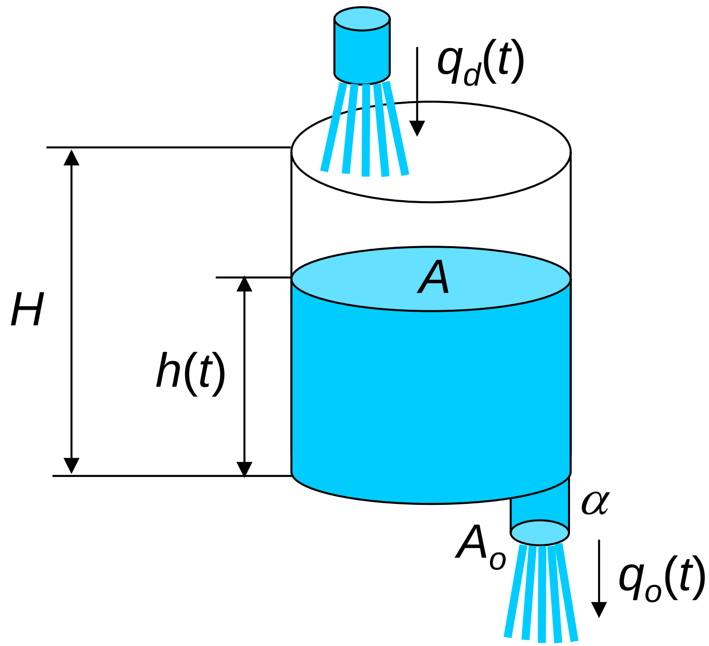
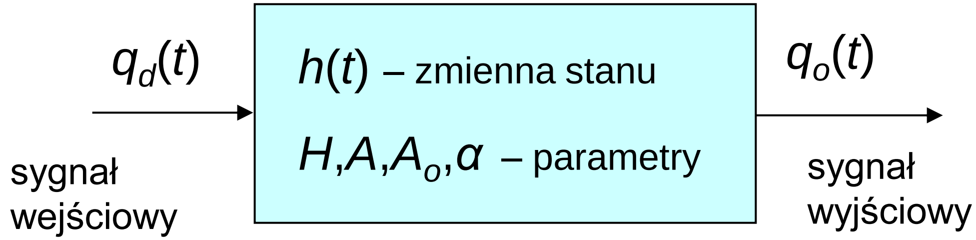
Modelowanie w *Simulinku* – przykład I: Zbiornik cieczy z odpływem grawitacyjnym



schemat ideowy

schemat blokowy



UWAGA I: Podział sygnałów występujących w modelu na: wejściowe, wyjściowe oraz zmienne stanu zależy od przeznaczenia tego modelu (na przykład od celu sterowania).

Na przykład, gdyby celem sterowania była stabilizacja poziomu cieczy w zbiorniku, jako sygnał wyjściowy modelu należałoby przyjąć poziom cieczy $h(t)$ – czyli bezpośrednio zmienną stanu układu.

UWAGA II: Wybór wielkości fizycznych uwzględnianych w modelu również zależy od przeznaczenia tego modelu.

Na przykład, gdyby celem sterowania była stabilizacja poziomu cieczy $h(t)$ w zbiorniku **oraz** stabilizacja temperatury cieczy $T_o(t)$ wypływającej ze zbiornika, wówczas w modelu należałoby uwzględnić również sygnały reprezentujące wartości temperatur cieczy.

Zbiornik cieczy – model matematyczny

Modele matematyczne układów dynamicznych w przypadku **modelowania fizycznego** opracowuje się najczęściej na podstawie różnorakich **bilansów** odpowiednich wielkości fizycznych, np.: masy, objętości, energii mechanicznej, energii cieplnej, itp.

W naszym przypadku **bilans objętości cieczy** w zbiorniku wygląda następująco (dla uproszczenia zakładamy $q_z(t)=0$, czyli brak zakłóceń):

Przyrost objętości cieczy zgromadzonej w zbiorniku w jednostce czasu	=	Objętość cieczy dopływającej do zbiornika w jednostce czasu	–	Objętość cieczy wypływającej ze zbiornika w jednostce czasu

$$\frac{dV(t)}{dt} = q_d(t) - q_o(t)$$

Ponieważ:

$$V(t) = Ah(t)$$

oraz dla wypływu grawitacyjnego (prawo Toricellego):

$$q_o(t) = \alpha A_o \sqrt{2gh(t)}$$

gdzie α **–** tzw. współczynnik wypływu, g **–** przyspieszenie ziemskie, w wyniku otrzymujemy **równanie różniczkowe dynamiki** układu zbiornika cieczy następującej postaci:

$$\boxed{A\frac{dh(t)}{dt} + \alpha A_o \sqrt{2gh(t)} = q_d(t)}$$

Jest to **nieliniowe** równanie różniczkowe **rzędu pierwszego**.

Kalibracja modelu

Aby model matematyczny dynamiki układu był kompletny, należy go dodatkowo odpowiednio **skalibrować**, tzn. odpowiedzieć na następujące pytania:

- jakie są wartości poszczególnych **parametrów** modelu?
- czy i jakie fizyczne **ograniczenia** wartości poszczególnych sygnałów należy uwzględnić w modelu?
- jakie **warunki początkowe** należy uwzględnić w modelu i jakie wartości mogą one przyjmować?

Kalibracja modelu – c.d.

Przykładowe odpowiedzi dla układu naszego zbiornika mogą być następujące:

- **Parametry:** wysokość zbiornika H = 5 m; pole powierzchni zbiornika A = 3 m^2; pole powierzchni otworu wylotowego A_o = 0,02 m^2; wartość współczynnika wypływu α = 0,95; przyspieszenie ziemskie g = 9,8 m/s^2.
- **Ograniczenia:** wartość zmiennej $h(t)$ nie może być mniejsza niż 0 oraz większa niż H, gdzie H = 5 m jest wysokością zbiornika; wartość zmiennej $q_d(t)$ nie może być mniejsza niż 0 oraz większa niż q_{dmax}, gdzie q_{dmax} = 0,2 m^3/s jest maksymalną wydajnością pompy dostarczającej ciecz do zbiornika.
- **Warunek początkowy** równania różniczkowego reprezentuje początkowy poziom cieczy w zbiorniku: $h(0) = h_0$, przy czym $0 \le h_0 \le H$.

