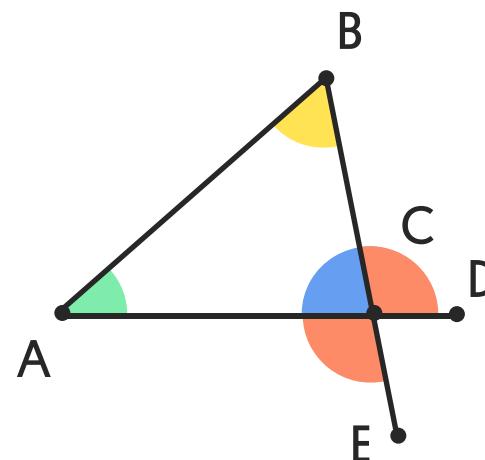




треугольники

виды углов в треугольнике

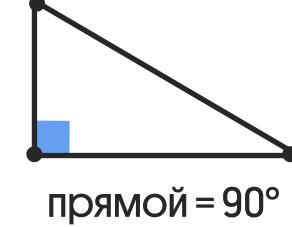


- ▶ сумма внутренних углов \triangle равна 180°
- ▶ сумма смежных углов равна 180°
- ▶ вертикальные углы равны
- ▶ внешний угол \triangle равен сумме двух внутренних, не смежных с ним

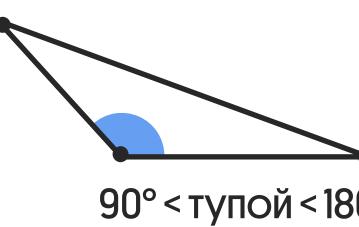
углы и треугольники в планиметрии



$0^\circ <$ острый $< 90^\circ$

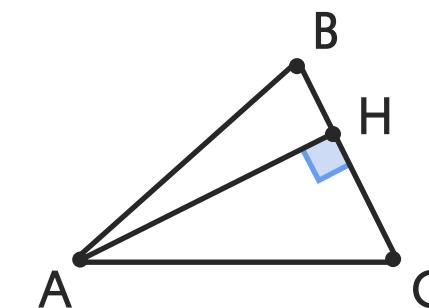


прямой $= 90^\circ$

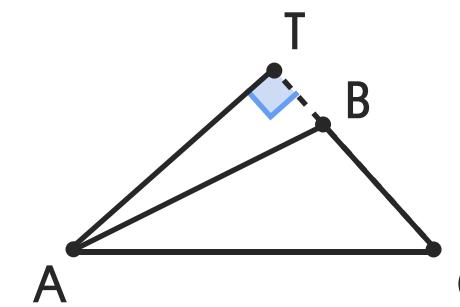


$90^\circ <$ тупой $< 180^\circ$

высоты треугольника

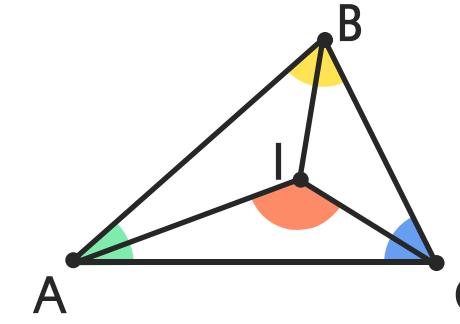


высота \triangle выходит из угла и перпендикулярна стороне



высота тупоугольного \triangle лежит вне \triangle

биссектрисы треугольника

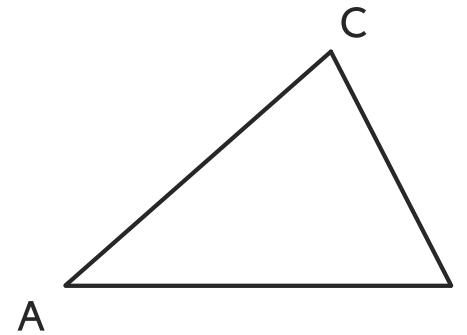


- ▶ биссектриса угла делит угол пополам
- ▶ угол между биссектрисами \triangle вычисляется по формуле

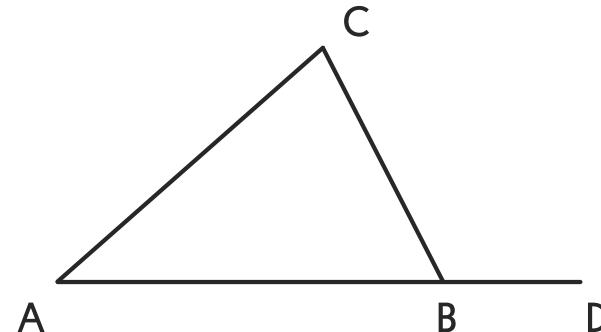
задачи на углы в треугольнике

задание 1

- 1 Углы треугольника относятся как 1:1:10.
Найди меньший из них. Ответ дай в градусах.



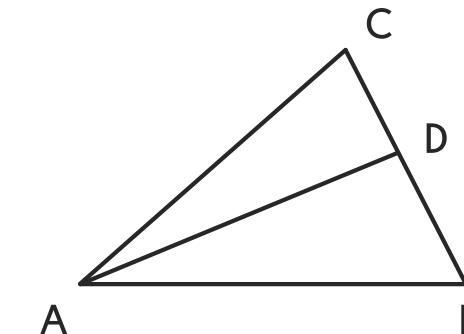
- 2 В $\triangle ABC$ угол А равен 40° , внешний угол при вершине В равен 102° . Найди угол С. Ответ запиши в градусах.



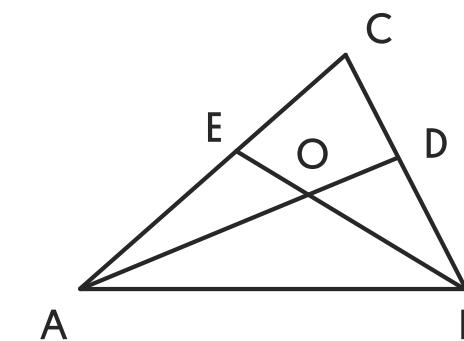
задачи на углы в треугольнике

задание 1

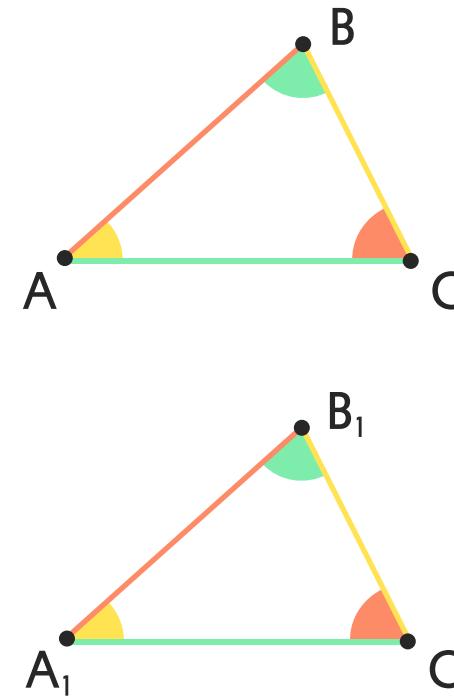
- 3 В треугольнике ABC, AD — биссектриса, угол С равен 87° , угол CAD равен 8° . Найди угол В. Ответ дай в градусах.



- 4 В треугольнике ABC угол С равен 58° , AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке О. Найдите угол АОВ. Ответ запиши в градусах.



равенство треугольников



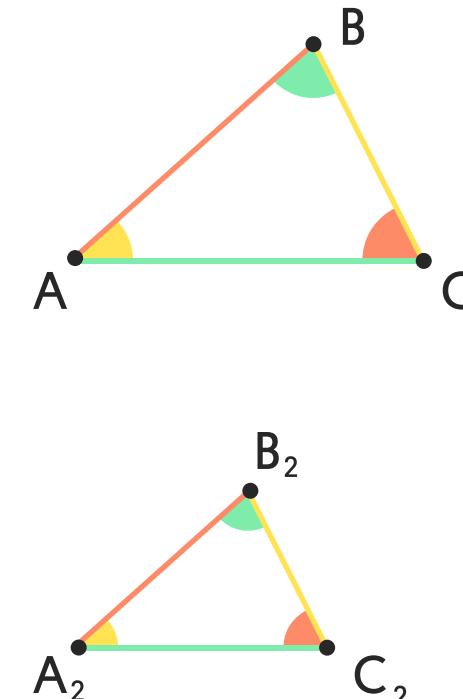
$$\triangle ABC = \triangle A_1 B_1 C_1$$

- в равных треугольниках соответственные элементы равны

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1 | по трем сторонам и углу между ними |
| 2 | по двум углам и стороне между ними |
| 3 | по двум углам и стороне между ними |

С

подобие треугольников



$$\triangle ABC \sim \triangle A_2 B_2 C_2$$

- в подобных треугольниках соответственные углы равны

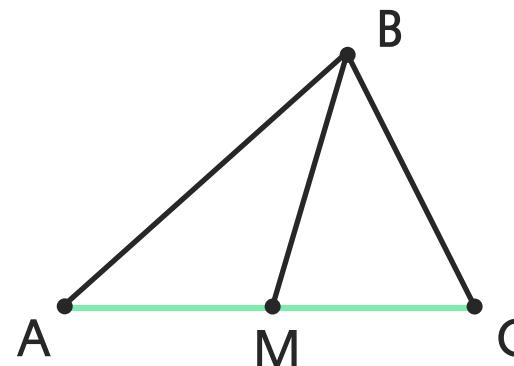
- в подобных треугольниках соответственные стороны относятся с коэффициентом подобия

- в подобных треугольниках площади относятся с коэффициентом подобия в квадрате

- | | |
|---|--|
| 1 | треугольники подобны по двум углам |
| 2 | треугольники подобны по углу и отношению двух сторон |
| 3 | треугольники подобны по отношению всех трех сторон |

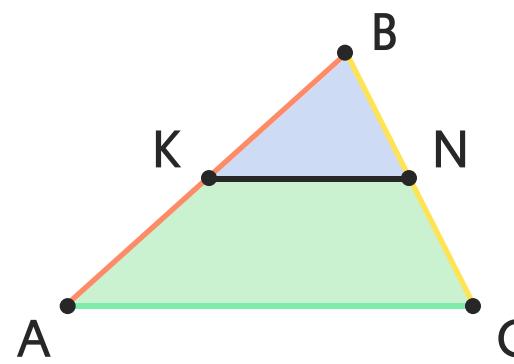
С

медиана треугольника



- ▶ медиана \triangle выходит из угла и делит противолеж. сторону пополам
- ▶ медиана делит треугольник на два равновеликих

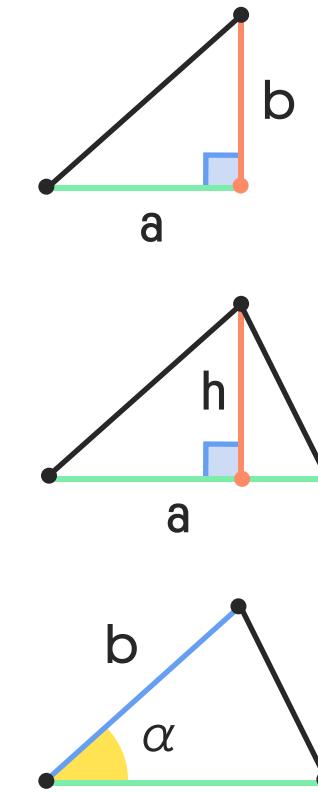
средняя линия треугольника



- ▶ средняя линия \triangle соединяет середины двух его сторон
- ▶ средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине
- ▶ ср. линия \triangle делит его на подобные с коэффициентом 2

C

площадь треугольника



- ▶ прямоугольный \triangle



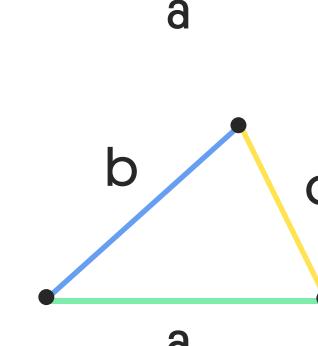
- ▶ через высоту \triangle



- ▶ через синус угла



- ▶ по вписанной \bullet



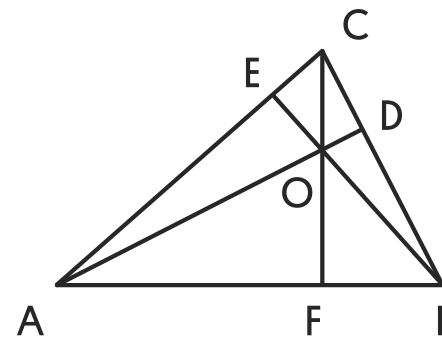
- ▶ по трем сторонам

 ϕ

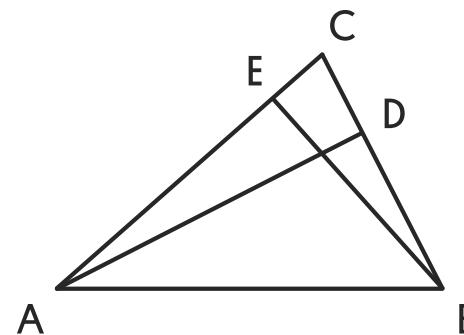
задачи на высоты в треугольниках

задание 1

- 5 В $\triangle ABC$ угол A равен 67° , угол B равен 28° . AD , BE и CF — высоты, пересекающиеся в точке O . Найди угол AOF . Ответ дай в градусах.



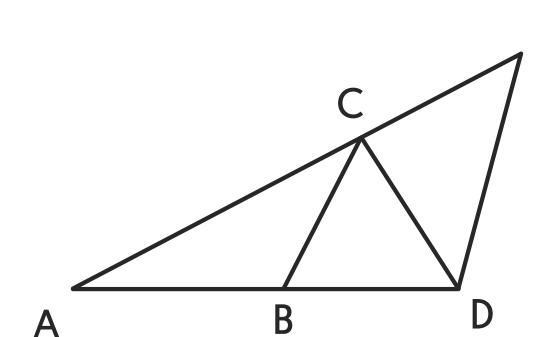
- 6 У \triangle со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота к первой стороне, равна 4. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне?



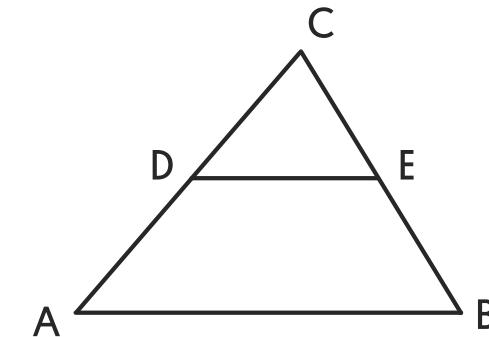
задачи на равные и подобные \triangle

задание 1

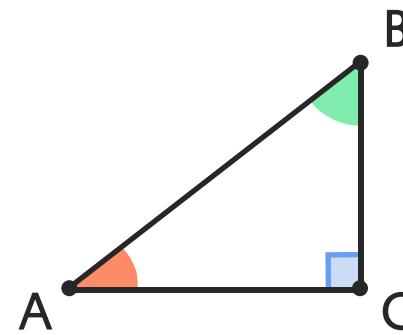
- 7 В $\triangle ABC$ угол A равен 8° , угол B равен 106° , CD — биссектриса внешнего угла при вершине C , причем точка D лежит на прямой AB . На продолжении стороны AC за точку C выбрана такая точка E , что $CE = CB$. Найди угол BDE . Ответ дай в градусах.



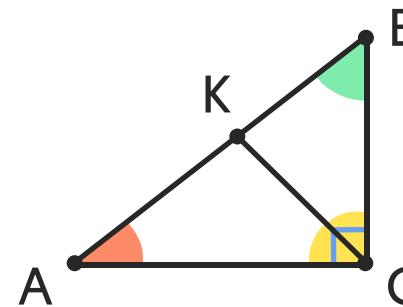
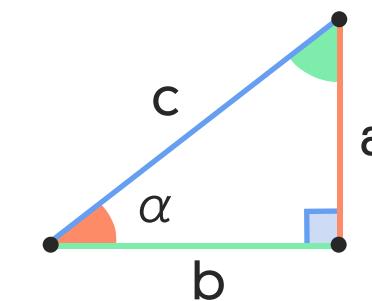
- 8 Площадь треугольника ABC равна 192. DE — средняя линия. Найди площадь трапеции $ADEB$.



прямоугольный треугольник



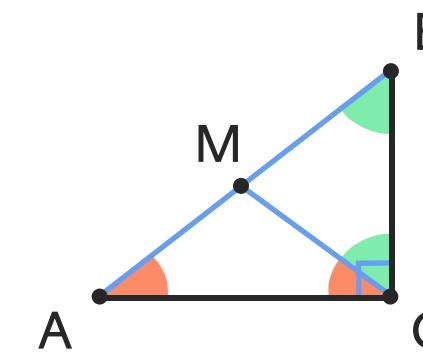
- ▶ в прямоугольном \triangle один угол равен 90°
- ▶ сумма острых углов прямоугольного \triangle равна 90°
- ▶ теорема Пифагора в прямоугольном \triangle
- ▶ тригонометрия в прямоугольном \triangle



- ▶ биссектриса прямого угла делит его на два по 45°

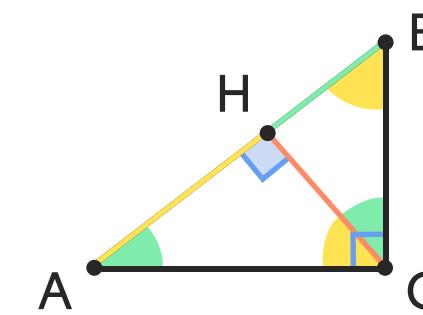
C

медиана в прямоугольном треугольнике



- ▶ медиана из прямого угла прямоугольного \triangle равна половине гипотенузы

высота в прямоугольном треугольнике



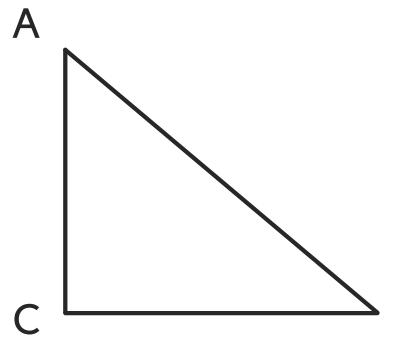
- ▶ высота из прямого угла прямоугольного \triangle делит его на два подобных \triangle
- ▶ квадрат высоты равен произведению отрезков гипотенузы \triangle

C

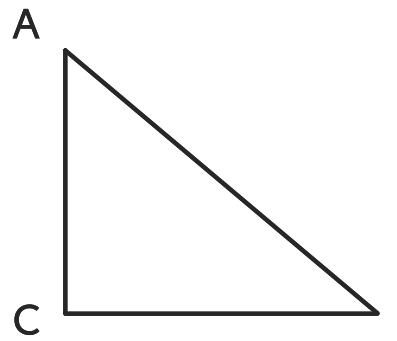
задачи на прямоугольный ▲

задание 1

- 9 Площадь прямоугольного ▲ равна 220. Один катет на 2 больше другого. Найди меньший катет.



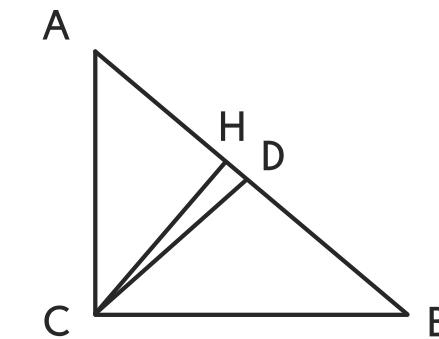
- 10 В треугольнике ABC угол С равен 90° , $\cos A = 12/13$, $BC = 25$. Найди $\sin A$.



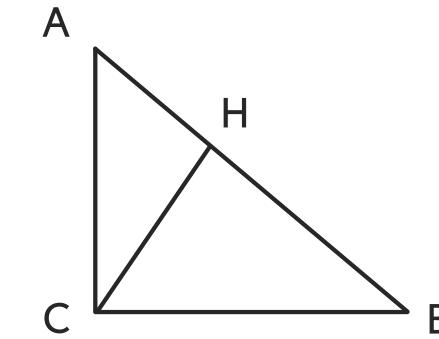
задачи на прямоугольный ▲

задание 1

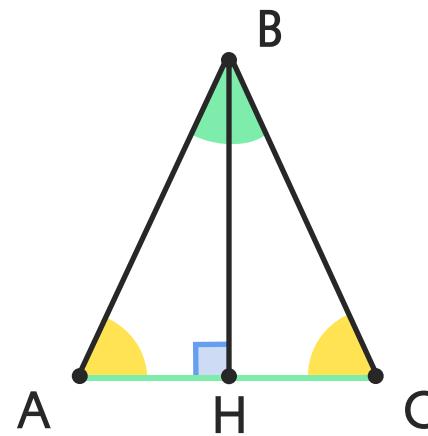
- 11 В прямоугольном ▲ угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла, равен 11° . Найди меньший угол ▲. Ответ в градусах.



- 12 В треугольнике ABC угол С равен 90° , высота CH равна 3, $BH = \sqrt{7}$. Найди $\cos A$.



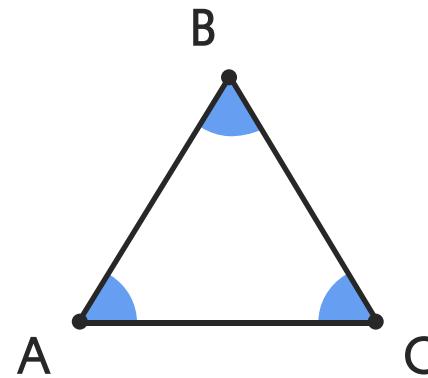
равнобедренный треугольник



- ▶ боковые стороны равностороннего \triangle равны
- ▶ углы при боковых сторонах р/б \triangle равны
- ▶ высота к основанию равнобедренного \triangle ещё является медианой и биссектрисой

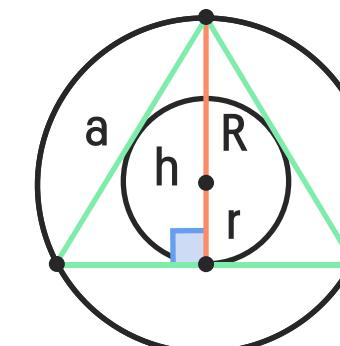


правильный треугольник



- ▶ все стороны равностороннего \triangle равны
- ▶ внутренние углы равностороннего \triangle равны
- ▶ все высоты равностороннего \triangle ещё являются медианами и биссектрисами

правильный треугольник



- ▶ высота р/с \triangle
- ▶ площадь р/с \triangle
- ▶ радиус вписанной \bullet
- ▶ радиус описанной \bullet

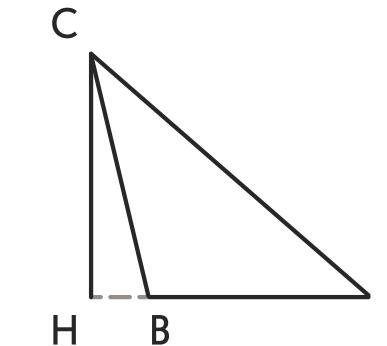


задачи на р/б треугольники

задание 1

13

В тупоугольном $\triangle ABC AB = BC, AB = 25$, высота CH равна 15. Найдите $\cos ABC$.

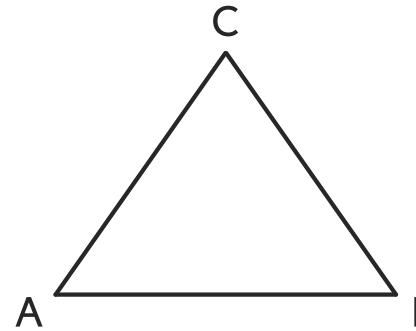


задачи на равносторонний ▲

задание 1

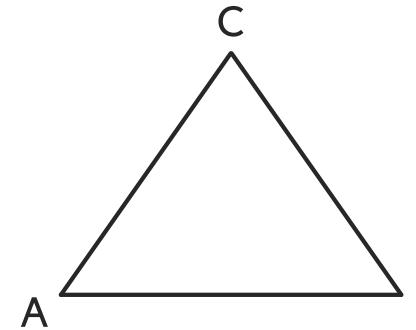
14

$\triangle ABC$ $AC = BC$, $AB = 30$, $\sin A = 0,8$. Найди AC .



15

Площадь равностороннего $\triangle ABC$ равна $12\sqrt{3}$.
Найди высоту этого треугольника.



О задании номер один

геометрическая задача на вычисление и нахождение основных элементов фигур на плоскости может быть с известным рисунком и без него

ответ записываем в формате десятичной дроби

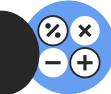
Есть десять типов фигур и конструкций:

- треугольник общего вида
- параллелограмм
- прямоугольный треугольник
- прямоугольник
- равнобедренный треугольник
- ромб
- равносторонний треугольник
- квадрат
- окружность
- трапеция
- вписанные фигуры
- описанные фигуры

Есть десять типов фигур и конструкций:

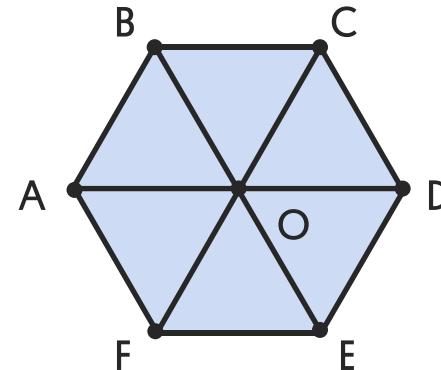
- нахождение углов
- нахождение отрезков
- нахождение площадей
- нахождение дуг
- нахождение отношений





МНОГОУГОЛЬНИКИ

правильный шестиугольник



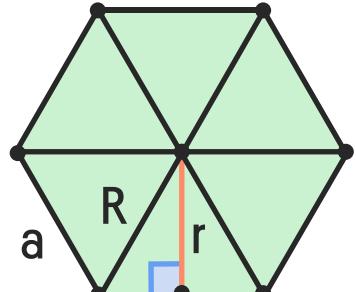
► правильный шестиугольник можно разделить на 6 правильных треугольников, или 12 прямоугольных треугольников.

