доп. Векторите e_1, e_2, e_3 образуват базис на тримерното пространство V. Да се докаже, че векторите a_1, a_2, a_3 също образуват базис на V и да се намерят координатите на вектора $V = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3$, където:

а) $a_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3$
$a_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3$
$a_3 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3$
отг: $V = \frac{2}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3$

б) $a_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$
$a_2 = 2e_1 + 5e_2 + 7e_3$
$a_3 = 3e_1 + 7e_2 + 11e_3$
отг. $V = 8a_1 - 2a_3$

упътване за д-вото: Д-вото за базиса се прави по аналогичен начин на предходната задача

зад. 5 Да се докаже, че в-рите

$f_1(x) = 1 + x$
$f_2(x) = 1 + x^2$
$f_3(x) = x + x^2$

образуват базис на $\mathbb{R}^3[x]$.

Да се намерят координатите на полинома $p(x) = 2 - x + x^2 \in \mathbb{R}^3[x]$ спрямо този базис

Д-во: Ако f_1, f_2 и f_3 са ЛНЗ, т.к пр-вото е тримерно ($\mathbb{R}^3$), то те ще образуват базис

$f_1(x) = 1 + x \to V_1 = (1, 1, 0)$
$f_2(x) = 1 + x^2 \to V_2 = (1, 0, 1)$
$f_3(x) = x + x^2 \to V_3 = (0, 1, 1)$

$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = \theta$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

*др. вариант е с еш. и смяна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$\Downarrow$
ЛНЗ

$\lambda_3 = p \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_2 = -p \\ \lambda_1 = -p \end{array}\right\} -p - p = 0 \Rightarrow p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow V_1, V_2, V_3$ образуват

ЛНЗ с-ма в-ри => полиномите f_1, f_2 и f_3 образуват базис на $\mathbb{R}^3[x]$

$$p(x) = 2 - x + x^2 \Rightarrow v = (2, -1, 1)$$

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 = v = (\mu_1+\mu_2, \mu_1+\mu_3, \mu_2+\mu_3) = (2,-1,1)$$

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 2 \\ \mu_1 + \mu_3 = -1 \\ \mu_2 + \mu_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1) \oplus \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \oplus \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \end{array} \,|:2 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \oplus \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) (-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}} \Rightarrow$$

координатите на $v = (2, -1, 1)$ в базиса $\{v_1, v_2, v_3\}$ са $(0, 2, -1)$

Деф. Едно ЛП е крайномерно, ако притежава базис, състоящ се от краен брой вектори.
Ако не притежава краен базис, то ЛП е безкрайномерно.

Зад. Нулевото пр-во $\{\theta\}$ не притежава базис.

пр: F^n, $M_n(F)$, $F_{m\times n}$, $F^{n+1}[x]$ – крайномерни
$F[x]$ – безкрайномерно

Деф. Размерност на едно крайномерно ЛП V над числовото поле F наричаме броя на векторите в кой да е базис B на V.

Деф. Размерността на $\{\theta\}$ е 0; размерността на безкрайномерно ЛП приемаме да е ∞.

Означение: $\boxed{\dim_F V = \dim V}$

V – крайномерно $\Rightarrow \dim V = n$, ако $\underbrace{B=\{b_1,\dots,b_n\}}_{\text{базис на } V}$

$V=\{\theta\} \Rightarrow \dim V = 0$; V = безкрайномерно $\Rightarrow \dim V = \infty$

пр: 1) F^n, $\{e_i\}_1^n$ е базис на V => $\dim V = n$

2) $M_n(F)$, $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ е базис => $\dim V = n.n = n^2$

3) $F^{n+1}[x]$, $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ - базис => $\dim V = n+1$

4) $F[x]$, $\{1, x, \dots, x^k, \dots\}$ - базис => $\dim V = \infty$

Зад. 6 Нека V е множеството от наредените петорки с реални числа, т.е.: $V = \{v = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$. Нека $U \subseteq V$ такова че: $U = \{v \in V \mid 3x_1 - 2x_2 + x_4 - 6x_5 = 0\}$. Да се докаже, че U е ЛП на V, да се определи $\dim U$ и да се намери един базис на U.

решение:

Д-во: $V = \mathbb{R}^5$ и V е ЛП над $\mathbb{R}$ (известно от примерите за ЛП)

$U \subseteq V$, V е ЛП. Тогава $U \leq V$ <=>

1) $u_1, u_2 \in U$ => $u_1 + u_2 \in U$

2) $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in U$ => $\lambda u \in U$

Тогава нека вземем 2 произволни петорки от U:

$u_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid 3x_1 - 2x_2 + x_4 - 6x_5 = 0$

$u_2 = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mid 3y_1 - 2y_2 + y_4 - 6y_5 = 0$

$u_1 + u_2 = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4, x_5+y_5)$?

