Полиноми на една променлива

Нека F е поле.

$F[x] := \left\{ f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in F \\ a_0 \neq 0 \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$

и в $F[x]$ са дефинирани следните операции:

$f(x) + g(x)$ – събиране на полиноми

$f(x) . g(x)$ – умножение на полиноми

$n = \deg f$ → $\deg a$ ($a = const$ полином) $= 0$; $\deg 0$ (нулев полином) $= -\infty$

Тогава множеството $F[x]$ от всички полиноми на x с коефициенти от F е пръстен на полиномите на променливата x с коефициенти от F. (За да е пръстен трябва още да са изпълнени следните, за които знаем, че са и не се занимаваме с доказването им:

1) $(F[x], +)$ – абелева група:
1) асоц. $a+(b+c) = (a+b)+c$
2) $a + 0 = 0 + a = a : \exists 0 \in F[x]$
3) $a + (-a) = (-a) + a = 0$ за $\forall a$
4) комут.: $a + b = b + a$, $\forall a, b$

2) $(F[x], \cdot)$ – асоциативен закон: $a.(bc) = (ab)c$

3) дистрибутивни закони: $f(g+h) = fg + fh$
$(f+g)h = fh + gh$

Th (Теорема за деление с частно и остатък)
Нека F е поле и $f, g \in F[x]$, $f, g \neq 0$. Тогава $\exists!$ двойка полиноми $q, r \in F[x]$, такива че:
$f = gq + r$ и $\deg r < \deg g$ (q – частно, r – остатък)

Алгоритъм за деление с частно и остатък:
Нека $f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \in F[x]$
и $g = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m \in F[x]$,
като $a_0, b_0 \neq 0$

Ако $n < m$, то тогава получаваме директно двойката полиноми, на които се разлага f:
$f = g.0 + f : \deg f < \deg g$

Ако $n \geq m$, то полагаме $q_1 = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$ и $f_1 = f - g.q_1$

Продължаваме по този начин, докато $\deg f_i < \deg g$

Тогава $f = g\cdot(\overbrace{q_1+q_2+\dots+q_i}^{q}) + \overbrace{f_i}^{r}$ е търсеното разлагане на f с частно $(q_1+\dots+q_i)$ и остатък f_i

пр. $f = x^5+2x^4+3x^3+x^2+1$, $g = x^2+x+1$

$$
\begin{array}{l}
f = x^5+2x^4+3x^3+x^2+1 \\
-\underline{\quad x^5+x^4+x^3 \quad} \\
\qquad x^4+2x^3+x^2+1 = f_1 \\
\quad -\underline{\quad x^4+x^3+x^2 \quad} \\
\qquad\qquad x^3 \quad +1 = f_2 \\
\qquad -\underline{\quad x^3+x^2+x \quad} \\
\qquad\qquad -x^2-x+1 = f_3 \\
\qquad\quad -\underline{\quad -x^2-x-1 \quad} \\
\qquad\qquad\qquad \boxed{2} = r = f_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
g = x^2+x+1 \\
\boxed{x^3+x^2+x-1} = q
\end{array}
$$

$q_1 = \frac{1}{1}x^{5-2}$, $q_2 = \frac{1}{1}x^{4-2}$, $q_3 = \frac{1}{1}x^{3-2}$, $q_4 = \frac{-1}{1}x^{2-2}$

$\Rightarrow f = gq + r = (x^2+x+1)(x^3+x^2+x-1) + 2$

Деф. Нека $f, g \in F[x]$ и поне един от f или g е $\neq 0$. Казваме, че един полином $d \in F[x]$ е най-голям общ делител (НОД) на f и g, ако:

1) $d|f$ и $d|g$ → d дели f и d дели g

(Казваме, че $b|a$ (b дели a), ако $b \neq 0$ и $a = b.q$)

2) $d_1|f$ и $d_1|g \Rightarrow d_1|d$

НОД ще означаваме: $d = (f,g)$

Заб. Ако два полинома d и d' удовлетворяват условието за НОД на f и g, то $d = \alpha.d'$, $\alpha \in F\setminus\{0\}$, т.е. НОД на два полинома се определя с точност до ненулева константа от F. Ако старшият коефициент на d е 1-ца (d е унитарен полином), то d се определя еднозначно

Т6. Тъждество на Безу

За $\forall$ два полинома $f, g \in F[x]$ $\exists\, u, v \in F[x]$, такива че $uf + v.g = (f,g) = d$

Алгоритъм на Евклид за намиране на НОД (за намиране на $d, u, v : d = uf + v.g$)

1) $f = g.q_1 + r_1$, $\deg r_1 < \deg g$ и $r_1 = f - gq_1 \Rightarrow$
$r_1 = f - gq_1 = u_1 f + v_1 g$

2) $g = r_1 q_2 + r_2$, $\deg r_2 < \deg r_1$ и $r_2 = g - r_1 q_2 \Rightarrow$
$r_2 = g - r_1 q_2 = u_2 f + v_2 g$

3) $r_1 = r_2 q_3 + r_3$, $\deg r_3 < \deg r_2$ и $r_3 = r_1 - r_2 q_3 \Rightarrow$
$r_3 = r_1 - r_2 q_3 = u_3 f + v_3 g$

. . . .

k) $r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k$, $\deg r_k < \deg r_{k-1}$ и $r_k = r_{k-2} - r_{k-1} q_k \Rightarrow$
$\Rightarrow r_k = r_{k-2} - r_{k-1} q_k = u_k f + v_k g$

k+1) $r_{k-1} = r_k q_{k+1} + 0$
(т.к. степените намаляват, то имаме краен брой стъпки)

$\Rightarrow d = r_k \overset{(f,g)}{=}$ → последният ненулев остатък
$u = u_k$
$v = v_k$

! Разчитането на равенствата 1) ÷ k+1) отзад-напред показва, че $r_k | f$ и $r_k | g$.
Ако $r' | f$ и $r' | g$, то разчитайки равенствата 1) ÷ k) отпред-назад, виждаме, че $r' | r_k$.
$\Rightarrow r_k = (f,g)$

доп. (Полиноми, стр. 7): $\underline{\underline{d}}$, $\underline{\underline{u}}$ и $\underline{\underline{v}}$ на:
$\equiv$ стр. 5/1 б)