► отрезки AF, BE и CD в шестиугольнике параллельны

► площадь шестиугольника

► радиус вписанной окружности

► радиус описанной окружности

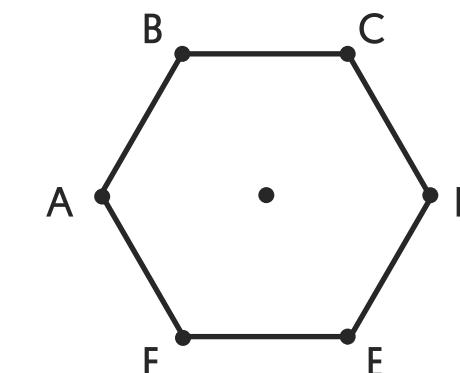


задача на шестиугольник

задание 1

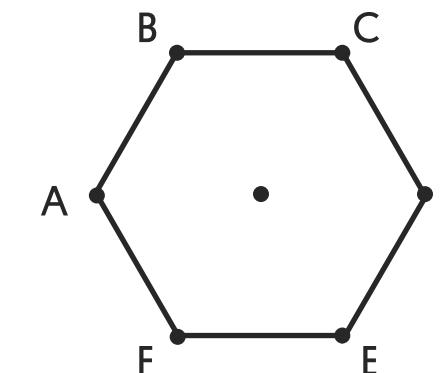
1

Периметр правильного шестиугольника равен 72.
Найди диаметр описанной окружности.

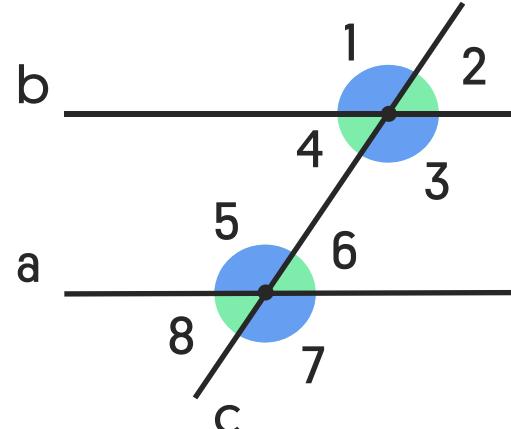


2

Найди радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $84\sqrt{3}$.

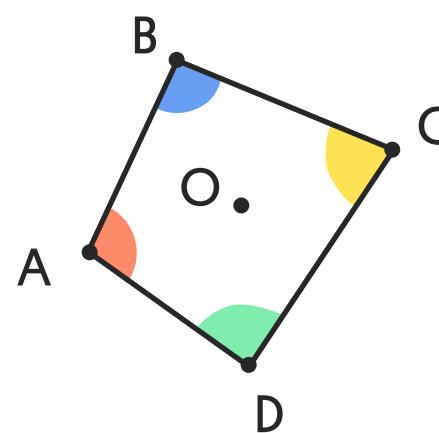


УГЛЫ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ



- ▶ a и b — параллельные прямые, c — секущая
- ▶ накрест-лежащие углы равны
- ▶ соответственные углы равны
- ▶ сумма односторонних углов равна 180°

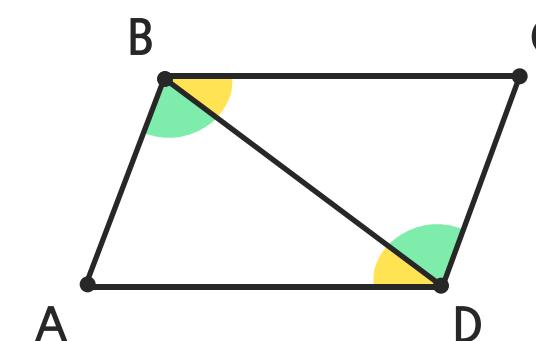
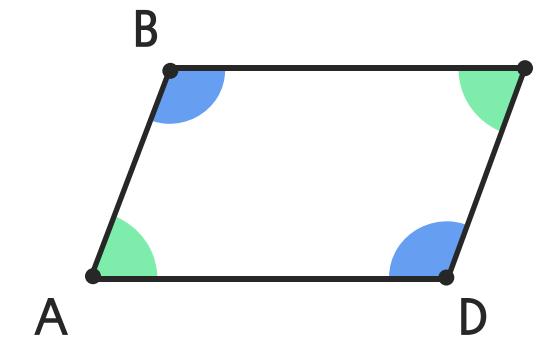
УГЛЫ В ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКЕ



- ▶ сумма углов в четырехугольнике равна 360°

C

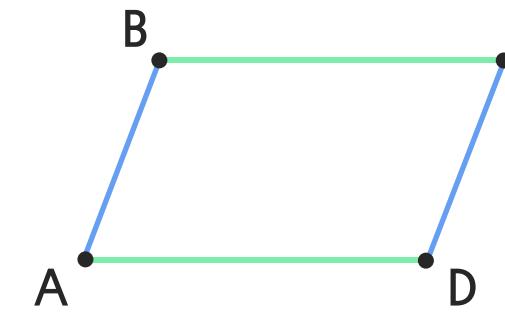
УГЛЫ В ПАРАЛЛЕЛОГРАММЕ



- █ противоположные стороны параллелограмма параллельны
- ▶ противолежащие углы параллелограмма равны
- ▶ сумма углов при стороне параллелограмма равна 180°
- ▶ накрест-лежащие углы при диагоналях параллелограмма равны

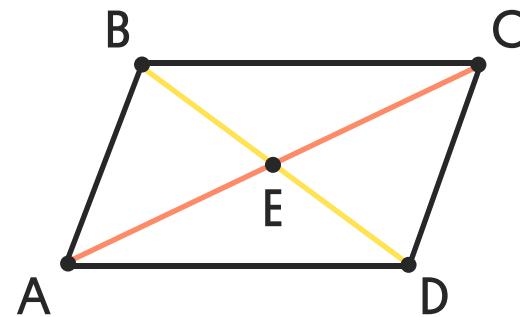
C

СТОРОНЫ В ПАРАЛЛЕЛОГРАММАХ



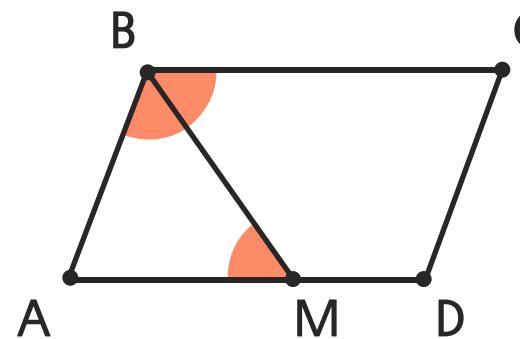
- ▶ противоположные стороны параллелограмма равны

СТОРОНЫ В ПАРАЛЛЕЛОГРАММАХ

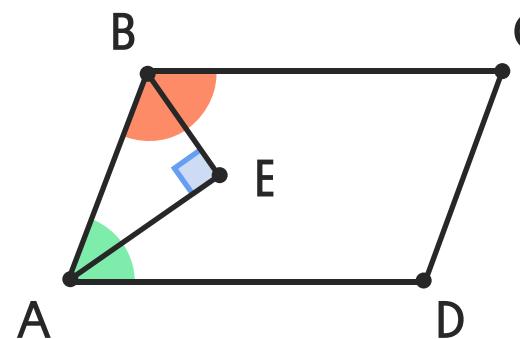


- диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам

УГЛЫ В БИССЕКТРИСАХ



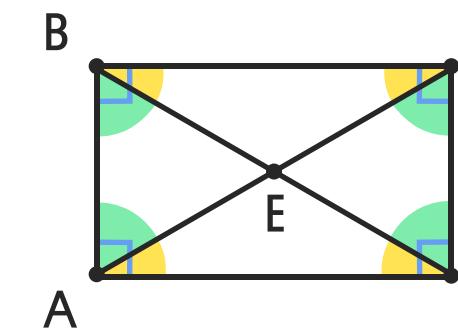
- биссектриса параллелограмма отсекает от него р/б треугольник



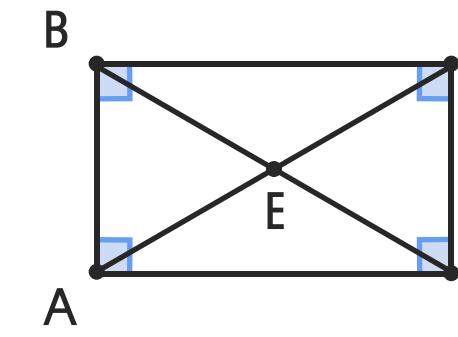
- угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне равен 90°

C

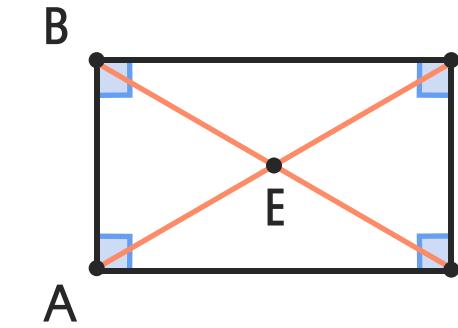
УГЛЫ И СТОРОНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ



прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы равны 90° .



- диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам

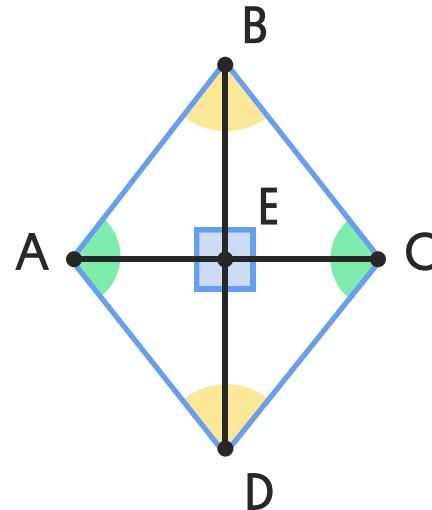


- диагональ прямоугольника вычисляется через его стороны

C

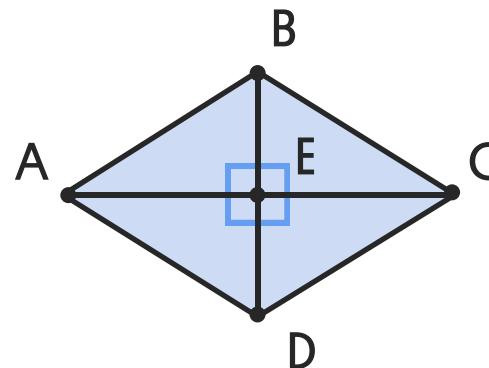
УГЛЫ И СТОРОНЫ В РОМБЕ

С



ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

- ▶ диагонали ромба перпендикулярны
- ▶ диагонали ромба делят угол пополам
- ▶ диагонали ромба делят его на 4 равных прямоугольных треугольника
- ▶ диагональ ромба вычисляется через его сторону и угол

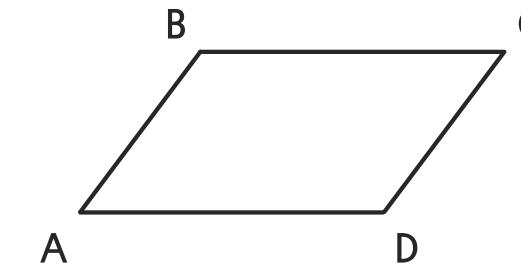


задачи на параллелограммы

задание 1

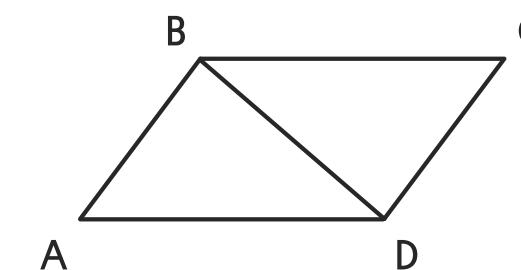
3

Сумма двух углов параллелограмма равна 62° . Найди один из оставшихся углов. Ответ дай в градусах.



4

В ромбе $ABCD$ угол BDA равен 40° . Найди угол BCD . Ответ дай в градусах.



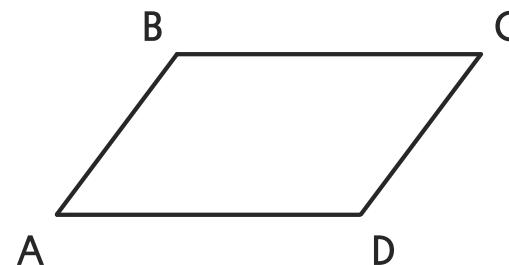
задачи на параллелограммы

задание 1

5

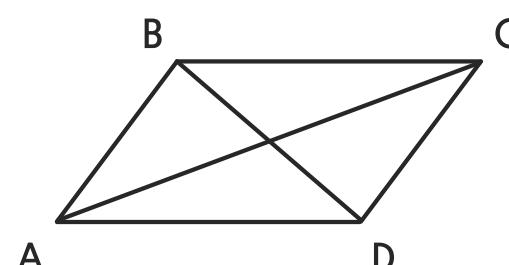
В параллелограмме $ABCD$ $AB = 2$, $AD = 9$, $\sin A = \frac{4}{9}$

Найди большую высоту параллелограмма.



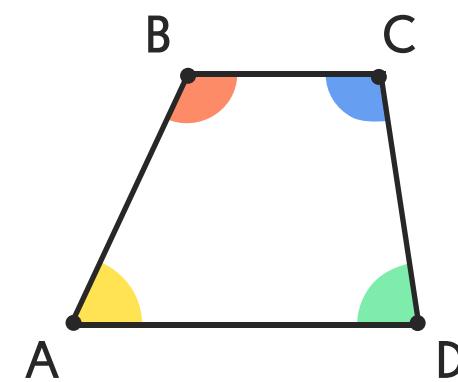
6

Найди большую диагональ ромба, сторона которого равна $11\sqrt{3}$, а острый угол равен 60° .

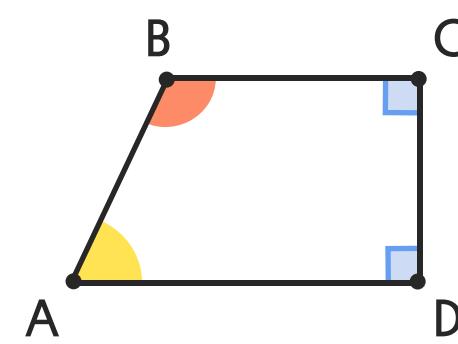


УГЛЫ В ТРАПЕЦИИ

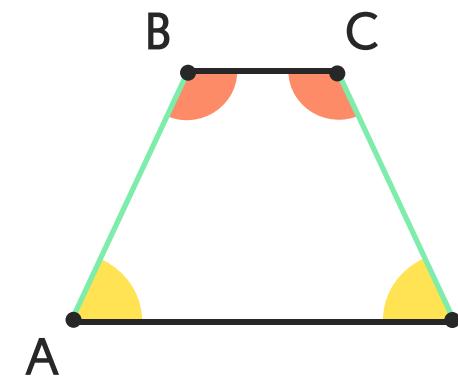
C



трапеция — это четырехугольник, у которого две стороны параллельны.



- сумма углов при боковой стороне трапеции 180°



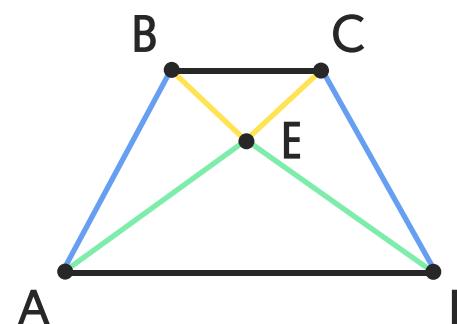
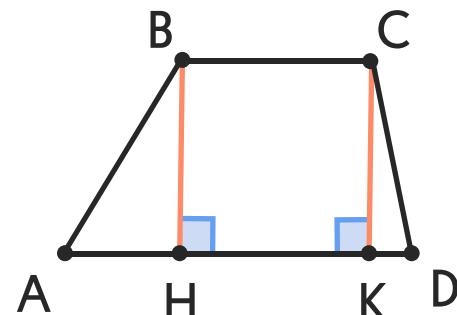
- боковая сторона прямогульной трапеции перпендикулярна основаниям

- боковые стороны р/б трапеции равны между собой

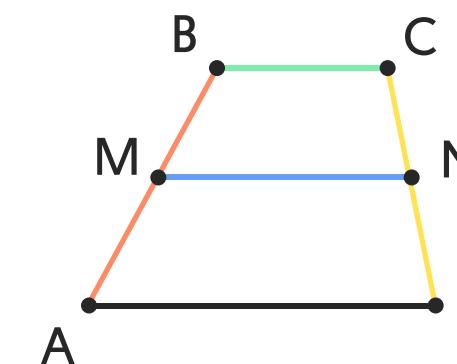
- углы при боковой стороне р/б трапеции равны

- сумма противолежащих углов р/б трапеции равна 180°

трапеции и их свойства



средняя линия трапеции



средняя линия трапеции — отрезок, который соединяет середины ее боковых сторон.

- ▶ средняя линия трапеции равна полусумме оснований
- ▶ средняя линия трапеции параллельна основаниям

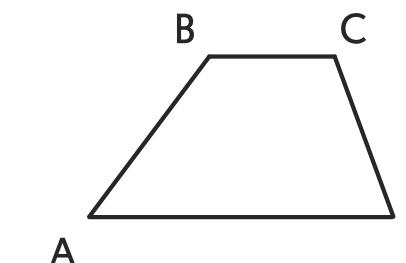
С

задачи на трапеции

задание 1

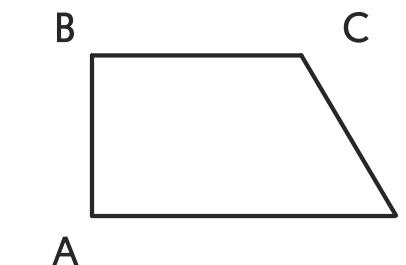
7

Чему равен больший угол р/б трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 66° ? Ответ дай в градусах.



8

Основания прямоугольной трапеции равны 12 и 4 соответственно. Ее площадь равна 64. Найди острый угол этой трапеции. Ответ дай в градусах.

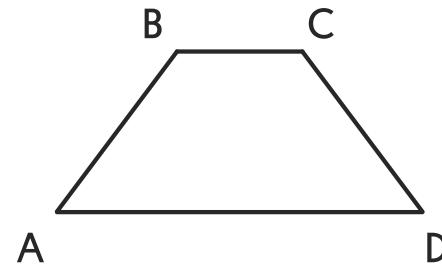


задачи на трапеции

задание 1

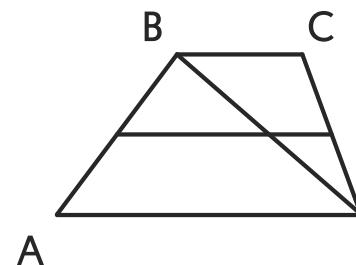
9

Основания р/б трапеции равны 51 и 65. Боковые стороны равны 25. Найди синус острого угла трапеции.

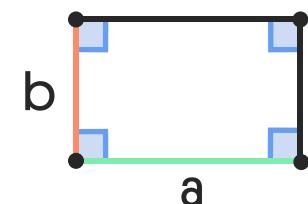


10

Основания трапеции равны 5 и 9. Найди больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

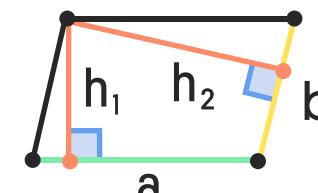


площади четырехугольников

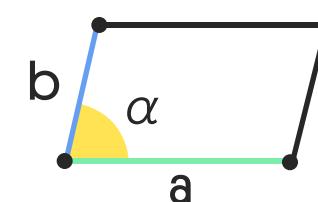


► прямоугольник

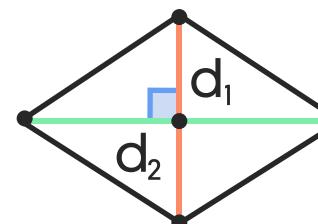
► квадрат



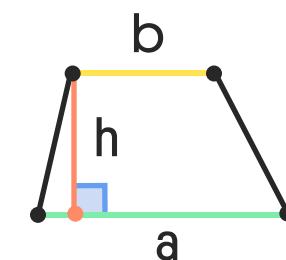
► параллелограмм через высоту



► параллелограмм через синус угла



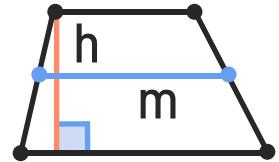
► ромб через диагонали



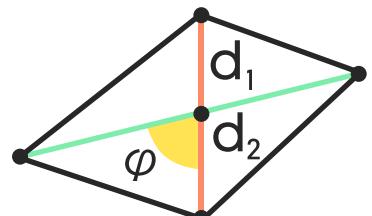
► трапеция через основания



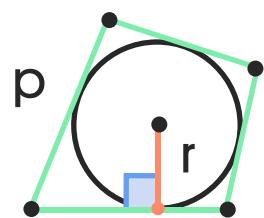
площади четырехугольников



► трапеция через среднюю линию

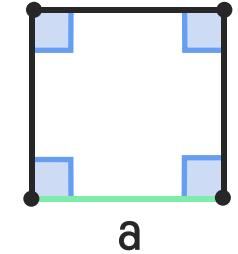


► 4-угольник через диагонали



► n-угольник по вписанной окружности

периметры четырехугольников



► квадрат

Ф

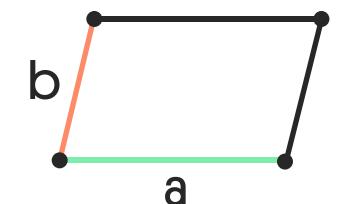
периметры четырехугольников



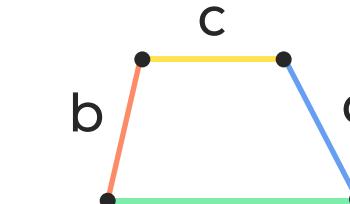
► ромб



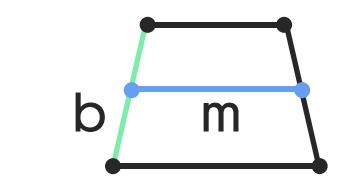
► прямоугольник



► параллелограмм



► трапеция



► р/б трапеция

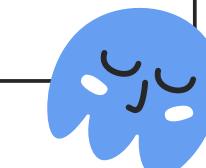
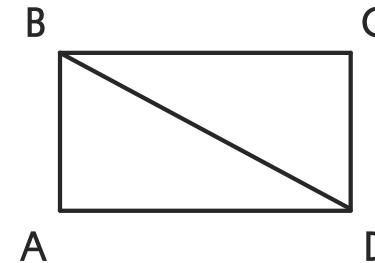
Ф

задачи на периметры и площади

задание1

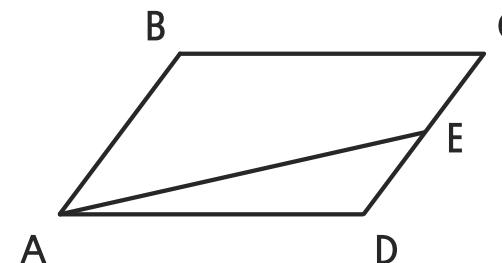
11

Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 10.
Найди площадь этого прямоугольника.



12

Площадь параллелограмма ABCD равна 226. Точка E — середина стороны CD. Найди площадь $\triangle ADE$.

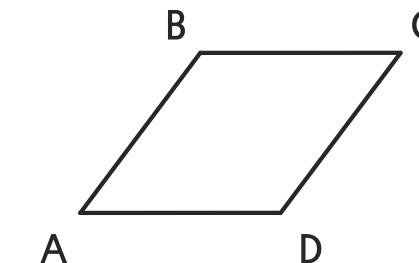


задачи на периметры и площади

задание1

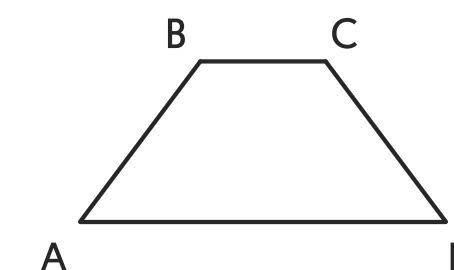
13

Площадь ромба равна 24. Одна из его диагоналей равна 6. Найди синус острого угла ромба.



14

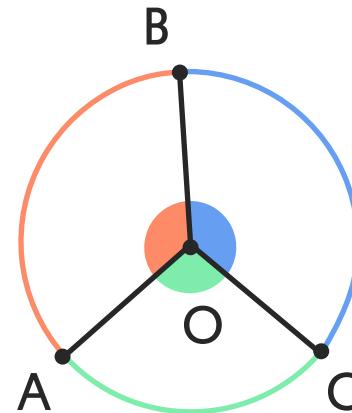
Основания р/б трапеции равны 14 и 54, а ее периметр равен 126. Найди площадь трапеции.



