(1) 05/11/2018

Chapitre I. Généralités sur les graphes

La théorie des graphes concerne de nombreux domaines d'applications. Leur objectif sont distinctes mais le langage utilisé est le m^t, H au moins en ce qui concerne les df et les propriétés générals. c'est prk ns commenceront ce 1er chapitre par la présentat° des concepts de bases que ns développerons par la suite. Pr illustrer notre propos nous recourrons à ds exemples eltaires, historiques ou m^t à une combinaison des deux.

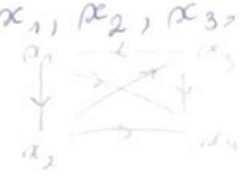
I. 1) Quelques Df concernant les graphes orientés

Il convient de distinguer les graphes orientes de ceux qui ne le sont pas. Ns ns interessons ici au premier et ns donnerons qlqs ex. des seconds dans le paragraphe I.5)

Les graphes orientés (finis) dont nous traiterons ici peuvent être considérés comme des schémas représentant tout simplemnt la structure d'1 pb. Ils st généralemt det. par la donnée de : un ensemble fini $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ d'elts appelés sommets et d'un ens $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ d'elts appelés arcs. Les elts de U st des couples ordonnés de sommets appartenant à X. autrement dit U est un sous ensemble du produit cartésien $X \times X$. Notons que U est plutôt une famille d'elt du produit cartésien de $X \times X$ car un elt $(x, y) \in X \times X$ peut apparaître plrs fois dans U

A titre d'exemple, considérons le graphe $G_1 = (X_1, U_1)$ qui présente les résultats d'un tournoi d'echecs.

$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4)$; $U_1 = \{(x_1, x_2)(x_1, x_4)(x_2, x_3)(x_2, x_4)$
$(x_3, x_1)(x_3, x_4)\}$



I. 2) Df de base relative aux arcs et aux sommets d'1 graphe

a) Extrémités d'1 arc

Un arc $U = (x, y)$ possède une extrémité initiale x et une extrémité terminale y.

Notion de boucle : Une boucle est un arc de type (x, x) ou un arc dont les extrémités sont confondus.

Arcs adjacents : c'est ds arcs ayant au moins une extrémité en commun.

Notion de successeur : on dit qu'1 sommet y est successeur d'1 sommet x s'il $\exists$ un arc ayant x comme extrémité init. et y comme extrémité terminale. L'ens ds successeurs d'1 sommet x sera noté $\Gamma^{+}(x)$ x_1 suc. x_2 ⇒ x_1 = ext. term.

Notion de prédecesseur : un sommet z est prédecesseur d'1 sommet x s'il $\exists$ un arc ayant z comme extrémité init. et x c^a extrémité terminale. L'ens ds prédecesseurs d'1 sommet x sera noté $\Gamma^{-}(x)$ voisins x_1 pred x_2 ⇒ x_1 = ext init.

Sommets adjacents : un sommet x est adjacent à un sommet y s'il est prédecesseur ou successeur de y. Ces sommets peuvent aussi être qualifier de voisin

$$\Gamma(x) = \Gamma^{-}(x) \cup \Gamma^{+}(x)$$

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
$\Gamma^{-}(x_i)$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$\Gamma^{+}(x_i)$	$\{x_2, x_4\}$	$\{x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_4\}$	$\emptyset$
$\Gamma(x_i)$	$\{x_2, x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_2, x_4\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$

⇒ dictionnaire de graphe

Notion de degré : Considérons un arc (x, y) $\{x \neq y\}$ il est dit incident à x vers l'extérieur et incident à y vers l'intérieur

$x \longrightarrow y$

Le nbre d'arc incident à x vers l'intérieur sera noté $d^{-}_{G}(x)$ où G représente le graphe.
(l'extérieur) " " $d^{+}_{G}(x)$

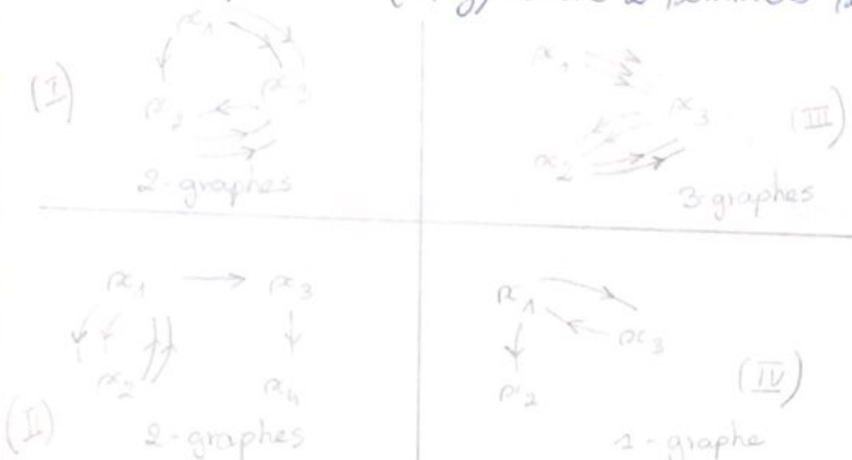
$d^{-}_{G}(x)$ sera appelé demi degré intérieur de x