$f = x^3 + x^2 + x + 1$ и $g = x^2 - x + 2$

$$f = x^3 + x^2 + x + 1 \quad \Big| \; g = x^2 - x + 2$$

$$-\; x^3 - x^2 + 2x = q_1 . g \qquad q_1 = \underbrace{\frac{1}{1} x^{3-2}}_{q_{1.1}} + \underbrace{\frac{2}{1} \cdot x^{2-2}}_{q_{1.2}}$$

$$0 \neq f_1 = 2x^2 - 1x + 1 \to \deg f_1 \geq \deg g$$

$$-\; 2x^2 - 2x + 4 = q_2 . g$$

спираме делението на g и продължаваме с делимо = g и делител r_1

$$0 \neq f_2 = x - 3 \to \underbrace{\deg f_2}_{r_1 = f_2} < \deg g \Longrightarrow r_1 = \underbrace{1}_{u_1} f \underbrace{- q_1}_{v_1} . g$$

$$\Rightarrow g = x^2 - x + 2 \quad \Big| \; r_1 = x - 3$$

$$-\; x^2 - 3x \qquad q_2 = \underbrace{\frac{1}{1} x^{2-1}}_{q_{2.1}} + \underbrace{\frac{2}{1} x^{1-1}}_{q_{2.2}}$$

$$0 \neq f_3 = 2x + 2 \to \deg f_3 \geq \deg r_1$$

$$-\; 2x - 6$$

спираме делението на r_2 и продължаваме с делимо = r_1 и делител r_2

$$0 \neq f_4 = 8 \to \underbrace{\deg f_4}_{r_2 = f_4} < \deg r_1 \Longrightarrow r_2 = g - q_2 . r_1 =$$
$$= g - q_2(1.f - q_1 . g) =$$
$$= g - q_2 . f + q_1 q_2 g =$$
$$= \underbrace{-q_2}_{u_2} f + \underbrace{(1 + q_1 q_2)}_{v_2} . g$$

$$\Rightarrow r_1 = x - 3 \quad \Big| \; r_2 = 8x^0$$

$$-\; x \qquad q_3 = \frac{1}{8} \cdot x^{1-0} + \frac{(-3)}{8} \cdot x^{0-0}$$

$$0 \neq f_5 = -3 \to \deg f_5 \geq \deg r_4$$

$$-\; -3$$

$$0 = \underbrace{f_6}_{r_3} = 0 \to r_3 = 0$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(f, g) = r_2 = 8 = d$$

$$r_2 = d = (f, g) = -q_2 f + (1 + q_1 q_2) g = \underbrace{-(x+2)}_{u_2} . f + \underbrace{(1 + (x+2)(x+2}_{v_2}$$

$$\Rightarrow u = -x - 2, \quad v = 1 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4x + 5$$

① Да се намери $d = (f, g)$, както и полиноми u, v: $uf + vg = d$, $F = \mathbb{Q}$

а) $f = x^5 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1$, $g = x^3 - 3x + 1$

$f = x^5 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1 \;\Big|\; g = x^3 - 3x + 1$

$\boxed{x^2 + 1} = q_1$ — частно

$-\;(x^5 - 3x^3 + x^2)$

$\boxed{x^3 \quad - 3x + 1}$ $= r_1$ - последният $\neq 0$ остатък

$-\;(x^3 \quad - 3x + 1)$

$0 = r_2 \rightarrow f = g q_1 + r_2 \Rightarrow r_2 = f - g q_1$

*частното се образува, докато deg на остатъка стане < deg частно

- степен = на степента на g

$\Rightarrow d = (f, g) = r_1 = x^3 - 3x + 1 = g = 0f + 1g$

$\Rightarrow u = 0$ и $v = 1$

б) $f = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x - 2$, $g = x^3 - 3x + 1$

$f = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x - 2 \;\Big|\; g = x^3 - 3x + 1$

$q_1 = x^2$

$-\;(x^5 - 3x^3 + x^2)$ делим

$r_1 = x^2 + x - 2 \neq 0$ по-малка степен от тази на g

$\Rightarrow f = g q_1 + r_1 \Rightarrow \boxed{r_1 = f - g q_1} = 1 \cdot f - x^2 \cdot g$

$g = x^3 - 3x + 1 \;\Big|\; r_1 = x^2 + x - 2$

$q_2 = x - 1$

$-\;(x^3 + x^2 - 2x)$

$-x^2 - x + 1$ ← deg = deg g => продължаване

$-\;(-x^2 - x + 2)$

$\boxed{-1 = r_2 \neq 0}$

$g = r_1 q_2 + r_2$

$\Rightarrow r_2 = g - r_1 q_2$

$\Rightarrow r_2 = g - r_1 q_2 = g - (f - g q_1) q_2 = g - q_2 f + q_1 q_2 g =$

$= \underbrace{(-q_2)}_{u} f + \underbrace{(q_1 q_2 + 1)}_{v} g$

$d = r_2 = -1$

$u = -q_2 = 1 - x$

$\Rightarrow v = q_1 q_2 + 1 = x^3 - x^2 + 1$

в) $f = x^3 + x^2 + x + 1$, $g = x^2 - x + 2$ * = доп. зад.

$$\begin{array}{l} f = x^3 + x^2 + x + 1 \\ -\ \underline{x^3 - x^2 + 2x} \\ \quad 2x^2 - x + 1 \\ \quad -\ \underline{2x^2 - 2x + 4} \\ \qquad x - 3 = r_1 \neq 0 \text{ - остатък} \end{array} \qquad \begin{array}{l} g = x^2 - x + 2 \\ \hline q_1 = x + 2 \text{ - частно} \end{array}$$

$f = g q_1 + r_1 = g(x+2) + (x-3)$

$\Downarrow$

$r_1 = f - g q_1$

$$\begin{array}{l} g = x^2 - x + 2 \\ -\ \underline{x^2 - 3x} \\ \quad 2x + 2 \\ \quad -\ \underline{2x - 6} \\ \qquad 8 = r_2 \neq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} r_1 = x - 3 \\ \hline q_2 = x + 2 \end{array}$$

$g = r_1 q_2 + r_2 = (x-3)(x+2) + 8$

$\Rightarrow d = (f, g) = r_2 = 8 = g - r_1 q_2 = g - (f - g q_1) q_2 =$

$= g - q_2 f + q_1 q_2 g = \underbrace{-q_2}_{u} f + \underbrace{(q_1 q_2 + 1)}_{v} g$

$\Rightarrow d = 8$

$u = -q_2 = -x - 2$

$v = q_1 q_2 + 1 = x^2 + 4x + 5$

г) $f = x^4 - 2x^3 + 2x - 4$, $g = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

* Над полето на рационалните числа сме (над пръстена на полиномите с рационални коефициенти): $\mathbb{Q}[x]$

$f = x^4 - 2x^3 + 2x - 4$ | $g = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

$- \quad x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x$ $\qquad q_1 = x$

$-4x^2 + 10x - 4 = r_1 \neq 0 \to f = gq_1 + r_1 \Rightarrow \boxed{r_1 = f - gq_1}$

$g = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ | $r_1 = -4x^2 + 10x - 4$

$- \quad x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x$ $\qquad q_2 = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$