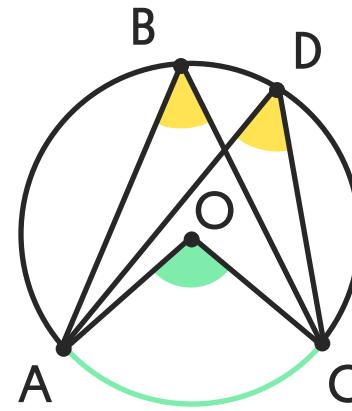


ОКРУЖНОСТИ

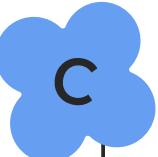
УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ



- ▶ центральный угол равен дуге окружности, на которую он опирается
- ▶ сумма дуг в окружности и сумма всех центральных углов равна 360°



- ▶ вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны
- ▶ вписанный угол равен половине центрального угла и половине дуги, на которую он опирается

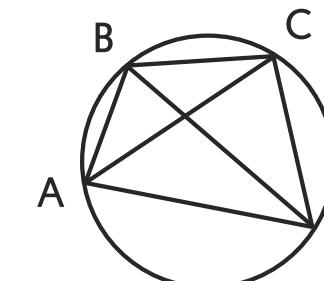


ЗАДАЧИ НА ДУГИ И УГЛЫ

задание 1

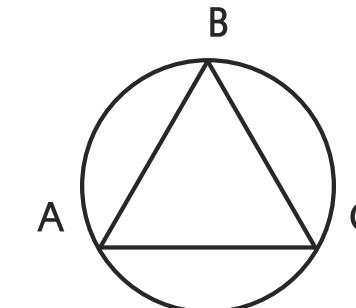
1

Угол ABC равен 102° , угол CAD равен 46° .
Найди угол ABD . Ответ дай в градусах.



2

Найди величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную радиусу окружности.

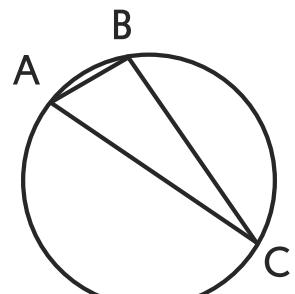


задачи на дуги и углы

задание 1

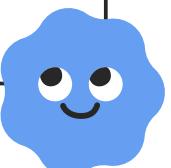
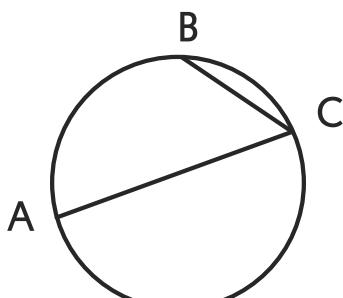
3

Точки A, B, C, расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как 1:8:9. Найди больший угол треугольника ABC. Ответ дай в градусах.



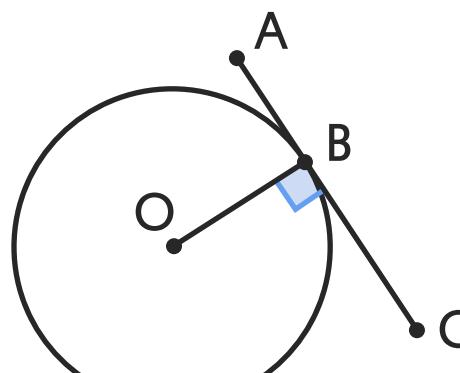
4

Дуга окружности AC, не содержащая точки B, составляет 210° . А дуга окружности BC, не содержащая точки A, составляет 30° . Найди вписанный угол ACB. Ответ дай в градусах.

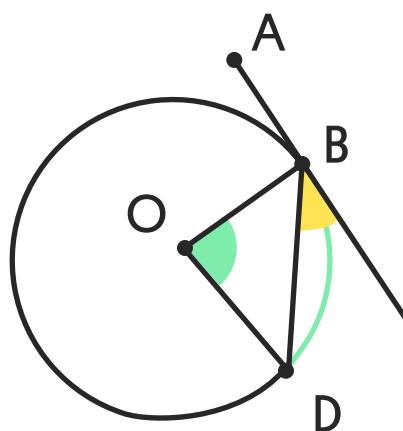


касательные к окружности

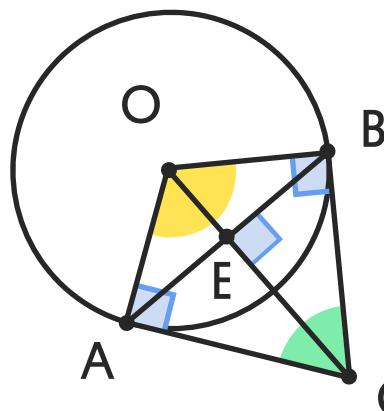
C



- радиус, проведенный в точку касания перпендикулярен касательной

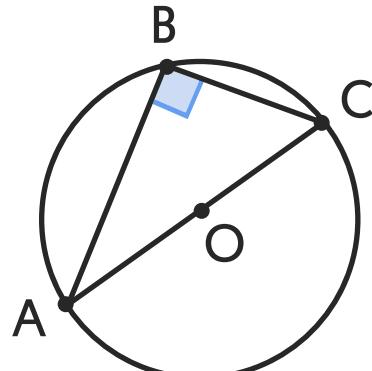


- угол между касательной и хордой равен половине дуги, заключенной между сторонами этого угла



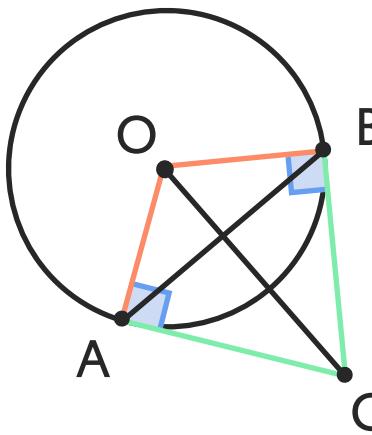
- прямая, проведенная из общей точки для двух касательных к окружности, делит угол между ними пополам и перпендикулярна хорде из точек касания

прямой угол в окружности

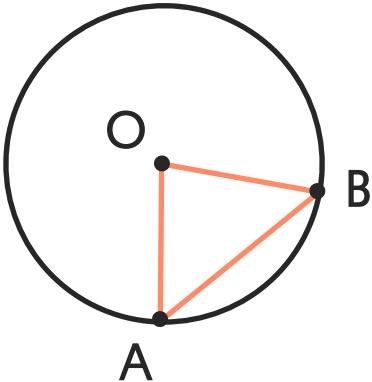


- вписанный угол, который опирается на диаметр окружности, равен 90°

окружности и их свойства



- для двух касательных к окружности из одной точки расстояния до точек касания равны
- треугольник, построенный на радиусах одной окружности — равнобедренный
- треугольник, построенный на хорде, равной радиусу окружности — равносторонний



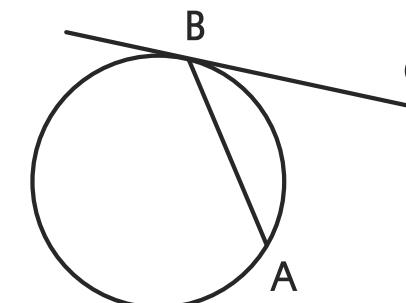
С

задачи на углы хорд и касательных

задание 1

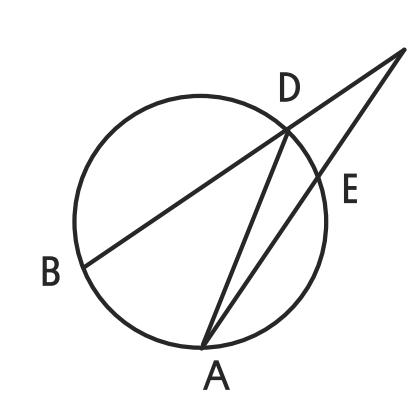
5

- Хорда АВ стягивает дугу окружности в 116° . Найди угол АВС между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку В.



6

- Найди угол АСВ, если вписанные углы АDB и DAE опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 118° и 38° .

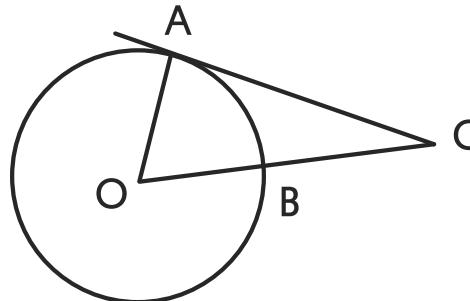


задачи на углы хорд и касательных

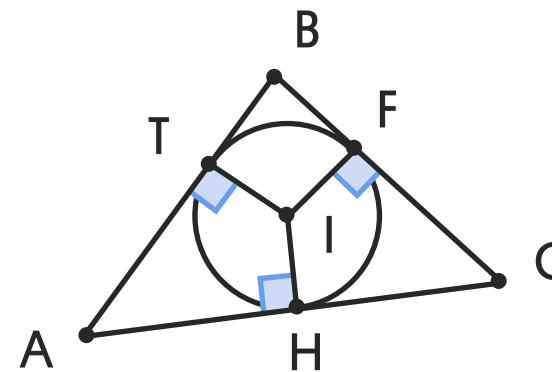
задание 1

7

Угол $\angle ACO$ равен 28° . Его сторона CA касается окружности. Найди величину меньшей дуги AB , заключенной внутри этого угла в градусах.



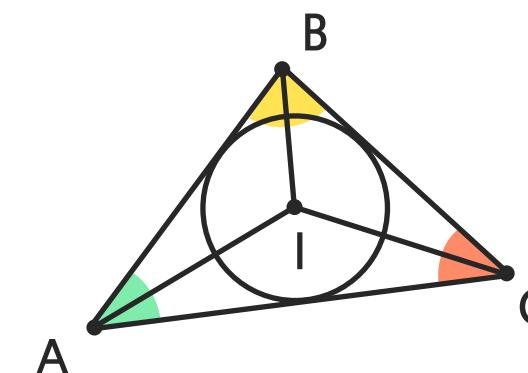
вписанная окружность



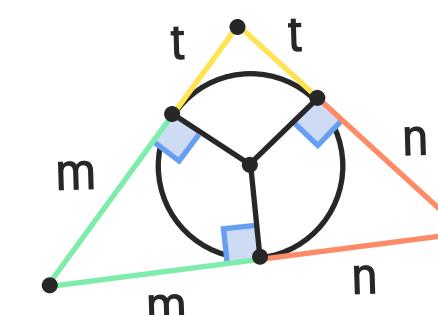
окружность вписана в фигуру, если касается всех ее сторон

C

вписанная окружность

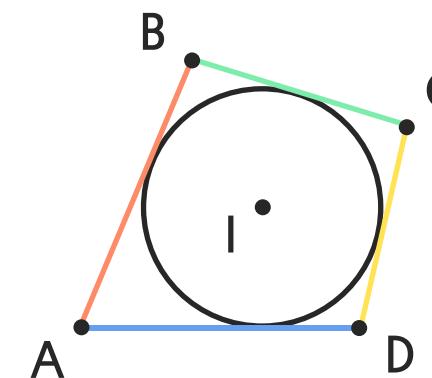


► центр окружности, вписанной в фигуру, лежит на пересечении ее биссектрис



► отрезки из углов до точек касания во вписанной окружности равны между собой

четырехугольник и вписанная

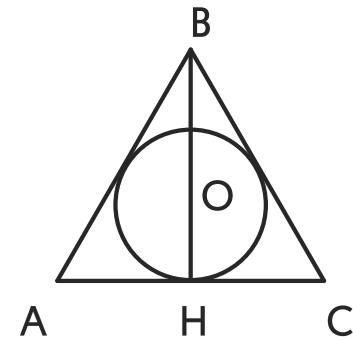


► если в четырехугольник вписана окружность, то суммы его противоположных сторон равны между собой, и равны полупериметру

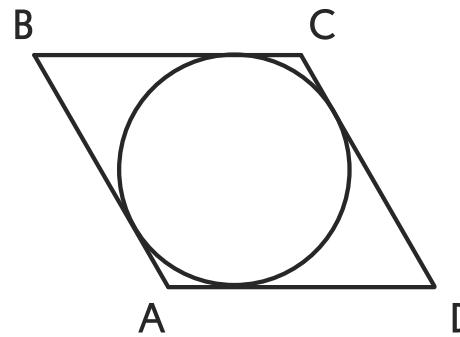
задачи на вписанную окружность

задание1

- 8 Радиус окружности, вписанный в правильный треугольник, равен 3. Найди его высоту.



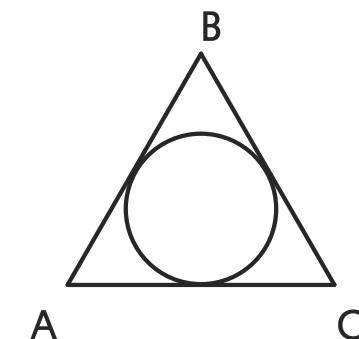
- 9 Острый угол ромба равен 30° . Радиус вписанной в этот ромб окружности равен 2. Найди сторону ромба.



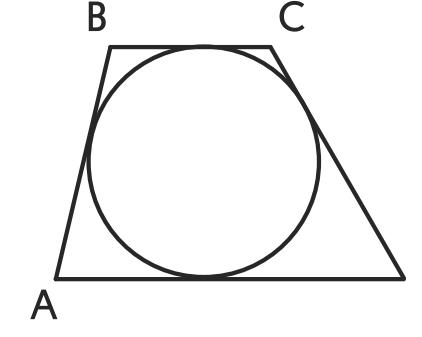
задачи на вписанную окружность

задание1

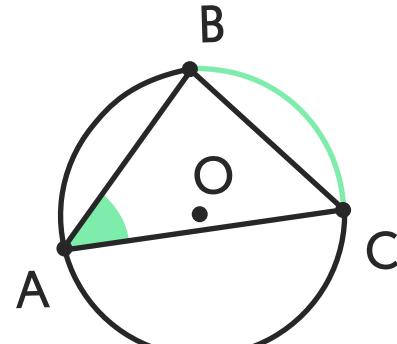
- 10 Окружность, вписанная в р/б \triangle , делит точкой касания одну из боковых сторон на отрезки длинами 5 и 3, считая от вершины. Найди периметр \triangle .



- 11 Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найди длину её средней линии.

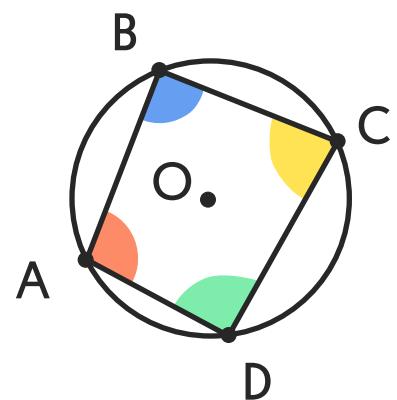


Описанная окружность

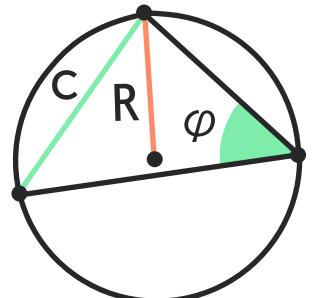


C

окружность описана вокруг фигуры, если она проходит через все ее вершины

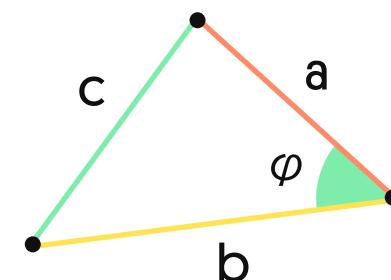


теорема синусов



диаметр описанной окружности равен отношению стороны к синусу противолежащего угла

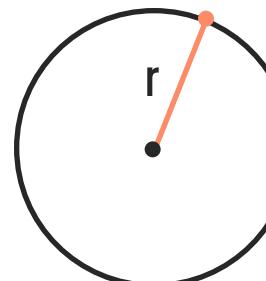
теорема косинусов



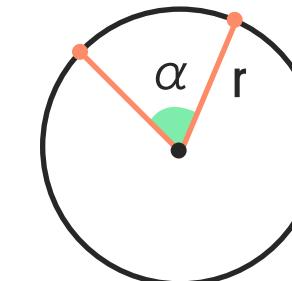
если вокруг четырехугольника описана окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°

► теорема косинусов — это аналог теоремы пифагора для произвольного треугольника

площадь и длина окружности



► длина окружности



► площадь круга

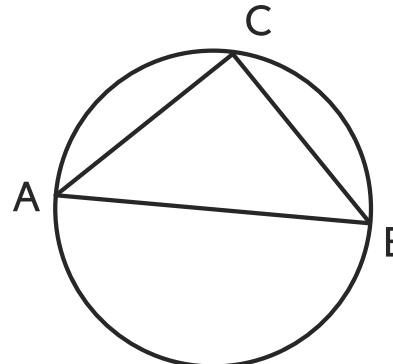
► длина части окружности

► площадь сектора

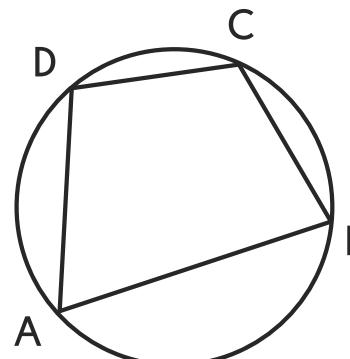
задачи на описанную окружность

задание1

- 12** В треугольнике ABC $AC = 4$, $BC = 3$, угол C равен 90° . Найди радиус описанной окружности этого треугольника.



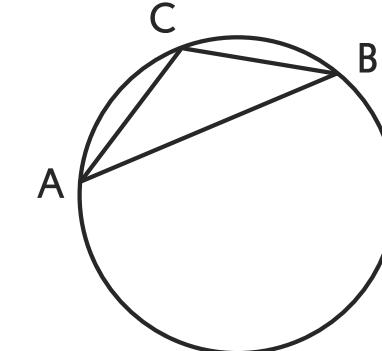
- 13** Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 38° и 81° . Найди больший из оставшихся углов. Ответ дай в градусах.



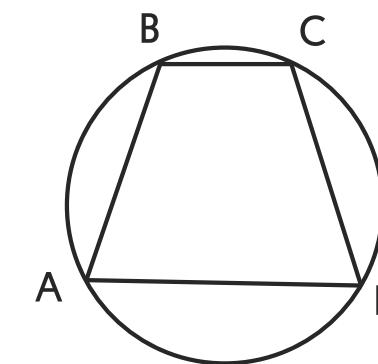
задачи на описанную окружность

задание1

- 14** Сторона $AB \triangle ABC$ равна 7. Противолежащий ей угол C равен 150° . Найди радиус описанной \odot .



- 15** Боковая сторона р/б трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании 60° , большее основание 38. Найди радиус описанной \odot трапеции.





ВЕКТОРЫ

О задании номер два

И

геометрическая задача на векторы, и их свойства, действия с векторами в координатах и на плоскости

ответ записываем в формате десятичной дроби

Есть четыре основных типа заданий:

- ▶ координаты
- ▶ длины вектора
- ▶ скалярное произведение
- ▶ коэффициенты

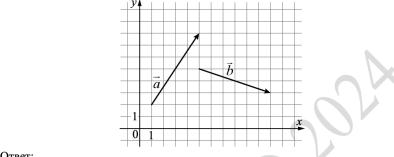
информация от ФИПИ о новом задании

Обобщённый план варианта КИМ ЕГЭ 2024 года по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)

Номер задания	Проверяемые предметные результаты освоения основной образовательной программы	Коды проверяемых требований (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на базовом уровне (в мин.)
2	Умение оперировать понятиями: вектор, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, скалярное произведение, угол между векторами	12	7	Б	1	5

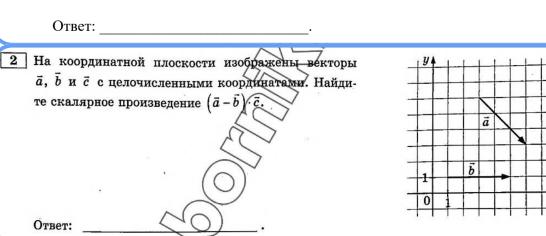
задания из официальных источников

2 На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} и \vec{b} . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Даны векторы $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{b}(-3; -6)$ и $\vec{c}(4; -3)$. Найдите значение выражения $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

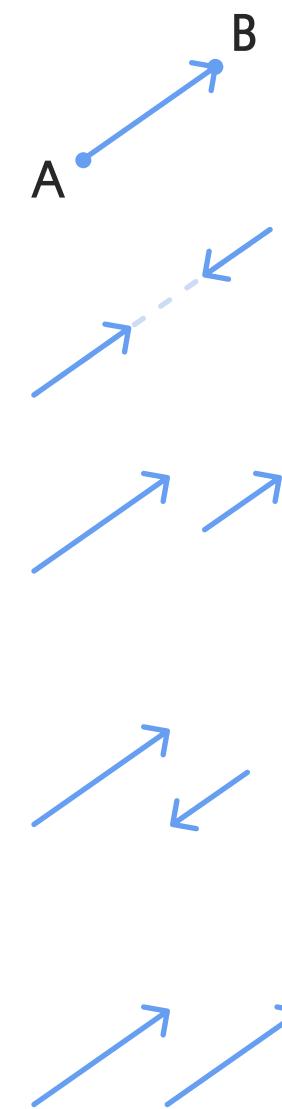
2 Даны векторы $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{b}(-3; -6)$ и $\vec{c}(4; -3)$. Найдите значение выражения $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



определение вектора

С

вектор — это отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая является концом



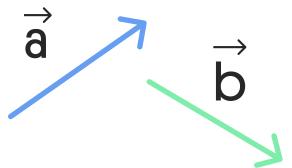
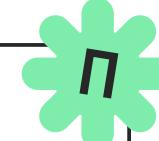
► коллинеарные векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых

► сонаправленные векторы — коллинеарны и направлены в одну сторону

► противоположно-направленные векторы — коллинеарны и направлены в разные стороны

► равные вектора — это такие, которые одновременно сонаправлены и имеют одинаковую длину

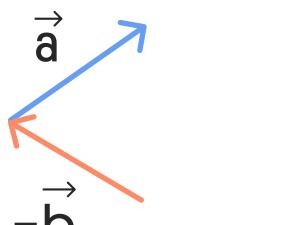
сложение векторов



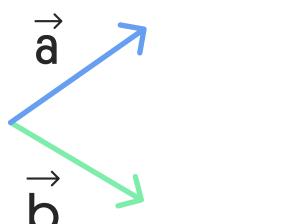
для сложения векторов по правилу треугольника отложим начало одного вектора от конца второго, и вектор суммы будет совпадать с началом первого и концом второго вектора



для сложения векторов по правилу параллелограмма совместим начала обоих векторов и достроим параллелограмм, и вектор суммы будет лежать на его диагонали, а начало совпадет с началом векторов



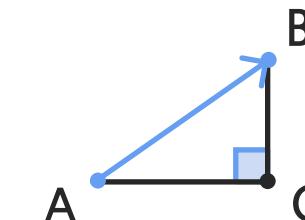
для вычитания векторов по правилу треугольника совместим начала векторов, и вектор разности будет идти от конца вычитаемого вектора к концу уменьшаемого вектора



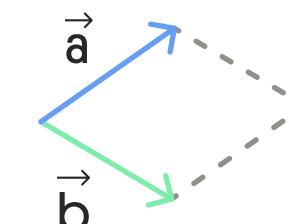
свойства сложения векторов



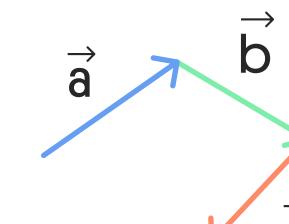
длина вектора — это расстояние между началом и концом вектора



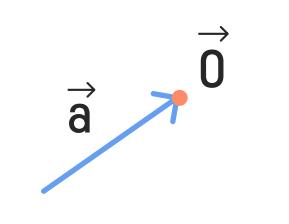
► нулевой вектор — вектор, длина которого равна нулю



► при сложении векторов слагаемые можно менять местами



► при сложении векторов, можно складывать в любой очередности

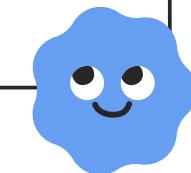
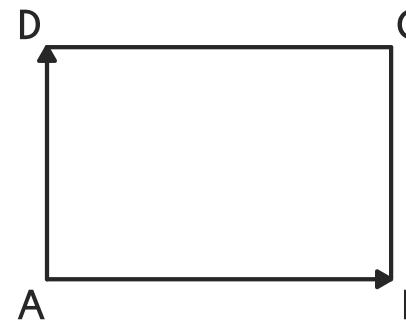


► при сложении любого вектора с нулевым получается этот вектор

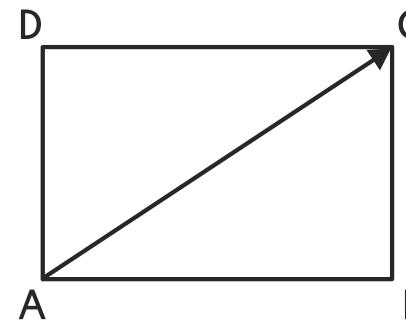
задачи на сложение векторов

задание 2

- 1 Две стороны прямоугольника ABCD равны 20 и 15.
Найди длину разности векторов \vec{AB} и \vec{AD} .



