Chapitre 2 : Calcul de Probabilité

École Supérieure Polytechnique de Dakar
(ESP-UCAD)

Licence : Informatique et Réseaux-Télécommunication

Année Scolaire : 2020-2021

Dahirou WANE

Quelques Définitions

<u>Théorie des probabilités</u> : Science mathématique étudiant les lois qui régissent les phénomènes aléatoires

<u>Ensemble fondamentale (univers Ω)</u> : l'ensemble des résultats possibles lors d'une épreuve

<u>Événement</u> : ensemble de résultats (sous ensemble de l'univers) d'une expérience aléatoire

<u>Exemple 1</u> : lancer d'un dé à 6 faces. L'univers est composé des 6 faces, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

<u>Exemple 2</u> : si on lance trois fois une pièce, le référentiel est composé des 2^3 arrangements avec répétition des 2 faces distinctes notées P et F : $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$.

Quelques Définitions

Exemple 3 : Jet d'une pièce au cours de N parties de 'P' ou 'F'. Résultat = k "P" et N-k "F".

$$P = k/N$$

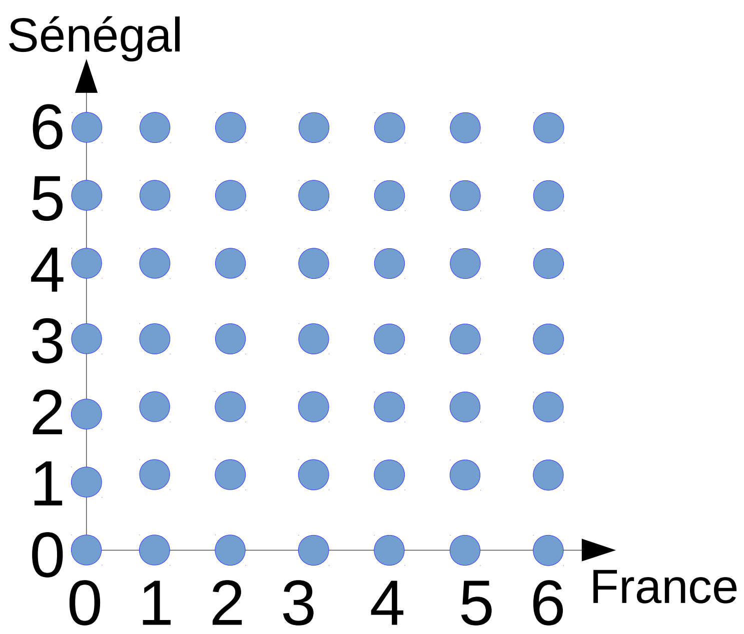
Épreuve : expérience consistant à jeter la pièce et à noter le résultat.

Sous ensemble (A) de l'ensemble des descriptions d'une expérience est par défaut un événement.

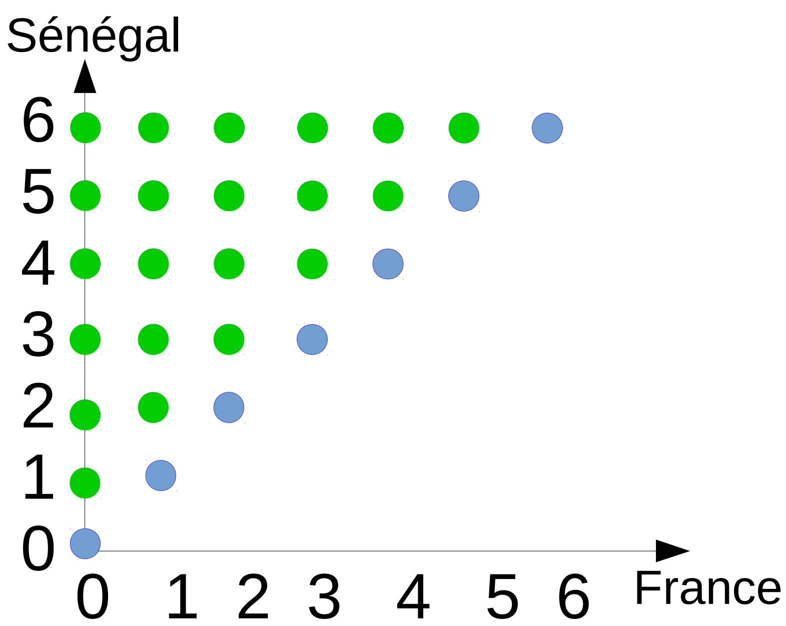
Exemple 4 : prenons Ω espace correspondant au résultat du match Sénégal-France.
Une description du résultat est une paire de nombres entiers non négatifs w = (m, n) où : m = but marqué par le Sénégal (E_1) et n = but marqué par la France (E_2).
Le sous-ensemble de Ω : $A = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 / m > n\}$ est l'événement « le Sénégal bat la France »