$d^{+}_{G}(x)$ sera appelé demi degré extérieur de x

Le degré d'1 sommet sera noté $d_G(x)$ = la somme de ces demi degrés

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
$d^+_G(x_i)$	1	1	1	3
$d^-_G(x_i)$	2	2	2	0
$d_G(x_i)$	3	3	3	3

Notion de p-graphe : C'est un graphe dans lequel il y'a au maximum p-arcs (x, y) entre 2 sommets x et y



Un 1-graphe G sera appelé graphe G. Un graphe G peut être défini par le couple (X, U). Il est aussi déterminé par la connaissance de X et de l'applicat° Γ^+ Γ^-. Il peut enfin être caractérisé par sa matrice d'adjacence ou matrice associée avec $A = (a_{ij})$ $i = 1 — n$, $j = 1 — n$

matrice (arcs)

$$(a_{ij}) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x_i, x_j) \in U \\ 0 \text{ si } (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

I. 3) Dfs relatives aux sous-structures d'1 graphe

Soit le sous graphe $G = (X, U)$

Etant donné un sous ens. $Y \subset X$, un sous ens de sommets G. Le sous graphe de G engendré par Y noté G_Y est définit par $G_Y = (Y, U_Y)$ où U_Y représente l'ens ds arcs ayant leurs 2 extrémités dans Y.

$\underline{\underline{Ex}}$ $Y_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$

Sous graphe de G_x engendré par Y_1

$G_V \ (X, V)$

$G_{Y_1} \ (Y_1, U_{Y_1})$

Soit le graphe partiel de $G = (X, U)$

Baxtrie

Etant donné $V \subset U$ (un sous ens. d'arc de G). Le graphe partiel de G engendré par V sera $G_V = (X, V)$

$V = \{(x_1, x_2)(x_2, x_3)(x_3, x_1)\}$

I. 4) Dfs de notions liées à la connexité d'un graphe

notion de chaîne : une chaîne $\sigma = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ de cardinalité q est une séquence de q-arcs de cardinalités u / chaque arc u_k ait une extrémité en commun avec l'arc précédent u_{q-1} et l'autre extrémité en commun avec l'arc suivant u_{q+1} pour $k = 2 \dots q-1$

$u_{k-1} \ u_k \ u_{k+1}$

Les extrémités x de u_1 et y de u_q qui ne sont adjacents à aucun autre sommet dans σ st les extrémités de la chaîne. Une chaîne est dite eltaire si en la parcourant on ne rencontre pas deux fois le m^ê^ sommet.

$\sigma = \{(x_1, x_2)(x_2, x_4)(x_3, x_4)\}$ x_1 et x_3 st les extrémités

Dans une chaîne, le sens n'est pas important

$\underline{\underline{Ex}}$ $\sigma_2 = \{(x_1, x_3)(x_2, x_4)(x_1, x_4)(x_3, x_1)\}$ x_1 et x_3 : extrémités

$\alpha = \{u_1, u_2, \dots u_q\}$ 12/11/2018

notion de chemin : Un chemin α : de cardinalités u est une chaîne : de cardinalité u dont ts les arcs sont orientés dans le m^ê^ sens. L'extrémité terminal de l'arc u_k coïncident avec l'extrémité initiale de l'arc u_{k+1} pour $k = 1, \dots, q-1$. Si x est l'extrémité initiale de u_1 et y l'extrémité terminale de u_q, on parle alors de chemin de $x \to y$. x et y étant ds extrémités du chemin.

Ex: $\lambda_1 = \{(x_1, x_2)(x_2, x_3)(x_3, x_4)\}$

$\lambda_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

Un chemin est dit eltaire si en le parcourant on ne rencontre pas 2 fois le m^ sommet

Ex : $\lambda_2 = (x_1, x_2, x_3, x_1, x_4)$

notion de cycle : Un cycle est une chaîne dont les extrémités coïncident. Il est dit eltaire si chaque sommet y figure une seule fois sauf l'extrémité commune.

