referencia y el plano orbital del satélite es próximo a los 90° . Su nombre describe su trayectoria sobre los polos terrestres.
- c) Inclinada: son las órbitas que describen una trayectoria cuya inclinación no es 0° ni 90° .
 - Inclinación retrógrada: recibe este nombre la órbita cuya inclinación es superior a 90° . Este ángulo produce una rotación opuesta respecto a la Tierra.

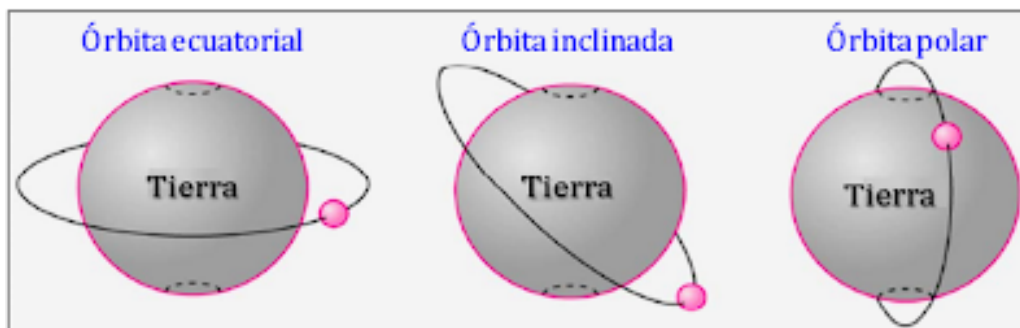


Figura 2.2: Inclinación de las órbitas. [13]

3. **Forma:** las órbitas recorridas por los satélites describen diferentes formas geométricas.

- a) Circular: la órbita describe una circunferencia y, por tanto, la distancia entre el satélite y la Tierra es constante a lo largo del tiempo. Es un caso excepcional debido a que la mayoría de órbitas generan una elipse o hipérbola.
- b) Elíptica: este tipo de órbita describe una elipse. Al contrario que la órbita circular, la distancia entre el satélite y la Tierra no es constante a lo largo del tiempo. La elipse se caracteriza a partir del semieje mayor, semieje menor, centro, focos y excentricidad.

En una órbita elíptica, la Tierra se localiza en un foco de la elipse. Los fundamentos teóricos y físicos de este tipo de órbita se explican en la Sección 2.2.

- c) Hiperbólica: en este tipo de órbita, la velocidad del satélite produce una energía cinética superior a la potencial gravitatoria de la Tierra, produciendo un alejamiento continuo del satélite. Un ejemplo de este tipo de órbitas es la trayectoria que recorren los cometas.
- d) Parabólica: mantiene un parecido con la órbita hiperbólica, pero en este caso la energía cinética es igual a la potencial gravitatoria, conociéndose su velocidad como la velocidad de escape.

En la Figura 2.3 se muestran varios tipos de órbitas cuya diferencia es la forma que describen. En esta figura se representa al Sol como el astro central de las órbitas, sin embargo, en este trabajo el astro central es la Tierra.

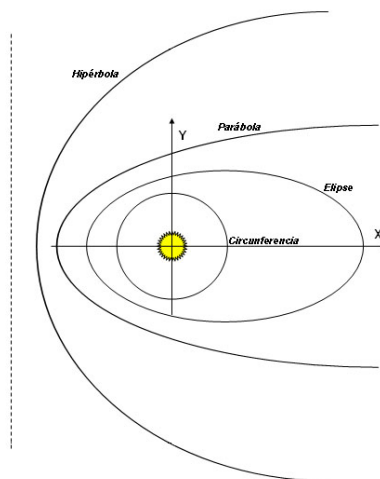


Figura 2.3: Formas de las órbitas. [14]

2.2. Fundamentos físicos de la elipse

“La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos, llamados focos, es constante” [15].

Johannes Kepler (Würtemberg, actual Alemania, 1571 - Ratisbona, 1630) fue un astrónomo, matemático y físico alemán. En la primera parte de su obra postuló las leyes del movimiento

planetario o *leyes de Kepler*. Enunció varios principios físicos en los que se dio a conocer la órbita elíptica de los planetas alrededor del Sol y la teoría heliocéntrica. La primera ley, enuncia la órbita elíptica de los planetas alrededor del Sol, situado en el foco de la elipse. Tras este postulado, se termina la creencia de la órbita circular de los planetas. El segundo enunciado establece que los planetas no se mueven a velocidad constante, sino que depende del radio vector que une al planeta y al Sol. Y, por último, la tercera ley establece la relación entre el periodo y el radio orbital del planeta, definida como:

$$K = \frac{T^2}{a^3} \quad (2.1)$$

donde la variable T es el periodo orbital, la a representa el radio de la órbita y K es la constante de *Kepler*.

La elipse se caracteriza con una serie de parámetros que ofrecen información sobre la forma de la órbita y la posición del satélite en la elipse.

El **eje mayor** es la distancia entre los dos puntos opuestos más alejados de la elipse ($2a$). El **semieje mayor** es la mitad de esta distancia (a). Por otro lado, si la distancia entre los dos puntos es la menor, recibe el nombre de **eje menor** ($2b$), y su mitad **semieje menor** (b).

El **centro** de la elipse es la intersección entre los ejes anteriormente enunciados (O). Los **focos** son de los elementos más importantes de la elipse, estos son los puntos fijos y equidistantes del centro de la elipse (F y F') y la recta que los atraviesa es el **eje focal** (FF'). El **eje secundario** es la mediatriz del segmento FF' . La **distancia focal** es la distancia entre ambos focos ($2c$), ver ecuación (2.2).

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (2.2)$$

Los **vértices** de la elipse son los puntos de intersección entre los ejes y la elipse. En la Figura 2.4 se representan por las letras A , A' , B y B' .

La **excentricidad** es el parámetro que define la forma de la elipse. Es un valor entre cero y uno. Cuando la forma de la elipse es más redondeada, la excentricidad toma un valor cercano a cero. Su magnitud es igual al cociente entre la semidistancia focal y su semieje mayor (e) (2.3) [16].

$$e = \frac{c}{a} \quad (2.3)$$

Por otro lado, a partir de las ecuaciones (2.2) y (2.3), se puede definir la excentricidad de la

órbita en base a el semieje mayor y semieje menor:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (2.4)$$

Los extremos de la órbita elíptica son el **periapsis** y el **apoapsis**.

El **periapsis**, también llamado perigeo o pericentro, es el punto de la elipse en el que el satélite se encuentra más cerca de la Tierra. Y el **apoapsis** es el punto de la elipse en el que el satélite y la Tierra se encuentran más alejados. También recibe los nombres de apogeo y apocentro [17].

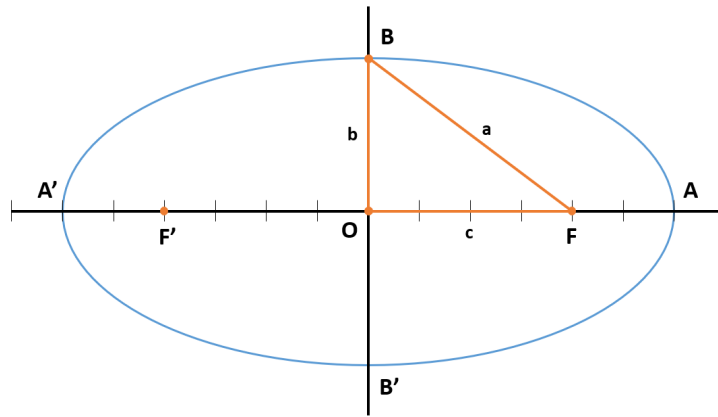


Figura 2.4: Elementos que caracterizan la elipse.

Para comprender la localización del periapsis y apoapsis en la Figura 2.4, situaremos la Tierra en el foco F y, por tanto, el punto A será el perigeo y el A' será el apogeo.

Por otro lado, la posición y el movimiento del satélite dentro de la órbita elíptica se define a partir de tres ángulos [18]:

1. La **anomalía verdadera**: este ángulo, conocido en inglés como *true anomaly*, está formado por la dirección del periapsis y el radio vector de la posición real del satélite. El vértice de este ángulo se halla en un foco de la elipse y se representa por la letra v .
2. La **anomalía excéntrica**: es el ángulo que define el movimiento del satélite en una órbita elíptica, también recibe el nombre de *eccentric anomaly*. La dirección del periapsis y el radio vector de la posición del satélite, en una órbita ideal, forman dicho ángulo, cuyo vértice es el centro de la elipse. Se representa por la letra E .

3. La **anomalía media**: es el ángulo formado por la dirección del periapsis y el radio vector de un satélite ficticio, con velocidad angular igual al movimiento medio. Su vértice se halla en el foco y se representa por la letra M . Su traducción al inglés es *mean anomaly*. Se define como:

$$M = \frac{2\pi t}{T} \quad (2.5)$$

donde la variable T representa el periodo.

En la Figura 2.5 se representan gráficamente los tres ángulos que definen el movimiento satelital dentro de una órbita elíptica, con el objetivo de clarificar las explicaciones anteriores.

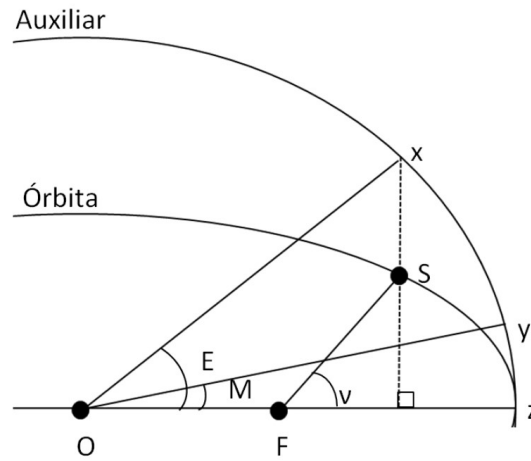


Figura 2.5: Anomalías del movimiento elíptico. [19]

La posición orbital del satélite NOAA-17 es descrita en coordenadas cartesianas (x,y,z) , las cuales vienen definidas por los parámetros de la elipse, ver ecuación (2.6d). La coordenada z se define igual a 0 debido a que se toma como altura de referencia la altura del satélite respecto a la superficie terrestre.

$$x = a \cos E - c = a(\cos E - e) \quad (2.6a)$$

$$y = b \sin E = a\sqrt{1 - e^2} \sin(E) \quad (2.6b)$$

$$z = 0 \quad (2.6c)$$

$$r_{xyz} = (x, y, z)^T \quad (2.6d)$$

Por otro lado, la anomalía excéntrica se puede definir usando la anomalía media y la excentricidad [20]:

$$E = M + e \sin E \quad (2.7)$$

Ambos parámetros vienen definidos en los datos TLE (ver Sección 2.3) y, por tanto, para la resolución numérica de la ecuación (2.7) se debe proceder a realizar el método de iteración, cuyo punto inicial es la anomalía media. Finalmente, la obtención del ángulo de barrido, θ , es necesario para la caracterización, en coordenadas cartesianas, la posición del satélite (ecuación (2.8)).

$$\theta = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right) \quad (2.8)$$

Por otro lado, otro elemento importante para la caracterización de la posición satelital son las matrices de rotación. Estas matrices son las herramientas necesarias para el cambio entre sistemas de referencia. Las coordenadas de la ecuación (2.6d) tenían como origen uno de los focos, sin embargo, es necesario cambiar al Sistema de referencia inercial centrado en la Tierra (ECI). Para ello, se utilizan los parámetros Ω , longitud del nodo ascendente [deg]; ω , argumento del periapsis [deg] e i , ángulo de inclinación de la órbita [deg] [21]. Las matrices de rotación son:

$$Rz_{\Omega} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Rx_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \quad (2.9a)$$

$$Rz_{\omega} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9b)$$

En la Figura 2.6 se ilustran los ángulos que caracterizan las matrices de rotación, donde la órbita elíptica del satélite se representa mediante una elipse de color amarillo.

Finalmente, las coordenadas en el sistema de referencia ECI de un satélite se calculan en base a la ecuación (2.10). Para la obtención de dichas coordenadas es necesario realizar el producto de las matrices de rotación con las coordenadas cartesianas.

$$r_{ECI} = (Rz_{\Omega}^{-1} \cdot Rz_i^{-1} \cdot Rz_{\omega}^{-1} \cdot r_{xyz})^T \quad (2.10)$$

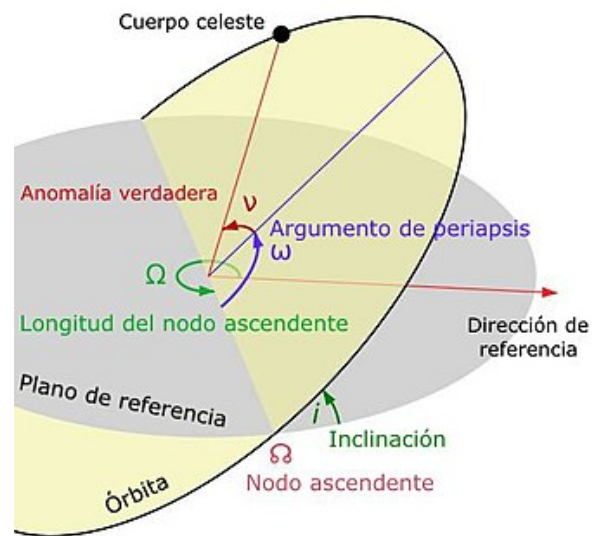


Figura 2.6: Representación de los ángulos de rotación.

2.3. Two-Line Element, TLE

En esta sección se analizan los datos obtenidos a partir de los históricos en formato TLE del NORAD. En primer lugar, en base a estos datos se pueden obtener los elementos orbitales que caracterizan la órbita y la posición del satélite. La estructura de este tipo de datos está formada por dos líneas de números, divididas en varios conjuntos para definir elementos tales como: el número del satélite, la excentricidad de su órbita o la época en la que se tomaron los datos. A partir de la Figura 2.7, se representa un ejemplo del formato TLE.

```

1 27453U 02032A   02194.93533416   .00000183   00000-0   10069-3 0   394
2 27453   98.7838 261.9614 0011044 274.4208 85.5706 14.23088700 2727

```

Figura 2.7: Ejemplo de los datos en formato TLE.

A continuación, se presenta una explicación detallada de cada conjunto numérico representado en las líneas en formato TLE. Con el objetivo de facilitar la localización de cada conjunto, se ha señalado la posición de cada dato, siendo el inicio de la numeración el primer dígito de cada línea.

1. Primera línea:

* 01: Número de la línea.

- * 03-07: Número del satélite proporcionado por el NORAD.
- * 08: La letra U significa que no es confidencial (*unclassified*).
- * 10-11: Número internacional (últimos dos dígitos del año de lanzamiento).
- * 12-14: Número internacional (número de lanzamiento del ese año).
- * 15-17: Número internacional (pieza del lanzamiento).
- * 19-20: Año epoch (últimos dos dígitos del año).
- * 21-32: Epoch (día y hora del año en fracción de días).
- * 34-43: Primera derivada del movimiento promedio (*Mean Motion*) con respecto al tiempo.
- * 45-52: Segunda derivada del movimiento promedio (*Mean Motion*) con respecto al tiempo.
- * 54-61: Coeficiente de resistencia *BSTAR*.
- * 63: Modelo orbital. El 0 indica el modelo SGP4/SDP4, ver Sección 3.1.4).
- * 65-68: Indica el número de TLE sobre este objeto espacial.
- * 69: Dígito de control.

2. Segunda línea:

- * 01: Número de la línea.
- * 03-07: Número del satélite proporcionado por el NORAD.
- * 09-16: Ángulo de inclinación orbital [grados].
- * 18-25: Longitud del nodo ascendente [grados].
- * 27-33: Excentricidad orbital. Número comprendido entre 0 y 1, solo se muestran los decimales.
- * 35-42: Argumento del perigeo [grados].
- * 44-51: Anomalía media (*Mean Anomaly*) [revoluciones por día].
- * 53-63: Movimiento medio (*Mean Motion*) [revoluciones por día].
- * 64-68: Número de revoluciones desde epoch [revoluciones].

* 69: Dígito de control.

Por otro lado, la posición del satélite NOAA-17 que se toma como real en este proyecto es la obtenida a partir de los datos históricos en formato TLE. Estos datos corresponden a los históricos entre el 24 de junio de 2002 y el 10 de diciembre de 2004.

2.4. Tipo de órbita del satélite NOAA-17

NOAA-17 es un satélite meteorológico, por ello, en su trayectoria alrededor de la Tierra debe ser capaz de observar los cambios en los océanos y en la atmósfera terrestre. La órbita capaz de adaptarse a las características de los satélites NOAA es una órbita LEO, elíptica, polar y helio-síncrona. Por tanto, la altura de la órbita debe ser baja, para estar cerca de la Tierra (870 kilómetros sobre la superficie terrestre), y polar, para ser capaz de observar toda la superficie terrestre. Además, las órbitas helio-síncronas se caracterizan por su paso, en un mismo tiempo solar local, por una latitud determinada, lo que produce una iluminación adecuada para recoger imágenes de la superficie terrestre.

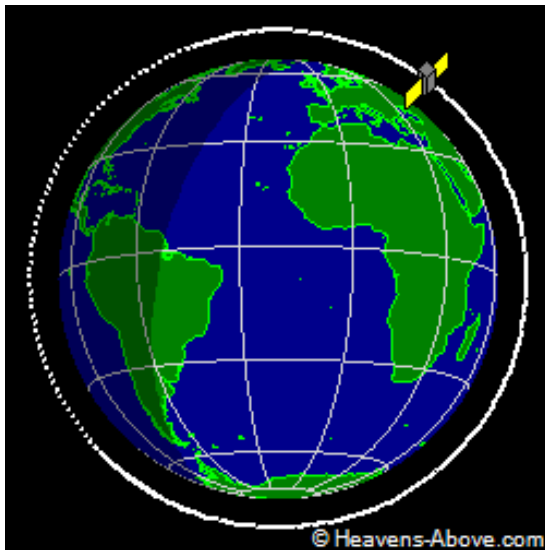
La excentricidad de la órbita es de 0.0012 (dato recogido del TLE, Sección 2.3), por tanto, NOAA-17 recorre una órbita elíptica, o cuasi-circular debido a su excentricidad próxima a 0.

2.5. Cálculo de la desviación de la posición satelital

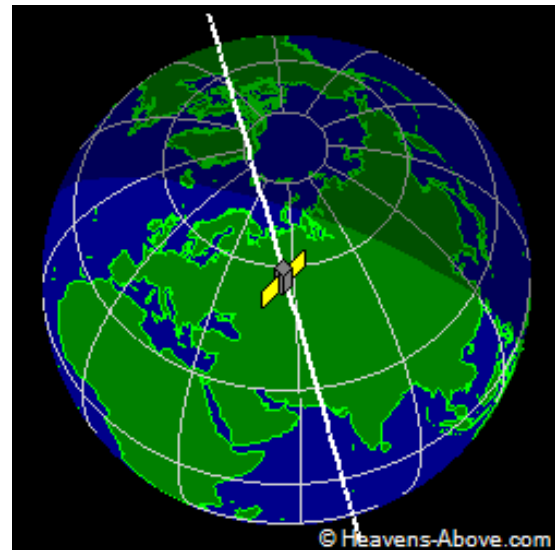
En esta sección se presenta el cálculo de la desviación de la posición del satélite respecto de su trayectoria orbital. Estos datos son la base de la estimación realizada en este proyecto.

