Корени на полиномите

разширение на

Деф. Нека $f(x) \in F[x]$, $\deg f(x) > 0$ и $\alpha \in K \supseteq F$.
Казваме, че α е корен на $f(x) \in K[x]$, ако
$f(\alpha) = 0$, т.е. $f(x) = (x-\alpha).g(x)$, $g(x) \in K[x]$
($\exists$ разширение K на F, над което $f(x)$ се разлага в произведение на линейни множители, т.е. $\forall$ корени са в това разширение K)

Нека $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in F[x]$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са $\forall$ корени на f, лежащи в разширение на полето F. Тогава f се разлага във вида:

$$f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

Като приравним коефициентите пред степените на x, получаваме:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{1} = n; \binom{n}{n} = 1$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_n = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_1}{a_0} & \binom{n}{1} \text{ събираеми} \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_2}{a_0} & \binom{n}{2} \text{ събираеми} \\ \vdots \\ \sigma_n = x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} & \binom{n}{n} \text{ събираеми} \end{cases}$$

Тези формули се наричат формули на Виет.

Частен случай ($n=2$):

$a_0x^2 + a_1x + a_2 = a_0(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow$

$f = a_0x^2 + a_1x + a_2 = a_0(x^2 - xx_2 - x_1x + x_1x_2)$

$\Rightarrow a_0x^2 + a_1x + a_2 = a_0x^2 - a_0x_2x - a_0x_1x + a_0x_1x_2$

$\Rightarrow a_0x^2 + a_1x + a_2 = a_0x^2 - a_0(x_1+x_2)x + a_0x_1x_2$

$\Rightarrow \cancel{a_0x^2} + \underline{a_1}x + \underline{a_2} = \cancel{a_0x^2} - \underline{a_0(x_1+x_2)}x + \underline{a_0x_1x_2}$

$\Rightarrow a_1 = -a_0(x_1+x_2)$ $\quad \begin{cases} x_1+x_2 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2 = \dfrac{a_2}{a_0} \end{cases}$

$a_2 = a_0 x_1 x_2$

① Да се намерят стойностите на λ, за които между корените x_1, x_2, x_3 на полинома f:
$f = 1x^3 + 8x^2 + 12x + \lambda \in \mathbb{C}[x]$, е в сила:

$\underset{a_0}{1}$, $\underset{a_1}{8}$, $\underset{a_2}{+12}$, $\underset{a_3}{+\lambda}$

$\boxed{x_1 = x_2 . x_3}$

Решение:

От формулите на Виет имаме, че:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} = -\dfrac{8}{1} = -8 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +\dfrac{a_2}{a_0} = \dfrac{12}{1} = 12 \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_3}{a_0} = -\dfrac{\lambda}{1} = -\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + (x_2+x_3) = -8 \Rightarrow \boxed{x_2+x_3 = -8-x_1} \\ x_1(x_2+x_3) + x_2x_3 = 12 \\ x_1(x_2x_3) = -\lambda \end{cases}$$

Имаме по условие, че $\boxed{x_1 = x_2x_3}$:

$$\begin{cases} x_1(-8-x_1) + x_1 = 12 \Rightarrow -8x_1 - x_1^2 + x_1 = 12 \\ x_1 . x_1 = -\lambda \Rightarrow \boxed{x_1^2 = -\lambda} \end{cases}$$

$-8x_1 - x_1^2 + x_1 = 12 \Rightarrow \boxed{x_1^2 + 7x_1 + 12 = 0}$

$D = 49 - 48 = 1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-7+1}{2} = -3 \quad x_2 = -4$

$x_1 = -3 \Rightarrow x_1^2 = 9 = -\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = -9}$

$\cup$

$x_1 = -4 \Rightarrow x_1^2 = 16 \Rightarrow \boxed{\lambda = -16}$

$\Rightarrow \lambda \in \{-9; -16\}$

② $\lambda = ?$ за два от к-те на $f = x^3 - 5x^2 + 8x + \lambda \in \mathbb{C}[x]$
е изпълнено, че: $\boxed{x_1 + x_2 = x_1 x_2}$

Решение:

От ф-лите на Виет имаме, че:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = +5 \\ x_1x_2 + x_1 \underline{x_3} + x_2 \underline{x_3} = 8 \\ x_1 x_2 x_3 = -\lambda \end{cases}$$

Използваме даденото в условието:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \boxed{x_1 + x_2 = 5 - x_3} \\ x_1 + x_2 + (x_1 + x_2)x_3 = 8 \Rightarrow (x_1 + x_2)(1 + x_3) = 8 \\ (x_1 + x_2)x_3 = -\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 - x_3 \\ (5 - x_3)(1 + x_3) = 8 \Rightarrow 5 + 5x_3 - x_3 - x_3^2 = 8 \\ (5 - x_3)x_3 = -\lambda \Rightarrow 5x_3 - x_3^2 = -\lambda \end{cases}$$

$x_3^2 - 4x_3 + 3 = 0$

$D = 4 - 3 = 1$

$x_{3_1} = 2 + 1 = 3 \qquad x_{3_2} = 2 - 1 = 1$

$\Rightarrow \lambda_1 = -(5.3 - 3^2) = -6 \qquad \lambda_2 = -(5.1 - 1^2) = -4$

3) $\lambda = ?$, $f = x^4 - x^3 + \lambda x^2 - x - 6$, $f \in \mathbb{C}[x]$:
$\boxed{x_1 + x_2 = 1}$

Решение:

От формулите на Виет имаме, че:

$$\begin{cases} \boxed{x_1 + x_2} + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1x_2 + \underline{x_1x_3} + \underline{x_1x_4} + \underline{x_2x_3} + \underline{x_2x_4} + x_3x_4 = \lambda \\ \underline{x_1x_2}x_3 + \underline{x_1x_2}x_4 + x_1\underline{x_3x_4} + x_2\underline{x_3x_4} = 1 \\ x_1x_2x_3x_4 = -6 \end{cases}$$

$x_3(x_1+x_2)$, $x_4(x_1+x_2)$

$$\begin{cases} \cancel{1} + x_3 + x_4 = \cancel{1} \Rightarrow \boxed{x_3 + x_4 = 0} \\ x_1x_2 + (\underbrace{x_1+x_2}_{1})(\underbrace{x_3+x_4}_{0}) + x_3x_4 = \lambda \\ x_1x_2(x_3+x_4) + (\underbrace{x_1+x_2}_{1})x_3x_4 = 1 \\ (x_1x_2)(x_3x_4) = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ x_1x_2 + x_3x_4 = \lambda \\ x_3x_4 = 1 \\ (x_1x_2)(x_3x_4) = -6 \end{cases}$$

