Лекция 15 12.01.2022г.

Нека $\mathbb{Q}$ и $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$

$f(x) \in \mathbb{Q}[x] \to f(x) \in \mathbb{Z}[x] \xrightarrow[p \text{ пр.ч.},\ p \nmid a_0]{} \bar{f}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$

Т. $f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{Z}[x]$

Деф. Казваме, че f е примитивен полином, ако $(a_0, a_1, \dots, a_n) = 1$, т.е. в съвкупност коефициентите му са вз. прости.

$f = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n \in \mathbb{Z}[x]$

$(b_0, b_1, \dots, b_n) = d \Rightarrow$

$f = d\,(\underbrace{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}_{\text{примитивен}}) \Rightarrow f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$

Лема (на Гаус)$^{*}_{1}$ (за прим. полином) Произведението на два примитивни полинома е примитивен полином.

Док: f, g - прим. полиноми, $\nexists$ p пр.ч. $p \nmid$ ст. коеф. на f и g

$\Rightarrow \bar{f} \neq \bar{0}, \bar{g} \neq \bar{0} \underset{\mathbb{Z}_p[x] \text{ о.д.}}{\Rightarrow} \bar{f}\bar{g} \neq \bar{0} \Rightarrow fg$ е примитивен полином.

$f \in \mathbb{Q}[x] \Rightarrow f(x) = a_0x^n + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$

примитивен полином и избираме $p \nmid a_0$,

за да запазим степента на полинома f

и $\bar{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$, $\bar{f} = \bar{a}_0 x^n + \bar{a}_1 x^{n-1} + \dots + \bar{a}_n \in \mathbb{Z}_p[x]$

редукция на f полином по модул p

$\bar{f} \neq \bar{0}$.

IV. Th (критерий на Айзенщайн): Нека

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{Z}[x]$, $a_0 \neq 0$

и $\exists$ пр. ч. p, т.ч.

1) $p \nmid a_0$
2) $p \mid a_1, a_2, \dots, a_n$
3) $p^2 \nmid a_n$

Тогава f е неразложим над полето $\mathbb{Q}$ полином

Док: Допускаме противното, т.е. че

$f = gh$, $\deg g < \deg f$, $\deg h < \deg f$

$f = a_0x^n + \dots + a_n = gh$ и редуцираме по p:

$\bar{f} = \bar{a}_0 x^n = \bar{g}\bar{h} = (\bar{b}_0 x^k)(\bar{c}_0 x^l) \in \mathbb{Z}_p[x]$

$$k+l=n, \quad \bar{a}_0 \neq \bar{0} = \underset{\neq 0}{\bar{b}_0}\,\underset{\neq 0}{\bar{c}_0}$$ област

$$\Rightarrow g = b_0 x^k + p g_1, \quad g_1, h_1 \in \mathbb{Z}[x]$$
$$h = c_0 x^l + p h_1$$

$$\Rightarrow f = a_0 x^n + \dots + a_{n-1}x + \underline{a_n} = (b_0 x^k + p g_1)(c_0 x^l + p h_1)$$

$$a_n = p \cdot b_k \cdot p \cdot c_l = p^2 b_k c_l$$

$p^2 \mid a_n$ в противоречие с 3)

$\Rightarrow f$ е неразложим над $\mathbb{Q}$ $\underline{\underline{\text{конец}}}$

<u>Пр</u>: $f = 2x^7 + 3x^6 + 9x^5 + 18x^4 + 36x + 21 \in \mathbb{Z}[x]$

$p = 3 \quad p \nmid 2 \quad p \mid 3, 9, 18, 36, 21, \quad p^2 \nmid 21$

Кр. Айзенщайн $\Rightarrow f$ е нераз. над $\mathbb{Q}$ $\underline{\underline{\text{конец}}}$

<u>Сл</u>: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists$ полином $f \in \mathbb{Q}[x]$ от $\deg f = n$, който е неразложим над $\mathbb{Q}$ конец

