№1 06.10.21г.

27. 11. 2021г. I КР и I ТК

08. 01. 2022г II КР и II ТК

518 каб. ; stoyanova@fmi.uni-sofia.bg

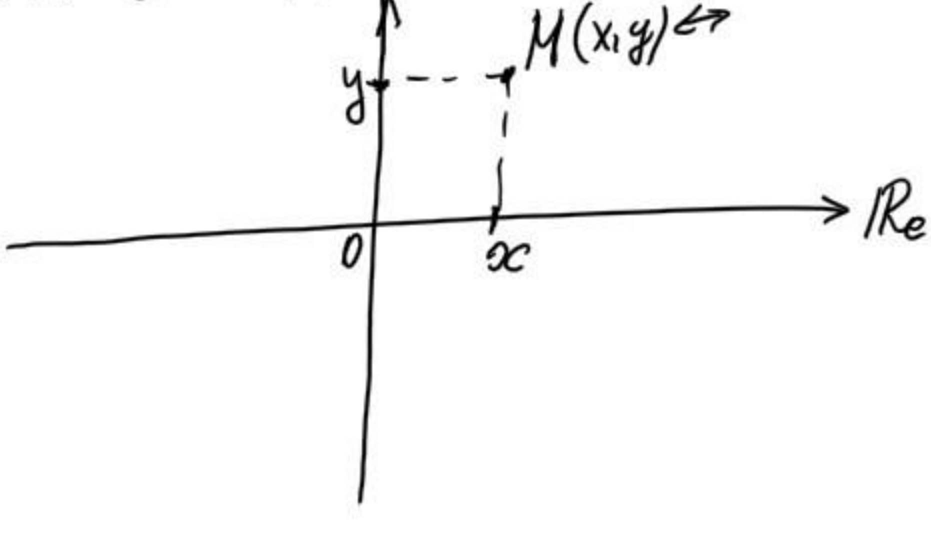
Комплексни числа

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

естн. ц.ч. рац ч. Р.ч. к.ч.

$x-5=0$ $\quad 2x-1=0$ $\quad x^2+1=0$

$x+5=0$ $\quad x^2-7=0$



F – мн-во, непразно, $a, b \in F$, $a = b$,

$\mathbb{C} = \{ z = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$$z_1 = (x, y) \underset{\mathbb{C}}{=} z_2 = (a, b) \Leftrightarrow \begin{matrix} x = a & \mathbb{R} \\ y = b & \mathbb{R} \end{matrix}$$

Дефиниране операция събиране

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1 + z_2 = z \in \mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 = (x, y) + (a, b) \overset{def}{\underset{:=}{=}} (x + a, y + b) \in \mathbb{C}$$

A1) $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ – асоциативен закон на "+";

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$(F, +, A1)$ – полугрупа;

A2) $\exists\, 0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$: $\forall z \in \mathbb{C}$: $0 + z = z + 0 = z$

неутрален (нулев) ел-т

A3) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists (-z) \in \mathbb{C}$: $z + (-z) = (-z) + z = 0$

противоположен на z ел-т

$(F, +, A1 \div A3)$ – група;

A4) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$(F, +, A1 \div A4)$ – абелева (ком.) гр. комутативен з-н на "+"

Дефиниране операция умножение:
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \rightarrow z_1.z_2 := z = (xa - yb, xb + ya)$

A5) асоциативен закон на "."
$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

A6) $\exists\, 1 = (1,0) \in \mathbb{C}$: $\forall z \in \mathbb{C} : 1z = z1 = z$
неутрален (единичен) елт

A7) $\forall z \neq 0, z \in \mathbb{C}, \exists z^{-1}$: $z z^{-1} = z^{-1} z = 1$
обратен на z елт

$(F, \cdot, A5)$ - моногр. ; $(F, \cdot, A5 \div A7)$ - гр.