$\boxed{x_1x_2 = \lambda - 1}$

$\boxed{x_1x_2 = -6}$

$\lambda - 1 = -6 \Rightarrow \boxed{\lambda = -5}$

Отговор: $\lambda = -5$ за $f = \ldots$ е изп., че $x_1 + x_2 = 1$

4) $\lambda = ?$, $f = x^4 - 7x^3 - x^2 - 65x + \lambda \in \mathbb{C}[x]$:

$\boxed{x_1 + x_2 = x_3 . x_4}$

Решение:

От формулите на Виет =>

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1x_2 + \underline{x_1x_3} + \underline{x_1x_4} + \underline{x_2x_3} + \underline{x_2x_4} + x_3x_4 = -1 \\ \underline{x_1x_2}x_3 + \underline{x_1x_2}x_4 + x_1\underline{x_3x_4} + x_2\underline{x_3x_4} = 65 \\ x_1x_2x_3x_4 = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = 7 \\ x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = -1 \\ x_1x_2(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)x_3x_4 = 65 \\ (x_1x_2)(x_3x_4) = \lambda \end{cases}$$

Полагаме $\boxed{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = x_3x_4 = a \\ x_1x_2 = b \\ x_3 + x_4 = c \end{array}}$

$$\begin{cases} a + c = 7 \ (1) \Rightarrow \boxed{c = 7 - a} \\ ac + b + a = -1 \ (2) \\ bc + a^2 = 65 \ (3) \\ ab = \lambda \ (4) \end{cases}$$

(2) $b = -1 - ac - a = -1 - a(7-a) - a = -1 - 7a + a^2 - a$

$\Rightarrow b = a^2 - 8a - 1$

(3) $(a^2 - 8a - 1)(7 - a) + a^2 = 65$

$7a^2 - a^3 - 56a + 8a^2 - 7 + a + a^2 = 65$

$a^3 - 16a^2 + 55a + 72 = 0$

	1	-16	55	72
-1	1	-17	72	0

$\Rightarrow (a+1)(\underbrace{a^2 - 17a + 72}) = 0$

$\Rightarrow a_1 = -1 \vee D = 289 - 288 = 1$

$a_2 = \frac{17+1}{2} = 9 \quad a_3 = 8$

+При $a = -1 \Rightarrow c = 8,\ b = 8,\ \boxed{d = -8}$

+При $a = 9 \Rightarrow c = -2,\ b = 8,\ \boxed{d = 72}$

+При $a = 8 \Rightarrow c = -1,\ b = -1,\ \boxed{d = -8}$

доп. $d = ?$, $f = x^4 + 3x^3 + dx^2 - 9x - 2 \in \mathbb{C}[x]$:

$x_1 + x_2 = x_3 x_4$

5) Нека $f \in \mathbb{R}[x]$, f дава остатък -8 при деление с $(x-3)$ и остатък 4 при деление с $(x+3)$. Да се намери остатъкът при деление на f с $(x-3)(x+3)$

Решение:

(1) $f = (x-3)q_1 - 8$, $q_1, q_2 \in \mathbb{R}[x]$

(2) $f = (x+3)q_2 + 4$

и нека $f = (x-3)(x+3).q + r$, $q, r \in \mathbb{R}[x]$,

$\deg[(x-3)(x+3)] = 2$ и $\deg r < \deg[(x-3)(x+3)]$

$\Rightarrow \deg r \le 1 \Rightarrow r = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f = (x-3)(x+3).q + (ax+b)$ (3)

заместваме в: (1): $f(3) = (3-3)q_1 - 8 = -8$

в (3): $f(3) = (3-3)(3+3)q + a.3 + b$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{3a+b=-8}$ (*)

Аналогично заместваме в:

$$\left.\begin{aligned} &(2)\ f(-3)=(-3+3)q_2+4=4 \\ &(3)\ f(-3)=(-3-3)(-3+3)q+a(-3)+b \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\boxed{-3a+b=4}$ (**)

От (*) и (**) имаме:

$$\oplus\left|\begin{aligned} 3a+b&=-8 \\ -3a+b&=4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2b=-4 \Rightarrow \boxed{b=-2} \Rightarrow \boxed{a=-2}$$

$\Rightarrow r=ax+b=-2x-2$

<u>отговор</u>: Остатъкът при деление на f с $(x-3)(x+3)$ е

$\boxed{r=-2x-2}$

⑥ Да се намери полином от трета степен с $\mathbb{C}$ коефициенти, който при деление с (x^2+1) дава остатък $(-5x+10)$ и за корените му е в сила следното:

$$\left|\begin{aligned} &\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=9 \\ &\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=99 \end{aligned}\right., \quad x_i\neq 0,\ i=\overline{1,3}$$

Решение:

Нека $f=ax^3+bx^2+cx+d,\ a,b,c,d\in\mathbb{C},\ a\neq 0$

$f=(x^2+1).q+(-5x+10),\ q\in\mathbb{C}[x]$

Извършвайки делението на f и (x^2+1), търсим остатък $(-5x+10)$:

$$f = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \underline{|\, g = x^2 + 1}$$

$$q = ax + b$$

$$
\begin{array}{l}
-\underline{ax^3 + ax} \\
bx^2 - ax + cx + d \\
-\underline{bx^2 + b} \\
-ax + cx - b + d = r
\end{array}
$$

$$f = g \cdot q + r$$

$r = -ax - b + cx + d$ е търсеният остатък $(-5x+10)$, т.е.:

$$\boxed{-ax - b + cx + d = -5x + 10}$$

$$\left.\begin{array}{l} r(i) = -a \cdot i - b + ci + d = -5i + 10 \\ r(-i) = ai - b - ci + d = +5i + 10 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \oplus \\ \ominus \end{array}$$

$$\begin{cases} -2b + 2d = 20 \\ 2ai + 2ci = 10i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b + d = 10 \\ a - c = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = 9 \\ \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} + \dfrac{1}{x_3^2} = 99 \end{cases}, \; x_i \neq 0, \; i = \overline{1,3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = 9 \; (*) \\ \dfrac{(x_2x_3)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_1x_2)^2}{(x_1x_2x_3)^2} = 99 \; (**) \end{cases}$$

$(x_2x_3)^2+(x_1x_3)^2+(x_1x_2)^2=(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)^2-$

$-2(x_2x_3x_1x_3+x_1x_3x_1x_2+x_2x_3x_1x_2)=$

$=(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)^2-2(x_1x_2x_3)(x_1+x_2+x_3)$

От формулите на Виет:

$$\left|\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a} \end{array}\right.$$

