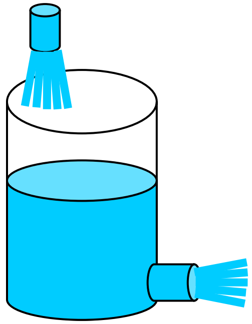
Opis układu w przestrzeni stanów

Równania różniczkowe opisujące dynamikę układu przekształcaliśmy na poprzednim wykładzie do postaci układu równań pierwszego rzędu, w których po lewej stronie znajdowały się tylko pochodne zmiennych stanu, a po stronie prawej – pozostałe składniki równania:

- dla zbiornika cieczy:



$$\frac{dh(t)}{dt} = -\alpha \frac{A_o}{A}\sqrt{2gh(t)} + \frac{1}{A} q_d(t),$$

- dla wahadła matematycznego:

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha(t)}{dt} = \omega(t), \\ \dfrac{d\omega(t)}{dt} = -\dfrac{g}{l}\cdot \sin\alpha(t) - \dfrac{b}{m\cdot l}\cdot \omega(t). \end{cases}$$

z odpowiednimi warunkami początkowymi.

Opis układu w przestrzeni stanów – c.d.

Równania takie nazywamy **równaniami stanu** układu – pokazują one, w jaki sposób przyrosty w czasie (czyli pochodne) wartości zmiennych stanu zależą od:

- aktualnych wartości zmiennych stanu,
- aktualnych wartości sygnałów wejściowych.

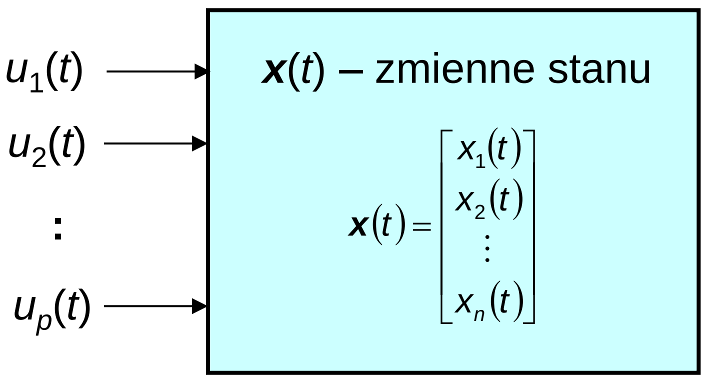
Na przykład dla rozważanego zbiornika cieczy:

- przyrosty poziomu cieczy h są proporcjonalne do różnicy między strumieniem dopływającym q_d a pierwiastkiem poziomu cieczy h,

zaś dla wahadła matematycznego:

- przyrosty w czasie kąta wychylenia α są równe prędkości kątowej ω,
- przyrosty prędkości kątowej ω są proporcjonalne (ze znakiem ujemnym) do sinusa kąta wychylenia α i prędkości kątowej ω.

Równania stanu modelu nieliniowego



$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_p) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_p) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_p) \end{bmatrix}$$

pochodne
zmiennych stanu

nieliniowe funkcje
zmiennych stanu
i sygnałów wejściowych

Równania stanu modelu nieliniowego (postać wektorowa)

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}\frac{dx_1(t)}{dt}\\ \frac{dx_2(t)}{dt}\\ \vdots\\ \frac{dx_n(t)}{dt}\end{bmatrix}$$

wektor pochodnych zmiennych stanu

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))=\begin{bmatrix}f_1(\dots)\\ f_2(\dots)\\ \vdots\\ f_n(\dots)\end{bmatrix}$$

wektorowa funkcja zmiennych stanu i wielkości wejściowych

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}$$

wektor zmiennych stanu

$$\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ \vdots\\ u_p(t)\end{bmatrix}$$

wektor wielkości wejściowych

Równania wyjściowe modelu nieliniowego

Równania stanu uzupełnia się o **równania wyjściowe**, pokazujące, jak **wielkości wyjściowe** układu zależą od:

- aktualnych wartości zmiennych stanu,
- aktualnych wartości wielkości wejściowych.

Np. zakładając, że dla układu zbiornika cieczy rolę wielkości wyjściowej pełni strumień wypływu $q_o(t)$, otrzymamy następujące równanie wyjściowe:

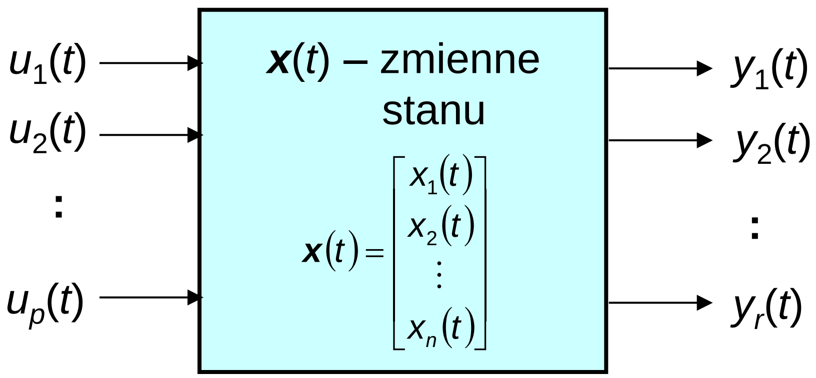
$$q_o(t) = \alpha A_o \sqrt{2gh(t)}.$$

$$\boxed{[\,h(t)\,]} \longrightarrow [\,q_o(t)\,]$$

Z kolei dla układu wahadła jako wielkość wyjściową możemy przyjąć kąt wychylenia $\alpha(t)$, czyli bezpośrednio jedną ze zmiennych stanu:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}} \longrightarrow [\alpha(t)\,]$$