$\frac{1}{2}x^2 + 3x - 8$

$- \quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$

$\frac{17}{4}x - \frac{17}{2} = r_2 \neq 0$

$\to g = r_1 q_2 + r_2 \Rightarrow \boxed{r_2 = g - r_1 q_2}$

$r_1 = -4x^2 + 10x - 4$ | $r_2 = \frac{17}{4}x - \frac{17}{2}$

$- \quad -4x^2 + 8x$ $\qquad q_3 = -\frac{16}{17}x + \frac{8}{17}$

$2x - 4$

$- \quad 2x - 4$

$0 = r_3 = 0$

$\Rightarrow d = (f, g) = r_2 = \frac{17}{4}x - \frac{17}{2} = g - r_1 q_2 = g - (f - gq_1)q_2 =$

$= g - fq_2 + gq_1q_2 = \underbrace{-q_2}_{u} \cdot f + \underbrace{(q_1q_2 + 1)}_{v} g$

$\Rightarrow d = r_2 = \frac{17}{4}x - \frac{17}{2}$

$u = -q_2 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$

$v = q_1q_2 + 1 = x\left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right) + 1 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + 1$

доп. d, u и v на:
$f = x^3 + x^2 + x + 1$ и $g = x^2 - x + 2$ решена по-горе.

* $\mathbb{Z}_n[x]$ означаваме полиномите на x, които имат за коефициенти целочислени остатъци при деление на n

пр. $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ - остатъците, които могат да се получат при деление на 5

$\bar{0} \equiv \bar{5} \pmod 5$ $\quad -\bar{1} \equiv \bar{4} \pmod 5 : |-1| + |4| = 5$

$\bar{1} \equiv \bar{6} \pmod 5$ $\quad -\bar{2} \equiv \bar{3} \pmod 5 : |-2| + |3| = 5$

$-\bar{8} \equiv \bar{2} \pmod 5 : |-8| + |2| = 10 \equiv 0 \pmod 5$

② $d = (f, g)$, u, v:

а) $f = \bar{3}x^5 + x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{4}$, $g = \bar{2}x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x + \bar{3}$ $\mathbb{Z}_5[x]$

$\mathbb{Z}_5[x] \Rightarrow \mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

$$
\begin{array}{l}
f = \bar{3}x^5 + x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{4} \\
- \underline{\bar{3}x^5 + \bar{3}x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x} \\
\quad -\bar{2}x^4 + \bar{3}x^3 - \bar{3}x^2 - \bar{2}x + \bar{4} \\
- \quad \underline{-\bar{2}x^4 - \bar{2}x^3 - \bar{2}x - \bar{3}} \\
\quad -\bar{3}x^2 + \bar{2} = r_1 = \bar{2}x^2 + \bar{2} \neq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
g = \bar{2}x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x + \bar{3} \\
\hline
q_1 = \bar{4}x - \bar{1}
\end{array}
$$

$\downarrow$

$f = gq_1 + r_1 \Rightarrow \boxed{r_1 = f - gq_1}$

$$
\begin{array}{l}
g = \bar{2}x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x + \bar{3} \\
- \underline{\bar{2}x^4 + \bar{2}x^2} \\
\quad \bar{2}x^3 - \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{3} \\
- \underline{\bar{2}x^3 + \bar{2}x} \\
\quad -\bar{2}x^2 + \bar{3} \\
- \underline{-\bar{2}x^2 - \bar{2}} \\
\quad \bar{5} = 0 = r_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
r_1 = \bar{2}x^2 + \bar{2} \\
\hline
q_2 = x^2 + x - \bar{1}
\end{array}
$$

$\Rightarrow d = (f, g) = r_1 = f - g q_1 = 1 . f + (-q_1) g = 1 f + (-\bar{4}x + \bar{1}) g$

$\Rightarrow d = r_1 = \bar{2}x^2 + \bar{2}$

$u = 1$

$v = -\bar{4}x + \bar{1} = \bar{3}x + \bar{1}$

б) $f = x^4 + x^3 - \bar{4}x^2 + x + \bar{1}$, $g = x^4 - x^3 + x - \bar{3}$, $\mathbb{Z}_7[x]$

$$\begin{array}{l|l} f = x^4 + x^3 - \bar{4}x^2 + x + \bar{1} & g = x^4 - x^3 + x - \bar{3} \\ - \quad x^4 - x^3 + x - \bar{3} & \hline \\ \hline \quad \bar{2}x^3 \underbrace{-\bar{4}x^2}_{= +\bar{3}x^2} + \bar{4} = r_1 & q_1 = \bar{1} \end{array}$$

$\downarrow f = g q_1 + r_1 \Rightarrow \boxed{r_1 = f - g q_1}$

$$\begin{array}{l|l} g = x^4 - x^3 + x - \bar{3} & r_1 = \bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{4} \\ - \quad x^4 + \bar{5}x^3 + \bar{2}x & \hline \\ \hline \quad x^3 + \bar{6}x + \bar{4} & q_2 = \bar{4}x + \bar{4} \\ - \quad x^3 + \bar{5}x^2 + \bar{2} & \\ \hline \quad \bar{2}x^2 + \bar{6}x + \bar{2} = r_2 & \end{array}$$

$\downarrow g = r_1 q_2 + r_2 \Rightarrow \boxed{r_2 = g - r_1 q_2}$

$$\begin{array}{l|l} r_1 = \bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{4} & r_2 = \bar{2}x^2 + \bar{6}x + \bar{2} \\ - \quad \bar{2}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{2}x & \hline \\ \hline \quad \bar{4}x^2 + \bar{5}x + \bar{4} & q_3 = x + \bar{2} \\ - \quad \bar{4}x^2 + \bar{5}x + \bar{4} & \\ \hline \quad 0 = r_3 & \end{array}$$

$\Rightarrow d = r_2 = uf + vg = g - r_1 q_2 = g - (f - g q_1) q_2 =$

$= -q_2 f + (q_1 q_2 + 1) g$

$d = \bar{2}x^2 + \bar{6}x + \bar{2}$ $\quad v = \bar{1}.(\bar{4}x + \bar{4}) + \bar{1} = \bar{4}x + \bar{5}$

