1 PROGRAMMATION LINEAIRE

1.1 FORMULATION GENERALE D'UN PROGRAMME LINEAIRE

De façon générale, un problème de programmation mathématique met en jeu quatre catégories d'éléments :

– des variables ou activités,
– des coefficients économiques,

– des ressources,

– des coefficients techniques.

Les *activités* sont les variables de décision du problème étudié. Il s'agit pour l'entreprise de sélectionner le meilleur programme d'activités $X = (x1, \ldots, xn)$, c'est-à-dire celui qui est le plus conforme à ses objectifs.

Les *coefficients économiques* mesurent le degré de réalisation de l'objectif de l'entreprise, associé à une valeur unitaire de chacune des variables, à chaque variable xj est ainsi associé un coefficient économique cj . L'évaluation des coefficients cj dépend du type d'objectif poursuivi : selon le cas ce sera un prix de vente, une marge brute, un coût variable unitaire, etc.

Les *ressources* peuvent être également de nature très diverse selon le problème rencontré. Dans tous les cas, ce sont les éléments qui limitent le calcul économique de l'entreprise : des capacités de production limitées, des normes à respecter, des potentiels de vente, etc. Dans tout problème, il faudra ainsi prendre en considération un vecteur de ressources $B = (b1, \ldots, bm)$ donné.

Par *coefficient technique* on désignera le degré de consommation d'une ressource par une activité. à la ressource i et à l'activité j correspondra le coefficient technique aij . Dans la mesure où le problème étudié met en jeu n activités et m ressources, il faudra considérer $m \times n$ coefficients techniques que l'on pourra regrouper dans un tableau du type suivant :

Ressources \ Activités	1	$\ldots$	j	$\ldots$	n
1	a_{11}	$\ldots$	a_{1j}	$\ldots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
i	a_{i1}	$\ldots$	a_{ij}	$\ldots$	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ldots$
m	a_{m1}	$\ldots$	a_{mj}	$\ldots$	a_{mn}

Ce tableau peut être exprimé par une matrice $A = (a_{ij})$ avec i = 1…m ,j = 1…n dite matrice des coefficients techniques ou matrice technologique.

Si les variables sont continues, si les coefficients économiques et techniques sont indépendants des valeurs des variables, alors le problème peut être formalisé à l'aide d'un programme linéaire.

Un même programme peut être traduit sous une *forme canonique* ou sous une *forme standard* ; l'une et l'autre pouvant adopter soit la notation algébrique classique soit la notation matricielle.

1.1.1 FORME CANONIQUE D'UN PROGRAMME LINEAIRE

Elle se caractérise par des contraintes présentées sous la forme d'inéquations. Dans le cas d'une maximisation, un programme linéaire écrit sous la forme canonique se présente comme suit :

$$Max\ Z, \quad avec \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \leq b_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, \quad x_2, \quad \ldots . x_n \geq 0 \end{cases}$$

Pour fixer les idées, on va se placer dans le cadre d'une entrprise mutiproductrice. Les informations sur l'activité de cette entreprise se résument dans le tableau suivant :

	x_1	**x_2**	**…**	**x_n**	
Produits / Facteurs	Pr_1	Pr_2	…	Pr_n	Disponibilités
F_1 F_2 F_m	***a_{11}*** ***a_{21}*** **…** ***a_{m1}***	***a_{12}*** ***a_{22}*** **…** ***a_{m2}***	**…** **…** **…**	***a_{1n}*** ***a_{2n}*** **…** ***a_{mn}***	**b_1** **b_2** **…** **b_m**
Profits unitaires	**c_1**	**c_2**	**…**	**c_n**	

L'entreprise fabrique n produits Pr_1 , Pr_2 ,…, Pr_n en combinant m facteurs de production F_1, F_2 ,…, F_m. La vente d'une unité de chaque produit Pr_j, procure un profit c_j avec j = 1,…,n. Chaque facteur de production F_i est disponible pour une quantité b_i avec i = 1,…,m. La variable d'activité x_j représente la quantité fabriquée de chaque produit Pr_j avec j = 1,…,n.

