Chapitre 4 : Recherche d'un flot maximal dans un réseau
Algo de FORD - FULKERSON

25/03/2019

4.1) Réseau de transport, flot dans un réseau

Un réseau de transport est un graphe fini sans boucle où à chaque arc $u \rightarrow c(u) \geq 0$ appelé capacité de l'arc u et où il $\exists$ un sommet x_e et un seul / $\Gamma^{-}(x_e) \neq \emptyset$; x_e représente l'entrée du réseau et où il $\exists !$ un sommet x_s / $\Gamma^{+}(x_s) = \emptyset$, x_s représente la sortie du réseau.

Un flot φ du réseau est une valeur $\ell(u)$ associé à chaque arc u du réseau / (1) $\ell(u) \geq 0$

(2) $\ell(u) \leq c(u)$

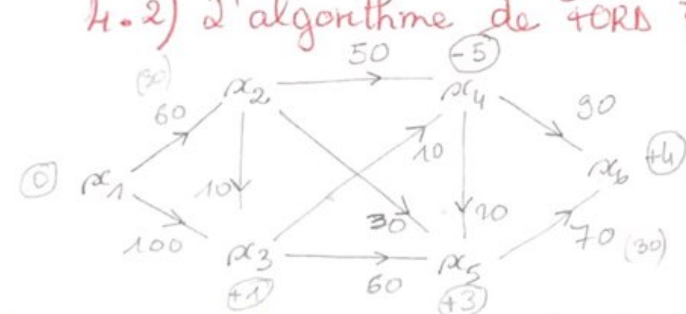
(3) $\sum_{u \in U_x^-} \ell(u) - \sum_{u \in U_x^+} \ell(u) = 0$ pour $x \neq x_E$ et $x \neq x_S$

$U^-_x \rightarrow$ l'ens ds arcs incidents vers l'intérieur à x

$U^+_x \Rightarrow$ " " " " vers l'extérieur à x

On désigne par $\ell(x_s)$, l'afflux au sommet x_s ou la valeur du flot dans le réseau. Chercher un flot max. dans un réseau c'est cherché un flot rendant max. l'afflux au sommet x_s. L'algorithme de FORD-FULKERSON permet de résoudre ce problème

4.2) L'algorithme de FORD FULKERSON



O -> marquage pr Appli. Etape 3

Etape 1 : On fait passer dans le réseau, un flot au jugé compatible avec les 3 propriétés. On choisit un chemin : $(x_1\ x_2\ x_5\ x_6) \rightarrow 30$

On regarde la plus petite capacité

Capacité résiduelle d'un arc est la différence entre la capacité de l'arc et le flot sur l'arc

Etape 2 : On cherche un flot complet. Un flot est complet si tt chemin allant de x_E à x_S contient au moins un arc saturé i.e / $\varphi(u) = c(u)$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \rightarrow 10$

$(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6) \to 40$
$(x_1, x_3, x_5, x_6) \to 20$ $(x_1, x_2, x_4, x_6) \to 10$

Etape 3 : Soit $f_c(x_s)$ un flot complet par une procédure itérative, on va marquer successivement ts ls sommets du graphe où on peut faire parvenir une unité de flot supplémentaire. On marque le sommet x_e avec le coefficient 0.

Si x_i est un sommet marqué : on peut marquer d'autres sommets de 2 façons.

(+i) tt sommet $y \in \Gamma^{+}(x_i)$ non marqué si $f(x_i, y) < C(x_i, y)$

(−i) tt sommet $z \in \Gamma^{-}(x_i)$ non marqué si $f(z, x_i) > 0$

Si avec cette procédure, on parvient à marquer le sommet x_s, il $\exists$ entre x_e et x_s, une chaine Σ dont tt ls sommets st distinctes et marqués avec l'indice du sommet précédent (au signe près)

Application sur le graphe

$x_1 \xrightarrow[80]{} x_3 \xrightarrow[40]{} x_5 \xleftarrow[20]{} x_4 \xrightarrow[80]{} x_6$ Chaine augmentant

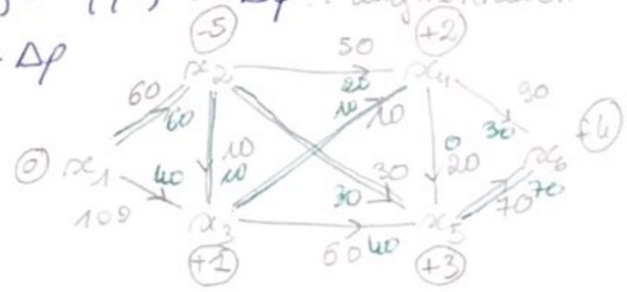
Sur la chaine, on met la capacité résiduelle pr les arcs orientés dans le sens direct et la valeur saturée pr ceux orientés dans le sens indirect

