Представяне на подпространства на n-мерното векторно пространство като решения на хомогенни системи

Нека $V = F^n$ и нека $U \leq V$ и $W \leq V$

* Алгоритъм за намиране базиси на $U+W$ и $U \cap W$ (т.е. на сума и сечение на две линейни подпространства):

① Всяко от пространствата (подпространствата на V) се задава по двата възможни начина: като линейна обвивка на базисните вектори и като фундаментална система (ХСЛУ):

1.1) $U : |(1)$, $W = \ell(b_1, \dots, b_k) \mid b_1, \dots, b_k$ - базисни вектори

1.2) $U = \ell(a_1, \dots, a_s) \mid a_1, \dots, a_s$ - базисни вектори , $W : |(2)$

1.3) $U : |(1)$, $W : |(2)$

1.4) $U = \ell(a_1, \dots, a_s) \mid a_1, \dots, a_s$ - базисни вектори

$W = \ell(b_1, \dots, b_k) \mid b_1, \dots, b_k$ - базисни вектори

$\dim U = s$ $\qquad \dim W = k$

② Базисът на сумата на две подпространства $U+W$ е една максимална линейно независима подсистема (МЛНЗПС) на системата: $\boxed{\begin{cases} a_1, \dots, a_s \\ b_1, \dots, b_k \end{cases}}$ $(U+W = \ell(a_1, \dots, a_s) + \ell(b_1, \dots, b_k) = \ell(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_k))$

③ Базисът на сечението на две подпространства $U \cap W$ е ФСР на ХСЛУ: $\boxed{\begin{vmatrix} (1) \\ (2) \end{vmatrix}}$

④ Проверка: $\dim(U+W) \stackrel{?}{=} \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

① Нека $U \leq F^4$ и $W \leq F^4$. Да се намерят базисите на U, W, $U+W$, $U \cap W$

а) $U = \ell(a_1, a_2, a_3, a_4)$, където:

$a_1 = (2, 8, -3, 14)$, $a_2 = (-1, 2, 3, 5)$

$a_3 = (-1, 14, 6, 29)$, $a_4 = (0, 12, 3, 24)$

$$W: \left| \begin{array}{l} x_2 + x_3 = 0 \\ 10x_1 + 7x_2 - 8x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Решение:

1) Базис на U:

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 & 14 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 14 & 6 & 29 \\ 0 & 12 & 3 & 24 \end{pmatrix} \cdot(+2) \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 0 & 12 & 3 & 24 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ \cancel{0} & \cancel{12} & \cancel{3} & \cancel{24} \\ \cancel{0} & \cancel{12} & \cancel{3} & \cancel{24} \end{pmatrix} |:3 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} (-3) \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & -10 & 0 & -19 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Базис на U: $\{(0,4,1,8), (-1,-10,0,-19)\}$

$\dim U = 2$

2) Базис на W:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 0 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} r = 2 \\ n = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \dim W = 2$$

Нека $\boxed{x_3 = p} \Rightarrow \boxed{x_2 = -p}$

Нека $\boxed{x_4 = q} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{7p + 8q}{10}}$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{7}{10}p + \frac{4}{5}q, -p, p, q\right) =$

$= p\left(\frac{7}{10}, -1, 1, 0\right) + q\left(\frac{4}{5}, 0, 0, 1\right)$

$\Rightarrow$ Базис на W: $\{(7/10, -1, 1, 0), (4/5, 0, 0, 1)\}$

$\dim W = 2$

$\{(7, -10, 10, 0), (4, 0, 0, 5)\}$

3) Базис на $U+W$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & -10 & 0 & -19 \\ 7 & -10 & 10 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 7 \quad \cdot 4 \\ \oplus \\ \oplus \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & -10 & 0 & -19 \\ 0 & -80 & 10 & -133 \\ 0 & -40 & 0 & -71 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-10) \\ \\ \oplus \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & -10 & 0 & -19 \\ 0 & -120 & 0 & -213 \\ 0 & -40 & 0 & -71 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 19 \\ 0 & 120 & 0 & 213 \\ 0 & 40 & 0 & 71 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ |:3 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 19 \\ 0 & 40 & 0 & 71 \\ \cancel{0} & \cancel{40} & \cancel{0} & \cancel{71} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 19 \\ 0 & 40 & 0 & 71 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \oplus \\ \cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Базис на $U+W$:

$\{(0,4,1,0), (1,10,0,19), (0,40,0,71)\}$

$\dim(U+W) = 3$

4) Базис на $U \cap W$: Трябва да представим ... :

ХСЛУ

U като ХСЛУ

(обратна задача: ФСР $\to$ ХСЛУ)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & -10 & 0 & -19 \end{pmatrix} \to \text{нека } \left.\begin{matrix} \boxed{x_4 = p} \\ \boxed{x_2 = q} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{x_3 = -4q - 8p}$$

$$\boxed{x_1 = -10q - 19p}$$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-10q - 19p, q, -4q - 8p, p) =$