и дали $3(x_1+y_1) - 2(x_2+y_2) + (x_4+y_4) - 6(x_5+y_5) \stackrel{?}{=} 0$

=> $3x_1 + 3y_1 - 2x_2 - 2y_2 + x_4 + y_4 - 6x_5 - 6y_5 \stackrel{?}{=} 0$

-> да => $u_1 + u_2 \in U$

Нека вземем $\lambda \in \mathbb{R}$ и $u \in U$:

$u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid 3x_1 - 2x_2 + x_4 - 6x_5 = 0$

$\lambda . u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4, \lambda x_5)$

дали: $3\lambda x_1 - 2\lambda x_2 + \lambda x_4 - 6\lambda x_5 \stackrel{?}{=} 0$

$\lambda(\underbrace{3x_1 - 2x_2 + x_4 - 6x_5}_{0}) \stackrel{?}{=} 0 \rightarrow$ да $\Rightarrow \lambda u \in U$

$\Rightarrow \underline{U \leq V}$

Базис на U:

От даденото в условието за елементите на U:

$3x_1 - 2x_2 + x_4 - 6x_5 = 0$

изразяваме с параметри неизвестните:

$x_1 = p$

$x_2 = q$ $\qquad x_5 = \dfrac{3x_1 - 2x_2 + x_4}{6}$

$x_3 = r$ $\qquad x_5 = \dfrac{3p - 2q + s}{6}$, $p, q, r, s \in \mathbb{R}$

$x_4 = s$

$\Rightarrow V = \left(p, q, r, s, \dfrac{3p-2q+s}{6}\right) \Big| \; 3p - 2q + s - 6\left(\dfrac{3x_1 - 2x_2 + x_4}{6}\right) = 0$

$v = (p, q, r, s, \frac{1}{2}p - \frac{1}{3}q + \frac{1}{6}s) = p(1, 0, 0, 0, \frac{1}{2}) +$

$+ q(0, 1, 0, 0, -\frac{1}{3}) + r(0, 0, 1, 0, 0) +$

$+ s(0, 0, 0, 1, \frac{1}{6})$

$\Rightarrow$ базис на U: $\{(1, 0, 0, 0, \frac{1}{2}), (0, 1, 0, 0, -\frac{1}{3}),$

$(0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, \frac{1}{6})\}$

$\Rightarrow \dim U = 4$

Зад.7 а) Дадено е множеството:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \middle| a_{11}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{33} \in \mathbb{R} \right\}$$

и мн-вата:

$U = \{ A \in V \mid a_{33} = a_{13} \}$ и $W = \{ A \in V \mid a_{13} + a_{31} + a_{33} = 0 \}$.

Да се докаже, че V е линейно пр-во над $\mathbb{R}$ относно операциите събиране на матрици и умножение на матрица с число. Да се намери един негов базис и да се определи размерността му.

Решение: а) Знаем, че $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ е ЛП над $\mathbb{R}$. $V \subseteq M_{3\times3}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ ще докажем, че V е ЛП, т.е. $V \leq M_{3\times3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in V \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \in V$$

$$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & a_{13}+b_{13} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & 0 \\ a_{31}+b_{31} & 0 & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} \in V$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ и } M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ 0 & m_{22} & 0 \\ m_{31} & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \in V$$

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda m_{11} & 0 & \lambda m_{13} \\ 0 & \lambda m_{22} & 0 \\ \lambda m_{31} & 0 & \lambda m_{33} \end{pmatrix} \text{ и } \lambda m_{11}, \lambda m_{13}, \lambda m_{22}, \lambda m_{31}, \lambda m_{33} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \lambda M \in V$

$\Rightarrow V$ е ЛП на $M_{3\times3}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow V \leq M_{3\times3}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow V$ е ЛП над $\mathbb{R}$

базис на V:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{33}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = a_{11}E_{11} + a_{13}E_{13} + a_{22}E_{22} + a_{31}E_{31} + a_{33}E_{33}$

$\Rightarrow$ базис на V: $\{E_{11}, E_{13}, E_{22}, E_{31}, E_{33}\}$

размерност: $\dim V = 5$

б) Да се докаже, че U и W са ЛПП на V, да се намерят техни базиси и да се определят размерностите им.

$$U_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{13} \end{pmatrix} \in U \quad U_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{13} \end{pmatrix} \in U$$

$$U_1 + U_2 = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & a_{13}+b_{13} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & 0 \\ a_{31}+b_{31} & 0 & a_{13}+b_{13} \end{pmatrix} \in U$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \to \lambda U_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & 0 & \lambda a_{13} \\ 0 & \lambda a_{22} & 0 \\ \lambda a_{31} & 0 & \lambda a_{13} \end{pmatrix} \text{ и } \lambda a_{13} = \lambda a_{13}$$

$\Rightarrow \lambda U_1 \in U$

$\Rightarrow U \leq V$

базис на U:

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{13} \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot E_{22} +$$

$+ a_{31}E_{31}$

$\Rightarrow$ базис $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim U = 4$

Нека: $W_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \Big| \; a_{13} + a_{31} + a_{33} = 0$

$W_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \Big| \; b_{13} + b_{31} + b_{33} = 0$