<u>Док</u>: $f = x^n + p$, p пр. ч., Кр. Айзенщайн $\Rightarrow$ неразложим над $\mathbb{Q}$ конец

$\underline{\text{Тв}}$ $f \in F[x]$, то $f(x)$ и $f(ax+b)$
$a, b \in F$
$a \neq 0$
са едновременно разложими (неразложими)
над полето F полиноми

$\underline{\text{Пр.}}$ $f = x^3 + 2x + 3$
$f(x+1)$ $f(x+2)$
$f(x-1)$ $f(x-2)$

$\underline{\text{Тв:}}$ $f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$, $a_0 \neq 0$

$\alpha = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$. $f(\alpha) = 0 \Leftarrow$ $u \mid a_n$, $v \mid a_0$

α е рац. корен на f

$(u,v)=1$

$\underline{\text{Док:}}$ $v \mid a_0 \Leftarrow \overbrace{a_0 u^n + \underbrace{a_1 u^{n-1} v + \dots + a_{n-1} u v^{n-1}}_{u \mid}}^{v \mid} + a_n v^n = 0$

$\Rightarrow u \mid a_n$

$(u,v)=1$

$\underline{\text{Сл!}}$ $f = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$, $\alpha \in \mathbb{Z}$

и $f(\alpha) = 0 \Leftarrow \alpha \mid a_n$.

α цял корен на f.

$\underline{\text{Th}}$ (редукционен критерий):
Нека $f = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{Z}[x]$, $a_0 \neq 0$
и p е просто число, $p \nmid a_0 \Rightarrow \bar{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$
$\bar{f} \neq \bar{0}$. Тогава ако $\bar{f}$ е неразложим над
полето $\mathbb{Z}_p$ искам, то f е неразложим
над полето $\mathbb{Q}$ искам.

<u>Заб.</u> Обратното твърдение в общия
случай не е вярно!!!

$\mathbb{Q}[x]$

<u>Заб:</u> $f(x) = a_0x^6 + \dots + a_6 \in \mathbb{Z}[x]$

1) $f(x) = (x-\alpha)(x^5 \dots)$, т.е f има
рац. корен $\underline{\alpha}$.
$\alpha \mid a_6$: $f(\alpha) \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{Z}$
ако $f \neq (x-\alpha)(x^5 \dots) \Rightarrow f$ няма
рационален корен.
Ако $\deg f = 2$ или $3 \to f$ е нер. над $\mathbb{Q}$ искам.

2) $f=(x^2+ax+b)(x^4+\ldots)$, $\mathbb{Z}_3[x]$ $\bar{f}$ нер. $\mathbb{Z}_3$

или $f=(x^3+\ldots)(x^3+\ldots)$ $\Downarrow$

$\Rightarrow$ в $\mathbb{Z}_2[x]$ $\bar{f}$ е нер. над $\mathbb{Z}_2$ $\quad f\neq(x^2+\ldots)(x^4+\ldots)$

$f\neq(x^3+\ldots)(x^3+\ldots)$

$\Rightarrow$ f е нер. над $\mathbb{Q}$ изцяло

! $f=x^4+\ldots+a_4=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ в $\mathbb{Z}[x]$

$$\begin{cases} a_1=a+c \\ a_2=\ldots \\ a_3=\ldots \\ a_4=\ldots \end{cases}$$

$\nexists$ цели числа a,b,c,d:

$\Rightarrow f\neq(x^2+\ldots)(x^2+\ldots)$

Корени на полиномите

Нека F е поле, $f(x) \in F[x]$, $F[x]$ - област

<u>факторпръстен:</u> $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ - ком. пръстен с 1,

$I = \langle n \rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}$, $\quad \mathbb{Z}/I \cong \mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$

$n \in \mathbb{N}$

идеал

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$$
$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$$

$\overline{a} = a + \underline{nk}$, $\quad \overline{a} = a + I \Rightarrow (\mathbb{Z}/I, +, \cdot)$