Zbiornik cieczy – model komputerowy

Aby zbudować model komputerowy zbiornika, najpierw przekształcimy równanie jego dynamiki do postaci tzw. **równania stanu**:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A} q_d(t) - \alpha \frac{A_o}{A} \sqrt{2gh(t)}$$

Po scałkowaniu równania otrzymujemy:

warunek początkowy

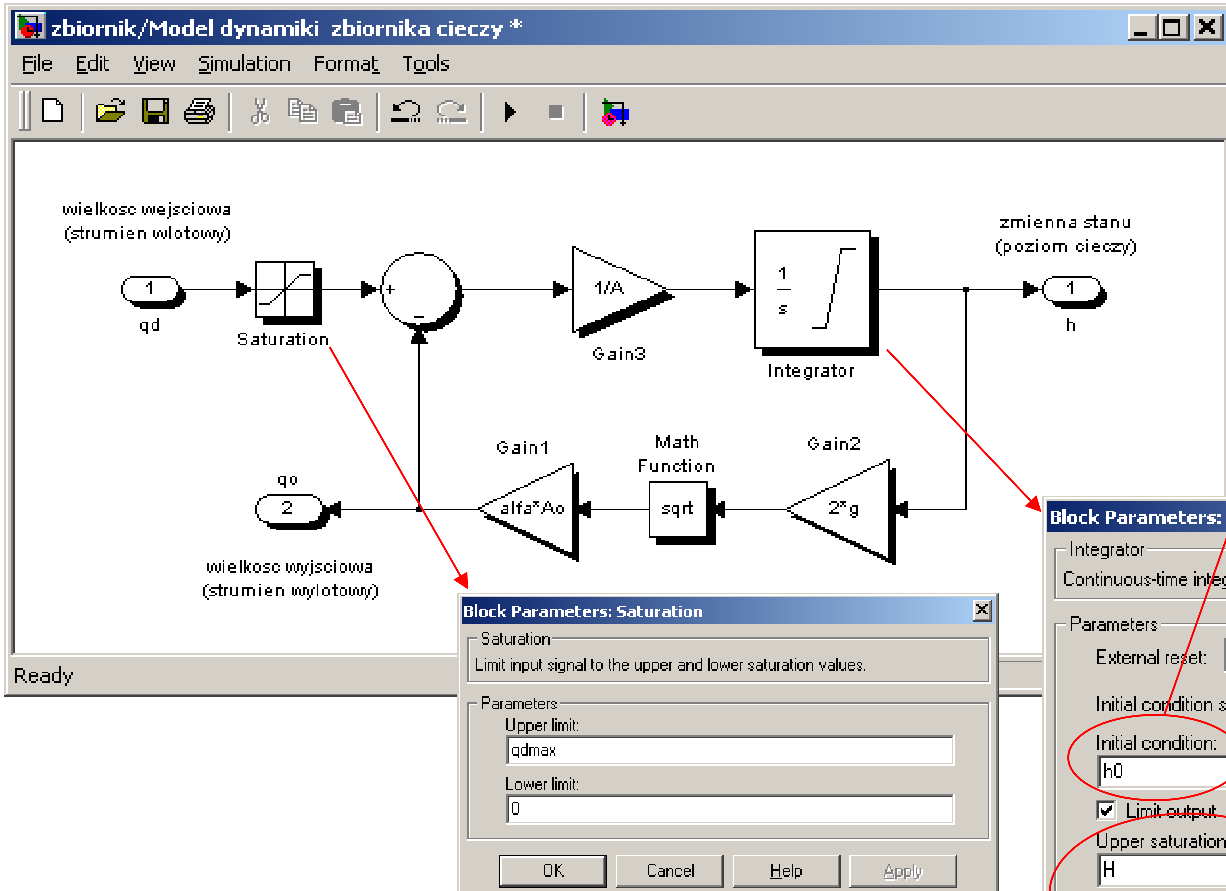
ograniczenia

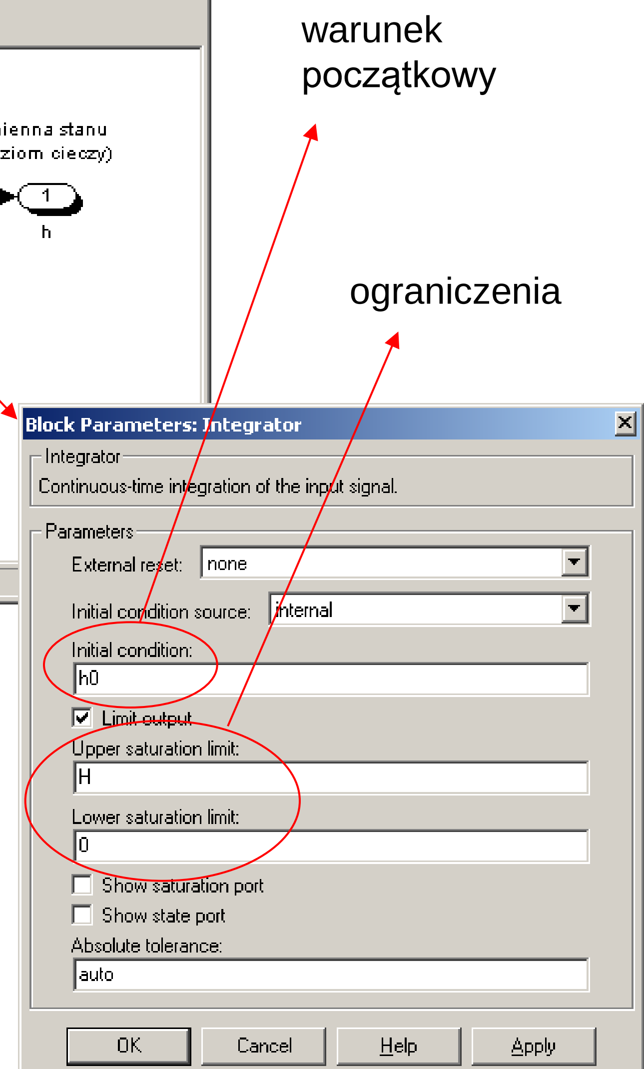
$$\boxed{h(t) = \int_0^t \frac{1}{A}\left(q_d(\tau) - \alpha A_o \sqrt{2gh(\tau)}\right) d\tau + h(0)}$$