$= q(-10, 1, -4, 0) + p(-19, 0, -8, 1)$

$\Rightarrow$ фср $\{(-10, 1, -4, 0), (-19, 0, -8, 1)\}$, т.е.:

$$U: \begin{cases} -10x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ -19x_1 - 8x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$W: \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 10x_1 + 7x_2 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ -19x_1 - 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 10x_1 + 7x_2 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -10 & 1 & -4 & 0 \\ -19 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \\ \cdot(-1).\ (-7) \\ \oplus \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -10 & 0 & -5 & 0 \\ -19 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & -7 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} :(-5) \\ \cdot(8) \\ \\ \oplus \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -19 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -142 & 0 & -71 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ :(-71) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -19 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 8 \\ \oplus \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \end{array}$$

Нека $\boxed{x_1 = p} \Rightarrow \boxed{x_4 = 3p}$

$$\Rightarrow \boxed{x_3 = -2p} \Rightarrow \boxed{x_2 = 2p}$$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (p, 2p, -2p, +3p) =$

$= p(1, 2, -2, 3)$

$\Rightarrow$ ФСР: $\{(1, 2, -2, 3)\}$, т.е.

базис на $U \cap W$: $\{(1, 2, -2, 3)\} \Rightarrow \dim(U \cap W) = 1$

! Проверка

$$\dim(U + W) \overset{?}{=} \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$3 \overset{?}{=} 2 + 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow$$ да

б) $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$, където:
$a_1 = (1, 2, 1, 2)$, $a_2 = (2, 1, 2, 1)$, $a_3 = (1, 2, 3, 4)$

$$W: \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Решение:

1) Базис на U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (-2)(-1) \\ \oplus \\ \oplus \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ |:(-3) \\ |:2 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .(-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ базис на U: $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$

$$\boxed{\dim U = 3}$$

2) Базис на W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Big| :2 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нека $\boxed{x_4 = p} \Rightarrow \boxed{x_2 = -p}$

$\boxed{x_3 = q} \Rightarrow \boxed{x_1 = -q}$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-q, -p, q, p) =$

$= q(-1, 0, 1, 0) + p(0, -1, 0, 1)$

$\Rightarrow$ базис на W: $\{(-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$

$\boxed{\dim W = 2}$

3) Базис на U + W (U+W = $\ell(U) + \ell(W)$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| \cdot(2) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 5\oplus \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim$$

$$\sim\begin{array}{c}\\ e_2\to \\ e_3\to \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\leftarrow e_1\\ \\ \\ \leftarrow e_4\end{array} \Rightarrow$$

Базис на $U+W$: $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, т.е.

$U+W = F^4$, $\dim(U+W)=4$

4) Базис на $U\cap W$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&x_4\end{array}$$

Нека $\boxed{x_4=p} \Rightarrow \boxed{x_3=-p}$

$\Rightarrow \boxed{x_2=-p}$

$\Rightarrow$ от $x_3=-p \Rightarrow \boxed{x_1=p}$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (p, -p, -p, p) = p(1,-1,-1,1)$

$\Rightarrow U: \left| x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right.$

$W: \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&1&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix} \oplus \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}2&-2&0&0\\2&0&2&0\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{array}{l}|:2\\|:2\\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&0&1&0\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ (-1)\\ \oplus\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&0&1&0\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (-1)\end{array} \sim \begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

Нека $\boxed{x_4=p} \Rightarrow \boxed{x_2=-p}$

$x_2=-p \Rightarrow \boxed{x_1=-p}$

$x_1=-p \Rightarrow \boxed{x_3=p}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-p, -p, p, p) = p(-1,-1,1,1)$

$\Rightarrow$ базис на $U\cap W$: $\{(-1,-1,1,1)\} \to \dim(U\cap W) = 1$

! Проверка:

$$\dim(U+W) \overset{?}{=} \dim U + \dim W - \dim(U\cap W)$$

$$4 \overset{?}{=} 3 + 2 - 1 \to \text{да}$$

в) $U = \ell(a_1, a_2, a_3)$, където:

$a_1=(1,2,1,1)$, $a_2=(2,3,1,0)$, $a_3=(3,1,1,-2)$

$W: \mid 28x_1+4x_2-x_3-5x_4=0$

Решение:

1) Базис на U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot(2) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(2)\,(-1) \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid(-1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

базис на U: $\{(0,3,0,1),(0,-5,1,0),(1,4,0,0)\}$

$\dim U = 3$

2) Базис на W:

$$\mid 28x_1+4x_2-x_3-5x_4 \iff \begin{array}{cccc} 28 & 4 & -1 & -5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

