第2章 图像变换

几何变换

几何变换

- 图像位置变换
- 图像缩放变换

二维图像几何变换矩阵：

$$T_{2D} = \left[\begin{array}{cc|c} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{array}\right]$$

$\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix}$ 是对图形的缩放、旋转、对称、错切等变换

$[c \;\; f]$ 是对图形进行平移变换；

$\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ 是对图形作投影变换

i 是对整个图形做伸缩变换

1、平移变换

$$X' = X + X_0$$

$$Y' = Y + Y_0$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

几何变换——平移

平移变换

坐标变换示例：

$$X' = X + X_0$$

$$Y' = Y + Y_0$$

$$Z' = Z + Z_0$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

平移变换

平移变换的矩阵表达

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} X & Y & Z & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{v}' = \begin{bmatrix} X' & Y' & Z' & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 旋转变换：绕原点旋转α度

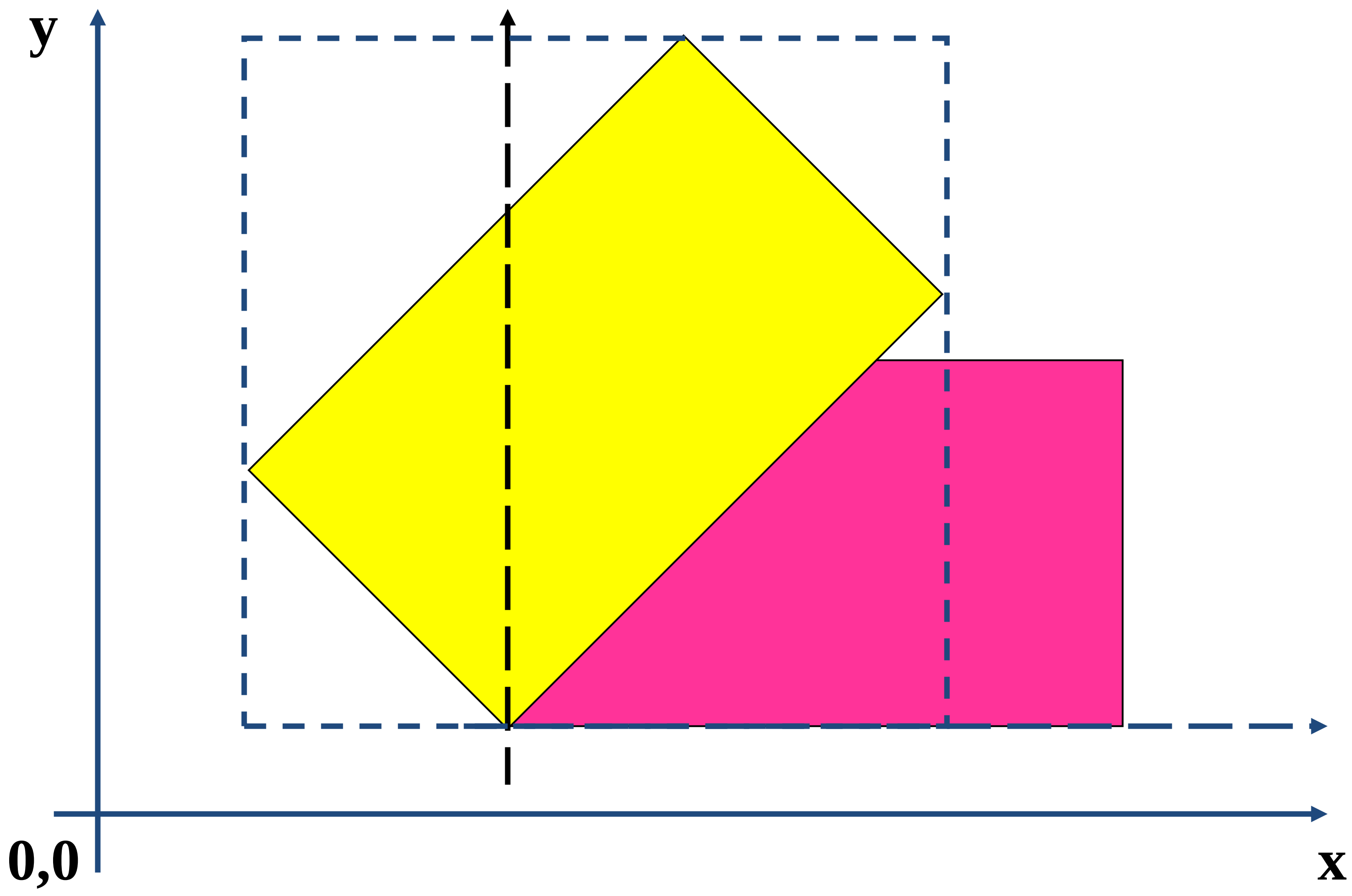
设：a(x,y) = x * cos(α) - y * sin(α);