$u = \bar{3}x + \bar{3}$

b) $f = \overline{6}x^3 + \overline{9}x + \overline{4}$, $g = \overline{8}x^3 + \overline{7}x^2 + \overline{7}x + \overline{4}$, $\mathbb{Z}_{11}$

$$f = \overline{6}x^3 + \overline{9}x + \overline{4} \quad \Big| \; g = \overline{8}x^3 + \overline{7}x^2 + \overline{7}x + \overline{4}$$

$$- \; \overline{6}x^3 + \overline{8}x^2 + \overline{8}x + \overline{3} \qquad q_1 = \overline{9}$$

$$-\overline{8}x^2 + x + \overline{1} = r_1 \neq 0 \rightarrow f = gq_1 + r_1 \Rightarrow \boxed{r_1 = f - gq_1}$$

$$g = \overline{8}x^3 + \overline{7}x^2 + \overline{7}x + \overline{4} \quad \Big| \; r_1 = -\overline{8}x^2 + x + \overline{1}$$

$$- \; \overline{8}x^3 - x^2 - x \qquad q_2 = -\overline{1}x - \overline{1} = \overline{10}x + \overline{10}$$

$$\overline{8}x^2 + \overline{8}x + \overline{4}$$

$$- \; \overline{8}x^2 - x - \overline{1} \qquad \rightarrow g = r_1 q_2 + r_2 \Rightarrow \boxed{r_2 = g - r_1 q_2}$$

$$\overline{9}x + \overline{5} = r_2 \neq 0$$

$$-\overline{2}x + \overline{5} = \overline{9}x + \overline{5}$$

$$r_1 = -\overline{8}x^2 + x + \overline{1} \quad \Big| \; r_2 = \overline{9}x + \overline{5}$$

$$- \; -\overline{8}x^2 + \overline{9}x \qquad q_3 = \overline{4}x + \overline{4}$$

$$-\overline{8}x + \overline{1}$$

$$- \; -\overline{8}x + \overline{9} \qquad \rightarrow r_1 = r_2 q_3 + r_3 \Rightarrow \boxed{r_3 = r_1 - r_2 q_3}$$

$$-\overline{8} = r_3 \neq 0 = \overline{3}$$

$$r_2 = \overline{9}x + \overline{5} \quad \Big| \; r_3 = -\overline{8} = \overline{3}$$

$$- \; \overline{9}x \qquad q_4 = \overline{3}x + \overline{5}$$

$$\overline{5}$$

$$- \; \overline{5}$$

$$0 = r_4$$

$$\Rightarrow d = -\overline{8} = \overline{3} = r_1 - r_2 q_3 = r_1 - (g - r_1 q_2) q_3 =$$

$$= f - gq_1 - (g - (f - gq_1) q_2) q_3 = f - gq_1 - gq_3 +$$

$$+ (f - gq_1) q_2 q_3 = f - gq_1 - gq_3 + f q_2 q_3 - g q_1 q_2 q_3 =$$

$$= g -$$

$= (\underbrace{q_2 q_3 + 1}_{u}) f + (\underbrace{-q_1 - q_3 - q_1 q_2 q_3}_{v}) g$

$u = (\overline{10}x + \overline{10}).(\overline{4}x + \overline{4}) + 1 = \overline{40}x^2 + \overline{80}x + \overline{81} =$

$= \overline{7}x^2 + \overline{3}x + \overline{4}$

$v = -\overline{9} - \overline{4}x - \overline{4} - (\overline{9}.(-\overline{1}x - \overline{1})(\overline{4}x + \overline{4})) =$

$= \overline{2} + \overline{7}x + \overline{7} - (\overline{9}(-\overline{4}x^2 - \overline{8}x - \overline{4})) =$

$= \overline{9} + \overline{7}x + \overline{36}x^2 + \overline{72}x + \overline{36} =$

$= \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{1}$

$d = \overline{3} \Rightarrow f$ и g са взаимно прости

$u = \overline{7}x^2 + \overline{3}x + \overline{4}$

$v = \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{1}$

<u>Заб.</u> Ще казваме, че f и g са взаимно прости, ако НОД на f и g $(f,g) = d$ е (ненулева) константа от F.

<u>доп.</u> $f = x^4 + x^3 - \overline{4}x^2 + x + \overline{1}$, $g = x^4 - x^3 + x - \overline{3}$, $\mathbb{Z}_7$

(3) Нека $f, g \in F[x]$ и $u, v \in F[x]$, където $uf + v.g = (f,g)$. Да се намери (u,v) - ?

<u>Решение:</u> Нека $(f,g) = d \Rightarrow f = d f_1$ и $g = d g_1$, $f_1, g_1 \in F[x]$.

$uf + v.g = d \;|:d \Rightarrow \boxed{uf_1 + vg_1 = 1}$ (1)

Нека $d_1 = (u,v) \Rightarrow \boxed{d_1 | u \text{ и } d_1 | v}$ (2)

от (1) и (2) $\Rightarrow d_1 | 1 \Rightarrow d_1 = const \Rightarrow \underline{u}$ и $\underline{v}$ са взаимно прости и можем да считаме, че $(u,v) = 1$.

Деф. Нека $f \in F[x]$ и $\deg f > 0$. Казваме, че f е неразложим над полето F, ако не може да се представи като произведение на два полинома от $F[x]$ със степени < от степента на f.
Така единствените делители на f от $F[x]$ са полиноми от вида a и $a.f$, $a \in F \setminus \{0\}$.

Заб. Полином може да е неразложим над едно поле, но да е разложим над друго, например $x^2 - 2$ е неразложим над $\mathbb{Q}$, но е разложим над $\mathbb{R}$: $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$

Обобщение:
- единствените неразложими над $\mathbb{C}$ полиноми са полиномите от първа степен
- неразложимите над $\mathbb{R}$ полиноми са полиномите от първа степен и полиномите от втора степен с отрицателна дискриминанта.

(4) Разложете полинома $\boxed{f = x^4 + 16}$

а) над $\mathbb{C}$

Нека x_k, $k = 0, 1, 2, 3$ са корените на f =>
=> $f(x_k) = 0$ <=> $x_k^4 + 16 = 0$ <=> $x^4 = -16$ <=>
$x^4 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$ => от ф-лата на Моавър за коренуване => $x_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow x_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$x_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$x_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$x_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

б) над $\mathbb{R}$

Виждаме от а), че корените на f над $\mathbb{C}$ са двойки комплексно спрегнати:

$x_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ $\quad x_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = \overline{x_0}$

$x_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ $\quad x_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = \overline{x_1}$

$$\Rightarrow f = \left((x - x_0).(x - \overline{x_0})\right).\left((x - x_1)(x - \overline{x_1})\right) =$$

$$= \left(x^2 - (x_0 + \overline{x_0})x + x_0\overline{x_0}\right)\left(x^2 - (x_1 + \overline{x_1}) + x_1\overline{x_1}\right) =$$

$$= \left(x^2 - (\sqrt{2} + \cancel{i\sqrt{2}} + \sqrt{2} - \cancel{i\sqrt{2}})x + 4\right)\left(x^2 - (-\sqrt{2} + \cancel{i\sqrt{2}} - \sqrt{2} - \cancel{i\sqrt{2}})x + 4\right) =$$

$$\Rightarrow f = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$$

5) Нека $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ и $\alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, $r, s \in \mathbb{Z}$, $(r, s) = 1$ е корен на f. Да се докаже, че $r \mid a_n$ и $s \mid a_0$ (*) $f \in \mathbb{Z}[x]$ и $f = a_0x^n + \ldots + a_n$ и $a_0 = 1$, и $\alpha \in \mathbb{Q}$ е корен на $f \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \mid a_n$)