Нека $\left.\begin{array}{l} x_4=p \\ x_2=q \\ x_1=r \end{array}\right\} \Rightarrow x_3=28r+4q+5p$

$\Rightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=(r,q,28r+4q+5p,p)=$

$=r(1,0,28,0)+q(0,1,4,0)+p(0,0,5,1)$

$\Rightarrow$ базис на W: $\{(1,0,28,0),(0,1,4,0),(0,0,5,1)\}$

$\dim W = 3$

3) Базис на $U+W$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 28 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \oplus \\ \\ (5) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 28 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid :21 \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 28 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-4) \\ (-28) \\ .(-5) \\ \oplus \\ \\ \oplus \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \\ \oplus \\ \\ .(-4).(-3) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{c} e_1 \to \\ e_2 \to \\ e_3 \to \\ e_4 \to \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Базис на $U+W$ е: $\Rightarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, т.е $U+W = F^4$

$\dim(U+W) = 4$

4) Базис на $U \cap W$:

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix}$$

Нека $\boxed{x_2 = p} \Rightarrow \boxed{x_4 = -3p}$

$\Downarrow$

$\boxed{x_3 = 5p}$ $\quad$ $\boxed{x_1 = -4p}$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-4p, p, 5p, -3p) = p(-4, 1, 5, -3)$

$\Rightarrow U: \mid -4x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0$

$W: \mid 28x_1 + 4x_2 - x_3 - 5x_4 = 0$

=> базис на $U \cap W$:

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ 28x_1 + 4x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 & -3 \\ 28 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot(-4) \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 & -3 \\ 44 & 0 & -21 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array}$$

Нека $\boxed{x_4 = p}$, $\boxed{x_3 = q}$ $\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{21}{44}q - \frac{7}{44}p}$

$$\Rightarrow x_2 = \cancel{4} \cdot \frac{21}{\cancel{44}_{11}} q - \frac{\overset{7}{\cancel{28}}}{\cancel{44}_{11}} p - 5q + 3p$$

$$x_2 = \frac{21}{11} q - \frac{7}{11} p - \overset{11}{5}q + \overset{11}{3}p$$

$$x_2 = \frac{21q - 55q - 7p + 33p}{11} = -\frac{34}{11} q + \frac{26}{11} p$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{34}{11} q + \frac{26}{11} p}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{21}{44} q - \frac{7}{44} p, -\frac{\overset{4}{34}}{11} q + \frac{\overset{4}{26}}{11} p, \overset{44}{q}, \overset{44}{p} \right) =$$

$$= q(21, -136, 44, 0) + p(-7, 104, 0, 44)$$

=> базис на $U \cap W$ е:

$\{(21, -136, 44, 0), (-7, 104, 0, 44)\}$

г) доп. $U = \ell(a_1, a_2, a_3, a_4)$, където:

$a_1 = (1, 2, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, -1, -1)$, $a_3 = (3, 4, 1, 1)$, $a_4 = (1, 4, 3, 3)$

$$W: \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_3 + 7x_4 = 0 \end{array} \right.$$

д) доп. (решена подробно в сборника: 4.9 а)):

$U = \ell(a_1, a_2)$, където: $a_1 = (1, 1, 2, 2)$, $a_2 = (1, -1, 2, -2)$

$$W: \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Линейни изображения

Нека V и V' са ЛП над числовото поле F.

Деф. Линейно изображение $\varphi(V) \to V'$ нарича-
$/a \to \varphi(a)$

правило, по което на всеки ел-т на V е съпоставен ел-т на V'!
функция

ме изображение между двете ЛП V и V', ко-
то съгласува операциите в двете пространства,
т.е. ако $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, $e_1, \ldots, e_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, то

$$\varphi(a) = \alpha_1 \varphi(e_1) + \alpha_2 \varphi(e_2) + \ldots + \alpha_n \varphi(e_n)$$

Ако $\varphi : V \to V'$ е линейно изображение, то
$\varphi \in Hom(V, V') = \{\varphi : V \to V' \mid \text{линейно изображение}\}$

В частност: Ако $\varphi : V \to V$ ($V \equiv V'$), то φ нари-
чаме линеен оператор, като множеството от
всички линейни оператори над V означаваме
с $Hom V$, т.е. $\varphi : V \to V$ - лин. оператор, то $\varphi \in Hom V$

Ако $\varphi : V \to V$ е линеен оператор, то
$\varphi \in Hom V = \{\varphi : V \to V \mid \text{линеен оператор}\}$

Следствие: $\varphi : V \to V'$ е линейно изображение, ако
$/a \to \varphi(a)$
за $\forall a, b \in V$ и за $\forall \alpha, \beta \in F$ имаме, че:

$$\in V \left\{ \begin{array}{l} a \oplus b \to \\ \alpha \odot a \to \end{array} \right. \boxed{\begin{array}{l} \varphi(a+b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b) \\ \varphi(\alpha . a) = \alpha \odot \varphi(a) \end{array}} \Bigg\} \in V'$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha \varphi(a) + \beta \varphi(b)$$

примери: Дали са линейни изображения следните:
1) $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$, т.е.: $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \to (a, b, c, d)$

1.1) $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ и $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

Нека вземем м-ците M_1 и M_2 и проверим дали
е изпълнено следствието.