Równania wyjściowe modelu nieliniowego



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_p) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_p) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_p) \end{bmatrix}$$

sygnały wyjściowe

nieliniowe funkcje zmiennych stanu i wielkości wejściowych

Równania wyjściowe modelu nieliniowego (postać wektorowa)

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) = \begin{bmatrix} g_1(\ldots) \\ g_2(\ldots) \\ \vdots \\ g_n(\ldots) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}$$

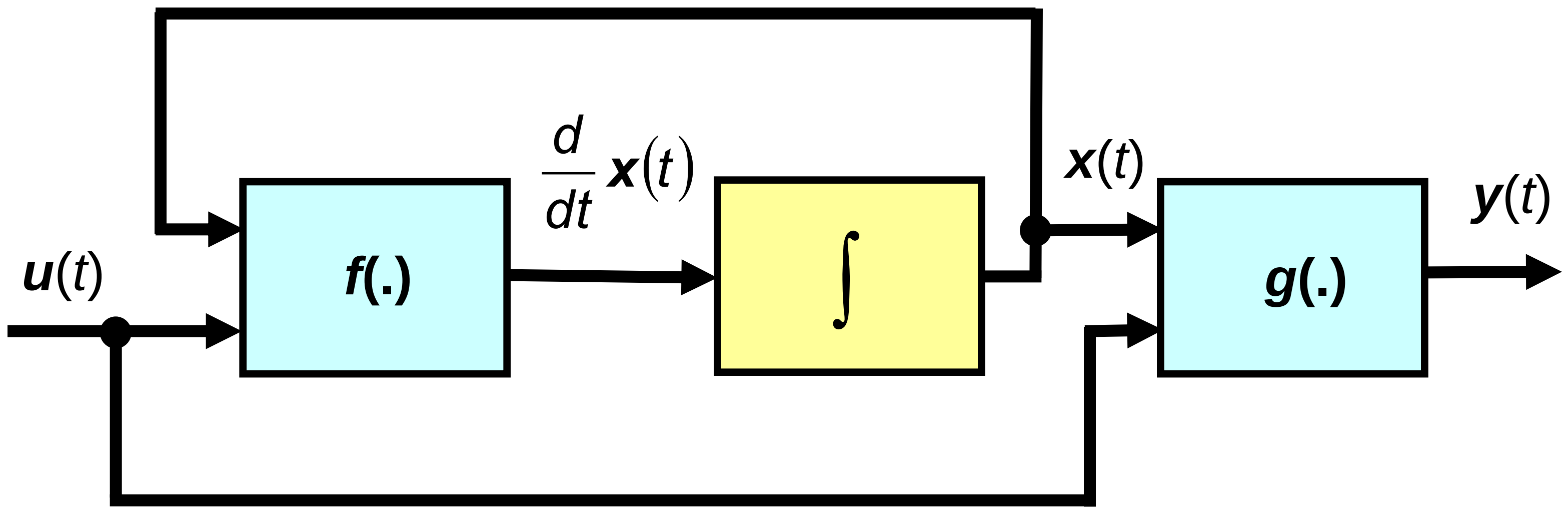
wektor wielkości wyjściowych

wektorowa funkcja zmiennych stanu i wielkości wejściowych

wektor zmiennych stanu

wektor wielkości wejściowych

Schemat blokowy nieliniowego modelu w przestrzeni stanów



$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\right)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\right)$$

Rozwiązywanie równań stanu

W celu zbadania zachowania się modelowanego układu w czasie, konieczne jest znalezienie **rozwiązania różniczkowych równań** stanu, opisujących ten układ.

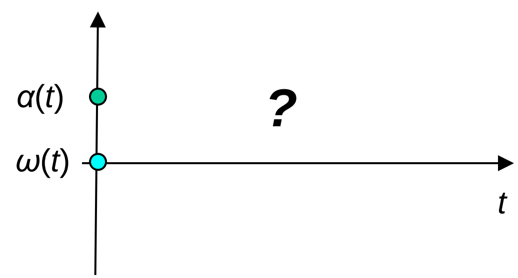
Na przykład, jeśli chcemy zbadać, jak dla danych **warunków początkowych**, tzn. dla danych wartości:

- początkowego kąta wychylenia $\alpha(0)=\alpha_0$,
- początkowej prędkości kątowej $\omega(0)=\omega_0$,

zmieniał się będzie w czasie kąt wychylenia wahadła $\alpha(t)$ oraz jego prędkość kątowa $\omega(t)$, należy znaleźć **rozwiązanie** równania stanu wahadła – jest to tzw. **zagadnienie początkowe** (zagadnienie Cauchy'ego).

