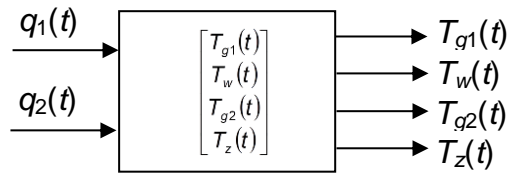


1



Właściwości dynamiczne **wymiennika ciepła** w postaci zbiornika z wodą i dwiema węzownicami: z wodą ogrzewającą (zasilającą) oraz z wodą ogrzewaną (użytkową), opisane są następującymi równaniami stanu:

$$\frac{dT_{g1}(t)}{dt} = \frac{1}{m_{g1}c_s} [c_w q_1(t)(T_{1i} - T_{g1}(t)) - \alpha_{g1} A_{g1} (T_{g1}(t) - T_w(t))], \quad T_{g1}(0) = T_{g10},$$

$$\frac{dT_w(t)}{dt} = \frac{1}{m_w c_w} [\alpha_{g1} A_{g1} (T_{g1}(t) - T_w(t)) - \alpha_{g2} A_{g2} (T_w(t) - T_{g2}(t)) - \alpha_z A_z (T_w(t) - T_z(t))], \quad T_w(0) = T_{w0},$$

$$\frac{dT_{g2}(t)}{dt} = \frac{1}{m_{g2}c_s} [\alpha_{g2} A_{g2} (T_w(t) - T_{g2}(t)) - c_w q_2(t)(T_{g2}(t) - T_{2i})], \quad T_{g2}(0) = T_{g20},$$

$$\frac{dT_z(t)}{dt} = \frac{1}{m_z c_s} [\alpha_z A_z (T_w(t) - T_z(t)) - \alpha_a A_z (T_z(t) - T_a)], \quad T_z(0) = T_{z0},$$

gdzie  $T_{g1}(t)$  oraz  $T_{g2}(t)$  reprezentują wartości temperatur wody w węzownicach, odpowiednio: ogrzewającej i ogrzewanej,  $T_w(t)$  jest temperaturą wody w zbiorniku, a  $T_z(t)$  jest temperaturą ścianek zbiornika.

$T_a$  jest stałą temperaturą zewnętrzną, a  $T_{1i}$  oraz  $T_{2i}$  reprezentują stałe temperatury wody zasilającej węzownice: ogrzewającą i ogrzewaną.

**Wielkości wejściowe** modelu:  $q_1(t) \geq 0$  – strumień masowy wody przepływającej przez węzownicę zasilającą oraz  $q_2(t) \geq 0$  – strumień masowy wody ogrzewanej. Jako **główną wielkość wyjściową** przyjąć temperaturę  $T_{g2}(t)$  wody ogrzewanej.

**Parametry** modelu:  $m_{g1}$ ,  $m_{g2}$ ,  $m_w$ ,  $m_z$  – masa węzownicy ogrzewającej i ogrzewanej, masa wody w zbiorniku oraz masa ścianek zbiornika;  $c_w$ ,  $c_s$  – ciepło właściwe wody oraz materiału węzownic i ścianek zbiornika (stal);  $A_{g1}$ ,  $A_{g2}$ ,  $A_z$  – pola powierzchni węzownic oraz ścianek zbiornika;  $\alpha_{g1}$ ,  $\alpha_{g2}$ ,  $\alpha_z$ ,  $\alpha_a$  – współczynniki przejmowania ciepła pomiędzy: węzownicą zasilającą a wodą w zbiorniku, wodą w zbiorniku a węzownicą ogrzewaną, wodą w zbiorniku a ścianką zbiornika oraz ścianką zbiornika a otaczającym powietrzem.

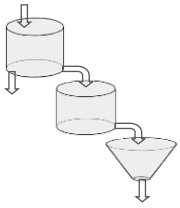
Przyjąć następujące wartości parametrów:  $m_{g1} = m_{g2} = 2$  kg,  $m_w = 50$  kg,  $m_z = 10$  kg;  $c_w = 4200$  J/(kg·K);  $c_s = 450$  J/(kg·K);  $A_{g1} = A_{g2} = 0,8$  m<sup>2</sup>,  $A_z = 1,5$  m<sup>2</sup>;  $\alpha_{g1} = \alpha_{g2} = \alpha_z = 500$  W/(m<sup>2</sup>·K),  $\alpha_a = 10$  W/(m<sup>2</sup>·K);  $T_{1i} = 95^\circ\text{C}$ ,  $T_{2i} = 35^\circ\text{C}$ ,  $T_a = 20^\circ\text{C}$ .