$f(M_1) + f(M_2) \overset{?}{=} f(M_1 + M_2)$

$$\left.\begin{array}{l} f(M_1) = f\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = (a_1, b_1, c_1, d_1) \\ f(M_2) = f\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = (a_2, b_2, c_2, d_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(M_1) + f(M_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2)} \quad (1)$$

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(M_1+M_2) = f\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2) \quad (2)}$$

$\Rightarrow$ от (1) и (2) $\Rightarrow f(M_1) + f(M_2) = f(M_1 + M_2)$ $(*)$

1.2.) $\lambda \in \mathbb{R}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

дали $f(\lambda M) \overset{?}{=} \lambda f(M)$

$$f(\lambda M) = f\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d) = \lambda(a, b, c, d) \quad (3)$$

$f(M) = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, b, c, d) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda f(M) = \lambda(a, b, c, d)$ (4)

$\Rightarrow$ от (3) и (4) $\Rightarrow f(\lambda M) = \lambda f(M)$ $(**)$

$\Rightarrow$ от $(*)$ и $(**)$ $\Rightarrow f$ е линейно изображение

2) $f: V_1 \to V_2$, където $V_1 = \mathbb{R}^3[x]$, $V_2 = \mathbb{R}^3$, т.е:

$f: a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \to (2a_0, -a_1, a_2)$

2.1) $g_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$g_2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

$f(g_1 + g_2) \overset{?}{=} f(g_1) + f(g_2)$

$g_1+g_2=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2$

$\boxed{f(g_1+g_2)=(2(a_0+b_0),-(a_1+b_1),(a_2+b_2))} \to (*)$

$\left.\begin{aligned} f(g_1)&=(2a_0,-a_1,a_2)\\ f(g_2)&=(2b_0,-b_1,b_2)\end{aligned}\right\}$ $\boxed{\begin{aligned}&f(g_1)+f(g_2)=\\&=(2(a_0+b_0),-(a_1+b_1),(a_2+b_2))\end{aligned}}$

2.2) $\lambda\in\mathbb{R}$, $g=a_0+a_1x+a_2x^2$

$f(\lambda g)\overset{?}{=}\lambda f(g)$

$\lambda g=\lambda a_0+\lambda a_1x+\lambda a_2x^2$

$\boxed{f(\lambda g)=(2\lambda a_0,-\lambda a_1,\lambda a_2)} \to (**)$

$f(g)=(2a_0,-a_1,a_2)$

$\boxed{\lambda f(g)=\lambda(2a_0,-a_1,a_2)=(2\lambda a_0,-\lambda a_1,\lambda a_2)}$

$\Rightarrow$ от $(*)$ и $(**)$ $\Rightarrow$ f е лин. изображение

3) $V_1=\mathbb{R}^2$, $V_2=\mathbb{R}$ $\to$ $f((x,y))=1$

3.1) $\left.\begin{aligned}(x_1,y_1)\in V_1\\(x_2,y_2)\in V_1\end{aligned}\right\}$ $f((x_1,y_1)+(x_2,y_2))\overset{?}{=}f((x_1,y_1))+f((x_2,y_2))$

Имаме, че: $\left.\begin{aligned}f((x_1,y_1))=1\\f((x_2,y_2))=1\end{aligned}\right\}\oplus\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned}&f((x_1,y_1))+f((x_2,y_2))=\\&=1+1=2\end{aligned}}$

$\boxed{f((x_1,y_1)+(x_2,y_2))=f((x_1+x_2,y_1+y_2))=1}$

$\Rightarrow 1\neq 2\Rightarrow f$ не е лин. изображение

4) $V_1=\mathbb{R}^2$, $V_2=\mathbb{R}\to f((x,y))=x+1$

4.1) $\left.\begin{aligned}(x_1,y_1)\in V_1\\(x_2,y_2)\in V_1\end{aligned}\right\}$ $f((x_1,y_1)+(x_2,y_2))=f((x_1,y_1))+f((x_2,y_2))$

$\boxed{\left.\begin{aligned}f((x_1,y_1))&=x_1+1\\f((x_2,y_2))&=x_2+1\end{aligned}\right\}\oplus\Rightarrow x_1+x_2+2}$ $\boxed{\begin{aligned}&f((x_1,y_1)+(x_2,y_2))=\\&=f((x_1+x_2,y_1+y_2))=\\&=x_1+x_2+1\end{aligned}}$

$\Rightarrow x_1+x_2+2\neq x_1+x_2+1\Rightarrow f$ не е лин. изобр.