Д-во: α - корен на $f \Rightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{r}{s}\right) = 0 \Rightarrow$

$$a_0\frac{r^n}{s^n} + a_1\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + \ldots + a_n = 0 \quad / . s^n$$

$\Rightarrow$ тези са сравними с $0 \pmod r$, защото имат като множител r

$$\Rightarrow a_0r^n + a_1r^{n-1}s + \ldots + a_ns^n = 0$$

какъв остатък дава този израз при деление на модул r

Разглеждаме по модул r:

$0 \equiv a_ns^n \pmod r \Rightarrow r \mid a_ns^n$

от усл.: $(r, s) = 1 \Rightarrow (r, s^n) = 1$

$\xRightarrow{\text{Лема Евклид}} \boxed{r \mid a_n}$

Евклид $\to$ ако r-то дели произведение на 2 г-на значи дели поне 1 от тях

Аналогично, ако разглеждаме по модул s:

$0 \equiv a_0r^n \pmod s$

от усл.: $(r, s) = 1 \Rightarrow (r^n, s) = 1$

$\xRightarrow{\text{Лема Евклид}} \boxed{s \mid a_0}$

(*) В частност (стр. 79 следствие 7), ако $a_0 = 1$, то $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \mid a_n$

Лема (страница 77) Ако полиномът $f \in \mathbb{Z}[x]$ е разложим над $\mathbb{Q}$, то f е разложим и над $\mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ $f \in \mathbb{Z}[x]$ е неразложим над $\mathbb{Q} \Leftrightarrow f$ е неразложим над $\mathbb{Z}$.

⑥ Да се докаже, че полиномът f е неразложим над $\mathbb{Q}$

а) $f = x^4 + 6x^2 + 8x + 9$

* Ще докажем, че f е неразложим над $\mathbb{Z}$, откъдето ще следва според Лемата (от предишната страница), че f е неразложим над $\mathbb{Q}$.

Допускаме, че $\boxed{f = g\cdot h}$ е нетривиално разлагане на f, т.е. $g, h \in \mathbb{Z}[x]$, като $\deg g \neq 0$ и $\deg h \neq 0$. $\boxed{\text{Б.О.О.}}$ нека $\boxed{\deg g \le \deg h}$. Старшият коефициент на f е 1-ца и $g, h \in \mathbb{Z}$ => старшите коеф. на g и h са ± 1

I сл) $\deg g = 1$, $\deg h = 3$ и нека α е к-н на g => α е и корен на f и => $f = \pm(x-\alpha).h$, т.е. старшият коеф на f е 1-ца $\xrightarrow{(*)}$ $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \mid 9$. Очевидно => кандидатите за α са: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Обаче f няма ⊕ к-ни => за стойности, които α може да приема остават $-1, -3$ и -9

Ще проверим дали някоя от ст-тите $-1, -3, -9$ удовлетворява условията за корен на f чрез схема на Хорнер

$f = x^4 + 6x^2 + 8x + 9$, кандидати: $-1, -3, -9$

	1	0	6	8	9
~~−1~~	1	−1	7	1	8
~~−3~~	1	−3	15	−37	120
~~−9~~	1	−9	87	–	–

=> такова разлагане на f: $f = gh$, $g, h \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg g, \deg h \neq 0$ и $\deg g \le \deg h$ ($\deg h \le \deg g$ е аналогично) не $\exists$

II сл) $\deg g = 2$, $\deg h = 2$ и нека:

$g = \pm x^2 + ax + b$, $h = \pm x^2 + cx + d$

Нека старшите коеф на g и h са със знак ⊕ (разсъжденията с ⊖ са аналогични).

=> $f = gh = (x^2 + ax + b).(x^2 + cx + d)$

$\Rightarrow f = x^4 + 6x^2 + 8x + 9 = x^4 + cx^3 + dx^2 + ax^3 + acx^2 + adx + bx^2 + bcx + bd = x^4 + (a+c)x^3 + (b+ac+d)x^2 + (ad+bc)x + bd$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + ac + d = 6 \\ ad + bc = 8 \\ bd = 9 \Rightarrow b = \frac{9}{d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\} \end{cases}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

Тъй като случаите $(b,d) = (\pm 1, \pm 9)$ и $(b,d) = (\pm 9, \pm 1)$ са аналогични, нека вземем $d \neq \pm 9$:

1) $d = 1 \Rightarrow b = 9$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 9 + ac + 1 = 6 \\ a + 9c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -a \\ ac = -4 \\ a + 9c = 8 \end{cases} \; -8a = 8 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = 1 \\ ac = -4 \Rightarrow (-1) \cdot 1 = -4 \rightarrow \text{противоречие} \end{cases}$$

2) $d = -1 \Rightarrow b = -9$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ -9 + ac - 1 = 6 \\ -a - 9c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -c \\ ac = 16 \\ a + 9c = -8 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -1 \\ ac = 16 \Rightarrow 1 \cdot (-1) = 16 \rightarrow \text{противоречие} \end{cases}$$

3) $d=3 \Rightarrow b=3$

$$\begin{cases} a+c=0 \Rightarrow a+c=0 \\ 3+ac+3=6 \\ 3a+3c=8 \Rightarrow a+c=\frac{8}{3} \end{cases}$$ Ч невъзможно => противоречие

4) $d=-3 \Rightarrow b=-3$

$$\begin{cases} a+c=0 \Rightarrow a+c=0 \\ -3+ac-3=6 \\ -3a-3c=8 \Rightarrow a+c=-\frac{8}{3} \end{cases}$$ Ч противоречие

=> такова разлагане на f е невъзможно

=> f е неразложим над $\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Лема}}$ f е неразложим над $\mathbb{Q}$

доп. 5) $f = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ -> неразложим над $\mathbb{Q}$

(7) Нека $a, b \in F$, $\underbrace{}_{a \neq 0}$ и $f(x) \in F[x]$. Докажете, че $f(x)$ е неразложим над полето F $\Leftrightarrow f(ax+b)$ е неразложим над F.

