Лекция №12 18.12.2024г

Собствени стойности и собствени вектори на линеен оператор. Инвариантни подпр-ва

Характеристичен полином и х. корени

Нека $A \in M_n(F)$ и да образуваме следната детерминанта:

$$f_A(x) := \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = \det(A-xE) = |A-xE|$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})}_{\mathrm{tr}A \text{ - следа на м. } A} x^{n-1} + \dots + \det A$$

Def. Пол. $f_A(x)$ наричаме характ. полином на м. A и неговите корени наричаме хар. корени на м. A.

Сл: Ако A е триъгълна матрица, то елементите по главния ѝ диаг., т.е a_{ss}, $s=\overline{1,n}$ са нейните хар. корени

Дво: $f_A(x)=\begin{vmatrix} a_{11}-x & & * \\ & a_{22}-x & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn}-x \end{vmatrix}=(a_{11}-x)\dots(a_{nn}-x)$

$=(-1)^n(x-a_{11})(x-a_{22})\dots(x-a_{nn})$

Тв. Подобните матрици имат един и същи хар. полином, т.е. ако $A\sim B$, то $f_B(x)=f_A(x)$.

Дво: $A\sim B$, $\exists$ обр. $T\in M_n(F)$: $B=T^{-1}AT$

$f_B(x)=\det(B-xE)=\det(T^{-1}AT-xT^{-1}ET)=$

$=\det(T^{-1}(A-xE)T)\underset{\text{умн } \det}{=}\det T^{-1}\cdot\det(A-xE)\cdot\det T$

$\underset{F}{=}\underbrace{\det T^{-1}\cdot\det T}_{\substack{\det(T^{-1}T)\\ \det E=1}}\cdot\underbrace{\det(A-xE)}_{f_A(x)}=1\,f_A(x)=f_A(x)$

$\Rightarrow f_B(x)=f_A(x)$

Ако V е n-мерно л. п-во, то за $\varphi \in \mathrm{Hom}\,V$ имаме, че матриците на φ ⟺ в различни бази на V са подобни ⟹ имат едни и същи хар. полином.

Деф. V $\substack{\text{л.п-во}\\ \text{над}}$ F, $\dim V = n < \infty$, $\varphi \in \mathrm{Hom}\,V$.
Казваме, че $f_A(x)$, е хар. полином на л. опр φ и означаваме $f_\varphi(x) = f_A(x)$, ако в коя да е базис $e = \{e_i\}_1^n$ на V на $\varphi \underset{e}{\leftrightarrow} A \in M_n(F)$. Корените на $f_\varphi(x) = f_A(x) = \det(A - xE)$ са хар. корени на л. опр φ.

Собствени вектори и собств. ст-ти на φ

Деф. Нека V е л. п-во и $\varphi \in \mathrm{Hom}\,V$.
Казваме, че един ненулев вектор $w \in V$ е собствен в-р, отговарящ на собств. ст-т $\lambda \in F$, ако
1) $w \neq \theta$
2) $\varphi(w) = \lambda w$.

Казваме още, че $\lambda \in F$ е с. ст. на, отговаряща на с. вр. $w \in V$.

Ще отбелязваме $\underset{\text{с.в.}}{w} \Longleftrightarrow \underset{\text{с.ст}}{\lambda}$

Тв. Ако $\lambda \in F$ е с. ст. на $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, то множеството от собств. вр. $\Longleftrightarrow \underset{\text{с.ст}}{\lambda \in F}$ плюс нулевият ϑ е подпрво на V, т.е.

$$U_\lambda = \{ w \in V \mid \varphi(w) = \lambda w, \underset{\text{с.вр}}{\underset{\text{не е}}{\vartheta}} \} \leq V$$

Дво: $\forall u, w \in U_\lambda$ и $\forall \alpha, \beta \in F$

$u \in U_\lambda \Leftrightarrow u \neq \vartheta$, $\varphi(u) = \lambda u$

$w \in U_\lambda \Leftrightarrow w \neq \vartheta$, $\varphi(w) = \lambda w$

$\alpha u + \beta w \in ? \, U_\lambda$, $\alpha u + \beta w \neq \vartheta$

$\varphi(\alpha u + \beta w) \underset{\varphi \in \operatorname{Hom} V}{=} \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(w) = \alpha(\lambda u) +$

$+ \beta(\lambda w) = \lambda(\alpha u + \beta w) \Rightarrow \alpha u + \beta w \in U_\lambda$

и по кр. $\Rightarrow U_\lambda \leq V$.