$W_1 + W_2 = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & a_{13}+b_{13} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & 0 \\ a_{31}+b_{31} & 0 & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$

?. $\underline{a_{13}} + \underline{\underline{b_{13}}} + \underline{a_{31}} + \underline{\underline{b_{31}}} + \underline{a_{33}} + \underline{\underline{b_{33}}} \overset{?}{=} 0$ — да

$\lambda \in \mathbb{R} \to \lambda W_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & 0 & \lambda a_{13} \\ 0 & \lambda a_{22} & 0 \\ \lambda a_{31} & 0 & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$

?. $\lambda a_{13} + \lambda a_{31} + \lambda a_{33} \overset{?}{=} 0$

$\lambda(\underbrace{a_{13} + a_{31} + a_{33}}_{0}) = 0 \Rightarrow$ да

$\Rightarrow W \leq V$

От условие: $a_{13} + a_{31} + a_{33} = 0 \Rightarrow a_{13} = -a_{31} - a_{33}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & -a_{31}-a_{33} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{31}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$

$+ a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \quad + a_{33}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ базис на W:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

размерност: $\dim W = 4$

в) Нека $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ \lambda & 0 & \mu \end{pmatrix}$

Да се определи за кои λ и μ A е вектор от ЛП U и за кои – от W

? $A \in U \Rightarrow a_{13} = a_{33} \Rightarrow \mu = -3, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

? $A \in W \Rightarrow -3 + \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 3 - \mu, \ \forall \mu \in \mathbb{R}$

доп: Дадено е ЛП над $\mathbb{R}$ $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.
~~Дадени са и~~ следните подмножества:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} m_{11} + m_{22} + 2m_{23} = 0 \\ m_{11} = m_{13} \end{array} \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} 1 - m_{12} = m_{23} \\ m_{11} = m_{13} = m_{23} \end{array} \right\}$$

Да се определи кои от тези подмножества са ПП на V, и да се намери базис на тези, които са.

Сума на подпространства. Размерност на сумата на две подпространства. Директна сума на подпространства.

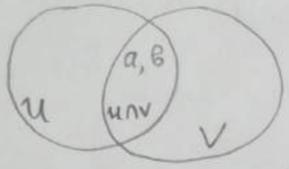
! Задача: АС ЛП сечение на произволна фамилия от подпространства също е подпространство.

Д-во: Нека V е ЛП над с. поле F и нека $U \leq V$ и $W \leq V$:

$U \leq V \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in F, \forall a, b \in U \Rightarrow \boxed{\alpha a + \beta b \in U}$

$W \leq V \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in F, \forall a, b \in W \Rightarrow \boxed{\alpha a + \beta b \in W}$

∀ л.к. на елементи от подпр-вото с коеф. от F остава в подпр-вото



$\rightarrow \left.\begin{array}{l} \forall \alpha, \beta \in F \\ \forall a, b \in U \cap W \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha a + \beta b \in U \cap W}$

$\Rightarrow U \cap W$ е линейно подпространство ($U \cap W \leq U$ и $U \cap W \leq W$ и $\dim(U \cap W) \leq \dim U, \dim W$) (сечението на подпр-ва-та също е подпр-во)

Деф (за сума на подпр-ва) Нека $V_1, V_2, \ldots, V_s$ са подпространства на линейното пространство V. Под сума $V_1 + V_2 + \ldots + V_s$ на тези подпространства ще разбираме множеството (т.е. $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_s$) от ∀ вектори $v \in V$, т.че v може да се представи като сума на вектори, където $v_i \in V_i$, $i = \overline{1, s}$

Тв. Нека V е ЛП и V_1 и V_2 са крайномерни подпр-ва на V. Тогава пространствата $V_1 + V_2$ и $V_1 \cap V_2$ също са крайномерни и:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

теорема за размерност на сумата на подпространства

Деф Нека V е ЛП. Ще казваме, че V е директна сума на подпространствата си $V_1, \ldots, V_s$, ако всеки вектор $v \in V$ се представя по единствен начин като сума $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_s$, където $v_i \in V_i$, $i = \overline{1, s}$. Директна сума означаваме така:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_s$$

Т6. Нека V – ЛП и $V_1, V_2 \leq V$. Тогава $V = V_1 \oplus V_2$
(V е директна сума на подпр-вата си V_1 и V_2) $\Leftrightarrow$
1) $V = V_1 + V_2$ (V е сума на подпр-вата си V_1 и V_2)
2) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

① Нека векторите $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуват базис на V.
$V_1 = \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0\}$
$V_2 = \{\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n \mid \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n\}$
Да се докаже, че V_1 и V_2 са подпространства на V и $V = V_1 \oplus V_2$.