Ex $\sigma_4 = \{(x_1, x_2)(x_2, x_4)(x_3, x_4)(x_1, x_3)\}$

x_1 est confondu donc on a un cycle eltaire

Notion de circuit : un circuit est un chemin dont les extrémités coïncident. Il est aussi un cycle dont ts les arcs st dirigés dans le m^ sens. Il est dit eltaire si en le parcourant on ne rencontre pas 2 fois le m^ sommet (en dehors de l'extrémité commune)

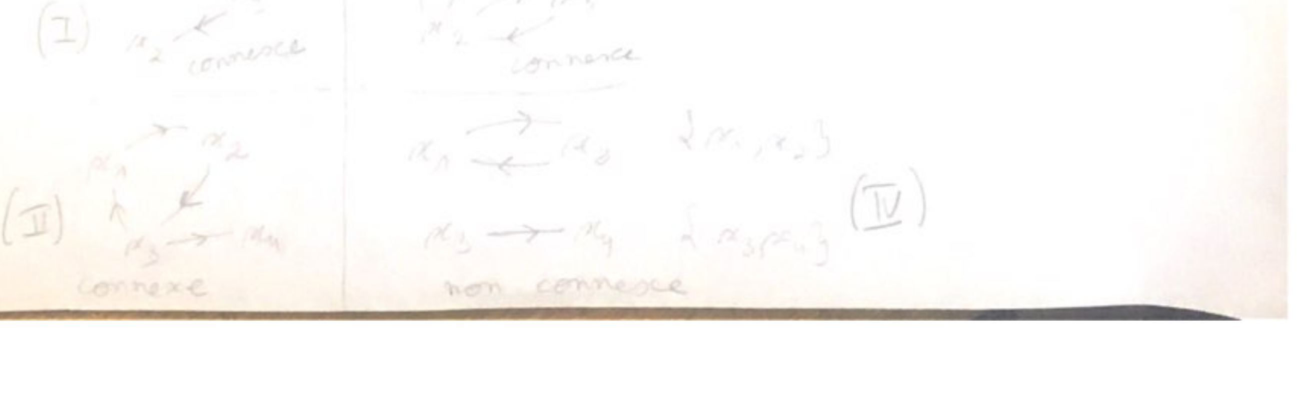
Ex $\alpha_3 = \{(x_1, x_2)(x_2, x_3)(x_3, x_1)\}$

connexité : * Un graphe $G = (X, U)$ est dit faiblement connexe si pour ts couples de sommets $(x_i, x_j) \in X$ avec $x_i \neq x_j$ il $\exists$ une chaîne reliant x_i à x_j. La relation binaire r_1 définit par $x_i \mathcal{R}_1 x_j$ ssi $x_i = x_j$ ou $\exists_1$ chaîne reliant x_i à x_j est une relation d'équivalence. → une seule classe ; plus classes = pas de connexité

Les classes d'équivalences sur X par cette relation partitionne X en ces composantes faiblement connexes. tt sommet est connexe à lui m^

Ex: $\dot{x}_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{x}_4 \Rightarrow G_1$ est un graphe connexe

Ex :



Un graphe $G = (X, U)$ est fortement connexe si pour ts couples de sommets $(x_i, x_j) \in X$ avec $x_i \neq x_j$, il $\exists$ un chemin allant de $x_i \to x_j$ et un chemin allant de $x_j \to x_i$. (6)

La relation binaire $\mathcal{R}_2$ définit par $x_i \, \mathcal{R}_2 \, x_j \Leftrightarrow \begin{cases} x_i = x_j \text{ ou} \\ \exists_1 \text{ chemin de} \end{cases}$

$x_i \to x_j$ et un chemin de $x_j \to x_i$ et une relation d'équivalence et les classes d'équivalences induite par cette relation dans l'ens X partitionnent X en ses composantes fortement connexes.

__Ex:__ $\dot{x}_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$; $\dot{x}_4 = \{x_4\}$

donc G_1 est connexe mais pas fortement connexe car il a plrs classes d'équivalence.

__Ex.__ (I) : $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ connexe mais pas fortement connexe

(II) : $\{x_1, x_2, x_3\}$; $\{x_4\}$ //

(III) : $\{x_1, x_2, x_3\}$ fortement connexe

(IV) : pas connexe ; $\{x_1, x_2\}$ $\{x_3\}$ $\{x_4\}$

I.5) Dfs relatives aux concepts non orientés

Si entre 2 sommets x et y d'1 graphe G, il $\exists$ un arc (x,y) et (y,x), il peut intuitivement paraître plus simple de remplacer ces 2 arcs par un lien sans orientat°. Si cette situation se produit pour ts les couples de sommets reliés, il n'y aura plus d'orientation à prendre en considération. Il importera seulemt de connaître les paires de sommets reliés et combien de fois elles sont reliées. On considère alors au lieu de l'arc (x,y) ou (y,x), l'ens formé par les sommets (x,y) est $e_i = [x_i, x_j]$ que l'on appelle **arête**.