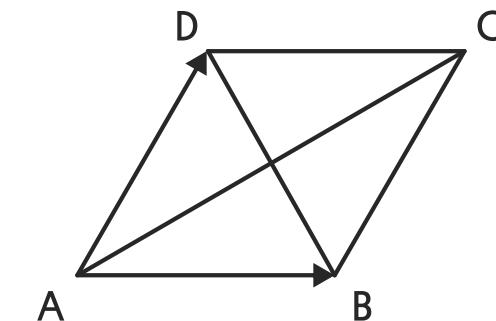
- 2 Две стороны прямоугольника ABCD равны 40 и 9.
Найди длину вектора \vec{AC} .



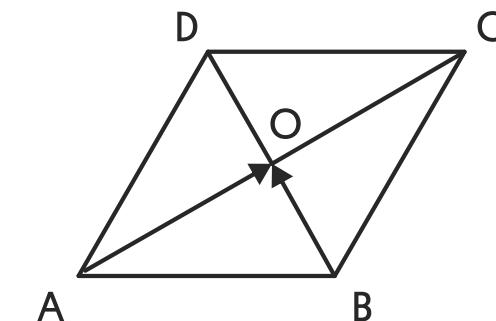
задачи на сложение векторов

задание 2

- 3 Диагонали ромба ABCD равны 32 и 23. Найди длину вектора $\vec{AB} - \vec{AD}$.



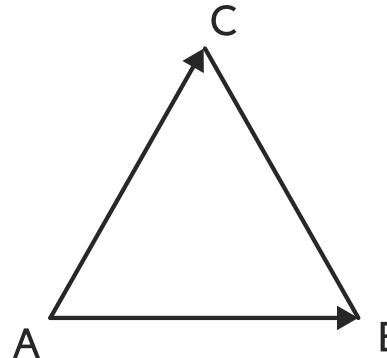
- 4 Диагонали ромба ABCD пересекаются в точке О и равны 24 и 32. Найди длину вектора $\vec{AO} + \vec{BO}$.



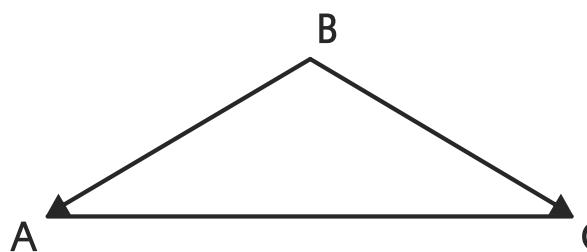
задачи на сложение векторов

задание 2

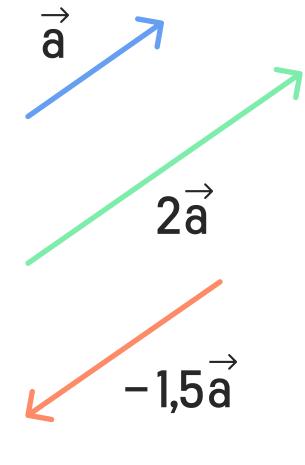
- 5 Сторона равностороннего треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$.
Найди длину суммы векторов \vec{AB} и \vec{AC} .



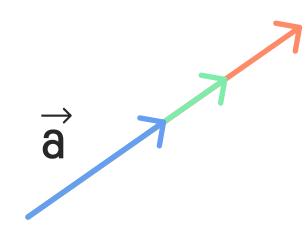
- 6 В треугольнике ABC известно, что стороны AB и BC равны 11, а угол BAC равен 30° . Найди длину суммы векторов \vec{BA} и \vec{BC} .



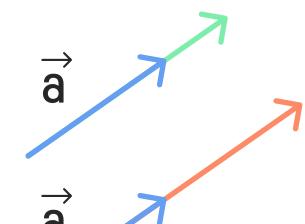
умножение вектора на число



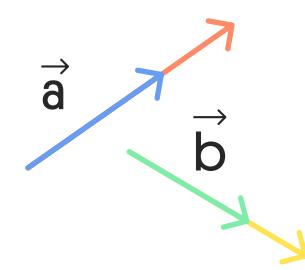
произведением ненулевого вектора на число k является такой вектор, длина которого в k раз больше, длины начального вектора, причем векторы сонаправлены при $k > 0$ и противоположно направлены при $k < 0$



► при умножении двух чисел на вектор умножаем их в любой очередности



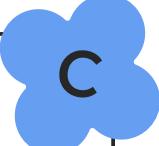
► при умножении вектора на сумму чисел, можно умножить вектор на каждое число отдельно



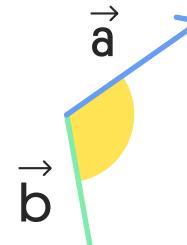
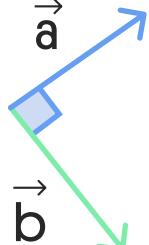
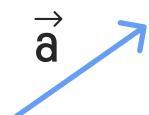
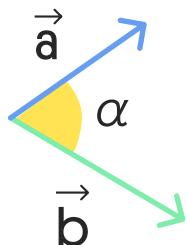
► при умножении числа на сумму векторов, можно умножить это число на каждый вектор отдельно



скалярное произведение



скалярное произведение — это операция умножение двух векторов, результатом которой является скаляр, то есть число, которое зависит от положения векторов друг к другу



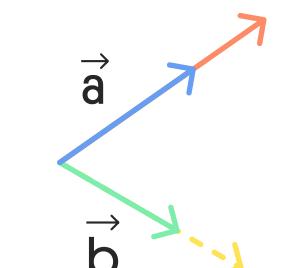
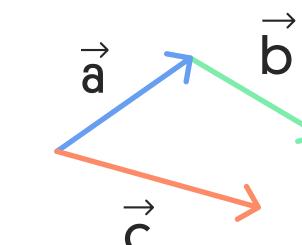
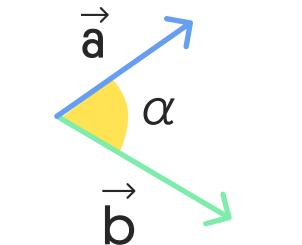
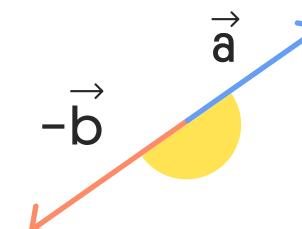
скalарное произведение векторов вычисляется как произведение их длин на косинус угла между ними

► скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату длины

► скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю

► если угол между векторами острый, то скалярное произведение положительное, а если тупой — отрицательное

скаларное произведение



► скалярное произведение вектора на противоположно направленный ему вектор равно отрицательному произведению их длин

► при скалярном умножении векторов можем менять вектора местами

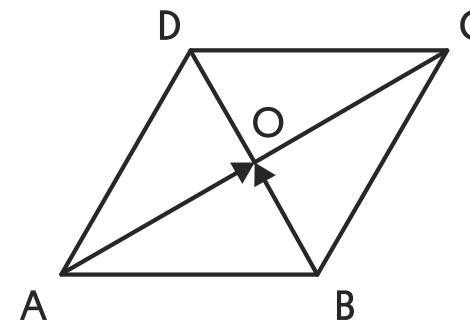
► при скалярном умножении вектора на сумму векторов можем по очереди умножить на каждый вектор из суммы

► при умножении числа на скалярное произведение векторов можем умножить на любой вектор произведения

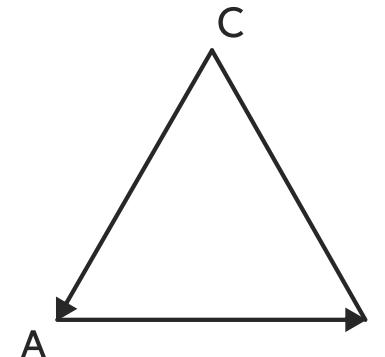
задачи на скалярное умножение

задание 2

- 7 Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 56 и 105. Найди скалярное произведение векторов \vec{AO} и \vec{BO} .



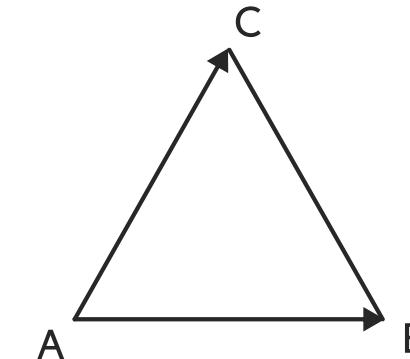
- 8 Сторона равностороннего треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$. Найди скалярное произведение векторов \vec{AB} и \vec{CA} .



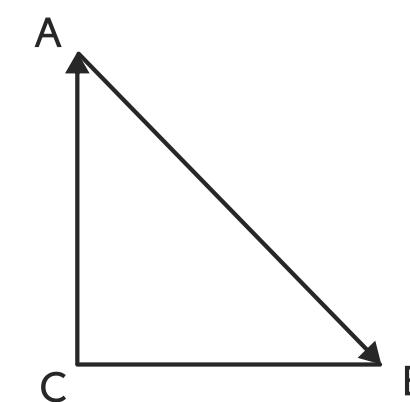
задачи на скалярное умножение

задание 2

- 9 Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найди скалярное произведение векторов \vec{AB} и $4\vec{AC}$.



- 10 В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $AB = 8\sqrt{2}$. Найди скалярное произведение \vec{AB} и \vec{CA} .

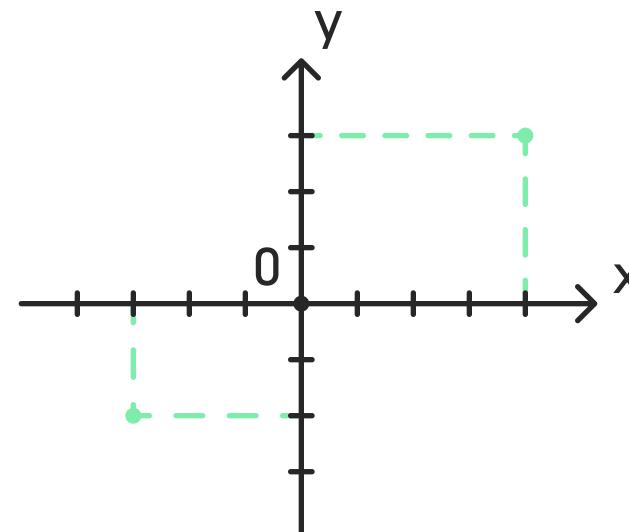




векторы

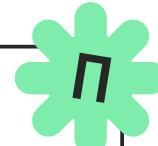
координатная плоскость

координатная плоскость – это прямоугольная система координат, состоящая из двух взаимно перпендикулярных осей, имеющих направление, начало отсчета и единичные отрезки.



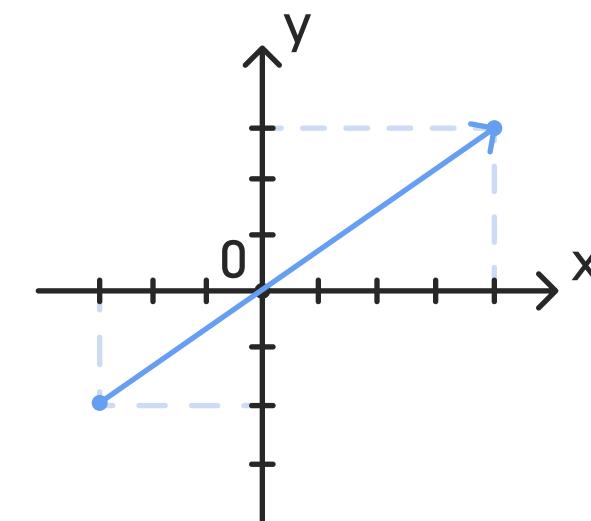
чтобы определить координаты точки нужно провести перпендикуляры от точки к каждой оси

расстояние между двумя точками находим по теореме Пифагора

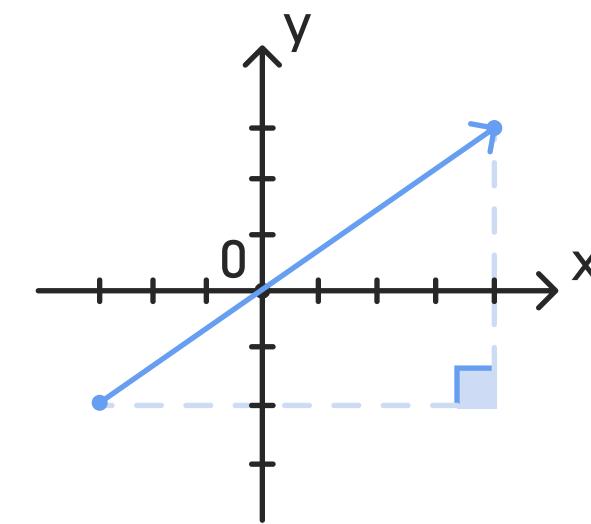


► абсцисса — координата на оси ox , ордината — координата на оси oy

вектор и его координаты



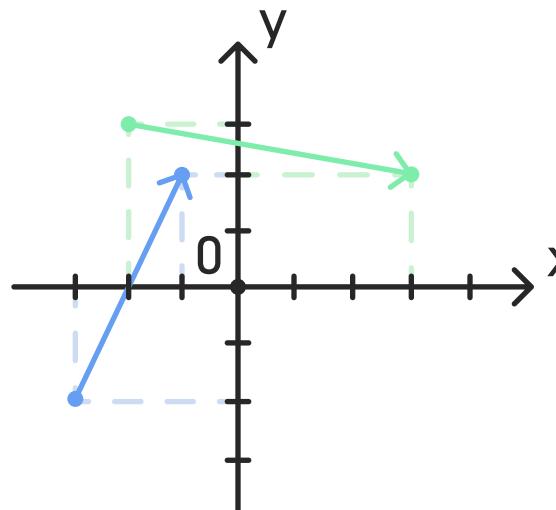
чтобы определить координаты вектора, нужно из координат конца вычесть координаты начала



длину вектора по его координатам можно найти с помощью теоремы Пифагора по формуле

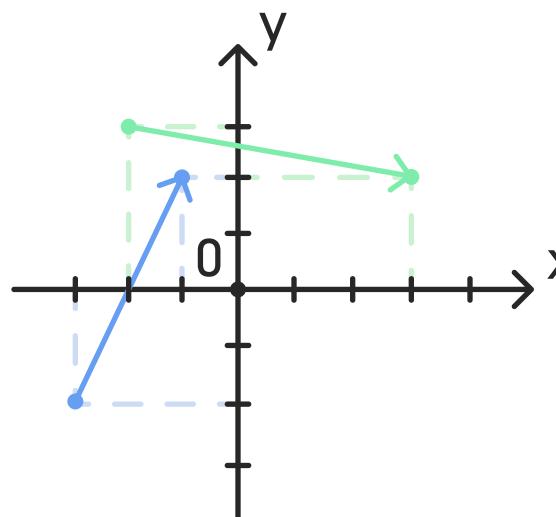
$$\rho = \sqrt{(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2}$$

сложение в координатах



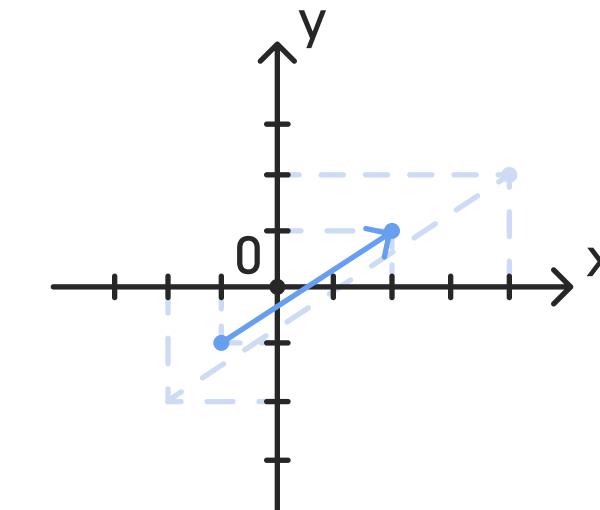
координаты вектора суммы находим как сумму координат векторов

C



координаты вектора разности — разность координат векторов

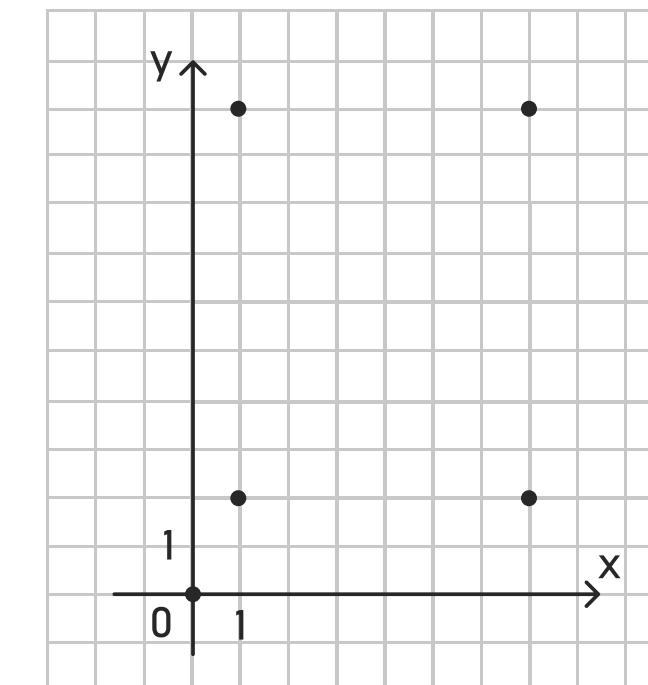
умножение в координатах



при умножении вектора на число умножаем на число его координаты

C

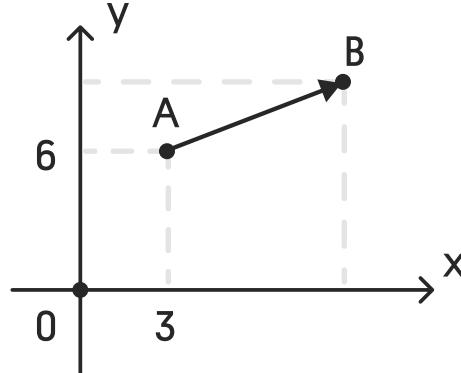
- 1 Найди длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты $[1; 2], [1; 10], [7; 2], [7; 10]$.



задачи на использование координат

задание 2

- 2** Вектор \vec{AB} с началом в точке $A[3; 6]$ имеет координаты $[9; 3]$.
Найди сумму координат точки B .

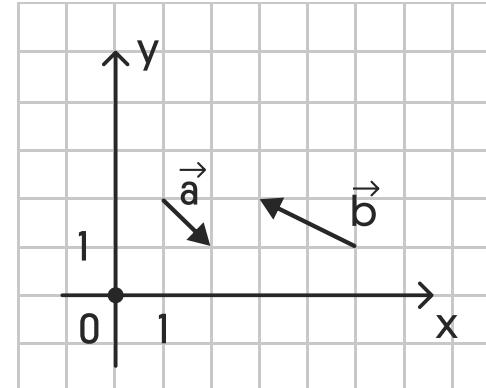


- 3** Вектор \vec{AB} с началом в точке $A[3; 1]$ имеет координаты $[5; 9]$.
Найди ординату точки B .

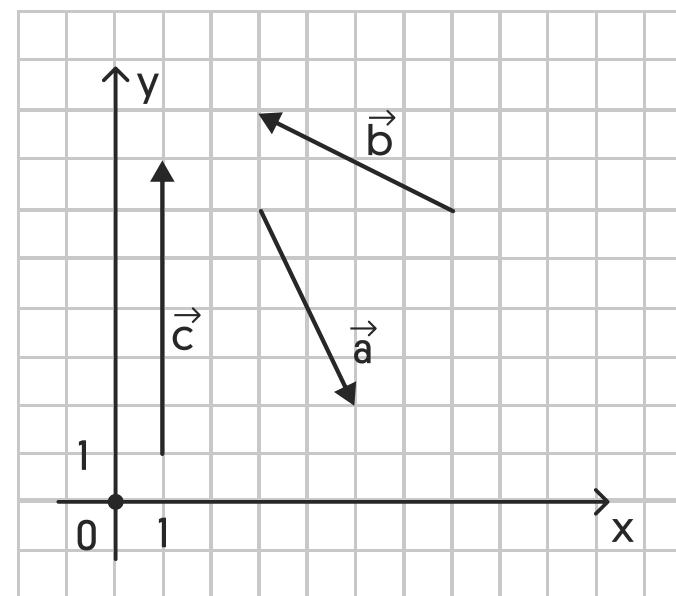
задачи на использование координат

задание 2

- 4** На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} и \vec{b} .
Найди длину вектора $2\vec{a} - \vec{b}$.



- 5** На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} с целочисленными координатами. Найди длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.



задачи на использование координат

задание 2

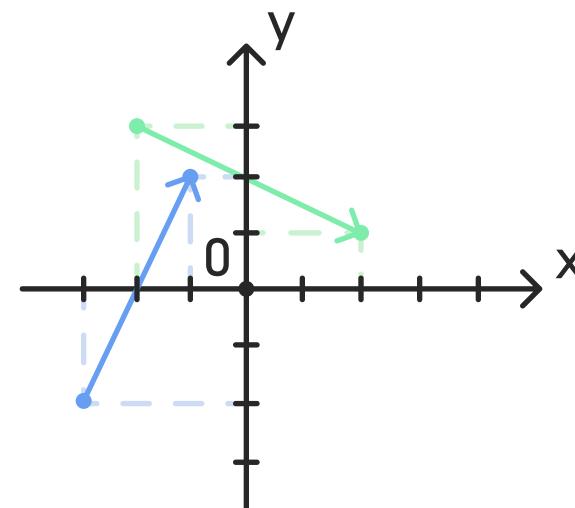
- 6 Даны векторы $\vec{a} [1; 2]$, $\vec{b} [-3; 6]$ и $\vec{c} [4; -2]$.
Найди длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

- 7 Даны векторы $\vec{f} [-8; 7]$ и $\vec{e} [-1; -0,5]$. Найди координаты вектора $\vec{g} = -5\vec{f} + 8\vec{e}$. В ответ запиши сумму координат вектора \vec{g} .



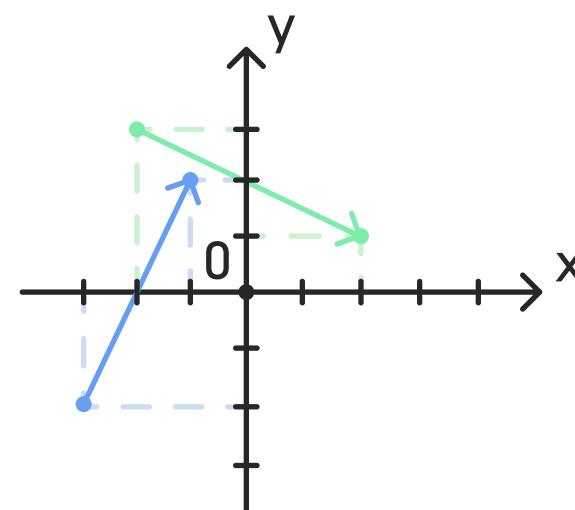
скалярное произведение

C



значение скалярного произведения векторов вычисляется по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_k \cdot x_h + y_k \cdot y_h$$

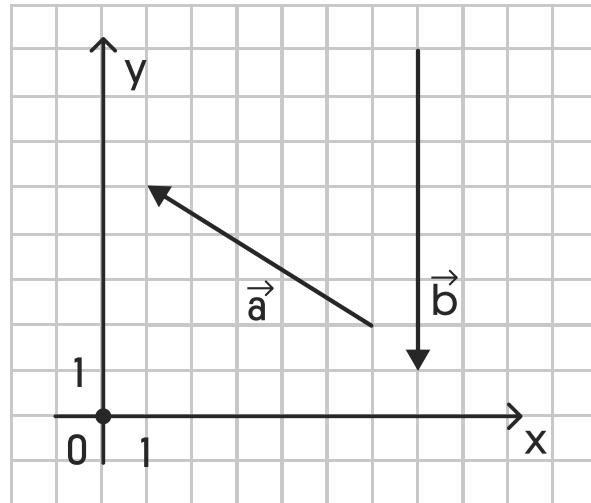


косинус угла между векторами находим через скалярное произведение

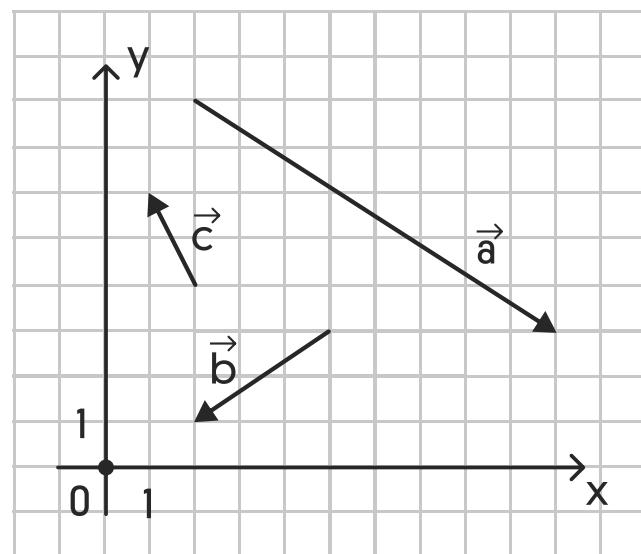
задачи на скалярное произведение

задание 2

- 8 На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} и \vec{b} с целочисленными координатами. Найди скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



- 9 На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} с целочисленными координатами. Найди скалярное произведение $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{c}$.



