σ-algebra & Borel Sets.

可数交并补封闭 　最小的

G_δ: E与G_δ差集为测度为0 → E可测

F_σ 　E与F_σ差集测度为0.

G_δ. countable intersection open set

F_σ countable union of closed set.

可测函数

| character function 特征 function 　$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in E \\ 0 & \text{if } x \notin E. \end{cases}$

| simple function 简单 　$f = \sum a_k \chi_{E_k}$

| step function 阶梯 　$f = \sum a_k \chi_{R_k}$ （R_k矩形）

<u>Def</u> ① E measurable. ② $f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in E : f(x) < a\}$ is measurable.

<u>prop</u>. ① $f^{-1}(O)$. $f^{-1}(F)$ measurable (O. F. open. closed set).

② 连续则可测. (连续)∘(有限可测)也可测. ③ $\sup_n f_n(x)$. $\inf_n f_n(x)$. $\limsup_{n\to\infty} f_n(x)$. $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ 都可测

④ $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 可测. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. 则 f 可测. ⑤. f^k 可测. fg, $f+g$ 可测(若有界).

⑥. f 可测 $f(x) = g(x)$ a.e. x. 则 g 可测

用简单函数和阶梯函数估计

三个定理: 思路是非负简单函数 → 简单函数 → 阶梯函数

① $f \geq 0$. measurable. exist 单增简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, $\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x)$ 则 $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$

② f measurable. 单增简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, $|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_{k+1}(x)|$. 则 $\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x)$ ($|\varphi_k(x)| \leq |f(x)|$)

③ f 可测. 单增阶梯函数列 $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$, $\psi_k(x) \leq \psi_{k+1}(x)$. 则 $\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = f(x)$ a.e. x.

Littlewood's three principles

<u>Def</u> ① Every set <u>Nearly</u> finite union of intervals. (有限多的区间的并).

② <u>nearly</u> continuous ③ every convergent sequence <u>nearly</u> uniformly convergent.

<u>Egorov</u> $m(E) < \infty$. $\{f_i\}_{i \in N}$. on E. sequence of measurable functions. $\lim_{i\to\infty} f_i = f$. a.e. on E

∃ closed A_ε. $A_\varepsilon \subset E$. ⇒ ① f_k 一致收敛于 f 在 A_ε 上 ② $m(E - A_\varepsilon) < \varepsilon$.

<u>Lusin</u> $m(E) < \infty$. f measurable. finite-valued. ⇒ $\forall \varepsilon > 0$. ∃ closed F_ε. $F_\varepsilon \subset E$. $m(E - F_\varepsilon) \leq \varepsilon$. $f|_{F_\varepsilon}$ continuous.

Scanned with CamScanner

引入勒贝格积分：（一点一点推广）.

① 简单函数 → 不唯一？用范式 → ① 定义范式积分 → 一些性质(什么的).

↓

② 有限集合、有界函数 → 定义support → 一个引理 → ② 定义积分 ↗ 上面几个性质仍成立.

↓ 有界收敛定理.（积分极限交换）

↓ 一个性质

↓ 黎曼可积与L-可积（建立联系）.

③ 一般非负函数（不用有界）→ ③ 第三次定义积分

↓ 重新证几个性质（上面有些不成立）

↓ Fatou. (≤). 一个反例来支持. → 单调收敛定理 → 性质 ↗ 级数的引理

↓ B-C Lemma

↓ 推论.

④. 一般性情况（可积函数）→ ④ 最后一次定义积分.（check uniqueness）→ 一些性质 → 控制收敛定理 该定理是为了说明积分和取极限交换是容易被满足的.

用测度定义积分，一方面希望满足黎曼积分的性质，另一方面希望积分和极限符号可交换

L^1空间上的可积函数.

Def. $\|f\| = \|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,dx$.

定义所有的具有上述模长的可积函数的集合为L^1空间.

The collection of all integrable functions with above norm.

又叫绝对值一次方可积的函数集合.

<we define two functions equivalent if agree almost everywhere> 几乎处处相等的看成一个.

Prop 定义一些乘积、三角不等式、距离等.（度量）

Riesz-Fischer 证明空间的完备性.

⇒ complete：(柯西列收敛) 任意空间 V 中的柯西列 $\{x_k\}$. 存在 $x \in V$. 满足 $d(x_k, x) \to 0$. $k \to \infty$.

或是 $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. 或 $d(x_k, x_l) \to 0$. $k, l \to \infty$.

定理便证明了L^1空间是完备的.

⇒ Cor：$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to f in L^1. 存在子列 $\{f_{n_k}\}$ satisfy $f_{n_k}(x) \to f(x)$ a.e. x.

Thm dense in L^1.

① simple function ② step function. ③. the continuous functions of compact support.

和一些积分变换性质

⇒ $\begin{cases} ① \int_{\mathbb{R}^d} f(x-h)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx. & ② \delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx. \\ ③ \int_{\mathbb{R}^d} f(-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx. & (\text{for } f_h = f(x-h)) \end{cases}$

⇒ $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,g(x-y)\,dy$

⇒ $f \in L^1$，则 $\|f_h - f\| \to 0$, $h \to 0$

测度论引入：回顾数分（如 compact. open 之类的） almost disjoint

→ 开集写成可列 $\begin{cases} \text{不相交开集并（一维）} \\ \text{几乎不交闭正方形并.} \end{cases}$

外测度 $m_*(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$ Q_j 闭正方形. 外部逼近.

prob: △ $E \subset \bigcup Q_j$. $\sum m_*(Q_j) \leq m_*(E) + \varepsilon$.

△ $m_*(E) \leq \sum m_*(E_i)$（次可加性）

△ $d(E_1, E_2) > 0$. $m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$

△ $E = \bigcup Q_i$ $\{Q_i\}$ 可列几乎不相交正方体. $m_*(E) = \sum |Q_i|$

勒贝格测度 $m_*(O - E) \leq \varepsilon$. 则可测. $m(E) = m_*(E)$ （O open set）

prob: ① 开集可测 ② $m_*(E) = 0$ 可测 ③ 可数可测并可测

Lemma F 闭 K 紧 disjoint 则 $d(F, K) > 0$. ④ 闭集可测 ⑤ 可测的补可测

⑥ 可列可测交可测

Thm. 可列不相交. $E = \bigcup E_i \Rightarrow m(E) = \bigcup m(E_i)$

prop $E_k \uparrow E$. $m(E) = \lim_{N \to \infty} m(E_N)$ $(E_k \subset E_{k+1})$

$E_k \downarrow E$. $\exists k$. $m(E_k) < \infty$. so $m(E) = \lim_{N \to \infty} m(E_N)$

THM. ① $\exists$ 开集 O. $E \subset O$. $m(O - E) \leq \varepsilon$.

② $\exists$ 闭集 F. $F \subset E$. $m(E - F) \leq \varepsilon$.

③ $m(E) < \infty$. $\exists$ compact K. $K \subset E$. $m(E - K) \leq \varepsilon$.

④ $m(E) < \infty$. 有限闭正方形并. $F = \bigcup Q_i$ $m(E \Delta F) \leq \varepsilon$

prop ① $m(E + h) = m(E)$

② $m(\delta E) = \delta^d m(E)$

③ $m(-E) = m(E)$