Une description de w qui appartient à l'ensemble A est appelée une *réalisation* de l'événement A.

Exemple 5 : description du match



Espace des description du match

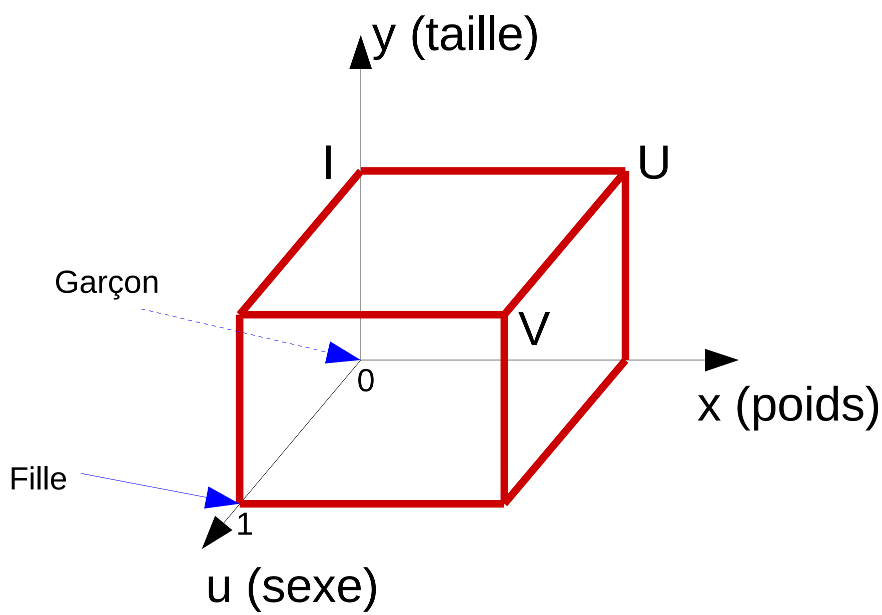


Événement le Sénégal bat la France

NB : bien que Ω soit à la discrétion de celui qui modélise tel ou tel phénomène aléatoire, il doit choisir Ω suffisamment riche