Доказателство:

V_1: Нека v_1' и $v_1'' \in V_1$:
$v_1' = \alpha_1' e_1 + \alpha_2' e_2 + \dots + \alpha_n' e_n \mid \alpha_1' + \alpha_2' + \dots + \alpha_n' = 0$
$v_1'' = \alpha_1'' e_1 + \alpha_2'' e_2 + \dots + \alpha_n'' e_n \mid \alpha_1'' + \alpha_2'' + \dots + \alpha_n'' = 0$
! За да бъде $V_1 \leq V$, то: $\begin{cases} v_1' + v_2' \in V_1 \\ \text{за } \lambda_1 \in F: \lambda_1 v_1 \in V_1 \end{cases}$

$v_1' + v_2' = \alpha_1' e_1 + \alpha_2' e_2 + \dots + \alpha_n' e_n + \alpha_1'' e_1 + \alpha_2'' e_2 + \dots + \alpha_n'' e_n =$
$= (\alpha_1' + \alpha_1'') e_1 + (\alpha_2' + \alpha_2'') e_2 + \dots + (\alpha_n' + \alpha_n'') e_n$
$(\alpha_1' + \alpha_1'') + (\alpha_2' + \alpha_2'') + \dots + (\alpha_n' + \alpha_n'') \overset{?}{=} 0 \Rightarrow$ да:
$\alpha_1' + \alpha_1'' + \alpha_2' + \alpha_2'' + \dots + \alpha_n' + \alpha_n'' = 0$
$\Rightarrow v_1' + v_1'' \in V_1$

$V_1 \leq V$

Нека $\lambda_1 \in F$ и нека вземем v_1:
$\lambda_1 v_1 = \lambda_1(\alpha_1' e_1 + \alpha_2' e_2 + \dots + \alpha_n' e_n) =$
$= \lambda_1 \alpha_1' e_1 + \lambda_1 \alpha_2' e_2 + \dots + \lambda_1 \alpha_n' e_n = 0$
$\lambda_1 \alpha_1' + \lambda_1 \alpha_2' + \dots + \lambda_1 \alpha_n' \overset{?}{=} 0$:
и само $\lambda_1(\alpha_1' + \alpha_2' + \dots + \alpha_n') = \lambda_1 . 0 = 0 \Rightarrow$ да
$\Rightarrow \lambda_1 v_1 \in V_1$

V_2: Нека v_2' и $v_2'' \in V_2$:

$v_2' = \beta_1' e_1 + \beta_2' e_2 + \ldots + \beta_n' e_n \mid \beta_1' = \beta_2' = \ldots = \beta_n'$

$v_2'' = \beta_1'' e_1 + \beta_2'' e_2 + \ldots + \beta_n'' e_n \mid \beta_1'' = \beta_2'' = \ldots = \beta_n''$

! за да бъде $V_2 \leq V$, то: $v_2' + v_2'' \in V_2$

за $\lambda_2 \in F$: $\lambda v_2' \in V_2$

$v_2' + v_2'' = \beta_1' e_1 + \beta_2' e_2 + \ldots + \beta_n' e_n + \beta_1'' e_1 + \beta_2'' e_2 + \ldots + \beta_n'' e_n =$

$= (\beta_1' + \beta_1'') e_1 + (\beta_2' + \beta_2'') e_2 + \ldots + (\beta_n' + \beta_n'') e_n$

дали: $(\beta_1' + \beta_1'') = (\beta_2' + \beta_2'') = \ldots = (\beta_n' + \beta_n'')$ – да

$\Rightarrow v_2' + v_2'' \in V_2$ (1)

Нека $\lambda_2 \in F$ и нека вземем v_2':

дали $\lambda_2 v_2' \in V_2$?

$\lambda_2 v_2' = \lambda_2 \beta_1' e_1 + \lambda_2 \beta_2' e_2 + \ldots + \lambda_2 \beta_n' e_n \rightarrow$ дали

$\cancel{\lambda_2} \beta_1' = \cancel{\lambda_2} \beta_2' = \ldots = \cancel{\lambda_2} \beta_n' \rightarrow$ да

$\Rightarrow \lambda_2 v_2' \in V_2$ (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow V_2 \leq V$

$\Rightarrow$ доказахме, че $V_1 \leq V$ и $V_2 \leq V$ т.е. ще продължим доказателството, използвайки и нека

Нека $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \in V$

положим $\lambda = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$

Тогава: $v = \Big(\underbrace{(\lambda_1 - \lambda) e_1 + \ldots + (\lambda_n - \lambda) e_n}_{\in V_1}\Big) + \underbrace{(\lambda e_1 + \ldots + \lambda e_n)}_{\in V_2}$

$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda) e_1 + \ldots + (\lambda_n - \lambda) e_n}_{\in V_1} \mid \underbrace{\lambda_1 - \lambda + \ldots + \lambda_n - \lambda}_{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n - \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)} = 0$

$\lambda e_1 + \ldots + \lambda e_n \in V_2$, защото $\lambda = \lambda \ldots = \lambda$

$\Rightarrow V = V_1 + V_2$ 1)

Да допуснем, че $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$ и нека $v \in V_1 \cap V_2$
$\Rightarrow v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ и $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$, защото
$v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow v \in V_1$

Също така $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$, защото $v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow v \in V_2$. Тоест:

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

$\Rightarrow v = 0 . e_1 + \dots + 0 e_n = 0 \Rightarrow v = 0$ и $v \in V_1 \cap V_2$

$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$ 2)

$\Rightarrow V_1 \oplus V_2 = V$

(2) Нека векторите $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуват базис на крайномерното ЛП V и k е произволно $\mathbb{N}$ число, $k \leq n$. Ако $V_1 = \ell(e_1, \dots, e_k)$, $V_2 = \ell(e_{k+1}, \dots, e_n)$, да се докаже, че $V = V_1 \oplus V_2$. Обратно, ако $V = V_1 \oplus V_2$ и $e_1, \dots, e_k$ е базис на V_1, а $e_{k+1}, \dots, e_n$ – базис на V_2, то да се докаже, $e_1, \dots, e_k; e_{k+1}, \dots, e_n$ е базис на V, в частност $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$

Доказателство: ($V_1 = \ell(e_1, \dots, e_k)$ и $V_2 = \ell(e_{k+1}, \dots, e_n) \Leftrightarrow V = V_1 \oplus V_2$)

($\Rightarrow$) От $e_1, \dots, e_n$ – базис на V

$\Rightarrow V = \ell(e_1, \dots, e_n) = \underbrace{\ell(e_1, \dots, e_k)}_{= V_1} + \underbrace{\ell(e_{k+1}, \dots, e_n)}_{= V_2} =$

$= V_1 + V_2$ 1)

Нека $v \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \\ v = \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n \end{array}\right\} \ominus$

$\Rightarrow 0 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + (-\lambda_{k+1}) e_{k+1} + \dots + (-\lambda_n) e_n$

Но $e_1, \dots, e_n$ са ЛНЗ в-ри, защото образуват базис на V => единствената ЛК на $e_1, \dots, e_n$ е нулевата, т.е: $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$

$\Rightarrow v = 0e_1 + \dots + 0e_k + 0e_{k+1} + \dots + 0e_n = 0$

$\Rightarrow v = 0 \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$ 2)

От 1) и 2) $\Rightarrow \boxed{V = V_1 \oplus V_2}$

($\Leftarrow$) Трябва да докажем, че $e_1, \dots, e_n$ е базис на V, т.е. $e_1, \dots, e_n$ са ЛНЗ (знаем, че $V = V_1 \oplus V_2$)

Нека $\boxed{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n = 0}$

$v_1 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \in V_1$

$v_2 = \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n \in V_2$

$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k}_{= v_1} = -\lambda_{k+1} e_{k+1} - \dots - \lambda_n e_n =$

$= -(\underbrace{\lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n}_{= v_2})$

$\boxed{v_1 = -v_2}$

$\Rightarrow v_1 = -v_2 \in \underbrace{V_1 \cap V_2}_{= \{0\}} \Rightarrow \boxed{v_1 = v_2 = 0}$ -> от това, че $V_1 \oplus V_2 = V$

От $e_1, \dots, e_k$ - базис на V_1, $e_{k+1}, \dots, e_n$ - базис на V_2 } $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$

$\Rightarrow e_1, \dots, e_n$ са ЛНЗ, $V = V_1 \oplus V_2 \Rightarrow V = \ell(e_1, \dots, e_n)$ } $\Rightarrow e_1, \dots, e_n$ образуват базис на V

От Тв: $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \underbrace{\dim(V_1 \cap V_2)}_{= 0}$ защото $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

$\Rightarrow \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

Ранг на система вектори и ранг на матрица

Деф. Нека V е ЛП, а $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Казваме, че подмножеството $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ на $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ е максимална линейно независима подсистема (МЛНЗПС), ако:

1) $w_1, w_2, \dots, w_k$ са ЛНЗ
2) всеки друг вектор $v \in V$ е линейна комбинация на $w_1, w_2, \dots, w_k$ (който и вектор $v \in V$ да добавим към системата ЛНЗ в-ри $w_1, \dots, w_k$, тя става ЛЗ)

пр. 1) $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (2, 2)$

$\{v_1, v_2\}$ НЕ е МЛНЗПС, защото:

$\{v_1\}$ - ЛНЗ, но добавяйки $v_2 = 2v_1$, тя става ЛЗ

$\{v_2\}$ - ЛНЗ, но добавяйки $v_1 = \frac{1}{2} v_2$, тя става ЛЗ $\Rightarrow$ МЛНЗПС са: $\boxed{\{v_1\}}$, $\boxed{\{v_2\}}$

2) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 2, 2)$, $v_3 = (1, 0, 3)$

$\Rightarrow$ МЛНЗПС: $\boxed{\{v_1, v_3\}}$ и $\boxed{\{v_2, v_3\}}$

Твърдение: Броят на векторите в една МЛНЗПС е един и същ. (т.е. колкото и на брой МЛНЗПС да имаме за дадено пр-во, то броят на векторите, които участват във формирането им, е един и същ). Вижда се в примерите 1) и 2)

Деф. Нека V - ЛП и $\{a_1, \dots, a_k\}$ е с-ма вектори от V. Ранг на системата в-ри $\{a_1, \dots, a_k\}$ означаваме $r(a_1, \dots, a_k) = r$ и казваме, че той е r, ако $\exists$ r на брой $a_1, \dots, a_r$ ЛНЗ вектори, където $r \leq k$ и всеки друг вектор a_j, където $j > r$, е линейна комбинация на векторите $a_1, \dots, a_r$, т.е. r е броят на векторите

ТЕ на една МЛНЗПС от $\{a_i\}_1^k$

Заб. $r(a_1, \dots, a_k) = r = \dim \ell(a_1, \dots, a_k)$, където $\{a_1, \dots, a_k\}$ - базис на V.