Przykładowe warunki początkowe dla zerowych wartości sygnałów wejściowych w celu wyznaczenia **odpowiedzi swobodnych**:  $T_{g10} = 70^\circ\text{C}$ ,  $T_{w0} = 40^\circ\text{C}$ ,  $T_{g20} = 20^\circ\text{C}$ ,  $T_{z0} = 20^\circ\text{C}$ .

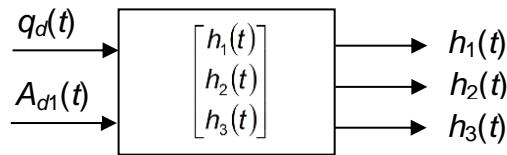
Przykładowe stałe wartości sygnałów wejściowych w celu wyznaczania **odpowiedzi skokowych** układu w początkowym stanie równowagi układu bez wymuszeń ( $T_{g10} = T_{w0} = T_{g20} = T_{z0} = 20^\circ\text{C}$ ):  $q_1(t) = 1$  kg/s oraz  $q_2(t) = 0$  kg/s. Po osiągnięciu przez układ nowego stanu równowagi skokowa zmiana wartości  $q_2(t)$  z 0 do 0,1 kg/s.

**Linearyzację** modelu przeprowadzamy dla co najmniej 3 punktów równowagi układu wyznaczonych jak powyżej.

Przybliżone **odpowiedzi impulsowe** oraz odpowiedzi na **wymuszenia sinusoidalne** wyznaczamy analogicznie, tzn. zaczynając od stanu równowagi układu bez wymuszeń, oddzielnie dla każdego z wejść. Pamiętajmy przy tym o ograniczeniach odnośnie znaków poszczególnych wielkości wejściowych.



**2.**



Układ złożony z **trzech zbiorników cieczy** ze swobodnym wypływem, połączonych kaskadowo: górnego i środkowego w kształcie **walców**, oraz dolnego w kształcie **stożka ściętego**, opisany jest następującymi równaniami stanu:

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{1}{P_1} \left( q_d(t) - \alpha_1 (A_{o1} + A_{d1}(t)) \sqrt{2gh_1(t)} \right), \quad h_1(0) = h_{10},$$

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{1}{P_2} \left( \alpha_1 A_{o1} \sqrt{2gh_1(t)} - \alpha_2 A_{o2} \sqrt{2gh_2(t)} \right), \quad h_2(0) = h_{20},$$

$$\frac{dh_3(t)}{dt} = \frac{1}{P_3(t)} \left( \alpha_2 A_{o2} \sqrt{2gh_2(t)} - \alpha_3 A_{o3} \sqrt{2gh_3(t)} \right), \quad h_3(0) = h_{30}.$$

gdzie  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$  i  $h_3(t)$  oznaczają wysokości słupa cieczy odpowiednio w zbiorniku górnym, środkowym i dolnym:

$$0 \leq h_1(t) \leq H_1, \quad 0 \leq h_2(t) \leq H_2, \quad 0 \leq h_3(t) \leq H_3,$$

zaś  $P_1$ ,  $P_2$  oraz  $P_3(t)$  są równe odpowiednio:

$$P_1 = \pi R_1^2,$$

$$P_2 = \pi R_2^2,$$

$$P_3(t) = \frac{3\pi R_3^2 h_3^2(t) + 2\pi R_3 H_3 r_3 h_3(t) + \pi H_3^2 r_3^2}{3H_3^2}.$$

**Wielkościami wejściowymi** są:  $q_d(t) \geq 0$  – strumień objętościowy cieczy dopływającej do górnego zbiornika oraz  $A_{d1}(t) \geq 0$  – zmienne pole powierzchni dodatkowego otworu wypływowego z górnego zbiornika. **Główną wielkością wyjściową** jest poziom cieczy  $h_3(t)$  w dolnym (stożkowym) zbiorniku.