т.е имаме, че:

$$(*)\ \frac{\frac{c}{\cancel{a}}}{-\frac{d}{\cancel{a}}}=9 \Rightarrow \boxed{c=-9d}$$

$$(**)\ \frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2-2\left(-\frac{d}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)}{\left(-\frac{d}{a}\right)^2}=99 \Rightarrow \frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{2bd}{a^2}}{\frac{d^2}{a^2}}=99 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{c^2-2bd}{\cancel{a^2}}}{\frac{d^2}{\cancel{a^2}}}=99 \Rightarrow \frac{c^2-2bd}{d^2}=99 \Rightarrow \boxed{c^2-2bd=99d^2}$$

замесваме

$\Rightarrow 81d^2-2bd=99d^2 \Rightarrow -bd=9d^2$

Ако $d=0 \Rightarrow f=ax^3+bx^2+cx \Rightarrow 0$ е корен на $f(x)$, но по условие $x_i, i=\overline{1,3}$ е $\neq 0$

$\Rightarrow d\neq 0 \Rightarrow -bd=9d^2 \,/:d \Rightarrow \boxed{-b=9d}$

$$\Rightarrow (2)\left|\begin{array}{l} -b+d=10 \\ a-c=5 \\ c=-9d \\ b=-9d \end{array}\right\} \Rightarrow 9d+d=10 \Rightarrow \boxed{d=1} \Rightarrow \boxed{c=b=-9}, (a=-$$

$\Rightarrow$ отг: $f=-4x^3-9x^2-9x+1$

$=9=$

Деф. Казваме, че α е <u>к-кратен</u> корен на полинома $f(x) \in F[X]$ (и $\alpha \in K$ (подходящо разширение на F)), ако е изпълнено, че: $f(x) = (x-\alpha)^k \cdot g(x)$, $g(x) \in F[X]$ и $g(\alpha) \neq 0$

1) $k = 1 \Rightarrow \alpha$ е еднократен (прост) корен

2) $k \geq 2 \Rightarrow \alpha$ е <u>к-кратен</u> корен

Th (критерий за кратност)
Нека F е поле. Тогава $f(x) (\in F[X]) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, има к-кратен корен $\alpha \in F \Leftrightarrow f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(k)} \neq 0$

(т.е. α е к-н както на полинома f, така и на $\forall$ негови производни до $(k-1)$-вата вкл., като к-тата производна няма за к-н $\alpha \in F$)

Тв. Един полином $f \in F[X]$ има кратен корен $\Leftrightarrow f$ има общ корен с производната си

Заб. Горното твърдение служи за посочване $\exists$ на кратен корен, но не показва каква е кратността му.

7) Да се определи кратността на корена α за полинома $f(x) \in F[X]$

a) $\alpha = 2$, $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

$+ \; f(\alpha) = f(2) = \cancel{32} - \cancel{80} + \cancel{56} - \cancel{8} + \cancel{8} - \cancel{8} = 0$

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 4x + 4$

$+ \; f'(\alpha) = f'(2) = \cancel{80} - \cancel{160} + \cancel{84} - \cancel{8} + \cancel{4} = 0$

$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 42x - 4$

$+ \; f''(\alpha) = f''(2) = \cancel{160} - \cancel{240} + \cancel{84} - \cancel{4} = 0$

$f'''(x) = 60x^2 - 120x + 42$

$- \; f'''(\alpha) = f'''(2) = \underbrace{\cancel{240} - \cancel{240}}_{=0} + 42 = 42 \neq 0$

$\Rightarrow \alpha = 2$ е 3-кратен корен на $f = x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$

$\boxed{\text{II начин}}$ Схема на Хорнер:

$f(x) = x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$

	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	0
2	1	-1	-1	-2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	7			

$\alpha = 2$ е 3-кратен корен на $f(x) = x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$

б) $\alpha = 1,\ f = x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-1,\ n \in \mathbb{N}$

$+\ f(1) = \cancel{1} - \cancel{(2n+1)}.1 + \cancel{(2n+1)}.1 \cancel{-1} = 0$

$f'(x) = (2n+1)x^{2n} - (2n+1)(n+1)x^n + n(2n+1)x^{n-1}$

$f'(1) = 1(2n+1).1 - (n+1)(2n+1).1 + n(2n+1).1$

$+\ f'(1) = \cancel{(n+1)(2n+1)} - \cancel{(n+1)(2n+1)} = 0$

$f''(x) = 2n(2n+1)x^{2n-1} - n(n+1)(2n+1)x^{n-1} + n(n-1)(2n+1)x^{n-2}$

$f''(1) = 2n(2n+1) - n(n+1)(2n+1) + n(n-1)(2n+1)$

$f''(1) = 2n(2n+1) - n(\underbrace{\cancel{n}+1-\cancel{n}+1}_{2})(2n+1)$

$+\ f''(1) = \cancel{2n(2n+1)} - \cancel{2n(2n+1)} = 0$

$f'''(x) = 2n(2n-1)(2n+1)x^{2n-2} - n(n-1)(n+1)(2n+1)x^{n-2} +$
$+ n(n-1)(n-2)(2n+1)x^{n-3}$

$f'''(1) = 2n(2n-1)(2n+1) - n(n-1)(n+1)(2n+1) +$
$+ n(n-1)(n-2)(2n+1)$

$$f'''(1) = (2n+1)\left[2n(2n-1) - n(n-1)(n+1) + n(n-1)(n-2)\right] \Rightarrow$$

$$f'''(1) = (2n+1)\left[(4n^2 - 2n - n(n^2-1) + n(n^2-3n+2)\right]$$

$$f'''(1) = (2n+1)\left[(\underline{4n^2} - \cancel{2n} - \cancel{n^3} - n + \cancel{n^3} \underline{-3n^2} + \cancel{2n})\right]$$

$$f'''(1) = (2n+1)(n^2-n)$$

$$f'''(1) = n(n-1)(2n+1) \neq 0$$

$\Rightarrow \alpha = 1$ е 3-кратен корен на $f(x)$

Симетрични полиноми

Преговор: F - поле; $F[X] = \{ f = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \mid a_i \in F \}$
безкрайна редица с краен брой ненулеви елементи

$f+g := (\dots\dots) \in F[X]$
$f.g := (\dots\dots) \in F[X]$
} дефинирани операции

1) $(F[X], +)$ - абелева група $\begin{cases} 1) a+(b+c) = (a+b)+c \text{ асоц. з-н} \\ 2) a+0 = 0+a = a \\ 3) a+(-a) = (-a)+a = 0 \\ 4) a+b = b+a \text{ комут. закон} \end{cases}$

2) $(F[X], \cdot)$ - има дефиниран асоц. закон: $\boxed{a.(bc) = (ab)c}$

3) дистрибутивни закони: $f(g+h) = fg + fh$
$(f+g)h = fh + gh$

*$F[X]$ е пръстен!