Примери: Да се докаже, че $\varphi: V \to V$ е лин. оператор, т.е. $\varphi \in \operatorname{Hom} V$:

Нека $V = M_2(F)$

1) $\varphi(X) = X^t$

1.1) $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ и $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

$\varphi(M_1) = M_1^t = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$

$\varphi(M_2) = M_2^t = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\varphi(M_1) + \varphi(M_2) = M_1^t + M_2^t = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in M_2(F) \quad (*)}$

$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\varphi(M_1 + M_2) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in M_2(F) \quad (**)}$

$\Rightarrow (*) = (**) \Rightarrow \varphi(M_1) + \varphi(M_2) = \varphi(M_1 + M_2)$

1.2) $\lambda \in F$, $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

Дали $\varphi(\lambda X) \overset{?}{=} \lambda \varphi(X)$?

$\varphi(X) = X^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\lambda\varphi(X) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_3 \\ \lambda x_2 & \lambda x_4 \end{pmatrix} \in M_2(F) \quad (*)}$

$\lambda X = \lambda \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 \\ \lambda x_3 & \lambda x_4 \end{pmatrix}$

$\boxed{\varphi(\lambda X) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_3 \\ \lambda x_2 & \lambda x_4 \end{pmatrix} \in M_2(F) \quad (**)}$

$(*) = (**) \Rightarrow \lambda\varphi(X) = \varphi(\lambda(X)$

$\Rightarrow$ от 1.1) и 1.2) извеждаме валидни равенства, като получените резултати - матрици, са отново в пр-вото $M_2(F) = V \Rightarrow \varphi$ е линеен оператор

2) Ако A и B са фиксирани квадратни матрици от V, то $\varphi(X) = AXB$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.1) $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$

Дали: $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$

$$\varphi(X) = AXB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+x_3 & x_2+x_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1+6x_3 & x_1+x_3+3x_2+3x_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(Y) = AYB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1+y_3 & y_2+y_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y_1+6y_3 & y_1+y_3+3y_2+3y_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\varphi(X)+\varphi(Y) = \begin{pmatrix} 6(x_1+x_3+y_1+y_3) & x_1+x_3+y_1+y_3+3(x_2+x_4+y_2+y_4) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$X+Y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 \\ x_3+y_3 & x_4+y_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi(X+Y)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 \\ x_3+y_3 & x_4+y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+y_1+x_3+y_3 & x_2+y_2+x_4+y_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6(x_1+x_3+y_1+y_3) & x_1+x_3+y_1+y_3+3(x_2+x_4+y_2+y_4) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi(X)+\varphi(Y)=\varphi(X+Y)$

2.2) $\lambda \in F$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\varphi(\lambda X) \overset{?}{=} \lambda\varphi(X)$

съгласно свойствата за умножение на м-ци

$\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(\lambda X) = A\lambda X B = \underline{\underline{\lambda A X B}}$

$\lambda\varphi(X) = \underline{\underline{\lambda . AXB}}$

$\Rightarrow \varphi(\lambda X)=\lambda\varphi(X)$

$\Rightarrow$ от 2.1) и 2.2) $\Rightarrow \varphi$ е линеен оператор

Допълнителни примери (за самостоятелна работа):

1) Дали φ е лин. изобр.: $\varphi((x,y)) = x+y$ над $V_1 = \mathbb{R}^2$, $V_2 = \mathbb{R}$

2) Дали φ е линеен оператор: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\varphi(X) = AX+XB$ над $V=M_2(F)$

Нека φ е линейно изображение - $\varphi: V \to V'$. Тогава в сила са следните свойства:

1) $\varphi(\theta)=\theta$

2) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ за $\forall a\in V$

3) ако $a_1,\dots,a_k$ са ЛЗ вектори от V, то $\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_k)$ са ЛЗ вектори от V'

Тв. Нека V и V' - ЛП и $\dim V = n$. Тогава за $\forall$ базис $e_1, \dots, e_n$ на V и произволни n вектора $v_1, \dots, v_n$ от V' $\exists!$ линейно изображение $\varphi: V \to V'$, такова че $\varphi(e_i) = v_i$, $i = \overline{1,n}$

Деф. Нека V и V' - ЛП и $\varphi: V \to V'$ е изображение. Казваме, че φ е изоморфизъм, ако:

φ → линейно изображение ($\varphi \in Hom(V, V')$)

φ → биекция (едновременно са изпълнени: 1) от $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, $x_1, x_2 \in V$ 2) за $\forall y \in V'$ $\exists x \in V$: $\varphi(x) = y$)

Означаване: $V \cong V'$ ($V \cong V'$)

Заб. Ако φ е изоморфизъм: $\varphi: V \to V'$, $a \to \varphi(a) = b$, то съществува изображение φ^{-1} ($\varphi^{-1} \in Hom(V', V)$ - линейно изобр.), т.че: $\varphi^{-1}: V' \to V$