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha(t)}{dt} = \omega(t) \\ \dfrac{d\omega(t)}{dt} = -\dfrac{g}{l}\cdot\sin\alpha(t) - \dfrac{b}{m\cdot l}\cdot\omega(t) \end{cases}$$

$$\alpha(0) = \frac{\pi}{4} \qquad \omega(0) = 0$$



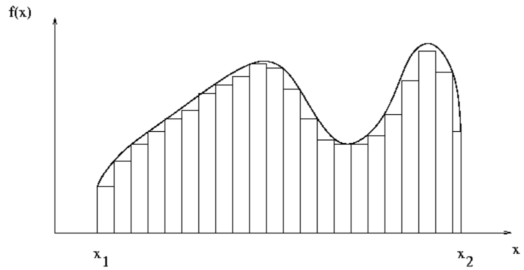
Metody rozwiązywania równań stanu

analityczne

numeryczne

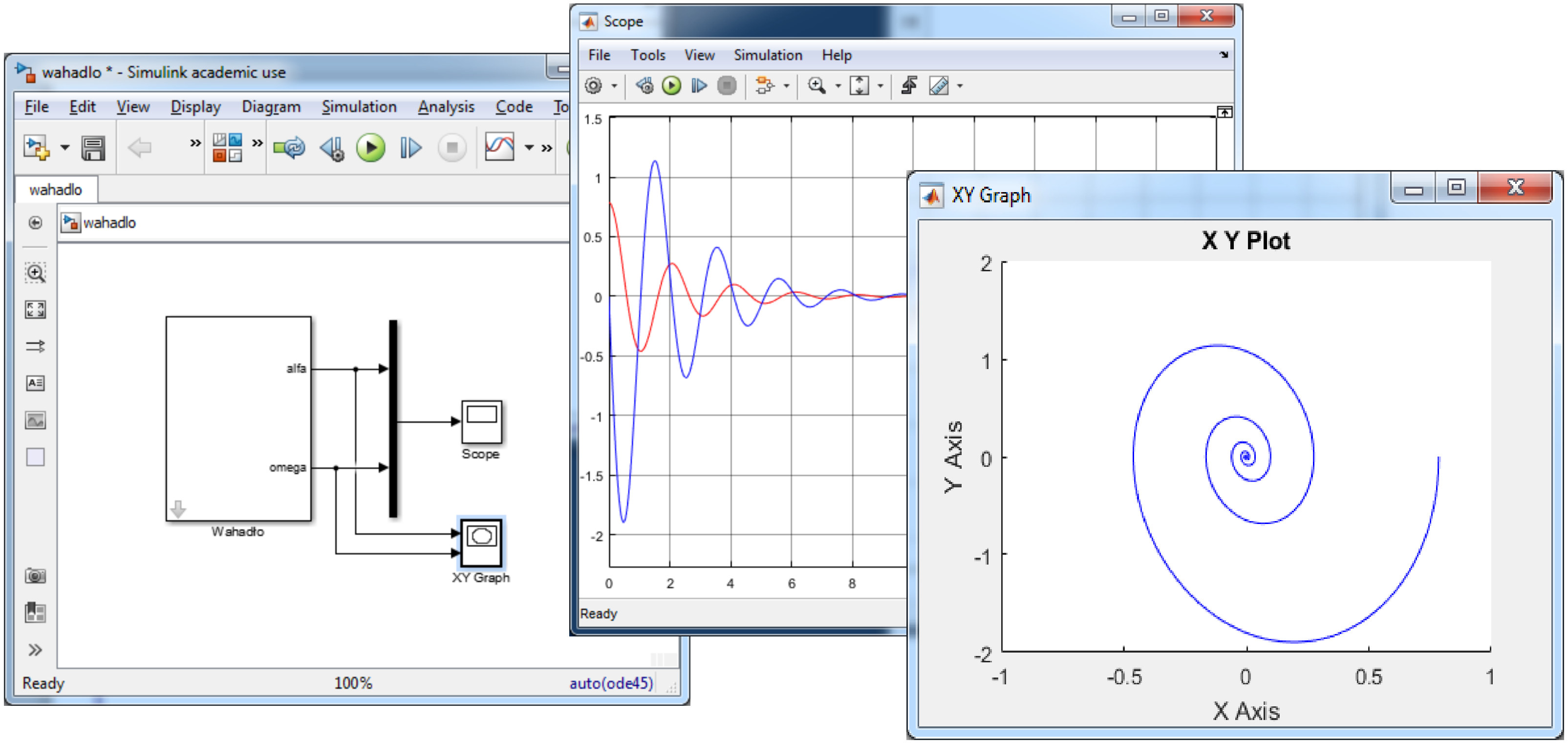
$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 \sin(t) + c_4 \cos(t) + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$$

$$y(t) = \frac{3}{2} c_1 e^{2t} + \frac{3}{2} c_2 e^{-2t} - c_3 \sin(t) - c_4 \cos(t) - \frac{3}{4} t + \frac{1}{4}$$



- Otrzymanie rozwiązań **analitycznych** (tzn. dokładnych, danych w postaci wzorów) możliwe jest zazwyczaj tylko w przypadku **liniowych** równań różniczkowych.