$$0 \leq h(t) \leq H$$

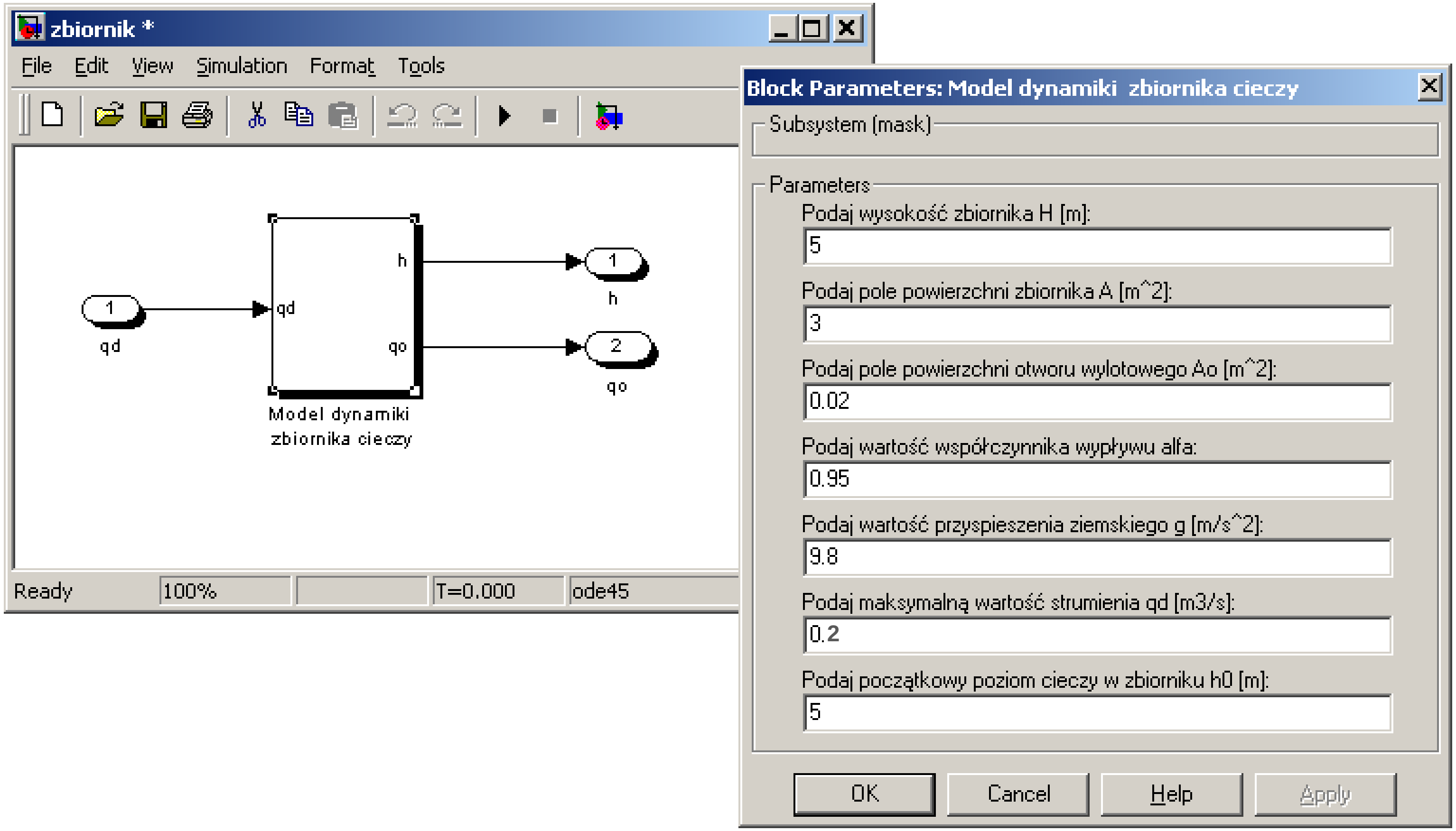
$$0 \leq q_d(\tau) \leq q_{d\,max}$$

Model komputerowy zbudujemy w środowisku *Matlab/Simulink*, korzystając z powyższego równania całkowego, z uwzględnieniem podanych ograniczeń oraz warunku początkowego.



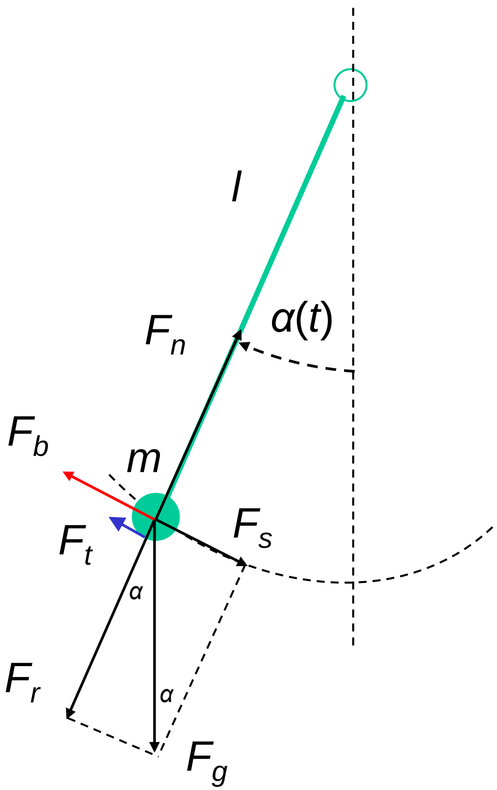


Schemat modelu symulacyjnego dynamiki zbiornika cieczy zbudowany z wykorzystaniem elementów biblioteki *Simulink* pakietu *Matlab*



Schemat modelu symulacyjnego dynamiki zbiornika po operacji **grupowania** oraz **okno dialogowe** umożliwiające wprowadzenie wartości parametrów modelu oraz warunków początkowych

Modelowanie w *Simulinku* – przykład II: Wahadło matematyczne



schemat ideowy wahadła

Na podstawie bilansu sił działających na poruszające się wahadło, otrzymujemy następujące równanie różniczkowe opisujące dynamikę jego ruchu:

$$\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \frac{b}{m \cdot l} \cdot \frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{g}{l} \cdot \sin\alpha(t) = 0$$

gdzie:

$\alpha(t)$ – kąt wychylenia wahadła,

m – masa wahadła,

l – długość wahadła,

b – współczynnik tarcia,

g – przyspieszenie grawitacyjne.