$u_i = [x_i, x_j]$ $u_j = [x_j, x_i]$

i.e x_i — x_j (sans orientat°)

Si E est l'ens des arêtes, on parle alors de **multigraphe** $G = (X, E)$. Un multigraphe est par ailleurs appelé un graphe simple s'il n'a pas de boucles et s'il $\exists$ au max une arête entre 2 sommets. Plrs concepts des graphes orientés s'étendent et

parfois se simplifient dans le cadre des graphes non orientés.
Ns laissons à chacun à titre d'exercice le soin de les définir avec précision. Il s'agit des notions d'arêtes adjacentes, sommets adjacents, degré d'1 sommet, de matrices d'adjacence, de sous graphes, de graphes partiels, de chaînes, de cycle, de circuit, de graphes connexes.

<u>degré d'un sommet</u> : le d° d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet (une boucle comptant pour 2). Ds le cas d'un graphe simple, on aura : $d(s) = |Adj(s)|$

<u>sous graphes et graphes partiels</u> : on a les m^ dfs juste qu'à la place d'arcs, on parle d'arêtes.

<u>matrices d'adjacence</u> : m^ défi. + que ici la matrice est symétrique par rapport à sa diagonale descendante. Dans ce cas, on peut ne mémoriser que la composante triangulaire supérieure de la matrice d'adjacence.

*On parle de chaîne au lieu de chemin et cycle au lieu de circuit. Dans le cas d'un cycle, toutes les arêtes doivent être distinctes. Un graphe sans cycle est dit acyclique

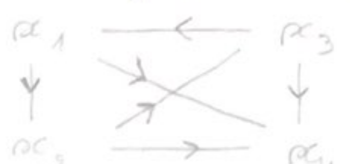
<u>graphes connexes</u> : Si chaque sommet est accessible à partir de n'importe quel autre. Autrement dit, si pour ∀ couples de sommets distincts $(s_i, s_j) \in S^2$, il ∃ une chaine entre s_i et s_j

Chapitre II : Quelques problèmes important dans l'étude d'un graphe orienté

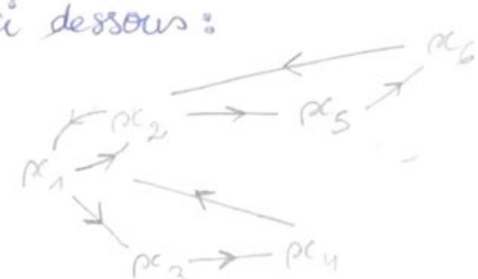
Un graphe orienté ou non permet de représenter de façon à la fois naturelle et synthétique, une grande variété de problème graphique. Nbres de ces problèmes et dans les contextes les plus divers font intervenir comme nous le verrons des notions de fermetures transitives, de circuits, de noyau ...
Le présent chapitre est consacré à l'étude de qlqs uns de ces concepts fondementaux et de leurs applications.

II. 1) Quelques catégories de graphes

Les graphes orientés peuvent être selon leurs structures générales classées en plrs catégories. Ns considérons + particulièrement ici les distinctions fondées sur les propriétés de symétrie et de transitivité. Ls ≠ dfs seront illustrées au moyen des graphes G_1 et G_2 ci dessous :



$G_1 = (X_1, U_1)$



$G_2 = (X_2, U_2)$

II. 1) 1- Graphe symétrique

$G = (X, U)$ symétrique ssi $\forall x_i, x_j \in X \quad (x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U$.

Ex: G_1 n'est pas symétrique car $x_1 \to x_4$ mais pas $x_4 \to x_1$
G_2 n'est pas symétrique

2- graphe antisymétrique

$G = (X, U)$ antisymétrique ssi pour $x_i, x_j \in X (x_i \neq x_j)$
$(x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \notin U$

Ex: G_2 antisymétrique car si l'arc dans un sens $\exists$, l'autre sens $\nexists$

3- graphe transitive

$G = (X, U)$ est transitif ssi $\forall x_i, x_j, x_k \in X$, $(x_i, x_j) \in U$ et $(x_j, x_k) \in U \Rightarrow (x_i, x_k) \in U$

Ex: G_1 non transitive et G_2 non plus

4- graphe complet

$G = (X, U)$ est complet ssi $\forall x_i, x_j \in X$, $(x_i, x_j) \notin U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U$

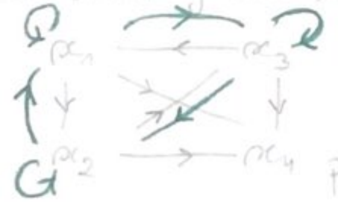
Ex: G_1 complet ; G_2 non complet

II. 2) Fermeture transitive d'un graphe

1- Définition :

A π graphe $G = (X, U)$ on peut associer de façon unique un graphe transitif $\hat{G} = (X, \hat{U})$ appelé fermeture transitive de G où $\hat{U}$ est définit par la relation d'appartenance suivante : $(x, y) \in \hat{U}$ ssi ∃ dns G un chemin de x vers y.
Schématiquement, on construit $\hat{U}$ en ajoutant à U un arc (x_i, x_k) qui $\notin U$ si $(x_i, x_j) \in U$ et $(x_j, x_k) \in U$ pour au moins une valeur de j et cela de façon ittérative jusqu'à l'obtention d'1 graphe $\hat{G}$ transitif.