Критерий на Айзенщайн:

Нека $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ и $\exists$ p-просто ч-ло, удовлетворяващо следните изисквания:

1) $p \nmid a_0$

2) $p \mid a_1, \dots, a_n$

3) $p^2 \nmid a_n$

Тогава полиномът f е неразложим над $\mathbb{Q}$

(8) а) $f = 2x^5 - 21x^2 + 42x + 63$ ← АСДЕ пол. f е неразложим над $\mathbb{Q}$

Прилагаме кр. на Айзенщайн за $p = 7$:

1) $7 \nmid 2$
2) $7 \mid -21, 42, 63$
3) $7^2 \nmid 63$

$\Big\}$ f е неразложим над $\mathbb{Q}$

б) $f = x^4 - 2x + 3$

В случая кр. на Айзенщайн не е директно приложим. Нека затова разгледаме $f(x+1)$:

$f(x+1) = (x+1)^4 - 2(x+1) + 3 =$

$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - 2x - 2 + 3 =$

$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2$

$f(x+1) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2$

за $p = 2 \xRightarrow{\text{кр. Айз.}} f(x+1)$ е неразложим над $\mathbb{Q}$

$\xRightarrow{(7)} f(x)$ е неразложим над $\mathbb{Q}$

в) $f = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$, p - просто ч-ло

От ф-ла за геометр. прогресия ($a_n = a_1 q^{n-1}$) получаваме:

$f(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1}$, разгл. $f(x+1)$:

$f(x+1) = \dfrac{(x+1)^p - 1}{(x+\cancel{1}) - \cancel{1}} \xlongequal[\text{формула}]{\text{биномна}} \dfrac{x^p + \binom{p}{1}x^{p-1}.1 + \ldots + \binom{p}{p-1}x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x}$

$= x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1}x^{1-1} = x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1}$

т.к. $(p,1) = (p,2) = \ldots = (p,p-1) = 1$, то $p \mid \binom{p}{k} =$

$= \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \binom{p}{p-k} = \dfrac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$, $k = \overline{1, p-1}$

и $p^2 \nmid \binom{p}{p-1} = p \Rightarrow$ От кр. Айзенщайн за p - просто ч-ло, $f(x+1)$ е неразложима над $\mathbb{Q}$ $\xRightarrow{(7)}$ f е неразложим над $\mathbb{Q}$

Корени на полиномите

Деф. Нека $f(x) \in F[x]$, $\deg f(x) > 0$ и $\alpha \in K \supseteq F$. (разширение на)
Казваме, че α е корен на $f(x) \in K[x]$, ако $f(\alpha) = 0$, т.е. $f(x) = (x-\alpha).g(x)$, $g(x) \in K[x]$
($\exists$ разширение K на F, над което $f(x)$ се разлага в произведение на линейни множители, т.е. $\forall$ корени са в това разширение K)

Нека $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in F[x]$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са $\forall$ корени на f, лежащи в разширение на полето F. Тогава f се разлага във вида:

$$f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

Като приравним коефициентите пред степените на x, получаваме:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \binom{n}{1} = n; \binom{n}{n} = 1}$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_n = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0} \quad \binom{n}{1} \text{ събираеми} \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0} \quad \binom{n}{2} \text{ събираеми} \\ \vdots \\ \sigma_n = x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0} \quad \binom{n}{n} \text{ събираеми} \end{array}\right.$$

Тези формули се наричат формули на Виет.

Частен случай ($n=2$):

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = a_0(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow$$

$$f = a_0x^2 + a_1x + a_2 = a_0(x^2 - xx_2 - x_1x + x_1x_2)$$

$$\Rightarrow a_0x^2 + a_1x + a_2 = a_0x^2 - a_0x_2x - a_0x_1x + a_0x_1x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0x^2 + a_1x + a_2 = a_0x^2 - a_0(x_1+x_2)x + a_0x_1x_2$$

$$\Rightarrow \cancel{a_0x^2} + \underline{a_1}x + \underline{a_2} = \cancel{a_0x^2} - \underline{a_0(x_1+x_2)}x + \underline{a_0x_1x_2}$$

$\Rightarrow a_1 = -a_0(x_1+x_2)$ $\Big\{ x_1+x_2 = -\dfrac{a_1}{a_0}$

$a_2 = a_0 x_1 x_2$ $\qquad x_1 x_2 = \dfrac{a_2}{a_0}$

① Да се намерят стойностите на λ, за които между корените x_1, x_2, x_3 на полинома f: $f = \underset{a_0}{1}x^3 + \underset{a_1}{8}x^2 \underset{a_2}{+12}x \underset{a_3}{+\lambda} \in \mathbb{C}[x]$, е в сила:

$\boxed{x_1 = x_2 . x_3}$

Решение:

От формулите на Виет имаме, че:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} = -\dfrac{8}{1} = -8 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +\dfrac{a_2}{a_0} = \dfrac{12}{1} = 12 \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_3}{a_0} = -\dfrac{\lambda}{1} = -\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + (x_2+x_3) = -8 \Rightarrow \boxed{x_2+x_3 = -8-x_1} \\ x_1(x_2+x_3) + x_2x_3 = 12 \\ x_1(x_2x_3) = -\lambda \end{cases}$$

Имаме по условие, че $\boxed{x_1 = x_2x_3}$:

$$\begin{cases} x_1(-8-x_1) + x_1 = 12 \Rightarrow -8x_1 - x_1^2 + x_1 = 12 \\ x_1 . x_1 = -\lambda \Rightarrow \boxed{x_1^2 = -\lambda} \end{cases}$$

$-8x_1 - x_1^2 + x_1 = 12 \Rightarrow \boxed{x_1^2 + 7x_1 + 12 = 0}$

$D = 49 - 48 = 1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-7+1}{2} = -3 \quad x_2 = -4$

$x_1 = -3 \Rightarrow x_1^2 = 9 = -\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = -9}$

$\cup$

$x_1 = -4 \Rightarrow x_1^2 = 16 \Rightarrow \boxed{\lambda = -16}$

$\Rightarrow \lambda \in \{-9; -16\}$

② $\lambda = ?$ за два от к-те на $f = x^3 - 5x^2 + 8x + \lambda \in \mathbb{C}[x]$ е изпълнено, че: $\boxed{x_1 + x_2 = x_1 x_2}$

Решение:

От ф-лите на Виет имаме, че:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = +5 \\ x_1x_2 + x_1\underline{x_3} + x_2\underline{x_3} = 8 \\ x_1x_2x_3 = -\lambda \end{array}\right.$$

Използваме даденото в условието:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \boxed{x_1 + x_2 = 5 - x_3} \\ x_1 + x_2 + (x_1 + x_2)x_3 = 8 \Rightarrow (x_1 + x_2)(1 + x_3) = 8 \\ (x_1 + x_2)x_3 = -\lambda \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 5 - x_3 \\ (5 - x_3)(1 + x_3) = 8 \Rightarrow 5 + 5x_3 - x_3 - x_3^2 = 8 \\ (5 - x_3)x_3 = -\lambda \Rightarrow 5x_3 - x_3^2 = -\lambda \end{array}\right.$$

$\Downarrow$

$x_3^2 - 4x_3 + 3 = 0$

$D = 4 - 3 = 1$

$x_{3_1} = 2 + 1 = 3$ $\quad$ $x_{3_2} = 2 - 1 = 1$

$\Rightarrow \lambda_1 = -(5.3 - 3^2) = -6$ $\quad$ $\lambda_2 = -(5.1 - 1^2) = -4$