**Parametry** modelu:  $R_1$  – promień przekroju górnego zbiornika walcowego,  $R_2$  – promień przekroju środkowego zbiornika walcowego,  $R_3$  oraz  $r_3$  – promienie większej i mniejszej podstawy zbiornika dolnego (stożkowego),  $H_1$ ,  $H_2$  i  $H_3$  – wysokości zbiorników,  $A_{o1}$ ,  $A_{o2}$  i  $A_{o3}$  – pola powierzchni otworów wypływowych,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  i  $\alpha_3$  – współczynniki wypływu,  $g$  – przyspieszenie grawitacyjne.

Przyjąć następujące wartości parametrów oraz ograniczeń:

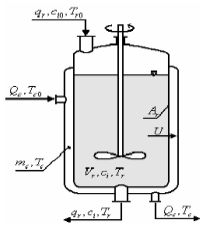
$$R_1 = R_2 = 0,5 \text{ m}; \quad R_3 = 1 \text{ m}; \quad r_3 = 0,5 \text{ m}; \quad H_1 = H_2 = 2 \text{ m}; \quad H_3 = 1 \text{ m}; \quad A_{o1} = A_{o2} = 0,002 \text{ m}^2; \quad A_{o3} = 0,0025 \text{ m}^2; \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0,95, \quad \alpha_3 = 0,93; \quad g = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

Przykładowe warunki początkowe dla zerowych wartości sygnałów wejściowych w celu wyznaczenia **odpowiedzi swobodnych**:  $h_{10}=2 \text{ m}$ ,  $h_{20}=0 \text{ m}$ ,  $h_{30}=0 \text{ m}$ .

Przykładowe stałe wartości sygnałów wejściowych w celu wyznaczania **odpowiedzi skokowych** układu w początkowym stanie równowagi układu bez wymuszeń ( $h_{10}=h_{20}=h_{30}=0 \text{ m}$ ):  $q_d(t)=0,01 \text{ kg/s}$  oraz  $A_{d1}(t)=0 \text{ m}^2$ . Po osiągnięciu przez układ nowego stanu równowagi skokowa zmiana wartości  $A_{d1}(t)$  z 0 do  $0,0005 \text{ m}^2$ .

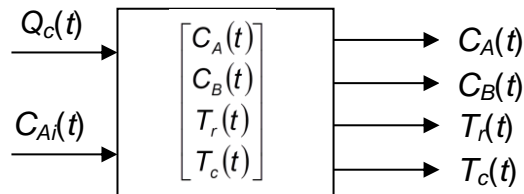
**Linearyzację** modelu przeprowadzamy dla co najmniej 3 punktów równowagi układu wyznaczonych jak powyżej.

Przybliżone **odpowiedzi impulsowe** oraz odpowiedzi na **wymuszenia sinusoidalne** wyznaczamy analogicznie, tzn. zaczynając od stanu równowagi układu bez wymuszeń, oddzielnie dla każdego z wejść. Pamiętajmy przy tym o ograniczeniach odnośnie znaków poszczególnych wielkości wejściowych.



**3.**

Zjawiska chemiczne i cieplne zachodzące w **reaktorze zbiornikowym z ciągłym mieszaniem** i zewnętrznym chłodzeniem opisane są następującymi równaniami stanu:



$$\frac{dC_A(t)}{dt} = \frac{q_r}{V_r} (C_{Ai}(t) - C_A(t)) - k_1(t)C_A(t) - k_3(t)C_A^2(t), \quad C_A(0) = C_{A0},$$

$$\frac{dC_B(t)}{dt} = -\frac{q_r}{V_r} C_B(t) + k_1(t)C_A(t) - k_2(t)C_B(t), \quad C_B(0) = C_{B0},$$

$$\frac{dT_r(t)}{dt} = \frac{q_r}{V_r} (T_{ri} - T_r(t)) - \frac{h_r(t)}{\rho_r c_{pr}} - \frac{A_r \alpha}{V_r \rho_r c_{pr}} (T_r(t) - T_c(t)), \quad T_r(0) = T_{r0},$$

$$\frac{dT_c(t)}{dt} = \frac{1}{m_c c_{pc}} (Q_c(t) + A_r \alpha (T_r(t) - T_c(t))), \quad T_c(0) = T_{c0},$$

gdzie  $C_A(t) \geq 0$  oraz  $C_B(t) \geq 0$  reprezentują stężenia molowe składników biorących udział w reakcji: składnika wejściowego A oraz składnika B będącego produktem reakcji egzotermicznej (przebiegającej z wydzielaniem ciepła). Z kolei  $T_r(t)$  oraz  $T_c(t)$  oznaczają temperatury: mieszaniny znajdującej się wewnątrz reaktora oraz substancji chłodzącej reaktor.

