вариант	ф. номер	група	вариант	курс	специалност
КР2.2	0MI0600041	**1**	**1**	**I**	**Софтуерно инженерство**
Име:	**Филип Красимиров Филчев**				

Контролна работа № 2.2

08.01.2022

Задача 1. (4т.) В зависимост от стойностите на реалния параметър λ да се намери рангът на системата вектори v_1, v_2, v_3, v_4 и v_5, където

$$\begin{aligned} v_1 &= (\lambda, -10, -5, 5, 1) \\ v_2 &= (10, -10, -5, 5, 1) \\ v_3 &= (-10, -5, \lambda, 5, 1) \\ v_4 &= (-10, \lambda, -5, 5, 1) \\ v_5 &= (-10, -5, 5, \lambda, 1) \end{aligned}\ .$$

Задача 2. (4 т.) В линейно пространство $\mathbb{V}$ с базис $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ и $\mathbf{e_4}$ е даден линейният оператор $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4) = \\ &\qquad = (-2\xi_1 - 2\xi_2 - \xi_3 - 2\xi_4)\,\mathbf{e_1} + (3\xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 - \xi_4)\,\mathbf{e_2} + \\ &\qquad\qquad + (3\xi_1 + 9\xi_2 + 2\xi_3 + 7\xi_4)\,\mathbf{e_3} + (5\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4)\,\mathbf{e_4}. \end{aligned}$$

Да се намерят матрицата на оператора $\mathcal{A}$, както и базиси на $\operatorname{Ker}\phi$, $\operatorname{Im}\phi$, $\operatorname{Ker}\phi + \operatorname{Im}\phi$ и $\operatorname{Ker}\phi \cap \operatorname{Im}\phi$.

Филип Красимиров Филев, фн: 0MI0600041

Софтуерно инженерство, I курс, I група

Контролна работа №2 част 2

(1)

$u_1 = (\lambda, -10, -5, 5, 1)$

$u_2 = (10, -10, -5, 5, 1)$

$u_3 = (-10, -5, \lambda, 5, 1)$

$u_4 = (-10, \lambda, -5, 5, 1)$

$u_5 = (-10, -5, 5, \lambda, 1)$

$$(-1)\cdot \begin{array}{c} \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} 10 & -10 & -5 & 5 & 1 \\ \lambda & -10 & -5 & 5 & 1 \\ -10 & \lambda & -5 & 5 & 1 \\ -10 & -5 & \lambda & 5 & 1 \\ -10 & -5 & 5 & \lambda & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \to u_2 \\ \to u_1 \\ \to u_4 \\ \to u_3 \\ \to u_5 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 10 & -10 & -5 & 5 & 1 \\ \lambda-10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & \lambda+10 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 5 & \lambda+5 & 0 & 0 \\ 20 & 5 & 10 & \lambda-5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda-10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & \lambda+10 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 5 & \lambda+5 & 0 & 0 \\ 20 & 5 & 10 & \lambda-5 & 0 \\ 10 & -10 & -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ при $\lambda = \{10, -10, 5, -5\}$ $r(A) = 4$

при $\lambda \neq 10, -10, 5$ и -5 $r(A) = 5$

= 1 =

② V - ЛП, базис e_1, e_2, e_3, e_4, $\mathcal{A} \in Hom\, V$

$\mathcal{A} = (\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \varepsilon_3 e_3 + \varepsilon_4 e_4) = (-2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - 2\varepsilon_4)e_1 +$

$+(3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)e_2 + (3\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 7\varepsilon_4)e_3 +$

$+(5\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4)e_4$

1) матр. на $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}(e_1) = (-2.1 + -2.0 - 1.0 - 2.0)e_1 + (3.1 - 3.0 + 1.0 - 1.0)e_2$
$+ (3.1 + 9.0 + 2.0 + 7.0)e_3 + (5.1 - 1.0 + 2.0 + 1.0)e_4 =$
$= -2e_1 + 3e_2 + 3e_3 + 5e_4 \quad (\varepsilon_1 = 1; \varepsilon_2 = 0; \varepsilon_3 = 0; \varepsilon_4 = 0)$

$\mathcal{A}(e_2) = -2e_1 - 3e_2 + 9e_3 - 1e_4 \quad (\varepsilon_1 = 0; \varepsilon_2 = 1; \varepsilon_3 = 0; \varepsilon_4 = 0)$

$\mathcal{A}(e_3) = -e_1 + e_2 + 2e_3 + 2e_4 \quad (\varepsilon_1 = 0; \varepsilon_2 = 0; \varepsilon_3 = 1; \varepsilon_4 = 0)$

$\mathcal{A}(e_4) = -2e_1 - e_2 + 7e_3 + e_4 \quad (\varepsilon_1 = 0; \varepsilon_2 = 0; \varepsilon_3 = 0; \varepsilon_4 = 1)$

$\Rightarrow \mathcal{A}(e_1) = (-2, 3, 3, 5)$
$\mathcal{A}(e_2) = (-2, -3, 9, -1)$
$\mathcal{A}(e_3) = (-1, 1, 2, 2)$
$\mathcal{A}(e_4) = (-2, -1, 7, 1)$

$\tilde{\delta}$

A^t

$$\Rightarrow A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}(e_1)\ \mathcal{A}(e_2)\ \mathcal{A}(e_3)\ \mathcal{A}(e_4) \end{array}$$

=2=

Базис Ker φ: XC1y

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$-2x_1 - 2x_2 - 1x_3 - 2x_4 = 0$$
$$+3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$3x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0$$
$$5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-3) \cdot(-5) \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 12 & 1 & 8 \\ \cancel{0} & \cancel{24} & \cancel{2} & \cancel{16} \\ \cancel{0} & \cancel{24} & \cancel{2} & \cancel{16} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2R_2 \\ 2R_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 12 & 1 & 8 \end{pmatrix} r=2 \Rightarrow \dim U = n-r = 4-2 = 2 \to 2 \text{ вектора за ФСР}$$

$$x_4 = p \Rightarrow 12x_2 = -8p - q$$
$$x_3 = q \qquad x_2 = \frac{-8p-q}{12}$$

$$x_1 = 5\left(\frac{-8p-q}{12}\right) + 3p =$$

$$= \frac{-40p - 5q + 36p}{12} = \frac{-4p - 5q}{12}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = \Big(\underbrace{\frac{-4p-5q}{12}, \frac{8p-q}{12}}_{12}, q, p\Big) =$$

$$= p \cdot (-4, 8, 0, 12) + q \cdot (-5, -1, 12, 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ базис Ker φ $= \{(-4, 8, 0, 12), (-5, -1, 12, 0)\}$

Базис Im φ $A \to A^t$

$$A^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & 9 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-2) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{-5} & \cancel{5} & \cancel{-5} \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{3} & \cancel{-3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ =-5R_1 \\ \\ =-3R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$=3=$ $\to$ базис Im φ.

Базис Ker + Im

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ -5 & -1 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot(-1) \cdot(-5) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot(-1) \, (6) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-4} & \cancel{4} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} + \operatorname{Im} \varphi = \underline{\underline{3}}$$

Im φ в хс 1 у

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$x_4 = p \quad x_2 = q - p$

$x_3 = q \quad x_1 = p + q$

$\Rightarrow p \cdot (1, -1, 0, 1) + q(1, 1, 1, 0)$

$=4=$

$x_1 - x_2 + x_4 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$\Rightarrow$ Ker ∩ Im

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot(2) \cdot(-3) \cdot(-5) \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 12 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -4 \\ 1 & & & \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$