Wahadło matematyczne – równania stanu

Oznaczając przez $\omega(t)$ prędkość kątową ruchu wahadła:

$$\omega(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt},$$

równanie różniczkowe rzędu **drugiego** z poprzedniego slajdu można zapisać w formie układu **dwóch** równań różniczkowych rzędu **pierwszego**:

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha(t)}{dt} = \omega(t), \\ \dfrac{d\omega(t)}{dt} = -\dfrac{g}{l} \cdot \sin\alpha(t) - \dfrac{b}{m \cdot l} \cdot \omega(t), \end{cases}$$

uzupełnionych o warunki początkowe $\alpha(0)=\alpha_0$ i $\omega(0)=\omega_0$, reprezentujące początkowe wartości kąta wychylenia i prędkości kątowej wahadła.

Wahadło matematyczne – schemat blokowy

$\alpha(t)$, $\omega(t)$ – zmienne stanu

m, l, g, k – parametry

$\xrightarrow{\alpha(t)}$ sygnał wyjściowy

- Ze względu na brak wymuszeń zewnętrznych $u(t)$, matematyczny model wahadła ma postać **jednorodnego** równania różniczkowego (ang. *homogeneous differential equation*).

- Takie układy dynamiczne nazywane są układami **swobodnymi**, a nietrywialne („niebanalne") **rozwiązania swobodne** otrzymuje się w przypadku, gdy warunki początkowe nie reprezentują **punktu równowagi** układu.

Wahadło matematyczne – model komputerowy

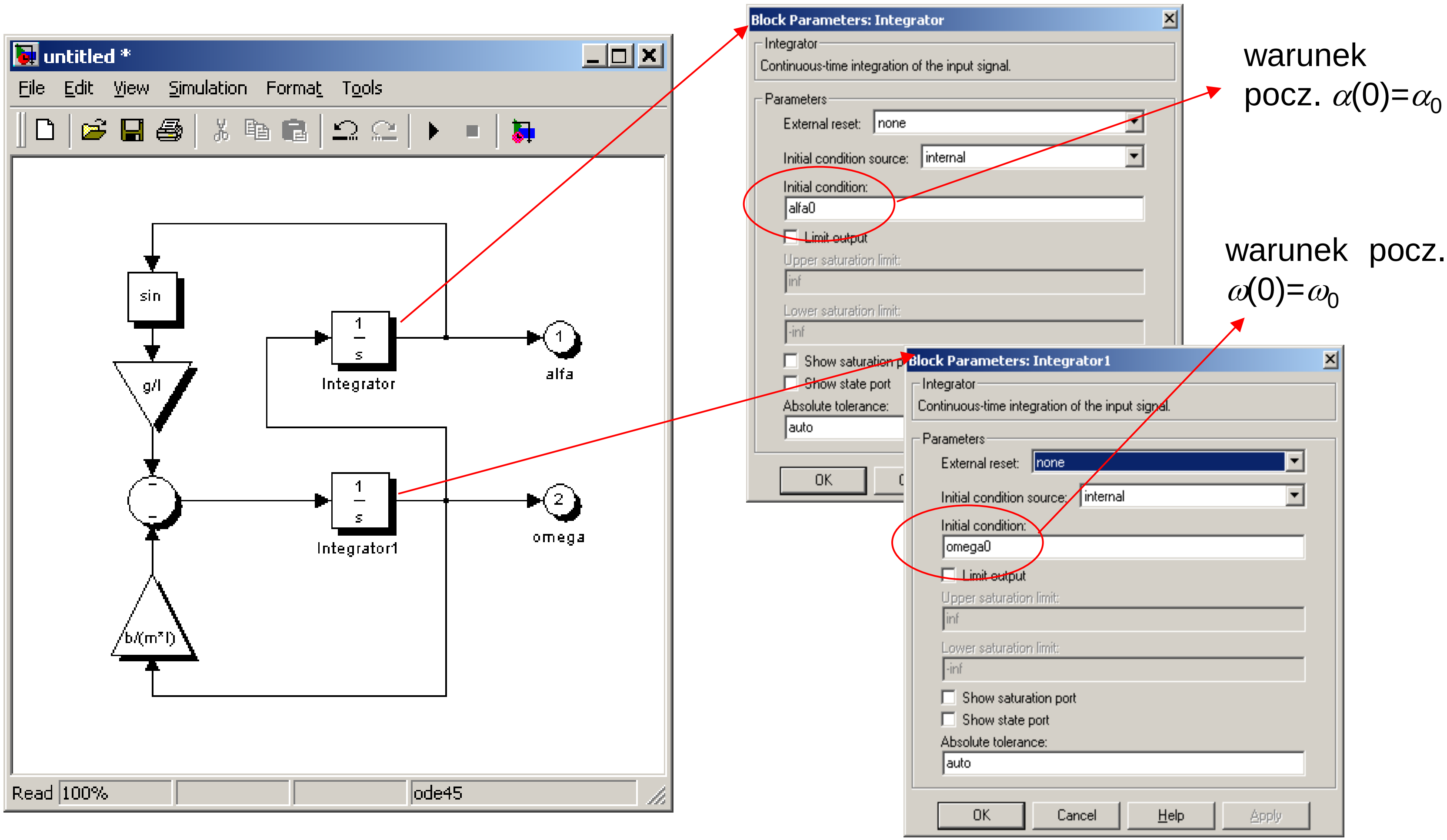
Po scałkowaniu układu równań ze slajdu II/11 otrzymujemy:

$$\begin{cases} \alpha(t) = \int_0^t \omega(\tau)d\tau + \alpha(0) \\ \omega(t) = \int_0^t \left(-\frac{g}{l} \cdot \sin\alpha(\tau) - \frac{b}{m \cdot l} \cdot \omega(\tau) \right) d\tau + \omega(0) \end{cases}$$