Th: Нека V е n-мерно л. прво и $\varphi \in \mathrm{Hom}\,V$. Тогава хар. кор. на φ, които са ел-ти от F и само те са собств. ст-ти на φ.

Дво: Нека $\lambda \in F$ е собств. ст-т на $\varphi \Leftrightarrow$ $w \neq \theta$, $\varphi(w) = \lambda w$ и нека $e = \{e_i\}_1^n$ е базис на V и $\varphi \underset{e}{\Leftrightarrow} A \in M_n(F)$. Тогава

$$\varphi(w) = Aw = \lambda w \Leftrightarrow (A - \lambda E)w = \theta.$$

Тогава ХСЛУ $|(A-\lambda E)x = \theta$ има ненулево решение $w \neq \theta$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow f_A(\lambda) \underset{= f_\varphi(\lambda)}{=} 0 \Leftrightarrow$$

$\underset{\in F}{\lambda}$ е хар. корен на A, т.е. на φ.

Обратно, ако $\lambda \in F$: $f_\varphi(\lambda) = f_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$ $\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow$ ХСЛУ $|(A-\lambda E)x = \theta$ има ненулево решение, например $w \neq \theta$ и $(A - \lambda E)w = \theta \Leftrightarrow Aw = \lambda w \Leftrightarrow \underset{\text{с.ст}}{\varphi(w) = \lambda w}$ $w \neq \theta$ с.в.

Зад: а) Ако V е n-мерно л. п-во над г. поле $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ и $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, то φ (Тн на Даламбер) има с. стт $\leftrightarrow$ с. вр.

б) Ако n-мерното л. п-во V е над $\mathbb{R}$ то $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ може и да няма с. стст

Тв. Нека V е л. п-во над F и $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ и нека $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$: $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$ и

$$\begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ w_1 & w_2 & & w_k \end{matrix}$$

с. стти, с. вр. Тогава системата $\{w_i\}_1^k$ е ЛНЗ сма вр.

Док: индукция по брой на вектори k.

$\underline{k=1}$ $\lambda_1 \leftrightarrow w_1 \neq \theta \Rightarrow w_1$ е ЛНЗ

$\underline{\text{ИП}}$ бр. $\leq k \Rightarrow \{w_i\}_1^{\ell < k}$ е ЛНЗ сма

$\underline{\text{за } k}$ $\beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k = \theta$ и нека да действаме с φ на това р-во

$(*)$ $\beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k = \theta$

$$\varphi(\beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k) \underset{\text{ЛО}}{=} \beta_1 \varphi(w_1) + \dots + \beta_k \varphi(w_k)$$

$$\underset{\substack{\text{с.вс.} \\ \text{с вгх}}}{=} \beta_1 \lambda_1 (w_1) + \dots + \beta_k \lambda_k (w_k) = \theta$$

$(**)$ $\beta_1 \lambda_1 (w_1) + \dots + \beta_{k-1} \lambda_{k-1} (w_{k-1}) + \beta_k \lambda_k (w_k) = \theta$

$(**) - \lambda_k (*) = \theta \iff$

$$\beta_1(\lambda_1 - \lambda_k) w_1 + \beta_2(\lambda_2 - \lambda_k) w_2 + \dots + \beta_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) w_{k-1} = \theta$$

ИП $\Rightarrow$ $w_1, \dots, w_{k-1}$ са ЛНЗ с-ма $\underset{\text{def}}{\Rightarrow}$

$$\beta_i (\underbrace{\lambda_i - \lambda_k}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow \beta_i = 0, \ i = \overline{1, k-1}$$

$(*) \iff \beta_k w_k = \theta \Rightarrow \beta_k = 0$
$w_k \neq \theta$

$\underset{\substack{\text{def} \\ \text{ЛНЗ}}}{\Rightarrow}$ $\{w_i\}_1^k$ е ЛНЗ с-ма вгх

<u>Th (за л. опр с прост спектър):</u> Ако V е n-мерно л. пр-во и $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, който има прост спектър ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ са две по две различни с. ст-ти на φ) то тогава $\exists$ базис от собст. вектори на V, в който матр на φ е диагонална от вида

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda_i \neq \lambda_j \\ i \neq j \end{matrix}$$