Quelques Définitions

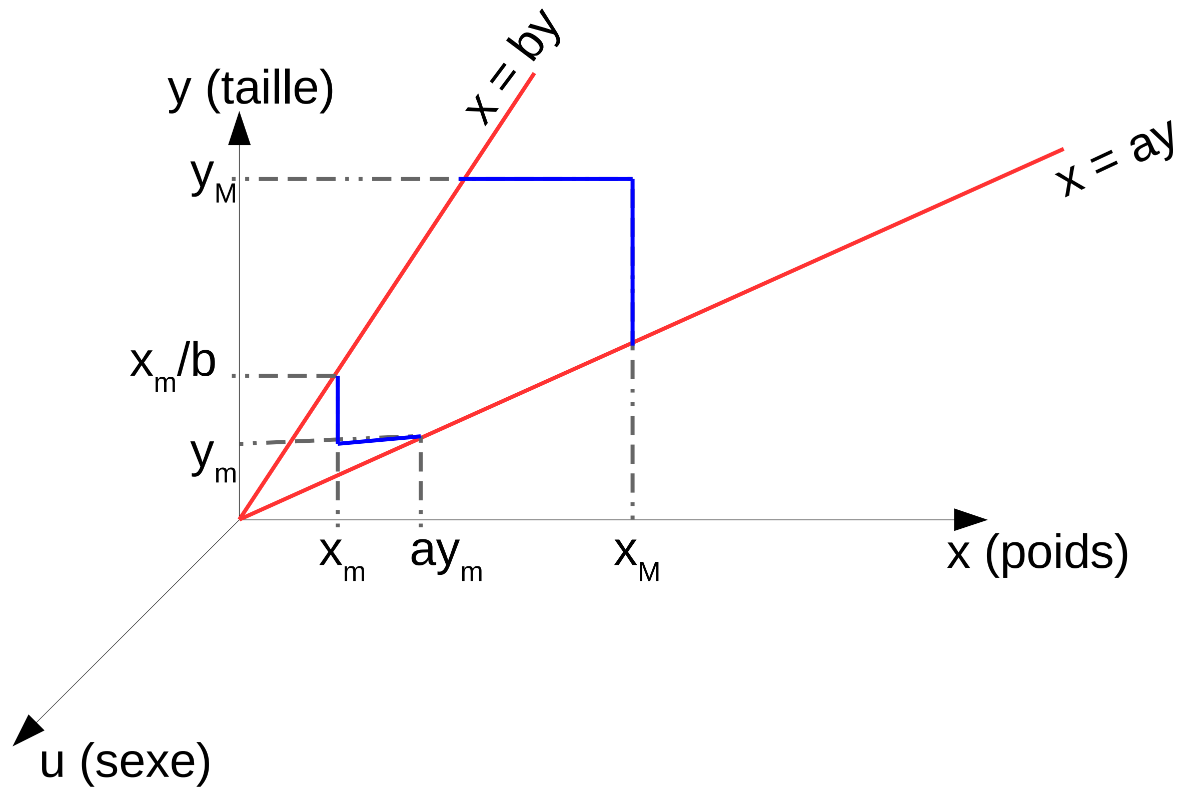
<u>Description bébé en bonne santé</u> : soit u le sexe du bébé, x son poids et y sa taille. Pour un garçon (u = 0) et une fille (u = 1). $\Omega = \{(u, x, y) \,/\, u \text{ in } \{0, 1\} \,;\, x \geq 0 \,;\, y \geq 0\}$



Description de deux bébés

Description bébé en bonne santé : L'événement « bébé mâle en bonne santé » est représenté par :

$$x_m \leq x \leq x_M \ , \ y_m \leq y \leq y_M \ , \ a \leq \frac{x}{y} \leq b$$



Si Ω est riche, le modèle probabiliste sera apte à décrire les phénomènes aléatoires avec précision.

Le calcul de probabilité théorique d'un événement E est donnée par :

1 : Cas discret

$$P(E) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ total\ de\ cas}$$

2 : Cas continu

Soient Ω un ensemble fondamental (univers) et E l'ensemble de réalisation (événement)

$$P(E) = \frac{m(E)}{m(\Omega)}$$

Exemple 6 : On lance deux pièces de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir : 2P, 1P et 0P ?

Le système est formé par un couple de variables {(P,F), (P,F)}.

Première Méthode

A = « événement d'avoir 2P » : 1P (1ère pièce) **et** 1P (2ème pièce)

Donc **P(A)** = (1/2)x(1/2) = **1/4**

B = « événement d'avoir 1P » : 1P (1ère pièce) **et** 1F (2ème pièce) **ou** 1F (1ère pièce) **et** 1P (2ème pièce)

Donc **P(B)** = (1/2)x(1/2) + (1/2)x(1/2) = 1/4 + 1/4 = **1/2**

C = « événement d'avoir 0P » : 1F (1ère pièce) **et** 1F (2ème pièce)

Donc **P(C)** = (1/2)x(1/2) = **1/4**

Deuxième Méthode (application de la formule)

Ω = {PP, PF, FP, FF} ; n (nobre de cas total) = 4.