факторпръстен

$\Rightarrow$ комут. с 1

$(F[x], +, \cdot)$ - комут. пр. с 1

$I = \langle f \rangle \trianglelefteq F[x]$, $\quad f = x^2 - 7$

$\forall h \in I \Rightarrow h = (x^2 - 7) g$

$\left(F[x]/I, +, \cdot\right)$, $\quad I = \overline{0} + I = \overline{0}$

факторпръстен комут. пр. с 1

$g \in F[x]$

$g = fq + \underline{r}$

$\deg r < \deg g$

$F[x]/I = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{x+1}, \overline{3x+5}, \dots\}$

$\bar{a} = a + I \qquad \underset{\nparallel a}{r} + f(h)$

Th $f \in F[x], \deg f > 0, I = (f) \trianglelefteq F[x]$.
Тогава f е неразложим над полето F полином $\iff F[x]/_I$ е поле

Def. Нека $f(x) \in F[x]$ и $\alpha \in \underset{\text{поле, разширение на полето } F}{K \geq F}$.

и казваме, че $\underline{\alpha \text{ е корен на полинома } f}$,

ако $\underset{0=}{f} = (x-\alpha)g, \ g \in K[x]$, т.е. $f(\alpha) = 0$.

Th Нека $f(x) \in F[x], \deg f > 0$. Тогава $\exists$ разширение $K \geq F$, в което $f(x)$ притежава корен $\alpha \in K$: $f(\alpha) = 0$.

Д: $I = (f) = \underset{\text{нер. над } F}{\langle f \rangle} \trianglelefteq F[x]$ и $\underset{\text{поле}}{K = F[x]/_I}$

и $K \geq F$ и в K: $\exists \alpha$: $f(\alpha) = 0$.

Сл: $f(x) \in F[x]$, $\deg f = n > 0$. Тогава $\exists L \geq F$ разширение на полето F, в което $f = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) \in L[x]$

$f = a_0x^n + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$; $L \geq L_k \geq L_{k-1} \geq \dots \geq L_1 \geq F$,

т.е f се разпада на линейни множители

Def. $f(x) \in F[x]$, $\deg f = n > 0$. Най-малкото разширение L на полето F, $L \geq F$, в което $f = a_0(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$ се разпада на линейни множители наричаме Lполе на разлагане на пол. f над полето F.

Заб. 1) $L = \bigcap L_i$, $F \leq L_i$, $\forall \alpha_i \in L_i$

2) над полето F е съществено, т.к

а) $f = x^2 - 7 \in \mathbb{Q}[x] \Rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{7}) \geq \mathbb{Q}$

$f = (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{7})[x] \Rightarrow$

$\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ е полето на разлагане на f над $\mathbb{Q}$.

б) $f = x^2 - 7 \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow$

$f = (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) \in \mathbb{R}[x]$

$\mathbb{R}$ е поле на разлагане на f над $\mathbb{R}$.

Th (за ! на полето на разлагане на f над полето F) Нека F поле, $f(x) \in F[x]$, $\deg f = n > 0$ и L_1 и L_2 са две полета на разлагане на f над F. Тогава $L_1 \cong L_2$, т.е. с точност до изоморфизъм $\exists!$ поле на разлагане на полином f над полето F.

Формули на Виет !!!

Нека $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n \in F[x]$,
$a_0\neq 0$

и нека L е полето на разлагане на полинома f над полето F, т.е. $L \geq F \Rightarrow$

и $f(x)=a_0x^n+\dots+a_n=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)\in L[x]$

където $\alpha_i \in L$, $i=\overline{1,n}$ са корените на f.