La desviación de la posición del satélite es la diferencia entre la posición obtenida de las coordenadas reales y la obtenida teóricamente. La trayectoria real del satélite se ha obtenido mediante los datos en formato TLE (Sección 2.3), mientras que la posición teórica se obtiene a partir de las ecuaciones orbitales, analizadas en la Sección 2.2.

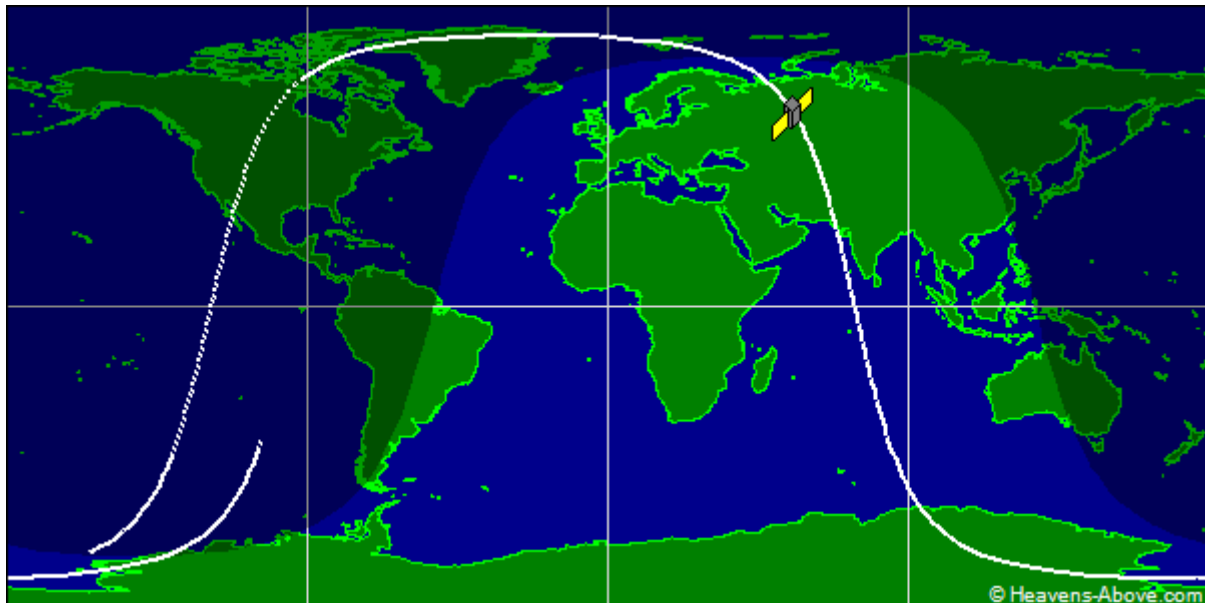
Por tanto, a continuación, se analizan los cálculos realizados para obtener la posición teórica del satélite, a partir del punto de referencia, que en este caso es el perigeo de la órbita, y la diferencia de tiempos entre el primer punto y las siguientes muestras, obtenidas de los datos en formato TLE. El cálculo de la posición a lo largo del tiempo es sencillo en trayectorias circulares.



(a) Vista perpendicular al plano orbital.



(b) Vista sobre el satélite.



(c) Trayectoria de superficie (*Ground track*).

Figura 2.8: Imágenes de la órbita del satélite NOAA-17. [22]

Sin embargo, en órbitas elípticas, parabólicas o hiperbólicas son necesarias las ecuaciones de Kepler, que deben resolverse de forma iterativa.

En primer lugar, un dato imprescindible en el problema es la diferencia de tiempos entre el punto inicial y el punto de referencia, para ello se procede a despejar la variable t de la ecuación (2.5), siendo las variables M y T , la anomalía media y el periodo, respectivamente, obtenidos del TLE. El otro valor temporal necesario es el transcurrido entre el primer punto y

el punto del cual vamos a calcular su posición. Esta diferencia temporal es calculada como la diferencia del tiempo de epoch, en segundos. Conocidas ambas diferencias, obtenemos el tiempo entre el punto a calcular y el de referencia:

$$t_{ref} = \frac{MT}{2\pi} \quad (2.11)$$

$$t_{1x} = Epoch_x - Epoch_1 \quad (2.12)$$

$$t_{total} = t_{1x} + t_{ref} \quad (2.13)$$

La variable t_{total} es el tiempo entre el punto de referencia y el punto a calcular. Una vez obtenida esta diferencia temporal, se procede al cálculo de las anomalías media (2.5) y excéntrica (2.7) de la nueva posición.

Por otro lado, en este apartado no se dispone de datos orbitales del punto a calcular, por tanto, no se conoce la distancia del semieje mayor ni el semieje menor. Por ello, el cálculo de las coordenadas no se realiza como en la ecuación del apartado anterior (2.6d). En este caso, se debe calcular la distancia del semieje mayor para obtener las coordenadas del nuevo punto (2.14). Además, los valores de este nuevo punto se muestran en este proyecto mediante el símbolo $\hat{\cdot}$ en la parte superior de sus correspondientes variables (ver ecuación (2.15a)).

$$\hat{a} = \frac{h^2}{\mu(1 - \cos \theta)} \cos \theta \quad (2.14)$$

$$\hat{x} = \hat{a} \cos \theta \quad (2.15a)$$

$$\hat{y} = \hat{a} \sin \theta \quad (2.15b)$$

$$\hat{z} = 0 \quad (2.15c)$$

$$\hat{r}_{xyz} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^T \quad (2.15d)$$

Por otro lado, los ángulos de las matrices de rotación, obtenidos en la ecuación (2.9), se deben recalcular con los nuevos parámetros de este punto, a partir de las ecuaciones (2.16a) y (2.17a).

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{J_2 R^2 \sqrt{\mu}}{(1 - e^2)^2 a_1^{\frac{7}{2}}} \cdot \cos(i_1) \quad (2.16a)$$

$$\hat{\Omega}_x = \Omega_1 + \dot{\Omega} t_{1x} \quad (2.16b)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{J_2 R^2 \sqrt{\mu}}{(1-e^2)^2 a_1^{\frac{7}{2}}} \cdot \left(\frac{5}{2} \sin^2(i_1) - 2 \right) \quad (2.17a)$$

$$\hat{\omega}_x = \omega_1 + \dot{\omega} t_{1x} \quad (2.17b)$$

Las constantes utilizadas en las ecuaciones anteriores son: el coeficiente de elipticidad de la Tierra, J_2 , cuyo valor es $J_2 = 1,08263 \cdot 10^{-3}$; el radio de la Tierra, $R = 6,371,000m$ y el parámetro gravitacional estándar de la Tierra, $\mu = 3,98618 \cdot 10^{14}[m^3/s^2]$ [23].

Por otro lado, una vez se han obtenido los nuevos ángulos de las matrices de rotación, se procede a la traslación de las coordenadas al nuevo sistema de referencia. En la ecuación (2.18) se representa el cálculo para obtener las coordenadas en el sistema de referencia ECI.

$$\hat{r}_{ECI} = (Rz_{\hat{\Omega}_x}^{-1} \cdot Rz_i^{-1} \cdot Rz_{\hat{\omega}_x}^{-1} \cdot \hat{r}_{xyz})^T \quad (2.18)$$

Finalmente, la desviación de la posición, en cada dimensión espacial, es la diferencia entre las posiciones reales y las teóricas del satélite alrededor de la Tierra. La diferencia de posición se denota en este proyecto como e_k , siendo el subíndice k la dimensión espacial.

$$e_x = r_{ECI,x} - \hat{r}_{ECI,x} \quad (2.19a)$$

$$e_y = r_{ECI,y} - \hat{r}_{ECI,y} \quad (2.19b)$$

$$e_z = r_{ECI,z} - \hat{r}_{ECI,z} \quad (2.19c)$$

Capítulo 3

Efectos y estimación de las perturbaciones orbitales

El modelo de los dos cuerpos es el estudio del movimiento de dos partículas, con masas o cargas eléctricas conocidas, sometidas a una interacción entre ellas [24]. Este estudio crea las bases del modelo atómico planetario de Bohr o, junto a las leyes de Kepler, trata de explicar el movimiento de los planetas en el Sistema Solar. El problema de los dos cuerpos, en el ámbito espacial, dispone de dos hipótesis iniciales. En primer lugar, se considera el Universo como un sistema aislado. Y, en segundo lugar, las masas del sistema se contemplan como puntuales y, además, sus centros de masas se localizan centrados en el cuerpo. Estas hipótesis permiten la simplificación de fuerzas que afectan al movimiento orbital de los satélites alrededor de la Tierra. Sin embargo, aunque las hipótesis iniciales no consideran fuerzas externas al sistema de estudio (sistema aislado), hay diversos fenómenos físicos que pueden alterar la trayectoria orbital. Dichas alteraciones reciben el nombre de **perturbaciones**.

Existen modelos físicos orbitales cuyo propósito es el cálculo de la posición del satélite a lo largo de la órbita alrededor de la Tierra. Sin embargo, se presencian ciertas perturbaciones que afectan a la trayectoria satelital que no se ven reflejadas en estos modelos físicos. Por tanto, el cálculo de la posición no es del todo certera. El presente proyecto presenta un modelo de estimación de la posición del satélite que tiene en cuenta la presencia de las alteraciones en la trayectoria. A continuación, se presentan algunas de las perturbaciones que afectan a la trayectoria orbital. Además, se realiza un análisis de los métodos de estimación más utilizados como: mínimos cuadrados, filtro de Kalman o procesos gaussianos.

3.1. Perturbaciones

Las perturbaciones son la alteración en el movimiento orbital de los astros o los satélites en su trayectoria orbital. Estas alteraciones son debidas al sistema no aislado en el que se encuentran las órbitas. Además, estas fuerzas que afectan a las posiciones orbitales no permanecen constantes a lo largo del tiempo. Este trabajo se centra en tres fuentes de perturbaciones diferentes como son: la debida al achatamiento terrestre, al rozamiento atmosférico y a la presión de la radiación solar. Aunque no se ha explicado en esta sección, se debe remarcar la fuerte influencia de la gravedad de los astros cercanos como fuente de perturbación en la trayectoria satelital [25] [26].

3.1.1. Achatamiento terrestre

La segunda hipótesis del modelo de los dos cuerpos considera el centro de masas de cada cuerpo localizado en el centro geométrico de cada uno. Esto sería posible si los cuerpos fueran esféricos, dado que el centro de masas del cuerpo coincide con el centro geométrico de la esfera. Sin embargo, la Tierra no es una esfera perfecta debido al ensanchamiento en el línea del Ecuador producido por la fuerza centrípeta y, por consecuencia, el achatamiento en los polos, ver Figura 3.1. El segundo cuerpo presente en el problema, es el satélite que orbita la Tierra, el cual tampoco presenta una esfericidad perfecta, en la mayoría de los casos.

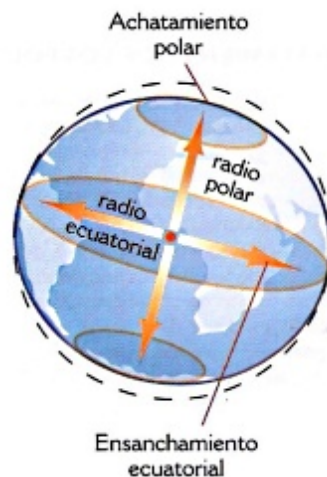


Figura 3.1: Representación del achatamiento de los polos. [27]

La alteración en la simetría esférica de la Tierra produce una perturbación en la fuerza gravitatoria. En consecuencia, los satélites que orbitan alrededor de la Tierra no se ven atraídos

hacia el centro geométrico de la misma. Por tanto, la intensidad gravitatoria no solo depende del radio de nuestro planeta, sino que también es función de la latitud de la proyección del satélite sobre la superficie terrestre.

La **perturbación gravitatoria**, nombre que recibe esta alteración en la órbita, se produce por la diferencia que existe entre la distancia angular desde el ecuador y la distancia angular desde los polos, debida al achatamiento de la Tierra.

En el cálculo de los ángulos de las matrices de rotación, en las ecuaciones (2.16a) y (2.17a), ya se contempla la perturbación gravitatoria.

3.1.2. Rozamiento atmosférico

La atmósfera es la capa gaseosa que envuelve la Tierra y se mantiene alrededor del planeta gracias a la fuerza de gravedad del mismo. La densidad y la temperatura sufren variaciones según la capa de la atmósfera en la que se hagan las mediciones. Por un lado, la temperatura en la atmósfera tiende a disminuir con el aumento de la altitud. Sin embargo, en algunas capas superiores, como en la termosfera, se produce un aumento de la temperatura debido a la absorción de los rayos *gamma* y los rayos X, provenientes del Sol. La densidad, por otro lado, disminuye de manera exponencial con el aumento de altura respecto el nivel del mar. En la Figura 3.2 se representa el cambio de densidad respecto la altura.

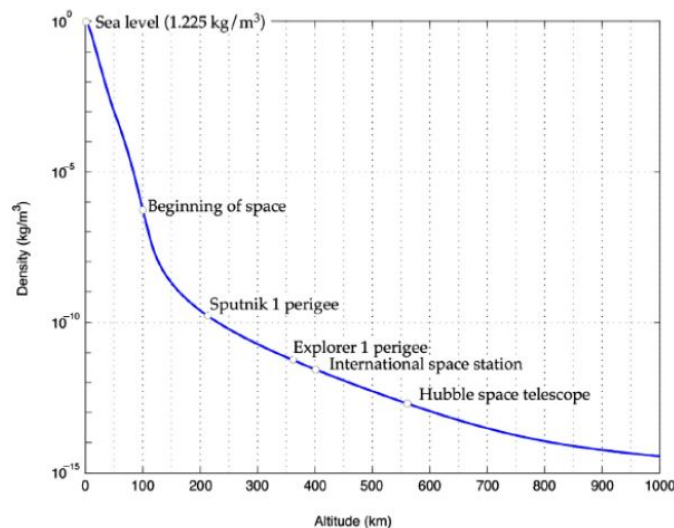


Figura 3.2: Cambio de densidad en la atmósfera respecto la altura sobre el nivel del mar.

Por tanto, el **rozamiento atmosférico** se define como la fuerza de sentido contrario al vector velocidad relativa del satélite que orbita la Tierra, ver Figura 3.3. El rozamiento produce una disminución de velocidad del satélite y, por tanto, una disminución de su altura, además de disminuir el semieje mayor de su órbita elíptica. Los satélites meteorológicos, como NOAA, están situados en órbitas LEO y, por tanto, implica un mayor rozamiento atmosférico. Por ese motivo, los satélites de baja altura deben gastar más combustible para mantenerse en órbita que otros satélites en órbitas más alejadas de la superficie terrestre.

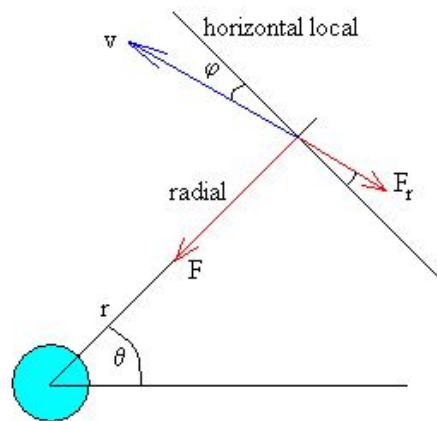


Figura 3.3: Representación de la fuerza de rozamiento, F_r [28].

3.1.3. Presión de la radiación solar

El sol es la estrella central del Sistema Solar. Esta estrella irradia energía mediante ondas electromagnéticas, que se propagan en todas las direcciones del espacio. La energía electromagnética está compuesta por partículas llamadas fotones, los cuales no tienen masa y se mueven por el vacío a la velocidad de la luz ($c = 3 \cdot 10^8 [m/s]$).

Las ondas electromagnéticas que atraviesan la superficie del satélite ejercen una presión en éste, produciendo un desplazamiento en su trayectoria alrededor de la Tierra. Este desplazamiento produce pérdidas en la altura del perigeo y cambios en la excentricidad de la órbita satelital. Este efecto es significativo para alturas superiores a los 800 kilómetros respecto a la superficie terrestre, por tanto, esta perturbación no es la más significativa en las trayectorias de los satélites NOAA, sin embargo, puede producir pequeñas alteraciones.

Con el fin de explicar la magnitud de la fuerza producida por la radiación solar, dicho empuje es el principio físico en el que se basa la propulsión de las velas solares. Las velas de

fotones son grandes superficies compuestas por láminas reflectantes ligeras, que captan las ondas electromagnéticas irradiadas por el Sol, generando el empuje suficiente para impulsar sondas o naves espaciales. En la Figura 3.4 se ilustra un ejemplo de una vela solar.

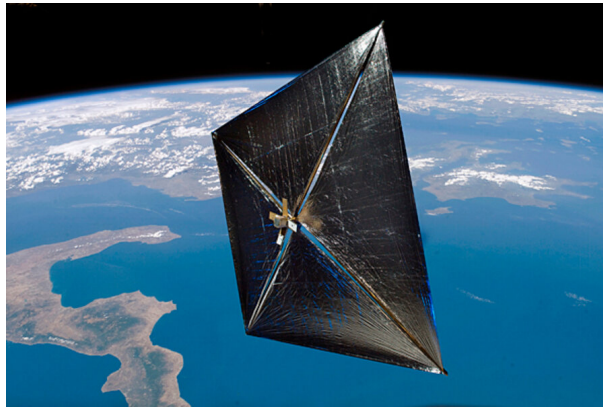


Figura 3.4: Ejemplo de una vela solar. [29]

3.1.4. Modelos de perturbaciones simplificados

National Aeronautics and Space Administration (NASA) y NORAD establecieron los modelos de perturbaciones simplificados. Estos modelos son utilizados en el cálculo de vectores de estado orbital (posición y velocidad) de los satélites, según el estado de coordenadas inerciales de la Tierra (ECI). Estos modelos son de gran ayuda en el estudio de las posiciones orbitales de los satélites que orbitan alrededor de la Tierra, debido a que predicen los efectos causados por las perturbaciones causadas por el achatamiento de la Tierra, el rozamiento atmosférico, la presión de la radiación solar o la fuerza de gravitación de cuerpos celestes cercanos.

Los Modelos de Perturbaciones Generales Simplificadas (SGP) se aplican a los objetos con un periodo orbital menor que 225 minutos y, por tanto, cercanos a la Tierra, como el satélite NOAA-17. Por otro lado, los Modelos Simplificados de Perturbaciones del Espacio Profundo (SDP) se ponen en práctica para objetos orbitales con un periodo superior a 225 minutos. Los cinco modelos utilizados son: SGP, SGP4, SDP4, SGP8 y SDP8.

El SGP4, creado en 1998, es el más utilizado debido a su rapidez y sencillez en los cálculos y, por ello, es frecuente nombrar al conjunto de modelos de perturbaciones simplificados con su nombre.