задачи на скалярное произведение

задание 2

- 10 Даны векторы $\vec{a} [1; 2]$, $\vec{b} [3; -6]$ и $\vec{c} [4; -3]$. Найди значение выражения $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



- 11 Даны векторы $\vec{m} [6; -2]$, $\vec{n} [-1; 4]$, $\vec{k} [-2; 8]$ и $\vec{p} [1; 4]$. Найди скалярное произведение $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot (\vec{k} + \vec{p})$.



задачи на скалярное произведение

задание 2

- 12 Найди косинус угла между векторами \vec{r} и \vec{q} , если известно, что $\vec{r} [0; -4]$ и $\vec{q} [12; 9]$.

задачи на скалярное произведение

задание 2

- 13 Длины векторов \vec{a} и \vec{b} равны соответственно 11 и 7, а их скалярное произведение равно 53. Найди длину вектора \vec{c} , если $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

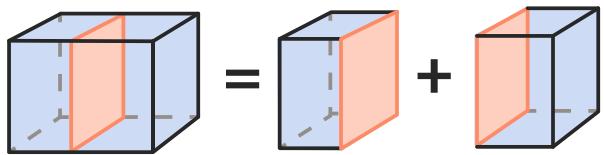




V и S в стереометрии

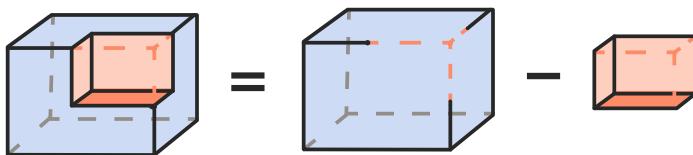
Свойства объемов

разрезание



$$V_h = V_1 + V_2$$

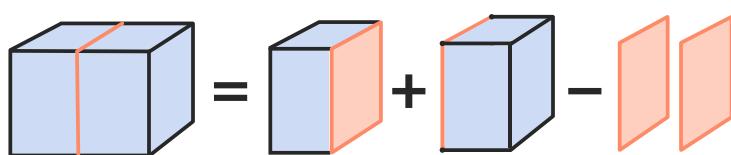
достроение



$$V_h = V_d - V_l$$

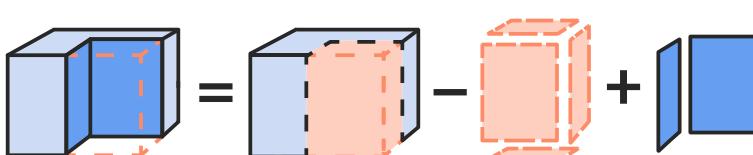
Свойства площадей

разрезание



$$S_h = S_1 + S_2 - 2S_p$$

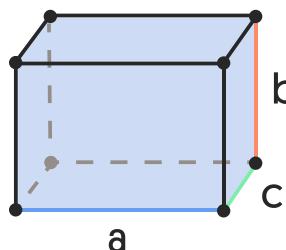
достроение



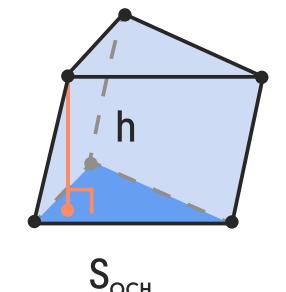
$$S_h = S_d - S_l + 2S_o$$

C

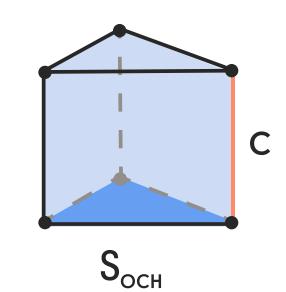
объемы призм



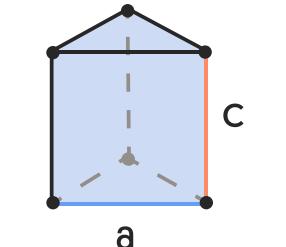
► прямоугольный параллелепипед



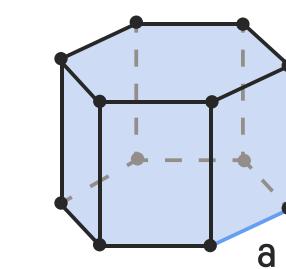
► произвольная призма



► прямая призма

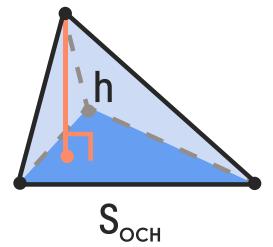


► правильная треугольная призма

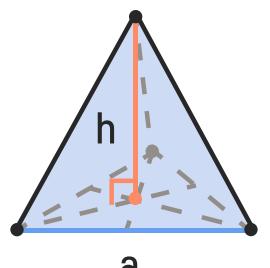


► правильная шестиугольная призма

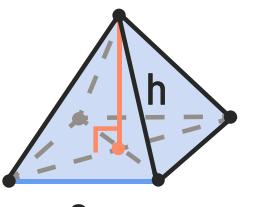
объемы пирамид



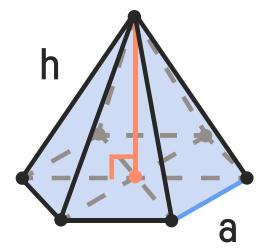
► произвольная пирамида



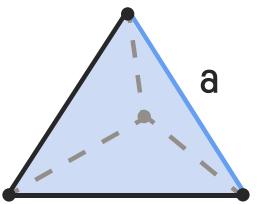
► правильная треугольная пирамида



► правильная четырехугольная пирамида



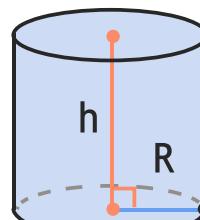
► правильная шестиугольная пирамида



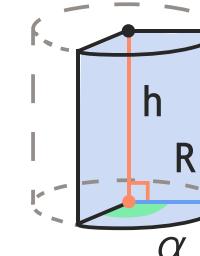
► правильный тетраэдр

Ф

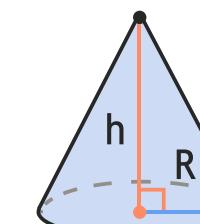
объемы тел вращения



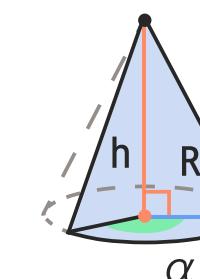
► цилиндр



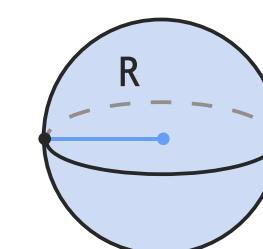
► часть цилиндра



► конус



► часть конуса



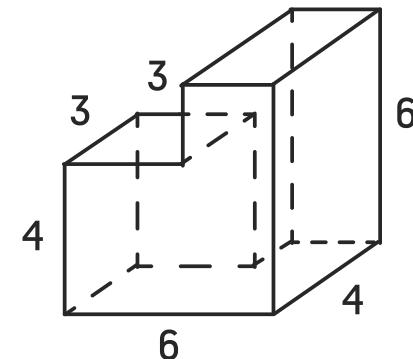
► шар

Ф

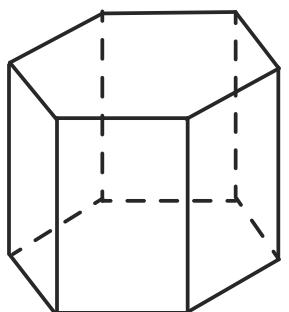
задания на объемы

задание 3

- 1 Найди объем многогранника, изображенного на рисунке [все двугранные углы прямые].



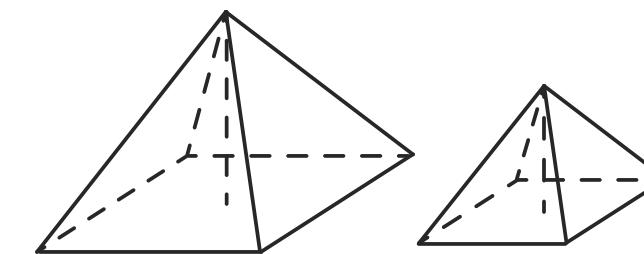
- 2 Найди объем многогранника, вершинами которого являются точки $A, C, D, F, A_1, C_1, D_1, F_1$, правильной 6-угольной призмы площадь основания равна 7, а боковое ребро 6.



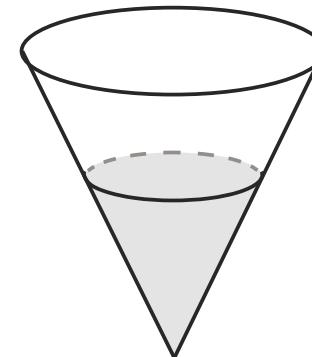
задания на объемы

задание 3

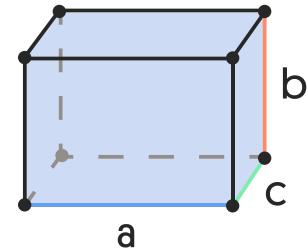
- 3 Даны две правильные четырехугольные пирамиды. Объем первой пирамиды равен 9. У второй пирамиды высота в 1,5 раза больше, а сторона основания в 2 раза больше, чем у первой. Найдите объем второй пирамиды.



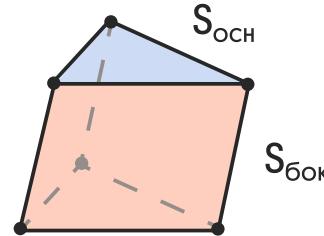
- 4 В сосуде с формой конуса, уровень жидкости достигает половины высоты. Объем жидкости 72 мл. Сколько мл нужно долить, чтобы заполнить сосуд?



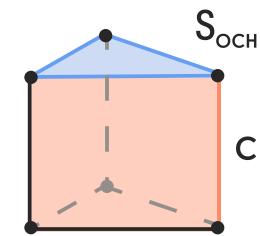
ПЛОЩАДИ ПРИЗМ



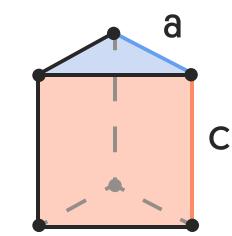
► прямоугольный параллелепипед



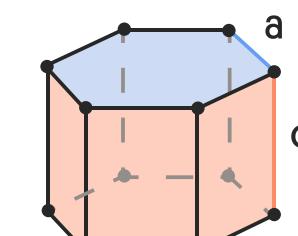
► произвольная призма



► прямая призма



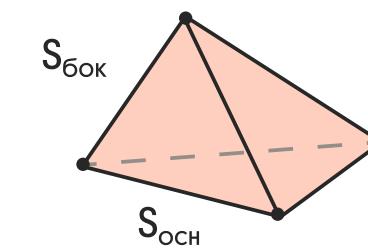
► правильная треугольная призма



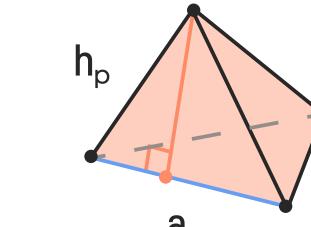
► правильная шестиугольная призма



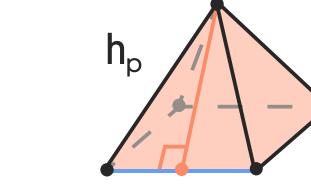
ПЛОЩАДИ ПИРАМИД



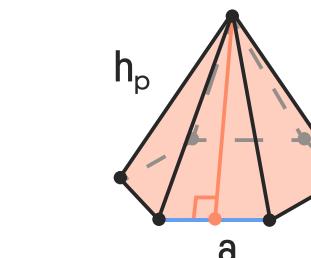
► произвольная пирамида



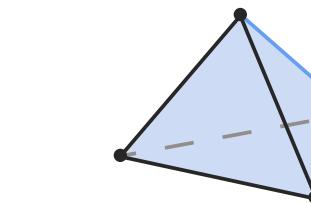
► правильная треугольная пирамида



► правильная четырехугольная пирамида



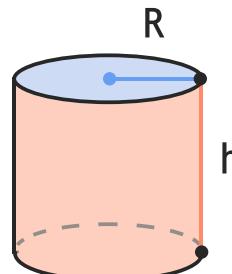
► правильная шестиугольная пирамида



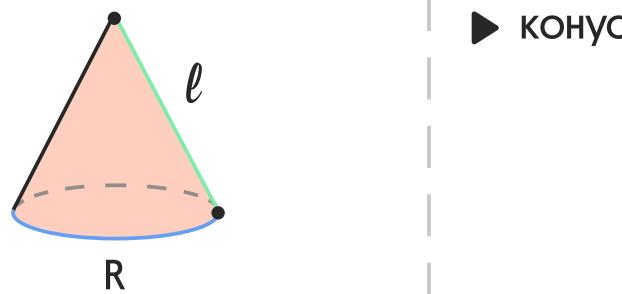
► правильный тетраэдр



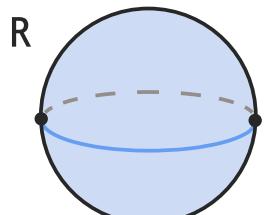
площади тел вращения и куба



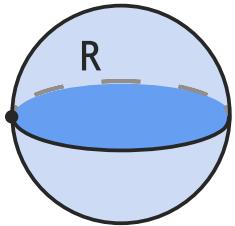
► цилиндр



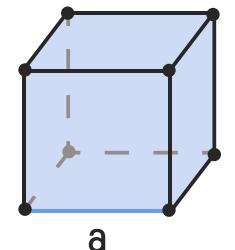
► конус



► шар



► центральное сечение шара



► куб

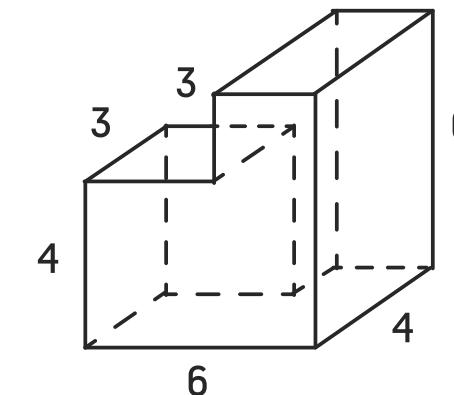
Ф

задания на площади

задание 3

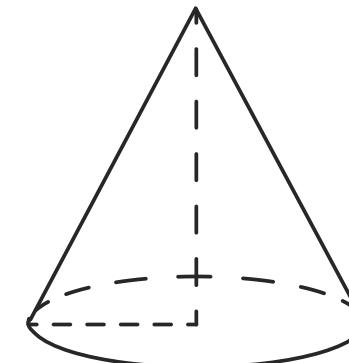
5

Найди площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке [все двугранные углы прямые].



6

Высота конуса равна 20, образующая равна 25. Найди площадь его полной поверхности, деленную на π.

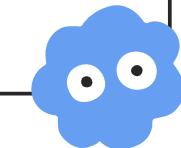
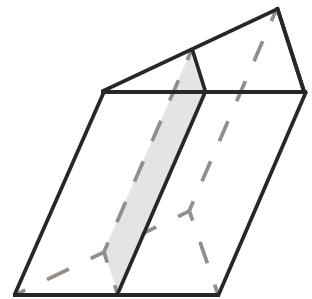


задания на площади

задание 3

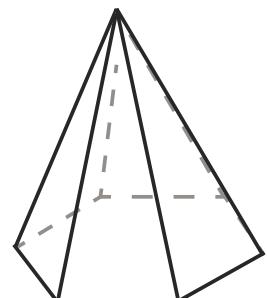
7

Через среднюю линию основания треугольной призмы проходит плоскость, параллельная боковому ребру. Найди ее объём, если объём отсеченной \triangle призмы равен 5.

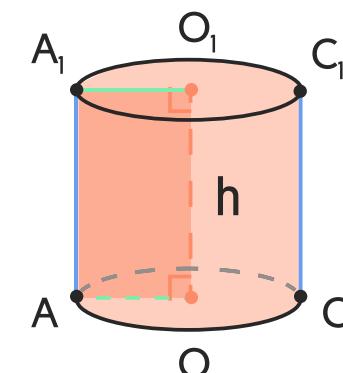


8

Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 48, боковые ребра равны 51. Найди площадь боковой поверхности этой пирамиды.



СВОЙСТВА ЦИЛИНДРА

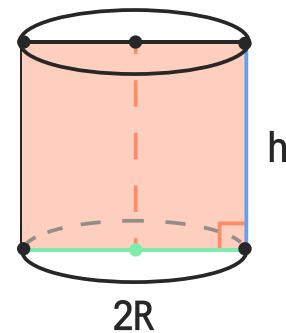


цилиндр — это фигура вращения прямоугольника вокруг стороны

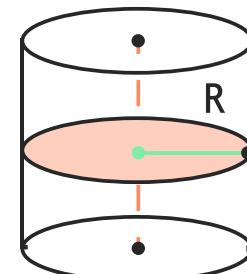
► ось цилиндра и его образующие параллельны

► ось цилиндра и его образующие равны

► основания цилиндра — равные круги

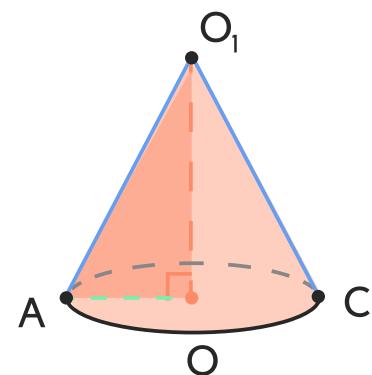


► осевое сечение цилиндра — прямоугольник, стороны которого равны высоте и диаметру цилиндра



► сечение цилиндра, параллельное основанию — окружность с радиусом, равным радиусу основания

Свойства конуса

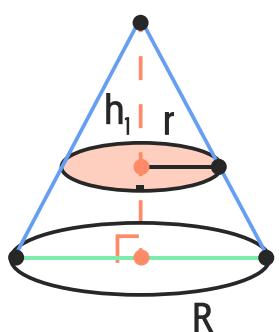
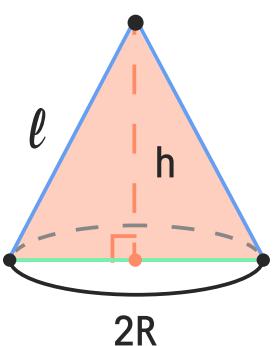


конус — это фигура вращения прямоугольного треугольника вокруг катета

- ▶ образующие конуса равны между собой

- ▶ квадрат образующей равен сумме квадратов высоты и радиуса конуса

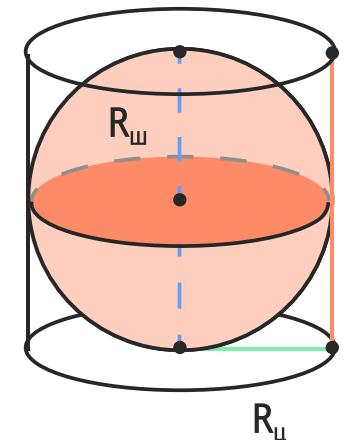
- ▶ осевое сечение конуса — р/б треугольник, основание которого — диаметр, а боковые стороны — образующие



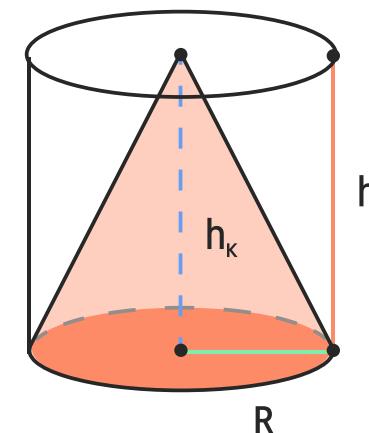
- ▶ сечение конуса, параллельное основанию — окружность с радиусом меньшим радиуса основания

C

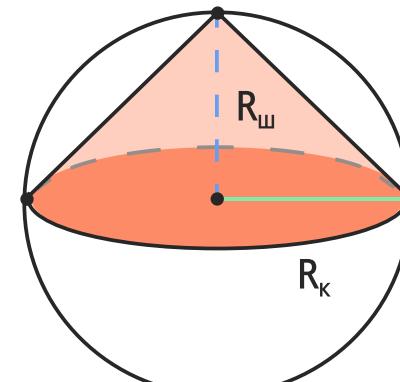
Вписаные тела вращения



шар вписан в цилиндр, если их радиусы совпадают, а высота цилиндра равна диаметру шара



конус вписан в цилиндр, если их радиусы совпадают, а высота конуса равна высоте цилиндра



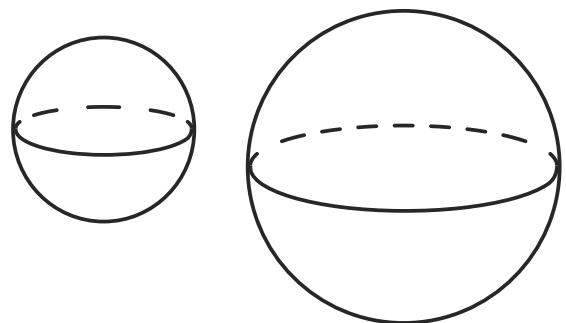
конус вписан в шар в центральном сечении, если их радиусы и высота конуса равны

C

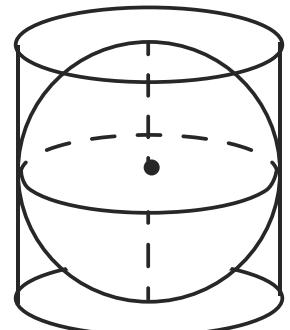
задания на тела вращения

задание 3

- 9 Объем второго шара в 216 раз больше объема первого.
Во сколько раз площадь поверхности первого шара
больше площади поверхности второго?



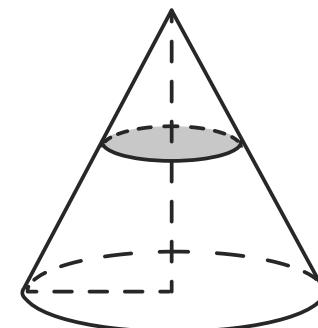
- 10 Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 70.
Найди объем цилиндра.



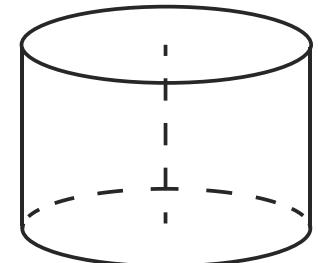
задания на тела вращения

задание 3

- 11 Площадь основания конуса равна 45. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 4 и 8, считая от вершины. Найди площадь сечения конуса этой плоскостью.

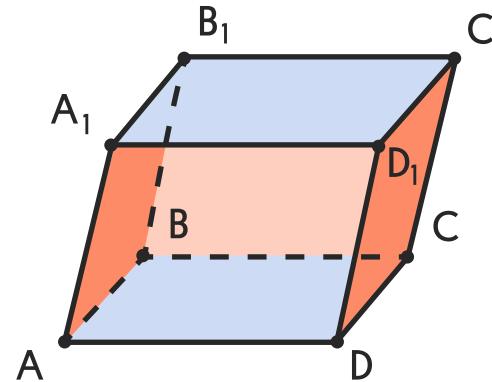


- 12 Площадь боковой поверхности цилиндра 2π ,
а диаметр основания — 1. Найди высоту цилиндра.