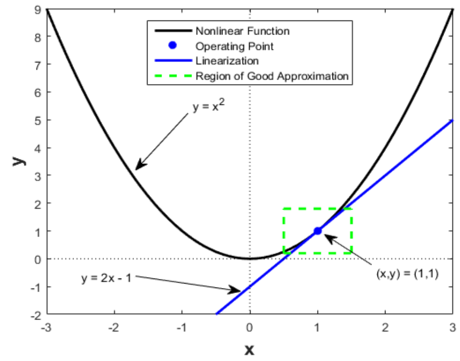
- W przypadku modelu wahadła matematycznego, ze względu na nieliniowość spowodowaną obecnością członu sin(*α*) w równaniu różniczkowym, **brak** jest rozwiązania **analitycznego** – jesteśmy zdani tu na rozwiazanie numeryczne (np. otrzymane w *Simulinku*).



- Rozwiązanie, jakie uzyskujemy wybierając z menu programu *Matlab/Simulink* polecenie *Simulation/Start* jest zatem **rozwiązaniem numerycznym**, tzn. uzyskanym w wyniku zastosowania jednej z metod **całkowania numerycznego**, na przykład metody Rungego-Kutty 4 rzędu.

- W dalszej części przeprowadzimy analizę możliwości uzyskania **przybliżonego** rozwiązania równania wahadła **metodą analityczną**.

Linearyzacja modelu nieliniowego



- Rozwiązaniem problemu nieliniowości równania różniczkowego i związanego z nią braku rozwiązań analitycznych, jest jego **linearyzacja**, tzn. przybliżenie tego równania (przy odpowiednich założeniach) odpowiednim równaniem liniowym, dla którego istnieje rozwiązanie analityczne.

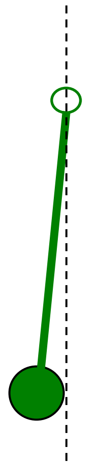
- Otrzymane rozwiązanie równania liniowego (zlinearyzowanego) stanowi, przy przyjętych założeniach, pewne przybliżenie rozwiązania wyjściowego równania nieliniowego.

- W przypadku linearyzacji w otoczeniu punktu równowagi układu, ułatwiona jest również analiza jego stabilności – układ nieliniowy jest lokalnie stabilny asymptotycznie w punkcie równowagi, jeżeli jego liniowa aproksymacja jest stabilna asymptotycznie w tym punkcie (to samo dotyczy niestabilności).

Przykład: liniowy model wahadła matematycznego

Chcemy zlinearyzować równanie wahadła matematycznego

$$\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2}+\frac{b}{m\cdot l}\cdot\frac{d\alpha(t)}{dt}+\frac{g}{l}\cdot\sin\alpha(t)=0$$

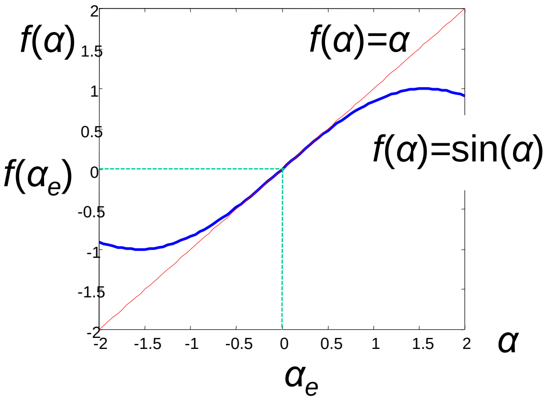


zakładając niewielkie odchylenia od dolnego położenia równowagi – tzn. linearyzację w punkcie równowagi α_e=0.

W tym celu przybliżymy funkcję sin(α) funkcją liniową, znajdując równanie linii prostej stycznej do wykresu funkcji $f(\alpha)$ = sin(α) w punkcie α_e = 0.

Z równania stycznej w punkcie otrzymujemy:

$$f(\alpha)-\underbrace{f(\alpha_e)}_{\sin(0)=0}=\underbrace{f'(\alpha_e)}_{\cos(0)=1}\underbrace{(\alpha-\alpha_e)}_{\tilde{\alpha}},$$



czyli:

$$f(\alpha)=\cos(0)\cdot\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}=\alpha.$$

Przykład – c.d.

W wyniku linearyzacji, otrzymujemy **przyrostowe liniowe równanie różniczkowe**, opisujące właściwości dynamiczne wahadła dla $\alpha \approx 0$:

$$\frac{d^2\tilde{\alpha}(t)}{dt^2} + \frac{b}{m \cdot l} \cdot \frac{d\tilde{\alpha}(t)}{dt} + \frac{g}{l} \cdot \tilde{\alpha}(t) = 0,$$

gdzie: $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) - \alpha_e = \alpha(t).$

Należy pamiętać, że powyższe równanie jest słuszne tylko dla **niewielkich** odchyleń od punktu linearyzacji α_e=0 – im większy kąt wychylenia wahadła, tym będzie ono mniej dokładny, tzn. jego rozwiązanie „gorzej” będzie opisywać rzeczywiste zmiany kąta wychylenia wahadła $\alpha(t)$.