En este trabajo se han considerado los datos en formato TLE como base del cálculo de

la posición real del satélite NOAA-17 (Sección 2.3), sin embargo, estos datos se obtienen a partir de los modelos de perturbaciones simplificados. Por tanto, aunque los consideramos como posiciones reales, estos datos no han sido obtenidos mediante la observación de la trayectoria satelital, sino que son el resultado de los modelos de perturbaciones orbitales [30]. Debido a la complejidad de estos modelos orbitales, el presente trabajo plantea un modelo de estimación de la trayectoria satelital basado en los procesos de regresión Gaussiana.

3.2. Métodos de estimación

Los métodos de estimación son una herramienta muy importante en los proyectos dado que ofrecen información que no puede ser obtenida a partir de la observación. En este proyecto se pretende conocer la posición del satélite en instantes temporales en los cuales se desconoce su trayectoria. Por tanto, estimar la posición a partir de los datos orbitales amplía el conocimiento sobre su trayectoria y comportamiento orbital. Inicialmente, los datos de entrada a la estimación son los errores de posición del satélite, que han sido obtenidos de datos en formato TLE, y el tiempo en el que se han tomado. Finalmente, el método de estimación ofrece como salida las posiciones futuras del satélite NOAA-17.

Por otro lado, estos modelos también tienen como finalidad evitar la compleja y lenta resolución completa del problema cuando se presentan nuevos datos. Con el objetivo de estimar los parámetros de funciones, para una mejor aproximación a los resultados esperados, surgen diferentes métodos de estimación como el *Método de Mínimos Cuadrados*, el *Filtro del Kalman* o los *Procesos Gaussianos*.

3.2.1. Mínimos Cuadrados

En 1801, el astrónomo italiano Giuseppe Piazzi descubrió Ceres, un nuevo planeta del Sistema Solar cuya órbita se situaba entre Marte y Júpiter. En esta época, no se recogieron los datos suficientes para hacer el seguimiento de la trayectoria del planeta alrededor del Sol. Sin embargo, fue mediante el método de Mínimos Cuadrados de Carl Friedrich Gauss, por el cual se predijo la futura ubicación del asteroide recién descubierto.

El propósito del método de mínimos cuadrados es aproximar los parámetros de una función para adaptarse a los datos de la muestra [31]. El conjunto de datos de entrada al modelo, que

reciben el nombre de muestra, son **n** pares de puntos $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$, donde x_i es una variable independiente e y_i es una variable dependiente y observable.

La base del modelo es la minimización de la suma de los residuos al cuadrado, S , siendo los residuos la diferencia entre el parámetro observado, y_i , y el resultado de la estimación, $f(x_i, \alpha)$, la cual depende de la variable de entrada y de un vector de parámetros α , que caracterizan la función. En la ecuación (3.1) se representa el cálculo de los residuos.

$$S = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, \alpha)]^2 \quad (3.1)$$

Los modelos resueltos por este método de estimación se dividen en dos categorías: no lineales y lineales. En el conjunto de modelos lineales se obtiene una solución de forma cerrada. En cambio, los problemas no lineales alcanzan una solución no cerrada y deben resolverse por el método de iteración. El método de regresión lineal es un tipo específico del modelo de mínimos cuadrados, en el que se aproxima una relación lineal entre las variables dependiente e independiente. La función lineal está formada por la pendiente α_1 y la ordenada al origen α_2 .

$$f(x_i, \alpha) = \hat{y}_i = \alpha_1 \cdot x_i + \alpha_2 \quad (3.2)$$

En la Figura 3.5 se puede observar un modelo lineal del método de mínimos cuadrados. En el eje de abscisas se observa la variable de entrada independiente, x_i , mientras que, en el eje de coordenadas se muestra la variable de entrada dependiente, y_i . El método de estimación realiza mediante los puntos de color negro, que forman la imagen, una función lineal que caracteriza las entradas al modelo. Finalmente, el método de mínimos cuadrados ofrece a su salida la estimación del valor de la variable dependiente, $\hat{y}_i = f(x_i, \alpha)$

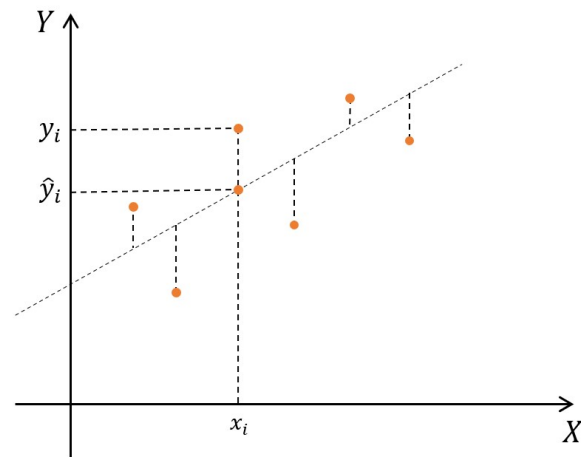


Figura 3.5: Ejemplo del método de Mínimos Cuadrados, modelo lineal. [32]

3.2.2. Filtro Kalman

El filtro de Kalman es un método de estimación desarrollado por Rudolf E. Kalman, en 1960. Este algoritmo permite estimar las variables no observables de un sistema dinámico lineal, a partir de un conjunto observable sometido a errores de medición o ruido blanco.

Las variables que constituyen el modelo son las **variables de estado** y las **variables observables**. Las primeras son las variables base de la estimación y las segundas son las obtenidas mediante la observación de cada muestra. El filtro de Kalman es un método recursivo, en consecuencia, la estimación de las variables de estado se obtiene del estado anterior del sistema y de las nuevas observaciones obtenidas a través de sensores [33].

Por tanto, este modelo se basa en dos fases:

1. Predicción: conociendo el estado del sistema en un instante anterior y la evolución de las ecuaciones que rigen el sistema, se estima el estado actual.
2. Corrección o actualización: las variables observables nos proporcionan información del sistema y permiten rectificar la predicción del estado actual.

La Figura 3.6 describe detalladamente la estructura del filtro de Kalman. La fase de inicialización del problema proporciona el valor inicial del estado (\hat{x}_0) y la incertidumbre inicial del sistema (p_0). La inicialización solo se produce una vez al comienzo del proceso.

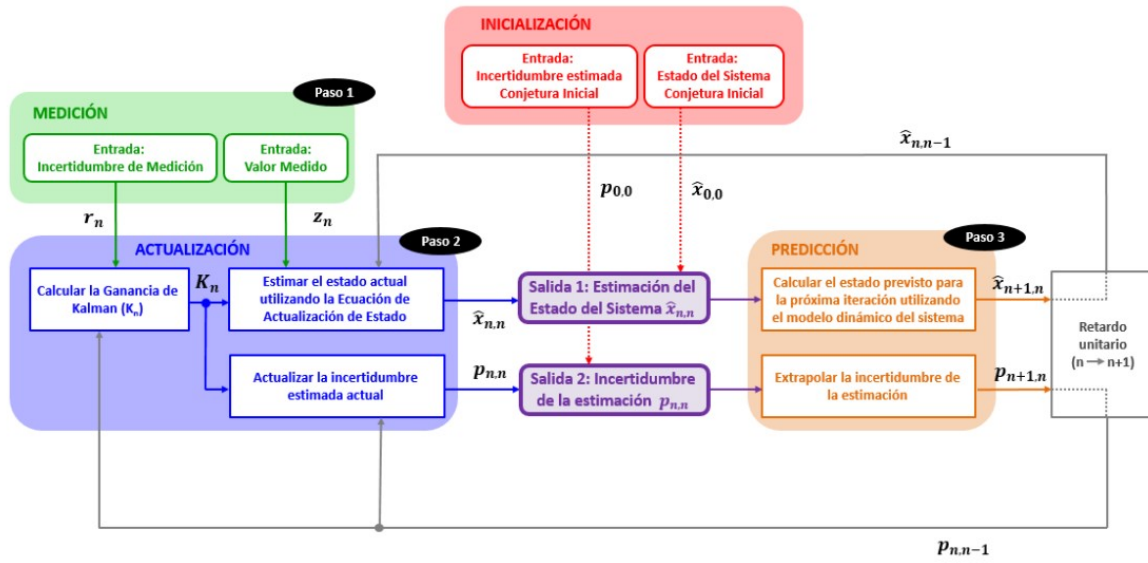


Figura 3.6: Esquema del filtro de Kalman. [34]

El primer paso del problema es la medición de las variables observables (z_n), en consecuencia, se obtiene un error de medición debido a los sensores utilizados. Este error también se denominada incertidumbre de medición, r_n .

La actualización o corrección es la fase donde se estima el estado actual del sistema. Las entradas son las variables observables, obtenidas en la fase de medición, la estimación del estado anterior del sistema ($\hat{x}_{n,n-1}$) y la incertidumbre de la estimación ($p_{n,n-1}$). La salida de esta fase es, por tanto, la estimación del estado y la incertidumbre de la estimación actual del sistema:

$$K_n = \frac{p_{n,n-1}}{p_{n,n-1} + r_n} \quad (3.3)$$

$$\hat{x}_{n,n} = \hat{x}_{n,n-1} + K_n(z_n - \hat{x}_{n,n-1}) \quad (3.4)$$

$$p_{n,n} = (1 - K_n)p_{n,n-1} \quad (3.5)$$

Donde K_n es la ganancia de Kalman.

La última fase del proceso es la denominada predicción. En este paso se extrapola el estado actual del sistema y la incertidumbre al siguiente estado del sistema. En la primera iteración del proceso, la inicialización proporciona las entradas a la fase de predicción ($\hat{x}_{0,0}$ y $p_{0,0}$). Las ecuaciones de extrapolación dependen del caso estudiado.

3.2.3. Regresión con Procesos Gaussianos

El modelo GPR es un método de estimación bayesiano y no-paramétrico basado en los Proceso Gaussiano (PG). En primer lugar, un modelo bayesiano hace referencia a un método cuya función de la distribución de probabilidad de los datos se ha estimado a partir del Teorema de Bayes.

Por otro lado, los métodos de estimación se clasifican según el número de parámetros necesarios para su caracterización: los métodos *paramétricos* necesitan una cantidad de parámetros constante y su estructura está definida con anterioridad; los métodos *no-paramétricos*, sin embargo, hacen referencia a problemas de estimación en los que la estructura y los parámetros son una característica de los datos.

La regresión por Procesos Gaussianos es un método no-paramétrico en el que se requiere una gran cantidad de datos de entrada. Esto se debe a que no presuponen la distribución de la muestra de entrada al modelo. No obstante, son esenciales ciertas hipótesis, tales que la distribución de todas las muestras es la misma y las observaciones son independientes. Ser un método no-paramétrico proporciona la ventaja del cálculo de diferentes funciones de distribución que se ajusten a los datos y la obtención de los intervalos de incertidumbre de las mismas.

El término PG fue definido por C. E. Rasmussen como una colección de variables aleatorias, que cumplen que cualquier subconjunto finito de la colección tiene una distribución Gaussiana [35].

La variable continua y aleatoria X sigue una distribución Gaussiana o Normal cuando su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty \quad (3.6)$$

El parámetro μ es conocido como media o esperanza de una variable aleatoria y define la tendencia central de una colección de valores. Sin embargo, la media proporciona un conocimiento limitado de la variable aleatoria, debido a que $\mu(X) = 0$ no implica un valor constante de $X = 0$, puesto que es posible que la variable aleatoria tome valores negativos y positivos. Por tanto, es necesario un conocimiento no solo de la esperanza, sino de igual manera, de la desviación respecto de la media. Esta variación recibe el nombre de varianza de una variable aleatoria y se representa como σ^2 , donde σ es la desviación típica de la variable aleatoria normal.

La representación de la distribución Gaussiana de la variable X se muestra en la ecuación (3.7).

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \quad (3.7)$$

La *distribución Gaussiana* recibe su nombre del matemático y astrónomo Carl Friedrich Gauss y también recibe el nombre de *distribución Normal*, debido a su empleo frecuente en los problemas de gran aleatoriedad, como por ejemplo en problemas astronómicos. Sin embargo, fue Abraham de Moivre quién presentó esta distribución por primera vez. Multitud de fenómenos naturales tienden a una distribución Gaussiana puesto que las pequeñas variaciones que afectan a estos fenómenos (como el error de observación) siguen una distribución normal.

En la Figura 3.7 se observa la gráfica de la función de densidad de la distribución Normal. Debido a la forma gráfica de esta distribución, recibe el nombre de *campana de Gauss*. El máximo y, al mismo tiempo, el eje de simetría de la distribución normal, se sitúa en el valor de la media, μ . La extensión longitudinal de la campana aumenta con el incremento de la desviación normal, σ .

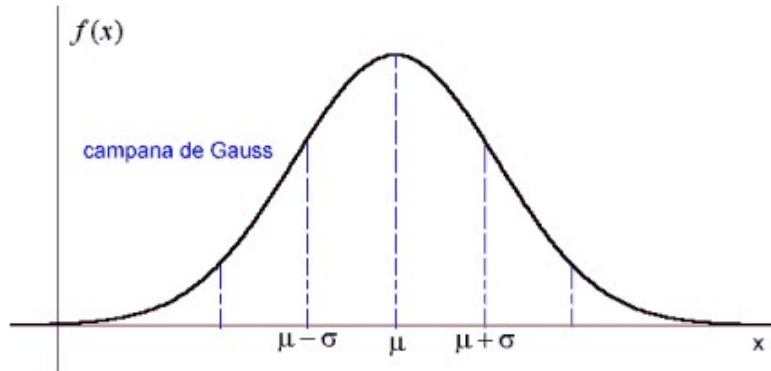


Figura 3.7: Función de densidad de la distribución normal. [36]

La caracterización de una **distribución Gaussiana multivariable** es la distribución Normal de un conjunto de variables continuas. Por tanto, la función de densidad de probabilidad (*pdf*) de una variable aleatoria Gaussiana está definida por las funciones media y varianza individuales y las covarianzas de cada par de muestras.

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \quad (3.8a)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,m} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \cdots & \sigma_{n,m} \end{bmatrix} \quad (3.8b)$$

Nótese que la matriz de covarianza (3.8b) es una matriz cuadrada, dado que el número de columnas m y el número de filas n es el mismo y ambas denotan la dimensión del vector X . La distribución de la variable X se representa en la ecuación (3.9).

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma) \quad (3.9)$$

Finalmente, la función de densidad de la distribución Gaussiana multivariable se define en la ecuación (3.10).

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}, \quad (3.10)$$

En esta sección se ha realizado una breve introducción a los PG con el fin de realizar un análisis en detalle del modelo de Regresión con Procesos Gaussianos en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Regresión con Procesos Gaussianos

En la Sección 3.2 se ha introducido la importancia de los métodos de estimación en el desarrollo de los proyectos científicos. Además, se han analizado diversos modelos para desarrollar la estimación de los datos como el método de mínimos cuadrados o el filtro de Kalman. Sin embargo, este proyecto se centra en la estimación de la posición satelital mediante el modelo GPR. Se ha elegido este método de estimación, dado que mediante la aproximación *Bayesiana* se infiere la función de distribución de probabilidad de los datos, permitiendo el cálculo de los intervalos de incertidumbre de las diferentes funciones, que son capaces de caracterizar los datos.

A continuación, en este capítulo se presenta el análisis detallado del modelo de estimación GPR, para comprender el método de estimación y sus ventajas. Por otro lado, se procede a realizar un estudio sobre las diferentes funciones de covarianza utilizadas en este proyecto. Además, se describen los métodos de optimización de los hiperparámetros que caracterizan las funciones kernel.

4.1. Introducción a los Procesos Gaussianos (PG)

Por un lado, la base de los Procesos Gaussianos es la distribución de probabilidad Gaussiana de sus variables. Esta distribución permite conocer la probabilidad de que ocurra un determinado suceso. En la Sección 3.2.3 se ha descrito la ecuación de distribución Normal, ver ecuación (3.7), y los parámetros que la definen: media y desviación típica. Por tanto, esta distribución hace referencia a variables aleatorias, que se definen como escalares (o vectores, en las distribuciones multivariantes).

Por otro lado, un proceso Gaussiano estudia colecciones infinitas de variables (funciones), en las que cualquier subconjunto de variables siguen una distribución Gaussiana multivariable [37]. Esta colección de variables es conocida como **datos de entrenamiento**, o *training* por su traducción al inglés, y está formada por parejas de valores: entrada y salida. Reciben este nombre debido a que su función es *entrenar* al modelo y ser capaz de determinar la estimación de la salida correspondiente a entradas distintas a las definidas en los datos de entrenamiento.

En este proyecto, la entrada es un vector formado por los diferentes instantes temporales del modelo, que abarca instantes entre el año 2002 y el año 2004; la salida, es el vector de la desviación de la posición satelital, establecido para cada instante temporal de entrada ($y = f(t)$). En este capítulo, las entradas del modelo se representan mediante la variable ($x \in X$).

$$\mathcal{D} = \{(x_i, f_i)_{i=1, \dots, n}\} = (X, f) \quad (4.1)$$

El PG se caracteriza por la **función media**, $\mu(x_i)$, y la **función de covarianza** formada por la función kernel, $k(x_i, x_j)$ con $x_i, x_j \in X$. Ambas funciones se definen para todos los instantes temporales del vector de entrada del sistema.

$$\begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \mu(x_1) \\ \vdots \\ \mu(x_n) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k(x_1, x_1) & \cdots & k(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(x_n, x_n) & \cdots & k(x_n, x_n) \end{bmatrix} \right) \quad (4.2a)$$

$$f(\cdot) \sim \mathcal{GP}(\mu(\cdot), k(\cdot, \cdot)) \quad (4.2b)$$

4.1.1. Función media

La función media o esperanza de una variable x , formaliza la idea de valor medio del fenómeno aleatorio que representa dicha variable, ver ecuación (4.3). La función media puede ser definida por cualquier función real, sin embargo, en el presente trabajo se ha procedido a una simplificación habitual en los PG, proporcionando un valor igual a cero al vector media.

$$\mu(x) = \mathbb{E}[f(x)] = 0 \quad (4.3)$$

4.1.2. Función de covarianza

La función de covarianza, también denominada kernel, es la función más relevante de los procesos Gaussianos. No obstante, a diferencia de la función media, la función kernel debe cumplir con ciertas características esenciales: debe ser simétrica y semi-definida positiva.

Dada una matriz K construida a partir de cualquier conjunto de valores $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ de tal manera que el elemento $i - j$ de K es $K(i, j) = k(x_i, x_j)$, se dice que la función kernel es simétrica si la traspuesta de K es igual a la matriz original.

$$K = K^T \quad (4.4)$$

$$k(x_i, x_j) = k(x_j, x_i), \quad x_i, x_j \in X \quad (4.5)$$

Y, por otro lado, se dice que es semi-definida positiva si los autovalores de la matriz K son mayores o iguales que 0.