Jako **wielkości wejściowe** modelu przyjąć: strumień ciepła  $Q_c(t) \leq 0$  odprowadzanego przez układ chłodzenia reaktora oraz stężenie wejściowe  $C_{Ai}(t) \geq 0$  składnika A. **Główną wielkością wyjściową** modelu jest stężenie molowe  $C_B(t)$  produktu reakcji.

Współczynniki szybkości reakcji  $k_j(t)$  opisane są przez prawo Arrheniusa:

$$k_j(t) = k_{0j} \exp\left(-\frac{E_j}{RT_r(t)}\right), \quad j = 1, 2, 3,$$

zaś ciepło  $h_r(t)$  wydzielane w trakcie reakcji można wyliczyć z zależności:

$$h_r(t) = h_1 k_1(t) C_A(t) + h_2 k_2(t) C_B(t) + h_3 k_3(t) C_A^2(t).$$

Wartości **parametrów** modelu reaktora podane zostały w poniższej tabeli.

$k_{01} = 3,5 \cdot 10^8 \text{ 1/s}$	$k_{02} = 3,5 \cdot 10^8 \text{ 1/s}$	$k_{03} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ 1/s}$
$E_1/R = 9800 \text{ K}$	$E_2/R = 9800 \text{ K}$	$E_3/R = 8600 \text{ K}$
$h_1 = -4200 \text{ J/mol}$	$h_2 = 11000 \text{ J/mol}$	$h_3 = 42000 \text{ J/mol}$
$q_r = 0,001 \text{ m}^3/\text{s}$	$\rho_r = 900 \text{ kg/m}^3$	$c_{pr} = 3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$
$V_r = 1 \text{ m}^3$	$c_{pc} = 2 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$	$A_r = 0,1 \text{ m}^2$
$m_c = 5 \text{ kg}$	$T_{ri} = 393 \text{ K}$	$\alpha = 300 \text{ J/(m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K)}$

Przykładowe warunki początkowe dla zerowych wartości sygnałów wejściowych w celu wyznaczenia **odpowiedzi swobodnych**:  $C_{A0} = 5 \text{ mol/m}^3$ ,  $C_{B0} = 0 \text{ mol/m}^3$ ,  $T_{r0} = 393 \text{ K}$ ,  $T_{c0} = 393 \text{ K}$ .

Przykładowe stałe wartości sygnałów wejściowych w celu wyznaczania **odpowiedzi skokowych** układu w początkowym stanie równowagi układu bez wymuszeń ( $C_{A0} = C_{B0} = 0 \text{ mol/m}^3$ ,  $T_{r0} = T_{c0} = 393 \text{ K}$ ):  $C_{Ai}(t) = 10 \text{ mol/m}^3$  oraz  $Q_c(t) = 0 \text{ J/s}$ . Po osiągnięciu przez układ nowego stanu równowagi skokowa zmiana wartości  $Q_c(t)$  z 0 do  $-160 \text{ J/s}$ .

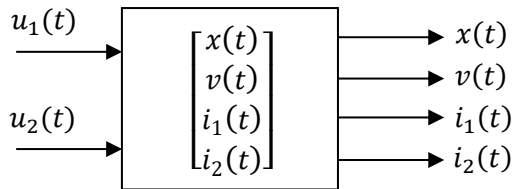
**Linearyzację** modelu przeprowadzamy dla co najmniej 3 punktów równowagi układu wyznaczonych jak powyżej.

Przybliżone **odpowiedzi impulsowe** oraz odpowiedzi na **wymuszenia sinusoidalne** wyznaczamy analogicznie, tzn. zaczynając od stanu równowagi układu bez wymuszeń, oddzielnie dla każdego z wejść. Pamiętajmy przy tym o ograniczeniach odnośnie znaków poszczególnych wielkości wejściowych.