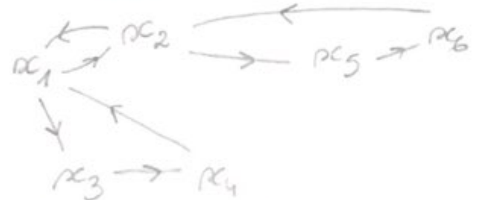
Ex: G_1 non transitif dnc det. schématiquement sn graphe transitif



Mnt on a le graphe $\hat{G}_1 = (X_1, \hat{U}_1)$ = Fermeture transitive du graphe

Pr G_2, on utilise la procédure algorithmique

10/12/2018



Si $\Gamma^+_p(x_i)$ est l'ens. des sommets qui st accessibles à partir de x_i par un chemin de cardinalités B, $\hat{G}$ peut être défini par l'application $\hat{\Gamma}^+(x_i) = \Gamma^+_1(x_i) \cup \Gamma^+_2(x_i) \cup \ldots \cup \Gamma^+_n(x_i)$ $x_i \in X$

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
$\Gamma_1^+(x_i)$	x_2, x_4	x_3, x_4	x_1, x_4	$\emptyset$
$\Gamma_2^+(x_i)$	x_3, x_4	x_1, x_4	x_2, x_4	$\emptyset$
$\Gamma_3^+(x_i)$	x_1, x_4	x_2, x_4	x_3, x_4	$\emptyset$
$\Gamma_4^+(x_i)$	x_2, x_4	x_3, x_4	x_1, x_4	$\emptyset$
$\hat{\Gamma}^+(x_i)$	x_1, x_2, x_3, x_4	x_1, x_2, x_3, x_4	x_1, x_2, x_3, x_4	$\emptyset$

$\hat{\Gamma}^+(x_i)$ représente donc l'ens. des descendants de x_i

L'applicat° $\hat{\Gamma}^-$ obtenue en inversant les arcs de U permet d'associer à chaque sommet x_i l'ens $\hat{\Gamma}^-$ de x_i de ces ancêtres ou ascendants

Considérons la $p^{ième}$ puissance booleenne avec $p \in \mathbb{N}^*$ de la matrice d'adjacence $\left(A^{(p)} = \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{p\text{ facteurs}}\right)$ A associé à G.

$A^{(p)}$ représente la matrice d'adjacence d'un graphe ou un arc entre x et y signifie qu'il $\exists$ dans G, un chemin de cardinalité p allant de x vers y, on a déduit la matrice d'adjacence $\hat{A}$ de $\hat{G}$. $\hat{A} = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(n)}$.

Appliquons aux graphes G_1 :

$A_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0101 \\ 0011 \\ 1001 \\ 0000 \end{bmatrix}$; $A_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0011 \\ 1001 \\ 0101 \\ 0000 \end{bmatrix}$; $A_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 1001 \\ 0101 \\ 0011 \\ 0000 \end{bmatrix}$; $A_1^{(4)} = \begin{bmatrix} 0101 \\ 0011 \\ 1001 \\ 0000 \end{bmatrix}$

$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 0000 \end{bmatrix}$

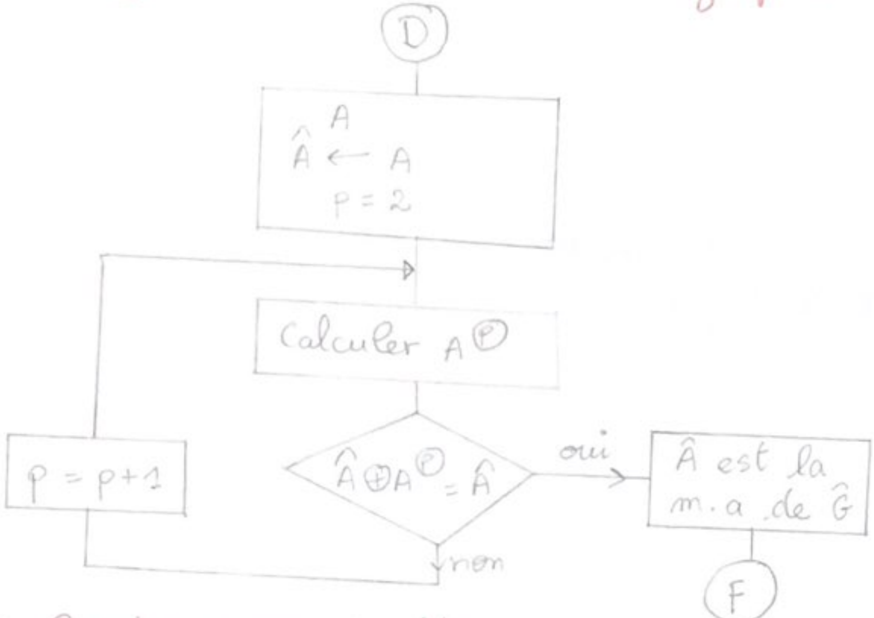
Appliquons à G_2.