③ $\lambda = ?$, $f = x^4 - x^3 + \lambda x^2 - x - 6$, $f \in \mathbb{C}[x]$:

$\boxed{x_1 + x_2 = 1}$

Решение:

От формулите на Виет имаме, че:

$$\begin{cases} \boxed{x_1 + x_2} + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1x_2 + \underbrace{x_1x_3 + x_2x_3}_{x_3(x_1+x_2)} + \underbrace{x_1x_4 + x_2x_4}_{x_4(x_1+x_2)} + x_3x_4 = \lambda \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 1 \\ x_1x_2x_3x_4 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{1} + x_3 + x_4 = \cancel{1} \Rightarrow \boxed{x_3 + x_4 = 0} \\ x_1x_2 + (\underbrace{x_1 + x_2}_{1})(\underbrace{x_3 + x_4}_{0}) + x_3x_4 = \lambda \\ x_1x_2(x_3 + x_4) + (\underbrace{x_1 + x_2}_{1})x_3x_4 = 1 \\ (x_1x_2)(x_3x_4) = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ x_1x_2 + x_3x_4 = \lambda \\ x_3x_4 = 1 \\ (x_1x_2)(x_3x_4) = -6 \end{cases} \quad \boxed{x_1x_2 = \lambda - 1} \quad \boxed{x_1x_2 = -6}$$

$\lambda - 1 = -6 \Rightarrow \boxed{\lambda = -5}$

Отговор: $\lambda = -5$ за $f = \ldots$ е изп., че $x_1 + x_2 = 1$

④ $\lambda = ?$, $f = x^4 - 7x^3 - x^2 - 65x + \lambda \in \mathbb{C}[x]$:

$\boxed{x_1 + x_2 = x_3 . x_4}$

Решение:

От формулите на Виет =>

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1x_2 + \underline{x_1x_3} + \underline{x_1x_4} + \underline{x_2x_3} + \underline{x_2x_4} + x_3x_4 = -1 \\ \underline{x_1x_2}x_3 + \underline{x_1x_2}x_4 + x_1\underline{x_3x_4} + x_2\underline{x_3x_4} = 65 \\ x_1x_2x_3x_4 = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = 7 \\ x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = -1 \\ x_1x_2(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)x_3x_4 = 65 \\ (x_1x_2)(x_3x_4) = \lambda \end{cases}$$

Полагаме $\boxed{\begin{matrix} x_1 + x_2 = x_3x_4 = a \\ x_1x_2 = b \\ x_3 + x_4 = c \end{matrix}}$

$$\begin{cases} a + c = 7 \ (1) \Rightarrow \boxed{c = 7 - a} \\ ac + b + a = -1 \ (2) \\ bc + a^2 = 65 \ (3) \\ ab = \lambda \ (4) \end{cases}$$

(2) $b = -1 - ac - a = -1 - a(7-a) - a = -1 - 7a + a^2 - a$

$\Rightarrow b = a^2 - 8a - 1$

(3) $(a^2 - 8a - 1)(7 - a) + a^2 = 65$

$7a^2 - a^3 - 56a + 8a^2 - 7 + a + a^2 = 65$

$a^3 - 16a^2 + 55a + 72 = 0$

	1	-16	55	72
-1	1	-17	72	0

$\Rightarrow (a+1)(\underbrace{a^2 - 17a + 72}) = 0$

$\Rightarrow a_1 = -1 \vee D = 289 - 288 = 1$

$a_2 = \frac{17+1}{2} = 9 \quad a_3 = 8$

+ При $a = -1 \Rightarrow c = 8$, $b = 8$, $\boxed{d = -8}$
+ При $a = 9 \Rightarrow c = -2$, $b = 8$, $\boxed{d = 72}$
+ При $a = 8 \Rightarrow c = -1$, $b = -1$, $\boxed{d = -8}$

доп. $\lambda = ?$, $f = x^4 + 3x^3 + \lambda x^2 - 9x - 2 \in \mathbb{C}[x]$:
$x_1 + x_2 = x_3 x_4$

(5) Нека $f \in \mathbb{R}[x]$, f дава остатък -8 при деление с $(x-3)$ и остатък 4 при деление с $(x+3)$. Да се намери остатъкът при деление на f с $(x-3)(x+3)$

Решение:

(1) $f = (x-3)q_1 - 8$, $q_1, q_2 \in \mathbb{R}[x]$

(2) $f = (x+3)q_2 + 4$

и нека $f = (x-3)(x+3).q + r$, $q, r \in \mathbb{R}[x]$,
$\deg[(x-3)(x+3)] = 2$ и $\deg r < \deg[(x-3)(x+3)]$
$\Rightarrow \deg r \le 1 \Rightarrow r = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow f = (x-3)(x+3).q + (ax+b)$ (3)

заместваме в: (1): $f(3) = (3-3)q_1 - 8 = -8$
в: (3): $f(3) = (3-3)(3+3)q + a.3 + b$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{3a + b = -8}$ (*)

Аналогично заместваме в:

(2) $f(-3) = (-3+3)q_2 + 4 = 4$
(3) $f(-3) = (-3-3)(-3+3)q + a(-3) + b$ $\Big\} \Rightarrow$

$\boxed{-3a + b = 4}$ (**)

От (*) и (**) имаме:

$\oplus \left| \begin{aligned} 3a + b &= -8 \\ -3a + b &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow \boxed{b = -2} \Rightarrow \boxed{a = -2}$

$\Rightarrow r = ax + b = -2x - 2$

Отговор: Остатъкът при деление на f с $(x-3)(x+3)$ е

$\boxed{r = -2x - 2}$

⑥ Да се намери полином от трета степен с $\mathbb{C}$ коефициенти, който при деление с (x^2+1) дава остатък $(-5x+10)$ и за корените му е в сила следното:

$$\left| \begin{aligned} &\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 9 \\ &\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = 99 \end{aligned} \right. , \quad x_i \neq 0, \ i = \overline{1,3}$$

Решение:
Нека $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$
$f = (x^2+1) \cdot g + (-5x+10)$, $g \in \mathbb{C}[x]$
Извършвайки делението на f и (x^2+1), търсим остатък $(-5x+10)$:

$f = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad | \; g = x^2 + 1$

$q = ax + b$

$$\begin{array}{l} ax^3+bx^2+cx+d \\ -\underline{(ax^3 + ax)} \\ bx^2 - ax + cx + d \\ -\underline{(bx^2 + b)} \\ -ax + cx - b + d = r \end{array}$$

$f = g \cdot q + r$

$r = -ax - b + cx + d$ е търсеният остатък $(-5x+10)$, т.е.