4) $\exists$ единичен елемент в $F[X]$ (1): $1.f = f.1 = f, \forall f \in F[X]$

=> *$F[X]$ е пръстен с 1-ца!

5) $\forall f, g: fg = gf$ (в сила е комутативен закон относно умножението)

=> $F[X]$ е комутативен пръстен с 1-ца (полиномиален пръстен)

Нека R е комутативен пръстен с 1-ца.
$R[X_1, \dots, X_n]$ - пръстен на полиномите на $\underline{n}$ променливи $X_1, \dots, X_n$ с коефициенти от R.
Всеки полином $f: f(X_1, \dots, X_n) \in R[X_1, \dots, X_n]$ е крайна сума на едночлени, т.е. полиноми от вида: $a X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n}$, за $i_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

- $a \in R$ се нарича коефициент на едночлена
- числото $\boxed{i_1 + i_2 + \dots + i_n}$ се нарича степен на едночлена $a X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_n^{i_n}$

*Ако $f(X_1, \dots, X_n)$ е ненулев полином, степента на f е максималната от степените на ненулевите едночлени на f (бележим $\deg f$). Ако $\boxed{f = 0} \Rightarrow \deg f = -\infty$

пр. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2x_2x_3^3-7x_1x_2^4+x_2^5x_3^2$

$\Rightarrow \deg f=\max(\underbrace{2+1+3}_{6},\underbrace{1+4+0}_{5},\underbrace{0+5+2}_{7})=7$

$\deg_{x_1} f=2$, $\deg_{x_2} f=5$, $\deg_{x_3} f=3$

Лексикографска наредба на едночлени: Нека $u=ax_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$, $v=bx_1^{j_1}\dots x_n^{j_n}$ са два ненулеви неподобни едночлена (два едночлена u и v са подобни, ако $i_1=j_1, i_2=j_2,\dots,i_n=j_n$, т.е. $\forall$ променлива x_e, $e=\overline{1,n}$ участва с една и съща степен в двата едночлена u и v).

Казваме, че u е по-голям в лексикографски смисъл от v (пишем $u >_{lex} v$), ако $\exists k\in\mathbb{N}$, $k\le n$, т.ч. $i_1=j_1,\dots,i_{k-1}=j_{k-1}$, но $i_k>j_k$

пр. $x_1, x_2^2x_4^2, x_2^2x_3^3, x_2^2x_3 \Rightarrow$

$x_1 >_{lex} x_2^2x_3^3 >_{lex} x_2^2x_3 >_{lex} x_2^2x_4^2$

* Ако f е полином на една променлива, под старши едночлен на f разбираме едночлена на f с най-висока степен.

Ако обаче f е полином на няколко променливи, може да има няколко едночлена с най-висока степен. Тогава:

Старши едночлен на ненулев полином на няколко променливи наричаме най-големия според лексикографската наредба едночлен на f.

Деф. Нека $f\in R[x_1,\dots,x_n]$. Казваме, че f е симетричен полином, ако за $\forall$ пермутация $\sigma\in S_n$ е изпълнено, че:

$f(x_1,\dots,x_n)=f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})$.

(т.е. f е симетричен, ако при всяко разместване на променливите той не се променя).

Примери: Дали е, или не е симетричен f:

1) $f = x^2-3x+y^2 \to f(x,y) = x^2-3x+y^2$

$f(y,x) = y^2-3y+x^2$

$\Rightarrow f(x,y) \neq f(y,x) \Rightarrow f$ не е симетричен

2) $f(x,y,z) = x+y$, $\boxed{f(x,z,y) = x+z}$ $\Big\}$ $f(x,y,z) \neq f(x,z,y) \Rightarrow f$ не е симетричен

избираме произволно ($f(y,x,z)$, $f(y,z,x)$, $f(z,x,y)$, $f(z,y,x)$)

3) $f(x,y,z) = x+y+z$, $f(x,z,y) = x+z+y$ $\Big\}$ $f(x,y,z) = f(x,z,y) \Rightarrow f$ е симетричен полином

4) Следните наричаме елементарни симетрични полиноми на променливите $x_1,\dots,x_n$

$\sigma_1 = \sigma_1(x_1,\dots,x_n) = x_1 + \dots + x_n$

$\sigma_2 = \sigma_2(x_1,\dots,x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$

$\sigma_3 = \sigma_3(x_1,\dots,x_n) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$

$\vdots$

$\sigma_n = \sigma_n(x_1,\dots,x_n) = x_1x_2x_3\dots x_n$

Ако $ax_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$ е едночлен, тогава $f(x_1,\dots,x_n) = a\sigma_1^{i_1}\dots\sigma_n^{i_n}$ е симетричен полином на $x_1,\dots,x_n$, защото при произволно разместване на променливите, $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ не се променят. $\Rightarrow$ не се променя и $f(x_1,\dots,x_n)$

По общо, ако $g(x_1,\dots,x_n) \in R[x_1,\dots,x_n]$ е произволен, то $g(\sigma_1,\dots,\sigma_n) = f(x_1,\dots,x_n)$ е симетричен полином на $x_1,\dots,x_n$, защото от всеки едночлен на g се получава симетричен полином на $x_1,\dots,x_n$, а знаем, че сума (както и разлика и произведение) на симетрични полиноми е също симетричен полином

Зад. Множеството от всички симетрични полиноми на $x_1,\dots,x_n$ е пръстен, подпръстен на $R[x_1,\dots,x_n]$.

Th (Основна теорема на симетричните полиноми)
Нека $f\in F[x_1,\dots,x_n]$, където F е област (няма делители $\neq 0$ на 0_F), е симетричен полином. Тогава $\exists!$ полином $g\in F[x_1,\dots,x_n]$ (на n на брой променливи с коефициенти от F), т.е.:
$f(x_1,\dots,x_n)=g(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$

! т.е. $\forall$ симетричен полином се изразява по ! начин чрез елементарните симетрични полиноми.

