Матрици – действия и св-ва

Нека $\mathbb{F}$ е (числово) поле, $0, 1, (-a), a^{-1}$

Деф. Матрица A наричаме таблица с m-реда и n-стълба с елти $a_{ij} \in F$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$i = 1, \dots, m$

$j = 1, \dots, n$

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

Пр $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$F_{m \times n} = \{ A = (a_{ij})_{m \times n} \mid a_{ij} \in F \}$$

$$A, B \in F_{m \times n} \Rightarrow A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$a_{13} = 5$

a_{ij}

$F_{m\times n}$, Дефинираме събиране на матрици $A, B \in F_{m\times n} \to C = A+B \in F_{m\times n}$

$$C = (c_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

M1) асоциативен закон на "+" на м,

$\forall A, B, C \in F_{m\times n}$: $(A+B)+C = A+(B+C)$

Дво: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$

$A+B = H = (h_{ij})$, $B+C = K = (k_{ij})$

$(A+B)+C = P = (p_{ij})$, $A+(B+C) = U = (u_{ij})$

$P \stackrel{?}{=} U \quad p_{ij} = u_{ij}, \ i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}$

$$p_{ij} = h_{ij} + c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} \overset{F}{=}$$
$$u_{ij} = a_{ij} + k_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$$

M2) Неутрален (нулев) ел-т в $F_{m\times n}$
нулева матрица

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} : \ A+O = O+A = A$$

M3) $\forall A \in F_{m\times n}, \ \exists (-A) \in F_{m\times n}$:
противоположна на м. A

$$A+(-A) = (-A)+A = O$$

$$(-A) := \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ -a_{m1} & \dots & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \qquad A = (a_{ij})_{m\times n} \quad (-A) = (-a_{ij})_{m\times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (-A) = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

M4) комутативен закон на "+" на м.

$\forall A, B \in F_{m\times n}$: $A+B = B+A$

$(F_{m\times n}, A+B)$ — абелева адитивна група.

$F: \alpha, \beta, \gamma$ —

$F_{m\times n}$ a_{ij} b_{ij} - -

Дефинираме в $F_{m\times n}$ ~~операција~~ умножение на м. $A \in F_{m\times n}$ по скалар (числото) $\lambda \in F$ по следниот начин:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

Пример

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \qquad \underset{3A}{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}}$$

М5) $1 \in F$, $\forall A \in F_{m\times n}$

$$1A = A = (1.a_{ij})$$

М6) $\forall A \in F_{m\times n}$, $\forall \alpha, \beta \in F$

$$\alpha A \underset{F_{m\times n}}{+} \beta A = (\alpha \underset{F}{+} \beta) A$$

$$\frac{2}{7}A + \frac{5}{7}A = \left(\frac{2}{7}+\frac{5}{7}\right)A \quad , A_{2021\times 2022}$$

M7) $\forall A, B \in F_{n\times n}$, $\forall \lambda \in F$

$$\lambda A + \lambda B = \lambda (A+B)$$

M8) $\forall A \in F_{n\times n}$, $\forall \alpha, \beta \in F$

$$\alpha(\underbrace{\beta . A}_{F_{n\times n}}) = (\underbrace{\alpha . \beta}_{F}) A$$

$$\frac{7}{5}\left(\frac{5}{7} A\right) = \left(\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7}\right) A$$

Квадратни матрици от n-ти ред

$$F_{n\times n} = M_n(F) = \{ A = (a_{ij})_{n\times n} \mid a_{ij} \in F \}$$

$$A+B, \quad \lambda A, \quad \lambda \in F$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ главен диагонал кв. м. A

$a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ втори диагонал на кв. м. A