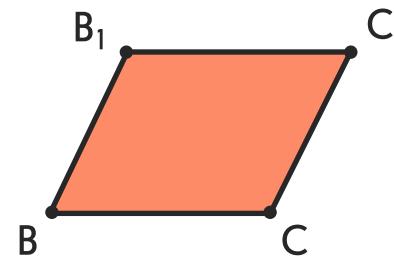


фигуры в стерео

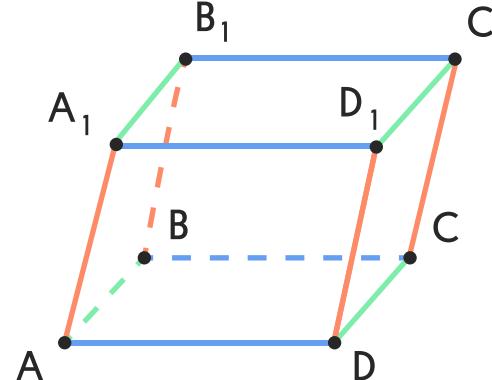
Свойства параллелепипеда



параллелепипед — это шестигранник, у которого противолежащие грани параллельны



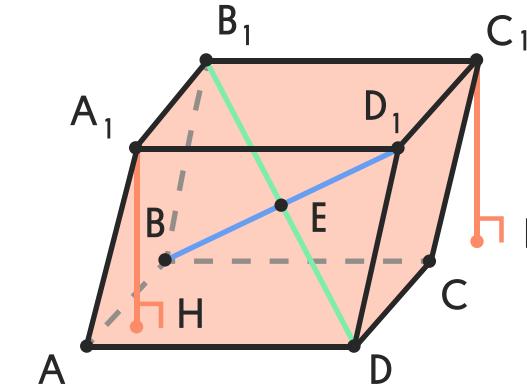
- ▶ все грани параллелепипеда параллелограммы
- ▶ противолежащие грани параллелепипеда равны



- ▶ соответственные ребра параллелепипеда равны

C

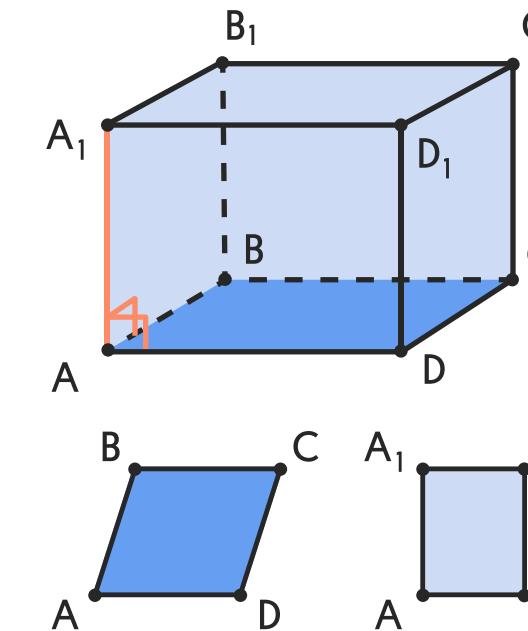
свойства параллелепипеда



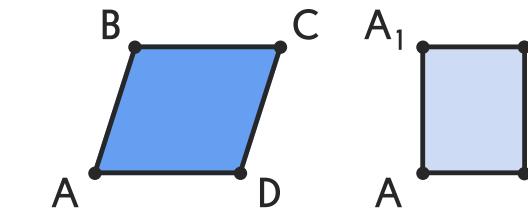
- ▶ все высоты параллелепипеда равны

- ▶ диагонали параллелепипеда точкой пересечения делятся пополам

прямой параллелепипед



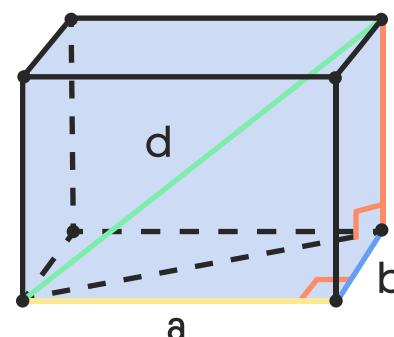
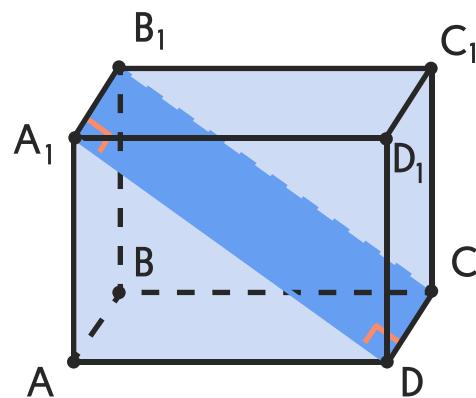
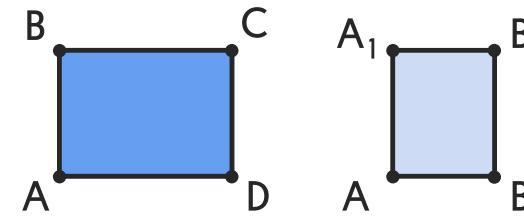
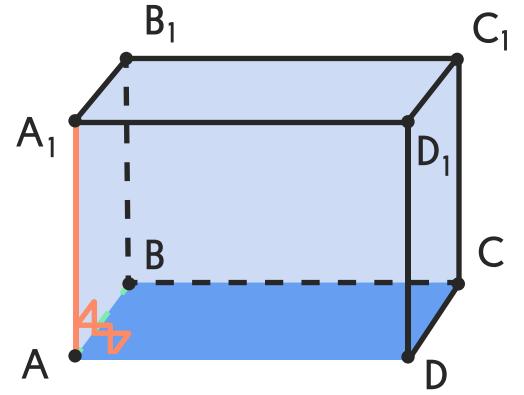
- ▶ у прямого параллелепипеда боковое ребро \perp основанию параллелепипеда и является высотой



- ▶ боковые грани прямого параллелепипеда — прямоугольники, а основания — параллелограммы

C

прямоугольный параллелепипед



у прямоугольного параллелепипеда все грани прямоугольники

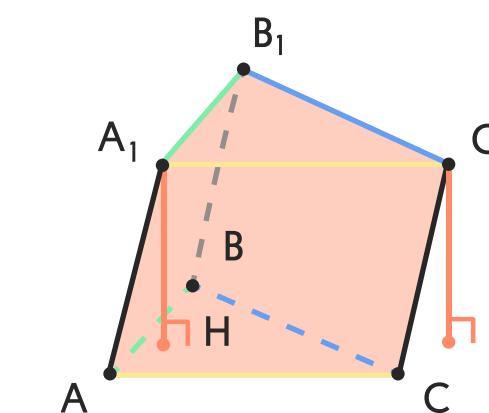
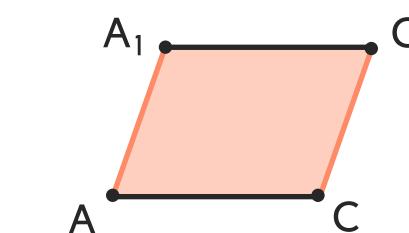
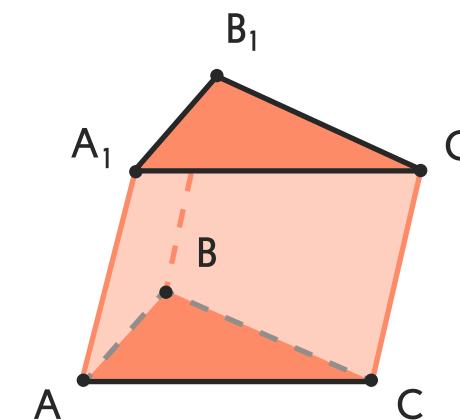
► любое ребро прямоугольного параллелепипеда является его высотой

► диагональное сечение прямоугольного параллелепипеда — прямоугольник

► квадрат диагонали параллелепипеда равен сумме квадратов трех сторон

C

свойства призм



► основания призмы равны и параллельны

► боковые грани призмы параллелограммы

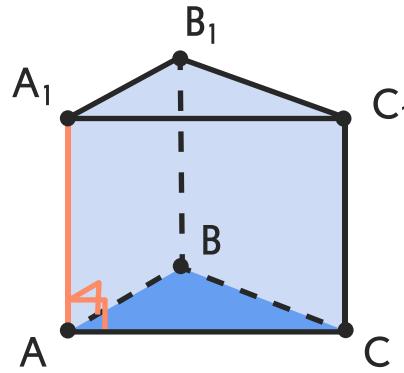
► боковые ребра призмы равны

► соответственные ребра оснований призмы равны

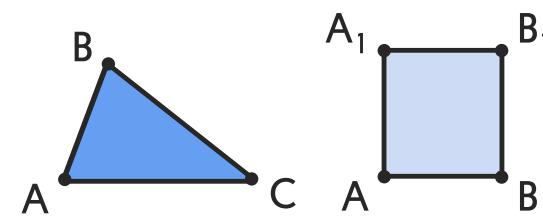
► все высоты призмы равны

C

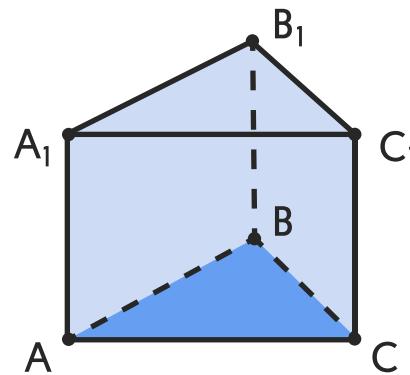
виды призм



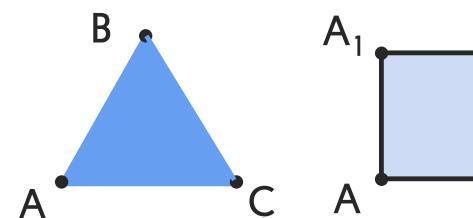
► у правой призмы
боковое ребро \perp основанию
и является высотой



► боковые грани правой
призмы — прямоугольники



правильная призма —
это правая призма, в
основании которой
правильная фигура



► боковые грани
правильной призмы — равные
прямоугольники

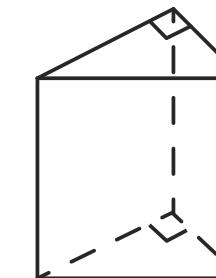
C

задачи на призмы

задание 3

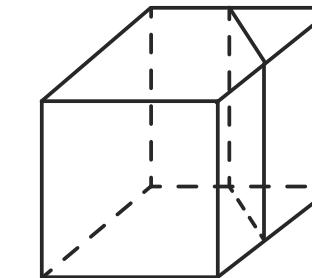
1

Основанием правой треугольной призмы служит прямоугольный
треугольник с катетами 9 и 40, боковое ребро равно 50.
Найди площадь боковой поверхности призмы.



2

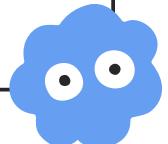
Объём правой треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью,
проходящей через середины двух рёбер из одной вершины, и
параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины,
равен 9. Найди объём куба.



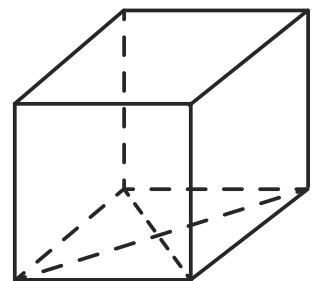
задания на призмы

задание 3

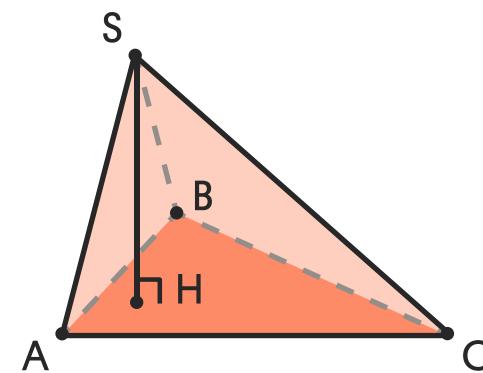
- 3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 15$, $AD = 12$, $AA_1 = 16$. Найди площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .



- 4 Найди площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 9 и 12, и боковым ребром, равным 5.

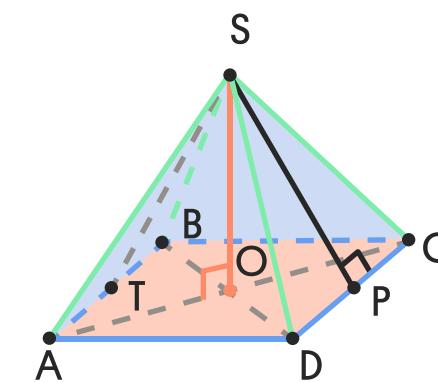


Свойства пирамид

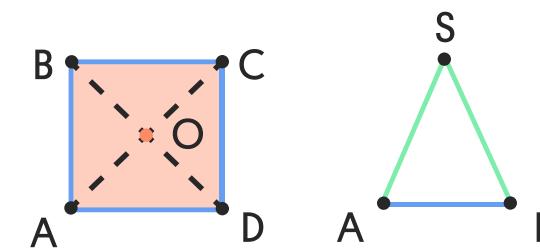


- ▶ боковые грани пирамиды — треугольники
- ▶ пирамида имеет единственную высоту, выходящую из вершины

правильная пирамида



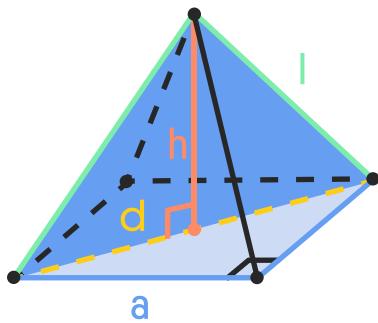
у правильной пирамиды в основании правильная фигура, и высота падает в центр этой фигуры



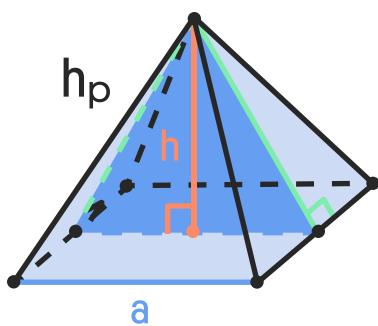
- ▶ О — центр вписанной окружности
- ▶ боковые ребра и апофемы правильной пирамиды равны

апофема — высота боковой грани

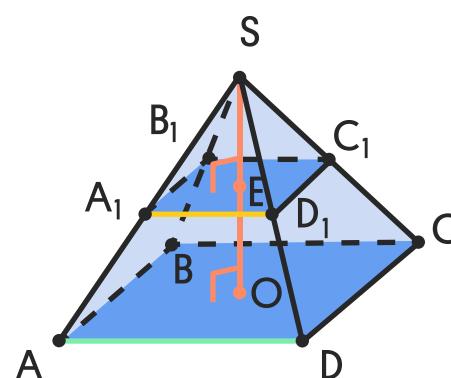
Элементы пирамид



- в правильной четырехугольной пирамиде высоту можно найти через боковое ребро и сторону основания

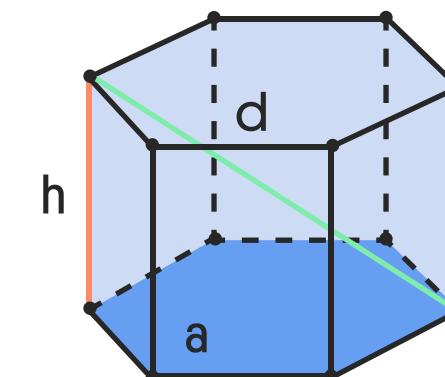


- в правильной четырехугольной пирамиде высоту можно найти через апофему и сторону основания

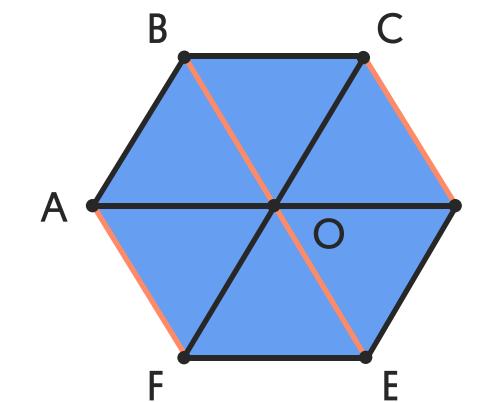


- сторона сечения параллельного основанию относится к стороне основания как отрезки, на которые разделена высота

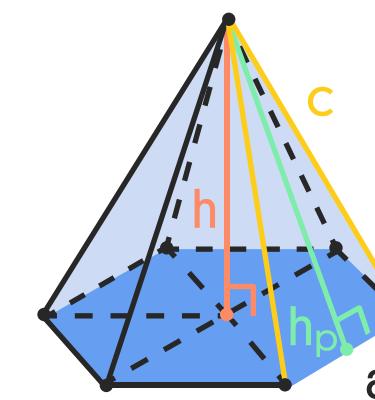
правильные шестиугольные



- в правильной шестиугольной призме диагональ образует с боковым ребром прямоугольный треугольник



- диагональ правильного шестиугольника параллельна его противолежащим сторонам

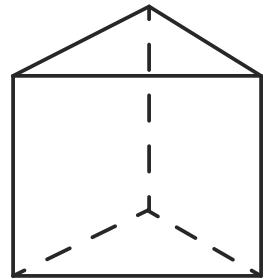


- апофема правильной шестиугольной пирамиды падает в середину ребра основания, а высота на пересечение диагоналей

задачи на пирамиды

задание 3

- 5** Найди объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, A₁, C₁ правильной треугольной призмы ABCA₁B₁C₁, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 9.

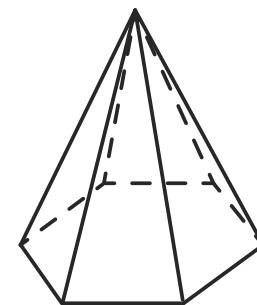


- 6** В правильной четырехугольной пирамиде SABCD точка O — центр основания, S — вершина, SC = 5, AC = 6. Найди длину SO.

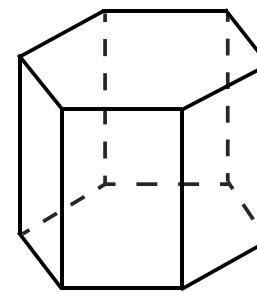
задачи на пирамиды

задание 3

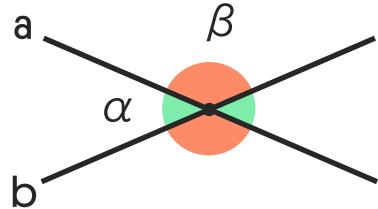
- 7** Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 18, боковые ребра равны 41. Найди площадь боковой поверхности этой пирамиды.



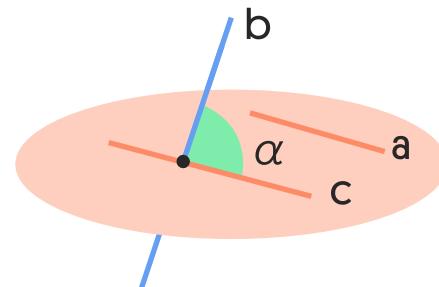
- 8** Найди объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны $3\sqrt{3}$.



УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

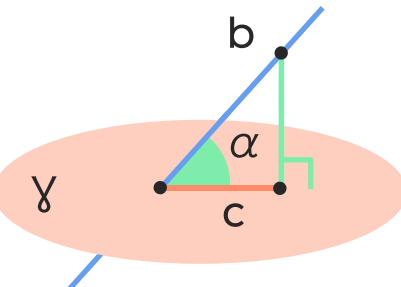


углом между прямыми в плоскости считается наименьший угол из двух смежных углов



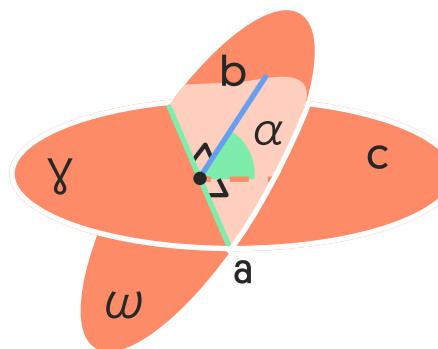
- скрещивающиеся прямые не лежат в одной плоскости

угол между скрещивающимися прямыми определяем с помощью параллельного переноса

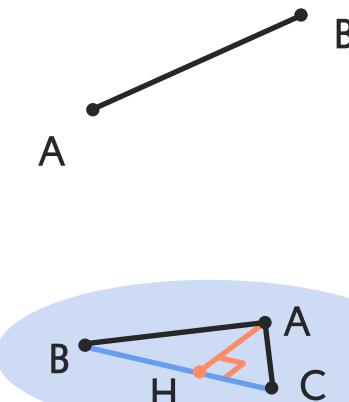


угол между прямой и плоскостью — это угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость

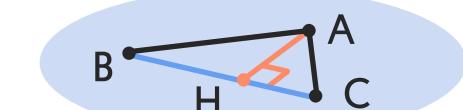
УГЛЫ И РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ



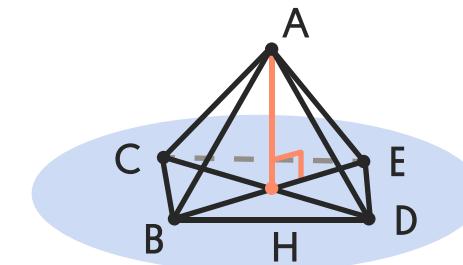
двуугранный угол между плоскостями определяется линейным углом этого двуугранного угла



расстояние между двумя точками в пространстве — это отрезок между ними



расстояние от точки до прямой — это высота треугольника на точке и этой прямой



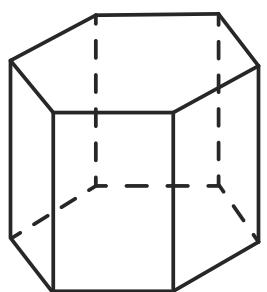
расстояние от точки до прямой — это высота пирамиды, построенной на точке и этой плоскости

задачи на комбинации тел

задание 3

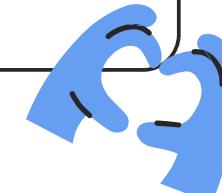
9

- В правильной 6-угольной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра которой равны 8. Найди угол между прямыми FA и D_1E_1 . Ответ дай в градусах.

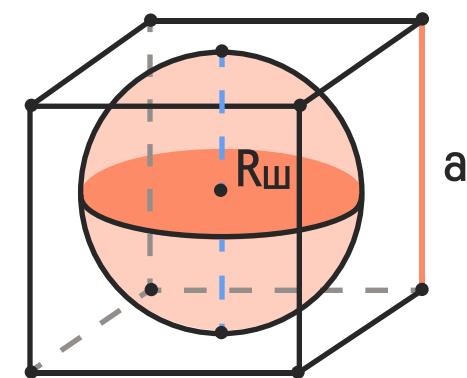


10

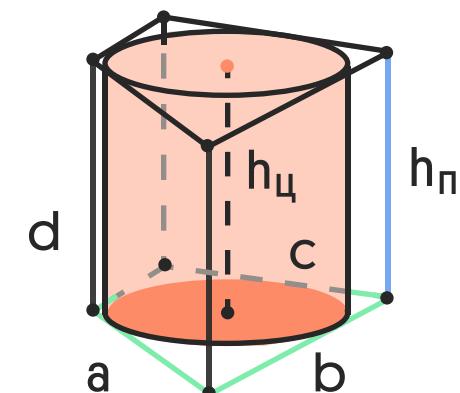
- В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 17, а сторона основания равна 8. Найди расстояние от вершины до плоскости основания



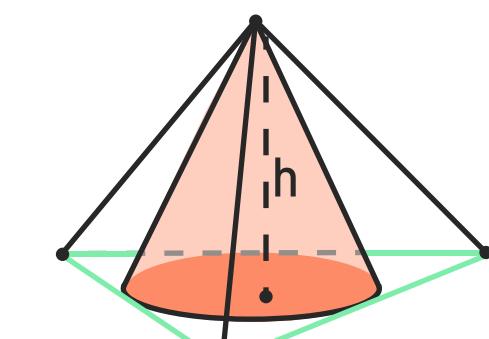
вписаные фигуры



шар вписан в параллелепипед, если это куб, и диаметр шара равен стороне куба

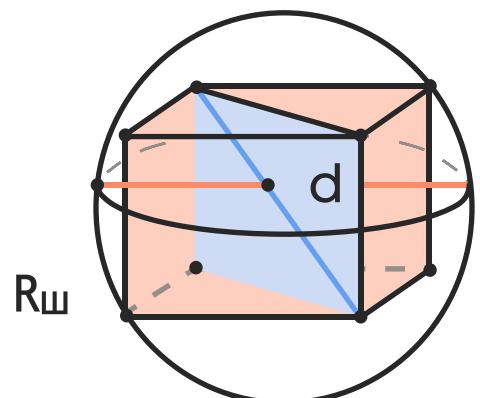


цилиндр вписан в прямую призму, если их высоты равны, а в основание призмы можно вписать окружность

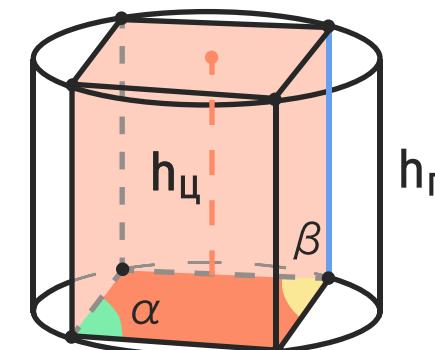


конус вписан в пирамиду, если их высоты совпадают, а в основание пирамиды можно вписать окружность

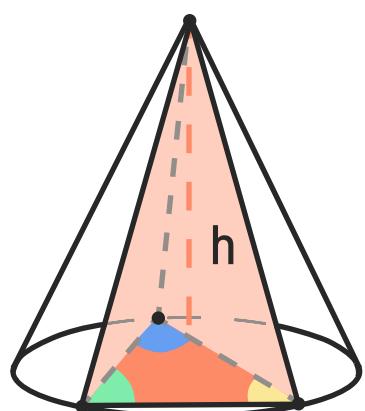
описанные фигуры



шар описан около параллелепипеда, если диагональ параллелепипеда равна диаметру шара



цилиндр описан около прямой призмы, если их высоты равны, а вокруг основания призмы можно описать окружность



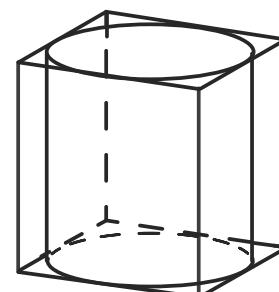
конус описан около пирамиды, если их высоты совпадают, а вокруг основания пирамиды можно описать окружность

задачи на комбинации тел

задание 3

11

Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 3,5. Объем параллелепипеда равен 24,5. Найди высоту цилиндра.



12

Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 3 и высотой 13. Найди его объем, деленный на π.





