Дискриминанта и резултанта

F е фиксирано поле. Знаем, че един полином има кратен корен точно когато има общ корен с производната си. Друг критерий за проверка дали един полином има кратен корен е когато неговата дискриминанта е равна на 0.

Нека $f = a_0x^n + \cdots + a_n \in F[x]$, $a_0 \neq 0$ и $n > 0$. Нека L е разширение на полето F, съдържащо всички корени $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на полинома f.

Определение. Елемента $D(f) = a_0^{2n-2} \prod\limits_{1 \leqq i < j \leqq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ (при $n > 1$) на полето L ще наричаме дискриминанта на полинома f (дискриминантата на полином от първа степен по определение е равна на 1).

Очевидно f има кратен корен точно когато $D(f) = 0$.

В сила са равенствата:

$$D(f) = a_0^{n-2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'(\alpha_1) \ldots f'(\alpha_n),$$

$$D(f) = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-2} \end{vmatrix},$$

където $S_k = \alpha_1^k + \cdots + \alpha_n^k$ са степенните сборове на корените $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на полинома f.

1. Дискриминантата на полинома $f = x^2 + px + q$ е равна на $D(f) = p^2 - 4q$.

2. Дискриминантата на полинома $f = x^3 + px + q$ е равна на

$$D(f) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{vmatrix} = -4p^3 - 27q^2.$$

Знаем, че два полинома имат общ корен точно когато не са взаимно прости. По-долу ще разгледаме друг подход към същия въпрос.

Нека $f = a_0x^n + \cdots + a_n,\ g = b_0x^s + \cdots + b_s \in F[x]$, $a_0 \neq 0 \neq b_0$ и $n, s > 0$. Нека L е разширение на полето F, което съдържа всички корени $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на полинома f и всички корени $\beta_1, \ldots, \beta_s$ на полинома g (например, можем да вземем поле на разлагане над F на полинома fg).

Определение. Елемента $R(f, g) = a_0^s b_0^n \prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{s} (\alpha_i - \beta_j)$ на полето L ще наричаме резултанта на полиномите f и g.

Очевидно f и g имат общ корен точно когато $R(f, g) = 0$.

В сила са равенствата:

$$R(g,f) = (-1)^{ns} R(f,g),$$

$$R(f,g) = a_0^s \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i),$$

$$R(f,f') = a_0 (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D(f),$$

$$R(f,g) = \left| \begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & \dots & & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & & a_n & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & & b_s & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & & b_s & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & & b_s \end{array} \right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a\\a\\a\\a \end{array}}\right\} s \text{ реда} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} b\\b\\b\\b \end{array}}\right\} n \text{ реда} \end{array} .$$

На всички неотбелязани места в детерминанта от ред $n+s$ стоят нули, а по главния диагонал стои s пъти елементът a_0 и n пъти елементът b_s.