Si $u \notin \sigma$ chaine $f'(u) = f(u)$

Si $u \in \sigma_D$: $-u \in \sigma_D$ sens direct , $f'(u) = f(u) + \Delta f$ l'augmentation

Si $u \in \sigma_I$: sens indirect $f'(u) = f'(u) - \Delta f$

$$\Delta f = \min_{\substack{u \in \sigma_D \\ v \in \sigma_I}} \left(C(u) - f(u) ; f(v) \right)$$

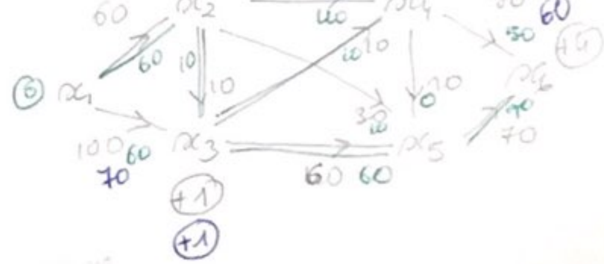


$\Delta f_1 = \min (80, 40, 20, 80) = 20$

$f_2(x_5) = f_c(x_5) + \Delta f_1 = 80 + 20 = 100$

$x_1 \xrightarrow[60]{} x_3 \xrightarrow[20]{} x_5 \xleftarrow[30]{} x_2 \xrightarrow[30]{} x_4 \xrightarrow[60]{} x_6$

$\Delta f_2 = \min (60, 20, 30, 30, 60) = 20$



$x_1 \xrightarrow[40]{} x_3 \xleftarrow[10]{} x_2 \xrightarrow[10]{} x_4 \xrightarrow[60]{} x_6$

$f_3(x_6) = 100 + 20 = 120$

$f_4(x_6) = 120 + 10 = 130$

flot maximal $= 130$

Etape 4 : Si pr un flot f_* on peut plus améliorer la valeur par la méthode précédente i.e si on peut pas marquer le sommet x_s, le flot f_* a atteit sa valeur max. on voit facilement dans le cadre de notre ex. qu'il n'est plus possible de marquer la sortie. On a alors un flot maximal.

01/04/2019

4.3) Notion de Coupe

Soit A, un ensemble de sommet du réseau, contenant la sortie x_s et ne contenant pas l'entrée x_e

L'ens U_A^- ds arcs incidents vers l'intérieur à A est une coupe du réseau.

Ex:

$$A = \{x_4, x_5, x_6\}$$

$$U_{A_1}^- = \{(x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_2, x_5)(x_3, x_5)\}$$

$$C(U_{A_1}^-) = 50 + 10 + 30 + 60 = 150$$

Comme A contient la sortie, Toute unité de matière allant de x_e à x_s va emprunter au moins une fois un arc de U_A^-.

$\forall$ un flot φ et une coupe U_A^-, on aura :

$$\varphi(x_s) \leq C(U_A^-)$$

S'il $\exists$ un flot φ^* et une coupe V / $\varphi^*(x_s) = C(V)$ on dira que le flot f a atteint sa valeur maximale et la coupe V sa capacité minimale.

Ex: $\varphi^*(x_s) = 130$

$$A^* = \{x_2, x_4, x_5, x_6\}$$ L'ens des sommets non marqués

$$U_{A^*}^- = \{(x_1, x_2)(x_3, x_4)(x_3, x_5)\}$$

$$C(U_{A^*}^-) = 60 + 10 + 60 = 130$$

Application : Devoir Surveillé

Exo 1 : 1°)
(s a d p) ; min {40 ; 5 ; 20} = 5
(s a e p) ; min {35 ; 5 ; 20} = 5
(s a f p) ; min {30 ; 10 ; 25} = 10
(s b d p) ; min {10 ; 10 ; 15} = 10
(s c e p) ; min {20 ; 10 ; 15} = 10
(s c f p) ; min {10 ; 15 ; 15} = 1[illegible]
On a flot complet de [50]

3.) Oui, tt ls chemins allant de s à p st saturés.
Oui la valeur peut être ≠ ; un flot peut être complet et pas de valeur maximale.

4.) $s \xrightarrow[25]{} a \xrightarrow[5]{} f \xleftarrow[15]{} c \xrightarrow[5]{} e \xrightarrow[10]{} p$

$\Delta f_1 = \mathrm{Min}(25, 5, 15, 5, 10) = 5$

$f_1 = 45$

$f_2 = 45 + 5 = 50$ flot maximal

Lorsqu'on reprend le marquage, on pourra pas continuer (on marque que a)

5.) La coupe est engendré par les chemins nons marqués

$A^* = b, c, d, e, f, p\}$

$U_A^- = \{(s,b); (s,c); (a,d); (a,e); (a,f)\}$

$C\,U_A^- = 10 + 20 + 5 + 5 + 10 = 50$

6°) C'est le flot trouvé en 4

Si on a 2 flots et que les valeurs passés st ≠ donc on aura 2 flots ≠