Le programme linéaire ci-dessus sera alors compris comme la modélisation du problème de cet entrepreneur qui consiste à déterminer les quantités x_j^*de chaque produit Pr_j à fabriquer pour maximiser le profit Z de l'entreprise en respectant les contraintes de disponibilité des facteurs de prodution.

La fonction Z représente le profit total exprimé dans la même unité monétaire que les c_j. La fontion g_i=$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ représente la quantité totale de facteur F_i utilisée et qui est inférieure ou égale à la disponibilité b_i du facteur, et cela pour i = 1, …, m. Les contraintes sur la dernière ligne expriment que ces quantités doivent être non négatives.

Ainsi, lorsqu'un programme linéaire traitant d'une maximisation de la fonction économique est présenté sous la forme canonique toutes les inégalités au niveau des contraintes doivent être de la forme $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ pour i = 1, …, m. Si ce programme traite d'une minimisation, avec la forme canonique on aura ces inégalités sous la forme $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ pour i= 1, …, m.

On notera qu'un programme linéaire peut aussi être écrit sous une forme mixte, c'est-à-dire combinant ces différentes formes d'inéquation et des équations, comme présentée ci-dessous :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \ \ ou \ \geq b_1 \ \ ou \ = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \ \ ou \ \geq b_2 \ \ ou \ = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \leq b_3 \ \ ou \ \geq b_3 \ \ ou \ = b_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \ \ ou \ \geq b_m \ \ ou \ = b_m \\ x_1, \quad x_2, \quad \ldots . x_n \geq 0 \end{cases}$$

1.1.2 FORME STANDARD D'UN PROGRAMME LINEAIRE

La forme standard se caractérise par le fait que toutes les inéquations correspondant aux contraintes sont transformées en équations. La transformation s'effectue par l'introduction de variables particulières appelées variables d'écart, pour les distinguer des variables principales. Une variable d'écart est introduite par contrainte.

Ainsi dans le cas d'un problème comportant n variables principales et m contraintes (d'inégalités), il y'a m variables d'écart et m + n variables au total. Les conditions de non négativité s'appliquent aux valeurs que peut prendre une variable d'écart.

De façon générale, dans le cas d'une maximisation un programme linéaire sous la forme canonique réécrite sous la forme standard aura comme contraintes :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n + x_{n+3} = b_3 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \dots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \dots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1, \quad x_2, \quad \dots . x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

x_{n+i} i = 1, … , m étant les variables d'écart.

Ce programme linéaire est le fruit d'un travail de modélisation. C'est une tâche délicate, mais essentielle. Elle comporte les mêmes phases quelles que soient les techniques requises ultérieurement pour le traitement. Ces phases sont :

- *La détection du problème et l'identification des variables*. Ces variables doivent correspondre exactement aux préoccupations du responsable de la décision. En programmation mathématique, les variables sont des variables décisionnelles.
- La formulation de la fonction économique (ou fonction objectif) traduisant les préférences du décideur exprimées sous la forme d'une fonction des variables identifiées.
- La formulation des contraintes. Il est bien rare qu'un responsable dispose de toute liberté d'action. Le plus souvent il existe des limites à ne pas dépasser qui revêtent la forme d'équations ou d'inéquations mathématiques.

Le responsable d'une décision ne dispose que de sa compétence pour réaliser une formalisation correcte du problème posé car il n'existe pas de méthode en la matière. Un moyen d'acquérir cette compétence est comme nous le verrons, l'apprentissage.

Lorsque le programme linéaire est mis en forme, l'étape suivante consiste à donner une valeur à chaque variable. Il s'agit en d'autres termes de faire sa résolution.

1.2 RESOLUTION D'UN PROGRAMME LINEAIRE

Résoudre le programme linéaire consiste à déterminer les *n*-uplets (*x*1*, x*2*, . . ., xn*) qui optimisent *Z* (maximisent ou minimisent *Z)* ou à montrer que de tels *n*-uplets n'existent pas.