A = « événement d'avoir 2P » : n(A) = 1 : nombre de cas favorable pour A ; donc **P(A)** = **1/4**

B = « événement d'avoir 1P » : n(B) = 2 : nombre de cas favorable pour B ; donc **P(B)** = 2/4 = **1/2**

C = « événement d'avoir 0P » : : n(C) = 1 : nombre de cas favorable pour B ; donc **P(C)** = **1/4**

Événement	2P	1P	0P	Total
p_i	1/4	1/2	1/4	1

Exemple 7 : On lance trois pièces de monnaie.

Quelle est la proba d'avoir : 3F, 2F, 1F et 0F ?

Mesure et Proba

Soit E un ensemble donné et X un sous-ensemble de E.

- Si m(E) fini $\quad \forall X \subset E \rightarrow m(X) \geq 0$
- Si X_1, X_2, ..., X_n n sous ensembles de E avec n un nombre fini.

$$m(X) \leq m(X_1)+m(X_2)+......+m(X_n)$$

$$Avec, \ X = X_1 \cup X_2 \cup ...... \cup X_n$$

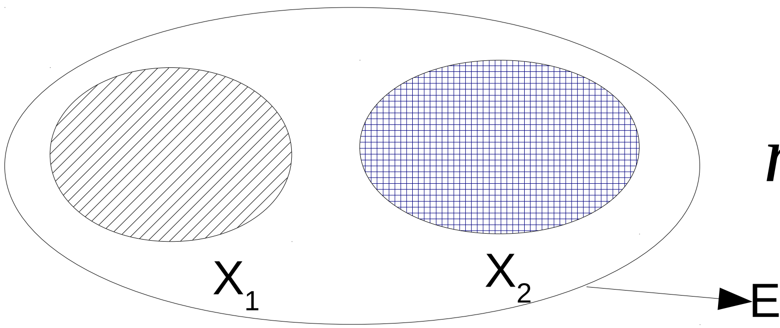
- Si les sous ensembles sont disjoints, l'inégalité devient une égalité.