$b \to \varphi^{-1}(b) = a$

Тв. Две крайномерни ЛП V и V' над F са изоморфни $\Longleftrightarrow$ $\dim V = \dim V'$

Матрица на линейно изображение / линеен оператор

Нека V и V' са ЛП над F. Нека $e_1, \dots, e_n$ - базис на V, $\dim V = n$, а $e_1', \dots, e_m'$ - базис на V', $\dim V' = m$. Нека $\varphi \in Hom(V, V')$. Нека:

$$\varphi(e_1) = a_{11}e_1' + a_{21}e_2' + \dots + a_{m1}e_m'$$

$$\varphi(e_2) = a_{12}e_1' + a_{22}e_2' + \dots + a_{m2}e_m'$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi(e_n) = a_{1n}e_1' + a_{2n}e_2' + \dots + a_{mn}e_m'$$

<u>Деф.</u> Матрица на линейното изображение φ във фиксираните базиси $\{e_i\}_1^n$ и $\{e_j'\}_1^m$ наричаме следната матрица, стълбовете на която са съставени от координатите на $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ спрямо базиса $e_1', e_2', \dots, e_m'$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots \ \varphi(e_n) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \in F_{m \times n} \end{array}$$

Нека φ е линеен оператор, действащ във V: $\varphi \in Hom\, V$. Нека $e_1, \dots, e_n$ - базис на V, $\dim V = n$. Нека:

$$\varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n$$

$$\varphi(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n$$

Деф. Матрица на линейния оператор φ във фиксирания базис $\{e_i\}_1^n$ наричаме следната матрица, стълбовете на която са съставени от координатите на векторите $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$ спрямо базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\begin{array}{cccc} & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) \ldots & \varphi(e_n) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A = & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}} \end{array} \in M_n(F)$$

Твърдение: Нека $\varphi \in Hom\,V$ $(\varphi: V \to V)$, A е матрицата на φ в базиса $e_1, \ldots, e_n$, $v \in V$ и

$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$

$\varphi(v) = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n$

$$\underbrace{\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{вектор-стълб от координатите на } v \text{ в } e_1, e_2, \ldots, e_n}, \quad \underbrace{\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}}_{\text{вектор-стълб от координатите на образа на } v \text{ посредством на } \varphi \text{ в базиса } e_1, e_2, \ldots, e_n}$$

Тогава в сила е следното матрично уравнение:

$$\mu = A.\lambda \iff \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \iff \varphi(v) = Av$$

Заб. Това твърдение ни показва как можем да пресмятаме координатите на вектора $\varphi(v)$ - образа на v, във фиксиран базис $\{e_i\}_1^n$, знаейки координатите на самия в-р v и матрицата на линейния оператор φ в същия базис $\{e_i\}_1^n$.

пр. $V = \mathbb{R}^2$, $v \in V$ и $v = (5,6)$, $\varphi \in Hom\,V$ и $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\varphi(v)$ - ? в базиса $\{e_1, e_2\}$

$v = (5,6) = 5e_1 + 6e_2$, e_1, e_2 - базис на V

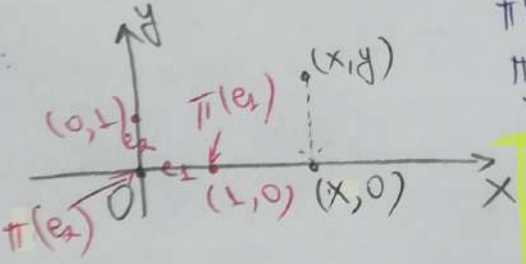
$\Rightarrow \mu = A_\varphi . \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix} \Rightarrow$ координатите са: $\varphi(v) = (17, 39)$

(1) Да се намерят матриците на $\pi, \varphi \in Hom\, V$: $\pi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, спрямо стандартния базис (за $\mathbb{R}^2$ това е базисът: $\{e_1, e_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$), където π е ортогонална проекция в/у $\overrightarrow{Ox}$, а φ е ротация на $\measuredangle 90^\circ$ в посока обратна на часовниковата стрелка.