Définition 1.2.1

*On appelle **solution réalisable** tout n-uplet* (*x*1*, x*2*, . . ., xn*) *vérifiant le système d'inéquations des contraintes.*

Définition 1.2.2

*On appelle **solution optimale** toute solution réalisable qui optimise Z.*

Définition 1.2.3

*On appelle **fonction objectif** la forme linéaire :* $Z(x_1, \ x_2, \dots , \ x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$

Définition 1.2.4

*L'ensemble des solutions réalisables du programme linéaire P est appelé **domaine des solutions réalisables**. Lorsque ce domaine est non vide, on dit que P est **réalisable**.*

Résoudre un programme linéaire consiste à déterminer les valeurs des variables qui permettent d'optimiser la fonction économique. Il existe diverses techniques de résolution parmi lesquelles la méthode graphique se montre à l'évidence la plus rapide et la plus simple mais aussi la plus limitée, car dès lors que le nombre de variables dépasse

2, elle devient difficilement praticable. C'est pourquoi divers chercheurs se sont efforcés de mettre au point une méthode de calcul algorithmique qui permet de détecter la solution optimale (si elle existe) quel que soit le nombre des variables et des contraintes.

Bien que très efficace, cette méthode connue sous le nom d'algorithme du simplexe, exige des calculs longs et fastidieux. C'est pourquoi ceux-ci sont de plus en plus confiés à l'outil informatique. Dès lors une question se pose : puisque les logiciels correspondants sont largement répandus, est-il nécessaire pour appliquer la méthode, d'en connaître les ressorts ? Deux raisons essentielles justifient une réponse affirmative :

– d'abord, la compréhension des principes de résolution est une aide précieuse pour, en amont, analyser et formaliser le problème et pour, en aval, interpréter et exploiter la solution obtenue ;

– ensuite parce que la démarche algorithmique présente en elle-même un intérêt formateur non négligeable.

Ainsi, dans le cadre de ce paragraphe, nous allons d'abord présenter la méthode graphique qui bien que limitée constitue un support pratique irremplaçable pour illustrer la méthode du simplexe ; ensuite pour pallier les limites de la méthode graphique nous présentons la méthode du simplexe.

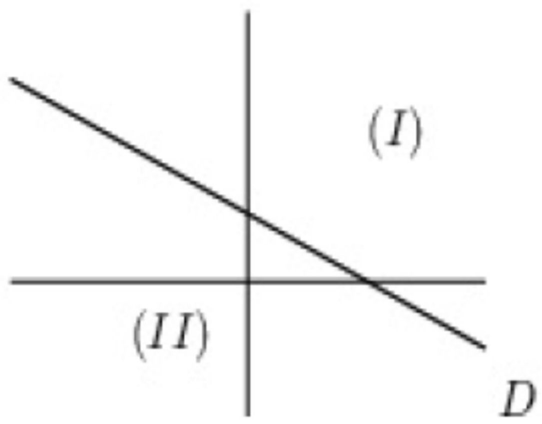
1.2.1 RESOLUTION GRAPHIQUE D'UN PROGRAMME LINEAIRE : Cas de deux variables.

La résolution d'un programme linéaire par la méthode graphique peut être décomposée en deux phases, une phase de résolution graphique du système d'inéquations constituant les contraintes pour déterminer l'ensemble des solutions admissibles et une phase d'optimisation de la fonction économique dans cet ensemble.

1.2.1.1 Détermination de l'ensemble des solutions admissibles

Cette phase consiste

- d'abord à réaliser un régionnement du plan c'est-à-dire étudier le signe de chaque $g_i = a_i x_1 + b_i x_2$ avec $(a_i, b_i) \neq (0,0)$ pour tout i. Si on considère la droite D_i d'équation $a_i x_1 + b_i x_2 = 0$ avec $a_i \neq 0$ ou $b_i \neq 0$, cette droite partage le plan en deux demi-plans (P1) et (P2) de frontière D_i :



- Pour tout point $M\ (x_1, x_2)$ situé sur D_i on a $a_i x_1 + b_i x_2 = 0$.
- Pour tous les points $M\ (x_1, x_2)$ situés dans le demi-plan (P1), $a_i x_1 + b_i x_2$ a le même signe et si $a_i x_1 + b_i x_2 > 0$ (respectivement < 0) alors tous les points $N\ (x_1, x_2)$ situés dans le demi-plan (*P2*) vérifient $a_i x_1 + b_i x_2 < 0$ (respectivement > 0).

Ce procédé de régionnement sera appliqué pour déterminer l'ensemble des solutions (S_i) associé à chaque contrainte i c'est-à-dire l'ensemble des points $M\ (x_1, x_2)$ vérifiant la contrainte i.

