вариант	ф. номер	група	вариант	курс	специалност
ДР2	0MI0600041	**1**	**1**	**I**	**Софтуерно инженерство**
Име:	**Филип Красимиров Филчев**				

Домашна работа № 2

Задача 1. Нека F е числово поле и нека е дадено множеството

$$\mathbb{U} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{13}) \mid a_{k+2} = 2a_{k+1} - 1a_k, 1 \leq k \leq 11, a_k \in F\}.$$

а) Да се докаже, че $\mathbb{U}$ е линейно пространство над полето F относно стандартните операции събиране на наредени 13-орки и умножаване на наредена 13-орка с чсило от F. Да се определи размерността на $\mathbb{U}$.

б) Да се намерят всички елементи на $\mathbb{U}$ от вида $u_\lambda = (\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{13})$.

в) Да се докаже, че векторите

$$e_1 = \left(\frac{2}{2}, \frac{2^2}{2^2}, \ldots, \frac{2^{13}}{2^{13}}\right), \; e_2 = \left(\frac{2}{2}, 2\frac{2^2}{2^2}, \ldots, 13\frac{2^{13}}{2^{13}}\right)$$

образуват базис на $\mathbb{U}$.

Задача 2. Да се намери ранга на матрицата $A \in M_5(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda & -1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & -3 & \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda+4 & \lambda+3 & \lambda+2 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. а) Да се намери фундаменталната система решения на хомогенната система

$$\left| \begin{array}{l} -x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ \;\; 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 - \;\, x_4 + 3x_5 = 0 \\ -3x_1 - \;\, x_2 + 2x_3 - \;\, x_4 - \;\, x_5 = 0 \end{array} \right. .$$

б) В линейното пространство $\mathbb{R}^5$ са дадени векторите

$$\mathbf{a_1} = (-10, 0, -12, 0, 14), \quad \mathbf{a_2} = (2, -6, 12, 6, -10), \quad \mathbf{a_3} = (-3, -1, -2, 1, 3),$$

Да се намери хомогенна система, пространството от решения на която съвпада с $\mathbb{U} = \ell(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3})$.

Задача 4. Нека $\mathbb{V} = M_2(\mathbb{F})$. Дадени са изображенията:

а) $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $\psi(X) = X \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, където $X \in \mathbb{V}$.

Да се провери дали φ и ψ са линейни оператори във $\mathbb{V}$ и когато са такива, да се напишат матриците им в базиса E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}.

Филип Красимиров Филчев Фн: 0MI0600041
Софтуерно инженерство, I курс, I група
Домашна работа № 2

① $U = \{(a_1, a_2, \dots, a_{13}) \mid a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k,\ 1 \le k \le 11,\ a_k \in F\}$

a) I. Нека $a = (a_1, a_2, \dots, a_{13}) \in U \mid \Rightarrow a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k$
Нека $b = (b_1, b_2, \dots, b_{13}) \in U \mid \Rightarrow b_{k+2} = 2b_{k+1} - b_k$

1) $a+b$

$a+b = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_{13}+b_{13}) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_3 + b_3 = 2a_{k+1} - a_k + 2b_{k+1} - b_k =$
$= 2\cdot(a_{k+1} + b_{k+1}) - (a_k + b_k) \in U$ V

2) Нека $\lambda \in F$

$\lambda . a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_{13}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{\lambda a_{k+2} = 2\lambda a_{k+1} - \lambda a_k}$

$\lambda a_{k+2} = \lambda 2 a_{k+1} - \lambda a_k = \lambda(2a_{k+2} - a_k) \in U$ V

от 1, 2 $\Rightarrow$ сбор на 2 вектора и умножение на скалар и вектор остават в U. U е подмножество на F^n, което е ЛП $\Rightarrow$ U е подпространство и съответно ЛП.

II $a_3 = 2a_2 - a_1$
$a_4 = 2a_3 - a_2 = 4a_2 - 2a_1 - a_2 = 3a_2 - 2a_1$
$a_5 = 2a_4 - a_3 = 6a_2 - 4a_2 - 2a_2 + a_1 = 4a_2 - 3a_1$
$\vdots$
$a_{13} = 12a_2 - 11a_1$

$\Rightarrow$ Всеки вектор може да се изрази чрез a_1 и a_2
$\Rightarrow \dim U = 2.$

① б) $u_\lambda \in U \quad u_\lambda = (\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{13}) \quad \lambda = ?$

$a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k \qquad a_1 = \lambda;\ a_2 = \lambda^2, \dots, a_{13} = \lambda^{13}$