Решение:

Базис: $e_1 = (1,0)$
$e_2 = (0,1)$

π:



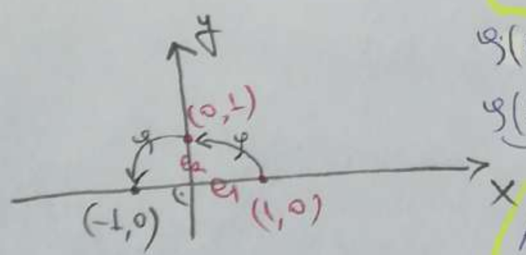
$\pi(e_1) = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0\, e_2$

$\pi(e_2) = (0,0) = 0\, e_1 + 0\, e_2$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A_\pi = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \pi(e_1) & \pi(e_2) \end{array} \end{array}}$$

φ:



$\varphi(e_1) = e_2 = 0\, e_1 + 1 \cdot e_2$

$\varphi(e_2) = -e_1 = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A_\varphi = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) \end{array} \end{array}}$$

Допълнителен въпрос: Да се намерят координатите на образа на $v = (3,4)$ под влиянието на π в $\{e_1, e_2\}$:

$\pi(v) = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$

! Използваме твърдението:

тогава $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = A_\pi \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Отговор: $A_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

② Да се намери матрицата на $\varphi \in Hom V$ - лин. оп. в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, $V = M_2(F)$:

а) $\varphi(X) = AX + E$, където $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\varphi(E_{11}) = AE_{11} + E = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = (0,0,1,1)$$

$$\varphi(E_{12}) = AE_{12} + E = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = (1,-1,0,2)$$

$$\varphi(E_{21}) = AE_{21} + E = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = (-4,0,6,1)$$

$$\varphi(E_{22}) = AE_{22} + E = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow v_4 = (1,-5,0,7)$$

$$\Rightarrow M_\varphi = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \end{array}$$

б) $\varphi(X) = AXB$, където $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ +2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ +2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v_1 = (1, 1, 3, 3) \qquad v_3 = (2, 2, 4, 4)$

$v_2 = (2, -1, 6, -3) \qquad v_4 = (4, -2, 8, -4)$

$$M_\varphi = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \end{array}$$

доп. в) $\varphi(X) = X^t$

доп. г) $\varphi(X) = XA + BX$, където:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

③ АСАГ изображението $\delta : F^{n+1}[x] \to F^{n+1}[x]$, чието действие е следното: за $\forall f \in F^{n+1}[x]$:
$\delta : f \to f'$, е линеен оператор. Да се намери матрицата на δ в базиса:
а) $1, x, x^2, \dots, x^n$ б) $1, x-c, \frac{(x-c)^2}{2!}, \dots, \frac{(x-c)^n}{n!}$

<u>Д-во:</u>
Нека $f, g \in F^{n+1}[x]$. Тогава $\delta(f) = f'$ и $\delta(g) = g'$
Също така $\delta(f+g) = (f+g)' = f' + g'$. Тогава:
$\boxed{\delta(f) + \delta(g) = f' + g' = \delta(f+g) = f' + g'.}$ (1)
Нека $\lambda \in F$ и $f \in F^{n+1}[x]$. Тогава $\delta(f) = f'$ и
$\lambda \delta(f) = \lambda . f'$. Също $\delta(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f'$.
Тогава $\boxed{\delta(\lambda f) = \lambda f' = \lambda \delta(f) = \lambda f'}$ (2)

От (1) и (2) => δ е линеен оператор

а) Търсим матрицата на δ в базиса $1, x, \dots, x^n$

$\varphi(1) = 1' = 0 = 0.x^0 + 0.x^1 + 0x^2 + \dots + 0x^n$

$\varphi(x) = (x)' = 1 = 1.x^0 + 0x^1 + 0x^2 + \dots + 0x^n$

$\varphi(x^2) = (x^2)' = 2.x = 0x^0 + 2x^1 + 0x^2 + \dots + 0x^n$

$\varphi(x^3) = (x^3)' = 3x^2 = 0x^0 + 0x^1 + 3x^2 + \dots + 0x^n$

$\vdots$

$\varphi(x^n) = (x^n)' = nx^{n-1} = 0x^0 + 0x^1 + 0x^2 + \dots + nx^{n-1} + 0x^n$

$$\Rightarrow A_\delta = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(x) & \varphi(x^2) & \varphi(x^3) & \varphi(x^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

б) Базис на δ е $1, (x-c), \frac{(x-c)^2}{2!}, \dots, \frac{(x-c)^n}{n!}$

$$\delta(1) = 0$$

$$\delta(x-c) = (x-c)' = 1 = 1 + 0(x-c) + 0(x-c)^2 + \dots + 0(x-c)^n$$

$$\delta\left(\frac{(x-c)^2}{2!}\right) = \frac{1}{2!}\left((x-c)^2\right)' = \frac{1}{\cancel{2}\cdot 1}\cdot\cancel{2}\cdot(x-c)\underbrace{}_{(x-c)'} = 1(x-c)$$

$$\delta\left(\frac{(x-c)^3}{3!}\right) = \frac{1}{3!}\,3(x-c)^2\underbrace{}_{(x-c)'} = \frac{1}{\cancel{3}\cdot 2\cdot 1}\cdot\cancel{3}\,(x-c)^2 = \frac{1}{2}(x-c)^2 = 1\cdot\frac{(x-c)^2}{2!}$$

$$\vdots$$

$$\delta\left(\frac{(x-c)^n}{n!}\right) = \frac{1}{\cancel{n!}}\left(\cancel{n}(x-c)^{n-1}\right) = \frac{1}{(n-1)(n-2)\dots 1}(x-c)^{n-1} = 1\cdot\frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!}$$