$A_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 011000 \\ 100010 \\ 000100 \\ 100000 \\ 000001 \\ 010000 \end{bmatrix} \to \hat{A}_2$ $A_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 100110 \\ 011001 \\ 100000 \\ 011000 \\ 010000 \\ 100010 \end{bmatrix}$ $A_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 111001 \\ 110110 \\ 011000 \\ 100110 \\ 100010 \\ 011001 \end{bmatrix}$, $A_2^{(4)} = \begin{bmatrix} 111110 \\ 111011 \\ 100110 \\ 111001 \\ 011001 \\ 110110 \end{bmatrix}$

$A_2^{(1)} + A_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 111110 \\ 111011 \\ 100100 \\ 111000 \\ 010001 \\ 110010 \end{bmatrix} \to \hat{A}_2$ $\hat{A}_2 + A_2^{(3)} \begin{bmatrix} 111111 \\ 111111 \\ 111100 \\ 111110 \\ 110011 \\ 111011 \end{bmatrix} \to \hat{A}_2$ $\hat{A}_2 + A_2^{(4)} = \begin{bmatrix} 111111 \\ 111111 \\ 111110 \\ 111111 \\ 111011 \\ 111111 \end{bmatrix} \cdot \hat{A}_2$

$\hat{A}_2 + A_2^{(5)} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \to \hat{A}_2$ $\quad A_2^{(6)} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$ $\quad \hat{A}_2 + A_2^{(6)} = \hat{A}_2$

II- 2) 2- Ordinogramme de l'algorithme d'obtention de la fermeture transitive d'un graphe



II. 3) Graphes sans circuits

1- Propriétés

L'absence d'un circuit est indispensable à l'utilisation d'1 grand nbres d'algorithmes. Cette condit° figure notamment dns ls hypothèses préalable à l'application de presque tts ls méthodes d'optimisat° présentées dns ls chapitres ultérieures. Il est dnc important de disposer d'une méthode permettant de tester l'absence de circuit dns un graphe donné. Ns en donnant 2 ci-dessous.

17/12/2018

a) On voit facilement qu'un graphe est sans circuit ssi la matrice d'adjacence $\hat{A}$ de sa fermeture transitive ne possède aucun 1 sur la diagonale. Cette caractérisat° fournit un 1er algorithme de reconnaissance d'1 graphe sans circuit.

b) Un 2nd algorithme est présenté dans le paragraphe II. 3) 2- et repose sur la propriété suivante : Soit $G=(X,U)$ un graphe a n sommets. Construisant les n- sous ensembles de sommets : $X(0), X(1), \ldots X(n-1)$. On aura $X(0) = \{ x \in X \,/\, \Gamma^{+}_{(x)} = \emptyset \}$

$X(1) = \{ x \in X \setminus X(0) \;/\; \Gamma^+_{(x)} \subset X(0) \}$

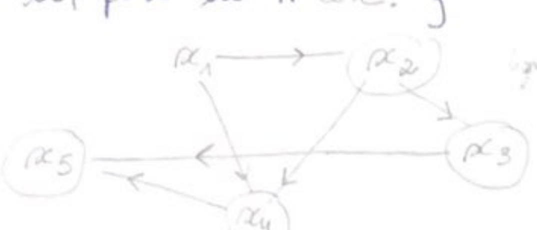
$X(2) = \{ x \in X \setminus X(0) \cup X(1) \;/\; \Gamma^+_{(x)} \subset X(0) \cup X(1) \}$

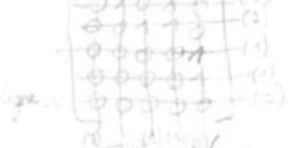
$X(n-1) = \{ x \in X \setminus \bigcup_{k=0}^{n-2} X(k) \;/\; \Gamma^+_{(x)} \subset \bigcup_{k=0}^{n-2} X(k) \}$

Si ces n - sous ens. de sommets sont disjoints et s'ils constituent un recouvrement de X alors G est un graphe sans circuit.