$\Rightarrow a_k = \lambda^k \quad k = \overline{1,13}$

$\Rightarrow \lambda^{k+2} = 2\lambda^{k+1} - \lambda^k$

$\lambda^{k+2} - 2\lambda^{k+1} + \lambda^k = 0$

$\lambda^k(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$

$\lambda^k(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$

$\Rightarrow u_0 = (0, 0, \dots, 0)$

$u_1 = (1, 1, \dots, 1)$

в) $e_1 = \left(\frac{2}{2}, \frac{2^2}{2^2}, \dots, \frac{2^{13}}{2^{13}}\right),\ e_2 = \left(\frac{2}{2}, 2\frac{2^2}{2^2}, \dots, 13\frac{2^{13}}{2^{13}}\right)$

$\lambda_1\left(\frac{2}{2}, \frac{2^2}{2^2}, \dots, \frac{2^{13}}{2^{13}}\right) + \lambda_2\left(\frac{2}{2}, 2\frac{2^2}{2^2}, \dots, 13\frac{2^{13}}{2^{13}}\right)$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0\ ?$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \\ \frac{2^2}{2^2} & 2\frac{2^2}{2^2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{2^{13}}{2^{13}} & 13\frac{2^{13}}{2^{13}} \end{pmatrix} \begin{matrix} :\frac{2}{2} \\ :\frac{2^2}{2^2} \\ \vdots \\ :\frac{2^{13}}{2^{13}} \end{matrix} \sim A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 13 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :2 \\ \vdots \\ :12 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} \\ \vdots & \vdots \\ \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= 2 =$

e_1 и e_2 са ЛНЗ един друг $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Rightarrow \lambda_1$ и $\lambda_2 = 0$, за да

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$

$\Rightarrow \{e_1, e_2\}$ - базис и $\dim U = 2$

②

$$A=\begin{array}{ccccc} (\cdot -1) & & & & \\ \end{array}$$
$$A=\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda & -1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & -3 & \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda+4 & \lambda+3 & \lambda+2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 & 0 & -\lambda-1 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda-2 & 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda-3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+3 & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & \cdot\left(-\frac{\lambda}{\lambda+3}\right) & \frac{\lambda}{\lambda+2} & \left(\cdot\frac{\lambda}{\lambda+1}\right) & (\cdot 1) \end{array} \\ A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 & 0 & -\lambda-1 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda-2 & 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda-3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+3 & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda \end{pmatrix} \end{array}$$

I $\lambda \neq -1, -2, -3, 0$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda-3 & 0 & 0 & 0 \\ 1+4\lambda & \lambda+3 & \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda \end{pmatrix}$$

1.) при $\lambda \neq -\frac{1}{4}; -3, -2, -1$, или 0
$r = 5$

II при $\lambda = -\frac{1}{4}, -3, -2, -1$ или 0 -> стълб само от 0
$r = 4$

3 a) $\begin{cases} -x-3x_2+6x_3+5x_4-3x_5=0 \\ 5x_1+3x_2-6x_3-x_4+3x_5=0 \\ -3x_1-x_2+2x_3-x_4-x_5 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 & 5 & -3 \\ 5 & 3 & -6 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot(5)(-3)$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 & 5 & -3 \\ 0 & -12 & 24 & 24 & -12 \\ \cancel{0} & \cancel{8} & \cancel{-16} & \cancel{-16} & \cancel{8} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (:-12) \\ (:8) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \cdot(3) \end{matrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=2 \Rightarrow \dim U = 3$

$n=5$

3 вектора за фср.

$x_5=p$
$x_4=q$
$x_3=t$

$\Rightarrow -x_1-x_4=0$

$x_1=-q$

$x_2-2t-2q+p=0$

$x_2=2t-2q+p$

$(-q,\ 2t-2q+p,\ t,\ q,\ p)$

$q\cdot(-1,-2,0,1,0)+$
$+t\cdot(0,2,1,0,0)+$ $\quad \forall\, q,t,p$
$+p\cdot(0,1,0,0,1)$

$\left.\begin{matrix} (-1,-2,0,1,0) \\ (0,2,1,0,0) \\ (0,1,0,0,1) \end{matrix}\right\}$ фср.