b(x,y) = x * sin(α) + y * cos(α);

用齐次矩阵表示：

$$|\, x' \quad y' \quad 1 \,| = |\, x \quad y \quad 1 \,| \bullet \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

几何变换——旋转



几何变换——旋转

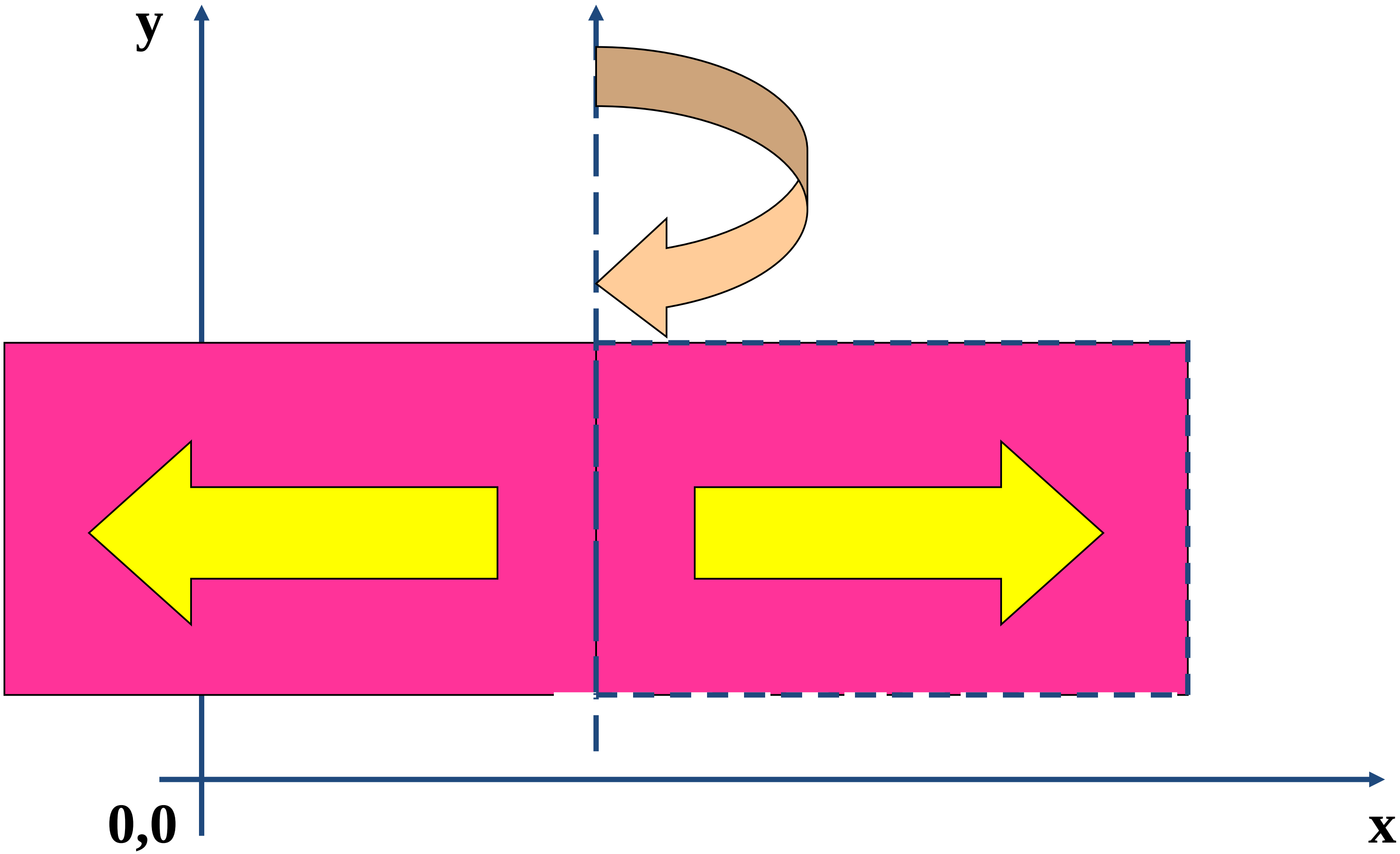
3 水平镜像

设: a(x,y) = -x;   b(x,y) = y;

用齐次矩阵表示:

$$\begin{vmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

几何变换——水平镜像(Mirror)



几何变换——水平镜像(Mirror)

