вариант	ф. номер	група	вариант	курс	специалност
КР2.1	0MI0600041	1	1	I	**Софтуерно инженерство**
Име:	**Филип Красимиров Филчев**				

Контролна работа № 2.1

08.01.2022

Задача 1. (4 т.) Нека

$$f_1 = x^3 + 3x^2 - 2x - 3,\ \ f_2 = x^3 + x^2 - x - 2,$$
$$f_3 = -x^3 - x^2 + (\lambda - 2)x + 2 \text{ и } f = -2x^3 + (\mu + 5)x^2 + (\mu + 3)x + 2$$

са полиноми над полето на рационалните числа $\mathbb{Q}$. Да се определи за кои стойности на параметрите λ и μ полиномът f може да се представи по повече от един начин като линейна комбинация на полиномите f_1, f_2 и f_3. Да се намерят две различни такива представяния.

Задача 2. Нека $\mathbb{V}$ е множеството от всички полиноми с реални коефициенти и от степен не по-голяма от 3.

а) (1,25т.) Да се докаже, че полиномите 1, $x - 5$, $\dfrac{(x-5)^2}{2!}$ и $\dfrac{(x-5)^3}{3!}$ образуват базис на $\mathbb{V}$.

б) (1,25т.) Да се намерят координатите на полинома $g = x^3 - 2x^2 + x + 3$ спрямо базиса от подточка а).

в) (1,5т.) Да се докаже, че множеството от полиномите $\mathbb{U} = \{f \in \mathbb{V} \mid f(5) = 0\}$ е линейно подпространство на $\mathbb{V}$. Да се определи размерността на $\mathbb{U}$ и да се намери негов базис.

Филип Красимиров Филчев, Фн: 0MI0600041
Софтуерно инженерство, I курс, I група

Контролна работа №2

① $f_1 = x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = (1, 3, -2, -3)$
$f_2 = x^3 + x^2 - x - 2 = (1, 1, -1, -2)$
$f_3 = -x^3 - x^2 + \lambda - 2x + 2 = (-1, -1, \lambda - 2, +2)$
$f = -2x^3 + (\mu+5)x^2 + (\mu+3)x + 2 = (-2, \mu+5, \mu+3, 2)$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & \mu+5 \\ -2 & -1 & \lambda-2 & \mu+3 \\ -3 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) .(3).(-3).(2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & \mu+11 \\ 0 & 1 & \lambda-4 & \mu-1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) .(-1).(2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu+3 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & \mu+3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

I $\lambda \neq 3$

1). $\mu \neq -3 \Rightarrow$ II ри ред $0x_3 = \mu + 3 \rightarrow$ н. р.

2) ~~$\mu \neq -3$~~ $\mu = -3 \Rightarrow$ ~~от IIри~~ III ри ред ~~$0.x_3 = 0$ $\forall x_3$ $x_3 = p$~~

~~от IVти ред $x_2 = p - 4$~~

$\Rightarrow (\lambda - 3) x_3 = 0 \quad x_3 = 0$

от IVти ред $x_2 = -4$; $x_1 = 2$

$\Rightarrow (2, -4, 0) \rightarrow 1$ лин комб $(\lambda \neq 3; \mu = -3)$

II $\lambda = 3$ 1) $\mu \neq -3 \rightarrow$ няма решение

2) $\mu = -3 \Rightarrow 0.x_3 = 0$ (от IIри; IIIти ред) $\Rightarrow \forall x_3$ и нека $x_3 = p$

IVти ред $\Rightarrow x_2 = p - 4$

Iви $\Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow (2, p-4, p) \rightarrow$ безброй

=1=

отг → 1 представяне при $\lambda \neq 3$ и $\mu = 3$ $= (2, -4, 0)$
безброй представяния при $\lambda = 3$; $\mu = 3$ $= (2, p-4, p)$
0 представяния при $\lambda \neq 3$; $\mu \neq 3$
и $\lambda = 3$; $\mu \neq 3$