① Да се изрази чрез елементарните симетрични полиноми σ_1, σ_2 и σ_3 симетричната ф-я Σ_1:

a) $\Sigma_1=\Sigma_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^4x_2^2+x_1^4x_3^2+x_1^2x_2^4+$
$+x_1^2x_3^4+x_2^4x_3^2+x_2^2x_3^4=$

$=x_1^2x_2^2(x_1^2+x_2^2)+x_1^2x_3^2(x_1^2+x_3^2)+x_2^2x_3^2(x_2^2+x_3^2)=$

$=x_1^2x_2^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_3^2)+$
$+x_1^2x_3^2(x_1^2+x_3^2+x_2^2-x_2^2)+$
$+x_2^2x_3^2(x_2^2+x_3^2+x_1^2-x_1^2)=$

$=x_1^2x_2^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-x_1^2x_2^2x_3^2+$
$+x_1^2x_3^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-x_1^2x_2^2x_3^2+$
$+x_2^2x_3^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-x_1^2x_2^2x_3^2=$

$=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)((x_1x_2)^2+(x_1x_3)^2+(x_2x_3)^2)-$
$-3(x_1x_2x_3)^2=((x_1+x_2+x_3)^2-2x_1x_2-2x_1x_3-$
$-2x_2x_3).((x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2x_1x_2x_1x_3-$
$-2x_1x_2x_2x_3-2x_1x_3x_2x_3))-3(x_1x_2x_3)^2=$

$$=[(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)]\cdot$$

$$\cdot[(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2x_1^2x_2x_3-2x_1x_2^2x_3-$$

$$-2x_1x_2x_3^2]-3(x_1x_2x_3)^2$$

$$=[(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)]\cdot$$

$$\cdot[(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)]-3(x_1x_2x_3)^2=$$

$$=[\sigma_1^2-2\sigma_2]\cdot[\sigma_2^2-2\sigma_3\sigma_1]-3\sigma_3^2=$$

$$=\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1^3\sigma_3-2\sigma_2^3+4\sigma_1\sigma_2\sigma_3-3\sigma_3^2$$

б) $\Sigma=x_1^3+x_2^3+x_3^3-2x_1^2x_2-2x_1^2x_3-2x_1x_2^2-$

$$-2x_1x_3^2-2x_2^2x_3-2x_2x_3^2=\underbrace{(x_1^3+x_2^3+x_3^3)}_{1}-$$

$$-2\underbrace{(x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2)}_{2}$$

1 $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-3x_1^2x_2-$

$$-3x_1^2x_3-3x_1x_2^2-3x_2^2x_3-3x_1x_3^2-3x_2x_3^2)=$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^3-3\underbrace{(x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2)}_{2}=\sigma_1^2-3\cdot 2$$

2 $x_1x_2(x_1+x_2)+x_1x_3(x_1+x_3)+x_2x_3(x_2+x_3)=$

$$=x_1x_2(x_1+x_2+x_3-x_3)+x_1x_3(x_1+x_3+x_2-x_2)+$$

$$+x_2x_3(x_2+x_3+x_1-x_1)=x_1x_2(x_1+x_2+x_3)+$$

$$+x_1x_3(x_1+x_2+x_3)+x_2x_3(x_1+x_2+x_3)-x_1x_2x_3-$$

$$-x_1x_2x_3-x_1x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-$$

$$-3x_1x_2x_3=\sigma_1\cdot\sigma_2-3\sigma_3 \Rightarrow 2=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$$

$$\Rightarrow \Sigma_1 = \sigma_1^2 - 3(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) - 2(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) =$$

$$= \sigma_1^2 - 3\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_2 + 6\sigma_3$$

$$\Rightarrow \Sigma_1 = \sigma_1^2 - 5\sigma_1\sigma_2 + 15\sigma_3$$

в) $$\Sigma_1 = \frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_1+x_3} + \frac{x_3}{x_1+x_2} =$$

$$= \underbrace{\frac{x_1}{\sigma_1 - x_1} + \frac{x_2}{\sigma_1 - x_2} + \frac{x_3}{\sigma_1 - x_3}}_{(\sigma_1 - x_1)(\sigma_1 - x_2)(\sigma_1 - x_3)} =$$

$$= \frac{x_1(\sigma_1 - x_2)(\sigma_1 - x_3) + x_2(\sigma_1 - x_1)(\sigma_1 - x_3) + x_3(\sigma_1 - x_1)(\sigma_1 - x_2)}{(\sigma_1 - x_1)(\sigma_1 - x_2)(\sigma_1 - x_3)}$$

A(числитель) $= x_1(\sigma_1^2 - \sigma_1 x_3 - \sigma_1 x_2 + x_2x_3) +$
$+ x_2(\sigma_1^2 - \sigma_1 x_3 - \sigma_1 x_1 + x_1 x_3) + x_3(\sigma_1^2 - \sigma_1 x_2 - \sigma_1 x_1 + x_1 x_2)$
$= (x_1 + x_2 + x_3)\sigma_1^2 - \sigma_1(x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_3) -$
$- \sigma_1(x_1x_2 + x_1x_2 + x_1x_3) + 3x_1x_2x_3 =$
$= \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$

B(знаменатель) $= (\sigma_1^2 - \sigma_1 x_2 - \sigma_1 x_1 + x_1x_2)(\sigma_1 - x_3) =$
$= \sigma_1^3 - \sigma_1^2 x_3 - \sigma_1^2 x_2 + \sigma_1 x_2 x_3 - \sigma_1^2 x_1 + \sigma_1 x_1 x_3 +$
$+ \sigma_1 x_1 x_2 - x_1x_2x_3 = \sigma_1^3 - \sigma_1^2(x_1 + x_2 + x_3) +$
$+ \sigma_1(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3 =$
$= \cancel{\sigma_1^3} - \cancel{\sigma_1^3} + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$

$$\Rightarrow \Sigma_1 = \frac{\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}$$

Задача 2 (може да бъде използвана и в зад. нагоре)
Нека $f \in F[X]$ със старши коефициент 1-ца и корени $x_1, \dots, x_n$, $a \in F$! $f(a) \neq 0$. Док., че:

а) $\prod_{i=1}^{n} (a - x_i) = f(a)$

Нека $f = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.
Щом $x_1, \dots, x_n$ са корени на $f \Rightarrow$ (ст. коеф. 1-ца)

$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$

за $x = a$: $f(a) = \prod_{i=1}^{n} (a - x_i) \Rightarrow$ доказано

б) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a - x_i} = \frac{f'(a)}{f(a)}$

Щом $x_1, \dots, x_n$ - к-ни на $f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \Rightarrow$ (ст. коеф. 1)

$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$

$f'(x) = (x - x_1)'(x - x_2) \dots (x - x_n) + (x - x_1)(x - x_2)' \dots (x - x_n) + \dots$

$+ (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)'$ *производна на произведение по променливата x

$f'(x) = \underbrace{(x - x_2) \dots (x - x_n)}_{\text{липсва } (x - x_1)} + \underbrace{(x - x_1) \dots (x - x_n)}_{\text{липсва } (x - x_2)} + \dots + \underbrace{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})}_{\text{липсва } (x - x_n)}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)} + \frac{f(x)}{(x - x_2)} + \dots + \frac{f(x)}{(x - x_n)}$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n}$