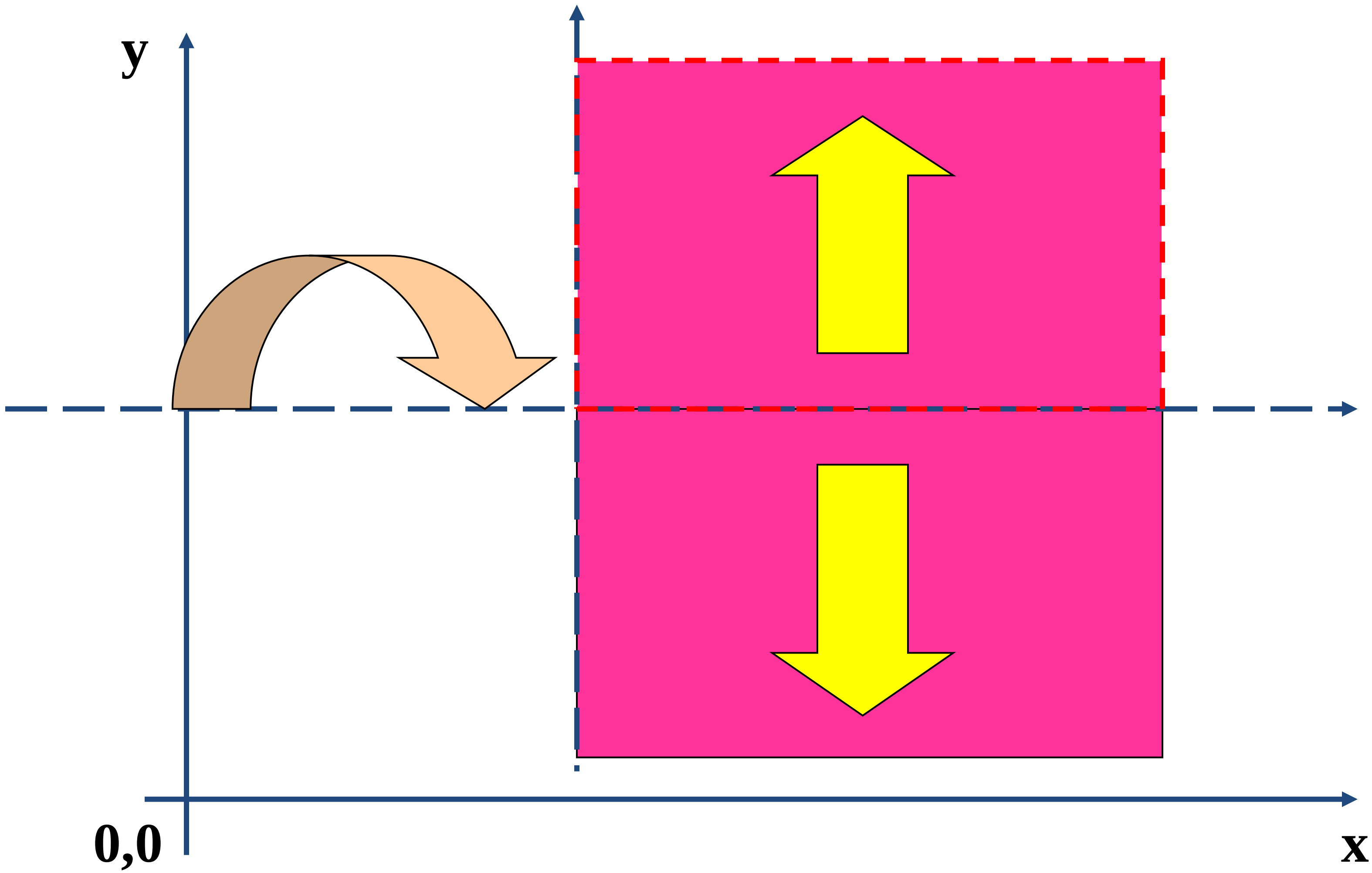
4 垂直镜像

设: a(x,y) = x;　　　b(x,y) = -y;

用齐次矩阵表示:

$$\begin{vmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

几何变换——垂直镜像(Flip)



垂直镜像

5 缩放变换:

x方向缩放c倍，y方向缩放d倍

设: a(x,y) = x*c;   b(x,y) = y*d;

用齐次矩阵表示:

$$\begin{vmatrix} a(x,y) \\ b(x,y) \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

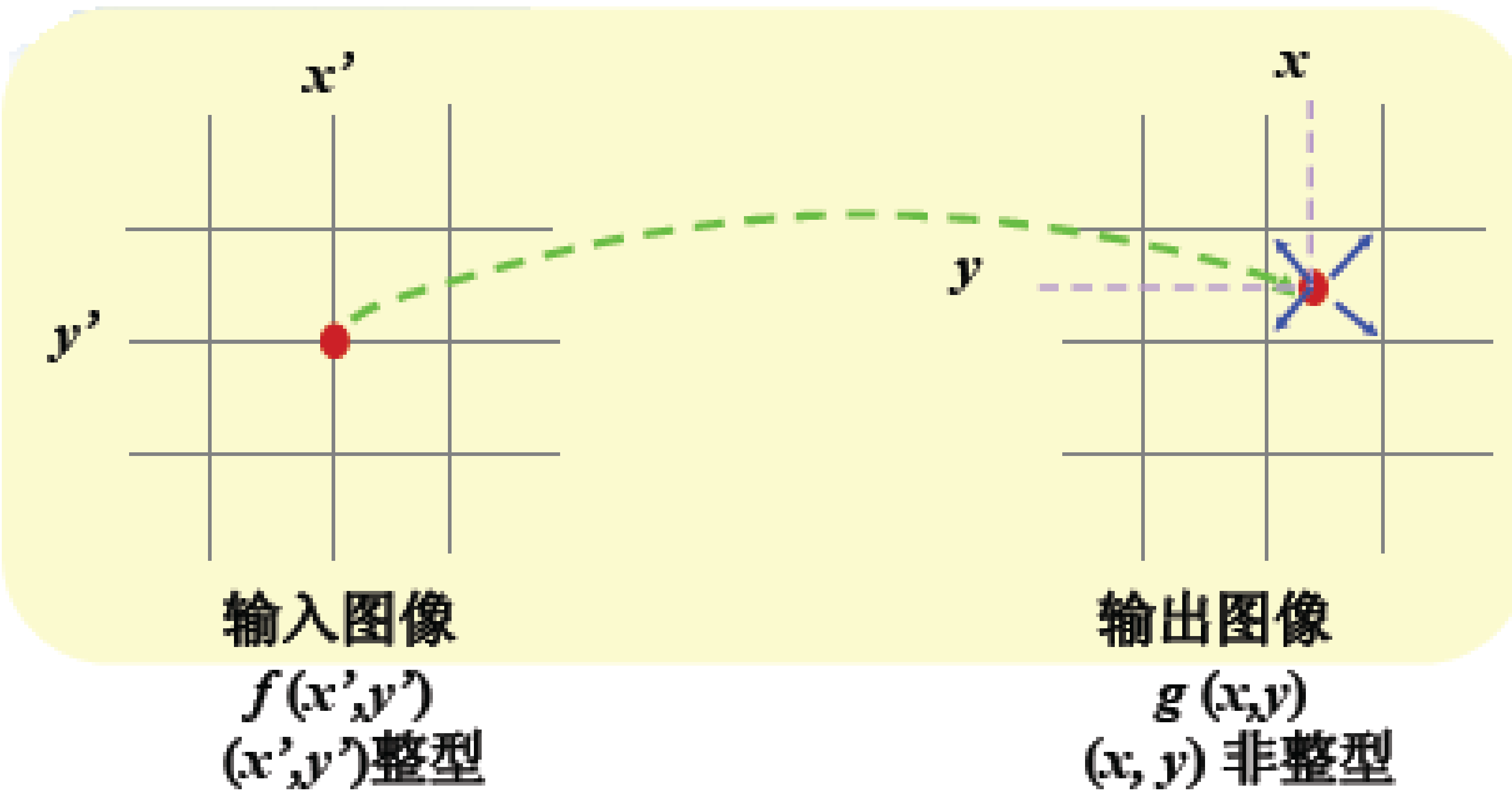
缩放(ZOOM)