Como resultado, la función de covarianza se define:

$$k(x_i, x_j) = \mathbb{E}[(f(x_i) - \mu(x_i))(f(x_j) - \mu(x_j))], \quad x_i, x_j \in X \quad (4.6)$$

Por último, se ha realizado la simplificación de la función media, analizada en la Sección 4.1.1, y se obtiene como resultado la función kernel simplificada.

$$\mu(x_i) = \mu(x_j) = 0 \quad \rightarrow \quad k(x_i, x_j) = \mathbb{E}[f(x_i) \cdot f(x_j)] \quad (4.7)$$

4.2. Análisis del modelo: Regresión por Procesos Gaussianos

El objetivo del modelo GPR es inferir una función, a partir de una muestra de datos de entrenamiento \mathcal{D} , que sea capaz de estimar el valor de la salida y_* , asociado a una nueva entrada x_* , la cual no pertenece al conjunto de datos de entrenamiento.

Los datos del conjunto de entrenamiento están formados por pares entrada-salida, $\mathcal{D} = \{(x_i, f_i)_{i=1, \dots, n}\} = (X, f)$, que son la base de la estimación del modelo. A partir del conjunto de entrenamiento y de una nueva entrada, el modelo obtiene el resultado de la salida estimada. Habitualmente, las salidas que forman el conjunto de entrenamiento han sido tomadas a partir de sensores, los cuales introducen un error en las mediciones. Por tanto, este error de observación se debe tener en cuenta en la estimación realizada por el modelo. Por consiguiente, la función de

salida se representa como $f(x)$ más un ruido Gaussiano, aditivo e independiente.

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2) \quad (4.8)$$

donde σ_n^2 es la varianza del ruido de media 0.

Es decir, las salidas del conjunto de datos de entrenamiento se representan como:

$$y = f(x) + \varepsilon \quad (4.9)$$

4.2.1. Método Bayesiano

Los PG infieren la distribución de probabilidad de los datos de entrenamiento a partir de la aproximación *Bayesiana*. Esta es una gran ventaja, dado que permite la estimación de diferentes conjuntos de entrenamiento que no se definen mediante la misma función de probabilidad. La aproximación *Bayesiana*, o probabilidad *Bayesiana*, permite obtener la probabilidad a priori de un suceso a partir de unas hipótesis.

El *Teorema de Bayes* [38] es un procedimiento que define la probabilidad condicional entre dos sucesos (A_i y B), formulado por el matemático inglés Thomas Bayes en 1763.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \quad (4.10)$$

En la ecuación (4.10) intervienen diferentes probabilidades:

- $P(A_i)$ y $P(B)$: son las **probabilidades a priori**, las cuales expresan la probabilidad de los eventos A_i y B , respectivamente, antes de que se realice el experimento.
- $P(B|A_i)$: define la probabilidad del evento B , conociendo la información del suceso A_i . Recibe el nombre de **probabilidad a posteriori** de B , debido a que es necesario un conocimiento inicial del suceso A_i .
- $P(A_i|B)$: es el resultado del teorema y la **probabilidad a posteriori** del evento A_i .

La regresión de los procesos Gaussianos se puede definir como un método bayesiano en el que se establece un prior sobre posibles funciones. Las salidas obtenidas del modelo, son estas funciones cuyos valores siguen una distribución gaussiana de media cero y matriz de covarianza K .

$$p(f|x) \sim \mathcal{N}(0, K) \quad (4.11)$$

El vector $f = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)]^T$ se corresponde con los valores obtenidos a la salida observable del modelo, cuyas entradas son las variables aleatorias del vector x . La Figura inferior 4.1, corresponde a un ejemplo de seis muestras de la distribución normal a priori, identificadas por líneas de diferentes colores. La región sombreada en la gráfica corresponde al valor de dos desviaciones estándar.

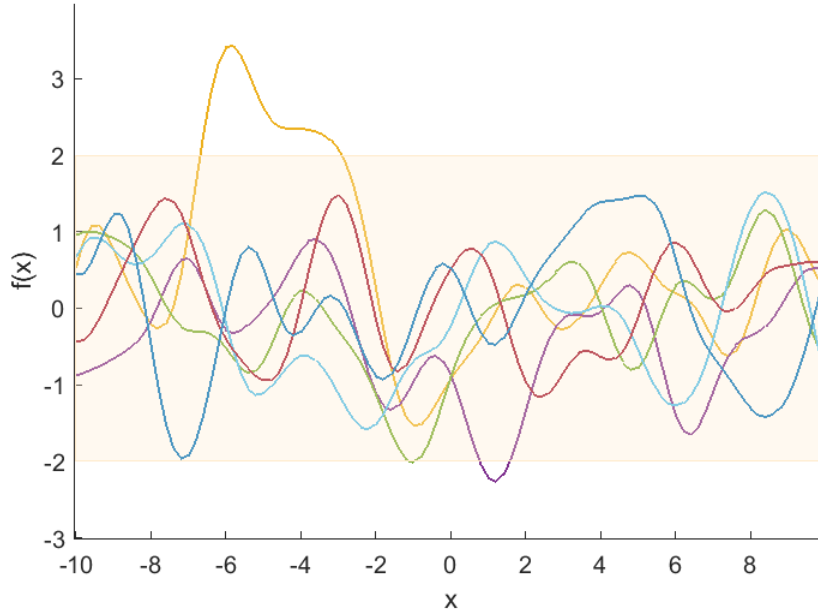


Figura 4.1: Ejemplo de muestras PG del prior.

4.2.2. Predicción

La predicción es el propósito fundamental en el método de regresión por PG. En base a los datos de entrenamiento $\mathcal{D} = \{X, f\}$ del modelo y los datos de test, que son las nuevas variables aleatorias de entrada X_* , se trata de obtener información sobre una función latente que sea capaz de predecir los valores de salida, f_* , correspondientes a las nuevas entradas test.

El Teorema de Bayes 4.2.1 es empleado en la predicción para obtener la distribución conjunta de las salidas de entrenamiento, f , y las salidas a predecir, f_* . La distribución conjunta está formada por un vector de medias, asumido su valor igual a cero en este proyecto, y una matriz de covarianza.

Si se asume que el ruido Gaussiano no afecta a las muestras, se obtiene que la distribución

conjunta de las salidas de entrenamiento y las salidas de test es:

$$\begin{bmatrix} f \\ f_* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(0, \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XX_*} \\ K_{X_*X} & K_{X_*X_*} \end{bmatrix} \right) \quad (4.12)$$

Las submatrices K_{XX} , K_{XX_*} , K_{X_*X} y $K_{X_*X_*}$ de la matriz de covarianza, son las matrices de covarianza evaluadas en todos los pares de puntos determinados por los vectores correspondientes.

$$K_{XX} = k(X, X) \quad (4.13a)$$

$$K_{XX_*} = K_{X_*X}^T = k(X, X_*) \quad (4.13b)$$

$$K_{X_*X_*} = k(X_*, X_*) \quad (4.13c)$$

En la obtención de la función latente f es necesario extraer la distribución de las salidas test a partir de la distribución conjunta de las salidas (ecuación 4.12). Este problema es resuelto mediante el siguiente teorema:

Teorema 1 *Dados dos vectores f y f_* aleatorios, cuya distribución conjunta Gaussiana es*

$$\begin{bmatrix} f \\ f_* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \mu_f \\ \mu_{f_*} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{X_*X} \\ K_{X_*X} & K_{X_*X_*} \end{bmatrix} \right), \quad (4.14)$$

donde μ es la media de cada vector y la matriz de covarianza está compuesta por las funciones kernel, que relacionan ambos vectores. Se considera la distribución marginal del vector f_* como

$$f_* \sim \mathcal{N}(\mu_{f_*}, \Sigma_{f_*}) \quad (4.15)$$

donde,

$$\mu_{f_*} = \mu_{X_*} + K_{X_*X} K_{XX}^{-1} (f - \mu_X) \quad (4.16a)$$

$$\Sigma_{f_*} = K_{X_*X_*} - K_{X_*X} K_{XX}^{-1} K_{XX_*} \quad (4.16b)$$

Si se asume media cero en ambos vectores y se simplifica la distribución marginal del vector f_* , la nueva media del vector salida se define como:

$$\mu_{f_*} = K_{X_*X} K_{XX}^{-1} f \quad (4.17)$$

En este apartado se ha obtenido la distribución de los valores de salida test a partir de las salidas de entrenamiento sin ruido. Sin embargo, las observaciones en la realidad, generalmente, presentan un ruido Gaussiano independiente (ecuación 4.9). Por tanto, la distribución de la salida de entrenamiento mantiene su media, sin embargo, se añade a su función de covarianza el término del ruido independiente.

$$y \sim \mathcal{N}(\mu(y), k(x, x') + \sigma_n^2 \delta_{x, x'}) \quad (4.18)$$

donde σ_n^2 representa la varianza del ruido y $\delta_{x, x'}$ es la función delta de *Kronecker*, la cual toma el valor de uno cuando $x = x'$ y cero en caso contrario. La distribución conjunta de las salidas de entrenamiento (con ruido Gaussiano) y las salidas de test es ahora:

$$\begin{bmatrix} y \\ f_* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(0, \begin{bmatrix} K_X & K_{XX_*} \\ K_{X_*X} & K_{X_*X_*} \end{bmatrix} \right) \quad (4.19)$$

Siendo,

$$K_{XX} = k(x, x') + \sigma_n^2 I, \quad I: \text{matriz identidad} \quad (4.20)$$

Haciendo uso del Teorema 1 se obtiene la nueva distribución marginal de la salida test, cuyos parámetros de la ecuación (4.16) toman los siguientes valores:

$$f_* \sim \mathcal{N}(\mu_{f_*}, \Sigma_{f_*}) \quad (4.21a)$$

$$\mu_{f_*} = \mu_{X_*} + K_{X_*X} K_{XX}^{-1} (y - \mu_y) = K_{X_*X} K_{XX}^{-1} y \quad (4.21b)$$

$$\Sigma_{f_*} = K_{X_*X_*} - K_{X_*X} K_{XX}^{-1} K_{XX_*} \quad (4.21c)$$

4.3. Funciones kernel

“La covarianza es el valor que refleja en qué cuantía dos variables aleatorias varían de forma conjunta respecto a sus medias” [39]. En otras palabras, la covarianza proporciona información sobre la variación del valor de una variable al producirse una alteración en otra variable. En la siguiente ecuación, se define la función de covarianza de dos variables aleatorias $f(x)$ y $f(x')$, dependientes de las variables reales x y x' .

$$Cov[f(x), f(x')] = k(x, x') = \mathbb{E}[(f(x) - \mu(x))(f(x') - \mu(x')))] \quad (4.22)$$

En los procesos Gaussianos se observa una relación entre los pares de puntos de los datos de entrenamiento. Por ello, se puede asumir que puntos de entrada próximos, darán como resultado valores de salida cercanos entre sí. La información que relaciona conjuntamente los datos de entrenamiento es descrita por la función de covarianza o de las funciones kernel.

En el modelo GPR la función kernel es uno de los parámetros primordiales para el correcto funcionamiento del método y una estimación de la salida acertada. Por tanto, se debe escoger la función kernel que mejor caracterice los datos de entrenamiento del modelo. Por otro lado, las funciones kernel están compuestas por parámetros que ofrecen una mayor flexibilidad al modelo para la adaptación a los datos de entrada. Estos parámetros reciben el nombre de *hiperparámetros* y varían según los datos del modelo.

Las funciones kernel se dividen en dos grupos según su composición en funciones simples o mixtas. Las funciones simples hacen referencia a un conjunto de funciones integradas por un único tipo de kernel. Por otro lado, las funciones mixtas cuentan con dos o más tipos de kernel [40]. Todas las funciones, en ambos grupos, se expresan a continuación sin la presencia de ruido. Sin embargo, en la realidad las observaciones presentan ruido Gaussiano independiente, y se representa en las funciones con la adición del término

$$\sigma_n^2 \delta_{x,x'}, \quad (4.23)$$

cuyos parámetros ya han sido explicados en la ecuación (4.18).

4.3.1. Funciones kernel simples

Función cuadrática-exponencial, *SE*

La función kernel cuadrática-exponencial, *SE* en adelante, es una de las funciones más utilizadas en el modelo de regresión mediante procesos Gaussianos debido a su gran flexibilidad para caracterizar los datos de entrenamiento.

$$k_{SE}(x, x') = \sigma_f^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - x')^2}{l^2}\right) \quad (4.24)$$

Los hiperparámetros que caracterizan la función son la desviación típica del proceso Gaussiano, $\sigma_f \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y la longitud característica, $l \in \mathbb{R}_{>0}$. Este conjunto de parámetros se describe como:

$$\mathcal{H} = \{\sigma_f, l\} \quad (4.25)$$

Función lineal, *LIN*

La función kernel de tipo lineal, *LIN*, es de las más sencillas de todo el conjunto. Está caracterizada por el conjunto de hiperparámetros $\mathcal{H} = \{\sigma_f\}$.

$$k_{LIN}(x, x') = \sigma_f^2 \cdot [x \cdot x'] \quad (4.26)$$

Al igual que en el kernel *SE*, $\sigma_f \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es la desviación estándar.

Función periódica, *PER*

La función de covarianza periódica se caracteriza por ser una función cuyos valores se repiten cada periodo.

$$k_{PER}(x, x') = \sigma_f^2 \cdot \exp\left(-\frac{2}{l^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{p} \cdot (x - x')\right)\right) \quad (4.27)$$

Los parámetros que definen la función *PER* son la desviación estándar ($\sigma_f \in \mathbb{R}_{\geq 0}$), el periodo de la función representado por $p \in \mathbb{R}_{> 0}$ y la longitud característica $l \in \mathbb{R}_{> 0}$.

En la Figura 4.2 se muestran tres funciones a priori diferentes por cada tipo de kernel simple (*SE*, *LIN* y *PER*). Las tres funciones a priori representadas para cada tipo de kernel siguen la misma distribución, sin embargo, no son iguales. Esta característica se debe a la diferencia de parámetros de cada función, y es el motivo por el cual es necesaria una optimización de los hiperparámetros para adaptarse a los datos del modelo.

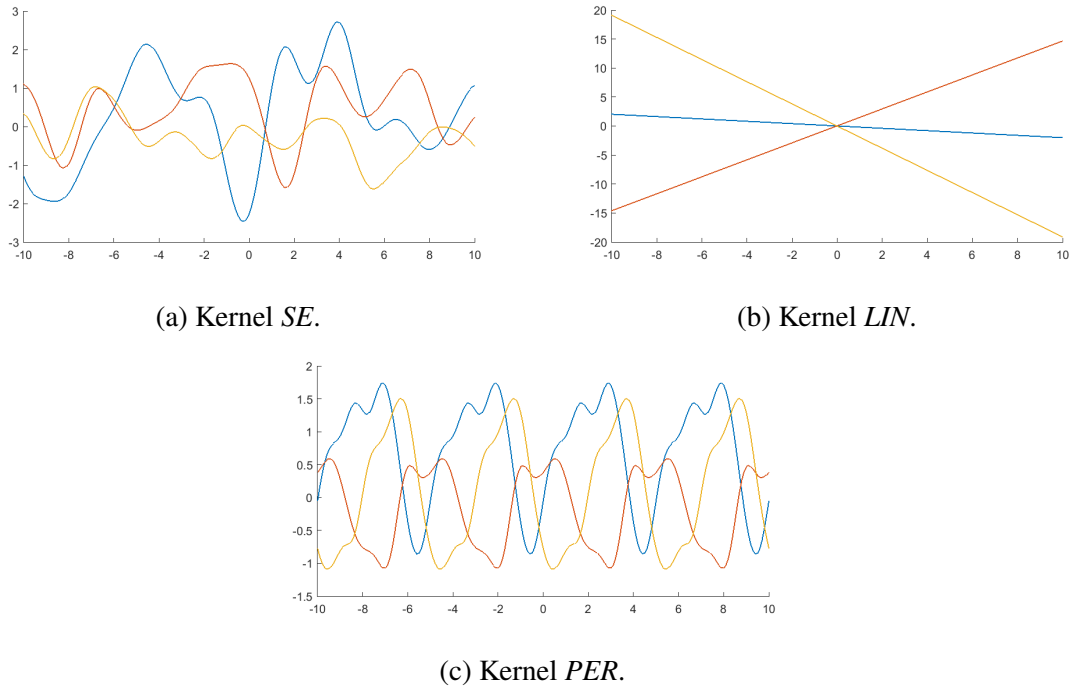


Figura 4.2: Ejemplos de funciones kernel simples a priori.

4.3.2. Funciones kernel mixtas

Los kernel mixtos son combinaciones de dos o más kernel simples, los cuales pueden o no ser del mismo tipo. La creación de estas nuevas funciones kernel se consigue a partir de realizar funciones de suma, producto o potencia de kernel simples. Las siguientes expresiones muestran tres maneras diferentes de generar estas funciones.

$$k_1(x, y) + k_2(x, y) \quad (4.28)$$

$$k_1(x, y) \cdot k_2(x, y) \quad (4.29)$$

$$k_1(x, y)^n \quad (4.30)$$

El primer método hace referencia a la creación de nuevos kernel mediante la adición de dos kernel simples; a través del segundo, se produce un nuevo tipo de kernel mediante la multiplicación de dos funciones kernel simples; siguiendo el tercer método, se crea un kernel mediante la elevación a la potencia n de un kernel simple. En este proyecto se han establecido tres combinaciones diferentes de funciones kernel, con la finalidad de encontrar una función que se adapte al máximo a las características del modelo.

Lineal x Cuadrático-exponencial, *MX1*

La combinación en el primer kernel mixto es la multiplicación entre un kernel lineal (4.26) y un kernel cuadrático-exponencial (4.24). El kernel *MX1* se ha construido a partir de la segunda expresión. El parámetro σ^2 es la varianza de ambos kernel y l es la longitud característica del kernel cuadrático-exponencial.

$$k_{MX1}(x, x') = k_{LIN}(x, x') \cdot k_{SE}(x, x') \quad (4.31)$$

$$k_{MX1}(x, x') = \sigma_f^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - x')^2}{l^2}\right) \cdot [x \cdot x'] \quad (4.32)$$

Cuadrático-exponencial x Cuadrático-exponencial, *MX2*

Esta función está formada por la multiplicación de dos funciones kernel cuadrático-exponenciales (4.24), según la expresión.

$$k_{MX2}(x, x') = k_{SE}(x, x') \cdot k_{SE}(x, x') \quad (4.33)$$

$$k_{MX2}(x, x') = \sigma_f^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - x')^2}{l_1^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - x')^2}{l_2^2}\right) \quad (4.34)$$

Los hiperparámetros de *MX2* hacen referencia a los explicados en el kernel cuadrático exponencial simple (*SE*) en la Sección 4.3.1.

Cuadrático-exponencial x Polinómico, *LP*

Esta combinación de funciones kernel es habitual y recibe el nombre de kernel **local periódico**, *LP*. Está formada por la multiplicación de una función cuadrático-exponencial y una periódica creando una función donde los periodos varían en distancias más largas.

$$k_{LP}(x, x') = k_{SE}(x, x') \cdot k_{PER}(x, x') \quad (4.35)$$

$$k_{LP}(x, x') = \sigma_f^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - x')^2}{l_{se}^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{2}{l_p^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{p} \cdot (x - x')\right)\right) \quad (4.36)$$

En este caso, σ_f^2 hace referencia a la varianza de ambas funciones, los parámetros l_{se} y l_p son la longitud característica de la función cuadrática-exponencial y periódica, respectivamente y, por último, p hace referencia al periodo.