A8) комутативен закон на "."
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $z_1 z_2 = z_2 z_1$

$(F, \cdot, A5 - A8)$ - абел. (ком.) група

A9) дистрибутивни закони:
$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$;
$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$;

$F, +, \cdot, 0 \neq 1, (-z),$

$A1 \div A4$ — абел. гр. относно "+"

$A5$ $\quad R=F$ — пръстен

$A9$

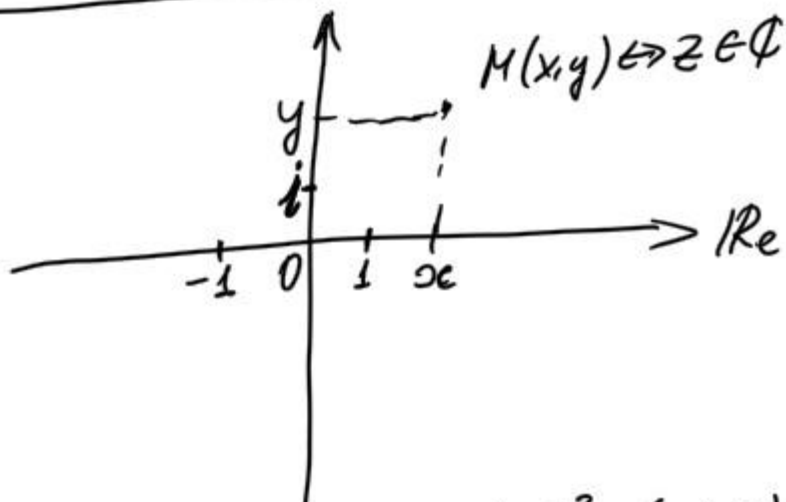
$A1 \div A4, A5, A6, A9$ — стек с 1

$A1 \div A4, A5, A6, A8, A9$ — комутативен пръстен с 1

Пр. $\mathbb{Z}$ е комутативен пр-н с 1.

$A1 \div A9$ — поле

Числово поле: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$



i — имагинерна единица; $i=(0,1)$, $i^2 = (-1,0)_{\mathbb{C}} = -1_{\mathbb{R}}$

$\mathbb{C}$ $z=(x,y)$; $(x,0)=x\in\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$

$$(x,0)+(0,y)=x+yi$$

$$(y,0)(0,1)=yi=(0,y)$$

$\mathbb{C}=\{z=x+yi \mid x,y\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$ алгебричен вид на $\mathbb{C}$

$z_1+z_2=(x+a)+(y+b)i$, $A1\div A4$

$z=x+yi=\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z\cdot i$ $\quad$ $x=x+0i$, yi – чисто имагинерни

$$z_1z_2=(x+yi)(a+bi)=(xa-yb)+(xb+ya)i$$

$A5\div A9 \Rightarrow \mathbb{C}$ – поле

$$i^n=\begin{cases}1, & n=4k\\ i, & n=4k+1\\ -1, & n=4k+2\\ -i, & n=4k+3\end{cases}$$

$z_1=x+yi$

$z_2=a+bi$

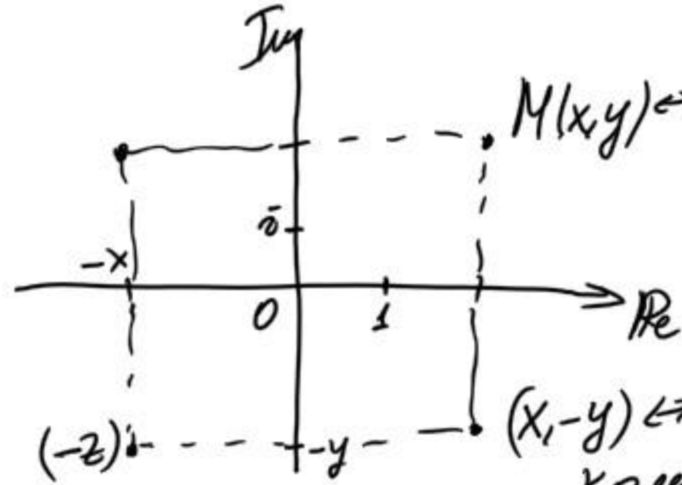
$(-z_2)=-a-bi$

$z_1-z_2=z_1+(-z_2)$

разлика

$\underbrace{z+\dots+z}_{k\text{-пъти}}=kz$ – k-кратно на z

$\underbrace{z\cdot\ldots\cdot z}_{s\text{ пъти}}=z^s$ $\quad$ s-та степен на z.