对于数字图像，输入和输出的位置都要受到栅格的限制。

如果整数点到整数点，没有插值，

非整数点，有可能插值，有可能丢失。

- 前向映射：
（像素移交映射）
——由输入定输出。

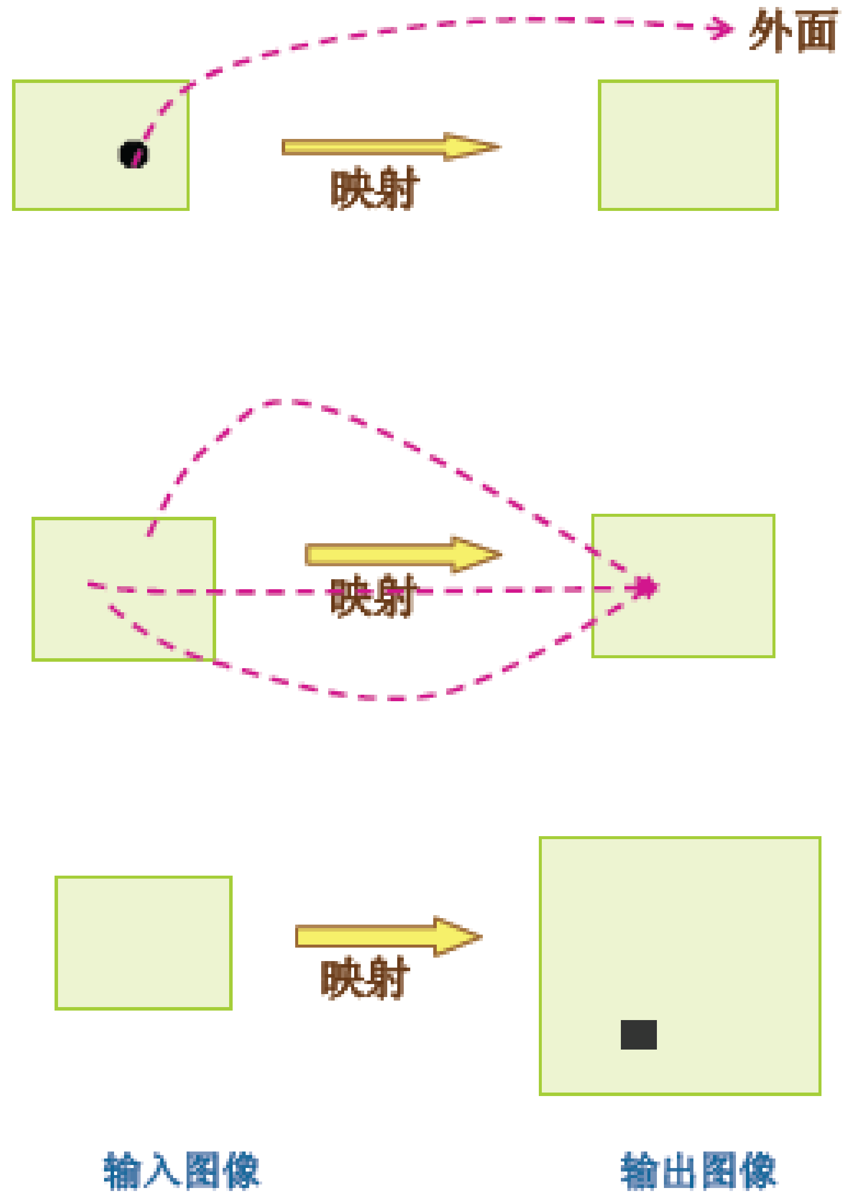


前向映射法的缺陷：

（1）输入图像有可能映射到输出图像之外，效率不高。