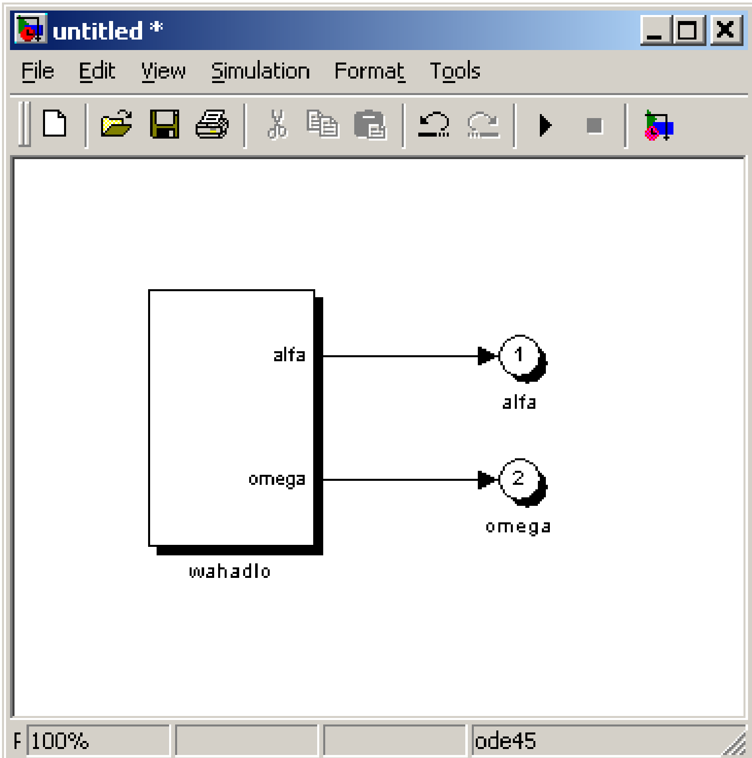
warunki początkowe

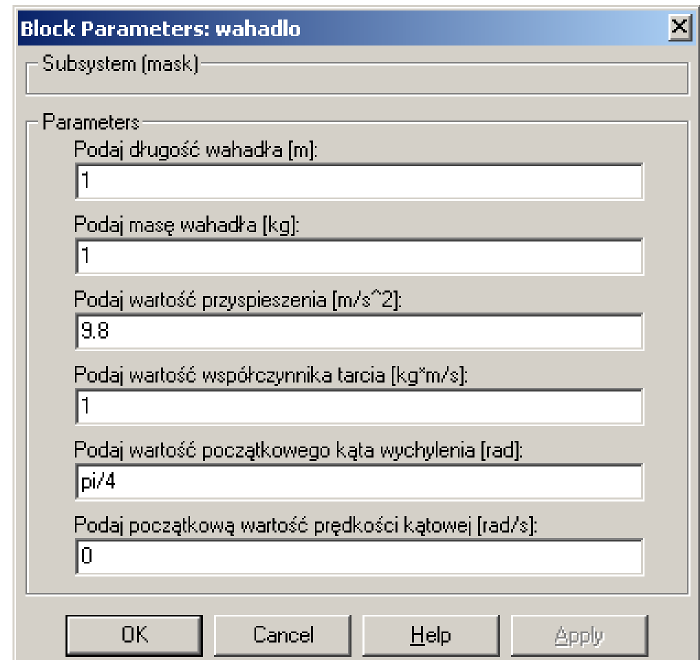
Kalibracja modelu (wartości przykładowe):

- **Parametry:** l = 1 m; m = 1 kg; b = 1 kg·m/s; g = 9,8 m/s^2
- **Ograniczenia sygnałów:** brak ($\alpha(t) \in \mathbb{R}$, $\omega(t) \in \mathbb{R}$)
- **Warunki początkowe:** początkowe wartości kąta wychylenia wahadła $\alpha(0) = \alpha_0$ oraz jego prędkości kątowej $\omega(0) = \omega_0$



Schemat modelu komputerowego dynamiki wahadła matematycznego zbudowany z wykorzystaniem elementów biblioteki *Simulink*

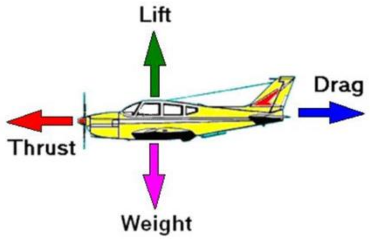




Schemat modelu komputerowego dynamiki wahadła po operacji **grupowania** oraz **okno dialogowe** umożliwiające wprowadzenie wartości parametrów modelu oraz warunków początkowych

Punkt równowagi układu dynamicznego

- **Punktem (stanem) równowagi** (ang. *equilibrium point, trim point*) układu dynamicznego nazywamy punkt (stan układu), w którym prędkość zmian wartości wszystkich zmiennych stanu układu jest zerowa, tzn. wszystkie pochodne po czasie w równaniach jego dynamiki przyjmują wartości zerowe.
- Punkt równowagi układu nie musi oznaczać braku ruchu, przepływu, itp. – oznacza on jedynie niezmienność w czasie wartości jego zmiennych stanu.
- Na przykład można przyjąć, że samolot lecący na stałej wysokości ze stałą prędkością znajduje się w **stanie równowagi**.



Przykład: zbiornik cieczy

Dla punktu równowagi otrzymujemy:

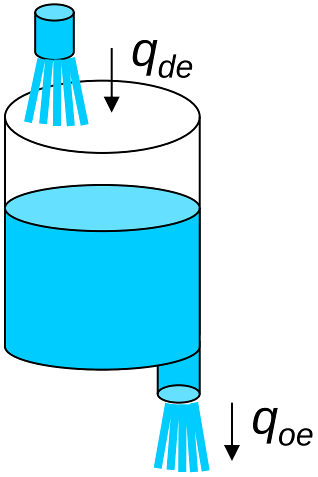
$$\underbrace{A\frac{dh}{dt}}_{=0}+\alpha A_o\sqrt{2gh_e}=q_{de}$$

czyli:

$$\alpha A_o\sqrt{2gh_e}=q_{de}$$

oraz:

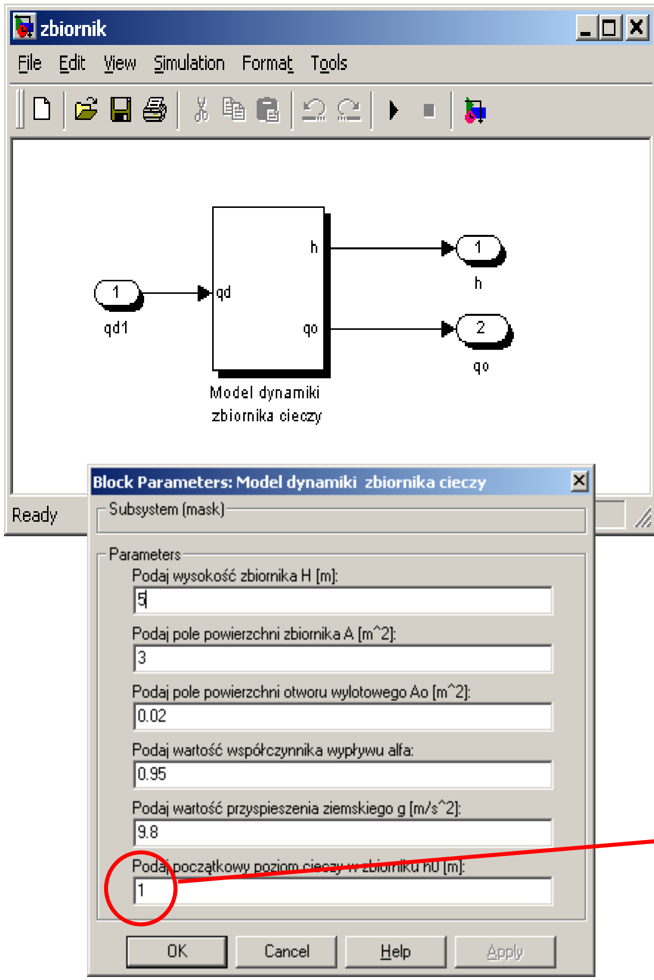
$$h_e=\frac{1}{2g\alpha^2 A_o^{\ 2}}q_{de}^{\ 2}$$