ТВ. Ако системата вектори $b_1, b_2, \dots, b_k$ се получава от системата вектори $a_1, a_2, \dots, a_k$ чрез елементарни преобразувания върху координатите на векторите $a_1, a_2, \dots, a_k$, то рангът не се променя, т.е. $r(b_1, b_2, \dots, b_k) = r(a_1, a_2, \dots, a_k)$

Нека имаме матрицата $A \in F_{m \times n}$:

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{matrix} \in F_{m \times n} \\ \begin{matrix} b_1 & \quad b_2 & \quad \dots & \quad b_n \end{matrix} & \end{array}$$

Деф. Нека $k \leq \min(m, n)$. Минор от ред k (k-ти ред) за матрицата A наричаме детерминантата Δ на квадратна подматрица от ред k, образувана от кои да са k реда и k стълба на матрицата A, т.е.:

$$\underbrace{\Delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}}_{\text{Минор от } k\text{-ти ред}} \quad \begin{matrix} 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k < m \\ \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k < n \end{matrix}$$

! Бележим: $M(i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k)$

! Заб. Интересуваме се от ненулеви минори.

пр (за минор):

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$k = 1 \Rightarrow M(1;1) \Rightarrow \Delta = |1|$

$k = 2 \Rightarrow M(\underbrace{1,2}_{\text{номера на редовете}};\underbrace{2,3}_{\text{номера на стълбовете}}) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$

$k = 1 \Rightarrow M = (2;4) \Rightarrow \Delta = |9|$

$k = 3 \Rightarrow M = (1,2,3;1,3,5) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \end{vmatrix}$

Деф. Ранг на матрицата A означаваме $r(A) = r$ и това е редът на максималния ненулев минор за A, който можем да обозначаваме, т.е. $\exists\ (\Delta \neq 0)$ минор от r-ти ред и всеки минор от $(r+1)$-ви ред е нулев.

Заб. $r(A) \leq \min(m,n)$. По дефиниция $r(0) := 0$

Тв. (за ранга):

$r(A) = r(e_1, e_2, \dots, e_m) = r(b_1, b_2, \dots, b_n) \leq$

$\leq \min(m,n)$, където:

$e_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in F^n, \quad i = \overline{1,m}$

$b_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in F^m, \quad j = \overline{1,n}$

① Да се намери рангът на с-мата в-ри $a_1, a_2, \dots$ и МЛНЗПС на тази система, където:

а) $a_1=(2,1,-3)$; $a_2=(3,1,-5)$; $a_3=(1,0,-7)$;
$a_4=(4,2,-1)$; $a_5=(1,0,-2)$

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -7 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} .(-4).(-1).(-3).(-2) \sim \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 16 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 27 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} (-1).(-2) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} b_1 \\ c_2 \\ a_3 \\ \cancel{c_4} \\ \cancel{b_5} \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -7 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{5} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{5} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} a_3 \\ b_1 \\ c_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 3$

МЛНЗПС: $\{a_3, b_1, c_2\}$, но те са получени от $\{a_3, a_1, a_2\}$ ч/з елементарни преобразувания.

б) $a_1=(2,1,-3,1,-2)$; $a_2=(1,2,1,-2,1)$;
$a_3=(2,-1,1,3,2)$; $a_4=(1,-1,2,-1,3)$;
$a_5=(1,-1,3,-1,7)$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \oplus \\ \oplus \\ \oplus \\ \oplus \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 7 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \oplus \\ \oplus \\ \cdot(-5)\ \cdot(+2) \\ \oplus \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ -18 & 0 & 12 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -12 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /:2 \\ /:(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 6 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -12 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \oplus \\ \cdot(6)\ \cdot(+5)\ \cdot(-5) \\ \oplus \\ \oplus \end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -9 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \oplus \\ \oplus \\ \cdot(2)\ \cdot(-3) \\ \oplus \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -9 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \oplus \\ \oplus \\ \oplus \\ \cdot(-1)\ \cdot(2)\ \cdot(-3) \end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /(5) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot(-3) \\ \oplus \end{matrix} \sim$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 5$$

$\Rightarrow$ МЛНЗПС : $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, защото получените: $(1,0,0,-5,0)$, $(0,1,0,-19,0)$, $(0,0,1,-12,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(0,0,0,0,1)$ са ЛНЗ, но са получени ч/з елементарни преобразувания в/у a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