（2）一个输出像素的值可能由多个输入像素的值来决定，出现多次计算。如缩小处理时：4个以上的输入像素值决定一个输出像素。

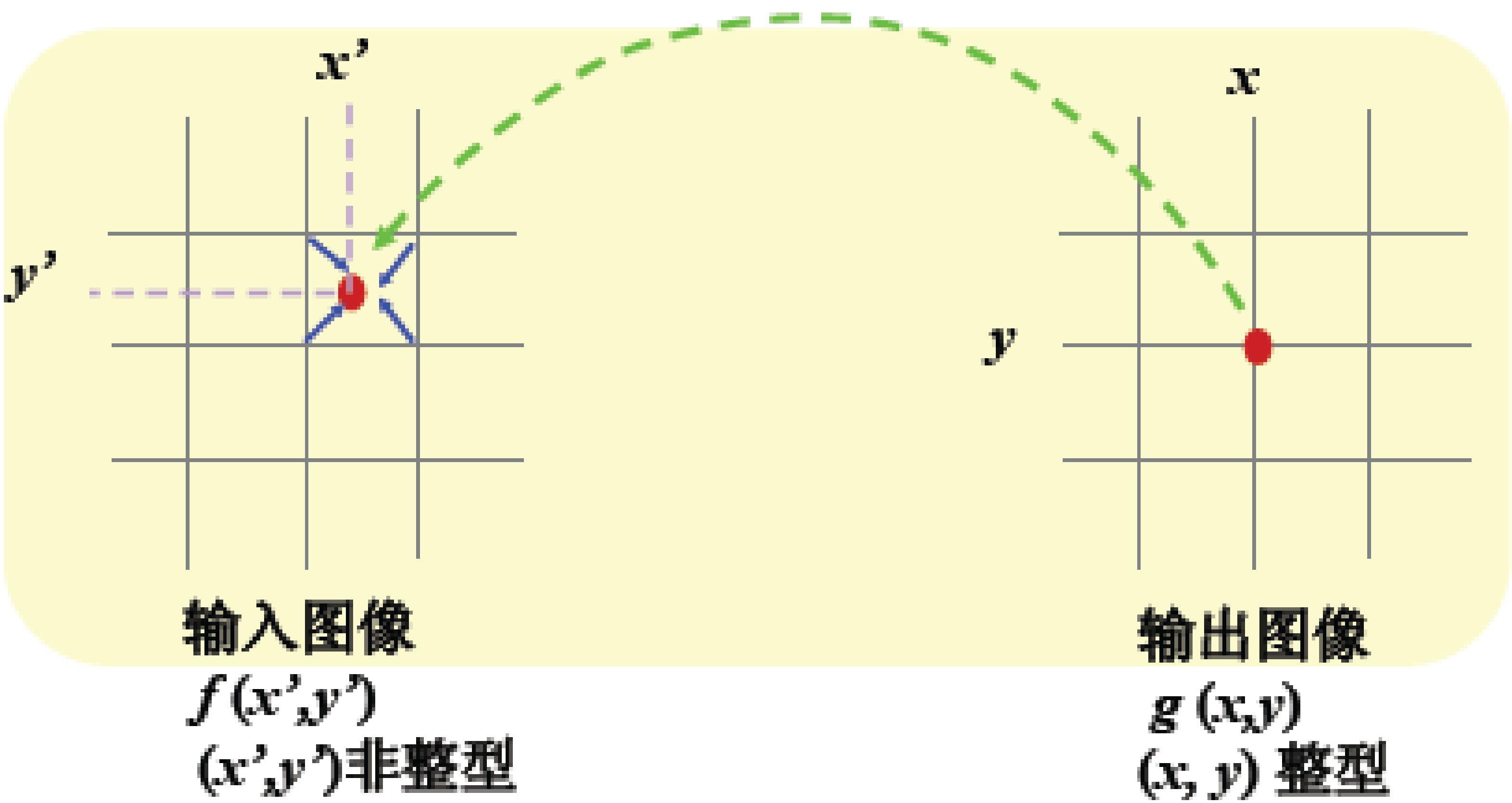
（3）输出图像中有些点找不到对应的输入像素值，如在放大处理时。



- 后向映射：

（像素填充映射）

——由输出反求输入。



结论：后向映射效率高，切实可行。

灰度级插值算法

- **1、最近邻插值**