за $x = a \Rightarrow \frac{f'(a)}{f(a)} = \frac{1}{a - x_1} + \frac{1}{a - x_2} + \dots + \frac{1}{a - x_n}$

$\Rightarrow$ за $x = a$ имаме, че: $\frac{f'(a)}{f(a)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a - x_i}$

в) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(a-x_i)^2} = \frac{(f'(a))^2 - f(a)f''(a)}{(f(a))^2}$

в б) доказахме, че: $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x-x_i} = \frac{f'(x)}{f(x)}$ / диференцира-ме по x

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-x_i}\right)' = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-x_i}\right)' = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x-x_i}\right)' = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{(x-x_i)^2} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-x_i)^2}$$

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-x_i)^2} = \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f(x))^2}$$

и за $x=a$: $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(a-x_i)^2} = \frac{(f'(a))^2 - f(a)f''(a)}{(f(a))^2}$

г) II начин за ① в)

$$\sum = \frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_1+x_3} + \frac{x_3}{x_1+x_2}$$

Нека $f \in F[x]$ има корени x_1, x_2, x_3 и ст. коеф. 1.

$\Rightarrow f = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \xRightarrow{\text{Виет}} x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3$

Зад. $f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in F[x]$ и $x_1, \ldots, x_n$ са $\forall$ к-ни на f. Тогава ф-ите на Виет се записват по следния начин:

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^k \left(\frac{a_k}{a_0}\right), k = 1, \ldots, n$$

$\Rightarrow$ можем да изразим коефициентите на f чрез корените $x_1, \ldots, x_n$

$$\Sigma'_1 = \frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_1+x_3} + \frac{x_3}{x_1+x_2} = \frac{x_1}{\sigma_1 - x_1} + \frac{x_2}{\sigma_1 - x_2} + \frac{x_3}{\sigma_1 - x_3}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i \pm \sigma_1}{\sigma_1 - x_i} = \sum_{i=1}^{3} \left(-1 + \sigma_1 \frac{1}{\sigma_1 - x_i}\right) = \qquad \boxed{f'(x) = 3x^2 - 2\sigma_1 x + \sigma_2}$$

$$= -3 + \sigma_1 \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\sigma_1 - x_i} \overset{(2б)}{=} -3 + \sigma_1 \frac{f'(\sigma_1)}{f(\sigma_1)} =$$

$$= -3 + \frac{\sigma_1(3\sigma_1^2 - 2\sigma_1^2 + \sigma_2)}{\cancel{\sigma_1^3} - \cancel{\sigma_1^3} + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{-3(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_1^3 + \sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} =$$

$$= \frac{\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}$$

(3) Да се изрази ч/з елементарните симетр. пол. $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ симетр. ф-я Σ'_1:

a) $\Sigma'_1 = (-x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1 - x_2 + \dots + x_n) \dots (x_1 + x_2 \dots - x_n)$

Нека $f \in F[x]$ има к-ни $x_1, \dots, x_n$ и ст. коеф. 1

$$f = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) =$$

$$= x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n$$

$$\Rightarrow \Sigma'_1 = (\sigma_1 - 2x_1)(\sigma_1 - 2x_2)\dots(\sigma_1 - 2x_n) =$$

$$= 2^n \left(\frac{\sigma_1}{2} - x_1\right)\left(\frac{\sigma_1}{2} - x_2\right)\dots\left(\frac{\sigma_1}{2} - x_n\right) = 2^n \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\sigma_1}{2} - x_i\right)$$

$$\overset{(2)}{\underset{a)}{=}} 2^n f\left(\frac{\sigma_1}{2}\right) = 2^n\left(\frac{\sigma_1^n}{2^n} - \sigma_1 \frac{\sigma_1^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots + (-1)^n \sigma_n\right) =$$

$$= \sigma_1^n - 2\sigma_1^n + 2^n \sigma_2 \frac{\sigma_1^{n-2}}{2^{n-2}} + \dots + 2^n(-1)^n \sigma_n =$$

$$= -\sigma_1^n + 2^2 \sigma_1^{n-2}\sigma_2 - 2^3 \sigma_1^{n-3}\sigma_3 + \dots + (-1)^n 2^n \sigma_n$$

б) $\Sigma_1' = (-x_1+x_2+\ldots+x_n)^2+(x_1-x_2+\ldots+x_n)^2+\ldots+(x_1+x_2+\ldots-x_n)^2$

$\Sigma_1' = (\sigma_1-2x_1)^2+(\sigma_1-2x_2)^2+\ldots+(\sigma_1-2x_n)^2 =$

$= \sigma_1^2-4\sigma_1x_1+4x_1^2+\sigma_1^2-4\sigma_1x_2+4x_2^2+\ldots+$

$+\sigma_1^2-4\sigma_1x_n+4x_n^2 =$

$= n\sigma_1^2-4\sigma_1(x_1+x_2+\ldots+x_n)+4(x_1^2+\ldots+x_n^2) =$

$= n\sigma_1^2-4\sigma_1^2+4(\sigma_1^2-2\sigma_2) = n\sigma_1^2-8\sigma_2$

(4) Да се изрази ч/з p и q симетричната ф-я Σ_1 от корените на полинома:

$\boxed{f = x^3+px+q}$ $(f = x^3+0.x^2+p.x+q)$

а) $\Sigma_1 = \underbrace{(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}_{1}\underbrace{(x_1^2+x_1x_3+x_3^2)}_{2}\underbrace{(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)}_{3}$

(1) $x_1^2+x_1x_2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-x_1x_2$

От ф-лите на Виет $\Rightarrow \sigma_1 = x_1+x_2+x_3 = 0 \Rightarrow$

$\boxed{x_1+x_2 = -x_3}$ и $\sigma_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = p \Rightarrow$

$p = x_1x_2+(x_1+x_2)x_3 = x_1x_2-x_3^2 \Rightarrow \boxed{x_1x_2 = p+x_3^2}$

$\Rightarrow$ (1) $= \cancel{x_3^2}-p-\cancel{x_3^2} = -p$

Аналогично в (2) и (3): (2) $= -p$ и (3) $= -p$

$\Rightarrow \Sigma_1 = (-p)^3 = -p^3$

б) $\Sigma_1 = \underbrace{\frac{x_1}{(1+x_2)(1+x_3)}}_{1}+\underbrace{\frac{x_2}{(1+x_1)(1+x_3)}}_{2}+\underbrace{\frac{x_3}{(1+x_1)(1+x_2)}}_{3}$

(1) $\frac{x_1}{(1+x_2)(1+x_3)} = \frac{(1+x_1)x_1}{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)} = \frac{(1+x_1)x_1}{-(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)}$