α **[deg]**	***α*** **[radiany]**	**sin(*α*)**	**błąd**
0	0	0	0%
1	0,01745329	0,01745240	0,01%
5	0,08726646	0,08715574	0,3 %
8	0,13962634	0,13917310	1%
10	0,17453292	0,17364817	1,5%
60	1,04719755	0,86602540	82%

Przykład: zlinearyzowane równania stanu wahadła

Na podstawie zlinearyzowanego w punkcie α_e=0 przyrostowego równania różniczkowego wahadła:

$$\frac{d^2\tilde{\alpha}(t)}{dt^2} + \frac{b}{m \cdot l} \cdot \frac{d\tilde{\alpha}(t)}{dt} + \frac{g}{l} \cdot \tilde{\alpha}(t) = 0,$$

gdzie:

można zapisać **przyrostowe równania stanu** w formie dwóch liniowych równań rzędu pierwszego:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{\alpha}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t), \\ \dfrac{d\tilde{\omega}(t)}{dt} = -\dfrac{g}{l} \cdot \tilde{\alpha}(t) - \dfrac{b}{m \cdot l} \cdot \tilde{\omega}(t), \end{cases}$$

gdzie:

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) - \alpha_e = \alpha(t),$$

$$\tilde{\omega}(t) = \omega(t) - \omega_e = \omega(t).$$

Równania stanu modelu liniowego – postać ogólna

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \ldots + b_{1p}u_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \ldots + b_{2p}u_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \ldots + b_{np}u_p \end{bmatrix}$$

pochodne zmiennych stanu

liniowe funkcje zmiennych stanu
i wielkości wejściowych

Równania stanu modelu liniowego
(ogólna postać wektorowo-macierzowa)

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}$$

wektor pochodnych zmiennych stanu

macierz stanu

wektor zmiennych stanu

macierz wejściowa

wektor sygnałów wejściowych

Równania wyjściowe modelu liniowego – postać ogólna

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \ldots + d_{1p}u_p \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n + c_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \ldots + d_{2p}u_p \\ \vdots \\ c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \ldots + c_{rn}x_n + d_{r1}u_1 + d_{r2}u_2 + \ldots + d_{rp}u_p \end{bmatrix}
$$

sygnały wyjściowe

liniowe funkcje zmiennych stanu
i sygnałów wejściowych

Równania wyjściowe modelu liniowego (ogólna postać wektorowo-macierzowa)

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rp} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}$$

wektor sygnałów wyjściowych

macierz wyjściowa

wektor zmiennych stanu

macierz transmisyjna

wektor sygnałów wejściowych

Macierze modelu zlinearyzowanego

Macierze modelu przyrostowego, zlinearyzowanego w punkcie równowagi ($\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{u}_e$), mają postać następujących *macierzy Jacobiego* nieliniowych funkcji: stanu $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ (patrz slajdy 3-4) oraz wyjściowej $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\ldots,g_n)$ (patrz slajdy 6-7):

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial x_n} \end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial u_p} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_n(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial x_n} \end{bmatrix},\qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_n(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e)}{\partial u_p} \end{bmatrix}.$$

Opis w przestrzeni stanów – podsumowanie

Równania stanu układu dynamicznego pokazują, w jaki sposób zmiany w czasie wartości jego wszystkich zmiennych stanu zależą od bieżących wartości tych zmiennych stanu oraz od bieżących wartości sygnałów wejściowych:

model nieliniowy

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\right)$$

model liniowy

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

model zlinearyzowany (przyrostowy)

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(t), \qquad \tilde{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_e, \quad \tilde{\mathbf{u}}(t)=\mathbf{u}(t)-\mathbf{u}_e$$

Opis w przestrzeni stanów – podsumowanie (c.d.)

Równania wyjściowe układu dynamicznego pokazują, w jaki sposób wartości jego wszytkich sygnałów wyjściowych zależą od bieżących wartości jego zmiennych stanu oraz bezpośrednio od wartości jego sygnałów wejściowych:

model nieliniowy

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$$

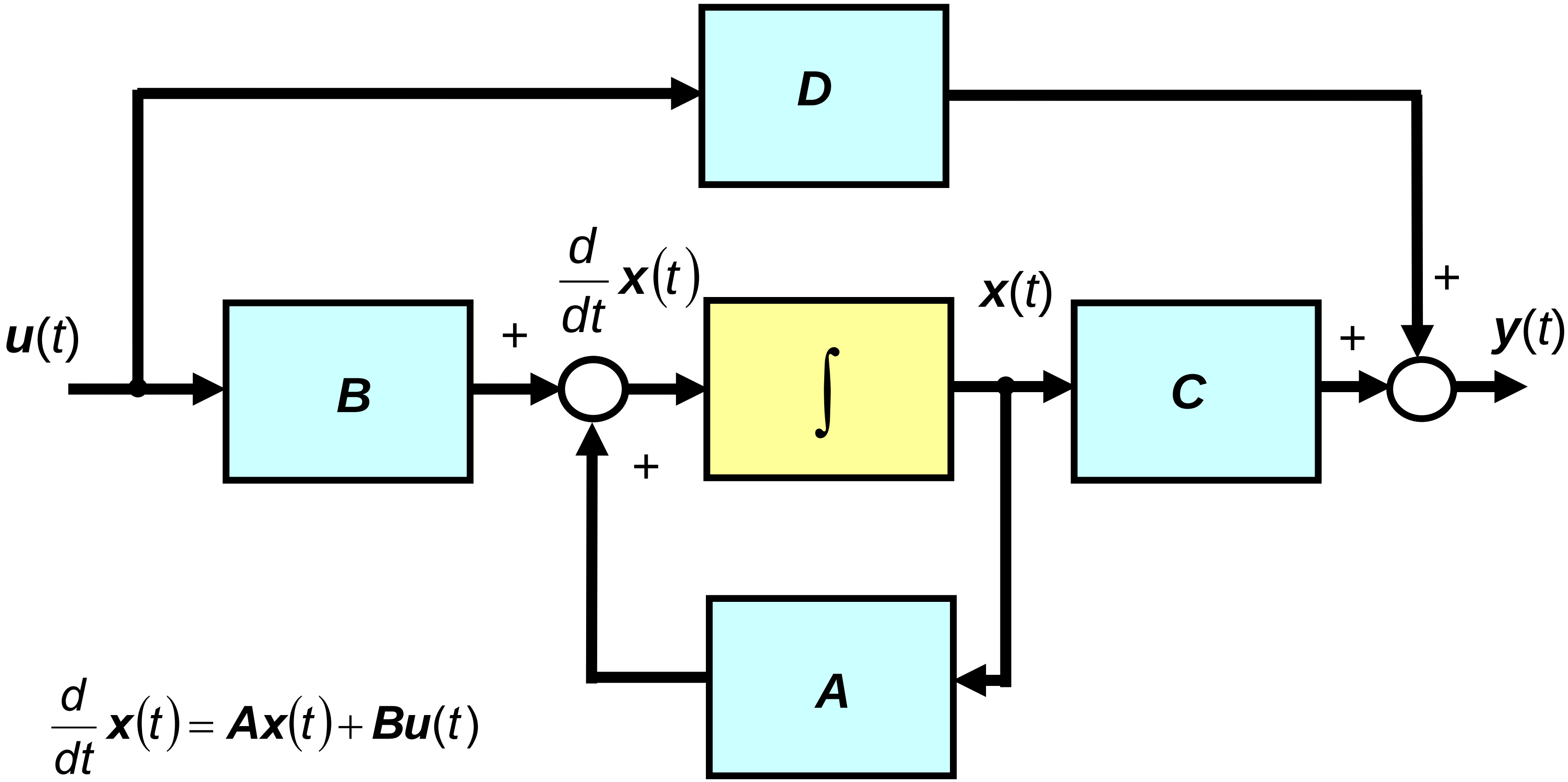
model liniowy

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

model zlinearyzowany (przyrostowy)

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}(t), \qquad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e, \quad \tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_e$$

Schemat blokowy liniowego modelu w przestrzeni stanów



$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

Macierze zlinearyzowanego modelu wahadła

Na podstawie zlinearyzowanych w punkcie (α_e=0, ω_e=0) przyrostowych równań wahadła matematycznego (patrz slajd 15):

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{\alpha}(t)}{dt} = \tilde{\omega}(t), \\ \dfrac{d\tilde{\omega}(t)}{dt} = -\dfrac{g}{l}\cdot\tilde{\alpha}(t) - \dfrac{b}{m\cdot l}\cdot\tilde{\omega}(t), \end{cases}$$

(równania stanu)

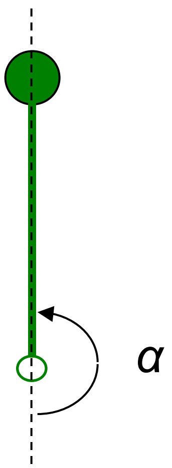
(równanie wyjściowe)

$$y(t) = \tilde{\alpha}(t),$$

otrzymujemy następujące postaci jego macierzy ***A***, ***B***, ***C***, ***D***:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{b}{m\cdot l} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = [\ ], \qquad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \qquad \mathbf{D} = [\ ].$$