$$\boxed{-ax - b + cx + d = -5x + 10}$$

$$\left.\begin{array}{l} r(i) = -a \cdot i - b + ci + d = -5i + 10 \\ r(-i) = ai - b - ci + d = +5i + 10 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\oplus \\ \ominus\end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} -2b + 2d = 20 \\ 2ai + 2ci = 10i \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -b + d = 10 \\ a - c = 5 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 9 \\ \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = 99 \end{array} \right. , \; x_i \neq 0, \; i = \overline{1,3}$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = 9 \quad (*) \\ \frac{(x_2x_3)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_1x_2)^2}{(x_1x_2x_3)^2} = 99 \quad (**) \end{array} \right.$$

$(x_2x_3)^2+(x_1x_3)^2+(x_1x_2)^2=(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)^2-$

$-2(x_2x_3x_1x_3+x_1x_3x_1x_2+x_2x_3x_1x_2)=$

$=(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2)^2-2(x_1x_2x_3)(x_1+x_2+x_3)$

От формулите на Виет:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

т.е имаме, че:

$$(*)\ \frac{\frac{c}{\cancel{a}}}{-\frac{d}{\cancel{a}}}=9 \Rightarrow \boxed{c=-9d}$$

$$(**)\ \frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2-2\left(-\frac{d}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)}{\left(-\frac{d}{a}\right)^2}=99 \Rightarrow \frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{2bd}{a^2}}{\frac{d^2}{a^2}}=99 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{c^2-2bd}{\cancel{a^2}}}{\frac{d^2}{\cancel{a^2}}}=99 \Rightarrow \frac{c^2-2bd}{d^2}=99 \Rightarrow \boxed{c^2-2bd=99d^2}$$

заместване

$\Rightarrow 81d^2-2bd=99d^2 \Rightarrow -bd=9d^2$

Ако $d=0 \Rightarrow f=ax^3+bx^2+cx \Rightarrow 0$ е корен на $f(x)$, но по условие $x_i, i=\overline{1,3}$ е $\neq 0$

$\Rightarrow d\neq 0 \Rightarrow -bd=9d^2 \;/:d \Rightarrow \boxed{-b=9d}$

$$\Rightarrow (2)\begin{cases} -b+d=10 \\ a-c=5 \\ c=-9d \\ b=-9d \end{cases} \Rightarrow 9d+d=10 \Rightarrow \boxed{d=1} \Rightarrow \boxed{c=b=-9}, (a=-$$

$\Rightarrow$ Отг: $f=-4x^3-9x^2-9x+1$

$=9=$

Деф. Казваме, че α е <u>к-кратен</u> корен на полинома $f(x) \in F[X]$ (и $\alpha \in K$ (подходящо разширение на F)), ако е изпълнено, че:
$f(x) = (x-\alpha)^k \cdot g(x)$, $g(x) \in F[X]$ и $g(\alpha) \neq 0$

1) $k = 1 \Rightarrow \alpha$ е еднократен (прост) корен

2) $k \geq 2 \Rightarrow \alpha$ е <u>к-кратен</u> корен

Th (критерий за кратност)
Нека F е поле. Тогава $f(x) (\in F[X]) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, има к-кратен корен $\alpha \in F \Leftrightarrow f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(k)} \neq 0$
(т.е. α е к-н както на полинома f, така и на $\forall$ негови производни до $(k-1)$-вата вкл., като к-тата производна няма за к-н $\alpha \in F$)

Тв. Един полином $f \in F[X]$ има кратен корен $\Leftrightarrow f$ има общ корен с производната си

Заб. Горното твърдение служи за посочване $\exists$ на кратен корен, но не показва каква е кратността му.

⑦ Да се определи кратността на корена α за полинома $f(x) \in F[X]$

a) $\alpha = 2$, $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

$+ \; f(\alpha) = f(2) = \cancel{32} - \cancel{80} + \cancel{56} - \cancel{8} + \cancel{8} - \cancel{8} = 0$

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 4x + 4$

$+ \; f'(\alpha) = f'(2) = \cancel{80} - \cancel{160} + \cancel{84} - \cancel{8} + \cancel{4} = 0$

$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 42x - 4$

$+ \; f''(\alpha) = f''(2) = \cancel{160} - \cancel{240} + \cancel{84} - \cancel{4} = 0$

$f'''(x) = 60x^2 - 120x + 42$

$- \; f'''(\alpha) = f'''(2) = \underbrace{240 - 240}_{=0} + 42 = 42 \neq 0$

$\Rightarrow \alpha = 2$ е 3-кратен корен на $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

$\boxed{\text{II начин}}$ Схема на Хорнер:

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	0
2	1	-1	-1	-2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	7			

$\alpha = 2$ е 3-кратен корен на $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

б) $\alpha = 1$, $f = x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$

$+\ f(1) = \cancel{1} - \cancel{(2n+1)} \cdot 1 + \cancel{(2n+1)} \cdot 1 \cancel{-1} = 0$

$f'(x) = (2n+1)x^{2n} - (2n+1)(n+1)x^n + n(2n+1)x^{n-1}$

$f'(1) = 1(2n+1) \cdot 1 - (n+1)(2n+1) \cdot 1 + n(2n+1) \cdot 1$

$+\ f'(1) = \cancel{(n+1)(2n+1)} - \cancel{(n+1)(2n+1)} = 0$

$f''(x) = 2n(2n+1)x^{2n-1} - n(n+1)(2n+1)x^{n-1} + n(n-1)(2n+1)x^{n-2}$

$f''(1) = 2n(2n+1) - n(n+1)(2n+1) + n(n-1)(2n+1)$

$f''(1) = 2n(2n+1) - n(\underbrace{\cancel{n}+1-\cancel{n}+1}_{2})(2n+1)$

$+\ f''(1) = \cancel{2n(2n+1)} - \cancel{2n(2n+1)} = 0$

$f'''(x) = 2n(2n-1)(2n+1)x^{2n-2} - n(n-1)(n+1)(2n+1)x^{n-2} +$
$+ n(n-1)(n-2)(2n+1)x^{n-3}$

$f'''(1) = 2n(2n-1)(2n+1) - n(n-1)(n+1)(2n+1) +$
$+ n(n-1)(n-2)(2n+1)$

$$f'''(1) = (2n+1)\left[2n(2n-1) - n(n-1)(n+1) + n(n-1)(n-2)\right] \Rightarrow$$

$$f'''(1) = (2n+1)\left[(4n^2 - 2n - n(n^2-1) + n(n^2-3n+2))\right]$$

$$f'''(1) = (2n+1)\left[(\underline{4n^2} - \cancel{2n} - \cancel{n^3} - n + \cancel{n^3} \underline{- 3n^2} + \cancel{2n})\right]$$

$$f'''(1) = (2n+1)(n^2 - n)$$

$$f'''(1) = n(n-1)(2n+1) \neq 0$$

$\Rightarrow \alpha = 1$ е 3-кратен корен на $f(x)$