4

■ Laboratoryjny układ **lewitacji magnetycznej** z dwoma elektromagnesami sterującymi opisany jest następującymi równaniami stanu:



$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{F_1(t)}{m} - \frac{F_2(t)}{m} - g, \quad v(0) = v_0,$$

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{1}{k_1(t)} \left( \frac{u_1(t)}{r} - i_1(t) \right), \quad i_1(0) = i_{10},$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = \frac{1}{k_2(t)} \left( \frac{u_2(t)}{r} - i_2(t) \right), \quad i_2(0) = i_{20},$$

gdzie:  $x(t)$  – odległość dolnej krawędzi sfery od dolnego elektromagnesu,  $v(t)$  – prędkość ruchu sfery,  $i_1(t)$  – prąd w cewce górnej,  $i_2(t)$  – prąd w cewce dolnej.

$F_1(t)$  oraz  $F_2(t)$  oznaczają siły przyciągania górnego i dolnego elektromagnesu, równe odpowiednio:

$$F_1(t) = i_1^2(t) \frac{F_{P1}}{F_{P2}} \exp\left(-\frac{x_d - x(t)}{F_{P2}}\right), \quad F_2(t) = i_2^2(t) \frac{F_{P1}}{F_{P2}} \exp\left(-\frac{x(t)}{F_{P2}}\right),$$

z kolei  $k_1(t)$  oraz  $k_2(t)$  wynoszą:

$$k_1(t) = \frac{k_{P1}}{k_{P2}} \exp\left(-\frac{x_d - x(t)}{k_{P2}}\right), \quad k_2(t) = \frac{k_{P1}}{k_{P2}} \exp\left(-\frac{x(t)}{k_{P2}}\right).$$

Rolę **wielkości wejściowych** pełnią napięcia sterujące elektromagnesów  $u_1(t) \geq 0$  oraz  $u_2(t) \geq 0$ , zaś jako **główną wielkość wyjściową** przyjąć położenie sfery  $x(t)$ .

**Parametry** modelu i ich wartości: masa sfery  $m = 0.0571$  kg; przyspieszenie grawitacyjne:  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>; rezystancja uzwojeń:  $r = 0.397$  Ω;  $F_{P1} = 1.7521 \times 10^{-2}$  H;  $F_{P2} = 5.8231 \times 10^{-3}$  m;  $k_{P1} = 1.4142 \times 10^{-4}$  m·s;  $k_{P2} = 4.5626 \times 10^{-3}$  m; różnica odległości między elektromagnesami oraz średnicą sfery:  $x_d = 0.016$  m.

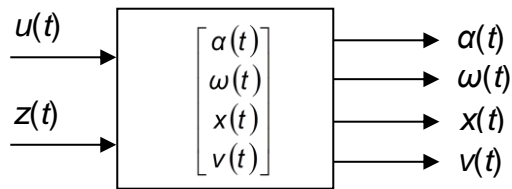
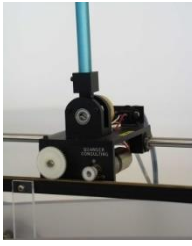
Uwzględnić w modelu **ograniczenie** wartości sygnału  $x(t)$ :  $0 \leq x(t) \leq x_d$ .

Przykładowe warunki początkowe dla zerowych wartości sygnałów wejściowych w celu wyznaczenia **odpowiedzi swobodnych**:  $x_0 = x_d = 0.016$  m,  $v_0 = 0$  m/s,  $i_{10} = 5$  A,  $i_{20} = 0$  A.

Przykładowe stałe wartości sygnałów wejściowych w celu wyznaczania **odpowiedzi skokowych** układu w początkowym stanie równowagi układu bez wymuszeń ( $x_0 = 0$  m,  $v_0 = 0$  m/s,  $i_{10} = i_{20} = 0$  A):  $u_1(t) = 0.7$  V oraz  $u_2(t) = 0$  V. Po osiągnięciu przez układ nowego stanu równowagi (leżącego na ograniczeniu) zmiana wartości  $u_2(t)$  z 0 do 2.7 V.

Przybliżone **odpowiedzi impulsowe** oraz odpowiedzi na **wymuszenia sinusoidalne** wyznaczamy analogicznie, tzn. zaczynając od stanu równowagi układu bez wymuszeń, oddzielnie dla każdego z wejść.

**Linearyzację** modelu przeprowadzamy dla co najmniej 3 różnych punktów pracy: dwóch punktów równowagi układu leżących na ograniczeniach oraz dla położenia środkowego sfery.