доп. да се намери рангът на с-мата в-ри:

1) АГ
$a_1 = (5, 4, 7, 3)$
$a_2 = (3, 8, 2, 1)$
$a_3 = (2, 5, 1, -1)$
$a_4 = (0, 3, -2, -1)$

2) ОБ
$a_1 = (1, 1, 2)$
$a_2 = (-2, -2, 4)$
$a_3 = (0, 3, 5)$
$a_4 = (4, 1, 3)$
$a_5 = (-2, -5, -9)$
$a_6 = (6, 6, 12)$

3) ОБ
$a_1 = (3, 5, -13, 11)$
$a_2 = (3, -1, 3, -3)$
$a_3 = (3, 2, -5, 4)$
$a_4 = (3, 8, -21, 18)$

4) ОБ
$a_1 = (0, 6, 6, 1, 0)$
$a_2 = (3, 1, 1, 0, 0)$
$a_3 = (1, -1, 3, 1, -2)$
$a_4 = (-2, 3, 1, 0, 1)$
$a_5 = (2, 3, 5, 1, -1)$
$a_6 = (1, -6, 4, 2, -5)$

② Да се намери рангът на матрицата:

а)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 3 & -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} .(3) \; .(-4) \\ \oplus \\ \oplus \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 10 & -8 & -6 \\ 0 & -15 & 12 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /:2 \\ /:(-3) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{-3} \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{-4} & \cancel{-3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A) = 2$$

б)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} .(-5) \; .(-9) \; .(-13) \\ \oplus \\ \oplus \\ \oplus \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /:(-4) \\ /:(-8) \\ /:(-12) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow r(B) = 2$$

в)

$$C = \begin{pmatrix} 14 & -27 & -49 & 113 \\ 43 & -82 & -145 & 340 \\ -29 & 55 & 96 & -227 \\ 128 & -245 & -438 & 1017 \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -29 & 55 & 96 & -227 \\ 43 & -82 & -145 & 340 \\ \cancel{-29} & \cancel{55} & \cancel{96} & \cancel{-227} \\ 128 & -245 & -438 & 1017 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -29 & 55 & 96 & -227 \\ 43 & -82 & -145 & 340 \\ 128 & -245 & -438 & 1017 \end{pmatrix} \Rightarrow r(C) = 3$$

доп. г) $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ д) $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

③ Да се намери рангът на матрицата в зависимост от ст-те на параметъра λ:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \oplus \\ \cdot(-2)\cdot(-3) \\ \oplus \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{-5} & \cancel{-3} \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & \lambda-6 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & \lambda-6 \end{pmatrix} \cdot(2) \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

I сл) $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$

II сл) $\lambda \neq 0$ делим последния ред на λ:

може и без тези преобразувания:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(-\tfrac{1}{3}\right) \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & \frac{7}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-1) \cdot(-3) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

б) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & \lambda & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot(3) \cdot(1) \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 5 & \lambda+2 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

I сл:) $\lambda + 2 = 5 \Rightarrow \boxed{\lambda = 3}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 13 \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{1} & \cancel{13} \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(B) = 2$ при $\lambda = 3$

II сл) $\lambda+2\neq 5 \Rightarrow \boxed{\lambda\neq 3}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 5 & \lambda+2 & 1 & 13 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| :(\lambda-3) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-5).(-2) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(B) = 3 \text{ при } \lambda\neq 3$$

в) $$C = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda-1 & 2 & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda-2 & \lambda & 3 & \lambda & \lambda \\ \lambda-3 & \lambda & \lambda & 4 & \lambda \\ \lambda-4 & \lambda & \lambda & \lambda & 5 \end{pmatrix} .(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda-2 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-3 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ \lambda-4 & 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ \lambda-5 & 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

I) $\lambda\neq 2, 3, 4, 5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda-2 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-3 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ \lambda-4 & 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ \lambda-5 & 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{-\lambda}{2-\lambda} \\ \cdot\frac{-\lambda}{3-\lambda} \\ \cdot\frac{-\lambda}{4-\lambda} \\ \cdot\left(\frac{-\lambda}{5-\lambda}\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1+4\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-2 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-3 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ \lambda-4 & 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ \lambda-5 & 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

I) $\lambda\neq 2, 3, 4, 5, -\frac{1}{4} \Rightarrow r = 5$

II) $\lambda = 2, 3, 4, 5, -\frac{1}{4} \Rightarrow r = 4$

доп.