- Ensuite, l'ensemble des solutions admissibles pour le programme linéaire sera obtenu en prenant l'ensemble $\Delta = \bigcap_i S_i$.

Si le programme linéaire est réalisable, le domaine des solutions réalisables est un domaine plan délimité par un polygone. Le domaine plan est un ensemble convexe.

1.2.1.2 Détermination de la solution optimale

C'est la phase d'optimisation de la fonction économique $Z(x_1,\ x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ dans l'ensemble des solutions admissibles.

Supposons que $Z(x_1,\ x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ soit à maximiser. Alors le problème consistera à déterminer les couples $(x_1,\ x_2)$ de solutions réalisables telle que $Z(x_1,\ x_2)$ soit maximum. Pour tout nombre Z notons la droite D_Z d'équation $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ appelée droite d'isovaleur de la fonction objectif. Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{v}\left(\frac{-c_1}{c_2}\right)$. Son coefficient directeur est $\left(\frac{-c_1}{c_2}\right)$.

En effet $x_2 = \frac{-c_1}{c_2}x_1 + \frac{Z}{c_2}$. Lorsque Z varie, ces droites D_Z ayant même coefficient directeur sont parallèles entre elles. L'ordonnée à l'origine de D_Z est $\frac{Z}{c_2}$. En supposant $c_2 > 0$, maximiser Z est équivalent à maximiser $\frac{Z}{c_2}$. Le problème consiste donc à déterminer une ou plusieurs droites *D_Z* qui rencontrent le domaine des solutions réalisables et ayant une ordonnée à l'origine maximale. Lorsque *Z* augmente, la droite *D_Z* se déplace parallèlement à elle-même vers le haut. Si on appelle D_Z^* la droite de la famille de niveau le plus élevé possible et ayant au moins un point d'intersection avec l'ensemble des solutions admissibles (Δ étant borné), alors l'ensemble des solutions optimales sera donné par :

$$S^* = D_Z^* \cap \Delta$$

On aura comme solution optimale, $\{X^*\ tq\ X^* \in S^*\}$. Ici, on peut avoir deux situations différentes :

- X^* est unique, alors le problème admet une solution unique représentée par les coordonnées du point d'intersection de la droite D_Z^* et du polyèdre Δ. Nous verrons que ce point est un des sommets du polyèdre Δ.
- X^* est multiple, alors le problème admet plusieurs solutions. Ici la droite associée à l'une des contraintes appartient à la famille de *D_Z et se confond avec D_Z^**. La droite optimale D_Z^* coupe comme nous le verrons le polyèdre Δ en deux de ses sommets $X_1^*\ et\ X_2^*$ avec X_1^* et $X_2^* \in D_Z^*$. Le problème admet une infinité de solutions, et l'ensemble des solutions est donné par le segment $[X_1^*, X_2^*]$ délimité par X_1^* et X_2^*. Cet ensemble n'est rien d'autre que l'ensemble X^* des combinaisons linéaires convexes de X_1^* et X_2^* exprimé par ;

$$X^* = (1-\alpha)X_1^* + \alpha X_2^*,\quad \alpha \in [0,1]\ .$$

EXEMPLE 1

La menuiserie « Khadimou Rassoul » fournit chaque semaine à un distributeur du « Parc Lambaye » des lots de tabourets de deux types (que nous appellerons respectivement M1 et M2) qu'elle vend par lot tout en étant prête à envisager des livraisons par fractions. Les bénéfices liés à la vente d'un lot de chaque type sont respectivement de 7 et 3 milliers de francs. La fabrication de ces tabourets nécessite l'usage de quatre outils ; foreuse (F), scie (S), tour (T) et ponceuse (P). Les capacités hebdomadaires d'utilisation de chacun d'eux sont respectivement égales à 120, 150, 120 et 180 heures. Par ailleurs, chaque lot de M1 et M2 nécessite une utilisation différente des outils, représentée, en heures de travail, dans le tableau suivant :

	M1	M2
F	3	2
S	6	0
T	0	3
P	6	2

TRAVAIL A FAIRE :

1. Ecrire le programme linéaire qui modélise le problème du décideur au niveau de la MKR. Expliquer en quoi consiste ce problème.
2. Résoudre ce programme linéaire par la méthode graphique. Donner la solution optimale.
3. Suite à une raréfaction de ces produits sur le marché, leurs bénéfices unitaires passent respectivement à 12 et 4 milliers de francs. Que devient la solution optimale ? Donner l'ensemble des solutions.