$q_{de} = q_{oe}$

W stanie równowagi wartości strumienia cieczy q_{de} dopływającej do zbiornika i z niego odpływającej q_{oe} są sobie równe.

Wyznaczenie najbliższego punktu równowagi układu dynamicznego umożliwia w programie *Matlab/Simulink* funkcja `trim`.



Po wpisaniu w oknie Matlaba polecenia:

```
[x,u,y,dx] = trim('zbiornik')
```

otrzymujemy:

```
x = -1.0000
u =   0
y =   0
      0
dx =  0
```

Punkt równowagi wyznaczany jest w odniesieniu do podanego w oknie warunku początkowego, czyli otrzymujemy h_e=1-1=0

Inna postać wywołania funkcji `trim`

```
[x,u,y,dx] = trim('sys',x0,u0,y0)
```

Znajduje punkt równowagi najbliższy podanym „startowym” wartościom zmiennych stanu `x0`, wielkości wejściowych `u0` oraz wyjściowych `y0`.

Przykład:

Po wpisaniu w oknie *Matlaba* polecenia:

```
[x,u,y,dx] = trim('zbiornik',[3],[0.1])
```

znajdujemy następujący najbliższy punkt równowagi:

```
x = 1.5000        % zmienna stanu: h = 1.5 m
u = 0.1030        % wielkość wejściowa: qd = 0.103 m3/s
y = 1.5000        % wielkość wyjściowa: h = 1.5 m
    0.1030                            qo = 0.103 m3/s
dx = -4.251e-015 % pochodna zm. stanu dh/dt = 0 m/s
```

Kolejna postać wywołania funkcji `trim`

```
[x,u,y,dx] = trim('sys',x0,u0,y0,ix,iu,iy)
```

Próbuje znaleźć punkt równowagi dokładnie dla podanych wartości zmiennych zmiennych stanu, wielkości wejściowych oraz wyjściowych.

Przykład

Po wpisaniu w oknie Matlaba polecenia:

```
[x,u,y,dx] = trim('zbiornik',[],[0.133],[],[],[1])
```

znajdujemy następujący punkt równowagi:

```
x = 2.5000         % zmienna stanu: h = 2.5 m
u = 0.1330         % wielkość wejściowa: qd = 0.133 m3/s
y = 2.5000         % wielkość wyjściowa: h = 2.5 m
    0.1330                             qo = 0.133 m3/s
dx = 3.0581e-013 % pochodna zmiennej stanu: „prawie” 0
```

Przykład: wahadło matematyczne

Dla punktu równowagi otrzymujemy:

$$\underbrace{\frac{d^2\alpha}{dt^2}}_{=0}+\frac{b}{m\cdot l}\cdot\underbrace{\frac{d\alpha}{dt}}_{=0}+\frac{g}{l}\cdot\sin\alpha_e=0$$

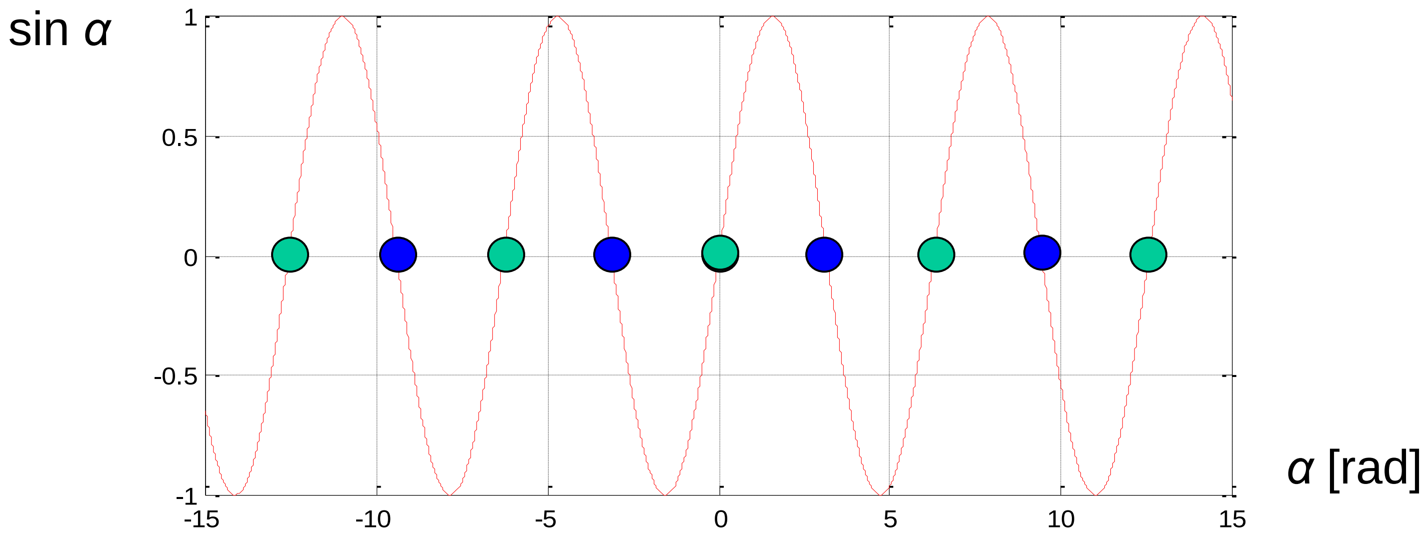
czyli:

$$\frac{g}{l}\cdot\sin\alpha_e=0$$

a stąd:

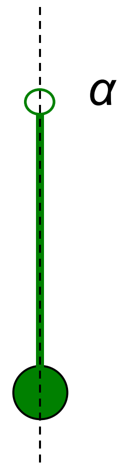
$$\sin\alpha_e=0$$

Wynika stąd, że wahadło posiada **nieskończenie wiele** punktów równowagi, tzn. takich wartości α_e, dla których sin α_e=0.