текстовые задачи

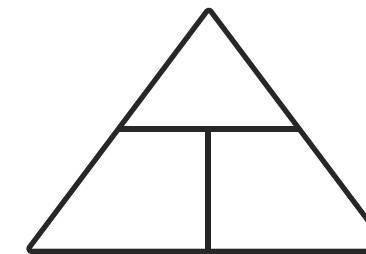
движение по прямой

скорость — это отношение расстояния ко времени

$$V = \frac{s}{t}$$

расстояние

время



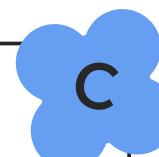
$$s = \quad t =$$

единицы измерения

- все задачи решаем при условии, что мы находимся в одних единицах измерения

$$[s] = [\text{км}] \xrightarrow{x} [s] = [\text{м}]$$

$$[t] = [\text{ч}] \xrightarrow{x} [t] = [\text{мин}] \xrightarrow{x} [t] = [\text{с}]$$



переводим [км/ч] в [м/с]

$$\left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right) \times \boxed{} = \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$$

разделить
на 3,6

$$[v] = 54 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right) \xrightarrow{x} [v] = \bigcirc \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$$

$$[v] = 9 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right) \xrightarrow{x} [v] = \bigcirc \left(\frac{\text{м}}{\text{мин}} \right)$$

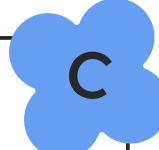
переводим [м/с] в [км/ч]

$$\left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) \times \boxed{} = \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$$

умножить
на 3,6

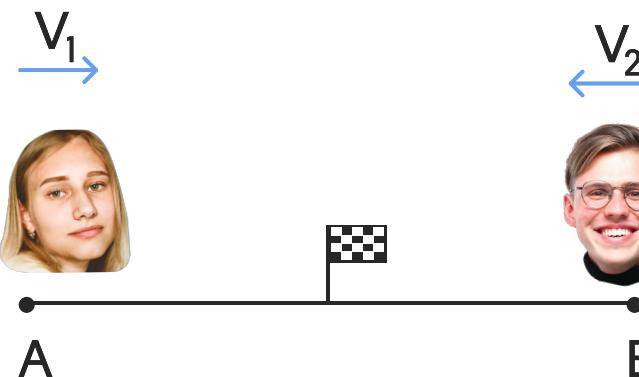
$$[v] = 5 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) \xrightarrow{x} [v] = \bigcirc \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$$

$$[v] = 15 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) \xrightarrow{x} [v] = \bigcirc \left(\frac{\text{км}}{\text{мин}} \right)$$



относительное движение

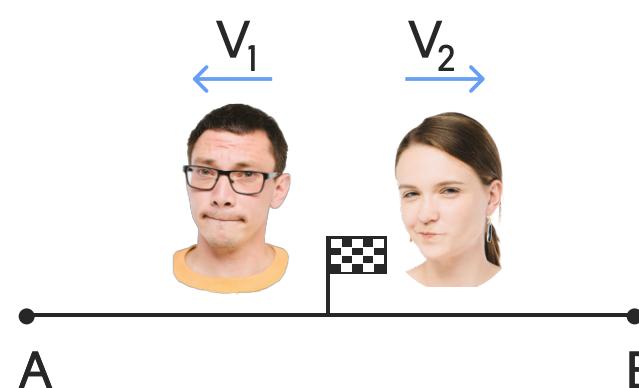
► движение навстречу друг другу



скорость сближения

$$V_{\text{сб}} = V_1 + V_2$$

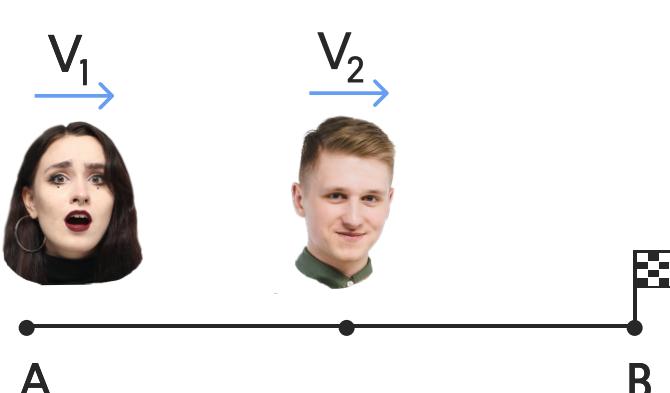
► движение в противоположных направлениях



скорость удаления

$$V_{\text{уд}} = V_1 + V_2$$

► движение в одном направлении



скорость догоняния

$$V_{\text{отн}} = V_1 - V_2$$

задачи без таблицы

задание 10

1

Из двух городов, расстояние между которыми 320 км, навстречу друг другу одновременно выехали для автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорость равна 75 км/ч и 85 км/ч?



2

Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 0,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между ними станет 25 метров?

задачи на протяженные тела

задание 10

- 3 Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 400 метров, за 39 секунд. Найди длину поезда в метрах.

задачи на протяженные тела

задание 10

- 4 По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирским и товарный поезда, скорости которых равна соответственно 90км/ч и 30км/ч. Длина товарного поезда равна 900 метрам. Найди длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, ровно 1 минуте 3 секундам. Ответ дай в метрах.

алгоритм задач с таблицей

а

Автомобиль выехал со скоростью 72 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 372 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми 270 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найди скорость мотоциклиста. Ответ дай в км/ч.

1 рисуем картинку

2 добавляем известные
данные и неизвестные

3 заполняем таблицу

алгоритм задач с таблицей

а

4 получаем уравнение
с помощью условия

5 решаем уравнение
и находим неизвестное

6 записываем ответ
с учетом вопроса

!!! проверяем вычисления

задача на движение по прямой

задание 10

- 5 Расстояние между городами К и Е равно 470 км. Из города К в город Е со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города Е выехал со скоростью 85 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города К автомобили встретятся? Ответ дай в километрах.



задача на движение по прямой

задание 10

- 6 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 240 км. На следующий день он отправился обратно в А со скоростью на 1 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 1 час. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ в км/ч.

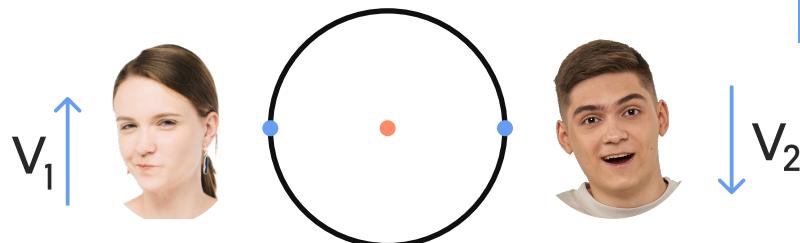




текстовые задачи

движение по кругу

► движение в одном направлении



скорость догоняния

$$V_{\text{отн}} = V_1 - V_2$$

φ



в диаметрально противоположных точках значит,
что между объектами половина длины окружности

задачи на движение по кругу

задание 10

- 1 Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 5 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного на 5 км/ч больше скорости другого?

задачи на движение по кругу

задание 10

- 2 Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист, а через 30 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 44 минуты после этого догнал его во второй раз. Найди скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 33 км. Ответ дай в км/ч.

задачи на движение по воде

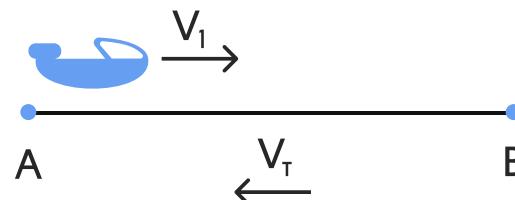
задание 10

3

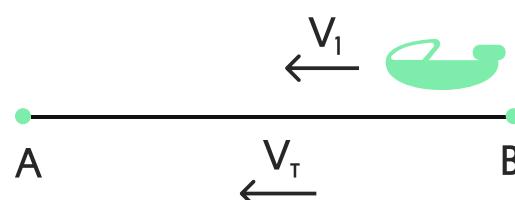
Моторная лодка прошла против течения реки 99 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дай в км/ч.

движение по реке

► если в задаче написано, что **движение в стоячей воде** или в озере, значит, **течения нет**, и решаем задачу на движение по прямой



против течения
 $V_{\text{пр}} = V_1 - V_t$



по течению
 $V_{\text{по}} = V_1 + V_t$

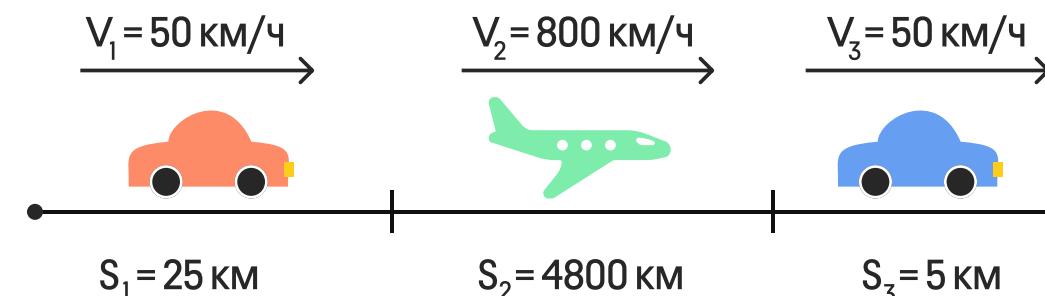
задачи на движение по воде

задание 10

4

Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00 того же дня. Определи [в км/час] скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

средняя скорость движения



средняя скорость — это отношение всего пройденного пути ко всему затраченному времени

$$V_{cp} = \frac{S_o}{t_o}$$

весь путь

всё время

Привет, это Эйджей!

Тут в скрипте осталось место и решил тебе написать, и сказать, что ты — кайф! Если вдруг ты чувствуешь, что сейчас становится тяжело, и немного заканчивается мотивация, то это нормально. Чем ближе к зиме, тем организм стремится сохранить больше энергии, но ты большой молодец, или огромная умница, потому что ты не смотри ни на что продолжаешь заниматься и на шаг ближе к своей цели. Я тобой сильно горжусь!



задачи на среднюю скорость

задание 10

- 5 Первые 110 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 130 км — со скоростью 100 км/ч, а затем 180 км — со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

задачи на среднюю скорость

задание 10

- 6 Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 120 км/ч, вторую треть — со скоростью 50 км/ч, а последнюю — со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дай в км/ч.



текстовые задачи

формулы простого %

Дима внес 25% уставного капитала, составляющего 100 000 рублей, который увеличился на 45%

- если число S_1 — это $p\%$ от числа S , то

$$S = 100\%$$

$$S_1 = p\%$$



- если число S_1 — это $p\%$ от числа S , то

$$S_1 = S \cdot \frac{p\%}{100\%}$$

- если число S_2 — это число S , измененное на $p\%$, то

$$S_2 = S \cdot \left(1 + \frac{p\%}{100\%}\right)$$

задачи на проценты

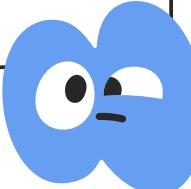
задание 10

1

Семь одинаковых рубашек дешевле куртки на 9%. На сколько процентов восемь таких же рубашек дороже куртки?

2

В 2008 году в городском квартале проживало 30000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 9%, а в 2010 году на 5% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

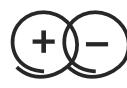


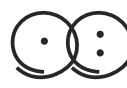
действия в системах

$$3x + 4y = 1$$

$$y = \boxed{\quad \quad \quad}$$

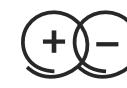
в одном уравнении

 переносить слагаемые

 умножать на число $\neq 0$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases}$$

в системах уравнений

 складывать уравнения

 умножать уравнения

с

способы решения систем

подстановка уравнений

сложение уравнений

задачи на проценты

задание 10

3

Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 52%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 2%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зп жены?

формула концентрации

масса — это количество вещества



концентрация — это процент содержания порошка в смеси



$$C = \frac{m_B}{m} \cdot 100\%$$

в пределах

$$\leq C \leq$$

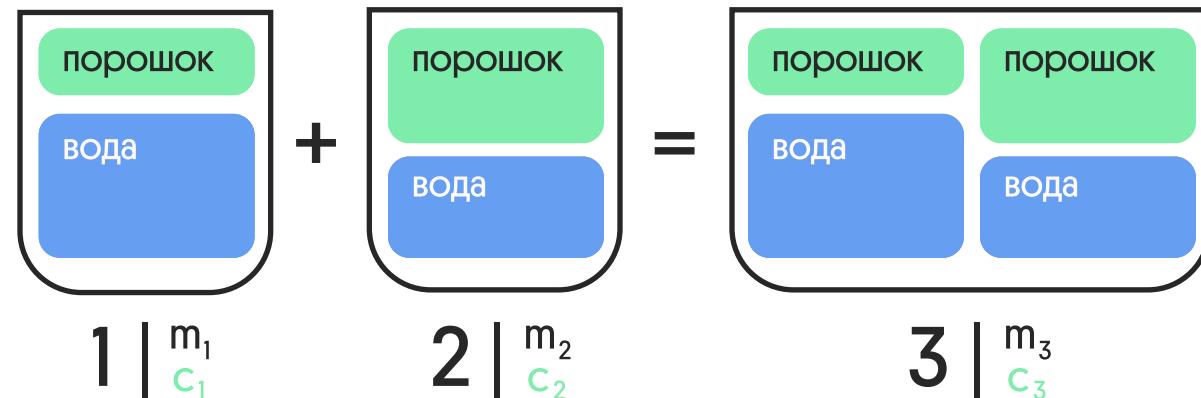
$$\leq C \leq$$

масса вещества

масса смеси

- 4 Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда нужно для получения 6 кг изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм всего содержит 5% воды?

закон сохранения масс



при смешивании растворов итоговая масса смеси равна сумме масс составляющих смесь растворов

► для всего раствора

при смешивании растворов итоговая масса основного вещества равна сумме масс основного вещества в составляющих растворах

► для растворенного вещества

► через концентрацию

алгоритм задач на смеси

а

Имеется два раствора. Первый содержит 5% активного вещества, а второй 40% активного вещества. Из этих двух растворов с помощью смешивания получили третий массой 175 кг, содержащий 30% активного вещества. На сколько килограммов масса первого раствора была меньше массы второго?

1 рисуем картинки смешивания

2 добавляем известные и неизвестные данные

3 составляем соотношения закона сохранения масс

алгоритм задач на смеси

а

4 из соотношений получаем уравнение или систему уравнений

!!! решаем в % или дробях

5 записываем ответ с учетом вопроса

!!! проверяем условие



задачи на два смешивания

задание 10

5

Смешав 11-процентный и 72-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 31-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 51-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 11-процентного раствора использовали для получения смеси?



текстовые задачи

совместная работа

Производительность — это скорость выполнения работы

$$P = \frac{A}{t}$$

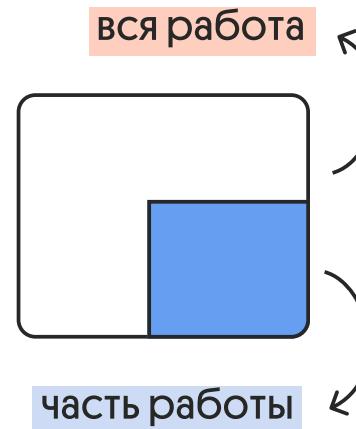
вся работа

работа

время

$A =$

$t =$



движение и работа

V скорость \longrightarrow P производительность

S путь \longrightarrow A работа

t время \longrightarrow t время



задачи на производительность

1

На изготовление 486 деталей первый рабочий затрачивает на 9 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 621 детали. Первый рабочий за час делает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?



Свойства производительности

рисунок

свойство

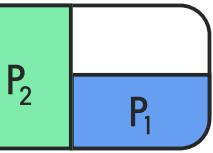
формула

A.

если всю работу сложно измерить в обычных величинах, то обозначаем ее за 1

 $A_1 = P_1$

тогда производительность — это часть сделанной работы за единицу времени, число в промежутке от 0 до 1



если работу выполняют несколько участников, то совместная производительность равна сумме производительностей каждого

задачи на свойства работы

задание 10

2

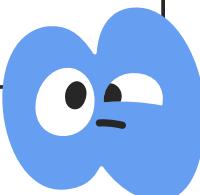
Один мастер может выполнить заказ за 6 часов, а другой — за 3 часа. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

задачи на свойства работы

задание 10

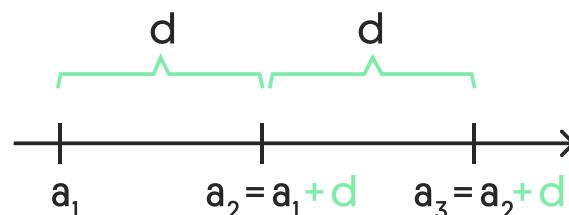
3

Первая труба наполняет резервуар на 48 минут дольше, чем вторая. Обе трубы, работая одновременно, наполняют этот же резервуар за 45 минут. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?



арифметическая прогрессия

арифметическая прогрессия — это числовая последовательность, в которой каждый член отличается от предыдущего на одно и то же число



a_1 — первый член

d — разность

$d > 0$ — возрастающая

$d < 0$ — убывающая

формулы арифм. прогрессии

члены прогрессии

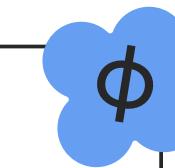
$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

сумма прогрессии

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$



задачи на арифм. прогрессию

4

Кристина Спенсер и Дима Магеллан внезапно красят забор длиной 810 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме они покрасили 180 метров забора. Определи, сколько дней такая бригада маляров красила весь забор.

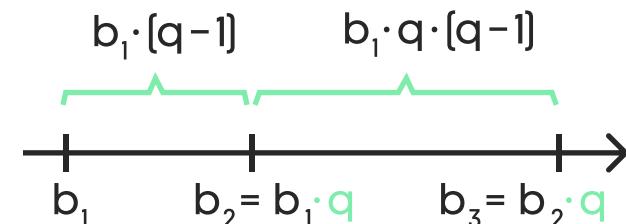
задачи на арифм. прогрессию

задание 10

- 5 Ире Годуновой надо подписать 880 открыток для Фила. Ежедневно она подписывает на одно и тоже количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Ира подписала 10 открыток. Определи, сколько открыток было подписано за восьмой день, если вся работа была выполнена за 16 дней.

геометрическая прогрессия

геометрическая прогрессия — это числовая последовательность, в которой каждый член отличается от предыдущего в одно и тоже число



b_1 — первый член

q — знаменатель

$q > 0$ — знакопостоянная

$q < 0$ — знакопеременная

формулы геом. прогрессии



члены прогрессии

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

сумма прогрессии

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_n = \frac{b_1}{1-q}$$

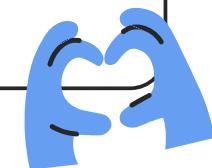
бесконечно
убывающая
прогрессия

задачи на геом. прогрессию

задание 10

6

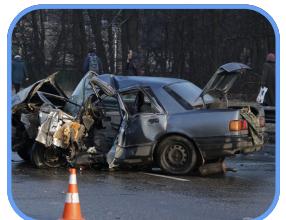
Бизнесмен Коржов получил в 2000 году прибыль в размере 1 400 000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 20% по сравнению предыдущим годом. Сколько рублей заработал Коржов за 2004 год?





теория вероятностей

вероятности в жизни



@MATEMATIKAJ

понятия теории вероятностей

испытание — это действие, процесс, который происходит



событие — это возможный результат испытания



благоприятное событие — это событие, которое просят найти



С

свойства вероятностей

рисунок

P_■

P

P[−A] P[A]

свойство

вероятность всех возможных событий в испытании равна 1

вероятность — это число в промежутке от 0 до 1

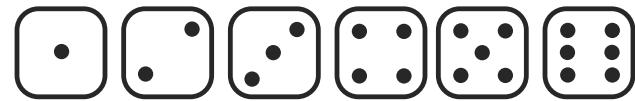
противоположными называют события, когда в испытании точно происходит одно из них

формула

округление вероятностей



монетки



кубики

с

задачи на формулу вероятности

задание 4

- 1** В чемпионате по гимнастике участвуют 60 спортсменок: 16 из Чехии, 17 из Словакии, остальные из Австрии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найди вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Австрии.

задачи на формулу вероятности

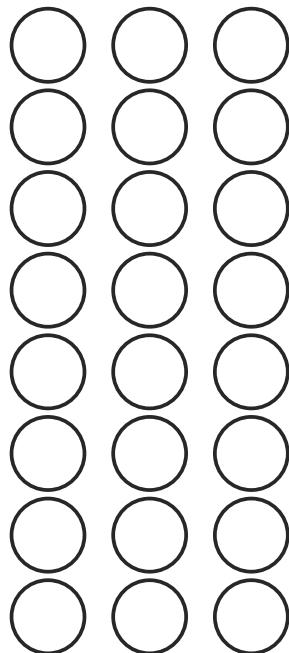
задание 4

- 2** Фабрика выпускает сумки. В среднем 2 сумки из 120 имеют скрытые дефекты. Найди вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов. Результат округли до сотых.

- 3** При производстве в среднем на каждые 1980 исправных насосов приходится 20 неисправных. Найди вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

МОНЕТЫ И КУБИКИ

монету бросают 3 раза, найди вероятность



- ▶ орел выпадет хотя бы 1 раз
- ▶ орел не выпадет ни разу
- ▶ орел выпадет хотя бы 2 раза

кубик бросают 2 раза, найди вероятность



- ▶ выпадет ровно 12 очков
- ▶ выпадет самое частое число очков
- ▶ выпадет хотя бы 11 очков



НОВЫЕ ЗАДАЧИ НА ВЕРОЯТНОСТЬ

задание 4

4

Игральную кость бросили два раза. Известно, что два очка не выпали ни разу. Найди при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 10».



5

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?



алгоритм задач на вероятность

а

1 рисуем картинку
к задаче

2 находим количество
всех событий

3 считаем число bla-
гоприятных событий

4 считаем вероятность
по основной формуле

5 записываем ответ
с учетом вопроса

!!! проверяю окружление

задачи на формулу вероятности

задание 4

- 6** Механические часы с циферблатом в какой-то момент сло-
мались и перестали идти. Найди вероятность того, что часовая
стрелка остановилась, достигнув отметки 9, но не дойдя до 12.

- 7** Конкурс по анекдотам проводится в 5 дней. Всего заявлено
75 выступлений — по одному от каждой страны, участвующей
в конкурсе. Исполнитель из России Марк Ламарк участвует
в конкурсе. В первый день 27 выступлений, остальные распре-
делены поровну между оставшимися днями. Порядок выступ-
лений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что
выступление Марка состоится в третий день конкурса?



задачи на формулу вероятности

задание 4

- 8** Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участниц разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 36 спортсменок, среди которых 8 участниц из России, в том числе Валерия Энгельс. Найди вероятность того, что в первом туре Валерия будет играть с какой-либо спортсменкой из РФ.



- 9** За круглый стол на 126 стульев в случайном порядке рассаживаются 124 мальчика и 2 девочки. Найди вероятность того, что между двумя девочками будет сидеть мальчик.

задачи на формулу вероятности

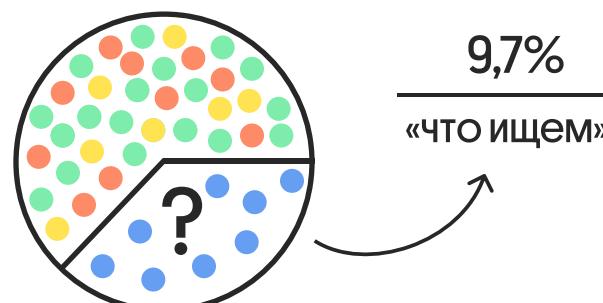
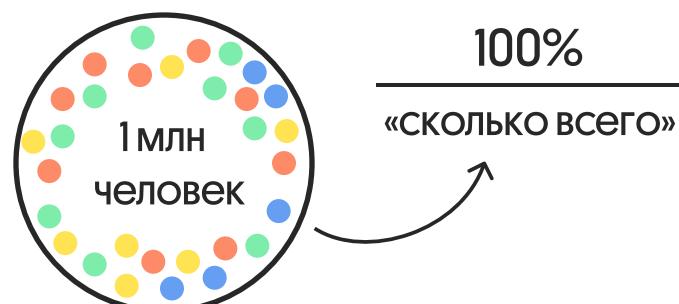
задание 4

- 10** В группе 21 человек, среди них Снежа и Кас. Группу случайным образом делят на 7 одинаковых по численности подгрупп. Найди вероятность того, что ребята окажутся в одной вместе.

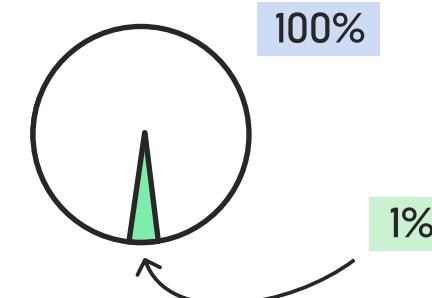


теория вероятностей

нахождение процента от числа



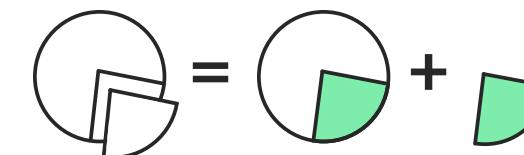
определение процента



один процент от числа
— это одна сотая числа

свойства процентов

- увеличилось на некоторое количество процентов



- уменьшилось на некоторое количество процентов



дробь и процент

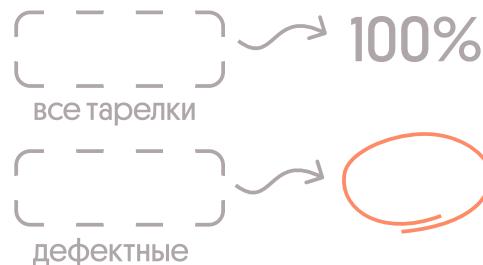
любой процент можно представить в виде десятичной дроби для этого его нужно просто разделить на 100%

формулы процентов



На фабрике посуды 10% тарелок из 560 произведённых на ней имеют дефект. Сколько тарелок с дефектом?

пропорция



формула

$$\text{дефектные тарелки} = \text{_____} \cdot \text{все тарелки}$$

Агрофирма покупает x процентов из 500 куриных яиц у одного хозяйства. Сколько яиц покупается из хоз-ва?

пропорция



формула

$$\text{купленные яйца} = \text{_____} \cdot \text{все яйца}$$

задачи на процент и вероятность

задание 5

1

На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 55% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найди вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округли до тысячных.