В сила са следните формули на Виет:

брой на събираемите

$\binom{n}{1}$ $\sigma_1=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=(-1)\frac{a_1}{a_0}$

$\binom{n}{2}$ $\sigma_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\dots+\alpha_{n-1}\alpha_n=(-1)^2\frac{a_2}{a_0}$

$\binom{n}{3}$ $\sigma_3=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\dots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=(-1)^3\frac{a_3}{a_0}$

$\vdots$

$\binom{n}{n}$ $\sigma_n=\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$

в общ вид:

брой $\binom{n}{i}$ $\sigma_i=\sum \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_i=(-1)^i\frac{a_i}{a_0}$

Ф-ли на Виет за полин от 3-deg

$f = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, $f \in F[x]$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in L \geq F$ корени на f

$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -b/a$

$\sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{c}{a}$

$\sigma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a}$

Ф-ли на Виет за полин от 4 deg

$f = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m \in F[x]$, $a \neq 0$,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – корени на f, $\alpha_i \in L \geq F$.

$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -b/a$

$\sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = c/a$

$\sigma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -d/a$

$\sigma_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{m}{a}$

Сл: Нека полето $L \supseteq F$ е поле, в което $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$. Нека означаваме функциите $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ на елементите $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Тогава $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ са корени на полином $f \in F[x]$ от вида

$$f(x) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} X + (-1)^n \sigma_n \in L[x]$$

$$\parallel$$

$$X^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \in F[x], \; F \leq L;$$

σ_i – елементарни симетрични полиноми.

$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), \; \sigma \in S_n$ сим. гр. от пермутации.

$\Downarrow$ f – симетричен полином

Т (Уилсън) p пр. число, то $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$

Док: в $\mathbb{Z}_p$: $(p-1)! = \bar{1} \cdot \bar{2} \ldots \overline{p-1} = -\bar{1}$

в $\mathbb{Z}_p[x]$: $f = x^{p-1} - \bar{1} = (x - \bar{1})(x - \bar{2}) \ldots (x - \overline{p-1})$

$x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ и Т. Ферма

последната формула на Виет $\Rightarrow$

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{p-1} = \overline{p-1}! = (-1)^{p-1}(-\overline{1})$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{p-1}! = (-1)^p = \begin{cases} -1 & , p \geq 3, \text{пр. ч.} \\ 1 = -1 & , p = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{p-1}! = -\overline{1} \Rightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

Деф. Нека $f(x) \in F[x]$ и $L \supseteq F$, $\alpha \in L$.
Казваме, че α е k-кратен корен на $f(x)$, ако $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$, $g \in L[x]$ и
$g(\alpha) \neq 0$

В частност ако $k=1$ е прието да се говори, че α е прост корен (1-кратен корен).

Заб. Нека $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, f'', …, $f^{(j)}$ са формалните производни на полинома f.

$$ax^n \to nax^{n-1}$$

$\underline{Th}$ (критерий за к-кратен корен на полином) $f \in F[x]$, $\underline{\mathrm{char}\, F = 0}$

Нека F е поле с характеристика 0, т.е $\mathrm{char}\, F = 0$ и $f(x) \in F[x]$, $\deg f > 0$.
Нека $L \supseteq F$ и $\alpha \in L$. Тогава ~~имаме~~

α е к-кратен корен на $f(x)$ $\Leftrightarrow$

$f^{(0)}(\alpha) = f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \dots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

$\underline{Док}$: $\Rightarrow$ α е к-кратен корен на $f(x)$.
индукция по $\underline{\underline{k}}$

$\underline{k=1}$ $f(x) = (x-\alpha)\, g(x)$, $g(x) \in L[x]$, $g(\alpha) \neq 0$

$\underline{f(\alpha) = 0}$, $f'(x) = g(x) + (x-\alpha)\, g'(x)$

$''f^{(0)}(\alpha)''$, $\underline{f'(\alpha)} = g(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha$ е 1-кратен корен

ИП е в сила критерий за к-1-кратен корен

$\underline{\underline{k}}$: $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$, $g(x) \in L[x]$, $g(\alpha) \neq 0$