$\frac{\text{зад (2)}}{\text{а)}}$ $\frac{(1+x_1)x_1}{-f(-1)} = \frac{x_1+x_1^2}{-(-1-p+q)} = \frac{x_1+x_1^2}{p-q+1}$

Аналогично в ② $\frac{x_2+x_2^2}{p-q+1}$ и ③ $\frac{x_3+x_3^2}{p-q+1}$

$$\Rightarrow \sum = \frac{x_1+x_1^2+x_2+x_2^2+x_3+x_3^2}{p-q+1} =$$

$$= \frac{x_1+x_2+x_3+(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}{p-q+1} =$$

$$\underline{\underline{\text{Виет}}} \ \frac{0+0^2-2p}{p-q+1} = -\frac{2p}{p-q+1}$$

$$\text{б)} \sum = \frac{x_1^2}{1+x_1} + \frac{x_2^2}{1+x_2} + \frac{x_3^2}{1+x_3} =$$

$$= \frac{x_1^2+1-1}{1+x_1} + \frac{x_2^2+1-1}{1+x_2} + \frac{x_3^2+1-1}{1+x_3} =$$

$$= \frac{(x_1-1)\cancel{(x_1+1)}}{\cancel{1+x_1}} + \frac{1}{1+x_1} + \frac{(x_2-1)\cancel{(x_2+1)}}{\cancel{1+x_2}} + \frac{1}{1+x_2} +$$

$$+ \frac{(x_3-1)\cancel{(x_3+1)}}{\cancel{(1+x_3)}} + \frac{1}{1+x_3} = \sum_{i=1}^{3}(x_i-1) + \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{1+x_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} x_i - 3 - \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{-1-x_i} \ \overset{\text{зад ②}}{\underset{5)}{=}} \ (f(x)=x^3+px+q,\ f'(x)=3x^2+p)$$

$$= 0 - 3 - \frac{f'(-1)}{f(-1)} = -3 - \frac{+3+p}{-1-p+q} = \frac{3q-2p}{p-q+1}$$

$x_1+x_2+x_3=0$ (от Виет)

Деф. Нека $f \in F[X]$ и $\deg f > 0$. Казваме, че f е неразложим над полето F, ако не може да се представи като произведение на два полинома от $F[X]$ със степени < от степента на f. Така единствените делители на f от $F[X]$ са полиноми от вида a и $a.f$, $a \in F \setminus \{0\}$.

Заб. Полином може да е неразложим над едно поле, но да е разложим над друго, например $x^2 - 2$ е неразложим над $\mathbb{Q}$, но е разложим над $\mathbb{R}$: $(x^2 - \sqrt{2}).(x^2 + \sqrt{2}) = x^2 - 2$

Обобщение:

• единствените неразложими над $\mathbb{C}$ полиноми са полиномите от първа степен

• неразложимите над $\mathbb{R}$ полиноми са полиномите от първа степен и полиномите от втора степен с отрицателна дискриминанта.

(4) Разложете полинома $\boxed{f = x^4 + 16}$

a) над $\mathbb{C}$

Нека x_k, $k = 0, 1, 2, 3$ са корените на $f \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -16 \Leftrightarrow$

$x^4 = 16(\cos\pi + i\sin\pi) \Rightarrow$ от ф-лата на Моавър за кореняване $\Rightarrow x_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow x_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$x_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$x_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$x_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$\Rightarrow f = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

б) над $\mathbb{R}$

Виждаме от а), че корените на f над $\mathbb{C}$ са двойки комплексно спрегнати:

$x_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ $\quad x_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = \overline{x_0}$

$x_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ $\quad x_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = \overline{x_1}$

$$\Rightarrow f = ((x - x_0).(x - \overline{x_0})).((x - x_1)(x - \overline{x_1})) =$$

$$= (x^2 - (x_0 + \overline{x_0})x + x_0\overline{x_0})(x^2 - (x_1 + \overline{x_1}) + x_1\overline{x_1}) =$$

$$= (x^2 - (\sqrt{2} + \cancel{i\sqrt{2}} + \sqrt{2} - \cancel{i\sqrt{2}})x + 4)(x^2 - (-\sqrt{2} + \cancel{i\sqrt{2}} - \sqrt{2} - \cancel{i\sqrt{2}})x + 4) =$$

$$\Rightarrow f = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$$

(5) Нека $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ и $\alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, $r, s \in \mathbb{Z}$, $(r, s) = 1$ е корен на f. Да се докаже, че $r \mid a_n$ и $s \mid a_0$.

(*) $f \in \mathbb{Z}[x]$ и $f = a_0x^n + \ldots + a_n$ и $a_0 = 1$, и $\alpha \in \mathbb{Q}$ е корен на $f \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \mid a_n$)

Д-во: α - корен на $f \Rightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{r}{s}\right) = 0 \Rightarrow$

$$a_0\frac{r^n}{s^n} + a_1\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + \ldots + a_n = 0 \quad /.s^n$$

$\Rightarrow$ тези са сравними с $0 \pmod r$, защото имат като множител r

$$\Rightarrow a_0r^n + a_1r^{n-1}s + \ldots + a_ns^n = 0$$

какъв остатък дава този израз при деление на модул r

Разглеждаме по модул r:

$0 \equiv a_ns^n \pmod r \Rightarrow r \mid a_ns^n$

от усл.: $(r, s) = 1 \Rightarrow (r, s^n) = 1$

$\overset{\text{Лема}}{\underset{\text{Евклид}}{\Longrightarrow}} \boxed{r \mid a_n}$

Евклид $\rightarrow$ ако r-то дели произведение на 2 г-на знача дели поне 1 от тях

Аналогично, ако разглеждаме по модул s:

$0 \equiv a_0r^n \pmod s$

от усл.: $(r, s) = 1 \Rightarrow (r^n, s) = 1$

$\overset{\text{Лема}}{\underset{\text{Евклид}}{\Longrightarrow}} \boxed{s \mid a_0}$

(*) (В частност (ст. 79 следствие 7), ако $a_0 = 1$, то $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \mid a_n$

Лема (страница 77) Ако полиномът $f \in \mathbb{Z}[x]$ е разложим над $\mathbb{Q}$, то f е разложим и над $\mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ $f \in \mathbb{Z}[x]$ е неразложим над $\mathbb{Q} \Leftrightarrow f$ е неразложим над $\mathbb{Z}$.

⑥ Да се докаже, че полиномът f е неразложим над $\mathbb{Q}$

а) $f = x^4 + 6x^2 + 8x + 9$

* Ще докажем, че f е неразложим над $\mathbb{Z}$, откъдето ще следва според лемата (от предишната страница), че f е неразложим над $\mathbb{Q}$.