RESOLUTION EXEMPLE 1

1. Cette menuiserie fabrique des lots de tabourets de type M1 et M2 destinés à la vente. On prendra comme variables de décision x1 et x2 représentant respectivement le de lots de tabourets de chaque types fabriqués (et donc vendus par hypothèse).
Les coefficients économiques sont ici représentés par les profits unitaires associés aux lots de chaque type. La fonction économique ou fonction « objectif » est la fonction $Z = 7x_1 + 3x_2$ qui exprime le profit global réalisé. La nature de la fonction économique nous permet de fixer le sens de l'optimisation qui ici sera une maximisation. Précisément, on va déterminer :

$$Max\ Z\ \ avec\ \ Z = 7x_1 + 3x_2$$

Sous les contraintes données par :

$$\begin{matrix} F \\ S \\ T \\ P \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 6x_1 \qquad\quad \leq 150 \\ \qquad 3x_2 \leq 120 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Chaque contrainte est associée à l'utilisation d'un outil ; le premier membre représentant le nombre total d'heures d'utilisation de l'outils en question pour fabriquer x1 lots de type M1 et x2 lots de type M2 et le second membre sa disponibilité horaire mensuelle. X1 et x2 exprimant des quantités, on aura sur la dernière ligne les contraintes de non négativité. Ainsi le programme linéaire à résoudre sera :

$$Max\ Z\ \ avec\ \ Z = 7x_1 + 3x_2$$

$$\text{S . c .} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 6x_1 \qquad\quad \leq 150 \\ \qquad 3x_2 \leq 120 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. RESOLUTION PAR LA METHODE GRAPHIQUE
La résolution par la méthode graphique se fera en 2 temps qui sont :
   i. La résolution graphique du système d'inéquations constituant les contraintes et dont l'aboutissement est l'obtention du domaine des solutions admissibles (si le pbroblème admet une solution). La démarche est indiquée dans le paragraphe 1.2.1.1.
   ii. L'optimisation de la fonction objectif dans le domaine des solutions admissibles. Elle consiste comme indiqué au paragraphe 1.2.1.2 à trouver la droite de la famille de la fonction économique ayant l'ordonnée à l'origine le plus grand et qui possède au moins un point d'intersection avec l'ensemble des solutions admissibles.

La résolution par la méthode graphique donne la figure 1. Ici, le problème admet une solution unique. La solution optimale est le point de coordonnées $X_1^* = \binom{20}{30}$ avec $Z^* = 230$.