En la Figura 4.3 se observan tres funciones a priori por cada tipo de función kernel mixto explicado anteriormente.

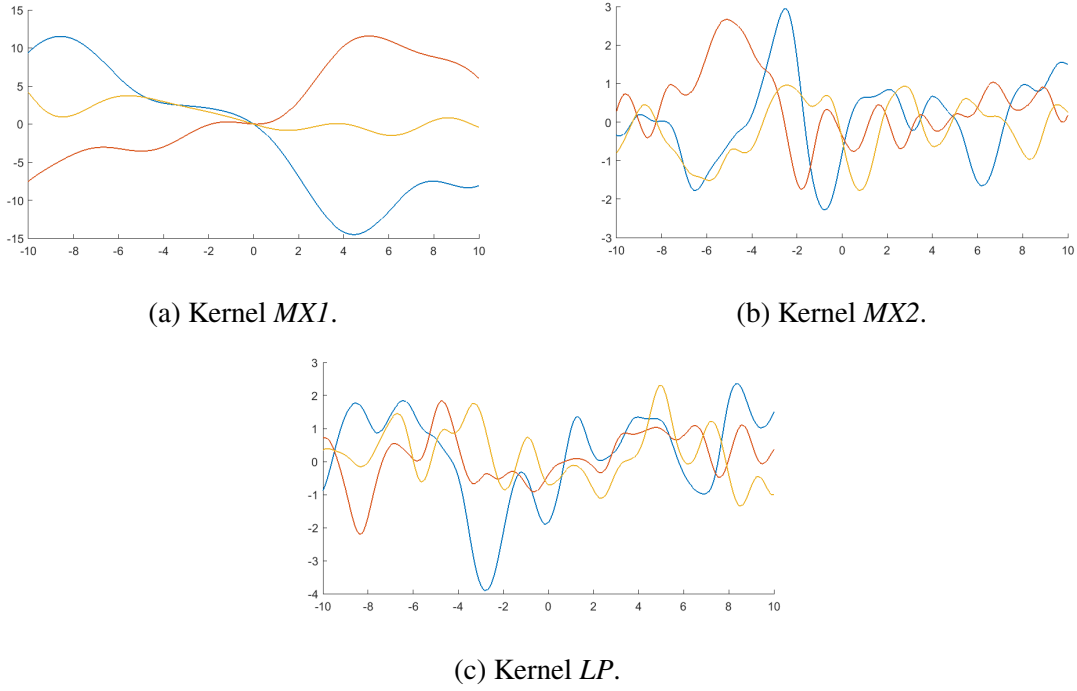


Figura 4.3: Ejemplos de funciones kernel mixtas a priori.

4.4. Optimización de hiperparámetros

El método de estimación GPR es un método no paramétrico que, como se ha explicado anteriormente, ofrece una gran ventaja al calcular la estimación del modelo con diferentes funciones de covarianza (Sección 4.3). Esta capacidad ofrece al modelo una mejor adaptación a los datos. Sin embargo, no solo es relevante la función kernel escogida en el modelo, sino que también cobran importancia los parámetros que definen dicha función.

Inicialmente no se dispone de información para establecer la magnitud de los hiperparámetros y, por tanto, es fundamental ajustar el valor de estos parámetros lo mejor posible para adaptar el modelo correctamente a los datos. En el presente proyecto, los hiperparámetros se representan con el vector \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \{\sigma_f, l, p, c, n\} \quad (4.37)$$

La optimización de los hiperparámetros de la función kernel seleccionada es un paso fundamental en el *entrenamiento* del modelo. Por tanto, en este proyecto se han estudiado y analizado los métodos de **máxima verosimilitud** y **búsqueda en rejilla** para la estimación de los hiper-

parámetros.

Con la finalidad de comprender cómo afectan los valores de los hiperparámetros en el modelo de estimación se presenta la Figura 4.4, donde se ha generado una función kernel cuadrática-exponencial (4.24) variando el valor de la longitud característica. En las dos ilustraciones pertenecientes a esta figura se mantiene constante el valor de la desviación típica de la función en 0.1568, mientras que el valor de la longitud característica toma los valores de 0.5 y 1. En ambas ilustraciones se señalan los datos de entrada al modelo mediante cruces de color rojo y, a su vez, mediante una línea de color negro se representa un ejemplo de función latente. Por último, el sombreado de color naranja hace referencia a la varianza que sufre el modelo. Se puede observar que el cambio del valor del hiperparámetro l produce una estimación de funciones diferentes. Por tanto, es tan necesario elegir correctamente la función de covarianza de nuestro modelo como una buena optimización de los hiperparámetros que caracterizan la función.

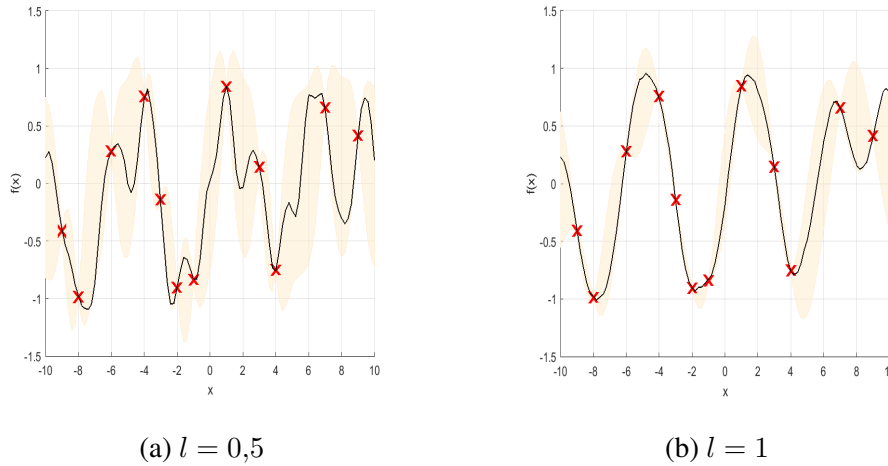


Figura 4.4: Ejemplo de la variación del hiperparámetro longitud característica, l , en una función kernel cuadrático-exponencial.

4.4.1. Método de máxima verosimilitud

El objetivo del método de máxima verosimilitud es la obtención del valor máximo de la verosimilitud marginal que también recibe el nombre de *evidencia* del proceso Gaussiano. La verosimilitud marginal viene representada en la ecuación (4.10) de la sección del Teorema de Bayes 4.2.1, como la probabilidad condicional de los sucesos A y B , $p(B|A)$. En este

apartado toma la forma $p(y|X, \mathcal{H})$, donde la variable y hace referencia al vector formado por las salidas correspondientes al vector de entrada X y, por otro lado, la variable \mathcal{H} que son los hiperparámetros a optimizar de la función de covarianza.

$$p(\mathcal{H}|X, y) = \frac{p(y|X, \mathcal{H})p(\mathcal{H})}{p(y|X)} \quad (4.38)$$

donde los elementos de la ecuación (4.38) hacen referencia a las siguientes probabilidades:

- $p(\mathcal{H}|X, y)$: probabilidad a posteriori de los hiperparámetros.
- $p(y|X, \mathcal{H})$: probabilidad marginal. La finalidad de este apartado es la maximización de dicha probabilidad.
- $p(\mathcal{H})$: probabilidad a priori de los hiperparámetros.
- $p(y|X)$: probabilidad condicionada de las salidas respecto las entradas.

El primer paso de este método es la obtención de la probabilidad marginal, para ello es necesario utilizar el Teorema de Bayes (Sección 4.2.1) y la propiedad de marginalización. Finalmente, se obtiene mediante la integral de la ecuación (4.39). En esta ocasión la variable $\theta_i \in \mathcal{H} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ hace referencia al hiperparámetro a optimizar perteneciente al vector \mathcal{H} de longitud n .

$$p(y|X, \theta_i) = \int p(y|f, X, \theta_i)p(f|X, \theta_i)df \quad (4.39)$$

El resultado de dicha integral es posible calcularlo analíticamente mediante la función logarítmica de la probabilidad marginal. Este resultado recibe el nombre de **logaritmo de verosimilitud marginal** y se define en la ecuación (4.40). Por otro lado, en esta ecuación se ha considerado la presencia de ruido Gaussiano de la función de covarianza (4.20).

$$\log p(y|X, \theta_i) = -\frac{1}{2}y^T K_{XX}^{-1}y - \frac{1}{2}\log|K_{XX}| - \frac{n}{2}\log(2\pi) \quad (4.40)$$

La ecuación logarítmica superior se compone por tres términos: $\frac{1}{2}y^T K_{XX}^{-1}y$, hace referencia a las salidas del modelo y , y, por tanto, es el utilizado para el ajuste de los datos; $\frac{1}{2}\log|K_{XX}|$, en este término solo está implicada la matriz de covarianza de las salidas de entrenamiento K_{XX} y es el valor de penalización por complejidad y, por último, el término $\frac{n}{2}\log(2\pi)$ es la constante de normalización. Una característica a destacar de los términos es su negatividad, esto implica que al aumentar la cantidad de datos del modelo el ajuste de datos disminuye monótonamente (primer

término), produciendo una pérdida de flexibilidad. Como se puede comprobar, el aumento de datos también produce un crecimiento del valor negativo de la penalización de complejidad. En otras palabras, el modelo es menos complejo a mayor cantidad de datos [35]. En el Capítulo 5 se analiza con más detalle la importancia del número de datos a la entrada del modelo.

Finalmente, la optimización de los hiperparámetros se obtiene mediante las derivadas parciales del logaritmo de verosimilitud marginal respecto a cada hiperparámetro de la función kernel del modelo. El valor máximo coincide en la ecuación de verosimilitud marginal y en su ecuación logarítmica. Por tanto, para una simplificación en el procedimiento y evitar la función exponencial del kernel cuadrático-exponencial sin afectar al valor máximo, se hallan las derivadas parciales respecto al logaritmo de verosimilitud marginal.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log p(y|X, \theta_i) = \frac{1}{2} y^T K_{XX}^{-1} \frac{\partial K_{XX}}{\partial \theta_i} K_{XX}^{-1} y - \frac{1}{2} \text{tr} \left(K_{XX}^{-1} \frac{\partial K_{XX}}{\partial \theta_i} \right) \quad (4.41)$$

Tras la simplificación de términos de la ecuación (4.41), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log p(y|X, \theta_i) = \frac{1}{2} \text{tr} \left((\alpha \alpha^T - K_{XX}^{-1}) \frac{\partial K_{XX}}{\partial \theta_i} \right), \quad \text{con} \quad \alpha = K_{XX}^{-1} y \quad (4.42)$$

La complejidad de este proceso reside en el cálculo de la inversa de la matriz K_{XX} , cuyo tamaño es $[n \times n]$, siendo n el número de muestras de entrada, y su coste computacional es $\mathcal{O}(n^3)$. Con el objetivo de disminuir dicho coste, se procede al uso del método de factorización de Cholesky.

Teorema 2 (Factorización de Cholesky) *Dada una matriz A , cuyo tamaño es $[n \times n]$, siendo $n \in \mathbb{R}$, simétrica y definida positiva, entonces existe al menos una matriz $[n \times n]$ triangular inferior B tal que $A = BB^*$. Además, se puede imponer que $b_{ii} < 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, y en tales circunstancias la factorización anterior es única. [41]*

Tras la obtención de la derivada del logaritmo (4.42), se procede a resolver el problema mediante el método de **gradiente ascendente** que consiste en actualizar el valor del hiperparámetro en cada iteración usando la derivada. Como se observa en la ecuación (4.43), el hiperparámetro es la suma del valor del parámetro en la anterior iteración y el valor de la derivada del logaritmo.

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{\eta}{2} \text{tr} \left((\alpha \alpha^T - K_{yy}^{-1}) \frac{\partial K_{yy}}{\partial \theta_i} \right) \quad (4.43)$$

El valor de η es el paso, o *step size* en inglés, del algoritmo. Este parámetro permanece constante en cada iteración y permite la búsqueda del hiperparámetro óptimo. Por lo tanto, a

menor valor del paso, más exhaustivo es el algoritmo. En el Algoritmo 1 se muestra la explicación del método del gradiente ascendente.

Algoritmo 1 Pseudocódigo del método ascendente

Require: $\theta_0, n, \eta, \nabla f(w)$

```

1: for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
2:    $\theta \leftarrow \theta + \eta \nabla f(w)$ 
3: end for
4: return  $\theta$ 

```

4.4.2. Búsqueda en rejilla

La búsqueda por rejilla, o por su traducción inglesa *grid search*, es un método de optimización a partir del cual se maximiza el valor de la función a partir de los valores pre-establecidos en el *grid*.

En este proyecto, la función que se desea maximizar es el logaritmo de verosimilitud marginal definida en la ecuación (4.40). En ella se encuentra la matriz de covarianza K_{XX} que depende de la función kernel y sus hiperparámetros.

Por otro lado, es necesario determinar el *grid* que, como su nombre indica, representa una rejilla formada por un conjunto de valores que son el resultado de la función kernel para cada grupo de hiperparámetros pre-establecidos.

Después de haber formado el *grid* del problema se procede a la sustitución de cada valor en la función logarítmica de verosimilitud, obteniéndose el mismo número de resultados como valores tiene el *grid* del problema. Finalmente, se analizan los resultados obtenidos y se escoge la función kernel que ha dado el valor máximo a la función logarítmica. Por tanto, dicha función está formada por el valor óptimo de los hiperparámetros.

En conclusión, el valor óptimo de los hiperparámetros es el que da como resultado una función kernel que maximiza la función del logaritmo de verosimilitud.

Con la Figura 4.5 se quiere ejemplificar visualmente el método *grid search*. En este ejemplo, se parte de dos vectores, x e y , los cuales presentan una longitud de siete valores. Estos vectores son en este proyecto dos hiperparámetros que se quieren optimizar.

Cada punto marcado mediante un asterisco de color rojo representa la combinación de un

valor del vector x con otro del vector y , obteniéndose una cuadrícula o rejilla de valores. En este proyecto, cada punto del *grid* se corresponde al kernel que es función del conjunto de valores establecidos para cada hiperparámetro. Por último, se sustituye el valor de cada punto de color rojo en la función a maximizar siguiendo el orden establecido por la línea de color azul y se escoge el resultado con mayor valor. Este resultado se corresponde a un punto del *grid* que ha sido creado con un valor del vector y y otro del vector x los cuales serán parámetros óptimos que maximizan la función.

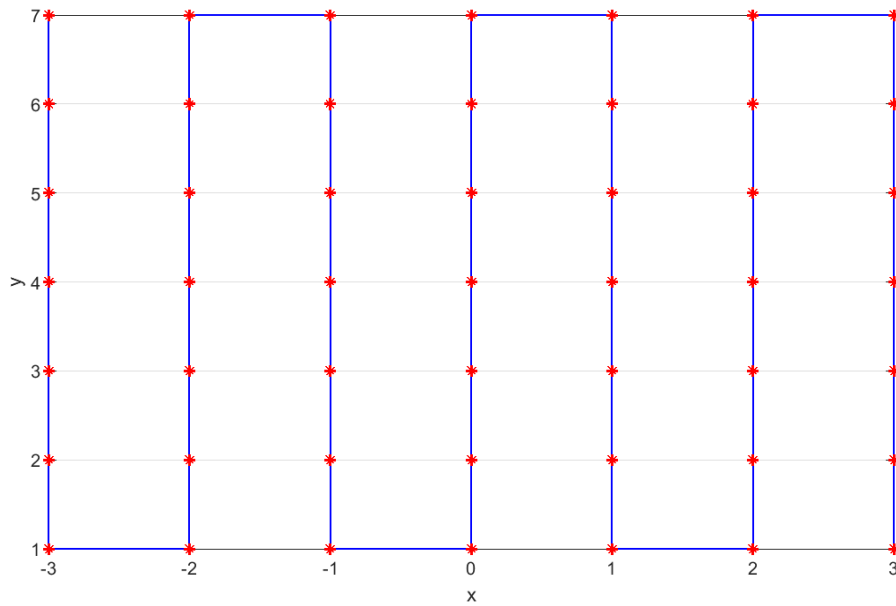


Figura 4.5: Búsqueda en rejilla.

Este método plantea una alternativa de menor complejidad computacional que el método de gradiente ascendente. Sin embargo, los resultados obtenidos no son tan precisos debido a que los valores de búsqueda son los creados al inicio del método y, por tanto, son más limitados. Como se ha explicado en la Sección 4.4.1, el método de gradiente ascendente necesita en la ecuación (4.43) el valor del *step size* del problema. Debido a los datos de entrenamiento del problema, este valor debe ser variable, lo que conlleva una computación excesiva. Por tanto, en el presente proyecto se ha hecho uso del método *grid search*.

Capítulo 5

Implementación del método de estimación con los datos reales

En este capítulo se procede a la implementación del modelo teórico analizado en los capítulos previos, cuya finalidad es la estimación de la desviación de la posición satelital mediante la regresión con procesos Gaussianos. El modelo recibe a su entrada los datos de entrenamiento, que están formados por dos vectores: un vector temporal, T , que define para cada punto del modelo, el tiempo que ha transcurrido entre el punto inicial y dicho punto; y el vector del error de posición, $e_i = f_i$ (cuyo subíndice i es la dimensión espacial del error $\{x,y,z\}$), el cual ofrece la desviación de posición del satélite, en su trayectoria orbital, en cada muestra.

$$D_{training} = \{(t_i, e_i)_{i=1, \dots, n}\} = (T, e) \quad (5.1)$$

donde la variable n representa la longitud del vector de los datos de entrenamiento.

En este capítulo se analizan dos problemas de estimación diferentes:

- Problema 1: interpolación de la desviación de la posición del satélite en el intervalo temporal entre los puntos cuyo error de posición es conocido.
- Problema 2: estimación de la desviación de la posición del satélite en un futuro próximo, en el que no se conoce la posición del satélite.

Ambas estimaciones se realizan por el método GPR elaborado en el presente proyecto. En la Sección 4.3 se han analizado los tipos de funciones kernel que se van a utilizar en los dos problemas.

Inicialmente, se ha obtenido la desviación de la posición del satélite, a partir de los datos en formato TLE y las ecuaciones orbitales, en el intervalo temporal de 2 años (ver Sección 2.5). El resultado de esta operación son 1800 puntos, de los que se conoce la desviación de la posición del satélite. Estos puntos son el conjunto de datos conocidos a partir del cual se escogen los datos de entrenamiento que se utilizan en los siguientes experimentos. Este conjunto de datos recibe el nombre de **datos observados**.

5.1. Estimación de la posición satelital entre puntos conocidos

En esta sección se analiza el problema de estimación de la desviación de la posición del satélite NOAA-17 en el espacio temporal que transcurre entre los puntos cuya desviación de posición es conocida. La sección se divide en tres apartados con el fin de analizar la estimación de la desviación de la posición en las tres dimensiones espaciales.

La estimación de la desviación de la posición mediante el modelo GPR depende en gran medida de la función kernel escogida. Por tanto, la estimación obtenida en cada apartado se ha realizado con tres funciones kernel seleccionadas: kernel cuadrático-exponencial (*SE*), kernel mixto 2 (*MX2*) y kernel local periódico (*LP*), ver Sección 4.3. Esta selección se ha realizado con el objetivo de comparar los resultados de las estimaciones y elegir la función kernel que mejor se adapta a los datos del problema.