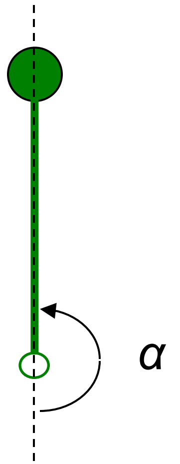


$$\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi, \quad k \in C$$

- Dla parzystych wartości *k,* tzn. dla kąta *α* równego np. -4*π, -2π,* 0*, 2π,* 4*π, ...,* wahadło posiada **stabilne** punkty równowagi.



- Dla nieparzystych wartości *k,* tzn. dla kąta *α* równego np. -3*π, -π, π,* 3*π, ...,* wahadło posiada **niestabilne** punkty równowagi.



Zastosowanie funkcji `trim`

Po wpisaniu w oknie *Matlaba* polecenia:

```
[x,u,y,dx] = trim('wahadlo',[pi/4;0])
```

znajdujemy następujący najbliższy punkt równowagi:

```
x = 1.0e-024 *
           0      % zmienna stanu: alfa = 0 rad
     -0.3090      % zmienna stanu: omega = 0 rad/s
u = Empty matrix: 0-by-1   % brak wejść układu
y = 1.0e-024 *
           0      % wielkość wyjściowa: alfa = 0 rad
     -0.3090      % wielkość wyjściowa: omega = 0 rad/s
dx = 1.0e-024 *
   -0.3090   % pochodna zm. stanu dalfa/dt = 0 rad/s
    0.3090   % pochodna zm. stanu domega/dt = 0 rad/s^2
```

Zastosowanie funkcji `trim`

Po wpisaniu w oknie *Matlaba* polecenia:

```
[x,u,y,dx] = trim('wahadlo',[3*pi/4;0])
```

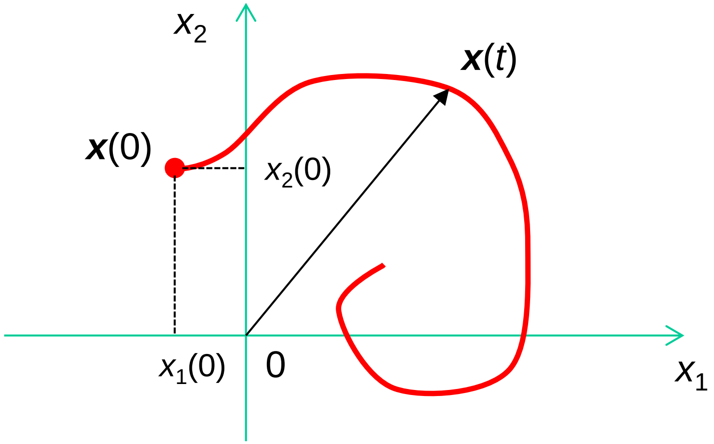
znajdujemy następujący najbliższy punkt równowagi:

```
x =   3.1416      % zmienna stanu: alfa = pi rad
           0      % zmienna stanu: omega = 0 rad/s
u = Empty matrix: 0-by-1   % brak wejść układu
y =   3.1416      % wielkość wyjściowa: alfa = pi rad
           0      % wielkość wyjściowa: omega = 0 rad/s
dx = 1.0e-014 *
          0  % pochodna zm. stanu dalfa/dt = 0 rad/s
    -0.1200  % pochodna zm. stanu domega/dt = 0 rad/s^2
```

Trajektoria stanu układu

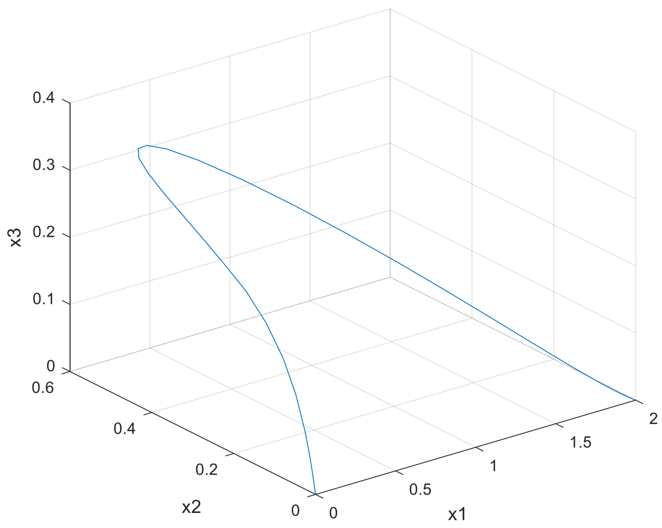
Trajektorię stanu (**trajektorię fazową**) układu można sobie wyobrazić jako pewną linię skierowaną w *n*-wymiarowej przestrzeni stanów (gdzie *n* – liczba zmiennych stanu), zaczynającą się od stanu początkowego $\boldsymbol{x}(0)$, a w kolejnych chwilach *t* określoną aktualnymi współrzędnymi wektora stanu $\boldsymbol{x}(t)$.

Trajektoria stanu układu jest wykresem w przestrzeni *n*-wymiarowej, pokazującym przykładowe zmiany stanu układu w czasie, zaczynając od stanu początkowego, a kończąc np. na stanie równowagi $\boldsymbol{x}_e$ układu (jesli taki występuje).

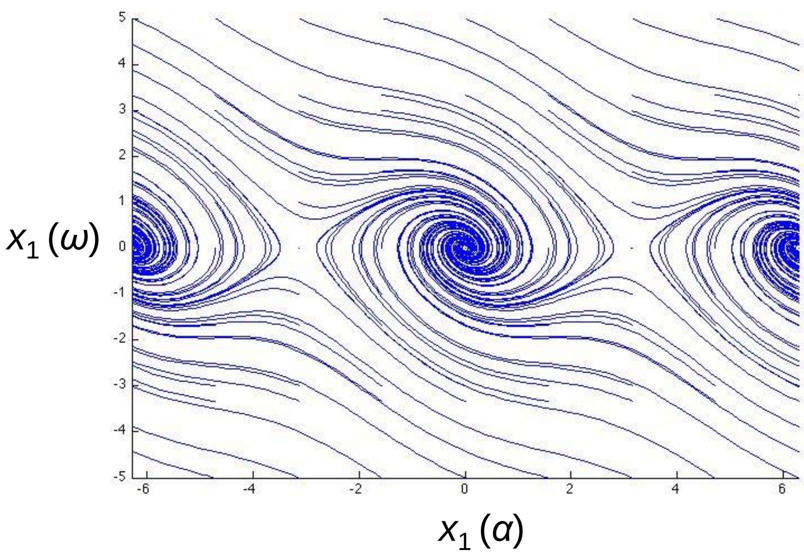


Trajektoria stanu układu – c.d.