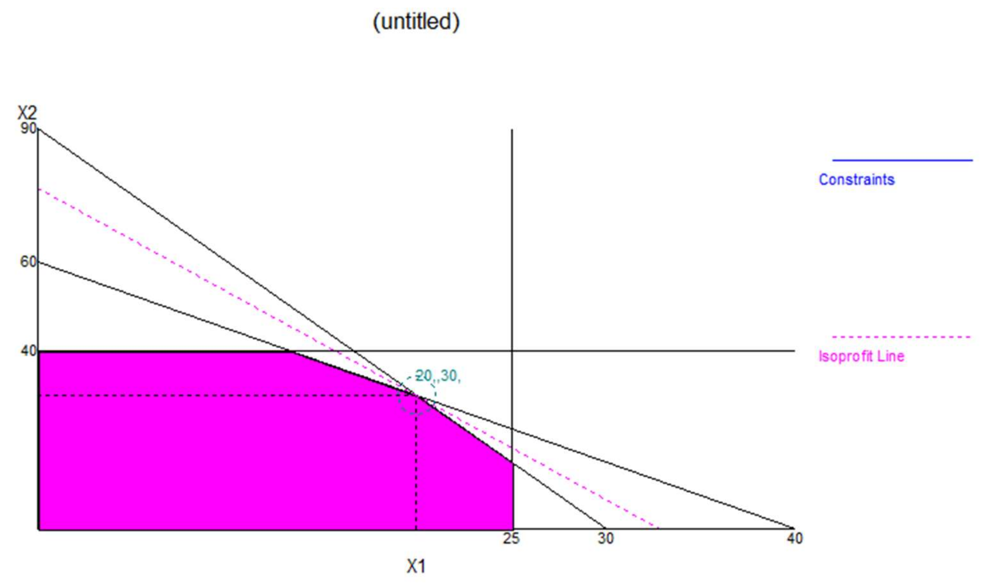


Figure 1: Résolution graphique cas MKR 1

3. Résolution du programme linéaire de MKR après changement de c_1 et c_2.(MKR 2).
   Le nouveau programme linéaire à résoudre est :

$$Max\ Z\ \ avec\ \ Z = 12x_1 + 4x_2$$

$$\text{S . c .}\quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 6x_1 \qquad\quad \leq 150 \\ \qquad\ \ 3x_2 \leq 120 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ici la fonction économique a changé, mais le système de contrainte reste le même. En utilisant la résolution graphique on obtient la figure 2.

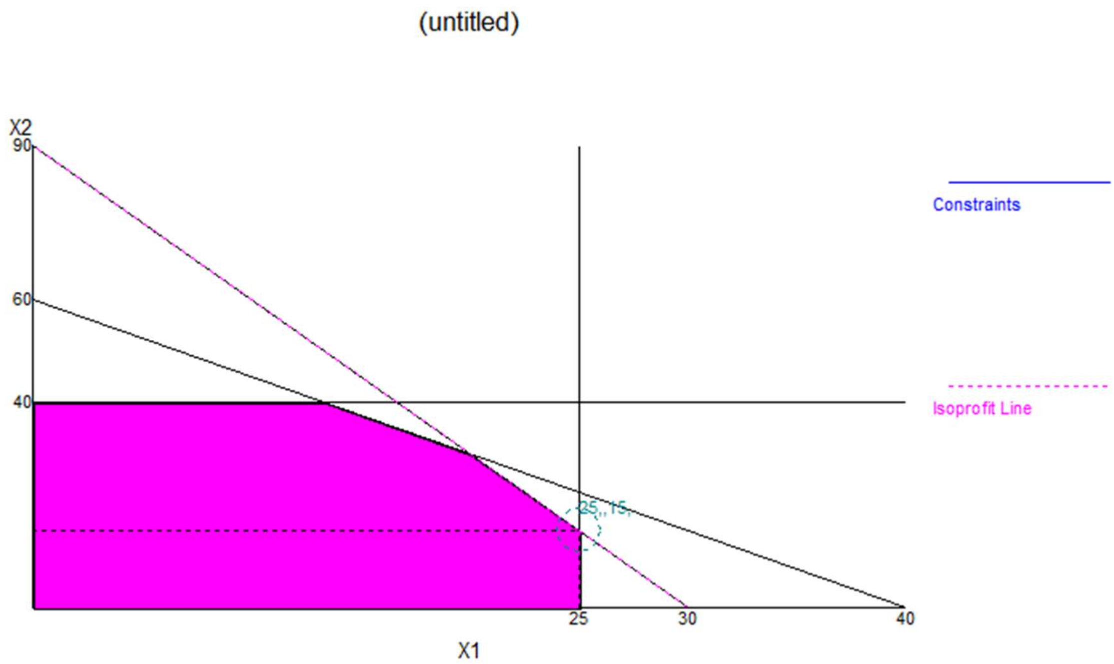


Figure 2: Résolution graphique cas MKR 2

La phase d'optimisation montre que la droite d'équation : $6x_1 + 3x_2 = 180$ associée à la quatrième contrainte est une droite de la famille de la fonction économique. Cette droite se confond avec la droite optimale c'est-à-dire la droite de niveau le plus élevé possible et ayant au moins un point d'intersection avec l'ensemble des solutions admissibles. Ici on a 2 solutions qui se trouvent dans des sommets du polyèdre des solutions admissibles, on en déduit alors que le problème admet une infinité de solutions représenté par les points appartenant au segment délimité par ces deux sommets c'est-à-dire $X_1^* = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ et $X_2^* = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$ avec $Z^* = 360$.