$$Si \ X_i \cap X_j = \emptyset$$

$$m(X) = \sum_{i=1}^{n} m(X_i) \qquad Avec, \ X = \coprod_{i=1}^{n} X_i$$

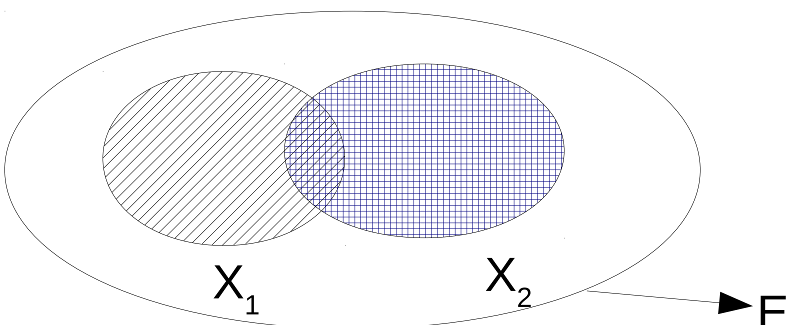
<u>m(E) = mesure de E</u>

- Si les sous ensembles de E sont disjoints



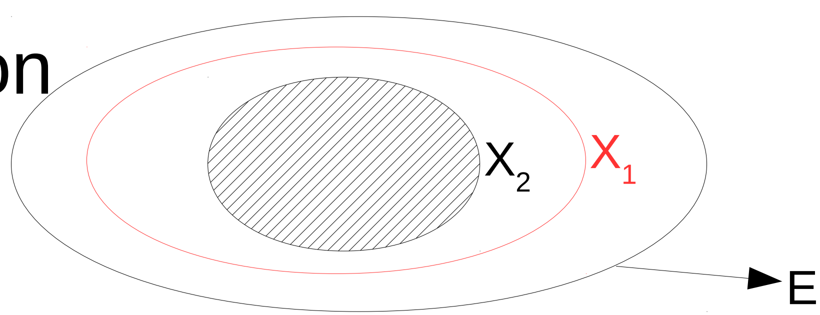
$$m(X_1 \cup X_2) = m(X_1) + m(X_2)$$

- Si les sous ensembles de E ne sont pas disjoints

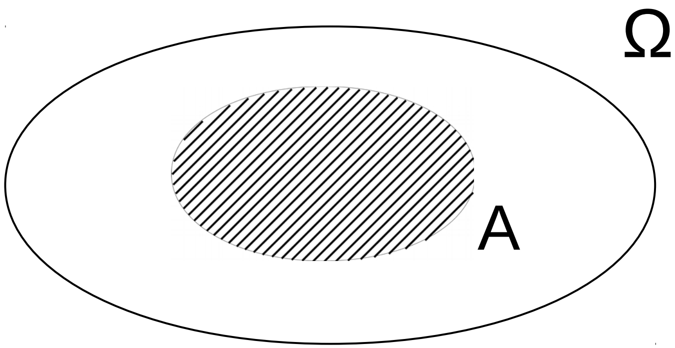


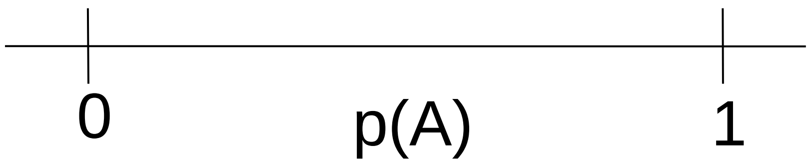
$$m(X_1 \cup X_2) = m(X_1) + m(X_2) - m(X_1 \cap X_2)$$

- Inclusion



$$X_2 \subset X_1$$
$$m(X_2) < m(X_1)$$





$$0 \leq p(A) \leq 1$$

Ω : Univers
A : événement

L'ensemble Ω, muni de la probabilité P, est appelé **espace probabilisé**.

Le support de P est constitué par l'ensemble des points ω de Ω tels que P (ω) soit strictement positif.

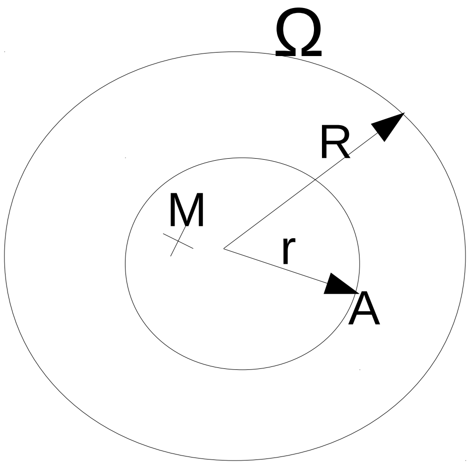
Exemple 8 : tirage d'un nombre pair avec un lancer de dé à 6 faces.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \ ; \ m(\Omega) = card(\Omega) = 6$$

$$A = \{2,4,6\} \ ; \ m(A) = card(A) = 3$$

$$p(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La mesure a un *caractère de dénombrement*.



Soit M un point à l’intérieur d’un cercle de rayon R.

Quelle la probabilité que M soit plus proche du centre que la circonférence ?

$$p = p(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$$r < \frac{R}{2} \rightarrow p(A) < \frac{1}{4}$$

La mesure a un *caractère de surface*.

Axiomes de Kolmogorov

1. $\forall X \subset \Omega, \rightarrow 0 \leq p(X) \leq 1$

2. $p(\Omega) = 1 \; et \; p(\emptyset) = 0$

3. $p(\overline{X}) = 1 - p(X)$

4. $p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X \cap Y)$

5. $si \; X \subset Y \; ; \; alors \; p(X) \leq p(Y) \; (Inégalité \; de \; Boole)$

6. $p(\cup X_i) \leq \sum_{i}^{n} p(X_i)$

Proba Conditionnelle

Considérons la réalisation de deux événements A et B. La probabilité conditionnelle est la proba de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

$$p(A/B) = P_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Avec $p(B) \neq 0$

Probabilité de Bayes

Comme $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$; Avec $p(A) \neq 0$