<u>Док:</u> V, $e := \{e_i\}_1^n$ е б. на V, $\varphi \in \operatorname{Hom} V$

$\varphi \underset{e}{\leftrightarrow} A$: $\det(A - xE) = (-1)^n (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \dots (x-\lambda_n)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, $\lambda_i \in F$

$\lambda_i \leftrightarrow w_i \neq \theta$, с. вр на φ

и от предното св-во $\Rightarrow \{w_i\}_1^n$ е ЛНЗ с-ма $\underset{def}{\Rightarrow} \{w_i\}_1^n$ е базис на V

$\varphi(w_i) = \lambda_i w_i,\ w_i \neq \theta$ и

$$\varphi \underset{W}{\longleftrightarrow} D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda_n \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

Тогава казваме за опр $\varphi \in \mathrm{Hom}\,V$ в n-м. л.пр-во V е прост спектър, $\exists$ базис от с.вект, в който φ се диагонализира, т.е. $\varphi \underset{W}{\longleftrightarrow} D$.

<u>Сл.</u> Ако $A \in M_n(F)$ има n на брой два по два различни хар. корени, то A се диагонализира, т.е.

$A \underset{e}{\longleftrightarrow} \varphi \in \mathrm{Hom}\,V$ на n-мерно л. пр-во V над полето F

$\longleftrightarrow \exists$ базис от с.вект $W = \{w_i\}_1^n : \varphi \underset{W}{\longleftrightarrow} D$

$A \underset{e}{\longleftrightarrow} \varphi \underset{W}{\longleftrightarrow} D$.

φ-Инвариантни подпространства

Нека V е л. пространство над полето F и $U \leq V$, $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$.

Деф: Казваме, че подпространството U е φ-инвариантно (инвариантно, относно φ), ако $\forall w \in U \Rightarrow \varphi(w) \in U$.

Забел: Ако U е φ-инвариантно, то можем да разглеждаме ограничението на φ в/у U, т.е.

$$\varphi|_U : \begin{cases} U \to U \\ w \to \varphi|_U(w) = \varphi(w). \end{cases}$$

Примери: 1) $\{0\}$ и V са φ-инвариантни подпространства;

2) $\mathrm{Im}\,\varphi$ и $\mathrm{Ker}\,\varphi$ са φ-инвариантни подпространства (с.р.)

3) $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$ и $\lambda \in F$ с. ст. на φ

и $U_\lambda = \{ w \in V \mid \varphi(w) = \lambda w, \theta \}$

е φ-инвариантно подпр-во на ~~V~~.

$w \in U_\lambda \Rightarrow \varphi(w) = \lambda w \in U_\lambda$, т.е.

φ действа като хомотетия в U_λ.

4) $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$ и $\underset{\text{с. ст.}}{\lambda \in F} \Leftrightarrow \underset{w \in V}{\text{с. в-р}}$

$U = \ell(w)$ е 1-мерно φ-инвариантно подпр-во

$\varphi(w) = \lambda w \in U$

<u>Заб</u> Ако $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$ и φ притежава с. ст. $\lambda \in F$, то V притежава 1-мерно φ-инвариантно подпространство,

т.е. $\lambda \Leftrightarrow w \neq \theta$ и $U \leq V$, където $U = \ell(w)$.

__Извод__ Ако V е кр. м. л. пр-во над полето $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$, то V притежава φ-инв. 1-мерно подпр-во $U = l(w)$, където $w \neq \theta$ е с. вр. $\leftrightarrow$ с с.ст. $\lambda \in \mathbb{C}$.
(Th Даламбер)

__Th__: Ако V е кр.м. л.пр-во над полето $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$, то V притежава 1-мерно или 2-мерно φ-инвариантно подпр-во
$\varphi \in \operatorname{Hom} V$

__Док__: V, $e = \{e_i\}_1^n$ е базис на V и $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, за който $\varphi \underset{e}{\leftrightarrow} A \in M_n(\mathbb{R})$

Т.к. $V \cong \mathbb{R}^n$, то с точност до изоморфизъм можем да разглеждаме V като подмн-во на $\mathbb{C}^n$, в което $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 1)$ е базис на $\mathbb{C}^n$.