Linearyzacja modelu wahadła w górnym (niestabilnym) punkcie równowagi



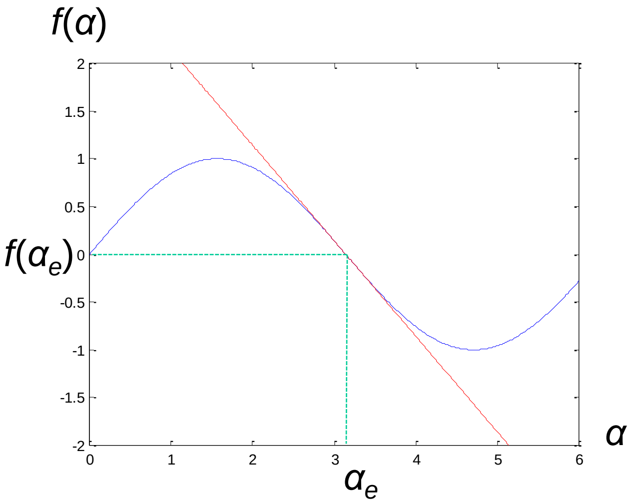
Załóżmy, że tym razem poddajemy linearyzacji równanie wahadła w punkcie odpowiadającym **górnemu** położeniu równowagi, tzn. ($\alpha_e=\pi$, $\omega_e=0$).

Z równania stycznej w punkcie $\alpha_e=\pi$ otrzymujemy:

$$f(\alpha)-\underbrace{f(\alpha_e)}_{\sin(\pi)=0}=\underbrace{f'(\alpha_e)}_{\cos(\pi)=-1}\underbrace{(\alpha-\alpha_e)}_{\tilde{\alpha}},$$

czyli:

$$f(\alpha)=\cos(\pi)\cdot(\alpha-\pi)=-\alpha+\pi=-\tilde{\alpha}.$$



Wartość funkcji sinus można teraz przybliżyć wartością jej argumentu ze znakiem ujemnym – słuszne tylko dla bliskiego otoczenia punktu $\alpha_e=\pi$.

$$\sin(\alpha)\approx-\alpha+\pi \quad dla \quad \alpha\approx\pi$$

Macierz stanu modelu wahadła dla górnego (niestabilnego) punktu równowagi

Zlinearyzowane w punkcie $\alpha_e=\pi$ równanie przyrostowe wahadła przyjmuje następującą postać:

$$\boxed{\frac{d^2\tilde{\alpha}(t)}{dt^2}+\frac{b}{m\cdot l}\cdot\frac{d\tilde{\alpha}(t)}{dt}-\frac{g}{l}\cdot\tilde{\alpha}(t)=0,}$$

gdzie:

$$\tilde{\alpha}(t)=\alpha(t)-\alpha_e=\alpha(t)-\pi.$$

Z powyższego równania wynika następująca postać równań stanu oraz macierzy ***A*** zlinearyzowanego modelu przyrostowego:

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{\alpha}(t)}{dt}=\tilde{\omega}(t),\\[2ex] \dfrac{d\tilde{\omega}(t)}{dt}=\dfrac{g}{l}\cdot\tilde{\alpha}(t)-\dfrac{b}{m\cdot l}\cdot\tilde{\omega}(t),\end{cases}$$

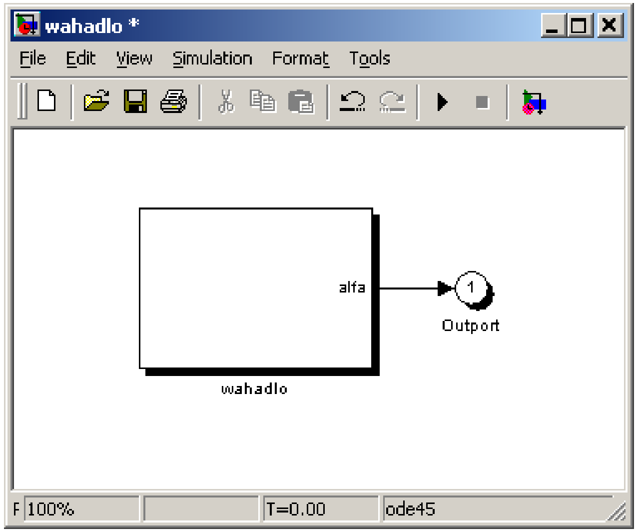
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\[2ex] \dfrac{g}{l} & -\dfrac{b}{m\cdot l}\end{bmatrix}.$$

Linearyzacja modelu wahadła w *Matlabie/Simulinku*

Linearyzację oraz wyznaczenie macierzy ***A***, ***B***, ***C*** i ***D*** modelu zlinearyzowanego realizuje w programie *Matlab/Simulink* funkcja `linmod` (czasami lepsze efekty daje funkcja `linmodv5`).

Po wpisaniu w oknie Matlaba polecenia:

```
[A,B,C,D] = linmod('wahadlo')
```



otrzymujemy:

```
A = 0          1.0000
   -9.8000   -1.0000
B = Empty matrix: 2-by-0
C = 1      0
D = Empty matrix: 1-by-0
```

Układ nie posiada sygnałów wejściowych, więc macierze ***B*** i ***D*** są puste.

Domyślnym punktem linearyzacji jest punkt zerowy, czyli (α_e=0, ω_e=0).