On a : $p(A/B) = \dfrac{p(B/A).p(A)}{p(B)}$ Avec $p(B) \neq 0$

Or $B = (B \cap (A \cup \overline{A}))$

$$p(B) = p(B \cap (A \cup \overline{A})) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$$

$$= p(B/A).p(A) + p(B/\overline{A}).p(\overline{A})$$

$$p(A/B) = \frac{p(B/A).p(A)}{p(B/A).p(A) + p(B/\overline{A}).p(\overline{A})}$$

Plus généralement si $\{A_j\}$ est une partition de Ω

Pour tout i, $p(A_i/B) = \dfrac{p(B/A_i).p(A_i)}{\sum_j p(B/A_j).p(A_j)}$

Exemple 9 : n urnes numérotés de 1 à n contenant des boules marron et des boules rouges. La $i^{ème}$ urne contient m_i boules marron et r_i boules rouges.

D'une urne choisie au hasard on extrait une boule de couleur rouge. Quelle est la probabilité pour que cette boule sélectionnée provienne de la $k^{ème}$ urne ?

Soient A « la boule sélectionnée est rouge » et E_i « la boule sélectionnée appartient à la $i^{ème}$ urne ».

$$p(E_i) = 1/n$$

$$\forall \ i, \ p(A/E_i) = \frac{r_i}{m_i + r_i}$$

$$p(E_{k_0}) = \frac{\dfrac{r_{k_0}}{m_{k_0} + r_{k_0}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{m_i + r_i}}$$

Exemple 10 : On considère un système complet d'hypothèses incompatibles H_1, H_2, ……, H_n. Les proba de ces hypothèses sont données avant expérience : $p(H_1)$, $p(H_2)$, ….., $p(H_n)$. L'expérience réalise un certain événement A. Une hypothèse H_i a été faite sur la réalisation de A. Quelle est la validité de cette hypothèse ? c'est-à-dire $p(H_i/A)$?

D'après le théorème des proba conditionnelles :

$$P(A \cap H_i) = p(A).p(H_i/A) = p(H_i).p(A/H_i) \;\; ; avec \;\; i = 1,2,.....,n$$

$$D'où \quad P(H_i/A) = \frac{p(H_i).p(A/H_i)}{p(A)}$$

A est réalisé avec l'une des hypothèses H_i indépendantes :

$$A = (H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup ...... \cup (H_n \cap A)$$

$$d'où \quad p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i).p(A/H_i)$$

$$par\ la\ suite \quad p(H_i/A) = \frac{p(H_i).p(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(H_i).p(A/H_i)}$$

Soient n événements A_1, ……………, A_n tels que : $p(A_1 \cap \ldots\ldots \cap A_n) \neq 0$

$$p(A_1 \cap \ldots\ldots \cap A_n) = p(A_1).p(A_2/A_1).p(A_3/A_1 \cap A_2)\ldots\ldots p(A_n/A_1 \cap \ldots\ldots\ldots \cap A_{n-1})$$

Exemple 11: Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules : si on tire une noire on l'enlève, si on tire une blanche on la retire et on ajoute une noire à la place. Quelle est la probabilité de tirer 3 blanches à la suite ?

On note B_i l'événement la «i$^{\text{éme}}$ boule tirée est blanche » La proba recherchée est : $p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = p(B_1).p(B_2/B_1).p(B_3/B_1 \cap B_2)$

$p(B_1) = 3/10$.

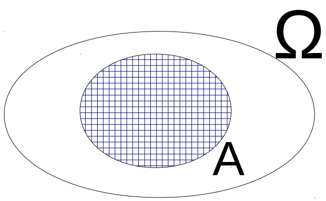
Si B_1 est réalisé avant le 2$^{\text{éme}}$ tirage, l'urne contient 8 noires et 2 blanches == > $p(B_2/B_1) = 2/10$.

Si B_1 et B_2 sont réalisés avant le 3$^{\text{éme}}$ tirage, l'urne contient 9 noires et 1 blanche == > $p(B_3/B_1 \cap B_2) = 1/10$.