=4=

3) б)
$a_1 = (-10, 0, -12, 0, 14)$
$a_2 = (2, -6, 12, 6, -10)$
$a_3 = (-3, -1, -2, 1, 3)$

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 0 & -12 & 0 & 14 \\ 2 & -6 & 12 & 6 & -10 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} :2 \\ :2 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 & 0 & 7 \\ 1 & -3 & 6 & 3 & -5 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} (5).(3)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -15 & 24 & 15 & -18 \\ 1 & -3 & 6 & 3 & -5 \\ \cancel{0} & \cancel{-10} & \cancel{16} & \cancel{10} & \cancel{-12} \end{pmatrix} \begin{matrix} :3 \\ \\ \end{matrix} \qquad L_3 \cdot \frac{3}{2} = L_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -5 & 8 & 5 & -6 \\ 1 & -3 & 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$x_5 = p \quad x_4 = q \quad x_3 = t$

от I ви ред $\Rightarrow -5x_2 + 8t + 5q - 6p = 0$

$$x_2 = \frac{6p - 5q - 8t}{5}$$

от II ри ред $\Rightarrow x_1 = 30p - 15q - 24t - 30t - 15q + 25p =$
$= 55p - 30q - 54t$

$(55p - 30q - 54t,\ 6p - 5q - 8t,\ 5t,\ 5q,\ 5p)$

$p \cdot (55, 6, 0, 0, 1) + q \cdot (-30, -5, 0, 1, 0) +$
$+ t \cdot (-54, -8, 1, 0, 0)$

$\cancel{55x_1 + 6x_2 + x_5 = 0}$

$$\begin{cases} 55x_1 + 6x_2 + x_5 = 0 \\ -30x_1 - 5x_2 + x_4 = 0 \\ -54x_1 - 8x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

④ а) $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ за $X \in M_2(F)$

1) Нека $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$

I $\Rightarrow \varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} x_1-2x_3 & x_2-2x_4 \\ -x_1+3x_3 & -x_2+3x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1-2x_2 & -x_1-3x_2 \\ -x_3-2x_4 & -x_3-3x_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2(x_2+x_3) & -x_1-2(x_2+x_4) \\ -x_1+2.(x_3-x_4) & -x_2-x_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ аналогично $\varphi(Y) = \begin{pmatrix} -2(y_2+y_3) & -y_1-2(y_2+y_4) \\ -y_1+2.(y_3-y_4) & -y_2-y_3 \end{pmatrix}$

$$\varphi(X)+\varphi(Y) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2(x_2+x_3+y_2+y_3) & -x_1-y_1-2.(x_2+x_4+y_2+y_4) \\ -x_1-y_1+2.(x_3-x_4+y_3-y_4) & -x_2-x_3-y_2-y_3 \end{pmatrix}}_{\in M_2(F)}$$

II $X+Y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 \\ x_3+y_3 & x_4+y_4 \end{pmatrix}$

$$\varphi(X+Y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}(X+Y) + (X+Y)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+y_1-2(x_3+y_3) & x_2+y_2-2(x_4+y_4) \\ -x_1-y_1+3.(x_3+y_3) & -x_2-y_2+3.(x_4+y_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1-y_1-2.(x_2+y_2) & -x_1-y_1-3.(x_2+y_2) \\ -x_3-y_3-2.(x_4+y_4) & -x_3-y_3-3.(x_4+y_4) \end{pmatrix}$$

$= 6 =$

4a)

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot(x_3+y_3+x_2+y_2) & -x_1-y_1-2\cdot(x_4+y_4+x_2+y_2) \\ -x_1-y_1+2\cdot(x_3+y_3-x_4-y_4) & -x_2-y_2-x_3-y_3 \end{pmatrix} \in M_2(F)$$

$$\Rightarrow \varphi(X)+\varphi(Y)=\varphi(X+Y) \quad \checkmark$$

2) $\lambda . X$

$$\varphi(\lambda X) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\lambda . X + \lambda . X\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X + X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \right) \in M_2(F)$$

от 1) и 2) $\Rightarrow$ φ е линеен оператор.

Базис $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$

$$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0,-1,-1,0) = a$$

$$\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-2,-2,0,-1) = b$$

$$\varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-2,0,2,-1) = c$$

$$\varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (0,-2,-2,0) = d$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

=

4) б) $\varphi(X) = X\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ $\quad X \in M_2(F)$

Нека $X = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{pmatrix}$; $X+Y = \begin{pmatrix}x_1+y_1 & x_2+y_2\\ x_3+y_3 & x_4+y_4\end{pmatrix}$

2) $\lambda . X$ -

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\lambda X) &= \lambda . X\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & -3\end{pmatrix} \neq \\ \lambda . \varphi(X) &= \lambda . \left(X\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(\lambda X) \neq \lambda \varphi(X) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi$ не е линеен оператор

=

=8=