Inna postać wywołania funkcji

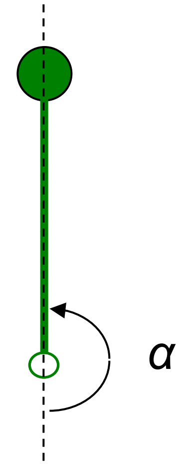
```
[A,B,C,D] = linmod('sys', x, u)
```

Zwraca macierze ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** modelu zlinearyzowanego w punkcie określonym przez podane wartości wektora zmiennych stanu ***x*** (ewentualnie także wektora wejściowego ***u***).

Przykład:

Po wpisaniu w oknie *Matlaba* polecenia:

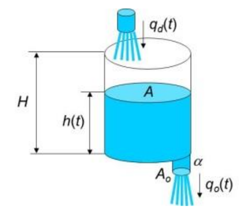
```
[A,B,C,D] = linmod('wahadlo',[pi;0])
```



wyświetli się następujący wynik:

```
A = 0          1.0000
    9.8000    -1.0000
B = Empty matrix: 2-by-0
C = 1.0000    0
D = Empty matrix: 1-by-0
```

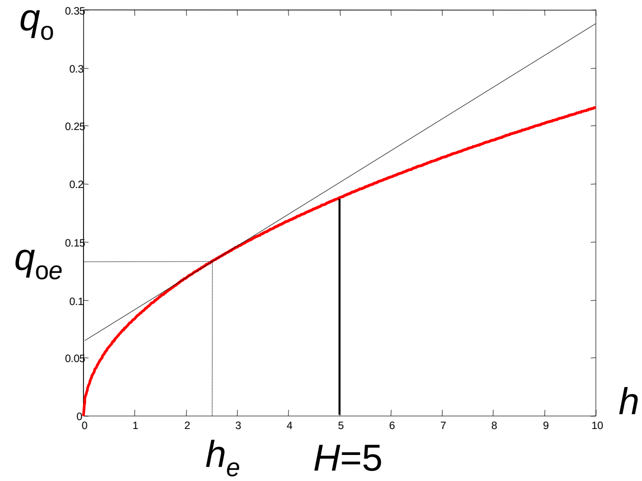
Linearyzacja modelu zbiornika cieczy



Nieliniowe równania stanu i wyjścia
dla zbiornika cieczy ze slajdów II/1-9:

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\alpha\frac{A_o}{A}\sqrt{2gh(t)} + \frac{1}{A}q_d(t),$$

$$q_o(t) = \alpha A_o\sqrt{2gh(t)}.$$



Równania przyrostowe po linearyzacji w punkcie równowagi h_e:

$$\frac{d\tilde{h}(t)}{dt} = \underbrace{-\alpha\frac{A_o}{A}g\frac{1}{\sqrt{2gh_e}}}_{\mathbf{A}}\tilde{h}(t) + \underbrace{\frac{1}{A}}_{\mathbf{B}}\tilde{q}_d(t),$$

$$\tilde{q}_o(t) = \underbrace{\alpha A_o g\frac{1}{\sqrt{2gh_e}}}_{\mathbf{C}}\tilde{h}(t),$$

gdzie:

$$\tilde{h}(t) = h(t) - h_0,$$
$$\tilde{q}_d(t) = q_d(t) - q_{de},$$
$$\tilde{q}_o(t) = q_o(t) - q_{oe},$$
$$q_{de} = q_{oe} = \alpha A_o\sqrt{2gh_e}.$$

Macierze zlinearyzowanego modelu zbiornika

Na podstawie otrzymanych równań otrzymujemy następujące macierze przyrostowego modelu zbiornika, zlinearyzowanego w punkcie równowagi $h_e \in (0, H]$:

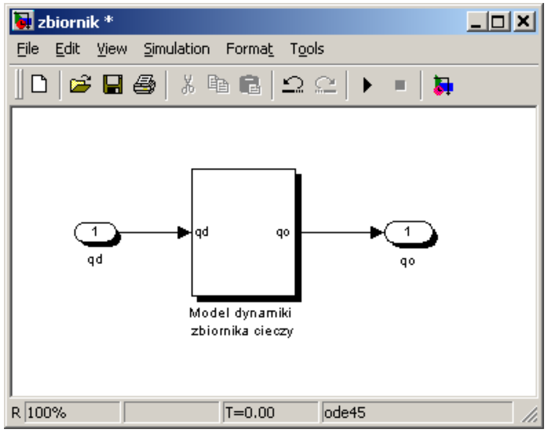
$$\mathbf{A} = \left[-\alpha \frac{A_o}{A} \sqrt{\frac{g}{2h_e}} \right], \qquad \boldsymbol{B} = \left[\frac{1}{A} \right],$$

$$\mathbf{C} = \left[\alpha A_o \sqrt{\frac{g}{2h_e}} \right], \qquad \boldsymbol{D} = [0].$$

Linearyzacja modelu zbiornika w *Matlabie/Simulinku*

```
[A,B,C,D]=linmod('zbiornik',[2.5]) % lub linmodv5
A = -0.0089
B =  0.3333
C =  0.0266
D =  0
```

$h_e = 2.5$ m




```
[A,B,C,D]=linmod('zbiornik',[0.1])

A = -0.0443
B =  0.3333
C =  0.1330
D =  0
```

$h_e = 0.1$ m