$M(x,y) \leftrightarrow z = x+yi$

$(x,-y) \leftrightarrow \bar{z} = x-yi$

комплексно спрегнато на z

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x+yi}{a+bi}$$

$$z.\bar{z} = x^2+y^2 \geq 0$$

$$0 = 0+0.i\ ; x=y=0$$

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}} =$$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$= \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} =$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{(-y)}{x^2+y^2}i$$

<u>Зад:</u> $|x-5| = 7$ $\quad\mathbb{R}$

$$x-5=7\ ;\ x-5=-7$$

$$|x-5| = 7 \quad \mathbb{C}$$

$$\frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1.\bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

$$x = a+ib$$

$$|(a-5)+ib| = 7$$

$$\sqrt{(a-5)^2+b^2} = 7$$

$(1+i)^{2021} =$ с. р.

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b^n$$

формула на Нютон

$$\prod_{k=1}^{n} x^{3k}$$

$$\| \quad a^n + \underbrace{\binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b} + b^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \in \mathbb{Z}$$

биномни коефициенти

$$x^2+1 = x^2 - i^2 = (x-i)(x+i) = 0$$

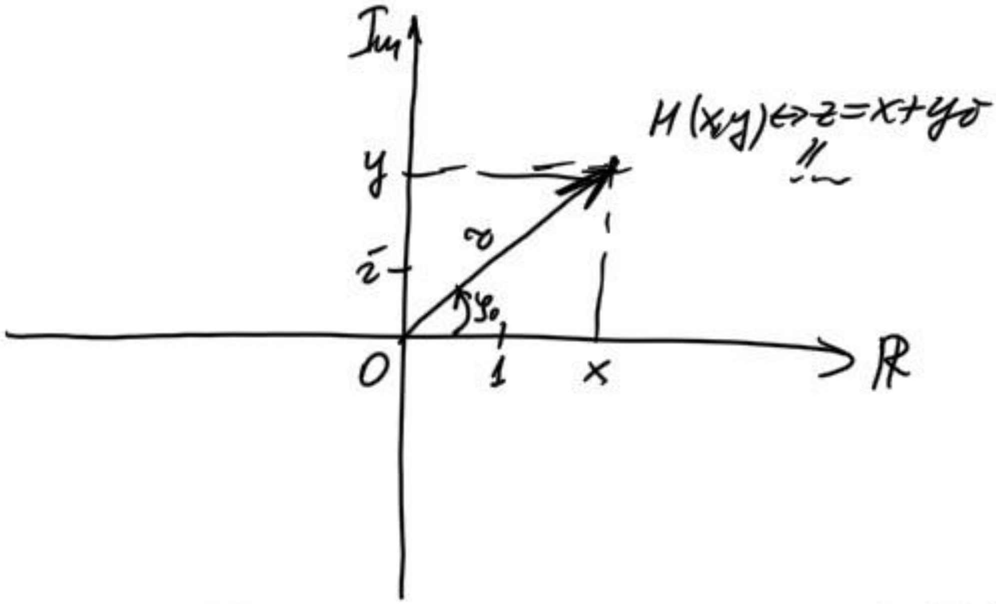
$$x = i, \quad x = -i$$

$\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{-1}$ не

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$



$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|, \quad x = r\cos\varphi_0, \quad y = r\sin\varphi_0$

$z = r(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$ тригонометричен вид на к.ч. z

$\cos\varphi_0 = \cos(\varphi_0 + 2k\pi)$
$k \in \mathbb{Z}$

$\tilde{z} = r(\cos(\varphi_0+2k\pi) + i\sin(\varphi_0+2k\pi))$

$\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, r – модул z

$\varphi_0 = \operatorname{Arg} z$ – главен аргумент на z

$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$ – аргумент на z

<u>Уговорка за задачи:</u> $\varphi_0 \in [0, \pi]$
$(-\pi, 0)$