$$\begin{cases} X(i) \cap X(j) = \emptyset \\ \forall i = j : 0 \to n-1 \\ \bigcup_{k=0}^{n-1} X(k) = X \end{cases}$$

$X(k) = \{ x \in X$ / le chemin de cardinalité maximale issu de x soit composé de k arc. $\}$





$G_3 = (X_3, U_3)$ ou

x_i	$\Gamma^+(x_i)$
x_1	x_2, x_4
x_2	x_3, x_4
x_3	x_5
x_4	x_5
x_5	

$X(0) = \{x_5\}$; $X(1) = \{x_3, x_4\}$; $X(2) = \{x_2\}$; $X(3) = \{x_1\}$

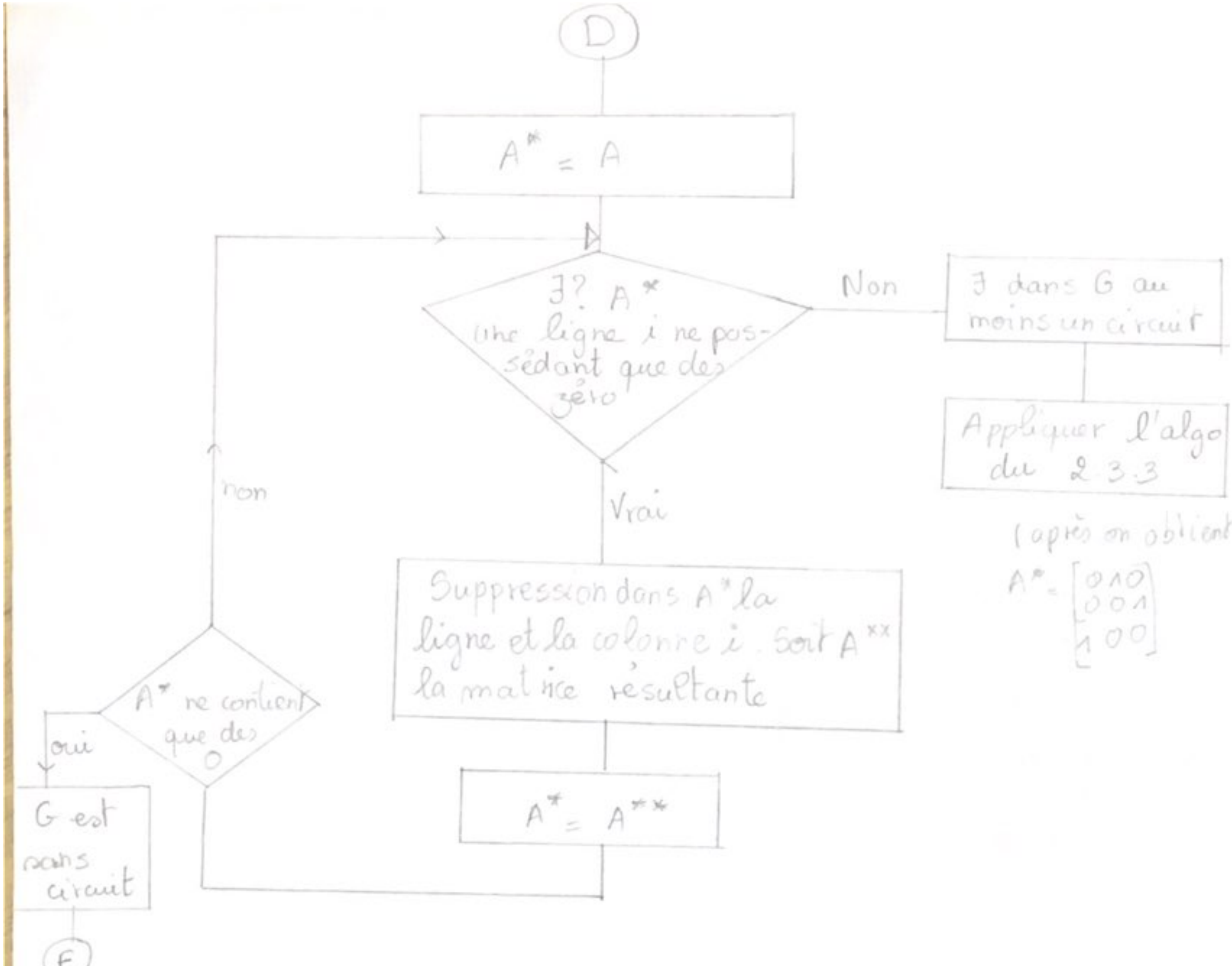
\# On peut pas aller d'un niveau inférieur à supérieur

\# quand 2 sommets ∈ au même niveau, il ne peut pas y avoir d'arc les reliant

2- Ordinogramme de l'algorithme permettant de tester l'absence de circuit.