$f'(x) = k\,(x-\alpha)^{k-1} g(x) + (x-\alpha)^k g'(x)$

$$f'(x) = (x-\alpha)^{k-1}\underbrace{(k\,g(x) + (x-\alpha)g'(x))}_{h(x)}$$

$f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, $f'(x) = (x-\alpha)^{k-1} h(x)$

~~def f'~~ за f' говорим за $(k-1)$-кратен корен, ~~не~~

$f(\alpha) = 0$

$f'(\alpha) = 0$

$f''(\alpha) = 0$

$\vdots$

$f^{(k-2)}(\alpha) = 0$

$f^{(k-1)}(\alpha) = 0$

$f^{(k)}(\alpha) = h(\alpha) = \boxed{k\,g(\alpha) \neq 0}$

$$\boxed{\begin{array}{c} f^{(k)}(\alpha) = k\,g(\alpha) \neq 0 \\ \mathrm{char}\,F = 0 \end{array}} \quad k \neq 0 \Rightarrow \boxed{g(\alpha) \neq 0}$$

Обратно, ако $\alpha \in L : \underbrace{f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(k-1)}(\alpha)}_{} = 0$

$f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$

Да допуснем, че α е s-кратен корен на $f(x)$

или $k \geq s$ имаме противоречие $f^{(s)}(\alpha) = 0$, $f^{(s)}(\alpha) \neq 0$

или $s \geq k$ пак $f^{(k)}(\alpha) = 0$, $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$

$\Rightarrow k = s$, т.е. k-кратен корен е α на $f(x)$.

Th (общ критерий за кратен корен):

Един $f(x) \in F[x]$ има кратен корен $\alpha \in L \supseteq F \iff \alpha$ е общ корен на $f(x)$ и $f'(x)$.

Заб. $k g(\alpha) \neq 0 \Rightarrow g(\alpha) \neq 0$
$k > 1$

Заб. Дискриминантата на f дава друг критерий за кратен корен на f, а резултантата на два полинома f и g дава критерий за техен общ корен (виж качения в курса по Алгебра в мудъл материал)

Симетрични полиноми

A – ком. пр. с 1 $\rightarrow$ $A[x_1]$ – комут. пр. с 1
област $\qquad\qquad$ $A[x_1]$, $F[x_1]$ } област
F – поле

$B = A[x_1]$ $\rightarrow$ $B[x_2] = A[x_1][x_2]$
$F[x_1]$ $\qquad\qquad$ $F[x_1][x_2]$

– – след краен брой стъпки

$A[x_1][x_2]\dots[x_n] = A[x_1,\dots,x_n]$ – комут. пр. с 1

A – област $\rightarrow$ $A[x_1,\dots,x_n]$ – област
F – поле $\qquad$ $F[x_1,\dots,x_n]$

Нека $F[x_1,\dots,x_n]$ е пръстенът на полиномите на променливите $x_1,\dots,x_n$ с коеф. от F.

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum a\, x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}, \quad a \in F$$

$u = a x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ – едночлен

$\tilde{u} = b x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$ е подобен на u едночлен

ако $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_n = j_n$

в f се прави привеждане на подобните едночлени и накрая записване

$$f_{(x_1,\dots,x_n)} = \sum u_j,\quad u_j = a x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} = u$$

в сума на неподобни едночлени

степен на едночлен u спрямо относно пром. x_k:

$$\deg_{x_k} u = i_k \qquad u = 5 x_1^2 x_2^3 x_3^4 \dots x_7^{15}$$

$$\deg_{x_3} u = 4$$

степен на едночлен u:

$$\deg u = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

степен на f относно пром. x_k

$$\deg_{x_k} f = \max_j \{\deg_{x_k} u_j\}$$

степен на f:

$\deg a = 0$, $a \neq 0$

$$\deg f = \max_j \{\deg u_j\} \qquad \deg 0 := -\infty$$

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g \quad (A\text{ – област},\ F\text{ – поле})$$

Лексикографска наредба в $F[x_1 \dots x_n]$:

Нека:
$u = a x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ и $w = b x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$

са два едночлена в $F[x_1 \dots x_n]$

Казваме, че u е по-напред по наредбата от W и означаваме $u \geq W$, ако $\exists k$:

$$i_1 = j_1,\ i_2 = j_2,\ \dots,\ i_{k-1} = j_{k-1},\ i_k > j_k$$

Тв. Ако u и w са два неподобни едночлена, то е вярно точно едно от $u \geq W$ или $W \geq u$.