Por último, como se ha explicado en el Capítulo 4, el modelo se debe *entrenar* para obtener una correcta caracterización de los datos, para ello, es necesario una gran cantidad de puntos conocidos como vector de entrada. En los siguientes apartados, se realizan dos ensayos cuya diferencia reside en el número de puntos que componen los datos de entrenamiento. Inicialmente, se dispone de un conjunto de datos observados formado por 1800 puntos.

- Ensayo 1: a partir del conjunto de datos formado por 1800 puntos, se escoge 1 punto de cada 20. El resultado es un conjunto de entrenamiento formado por 90 muestras. El conjunto de entrenamiento comprende un periodo de 900 días.
- Ensayo 2: partiendo del conjunto de datos formado por 1800 puntos, se selecciona 1 de cada 30 puntos. El conjunto de datos de entrenamiento del segundo ensayo está formado

por 60 muestras. Aunque este ensayo está compuesto por un menor número de muestras que el primer ensayo, comprende también un periodo de 900 días.

La distinción de los dos ensayos se ha realizado con el objetivo de analizar cómo afecta la cantidad de datos de entrenamiento en la estimación realizada por los métodos de predicción GPR.

En los siguientes apartados, se muestran las gráficas resultado de la estimación del error de posición y los valores de los hiperparámetros necesarios para la caracterización de las funciones kernel utilizadas. Las gráficas están compuestas por tres elementos que ayudan a comparar la estimación que se ha realizado. En primer lugar, en color negro se representa el valor real de la desviación de posición del satélite, que se ha obtenido mediante los datos en formato TLE y las ecuaciones orbitales. Por otro lado, en color azul se muestra la función resultado de la estimación de la desviación de la posición, obtenida a partir del modelo y de la función kernel correspondiente. Y, finalmente, las cruces de color negro representan los puntos pertenecientes a los datos de entrenamiento del modelo.

Finalmente, se ha calculado el Root Mean Square Error (RMSE) para cada ensayo y función kernel con el fin de establecer un parámetro numérico con el que comparar los resultados obtenidos en cada estimación. Este parámetro hace referencia a la diferencia entre el valor estimado y el valor conocido de la desviación de la posición. Un resultado cercano a cero del RMSE supone una estimación correcta, dado que el valor esperado y conocido son semejantes. En la ecuación (5.2) se muestra el cálculo del RMSE, donde el parámetro δ es el resultado de la diferencia entre el valor conocido y estimado de cada punto, y la variable N es el número de puntos en los que se está calculado el RMSE, en este problema $N = 1800$.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\delta \cdot \delta^T}{N}} \quad (5.2)$$

5.1.1. Resultados de la estimación en la dimensión espacial X

En la Figura 5.1 se observan dos columnas de gráficos. La columna situada a la izquierda de la figura representa el ensayo número 1, que está formado por un conjunto de datos de entrenamiento de 90 puntos, por otro lado, la columna de la derecha hace referencia al segundo ensayo, con un conjunto de entrenamiento de 60 puntos. Además, ambas columnas muestran la

estimación realizada con las tres funciones kernel escogidas (*SE*, *MX2* y *LP*).

Si se realiza un análisis visual sobre las gráficas, se puede observar que la función de color azul, que representa la estimación de la desviación de la posición, es similar a la representación de la desviación de la posición conocida, función de color negro, para los tres tipos de kernel.

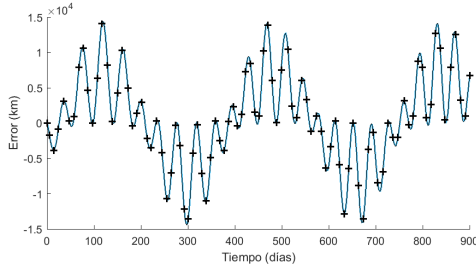
En el primer ensayo, se observa que la estimación realizada por las tres funciones kernel es muy similar a los datos reales observados. En la estimación realizada con un menor número de puntos de entrenamiento (gráficas de la columna situada a la derecha) donde se pueden observar mayores diferencias entre las estimaciones con los diferentes tipos de kernel. Por otro lado, se puede observar que las estimaciones realizadas mediante el kernel *MX2* y el kernel *LP* se aproximan al valor de los datos conocidos, mientras que, el modelo con un kernel *SE* realiza una peor estimación de la desviación de la posición.

Además, se pueden confirmar estas observaciones mediante los resultados del RMSE (Tabla 5.1). Según los resultados representados en la tabla, el RMSE aumenta a menor número de datos conocidos, dado que conocer la desviación de la posición en un menor número de instantes genera un peor entrenamiento del modelo GPR, lo que implica peores estimaciones. A partir de estos resultados, se puede afirmar que los modelos que estiman con las funciones de covarianza *MX2* y *LP* realizan una mejor estimación de la desviación de la posición del satélite en la dimensión espacial *X*.

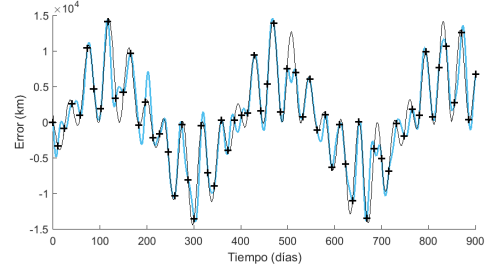
Finalmente, en la Tabla 5.2 se representa el valor óptimo de los hiperparámetros que caracterizan las tres funciones kernel analizadas en este apartado.

Funciones kernel	Nº datos de entrenamiento		
	90	60	
SE	2.0248	61.8547	RMSE [km]
MX2	6.5955	13.2212	
LP	3.6742	10.7564	

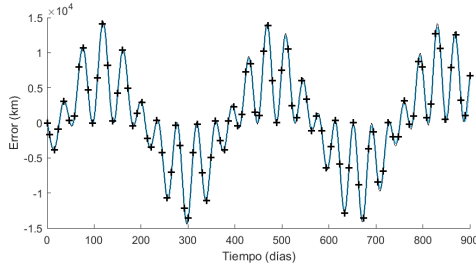
Tabla 5.1: Error cuadrático medio de las estimaciones realizadas en la dimensión *X* para dos conjuntos de datos de entrenamiento.



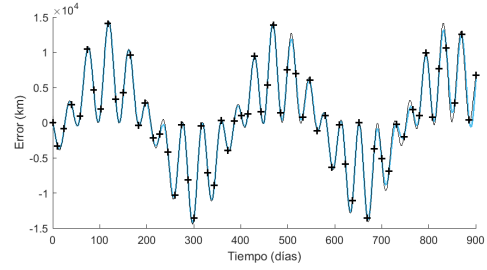
(a) Estimación con el kernel *SE* y 90 puntos de entrenamiento.



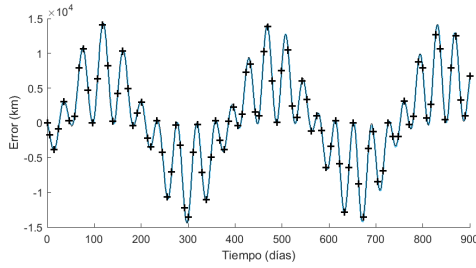
(b) Estimación con el kernel *SE* y 60 puntos de entrenamiento.



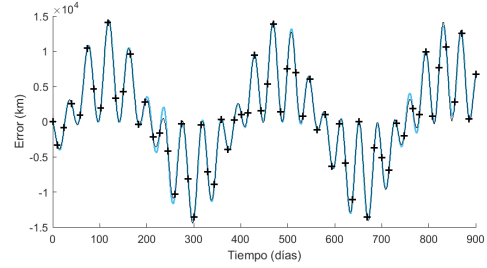
(c) Estimación con el kernel *MX2* y 90 puntos de entrenamiento.



(d) Estimación con el kernel *MX2* y 60 puntos de entrenamiento.



(e) Estimación con el kernel *LP* y 90 puntos de entrenamiento.



(f) Estimación con el kernel *LP* y 60 puntos de entrenamiento.

Figura 5.1: Estimación de la posición satelital en la dimensión espacial X con los tres tipos de kernel seleccionados: *SE*, *MX2* y *LP*, y los dos conjuntos de entrenamiento.

Nº datos de entrenamiento	Hiperparámetros		
	σ	l	σ_N
90	2.3333	17.3556	0.0070
60	0.9842	8.9474	0.0070

(a) Kernel SE .

Nº datos de entrenamiento	Hiperparámetros				
	σ	l	σ_2	l_2	σ_N
90	0.5771	22.1667	0.5774	22.7778	0.009
60	0.1742	15.3333	0.131	16.778	0.009

(b) Kernel $MX2$.

Nº datos de entrenamiento	Hiperparámetros				
	σ	l_{SE}	l_{PER}	p	σ_N
90	0.954	72.346	1.6443	81.1004	0.01
60	1.8227	116.675	1.7525	113.6965	0.01

(c) Kernel LP .

Tabla 5.2: Hiperparámetros de las funciones kernel en la dimensión X para dos conjuntos de datos de entrenamiento.

5.1.2. Resultados de la estimación en la dimensión espacial Y

Después de analizar la dimensión X , en este apartado se analiza la estimación de la desviación de la posición en la dimensión espacial Y . En la Figura 5.2, se representan los dos ensayos de estimación realizados para los tres tipos de funciones kernel que se han escogido (SE , $MX2$ y LP).

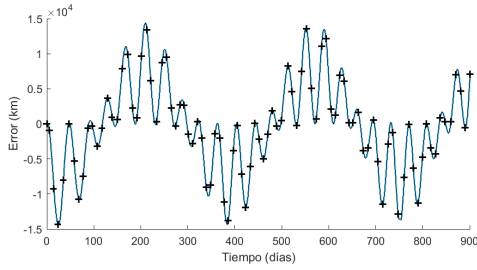
En el primer ensayo, representado en las gráficas de la columna situada a la izquierda de la figura, se puede observar como la estimación realizada por los tres tipos de funciones de covarianza es próxima a la desviación de posición conocida. En la Tabla 5.3, se comprueba como el error de estimación realizado por las tres funciones es próximo a cero.

Por otro lado, en el segundo ensayo (columna situada a la derecha) se observan mayores diferencias en las estimaciones de los tres tipos de funciones kernel. En primer lugar, el kernel SE realiza una peor estimación, dado que la línea de color azul se aleja de la línea de color negro, que representa los datos conocidos. En segundo lugar, las estimaciones realizadas por el kernel $MX2$ y LP , son similares a los datos reales. Por tanto, al igual que en la dimensión X , los kernel $MX2$ y LP , son las funciones de covarianza más adecuadas para realizar una estimación de la desviación de posición en la dimensión espacial Y . Por último, estas observaciones se completan con el resultado del estimador RMSE, descrito en la Tabla 5.3.

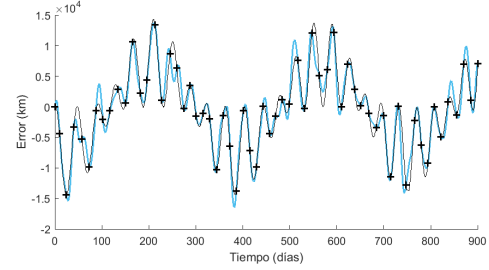
Los valores óptimos de los hiperparámetros que definen las funciones kernel elegidas en la dimensión espacial Y se representan en la Tabla 5.4. Cabe destacar que los valores de estos parámetros son muy similares a los obtenidos en la dimensión X (ver Tabla 5.2).

Funciones kernel	Nº datos de entrenamiento		RMSE [km]
	90	60	
SE	1.7607	55.3642	
MX2	2.7928	12.8297	
LP	2.5100	11.5065	

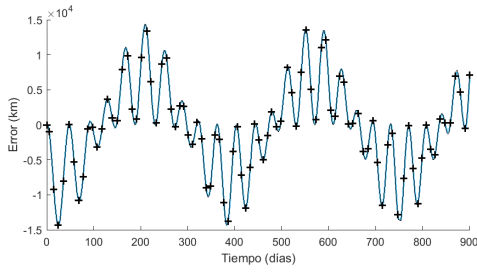
Tabla 5.3: Error cuadrático medio de las estimaciones realizadas en la dimensión Y para dos conjuntos de datos de entrenamiento.



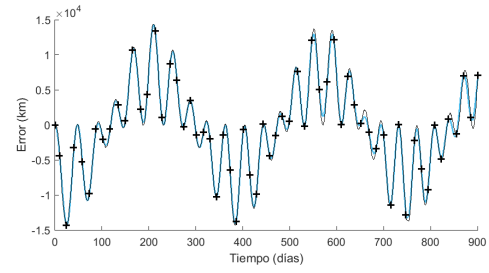
(a) Estimación con el kernel *SE* y 90 puntos de entrenamiento.



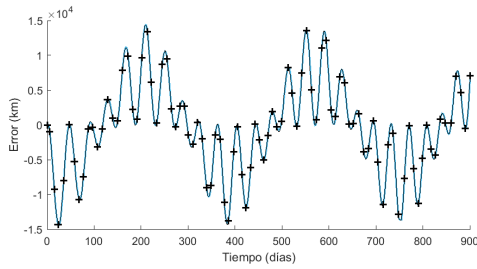
(b) Estimación con el kernel *SE* y 60 puntos de entrenamiento.



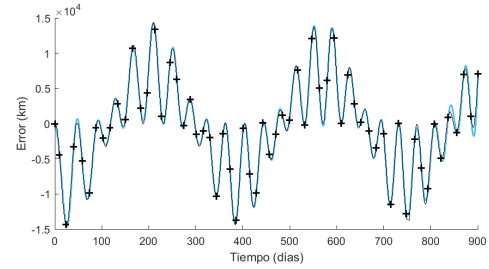
(c) Estimación con el kernel *MX2* y 90 puntos de entrenamiento.



(d) Estimación con el kernel *MX2* y 60 puntos de entrenamiento.



(e) Estimación con el kernel *LP* y 90 puntos de entrenamiento.



(f) Estimación con el kernel *LP* y 60 puntos de entrenamiento.

Figura 5.2: Estimación de la posición satelital en la dimensión espacial *Y* con los tres tipos de kernel seleccionados: *SE*, *MX2* y *LP*, y los dos conjuntos de entrenamiento.

N° datos de entrenamiento	Hiperparámetros		
	σ	l	σ_N
90	2.3842	17.6316	0.0070
60	1.0263	8.9474	0.0060

(a) Kernel SE .

N° datos de entrenamiento	Hiperparámetros				
	σ	l	σ_2	l_2	σ_N
90	0.524	19.3333	0.443	14.2778	0.009
60	0.18	14.4444	0.0115	11.667	0.012

(b) Kernel $MX2$.

N° datos de entrenamiento	Hiperparámetros				
	σ	l_{SE}	l_{PER}	p	σ_N
90	0.8522	73.0399	1.6121	88.4511	0.01
60	1.4717	119.9196	1.4869	117.9696	0.01

(c) Kernel LP .

Tabla 5.4: Hiperparámetros de las funciones kernel en la dimensión Y para dos conjuntos de datos de entrenamiento.

5.1.3. Resultados de la estimación en la dimensión espacial Z

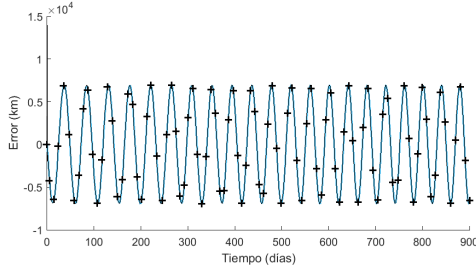
En las dimensiones espaciales X e Y se puede observar el parecido de la función que representa la desviación de la posición conocida. Ambas funciones se asemejan a una función resultado del producto de dos funciones sinusoidales, ver Secciones 5.1.1 y 5.1.1. Sin embargo, la desviación de la posición en la dimensión espacial Z no sigue esta representación. En esta dimensión, el error de posición parece representar una única función sinusoidal. En la Figura 5.3 se observan los resultados de las pruebas con las funciones kernel seleccionadas (SE , $MX2$ y LP), en los dos ensayos realizados.

Como se ha comprobado en las secciones anteriores, los kernel de tipo $MX2$ y LP son los que ofrecen una estimación de la desviación de la posición más certera en comparación con el kernel SE , en el segundo ensayo. Y, por tanto, los resultados en esta dimensión espacial son análogos a los anteriormente comentados. Cabe destacar en esta sección una mejor estimación de la desviación mediante la función $MX2$, dado que en la Tabla 5.5 se observa un menor valor del error de estimación RMSE.

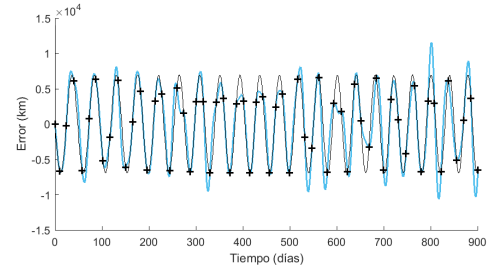
Y, por otro lado, los valores óptimos de los hiperparámetros de las funciones kernel no han variado significativamente respecto a los obtenidos en las otras dimensiones espaciales, ver Tabla 5.6.

Funciones kernel	Nº datos de entrenamiento		RMSE [km]
	90	60	
SE	20.8710	64.8853	
MX2	20.9428	23.6474	
LP	20.9619	31.7380	

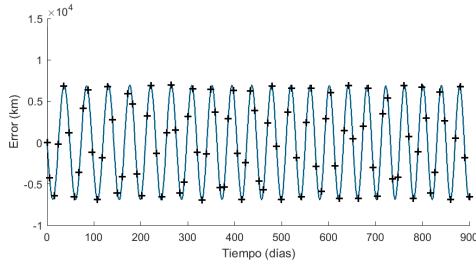
Tabla 5.5: Error cuadrático medio de las estimaciones realizadas en la dimensión Z para dos conjuntos de datos de entrenamiento.



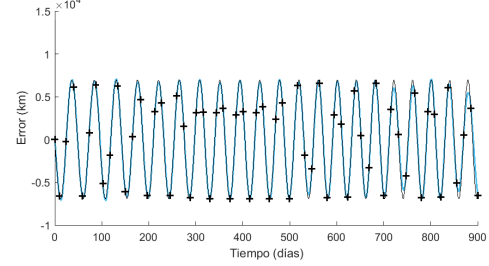
(a) Estimación con el kernel *SE* y 90 puntos de entrenamiento.



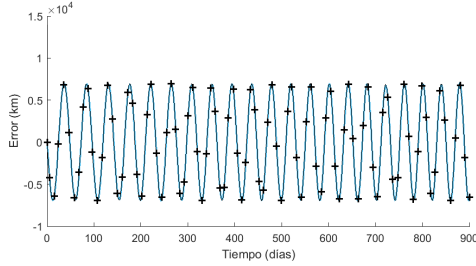
(b) Estimación con el kernel *SE* y 60 puntos de entrenamiento.