- 输出像素灰度＝离它所映射到的位置最近的输入像素的灰度

2、双线性插值

在(0,0)，(0,1)，(1,1)，(1,0)四个点中插入1个点(*x*,*y*)，

线性内插***x***方向

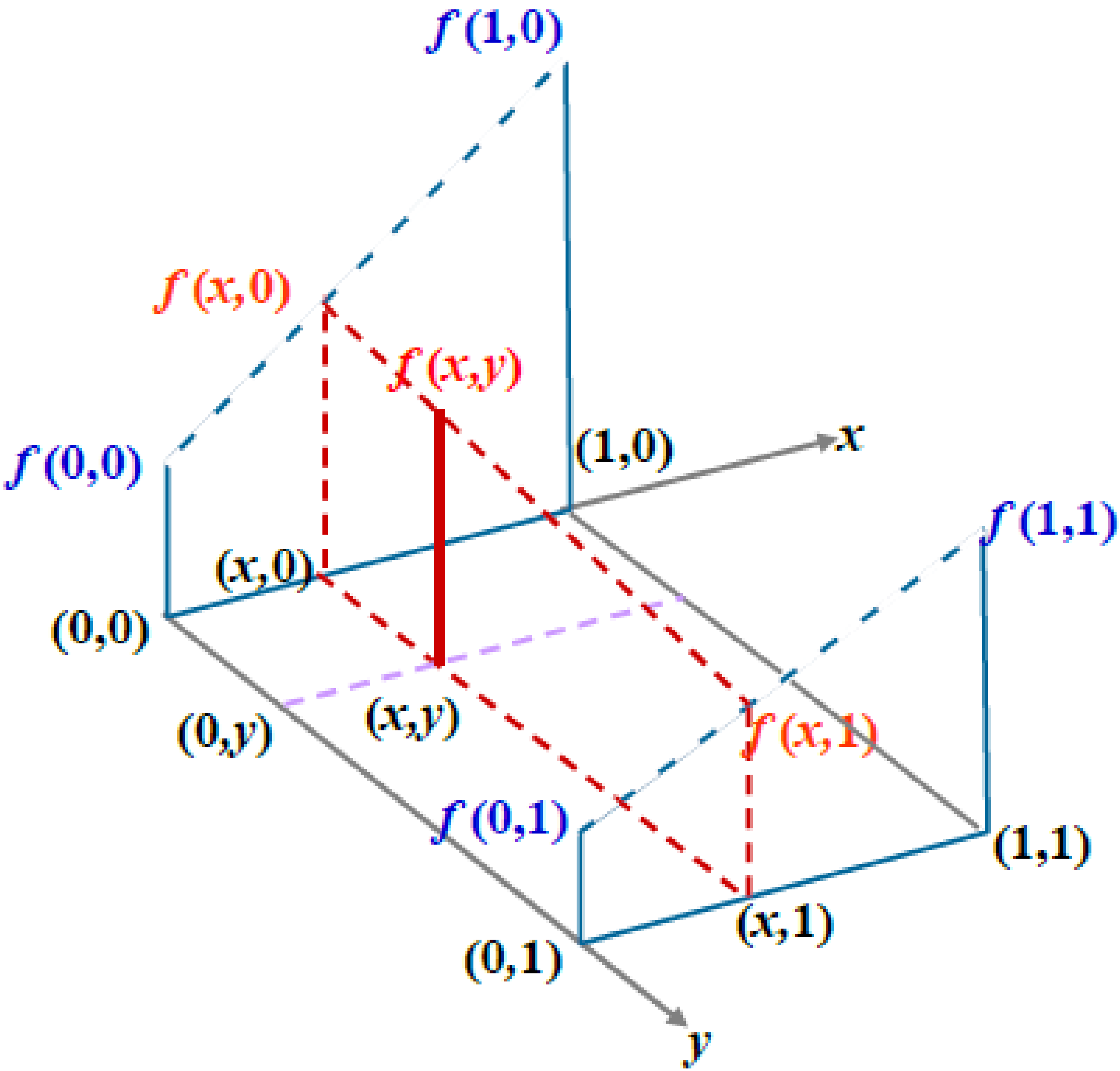
$$f(x,0) = f(0,0) + x[f(1,0) - f(0,0)]$$