$\Rightarrow u > W$ и $W > V \Rightarrow u > V$

Така $f = \sum u_j$ подредени лексикографски

Старши коефициент на полином f наричаме коефициента на първия в лекс. наредба едночлен $\underline{u}$ на полинома f;

$+a \quad (a x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0)$ – свободен коеф-т

$f = 2x_2^7 x_3 x_4^6 + 5\underline{x_1^2} x_3 x_4 + 7\underline{\underline{x_1}} x_2^2 x_4 + 1 x_3 x_4 + 8$

$\Rightarrow f = \underbrace{5 x_1^2 x_3 x_4}_{u} + 7 x_1 x_2^2 x_4 + 2 x_2^7 x_3 x_4^6 + x_3 x_4 + 8$

<u>Лема (за старшия едночлен):</u> Анабаев

$f, g \in F[x_1, \dots, x_n]$ и $h = fg$

$f = u + \dots$ $\Rightarrow h = uw + \dots$

$g = w + \dots$

Старшият едночлен на $\overset{=fg}{h}$ е произведението uw от старшите едночлени u и w на f и g съответно

<u>Def</u> Нека $f(x_1, \dots, x_n) \in F[x_1, \dots, x_n]$. Казваме, че f е симетричен полином, ако $\forall$ пермутация на променливите, т.е. $\forall \sigma \in S_n$ полинома f не се променя, т.е.

$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$

Пример: $f(x_1, x_2, x_3) = \underset{\text{симетр.}}{\sum} x_1^2 x_2^2 + \sum x_1^2 + 3$

$= \underbrace{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2} + \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + 3$

$f(x_1, x_2, x_3) = \sum u$ за сим. чл.

$\underline{u = a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}}, \quad \underline{k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq \ldots \geq k_n}$

$x_1^4 x_2^3 x_3^2$

$x_1^6 x_2^4 x_3^2$

Елементарни симетрични полиноми се:

$\sigma_1 = \sigma_1(x_1 \ldots x_n) = x_1 + \ldots + x_n$

$\sigma_2 = \sigma_2(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n$

$\sigma_n = \sigma_n(x_1 \ldots x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$

<u>Th</u> (Основната Th за сим. полиноми)

$\forall$ симетричен полином $f(x_1, \dots, x_n) \in F[x_1, \dots, x_n]$
$f \neq const$ (достатъчно А-алгебра)

$\exists! \; g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = f(x_1, \dots, x_n)$

f_1, f_2 – сим. полиноми

<u>Сл</u>: $h = \dfrac{f_1(x_1 \dots x_n)}{f_2(x_1 \dots x_n) \neq 0} \in F[x_1 \dots x_n], \; f_2 \neq 0$

рационална функция в $\Rightarrow$

$$\exists! \; g_1, g_2 : \; h = \frac{f_1(x_1 \dots x_n)}{f_2(x_1 \dots x_n)} = \frac{g_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}{g_2(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}$$

Формули на Нютон за степенните сборове:

$f = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in F[x]$, $\alpha_i \in L \supseteq F$ корени

Степенни сборове $S_k := \alpha_1^k + \alpha_2^k + \dots + \alpha_n^k$, $S_0 = n$

Ф-ли на Нютон: $S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} S_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k \sigma_k = 0.$

$n > k$
$\sigma_k = 0.$

$$S_k + a_1 S_{k-1} + a_2 S_{k-2} + \ldots + a_{k-1} S_1 + k a_k = 0$$