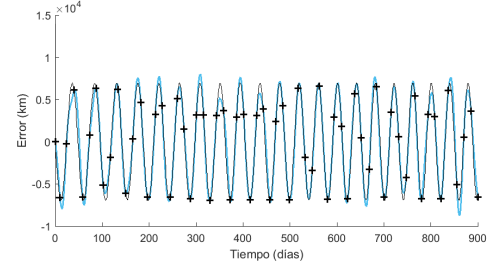
(c) Estimación con el kernel *MX2* y 90 puntos de entrenamiento.



(d) Estimación con el kernel *MX2* y 60 puntos de entrenamiento.



(e) Estimación con el kernel *LP* y 90 puntos de entrenamiento.



(f) Estimación con el kernel *LP* y 60 puntos de entrenamiento.

Figura 5.3: Estimación de la posición satelital en la dimensión espacial *Z* con los tres tipos de kernel seleccionados: *SE*, *MX2* y *LP*, y los dos conjuntos de entrenamiento.

Nº datos de entrenamiento	Hiperparámetros		
	σ	l	σ_N
20	4.3158	19.7895	0.0060
30	2.4916	10.2164	0.0140

(a) Kernel SE .

Nº datos de entrenamiento	Hiperparámetros				
	σ	l	σ_2	l_2	σ_N
20	0.433	19.2222	0.4953	19.2222	0.0145
30	0.233	14.2558	0.595	14.2558	0.09

(b) Kernel $MX2$.

Nº datos de entrenamiento	Hiperparámetros				
	σ	l_{SE}	l_{PER}	p	σ_N
20	1.7522	152.9872	2.0281	87.051	0.01
30	0.7511	141.7767	0.9755	85.0919	0.01

(c) Kernel LP .

Tabla 5.6: Hiperparámetros de las funciones kernel en la dimensión Z para dos conjuntos de datos de entrenamiento.

5.2. Predicción de la posición satelital futura

En capítulos anteriores, se ha recalcado la importancia de la predicción de la trayectoria del satélite debido a la necesidad de conocer la posición en situaciones imprevistas, como el apagado de los equipos de posicionamiento de a bordo. La predicción de la desviación de la posición en instantes futuros se realiza en base a los datos conocidos en instantes del pasado, que se han obtenido mediante los datos en formato TLE y las ecuaciones orbitales.

En esta sección, se parte inicialmente del conjunto de datos observados para la obtención de los datos de entrenamiento. A partir de los datos observados, se escoge 1 de cada 10 puntos, hasta completar un conjunto de datos de entrenamiento formado por 140 puntos. Este conjunto de entrenamiento se corresponde con 690 días. A partir de estos datos de entrenamiento, se procede a la estimación, mediante el modelo GPR, de la desviación de la posición del satélite en los próximos 110 días, desde el último punto de entrenamiento del modelo.

Por otro lado, con el objetivo de obtener la estimación más precisa, en cada apartado se analiza uno de los seis tipos de funciones kernel, detallados en la Sección 4.3, en las tres dimensiones espaciales. A partir de estas pruebas, se evalúan los resultados obtenidos para cada kernel, con el objetivo de determinar las funciones de covarianza que mejor caracterizan los datos del modelo.

A continuación, se procede a analizar la predicción futura del error de posición según los diferentes tipos de funciones de covarianza. En los siguientes gráficos, la línea de color negro representa las datos observados de la desviación satelital respecto el tiempo. Por otro lado, la cruz de color negro representa el fin de los datos de entrenamiento. A partir de este punto, el modelo no ha recibido información sobre los valores de la desviación de posición y, por tanto, ofrece una estimación del error de posición. Finalmente, la línea de color azul identifica la estimación realizada por el método GPR con los datos de entrenamiento y la función kernel correspondiente a cada sección.

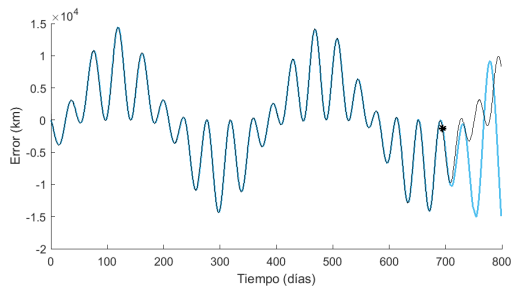
5.2.1. Resultados de la predicción con el kernel cuadrático-exponencial (*SE*)

En esta sección, la estimación GPR se ha realizado mediante la función kernel *SE*, analizada en la Sección 4.3.1. A continuación, se presenta la Figura 5.4 formada por tres imágenes, que representan la predicción de la desviación de la posición en instantes futuros en las tres

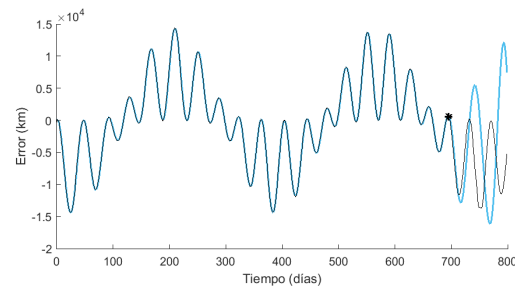
dimensiones espaciales.

Por un lado, la Subfigura 5.4a representa la dimensión espacial X, en la que la predicción de la desviación es precisa pasados aproximadamente 10 días respecto a la última posición conocida. Se puede observar cómo la línea de color azul, que representa la predicción, sigue los mismos valores que la línea que ilustra los datos conocidos. Sin embargo, a partir de este momento la estimación se aleja de los datos observados.

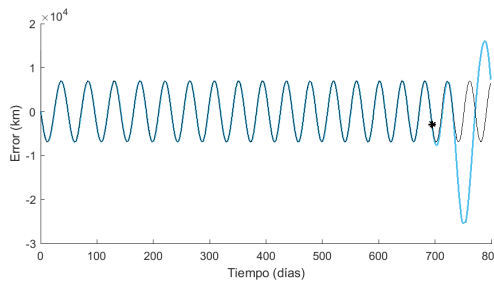
Por otro lado, pasados 30 días respecto al último dato conocido, se observa una predicción menos precisa que en los primeros días en las tres dimensiones espaciales. Cabe destacar la predicción de la desviación a 30 días vista en la dimensión espacial Z, dado que la estimación es muy similar a la desviación satelital conocida.



(a) Dimensión X.



(b) Dimensión Y.



(c) Dimensión Z.

Figura 5.4: Predicción de la posición satelital en las tres dimensiones espaciales con el kernel cuadrático-exponencial (SE).

Por otro lado, se presentan en la Tabla 5.7 los valores de los hiperparámetros obtenidos en la optimización mediante *grid search* (análisis en la Sección 4.4.2), que caracterizan la función kernel *SE*. Los valores de estos hiperparámetros son parecidos a los que han caracterizado la estimación realizada en la sección anterior.

Por último, se puede concluir que la predicción de la desviación de la posición satelital

Kernel SE			
Dimensión	σ	l	σ_N
X	2.5056	18.1793	0.008
Y	2.4286	18.0750	0.009
Z	4.3112	18.4650	0.009

Tabla 5.7: Hiperparámetros de la función kernel SE.

mediante el kernel de tipo SE es próxima a los datos reales en los instantes temporales iniciales de la estimación. No obstante, se observa una pérdida coherencia en la predicción a mayor lejanía del último instante conocido.

5.2.2. Resultados de la predicción con el kernel lineal (LIN)

En esta sección se analiza la predicción en instantes futuros mediante la función kernel lineal.

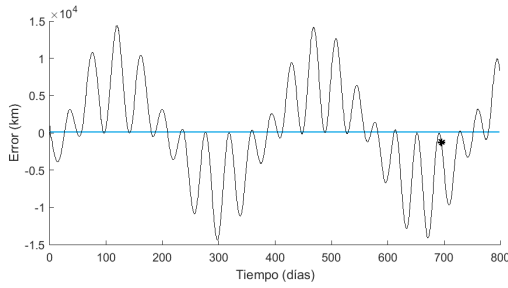
En las tres dimensiones representadas en la Figura 5.5 se observa la misma situación. Los errores ilustrados no siguen una linealidad aparente y, por tanto, la predicción mediante una función de covarianza lineal (LIN) no es acertada. En las tres subfiguras se observa la línea de predicción como una recta de pendiente cero.

Los hiperparámetros optimizados que caracterizan el kernel lineal están formados por los parámetros σ igual a 0 y un valor de σ_N igual a 1. Estos resultados reflejan una predicción deficiente de la desviación de la posición satelital del problema en sus tres dimensiones espaciales y en todos sus instantes temporales. Por último, se verifica que el kernel simple lineal no caracteriza correctamente el error de posición del satélite NOAA-17.

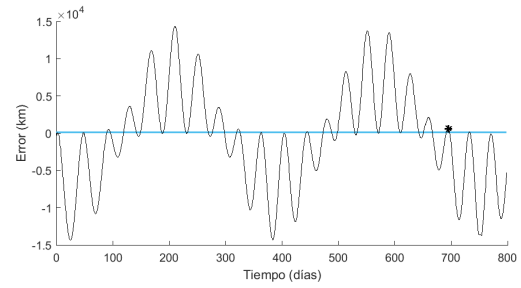
5.2.3. Resultados de la predicción con el kernel periódico (PER)

El siguiente kernel simple a analizar en la predicción de la desviación de la posición es el kernel periódico.

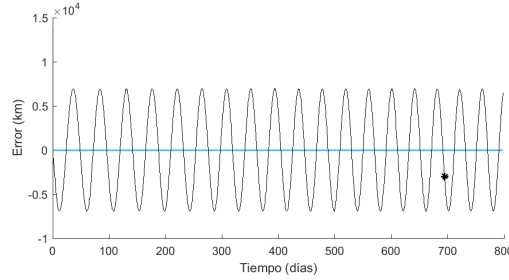
Aunque en la Figura 5.6 se pueda observar una aparente periodicidad en las funciones de las tres dimensiones, no es del todo correcto, debido a que el periodo no permanece constante. Como se observa en la dimensión Z (Figura 5.6c), la función que representa los datos reales cambia su



(a) Dimensión X.



(b) Dimensión Y.



(c) Dimensión Z.

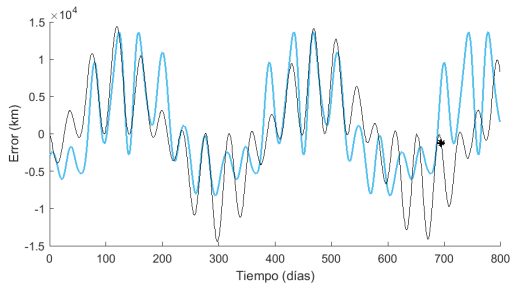
Figura 5.5: Predicción de la posición satelital en las tres dimensiones espaciales con el kernel lineal (*LIN*).

periodo a lo largo del tiempo, estabilizándose en el último tramo temporal. Sin embargo, la línea que representa la predicción, de color azul, mantiene el mismo periodo en todos los instantes temporales. Por tanto, es debido a este periodo variable que la predicción no es precisa en el periodo temporal analizado. No obstante, la predicción sí alcanza los valores de la amplitud.

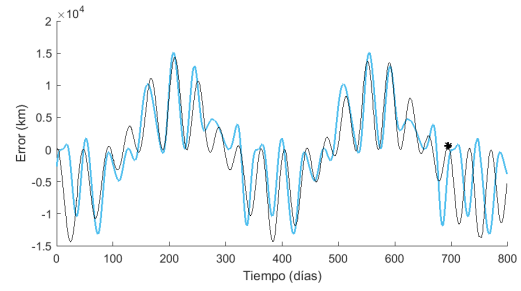
En las dimensiones X (Figura 5.6a) e Y (Figura 5.6b), la función de los datos observados parece describir una función periódica a grandes rasgos. Sin embargo, se puede observar en sus respectivas subfiguras cómo la función de predicción en ambas dimensiones no realiza una estimación precisa. Esto es debido a que el periodo en las funciones de los datos observados no es constante y la amplitud no sigue una periodicidad determinada. Por tanto, el kernel periódico no es la función adecuada para realizar la predicción de la desviación de la posición satelital en este problema.

En la siguiente Tabla 5.8 se muestran los resultados de la optimización de los hiperparámetros del kernel tipo periódico.

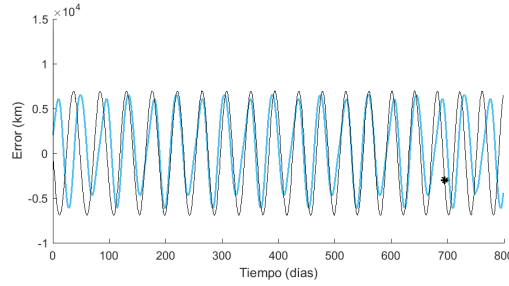
Con la función kernel analizada en esta sección, se ha comprobado que, aunque no se obtiene una caracterización muy aproximada a los datos de entrada al modelo, sí se puede observar cierta



(a) Dimensión X.



(b) Dimensión Y.



(c) Dimensión Z.

Figura 5.6: Predicción de la posición satelital en las tres dimensiones espaciales con el kernel periódico (*PER*).

Kernel <i>PER</i>				
Dimensión	σ	c	p	σ_N
X	2.8270	0.3516	309.9626	0.6178
Y	2.9707	0.2381	347.0734	0.9178
Z	25.006	1.9156	85.0849	0.6555

Tabla 5.8: Hiperparámetros de la función kernel *PER*.

periodicidad en las funciones. Por tanto, en la Sección 5.2.6 se analizan los resultados obtenidos a partir de una función kernel local periódica, que permite la variación del periodo de la función a lo largo del tiempo.

5.2.4. Resultados de la predicción con el kernel mixto: *LIN* x *SE* (*MXI*)

En las secciones anteriores se han analizado los resultados obtenidos en la predicción con las funciones kernel lineal y cuadrática-exponencial, donde se ha mostrado la ineficacia

de la función lineal para caracterizar las funciones del error de posición del modelo en las tres dimensiones espaciales. Por otra parte, el kernel cuadrático-exponencial obtenía mejores resultados, destacando la predicción en la dimensión X .

A continuación, se exponen los resultados obtenidos mediante la función kernel combinación de las anteriormente mencionadas. En la Figura 5.7 se observa una buena predicción en los 30 días posteriores al último punto conocido en las dimensiones Y y Z , dado que la función de estimación, de color azul, cuenta con unos valores muy similares a los observados en la función de los datos conocidos (color negro). Sin embargo, en la dimensión espacial X , la predicción solo es adecuada en los 10 días después del último dato conocido. A partir de estos instantes, la predicción de la desviación de la posición se aleja notablemente de los valores esperados.

La estimación en los instantes temporales donde se dispone de los datos de entrenamiento, es mejor que la obtenida en el kernel lineal. En cambio, los resultados obtenidos con el kernel mixto 1 no son mejores que los alcanzados en la sección del kernel cuadrático-exponencial, ver 5.2.1.

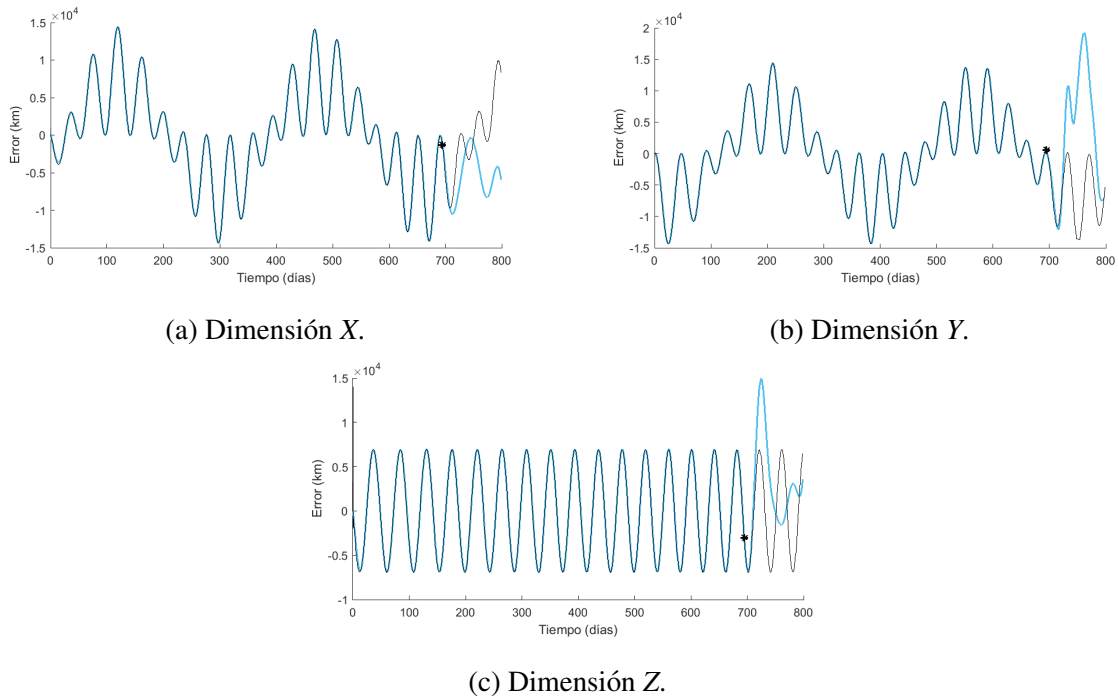


Figura 5.7: Predicción de la posición satelital en las tres dimensiones espaciales con el kernel mixto: $LIN \times SE (MXI)$.

Los valores obtenidos de los hiperparámetros en la optimización son parecidos en las tres dimensiones espaciales (Tabla 5.9). El valor de la desviación estándar de la función, σ , es más

similar a la obtenida en la Tabla 5.7, aunque el parámetro de longitud característica disminuye notablemente.

Kernel <i>MX1</i>			
Dimensión	σ	l	σ_N
X	0.00257	2.9928	0.009
Y	0.0024	2.2699	0.009
Z	0.0032	2.5699	0.009

Tabla 5.9: Hiperparámetros de la función kernel MX1.

Después del análisis de los dos tipos de kernel y su combinación se observa que los resultados obtenidos son mejores con una función kernel cuadrático-exponencial que con las otras dos funciones analizadas. Esto se debe a que la función de predicción resultante caracteriza los datos de mejor forma y se aproxima a los valores de la realidad.

5.2.5. Resultados de la predicción con el kernel mixto: *SE x SE (MX2)*

En la siguiente sección se analizan los resultados obtenidos con el modelo de estimación GPR y un kernel producto de dos funciones cuadrático-exponenciales.

Las funciones que representan la desviación de posición en las dimensiones *X* e *Y* son similares al resultado del producto de dos funciones sinusoidales, debido a que se observa una función sinusoidal principal, con un periodo más largo, que porta una segunda función sinusoidal, con un periodo mucho menor. Por la siguiente razón, el kernel mixto 2 podría ser una buena función para caracterizar la predicción en instantes futuros en las dimensiones *X* e *Y*.

En la Figura 5.8 se ilustra la predicción obtenida con el kernel *MX2*. En estas subfiguras se observa una mejoría respecto a los resultados obtenidos en la Sección 5.2.1 del kernel simple *SE*. La función que representa el resultado de la predicción es próxima a la función de la desviación de la posición hasta el día 750 respecto el primer punto conocido, aproximadamente, en las tres dimensiones representadas. Por tanto, la predicción obtenida con la función kernel de esta sección es aceptable en los 40 días posteriores al último punto observado.