Допускаме, че $\boxed{f = g \cdot h}$ е нетривиално разлагане на f, т.е. $g, h \in \mathbb{Z}[x]$, като $\deg g \neq 0$ и $\deg h \neq 0$. $\boxed{\text{Б.О.О.}}$ нека $\boxed{\deg g \leq \deg h}$. Старшият коефициент на f е 1-ца и $g, h \in \mathbb{Z}$ => старшите коеф. на g и h са ± 1.

I сл) $\deg g = 1$, $\deg h = 3$ и нека α е к-н на g. => α е и корен на f и
=> $f = \pm(x - \alpha) \cdot h$, т.е. старшият коеф на f е 1-ца $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \mid 9$. Очевидно
=> кандидатите за α са: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Обаче f няма ⊕ к-ни => за стойности, които α може да приема остават $-1, -3$ и -9.
Ще проверим дали някоя от ст-тите $-1, -3, -9$ удовлетворява условията за корен на f чрез схема на Хорнер:

$f = x^4 + 6x^2 + 8x + 9$, кандидати: $-1, -3, -9$

	1	0	6	8	9
~~−1~~	1	−1	7	1	8
~~−3~~	1	−3	15	−37	120
~~−9~~	1	−9	87	–	–

=> такова разлагане на f: $f = g h$, $g, h \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg g, \deg h \neq 0$ и $\deg g \leq \deg h$ ($\deg h \leq \deg g$ е аналогично) не $\exists$

II сл) $\deg g = 2$, $\deg h = 2$ и нека:
$g = \pm x^2 + ax + b$, $h = \pm x^2 + cx + d$
Нека старшите коеф на g и h са със знак ⊕ (разсъжденията с ⊖ са аналогични).
=> $f = gh = (x^2 + ax + b) \cdot (x^2 + cx + d)$

$\Rightarrow f = x^4 + 6x^2 + 8x + 9 = x^4 + cx^3 + dx^2 + ax^3 + acx^2 +$
$+ adx + bx^2 + bcx + bd = x^4 + (a+c)x^3 + (b+ac+d)x^2 +$
$+ (ad+bc)x + bd$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b+ac+d=6 \\ ad+bc=8 \\ bd=9 \Rightarrow b=\dfrac{9}{d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow d=\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\} \end{cases}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

Тъй като случаите $(b,d)=(\pm 1, \pm 9)$ и $(b,d)=(\pm 9, \pm 1)$ са аналогични, нека вземем $d \neq \pm 9$:

1) $d = 1 \Rightarrow b = 9$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 9+ac+1=6 \\ a+9c=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-a \\ ac=-4 \\ a+9c=8 \end{cases} -8a=8 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=1 \\ ac=-4 \Rightarrow (-1).1=-4 \end{cases} \to \text{противоречие}$$

2) $d=-1 \Rightarrow b=-9$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ -9+ac-1=6 \\ -a-9c=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-c \\ ac=16 \\ a+9c=-8 \end{cases} \Rightarrow c=-1 \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=-1 \\ ac=16 \Rightarrow 1.(-1)=16 \end{cases} \to \text{противоречие}$$

3) $d = 3 \Rightarrow b = 3$

$$\begin{cases} a + c = 0 \Rightarrow a + c = 0 \\ 3 + ac + 3 = 6 \\ 3a + 3c = 8 \Rightarrow a + c = \frac{8}{3} \end{cases}$$ и невъзможно => противоречие

4) $d = -3 \Rightarrow b = -3$

$$\begin{cases} a + c = 0 \Rightarrow a + c = 0 \\ -3 + ac - 3 = 6 \\ -3a - 3c = 8 \Rightarrow a + c = -\frac{8}{3} \end{cases}$$ противоречие

=> такова разлагане на f е невъзможно

=> f е неразложим над $\mathbb{Z} \xRightarrow{\text{Лема}}$ f е неразложим над $\mathbb{Q}$

доп.б) $f = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ -> неразложим над $\mathbb{Q}$

⑦ Нека $a, b \in F$, $a \neq 0$ и $f(x) \in F[x]$. Докажете, че $f(x)$ е неразложим над полето $F \Leftrightarrow f(ax + b)$ е неразложим над F.

Критерий на Айзенщайн:

Нека $f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ и $\exists$ p-просто ч-ло, удовлетворяващо следните изисквания:

1) $p \nmid a_0$

2) $p \mid a_1, \ldots, a_n$

3) $p^2 \nmid a_n$

Тогава полиномът f е неразложим над $\mathbb{Q}$

8 а) $f = 2x^5 - 21x^2 + 42x + 63$ ← ДСДЕ пол. f е неразложим над $\mathbb{Q}$

Прилагаме кр. на Айзенщайн за $p = 7$:

1) $7 \nmid 2$

2) $7 \mid -21, 42, 63$

3) $7^2 \nmid 63$

$\Rightarrow$ f е неразложим над $\mathbb{Q}$

б) $f = x^4 - 2x + 3$

В случая кр. на Айзенщайн не е директно приложим. Нека затова разглеждаме $f(x+1)$:

$f(x+1) = (x+1)^4 - 2(x+1) + 3 =$

$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - 2x - 2 + 3 =$

$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2$

$f(x+1) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2$

за $p = 2 \xrightarrow{\text{кр. Айз.}} f(x+1)$ е неразложим над $\mathbb{Q}$

$\xrightarrow{7} f(x)$ е неразложим над $\mathbb{Q}$

в) $f = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$, p-просто ч-ло

От ф-ла за геометр. прогресия ($a_n = a_1 q^{n-1}$) получаваме:

$f(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1}$, разгл. $f(x+1)$:

$f(x+1) = \dfrac{(x+1)^p - 1}{(x+\cancel{1}) - \cancel{1}} \overset{\text{биномна}}{\underset{\text{формула}}{=}} \dfrac{x^p + \binom{p}{1}x^{p-1}\cdot 1 + \ldots + \binom{p}{p}\cancel{1^p} - \cancel{1}}{x}$

$= x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1}x^{1-1} = x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1}$

т.к. $(p, 1) = (p, 2) = \ldots = (p, p-1) = 1$, то $p \mid \binom{p}{k} =$

$= \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \binom{p}{p-k} = \dfrac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$, $k = \overline{1, p-1}$

и $p^2 \nmid \binom{p}{p-1} = p \Rightarrow$ От кр. Айзенщайн за p-просто ч-ло, $f(x+1)$ е неразложим над $\mathbb{Q}$ $\xrightarrow{7} f$ е неразложим над $\mathbb{Q}$