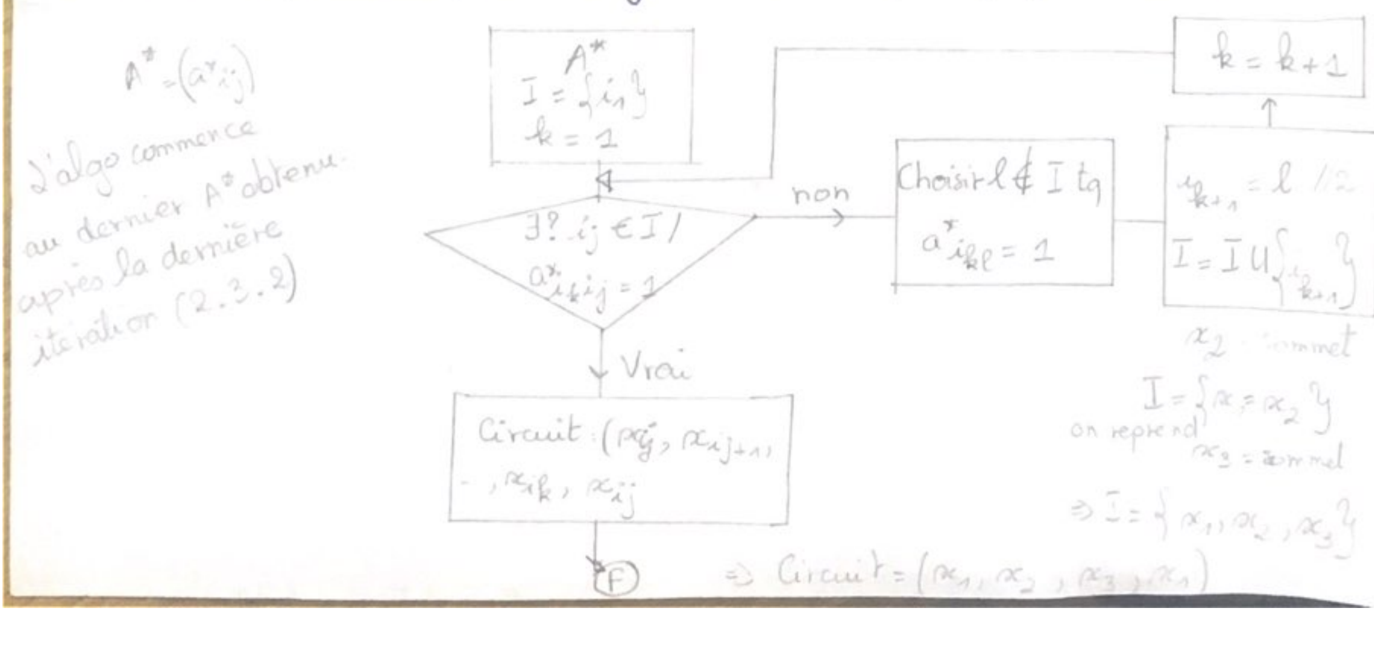
Cette algorithme découle directement de la propriété b énoncée au paragraphe précédent. En fin de procédure lorsqu'il devient impossible de supprimer de nouvelle ligne, l'ens des sommets barrés (correspondant à des lignes barrées) est l'ensemble $X(0) \cup X(1) \ldots X(n-1)$

Si cet ensemble est l'ens X, le graphe est sans circuit, dans le cas contraire G possède au moins un circuit



3-Ordinogramme de l'algorithme d'obtention d'un circuit

Si le graphe possède au moins un circuit on peut en construire 1 au moyen de l'algorithme suivant à partir du sommet qlconque du sous graphe G^* définit par la matrice A^* obtenu à la dernière itération de l'algorithme du paragraphe 2.3.2



4) Ordinogramme de l'algorithme d'obtention des niveaux d'un graphe sans circuit

Les niveaux d'un graphe sans circuit sont par df les n-sous ens. de sommets x_i avec $i \to 0$ à $n-1$ introduit au para. 2.3.1 Rappelons qu'1 sommet $\in$ x_i si le chemin de card. max issu de ce sommet contient i arcs soulignons de + q ces niveaux forment une partition de X et que ts sommets de niveau X_i n'admet aucun successeur dns ls sommets x_j avec $j \geq i$. En particulier il n'y a pas d'arcs entre 2 sommets d'un m̂ niveau. L'algorithme sit de justification intuitive permet de construire ls niveaux d'un graphe sans circuit. Le partage en niveau d'un graphe est utilisé dans des domaines divers en particulier, il permet de simplifier considérablement la recherche des chemins de longueur min ou max entre 2 sommets.