**5.** Równania stanu opisujące dynamikę **wahadła odwróconego**, umieszczonego na **ruchomym wózku**, mają postać:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \omega(t), \quad \alpha(0) = \alpha_0,$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{h \sin \alpha(t) + i \omega(t) + j \omega(t) \sin 2\alpha(t) + k \cos \alpha(t)(u(t) + z(t)) + l v(t) \cos \alpha(t)}{a \sin^2 \alpha(t) + b}, \quad \omega(0) = \omega_0,$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{c \sin 2\alpha(t) + d \omega^2(t) \sin \alpha(t) + e \omega(t) \cos \alpha(t) + f(u(t) + z(t)) + g v(t)}{a \sin^2 \alpha(t) + b}, \quad v(0) = v_0.$$

gdzie  $\alpha(t)$  jest kątem wychylenia [rad], liczonym od górnego położenia,  $\omega(t)$  – prędkością kątową wahadła [rad/s],  $x(t)$  – odległością wózka liczoną od położenia wyjściowego  $x=0$  (środką szyny) [m], zaś  $v(t)$  – prędkością liniową wózka [m/s]. Położenie  $x(t)$  ograniczone jest długością szyny, po której porusza się wózek:

$$-x_{max} \leq x(t) \leq x_{max}.$$

**Wielkościami wejściowymi** są: przyłożona do wózka siła sterująca  $u(t)$  [N] oraz oddziałująca na wózek siła zakłócająca  $z(t)$  [N]. Jako **główne wielkości wyjściowe** przyjmując: kąt wychylenia wahadła  $\alpha(t)$  oraz położenie wózka  $x(t)$ .

**Parametry** w powyższych równaniach dane są następującymi wyrażeniami:

$$\begin{aligned} a &= m_c^2 l_p^2 & b &= (m_c + m_p) i_p + m_c m_p l_p^2 & c &= -9.81 m_p^2 l_p^2 / 2 \\ d &= (m_p l_p^2 + i_p) m_p l_p & e &= m_p l_p c_p & f &= m_p l_p^2 + i_p \\ g &= -(m_p l_p^2 + i_p) f_p & h &= 9.81 (m_p + m_c) m_p l_p & i &= -(m_p + m_c) c_p \\ j &= -m_p^2 l_p^2 / 2 & k &= -l_p m_p & l &= m_p l_p f_p \end{aligned}$$

gdzie:  $m_c$  – masa wózka,  $m_p$  – masa wahadła,  $l_p$  – odległość środka ciężkości układu od osi obrotu wahadła,  $f_p$  – współczynnik tarcia w ruchu liniowym,  $c_p$  – współczynnik tarcia w ruchu obrotowym,  $i_p$  – moment bezwładności wahadła.

Przyjąć następujące wartości parametrów i ograniczeń modelu:  $m_c = 2,04$  kg;  $m_p = 0,09$  kg;  $l_p = 0,35$  m;  $f_p = 0,25$  kg/s;  $c_p = 0,01$  kg·m<sup>2</sup>/s;  $i_p = 0,01$  kg·m<sup>2</sup>,  $x_{max} = 10$  m.

Przykładowe warunki początkowe dla zerowych wartości sygnałów wejściowych w celu wyznaczenia **odpowiedzi swobodnych**:  $\alpha_0 = \pi/10$  rad,  $\omega_0 = 0$  rad/s,  $x_0 = 0$  m,  $v_0 = 0$  m/s.

Przykładowe stałe wartości sygnałów wejściowych w celu wyznaczania **odpowiedzi skokowych** układu w początkowym stanie równowagi układu bez wymuszeń ( $\alpha_0 = \pi$  rad,  $\omega_0 = 0$  rad/s,  $x_0 = 0$  m,  $v_0 = 0$  m/s):  $u(t)=1$  N oraz  $z(t)=0$  N. Po osiągnięciu przez układ nowego stanu równowagi (leżącego na ograniczeniu) zmiana wartości  $z(t)$  z 0 do -1,5 N.

Przybliżone **odpowiedzi impulsowe** oraz odpowiedzi na **wymuszenia sinusoidalne** wyznaczamy zaczynając od dowolnego stabilnego stanu równowagi układu, oddzielnie dla każdego z wejść.

**Linearyzację** modelu przeprowadzamy dla co najmniej 3 różnych punktów pracy, odpowiadających wybranym stabilnym i niestabilnym punktom równowagi układu.