$$D = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

③ Да се намери рангът на матрицата в зависимост от стойностите на параметрите λ и μ:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 5 & -1 & 2 & 2 \\ 35 & 15 & -3 & 4 & 7 \\ \lambda+36 & 7 & -1 & 12 & -2 \\ -48 & -12 & 2 & -14 & 0 \\ 182 & 3\lambda+\mu+83 & -17 & 14 & 43 \\ 24 & 14 & -3 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} .(-3).(-1).(+2).(-17).(- \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 13 & 5 & -1 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ \lambda+36 & 2 & 0 & 10 & -4 \\ -22 & 2 & 0 & -10 & 4 \\ -39 & 3\lambda+\mu-2 & 0 & -20 & 9 \\ -15 & -1 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ .(4).(-4).(-9).(-3).(\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 21 & 5 & -1 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ \lambda+7 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 3\lambda+\mu-2 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-2)\ \cdot(2)\ \cdot(6) \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 3 & 3\lambda+\mu & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>I сл.</u>) $\lambda = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 3 & -3+\mu & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>т.к.</u> освен $(-3+\mu)$ на ред 3 имаме и 3, то не се интересуваме от ст-та на μ, защото тя не повлиява на ранга на A

$\Rightarrow r(A) = 4$

II сл) $\lambda \neq -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3\lambda+\mu & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid :(\lambda+1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3\lambda+\mu & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3\lambda+\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1) $\lambda \neq -1$ и $3\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -3\lambda$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 4 \text{ при } \lambda \neq -1, \ \mu = -3\lambda$$

2.2) $\lambda \neq -1$ и $3\lambda + \mu \neq 0 \Rightarrow \mu \neq -3\lambda \to$ делим предпоследний ред на $3\lambda + \mu$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 5 \text{ при } \lambda \neq -1, \ \mu \neq -3\lambda$$

Отговор: 1) $\lambda = -1$ и $\forall \mu$: $r = 4$ $(r(A)=4)$

2) $\lambda \neq -1$ и $\mu = -3\lambda$: $r = 4$ $(r(A)=4)$

3) $\lambda \neq -1$ и $\mu \neq -3\lambda$: $r = 5$ $(r(A)=5)$

4) Да се намери рангът на системата вектори:

a) $a_1 = (\lambda+1, \lambda, \lambda, \dots, \lambda, \lambda)$

$a_2 = (\lambda, \lambda+\frac{1}{2}, \lambda, \dots, \lambda, \lambda)$

$a_3 = (\lambda, \lambda, \lambda+\frac{1}{3}, \dots, \lambda, \lambda)$

$\vdots$

$a_{n-1} = (\lambda, \lambda, \lambda, \dots, \lambda+\frac{1}{n-1}, \lambda)$

$a_n = (\lambda, \lambda, \lambda, \dots, \lambda, \lambda+\frac{1}{n})$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+\frac{1}{2} & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+\frac{1}{3} & \dots & \lambda & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda+\frac{1}{n-1} & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda+\frac{1}{n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \oplus \\ \oplus \\ \\ \oplus \\ \oplus \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{cccccc} & \cdot(2) & \cdot(3) & & \cdot(n-1) & \cdot(n) \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} (*) & 1 & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \text{ като:}$$

$$(*) = \lambda + 1 + 2\lambda + 3\lambda + \dots + (n-1)\lambda + n\lambda =$$

$$= 1 + 1\lambda + 2\lambda + 3\lambda + \dots + (n-1)\lambda + n\lambda =$$

$$= 1 + \lambda\sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{n(n+1)}{2}\cdot\lambda$$

I сл) $(*) = 0 \Rightarrow 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}\lambda = 0$

$$2 + (n^2+n)\lambda = 0$$

$$\text{за } \lambda = \frac{-2}{n^2+n} \Rightarrow r(a_1, \dots, a_n) = n-1$$

II сл) $(*) \neq 0 \Rightarrow$ за $\lambda \neq \dfrac{-2}{n^2+n} \Rightarrow r(a_1, \dots, a_n) = n$

доп. б) $a_1 = (1, \lambda, \lambda, \dots, \lambda, \lambda)$

$a_2 = (\lambda - 1, 2, \lambda, \dots, \lambda, \lambda)$

$a_3 = (\lambda - 2, \lambda, 3, \dots, \lambda, \lambda)$

$\dots$

$a_{n-1} = (\lambda - n + 2, \lambda, \lambda, \dots, n-1, \lambda)$

$a_n = (\lambda - n + 1, \lambda, \lambda, \dots, \lambda, n)$

⑤ Да се намери рангът на матрицата:

а)

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & 3 & \dots & n-2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & -1 & \dots & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-(n-1) & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda-1 & -(\lambda-1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -(\lambda-2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & -(\lambda-3) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-(n-1) & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Изсл) $\lambda = 1, 2, 3, \dots, n-1 \Rightarrow r(A) = n-1$

$\lambda \neq 1, 2, 3, \dots, n-1 \Rightarrow r(A) = n$

б)

$$B_{n\times n}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 & \lambda & \dots & \lambda & \lambda \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 1 & \lambda & \lambda & \lambda & \dots & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \lambda & 0 \end{pmatrix}\cdot(-\lambda) \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

I сл) $\lambda=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \dots & \cancel{0} & \cancel{0} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \dots & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \dots & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow r(B)=2$

II сл) $\lambda\neq 0 \Rightarrow r(B)=n$

Отг: 1) $\lambda=0 \Rightarrow r(B)=2$

2) $\lambda\neq 0 \Rightarrow r(B)=n$