② V – мн-во от полиноми от степен 3 → станд. базис – $(1, x, x^2, x^3)$

а) док, че $\left(1, x-5, \frac{(x-5)^2}{2!}, \frac{(x-5)^3}{3!}\right) = \mathbb{H}$

$(1, x, x^2, x^3)$

$\dim V = 4$ (3та степен)

$(1, x, x^2, x^3)$ са ЛНЗ

→ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = 0$

и $\dim$ базис $= 4$ ⇒

⇒ $(1, x, x^2, x^3)$ базис

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 + \lambda_4 x^3 = 0$$

$$\{\lambda_i\}_1^4 = ?$$

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (x-5) + \lambda_3 \cdot \frac{(x-5)^2}{2!} + \lambda_4 \frac{(x-5)^3}{3!} = 0$$

$\{\lambda_i\}_1^4 = 0$ ⇒ векторите са ЛНЗ и

$\dim \mathbb{H} = 4$; $\dim V = 4$ ⇒ $\mathbb{H}$ → базис на V

б) $g = x^3 - 2x^2 + x + 3$

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (x-5) + \lambda_3 \cdot \frac{(x-5)^2}{2!} + \lambda_4 \frac{(x-5)^3}{3!} = x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (x-5) + \lambda_3 \cdot \frac{(x^2 - 10x + 25)}{2} + \frac{\lambda_4 \cdot (x^3 - 15x^2 + 75x - 125)}{6} = x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$6\lambda_1 + \lambda_2(6x - 30) + \lambda_3(3x^2 - 30x + 75) + \lambda_4(x^3 - 15x^2 + 75x - 125) = 6x^3 - 12x^2 + 6x + 18$$

1) x^3 → $\lambda_4 \cancel{x^3} = 6\cancel{x^3}$ $\boxed{\lambda_4 = 6}$

2) x^2 → $\lambda_3 \cdot 3x^2 + \lambda_4 \cdot (-15x^2) = -12x^2$

$\lambda_3 \cdot 3\cancel{x^2} + 90\cancel{x^2} = -12\cancel{x^2}$

$\boxed{\lambda_3 = \frac{78}{3} = 26}$

3) x → $\lambda_2 \cdot (6x) + \lambda_3 \cdot (-30x) + \lambda_4 \cdot (75x) = 6x$

$\lambda_2(6x) + (-780)x + 450x = 6x$

$\boxed{\lambda_2 = \frac{336}{6} = 56}$ $= 3 =$

4) $\lambda_1 \to 6\lambda_1 - 30\lambda_2 + 75\lambda_3 + 125\lambda_4 = 18$

$6\lambda_1 - 1680 + 1950 - 750 = 18$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{498}{6} = 83}$$

$$g = 83.1 + 56.(x-5) + 26.\left(\frac{(x-5)^2}{2!}\right) + 6.\left(\frac{(x-5)^3}{3!}\right)$$

в) $U = \{f \in V \mid f(5) = 0\}$

I 1П

Нека f и $h \in U$

1) $(f+g)(5) = f(5) + g(5) = 0 + 0 = 0$ ✓

Нека $\lambda \in F$, $f \in U$

$(\lambda.f)(5) = \lambda.f(5) = \lambda.0 = 0$ ✓ $\Rightarrow$

$\Rightarrow U \leq V$, Тъй като $\dim V = 4 \left(1, x-5, \frac{(x-5)^2}{2!}, \frac{(x-5)^3}{3!}\right)$

II $\to$ размерност $\Rightarrow \dim U \leq 4$

Корен 5 имат в базисни вектори освен 1:

$(x-5)$; $\frac{(x-5)^2}{2!}$; $\frac{(x-5)^3}{3!}$ $\to$ имат за корен 5

$\Rightarrow$ Те са базисните вектори на U и $\dim U = \underline{\underline{3}}$

=4=