задачи на процент и вероятность

задание 5

- 2 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 30% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найди вероятность того, что яйцо, купленное у агрофирмы, будет из первого хозяйства.

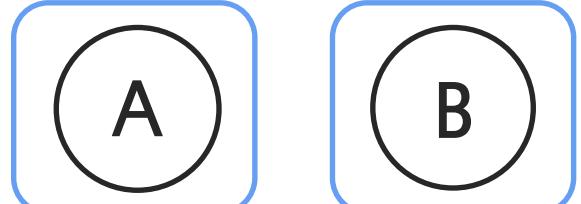
задачи на процент и вероятность

задание 5

- 3 В городе 38% взрослого населения мужчины. Пенсионеры составляют 18,8% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найди вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».



независимые события



$$A \parallel B = A \cdot B$$

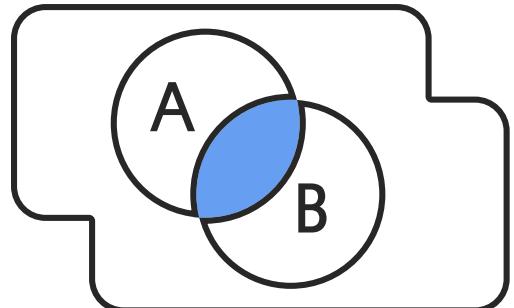
Ф

независимые события — это такие, в которых вероятность появления одного не влияет на вероятность другого

► пример: бросаем монету два раза

формула произведения независимых событий

зависимые события



зависимые события — это такие у которых наступление одного влияет на вероятность другого

► пример: бросаем монету, два раза, но устаем после первого

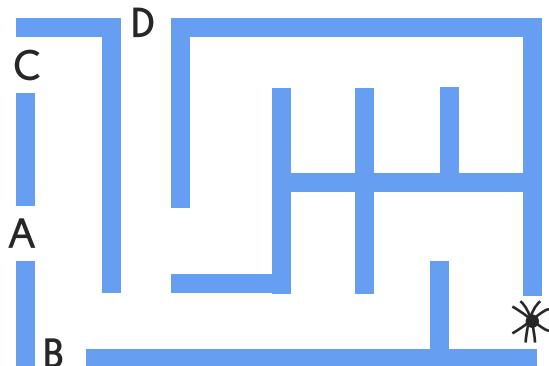
формула произведения зависимых событий

задачи на независимые события

задание 4

4

Паук заползает в лабиринт. Развернуться и ползти назад паук не может. На каждом разветвлении паук выбирает путь, по которому ещё не полз. Выбор дальнейшего пути случаен. С какой вероятностью паук придёт к выходу D?



5

Биатлонист 5 раз стреляет по мишням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найди вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округли до сотых.



задачи на независимые события

задание 4

- 6** Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы за год равна 0,07. Найди вероятность того, что за год хотя бы одна лампа не перегорит.

несовместные события



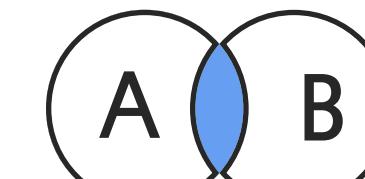
несовместные события — это такие, которые не могут произойти вместе в одном испытании

- пример: бросаем 1 кубик, не может выпасть одновременно 3 и 6

$$\boxed{A \cap B} = A + B$$

формула суммы
несовместных событий

совместные события



совместные события — это такие, которые могут происходить вместе в одном испытании

- пример: бросаем 2 кубика, на одном выпало 3, а на другом — 6

$$\boxed{A \cup B} = A + B - \boxed{}$$

формула суммы
совместных событий

задачи на совместные события

задание 4

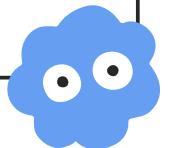
- 7** На экзамене по геометрии парниша отвечает на один вопрос из списка. Вероятность того, что попадется вопрос по окружностям равна 0,15. Вероятность того, что вопрос по тригонометрии равна 0,3. Вопросов, которые относятся сразу к двум темам, нет. Найди вероятность того, что парнише достанется вопрос по одной из этих двух тем.

задачи на совместные события

задание 4

8

Вероятность того, что новый пылесос прослужит от года до двух, равна 0,08. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,84. Найди вероятность того, что он прослужит меньше года.



9

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,35. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найди вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.





теория вероятностей

смешанные события

в разных испытаниях,
идущих друг за другом

и

в одном испытании

или

- ▶ независимые
- ▶ зависимые

- ▶ несовместные
- ▶ совместные

бросаем кубик 2 раза подряд, какова
вероятность выпадения 3 или 6 в каждом броске?

первый
бросок

умножаем

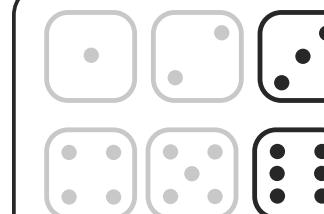
второй
бросок

складываем

складываем

смешанные события

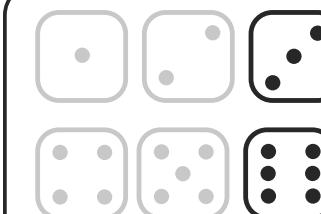
первый бросок



складываем

умножаем

второй бросок



складываем

задача на линии и батарейки

задание 5

1

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует не-исправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найди вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована.

задача на команды и очки

задание 5

- 2 Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Команда, которая выигрывает получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найди вероятность того, что команда удастся выйти в следующий круг соревнований. Считай, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,2.

задача на фломастеры

задание 5

- 3 В коробке 9 синих, 4 красных и 12 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?



задача на волшебную страну

задание 5

- 4 В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,7 погода завтра будет такой же, как и сегодня. 16 сентября погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 19 сентября в Волшебной стране будет отличная погода.



задача на патроны

задание 5

- 5 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,3 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?

задача на кубик

задание 5

- 6** Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысит число 3. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно 3 броска? Округли до сотых.

задача на поступление

задание 5

- 7** Чтобы поступить в институт на специальность «Международные отношения», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 72 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Таможенное дело», нужно набрать не менее 72 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент 2021 года получит не менее 72 баллов по математике, равна 0,5, по русскому языку — 0,8, по иностранному языку — 0,5 и по обществознанию — 0,6. Найди вероятность того, что абитуриент сможет поступить на одну из двух специальностей.



Новая задача на блюдца

задание 5

8

В кафе на одной полке в случайном порядке стоят 50 чайных чашек: 30 зелёных, 10 красных и 10 синих. На другой полке в случайном порядке стоят 50 блюдец: 30 зелёных, 10 красных и 10 синих. Найдите вероятность того, что случайно выбранные чашка и блюдце будут одинакового цвета.

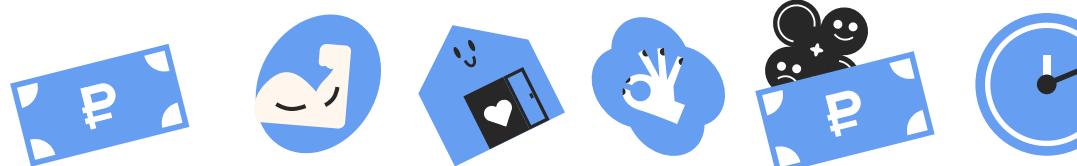




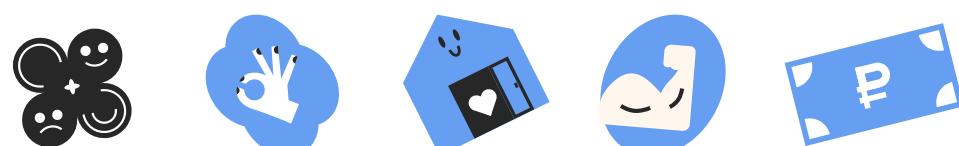
Экономические

термины экономики

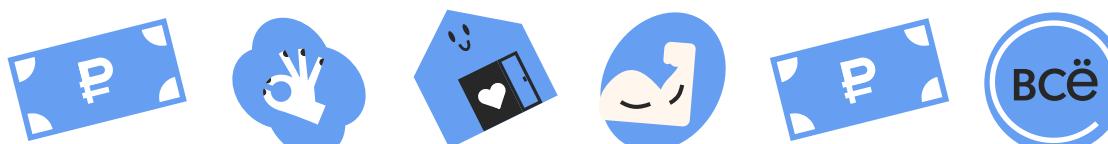
и



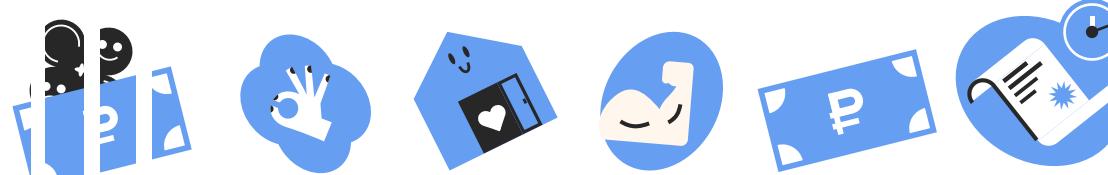
Кредит — это деньги, которые мы берем у банка, чтобы вернуть с % через определенное время



Проценты по кредиту — это процент, который мы отаем в банк за то, что взяли деньги



Долг — это деньги, которые мы должны банку за то, что взяли кредит [за все время]



Платёж — это часть денег с %, которые мы отаем в банк за то, что взяли кредит [по графику, в определенное время]

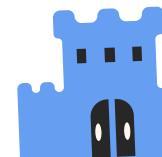
экономические формулы

С



мы платим

$$\text{долг} - \underline{\hspace{2cm}} = \text{остаток долга}$$

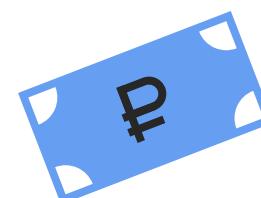


банк начисляет

$$\text{остаток долга} \cdot \left(1 + \frac{\underline{\hspace{1cm}}}{\underline{\hspace{1cm}}} \right) = \text{долг}$$

переводим формулы в таблицу

период	долг с процентами	выплата	остаток долга
текущий			
новый			



алгоритм задач на кредиты

а

Светлана Михайловна взяла кредит в банке на 4 года на сумму 4 420 000 рублей. Условия возврата кредита: в конце каждого года банк увеличивает текущую сумму долга на 10%. Светлана Михайловна хочет выплатить весь долг двумя равными платежами — в конце второго и четвертого годов. При этом платежи в каждом случае выплачиваются после начисления процентов. Сколько рублей составит каждый из этих платежей?

0 рисуем схему движения денег

1 добавляем известные данные и неизвестные

2 заполняем таблицу для кредита

1 столбец	2 столбец	3 столбец	4 столбец

алгоритм задач на кредиты

а

3 по таблице получаем математическую модель (уравнение или неравенство)

!!! учитываем условие

4 подставляем значения и упрощаем выражение

5 записываем ответ и проверяем его

!!! проверяем логику



задача на сравнение кредитов

задание 16

1

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 75 000 руб, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 123 000 руб, то кредит будет полностью погашен за 2 года.

Найди r .



кредит с решением в рублях

задание 16

2

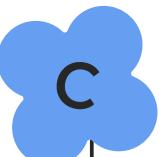
Савелий хочет взять в кредит 1,4 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Савелий взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 330 тысяч рублей?





Экономические

равные платежи vs уменьш. долг



название

не используем

$$P_1 = P_2 = x$$

платежи

$$P_1 \neq P_2$$

$$\Delta S_1 \neq \Delta S_2$$

долг

$$\Delta S_1 = \Delta S_2$$

две схемы заполнения таблиц

схема	сразу заполняем	считаем по формулам	создаем уравнение
равные платежи			
уменьш. долг			

кредит с таблицей

задание 16

1

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
долг (в %)	100	90	80	70	60	50	0

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?



кредит с равномерным долгом задание 16

- 2 Антон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найди месячную процентную ставку.



кредит с равномерным долгом

задание 16

3

В июле клиент планирует взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на некоторый срок [целое число лет]. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планирует клиент взять кредит, если наибольший годовой платёж составит 1,8 млн рублей?





Экономические

прогрессия в кредитах

С

если в задаче долг убывает равномерно, то столбец остаток долга — арифметическая прогрессия

$$s_3 = s_2 - d \quad s_2 = s_1 - d \quad s_1$$

$$s_{n+1} = s_n - d$$

период	долг с процентами	выплата	остаток долга
прошлый	$s_0 k$	p_1	$s_1 = s_0 - d$
текущий	$s_1 k$	p_2	$s_2 = s_1 - d$
новый	$s_2 k$	p_3	$s_3 = s_2 - d$

столбец долга с процентами — арифм. прогрессия, как прогрессия, умноженная на число, а столбец выплат тоже является арифметической прогрессией, как разность двух арифметических прогрессий

$$p_3 = p_2 - t \quad p_2 = p_1 - t \quad p_1$$

$$p_n = \frac{(p_1 + p_n)}{2} \cdot n$$

кредит с прогрессией

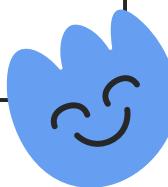
задание 16

1

Алексей взял кредит в банке на срок 17 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется $r\%$ этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц. Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 27% больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найди r .

кредит с процентом суммы задание 16

- 2 Сергей взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Сергеем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила сумма, уплаченная Сергеем банку сверх кредита?



кредит с частью суммы

задание 16

3

- 15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 2,4 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно выплатить банку в первые 12 месяцев?





ЭКОНОМИЧЕСКИЕ

кредит с разными платежами

задание 16

- 1 марта 2010 года Аркадий взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 марта каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Аркадий переводит в банк платеж. Весь долг Аркадий выплатил за 3 платежа, причем второй платеж оказался в два раза больше первого, а третий – в три раза больше первого. Сколько рублей взято в кредит, если за три года банку выплачено 2 395 800 рублей?



кредит с неравенством

задание 16

2

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найди r , если известно, что наибольший платёж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший — не менее 0,5 млн рублей.



кредит с двумя процентами

задание 16

3

В июле 2025 года планируется взять кредит на 600 тыс. рублей.

Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 13% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг возрастает на 12% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равна сумма всех выплат?



кредит с двумя процентами

задание 16

4

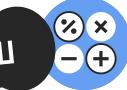
5-го декабря планируется взять кредит в банке на 26 месяцев.

Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на 20 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 25-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1407 тысяч рублей?





ЭКОНОМИЧЕСКИЕ

О задании номер шестнадцать

и

экономическая задача — сложная текстовая задача чаще всего с процентами на вклады или кредиты, или задачи на оптимальный выбор

Есть три основных типа задач:

- ▶ вклады
- ▶ оптимальный выбор
- ▶ кредиты

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:
 - 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб.)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r , при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

Решение.
 По условию, долг перед банком (в млн руб.) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0.$$

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k; 0,9k; 0,8k; 0,7k; 0,6k; 0,5k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k - 0,9; 0,9k - 0,8; 0,8k - 0,7; 0,7k - 0,6; 0,6k - 0,5; 0,5k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$k(1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) - (0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) = \\ = (k - 1)(1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) + 1 = 4,5(k - 1) + 1.$$

По условию, общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб., значит,

$$4,5(k - 1) + 1 > 1,2; 4,5 \cdot \frac{r}{100} + 1 > 1,2; r > 4 \frac{4}{9}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства — число 5. Значит, искомое число процентов — 5.

критерии оценки задания 16

баллы	что нужно сделать
0	
1	
2	

формулы процентов

если число S_1 — это число, увеличенное на $r\%$

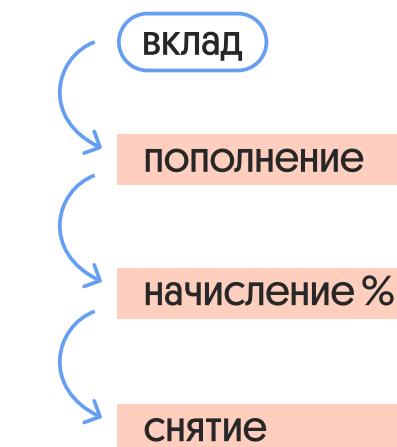
$$S_1 = S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S \cdot k$$

повышающий
коэффициент

определение вклада

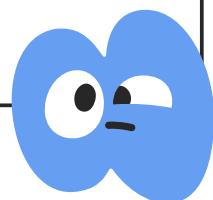
вклад — это деньги, которые мы положили в банк, чтобы вернуть их обратно с процентами через определенное время

действия со вкладом



задача на формулы процентов

- 1 В среду акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а в четверг подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?



алгоритм задач на вклады

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с размером в начале года, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 2 млн рублей. Найди наибольший размер первоначального вклада, при котором через 4 года вклад будет меньше 15 млн рублей.

1 рисуем схему
движения денег

2 добавляем известные
данные и неизвестные

3 заполняем таблицу
для вклада

1 столбец	2 столбец	3 столбец	4 столбец
период год/мес.	вклад с про- центами	пополнение/ снятие	остаток вклада

алгоритм задач на вклады

а

4 по таблице получаем
математическую мо-
дель (уравнение)

!!! учитываем условие

5 записываем ответ
и проверяем его

задание из ЕГЭ 2020

задание 16

- 2 В банк был положен вклад под 10% годовых. Через год, после начисления процентов, вкладчик снял со счета 2000 рублей, а еще через год (опять после начисления процентов) снова внес 2000 рублей. Вследствие этих действий через три года со времени открытия вклада вкладчик получил сумму меньше запланированной (если бы не было промежуточных операций со вкладом). На сколько рублей меньше запланированной суммы он получил?

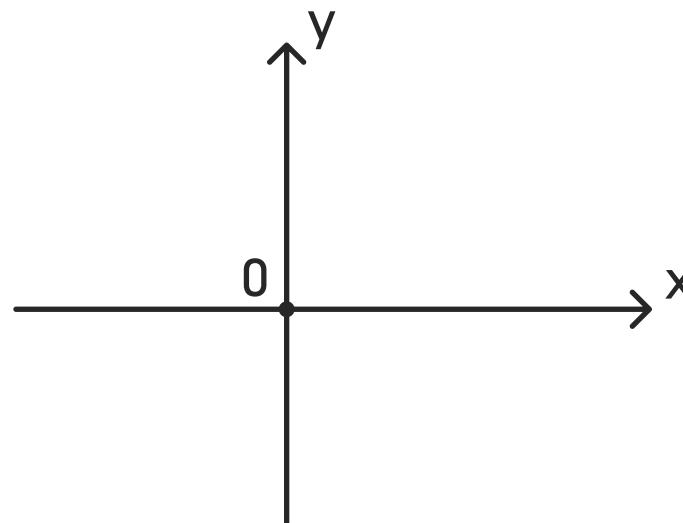




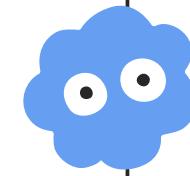


ОПТИМИЗАЦИЯ

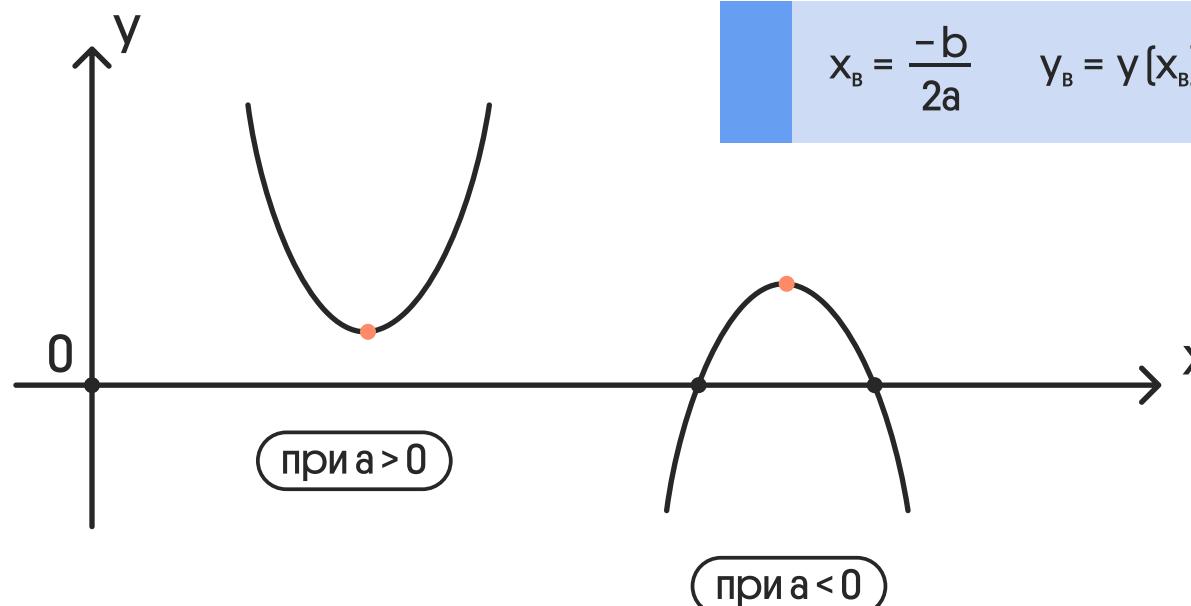
наибольшее и наименьшее функций



$$\blacktriangleright y = \frac{4}{x} - 5$$



вершина параболы



$$x_B = \frac{-b}{2a} \quad y_B = y[x_B]$$

при $a > 0$

при $a < 0$

парабола в функции

задание 16

1

- Производство x тысяч единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + 4x + 7$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции [в млн рублей] составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль может составить не менее 100 млн рублей?

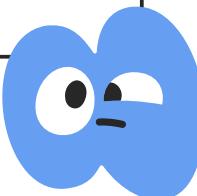


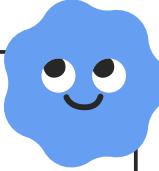
критерий выбора в ограничении

задание 16

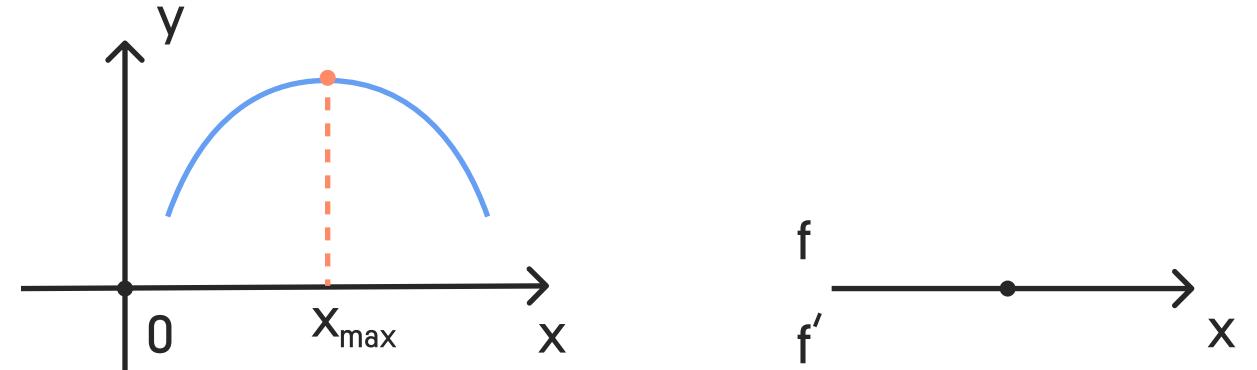
2

Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенному во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенному во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?



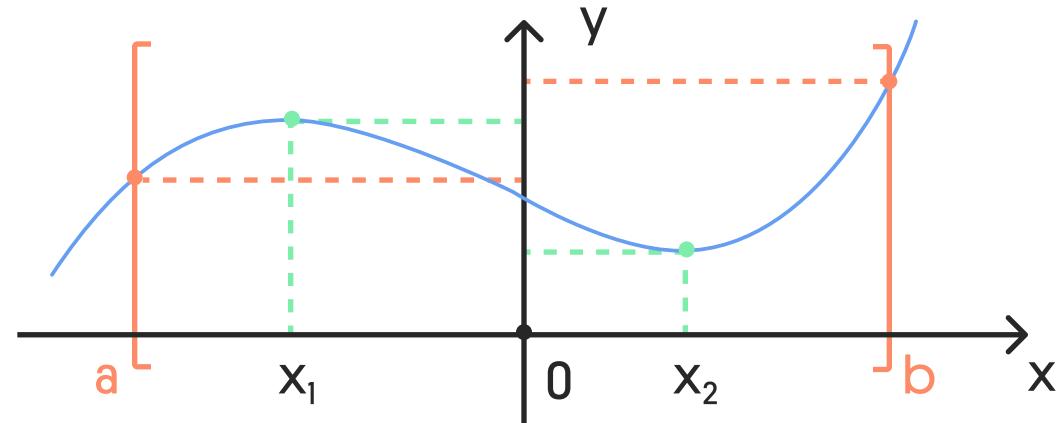


ФУНКЦИЯ И ПРОИЗВОДНАЯ



!!! в задачах на оптимальный выбор есть ограничения

наибольшее и наименьшее



для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции
нужна производная , но не всегда: иногда наибольшее и
наименьшее значения могут быть на концах промежутка

ПРОИЗВОДНАЯ В ФУНКЦИИ

задание 16

3

Первичная информация разделяется по серверам 1 и 2 и обрабатывается на них. С сервера 1 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $30t$ Гбайт, а с сервера 2 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $36t$ Гбайт обработанной информации при условии, что $15 \leq t \leq 65$. Каков наибольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей инфо в 3904 Гбайт?