$$f(x,1) = f(0,1) + x[f(1,1) - f(0,1)]$$

线性内插***y***方向

$$f(x,y) = f(x,0) + y[f(x,1) - f(x,0)]$$

可见，双线性内插实际上是用双曲抛物面和**4**个已知点来拟合。



f (1,0)
f (x,0)
f (x,y)
(1,0)
x
f (0,0)
f (1,1)
(x,0)
(0,0)
(0,y)
(x,y)
f (x,1)
f (0,1)
(1,1)
(x,1)
(0,1)
y

最邻近

双线性

双三次插值法

- 双三次插值又称三次卷积插值。三次卷积插值是一种更加复杂的插值方式。该算法利用待采样点周围16个点的灰度值作三次插值，不仅考虑到4 个直接相邻点的灰度影响，而且考虑到各邻点间灰度值变化率的影响。

$$f(i+u, j+v) = [A][B][C]$$

$$[A] = (S(1+u) \quad S(u) \quad S(1-u) \quad S(2-u))$$

$$[C] = \begin{pmatrix} S(1+v) \\ S(v) \\ S(1-v) \\ S(2-v) \end{pmatrix}$$

$$[B] = \begin{pmatrix} f(i-1, j-1) & f(i-1, j) & f(i-1, j+1) & f(i-1, j+2) \\ f(i, j-1) & f(i, j) & f(i, j+1) & f(i, j+2) \\ f(i+1, j-1) & f(i+1, j) & f(i+1, j+1) & f(i+1, j+2) \\ f(i+2, j-1) & f(i+2, j) & f(i+2, j+1) & f(i+2, j+2) \end{pmatrix}$$

$$S(\omega) = \begin{cases} 1-2|\omega|^2+|\omega|^3, & |\omega|<1 \\ 4-8|\omega|+5|\omega|^2-|\omega|^3, & 1\leqslant|\omega|<2 \\ 0, & |\omega|\geqslant 2 \end{cases}$$

以色列魏茨曼科学研究所的计算机科学家最近研究出了一种新的Super-Resolution（超分辨率，下称SR）图像放大算法

临近点插值算法（NN interpolation）

双立方插值算法（Bi-Cubic Interpolation）

弗里曼算法

金氏算法

法塔勒算法

变换级连

对一个坐标为 $\boldsymbol{v}$ 的点的平移、放缩、绕 $\boldsymbol{Z}$ 轴旋转变换可表示为：

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{R}_{\gamma}\left[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})\right] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$$

用单个变换矩阵的方法可对点矩阵$\boldsymbol{v}$ 变换

这些矩阵的运算次序一般不可互换

- 反变换

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -x_0\\ 0 & 1 & -y_0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad S^{-1}=\begin{bmatrix}1/S_x & 0 & 0\\ 0 & 1/S_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R^{-1}=\begin{bmatrix}\cos(-\gamma) & \sin(-\gamma) & 0\\ -\sin(-\gamma) & \cos(-\gamma) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$