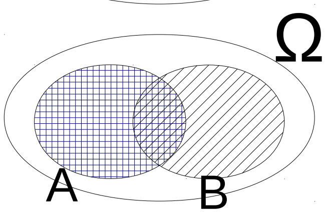
$$p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{3}{10} * \frac{2}{10} * \frac{1}{10} = \frac{3}{500}$$

Soient deux événements A et B. $$p(B/A) = \frac{p(B\cap A)}{p(A)}$$

<u>*Démonstration*</u> : Cas d'une distribution discrète



$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$



$$p(B/A) = \frac{card(B\cap A)}{card(A)} = \frac{card(B\cap A)}{card(\Omega)} \cdot \frac{card(\Omega)}{card(A)}$$

Or $p(B\cap A) = \dfrac{card(B\cap A)}{card(\Omega)}$ *et* $\dfrac{1}{p(A)} = \dfrac{card(\Omega)}{card(A)}$

<u>*Vérification*</u> : $p(\Omega/A) = 1 \quad p(B/A) \geq 0$

$$p(B_1 \cup B_2/A) = p(B_1/A) + p(B_2/A)$$

$p(B\cap A) = p(B/A).p(A)$ Avec : $p(A) \neq 0$

Exemple 12 : Soit une urne contenant 3 boules blanches et 5 boules noires identiques au toucher. Quelle la probabilité de tirer 2 boules blanches au hasard ?

A = la 1ère boule tirée est blanche

B = la 2ème boule tirée est blanche

$$p(A) = {}^{3}\!/_{8} \qquad\qquad p(B/A) = {}^{2}\!/_{7}$$

$$p(B \cap A) = p(B/A).p(A) = \frac{3}{8} x \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

Soit $\{A_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ un système complet d'événements, tous de proba non nulle. Soit B un événement. Alors

$$p(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(A_n) . p(B / A_n)$$

Cette proba permet de calculer la proba d'un événement B en le décomposant suivant un système complet d'événements.

Soient 2 événements A et B. Ils sont indépendants (incompatibles) si :

- la réalisation de A n'affecte pas celle de B et inversement.

$$p(A/B) = p(A) \quad \text{et} \quad p(B/A) = p(B)$$

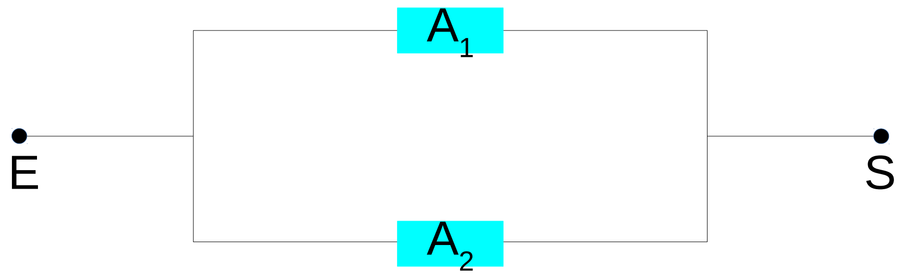
- la proba de réalisation simultanée de ces événements est égale au produit de leurs proba individuelles.

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

Plus généralement, pour des événements A_1, ……, A_n totalement indépendants.

$$p(\cap_i A_i) = \prod_i p(A_i)$$

Exemple 13 : Soit le système électrique ci-dessous. Il fonctionne correctement si A_1 ou A_2 fonctionne correctement. Quelle est la probabilité de panne de l'ensemble du système ?



Proba de panne de A_1 : $p(A_1) = 0.8$

Proba de panne de A_2 : $p(A_2) = 0.7$

Proba de panne de l'ensemble : $p = p(A_1).p(A_2) = 0.8*0.7 = 0.56$

Exemple 14 : Une urne contient n boules noires et m boules marrons. On effectue 2 tirages successifs en remettant après chaque tirage la boule dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire puis une boule marron ?

A = « obtenir une noire au premier tirage »

B = « obtenir une marron au second tirage »

$$p(A \cap B) = p(A).p(B) = \frac{n}{n+m}.\frac{m}{n+m} = \frac{nm}{(n+m)^2}$$