Да разгледаме $\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}\, \mathbb{C}^n$:

$\overline{\varphi}(w) = \varphi(w)$, $\forall w \in V$, $\overline{\varphi}|_V = \varphi$

$\overline{\varphi} \xrightarrow[e]{} A$ и $\overline{\varphi}$ притежава

е.сст $\iff$ с. вектор

$\lambda \in \mathbb{C}$ $\qquad\qquad c \in \mathbb{C}^n$

$\lambda = \alpha + i\beta$ $\qquad c = a + ib$, $\underline{a, b \in \mathbb{R}^n = V}$

Тогава имаме:

$$\overline{\varphi}(c) = \lambda c = (\alpha + i\beta)(a + ib) =$$

$$= (\alpha a - \beta b) + i(\alpha b + \beta a)$$

$$\overline{\varphi}(c) = \overline{\varphi}(a + ib) = \overline{\varphi}(a) + i\overline{\varphi}(b) =$$

$$= \varphi(a) + i\varphi(b) \Rightarrow$$

$$\underline{\begin{aligned} \varphi(a) &= \alpha a - \beta b \\ \varphi(b) &= \alpha b + \beta a \end{aligned}} \Rightarrow U = \ell(a, b)$$

е φ-инвариантно подпр-во на V.

$\dim U \leq 2 \Rightarrow V$ притежава 1-мерно или 2-м. φ-инв. подпр.

Алгоритъм за намиране на с. вдр и с. ст-ти на $\varphi \in \operatorname{Hom} V$

Зад. Даден е $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ в n-мерно над F пр-во V.

Намерете с. вдр и с. ст-ти на φ?

Реш.: 1) $\varphi \in \operatorname{Hom} V \xrightarrow{e} A_\varphi = A$

2) с. ст-ти: а) $f_A(x) = 0 = \det(A - xE)$ и се намират х. корени $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (броени с кратностите им);

б) х. корени, които $\in$ на F са собст. ст-ти на φ. $\Rightarrow$ нека $k \leq n$: $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ са с. ст-ти на φ.

3) с. вдр намираме базиси на φ-инв. подпр-ва от с. вдр $\leftrightarrow \lambda_i$ с. ст-ти, $i = \overline{1,k}$.

ако λ_i е с. ст-т $\leftrightarrow U_{\lambda_i}$, $i=\overline{1,k}$

$U_{\lambda_i}: \left| (A-\lambda_i E)x=\theta \right.$ и една ФСР е базис на U_{λ_i}

$U_{\lambda_j}: \left| (A-\lambda_j E)x=\theta \right. \Rightarrow$ ФСР $\Rightarrow$ $c_1 \ldots c_j$ базис на U_{λ_j}

$i \neq t$, $\lambda_j \neq \lambda_t$

$U_{\lambda_t}: \left| (A-\lambda_t E)x=\theta \right. \Rightarrow$ ФСР $c'_1, \ldots, c'_l$ базис на U_{λ_t}

то $\{c_1, \ldots, c_j, c'_1, \ldots, c'_l\}$ е ЛНЗ система

4/ ако $\exists$ базис от с.вект., то

$$T_{e\to w} = \begin{pmatrix} w_1 & \ldots & w_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} w_1 &= c_1 \\ w_2 &= c_2 \\ &\vdots \\ w_j &= c_j \\ w_{j+1} &= c'_1 \\ &\vdots \\ w_n &= \end{aligned} \Rightarrow$$

$T^{-1}AT = D$

$\varphi \underset{w}{\longleftrightarrow} D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$A^{2022} = ?$ $A^{2022} = T D^{2022} T^{-1}$

$D^{2022} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{2022} & & & 0 \\ & \lambda_2^{2022} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^{2022} \end{pmatrix}$

Заб: а) с. вкт са ⟺ базиси на U_{λ_i} са ~

б) ∃ базис от с. вкт, в който

тогава φ се диагонализира и

тогава $T_{e \to w}$ и $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Заб. λ_1 е 1-кратна с.сст ⟷ 1-мерно φ-инв. подпр. от с. вкт $U_{\lambda_1} \leq V$

λ_2 е 3-кратна с.сст и има базис ⟷ 3-мерно φ-инв. $U_{\lambda_2} \leq V$.

Пр:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{e}{\longleftrightarrow} \varphi \in \mathrm{Hom}\, V$

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \leftrightarrow g = (1, 1, -1)$

$\Updownarrow\ U_\lambda = \ell(g)$ и $\nexists$ базис, в

който отгова се диагонализира

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{e}{\longleftrightarrow} \varphi \in \mathrm{Hom}\, V$

$\exists$ базис от с.вр. $\varphi \longleftrightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 0$

$T_{e \to w}$