La Tabla 5.10 presenta el resultado de la optimización de los cuatro hiperparámetros que

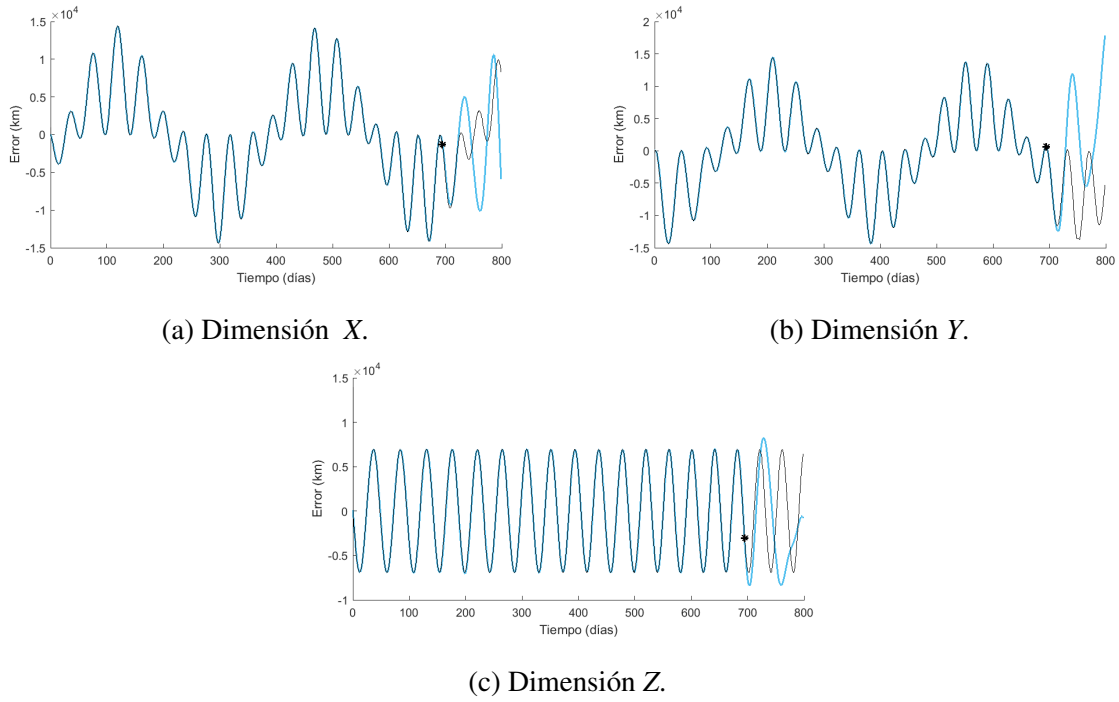


Figura 5.8: Predicción de la posición satelital en las tres dimensiones espaciales con el kernel mixto: $SE \times SE$ ($MX2$).

caracterizan el kernel mixto producto de dos funciones SE . Es destacable que el valor de los hiperparámetros de las dos funciones cuadráticas que componen este kernel son similares.

Kernel $MX2$					
Dimensión	σ	l	σ_2	l_2	σ_N
X	0.0313	20.3807	0.2253	22.6686	0.01
Y	0.1609	20.3807	0.3753	23.0019	0.01
Z	0.0209	28.3807	1.292	26.0019	0.01

Tabla 5.10: Hiperparámetros de la función kernel $MX2$.

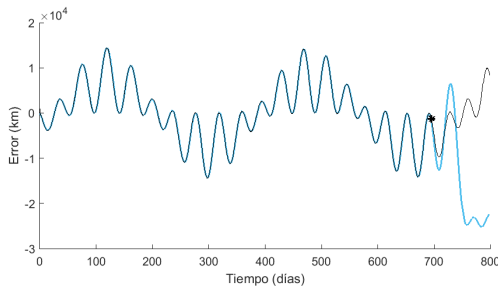
Finalmente, se observa una mejoría en la predicción del error de posición satelital con el kernel analizado en esta sección respecto del kernel simple SE .

5.2.6. Resultados de la predicción con el kernel mixto: *SE x PER (LP)*

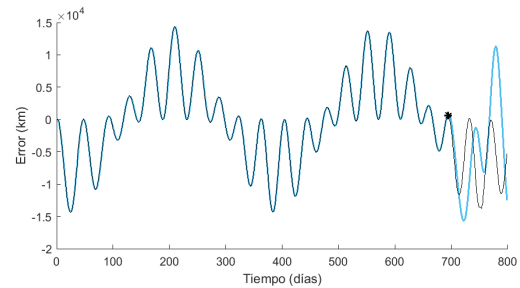
La última predicción se realiza mediante la función local periódica. En la Sección 5.2.3 se han analizado los resultados del uso de una función kernel periódica, observando la variación del periodo de la función.

En la Figura 5.9 se representa la predicción de la desviación de la posición satelital haciendo uso del kernel local periódico. En este caso, en las tres dimensiones representadas se observa cómo la predicción se aproxima a los valores de los datos conocidos, tanto en el periodo de la función como en su amplitud. A partir del día 710, la función que representa la predicción se aleja de los valores esperados, al igual que sucedía en la predicción con el kernel *MX2*, ver 5.2.5.

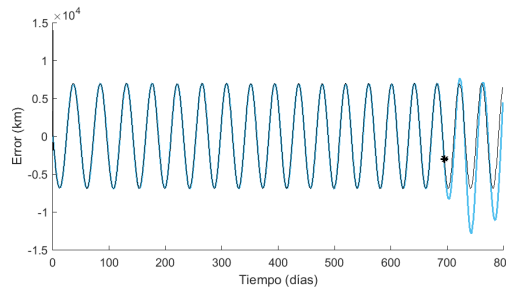
Sin embargo, es importante destacar la predicción realizada en la dimensión *Z*, dado que, aunque hay instantes en los que la función de predicción se aleja de los valores esperados, se realiza una muy buena estimación futura hasta el día 800. Por tanto, el kernel local periódico es la función de covarianza que mejor estima la desviación de la posición satelital en la dimensión *Z*.



(a) Dimensión X.



(b) Dimensión Y.



(c) Dimensión Z.

Figura 5.9: Predicción de la posición satelital en las tres dimensiones espaciales con el kernel mixto: *SE x PER (LP)*.

Si se comparan los valores obtenidos en la optimización de los hiperparámetros del kernel local periódico (Tabla 5.11) con los resultantes del kernel periódico (Tabla 5.8), se observa una reducción del valor del periodo, p .

Kernel LP					
Dimensión	σ	l	c	p	σ_N
X	1.7488	83.9872	3.2365	80.2215	0.01
Y	1.4488	70.9872	2.2121	87.3321	0.01
Z	1.6332	141.6651	1.6354	89.3441	0.01

Tabla 5.11: Hiperparámetros de la función kernel LP .

Por último y después de analizar los dos kernel con un núcleo periódico, se comprueba una mejoría en las predicciones con el kernel tipo LP respecto al kernel simple de tipo periódico.

Capítulo 6

Conclusiones

En este TFG se ha estudiado el método de estimación GPR con el fin de predecir la posición del satélite meteorológico NOAA-17 en su trayectoria alrededor de la Tierra.

Los algoritmos de estimación del modelo GPR se han desarrollado sobre la aplicación *Matlab*. La base de la estimación es un conjunto de datos obtenidos de los históricos en formato TLE y las ecuaciones orbitales, entre 2002 y 2004. A partir de estos datos de entrenamiento se ha realizado la estimación de la desviación de la posición satelital.

Los diferentes resultados se han obtenido a partir de la estimación realizada con funciones kernel analizadas previamente en el trabajo. Cada función de covarianza del modelo ofrece una predicción diferente de los datos. Los resultados han presentado las funciones kernel que mejor caracterizan los datos observados.

En el problema de estimación se ha analizado la influencia de la cantidad de puntos del conjunto de entrenamiento, administrado al modelo. Este número es relevante en el entrenamiento del modelo de estimación, dado que a mayor cantidad de puntos conocidos se realiza una mejor estimación de la desviación de la posición. Como se ha podido observar, el segundo ensayo de este problema disponía de un menor conjunto de entrenamiento y, por tanto, su estimación era menos precisa que la realizada en el primer ensayo, con un mayor número de datos de entrenamiento. Por otro lado, en base a los resultados de este problema, en las tres dimensiones espaciales se ha demostrado que las funciones *kernel mixto 2* y *local periódico* son las que caracterizan mejor los datos de desviación de la posición, dado que la estimación realizada con estas funciones de covarianza obtenía valores similares a los datos conocidos.

Por otro lado, el problema de predicción de la desviación de la posición en instantes futuros,

ha proporcionado los resultados necesarios para la comparación de las diferentes funciones kernel analizadas en este TFG. Se ha observado que las funciones que mejor han caracterizado los datos han sido los kernel *cuadrático-exponencial*, *mixto 1* y *local periódico*. Estas funciones han ofrecido una predicción de la desviación satelital en un periodo de hasta 40 días. Cabe destacar la precisión de la predicción de la desviación de la función de covarianza *local periódica* en la dimensión espacial Z, debido a que ha sido capaz de realizar una estimación certera respecto a los datos conocidos durante un periodo de 110 días. En las tres dimensiones espaciales se ha observado cómo el paso del tiempo respecto al último punto de entrenamiento afecta negativamente en la predicción de la desviación, dado que existe mayor incertidumbre sobre la desviación del satélites en instantes pasados.

Finalmente, el modelo de estimación GPR realizado en este trabajo se ha desarrollado utilizando la herramienta *Matlab*. El código fuente se encuentra en un **repositorio** público de *GitHub* [42].

Líneas Futuras

En base al estudio realizado en el presente TFG, se presentan las siguientes líneas de investigación futuras para profundizar en el desarrollo de este trabajo.

- Investigación de funciones de covarianza: en este trabajo se ha realizado el estudio de la estimación del modelo GPR a partir de seis funciones kernel diferentes. Sin embargo, existe una gran variedad de funciones de covarianza que podrían caracterizar mejor los datos de entrada. Por tanto, se puede ampliar el estudio con otra selección de funciones kernel, con el objetivo de encontrar una función que se adapte mejor a los datos del problema y, realice estimaciones más precisas.
- Optimización de los hiperparámetros: debido a la complejidad computacional del método de gradiente ascendente, se puede realizar la optimización de los hiperparámetros con otros métodos que aseguren mayor precisión que el método *grid search*.

Bibliografía

- [1] *Radioenlace*, en *REAL ACADEMIA ESPAÑOLA: Diccionario de la lengua española*, Edición del Tricentenario, 2021. dirección: <https://dle.rae.es/radioenlace>.
- [2] C. Duarte. (31 de ene. de 2014). «Enlace satelital,» dirección: <https://www.elvigia.net/c-t/2014/2/1/satlites-opcin-para-mxico-148806.html>.
- [3] *Satellite database*, 1 de mayo de 2021. dirección: https://ucsusa.org/resources/satellite-database?_ga=2.206523283.1848871521.1598077135-464362950.1598077135 (visitado 30-10-2021).
- [4] (2022). «Ilustración NOAA I,» dirección: https://space.skyrocket.de/doc_sdat/noaa_itos-a.htm.
- [5] (2021). «History of NOAA Satellites.» inglés, dirección: <https://www.nesdis.noaa.gov/current-satellite-missions/history-of-noaa-satellites>.
- [6] (2020). «Advanced Microwave Sounding Unit-A (AMSU-A).» inglés, dirección: <https://www.eumetsat.int/amsu-a>.
- [7] (2021). «WMO OSCAR — Satellite: NOAA-17.» inglés, dirección: https://space.oscar.wmo.int/satellites/view/noaa_17 (visitado 22-11-2021).
- [8] (2021). «CelesTrak: Historical NORAD Two-Line Element Sets,» dirección: <https://celestrak.com/NORAD/archives/> (visitado 30-10-2021).
- [9] (2014). «Ilustración NOAA-17,» dirección: <https://www.star.nesdis.noaa.gov/smcd/spb/ozone/NOAA17.php>.
- [10] The MathWorks, Inc. (). «Open App Designer Start Page or existing app file - MATLAB appdesigner - MathWorks Switzerland.» inglés, dirección: <https://ch.mathworks.com/help/matlab/ref/appdesigner.html> (visitado 04-01-2022).

- [11] H. Evans. (4 de jun. de 2021). «Los diferentes tipos de órbita de los satélites,» dirección: <https://darwincav.com/news/different-types-of-satellite-orbit/?lang=es>.
- [12] S. M. Rezaul Karim, S. Sakib, M. Turiquil Islam y F. A. Sabbir Ahamed, «A review of communications satellite by focusing on 'bangabandhu satellite-1', the first GEO communications satellite of bangladesh,» 2018. DOI: 10.5923/j.ijnc.20180805.01. dirección: https://www.researchgate.net/publication/329641521_A_Review_of_Communications_Satellite_by_Focusing_on_'Bangabandhu_Satellite-1'_the_First_GEO_Communications_Satellite_of_Bangladesh.
- [13] (2008). «Ilustración inclinación de las órbitas,» dirección: <https://sites.google.com/a/uaem.mx/satelites-artificiales/orbitas-satelitales>.
- [14] (1999). «Ilustración las trayectorias de los planetas,» dirección: https://www.houspain.com/corporativo/FeriaHOU/Viajero_gamma/ayuda/ayuda411/ayuda411.html.
- [15] (2021). «Elipse — Diccionario de la lengua española,» dirección: <https://dle.rae.es/elipse> (visitado 01-11-2021).
- [16] M. Olmo de Sevilla y R. Nave. (2007). «Ellipses and Elliptic Orbits,» dirección: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Math/ellipse.html>.
- [17] M. (14 de ene. de 2021). «Elipse — Superprof,» dirección: <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/conica/elipse.html>.
- [18] (2009). «Movimiento elíptico,» dirección: http://www.publicacions.ub.es/liberweb/astronomia_esferica/material/version_html/tomo_1/3_6.htm.
- [19] R. M. Ramos Lasheras, «Estudio de la interferencia en sistemas terrenales provocada por sistemas de satélites de órbita MEO en las bandas de frecuencia S y Ka,» abr. de 2011.
- [20] H. D. Curtis, *Orbital Mechanics For Engineering Students*, 1.^a ed. Butterworth-Heinemann, 2004.
- [21] S. Rubio Madroña, «Análisis y desarrollo de algoritmos para la planificación optimizada de misiones espaciales de observación de la Tierra,» 2013. dirección: <https://biblus.us.es/bibing/proyectos/abreproy/60160/direccion/01.+Volumen+1/%252F>.
- [22] (2022). «Ilustración órbita NOAA 17,» dirección: <https://www.heavens-above.com/orbit.aspx?satid=27453>.

- [23] *Parámetro gravitacional estándar*, en, 2 de abr. de 2021. dirección: https://es.wikipedia.org/wiki/Par%C3%A1metro_gravitacional_est%C3%A1ndar (visitado 07-11-2021).
- [24] L. M. Méndez-Pérez, L. A. Matos y E. J. Roca-Oria, «Modelo de los dos cuerpos: Su rol en el desarrollo histórico de la física y su uso en la enseñanza de la física general,» *Revista Cubana de Física*, vol. 31, 2014. dirección: <https://www.revistacubanadefisica.org/RCFextradata/OldFiles/2014/Vol31-N1E/RCF-31-1E-E069.pdf>.
- [25] M. M. Jiménez Martín, «Estudio de las perturbaciones de las órbitas de los satélites artificiales,» jun. de 2015. dirección: <http://uvadoc.uva.es/handle/10324/13499>.
- [26] R. Vázquez Valenzuela. (17 de dic. de 2019). «Fundamentos de Navegación Aérea - Tema 9: Mecánica Orbital Básica,» dirección: <http://www.aero.us.es/fna/files/T9FNA.pdf>.
- [27] J. Altamirano Romero. (2018). «Achatamiento de los polos,» dirección: <http://stryperstryper.blogspot.com/2018/11/tierra-i-movimientode-rotacion-formay.html>.
- [28] A. Franco García. (2016). «Movimiento de caída de un satélite artificial debido al rozamiento con la atmósfera.,» dirección: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/celeste/rozamiento/rozamiento.html>.
- [29] P. Spotts, *In a NASA first, NanoSail-D spacecraft to set sail on the sunlight*, inglés, 21 de ene. de 2011. dirección: <https://www.csmonitor.com/Science/2011/0120/In-a-NASA-first-NanoSail-D-spacecraft-to-set-sail-on-the-sunlight>.
- [30] T. Sean Kelson. (28 de dic. de 2019). «Celestrak: "FAQs: Two-Line Element Set Format".» inglés, dirección: <https://www.celestrak.com/columns/v04n05/> (visitado 24-11-2021).
- [31] *Mínimos cuadrados*, en, Wikipedia for Schools, 1 de jun. de 2021. dirección: https://www.classicistranieri.com/wikipediaforschoolses/wp/1/Least_squares.htm (visitado 11-11-2021).
- [32] H. Catalán Alonso. (). «Método mínimos cuadrados,» dirección: https://www.cepal.org/sites/default/files/courses/files/02_regresion_lineal.pdf.
- [33] M. C. Munuera Raga, «Filtro de Kalman y sus aplicaciones,» TFG, jun. de 2018. dirección: <http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/127417/2/memoria.pdf>.
- [34] A. Becker. (2021). «Online Kalman Filter Tutorial,» dirección: <https://www.kalmanfilter.net/ES/default.es.aspx>.

BIBLIOGRAFÍA

- [35] C. E. Rasmussen y C. Williams, *Gaussian Processes for Machine Learning*, inglés. Amsterdam, Países Bajos: Amsterdam University Press, 2005.
- [36] J. Plaza Martínez. (2005). «Distribución normal,» dirección: https://www.matematicasonline.es/BachilleratoCCSS/segundo/archivos/distribucion_normal/DISTRIBUCION%20NORMAL.html.
- [37] E. Morales, *Procesos Gaussianos*, 2021. dirección: <https://ccc.inaoep.mx/~emorales/Cursos/Aprendizaje2/Acetatos/gaussianprocesses.pdf>.
- [38] M. E. Daney. (15 de oct. de 2021). «Teorema de Bayes,» dirección: <https://conceptoabc.com/teorema-de-bayes/>.
- [39] J. F. López. (31 de ene. de 2021). «Covarianza,» dirección: <https://economipedia.com/definiciones/covarianza.html>.
- [40] (2020). «El secreto del kernel en el aprendizaje automático: ¡los casos famosos te enseñan a construirlo!» Dirección: <https://programmerclick.com/article/63701447195/>.
- [41] P. Marín Rubio. (2013). «Práctica 1bis: Recordatorio de descomposiciones matriciales LU y Choleski,» dirección: <https://personal.us.es/pmr/images/pdfs/1314gm-cnii-practica1bis.pdf>.
- [42] R. Navarro Villarino, *GitHub - RooNV/TFG-GPR-Ingenieria-Aeroespacial*, inglés, 2022. dirección: <https://github.com/RooNV/TFG-GPR-Ingenieria-Aeroespacial>.