Zbiór wielu różnych trajektorii stanu układu (np. reprezentujących jego odpowiedzi swobodne dla różnych warunków początkowych) dla przypadku n=2 nazywamy **portetem fazowym** układu.



Przykładowa trajektoria stanu
dla układu trzech zbiorników (n=3)



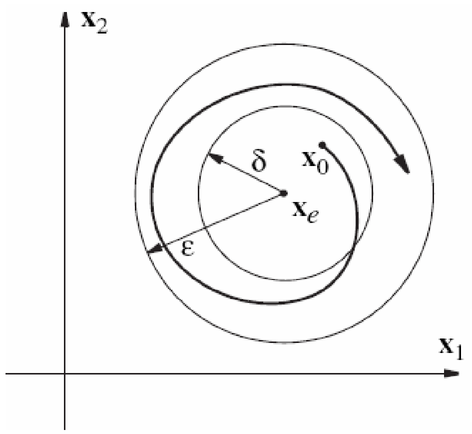
Przykładowy portet fazowy
wahadła matematycznego (n=2)

Stabilność punktu równowagi – definicja

Punkt równowagi $\boldsymbol{x}_e$ stacjonarnego układu dynamicznego jest **stabilnym** punktem równowagi (w sensie Lapunowa), jeżeli dla każdej dodatniej liczby ε można dobrać taką dodatnią liczbę δ (zwykle zależną od ε), że trajektoria stanu układu rozpoczynająca się w punkcie $\boldsymbol{x}(0)$, leżącym wewnątrz kuli o promieniu δ, pozostanie wewnątrz kuli o promieniu ε dla dowolnej chwili $t \geq 0$.

Stosując nieco bardziej formalny zapis: punkt równowagi $\boldsymbol{x}_e$ jest stabilny w sensie Lapunowa, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeżeli:

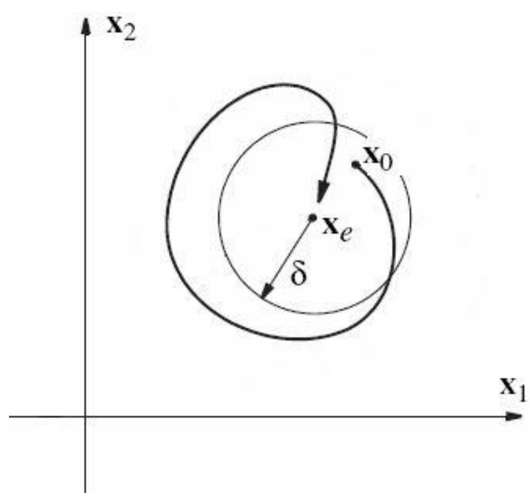
$\left\| \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_e \right\| < \delta$, to dla każdego $t \geq 0$ mamy: $\left\| \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e \right\| < \varepsilon$.



Stabilność asymptotyczna

Punkt równowagi $\boldsymbol{x}_e$ stacjonarnego układu dynamicznego jest punktem równowagi **stabilnym asymptotycznie**, jeżeli jest on stabilny i jego rozwiązanie swobodne $\boldsymbol{x}(t)$ dąży dla $t\to\infty$ do tego punktu równowagi, tzn. jeżeli istnieje takie $\delta>0$, że jeżeli zachodzi:

$$\left\|\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}_e\right\|<\delta,$$ to dla każdego $t\geq 0$ mamy: $$\lim_{t\to\infty}\left\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e\right\|=0.$$



Stabilność wykładnicza

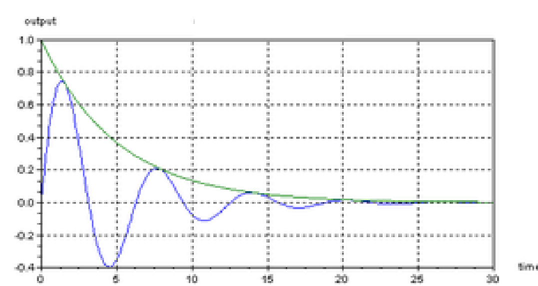
W wielu zastosowaniach nie wystarcza stwierdzenie, że układ dąży do punktu równowagi $\boldsymbol{x}_e$ w nieskończonym czasie – potrzebna jest też ocena, jak szybko trajektoria $\boldsymbol{x}(t)$ układu dąży do tego punktu.

Punkt równowagi $\boldsymbol{x}_e$ nazywamy punktem **stabilnym wykładniczo** (eksponencjalnie), jeżeli jest stabilny asymptotycznie oraz istnieją takie dodatnie stałe α, β oraz δ, że jeżeli zachodzi:

$$\left\| \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_e \right\| < \delta, \qquad \text{to dla każdego } t \geq 0 \text{ mamy:}$$

$$\left\| \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_e \right\| \leq \alpha \left\| \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_e \right\| \mathrm{e}^{-\beta t}.$$

Stabilność wykładnicza oznacza, że rozwiązanie $\boldsymbol{x}(t)$ nie tylko jest zbieżne do punktu $\boldsymbol{x}_e$, ale także, że zbieżność ta jest szybsza (lub co najmniej tak samo szybka) jak zbieżność określona funkcją wykładniczą $\alpha \left\| \boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_e \right\| \mathrm{e}^{-\beta t}$.



Przykłady

- **Niestabilny** punkt równowagi: $\boldsymbol{x}_e = [\alpha_e, \omega_e] = [\pi, 0]$ dla wahadła matematycznego.
- **Stabilny nieasymptotycznie** punkt równowagi: $\boldsymbol{x}_e = [0,0]$ dla wahadła matematycznego nietłumionego (b=0).
- **Stabilny asymptotycznie i wykładniczo** punkt równowagi: $\boldsymbol{x}_e = [0,0]$ dla wahadła matematycznego tłumionego (b>0).
- Układ dynamiczny opisany równaniem:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x^3, \qquad x(0) = x_0$$

posiada punkt równowagi x_e=0 który jest stabilny **asymptotycznie,** ale **nie wykładniczo.**