т.е.: $\delta(1) = 0 = 0(x-c)^0 + 0(x-c) + 0(x-c)^2 + \dots + 0(x-c)^n$

$$\delta(x-c) = 1 = 1(x-c)^0 + 0(x-c) + 0(x-c)^2 + \dots + 0(x-c)^n$$

$$\delta\left(\frac{(x-c)^2}{2!}\right) = 1(x-c) = 0 + 1(x-c) + 0(x-c)^2 + \dots + 0(x-c)^n$$

$$\delta\left(\frac{(x-c)^3}{3!}\right) = 1\cdot\frac{(x-c)^2}{2!} = 0 + 0(x-c) + 1\cdot\left(\frac{(x-c)^2}{2!}\right) + \dots + 0(x-c)^n$$

$$\vdots$$

$$\delta\left(\frac{(x-c)^n}{n!}\right) = 0 + 0(x-c) + 0\frac{(x-c)^2}{2!} + \dots + 1\cdot\frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!} + 0\frac{(x-c)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow A_\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \delta(1) & \delta(x-c) & \delta\left(\frac{(x-c)^2}{2!}\right) & \dots & \delta\left(\frac{(x-c)^n}{n!}\right) \end{array}$$

Деф. Нека $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$, $e_1, \dots, e_n$ – базис на V, ядро и образ. $\varphi \rightarrow M_e(\varphi) = A \in M_n(F)$. Ако $\exists\, \varphi^{-1}$, такъв че Л.О. $\varphi . \varphi^{-1} = \varphi^{-1} . \varphi = id$ (идентитет = единичен елемент), то $\underline{\underline{\varphi}}$ е обратим линеен оператор, а φ^{-1} наричаме обратен на φ линеен оператор.

Тв. Нека φ е обратим линеен оператор и на φ в базиса $e_1, \dots, e_n$ съответства $A = M_e(\varphi)$, то на φ^{-1} в същия базис съответства матрицата $A^{-1} = M_e(\varphi^{-1})$

Деф. Нека V – ЛП и $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V')$. Ядро на линейното изображение φ наричаме множеството

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{x \in V \mid \varphi(x) = 0\}$$, т.е. мн-вото, което представлява пространството от решения на хомогенната система $AX = 0$, където матрицата X представлява вектор-стълбът от координатите на вектора $x \in V : \varphi(x) = 0$.

Деф. Нека V и V' – ЛП и $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V')$. Образ на линейното изображение φ наричаме мн-вото:

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\varphi = \{v' \in V' \mid \exists x \in V : \varphi(x) = v'\} = \{\varphi(x) \mid x \in V\}}$$

т.е. мн-вото от $\forall$ в-ри $v' \in V' : \varphi(x) = v'$, за които $\exists\, x \in V$

Тв. V, V' – ЛП и A – м-цата на $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V')$ в базисите $e_1, e_2, \dots, e_n$ – б. на V, $e_1', e_2', \dots, e_n'$ – б. на V'. Тогава $r(\varphi) = r(A)$

Деф. Ранг на φ наричаме числото $r(\varphi) = \dim \mathrm{Im}\,\varphi$.
Дефект на φ наричаме числото $d(\varphi) = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Тв. (теорема за ранга и дефекта)
Нека V е ЛП и $\dim V = n$. Тогава $r(\varphi) + d(\varphi) = n$.
$(\dim \mathrm{Im}\,\varphi + \dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim V)$

$\mathrm{Im}\,\varphi$ е мн-вото от $\forall$ вектори, които служат за представяне на други вектори, и важи тези ЛК
$\Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = \ell(\varphi(x))$, където $x \in V$

$\operatorname{Im}\varphi = \{ \varphi(x) \mid x \in V \}$. Какво означава това? :

пр

$\varphi \in \operatorname{Hom} V$, т.е. $\varphi : V \to V$, ~~действаш~~ имаш матрицата:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\quad \varphi(e_1) \quad \varphi(e_2) \quad \varphi(e_3)$$

в базиса e_1, e_2, e_3 ($e_1 \in V$, $e_2 \in V$, $e_3 \in V$)

$\boxed{\text{За да намериш базисните вектори, трябва да сортираме: } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi(e_1) \\ \varphi(e_2) \\ \varphi(e_3) \end{matrix} = A^t}$

$\varphi(e_1) = (1, 4, 7) = e_1 + 4e_2 + 7e_3$

$\varphi(e_2) = (2, 5, 8) = 2e_1 + 5e_2 + 8e_3$

$\varphi(e_3) = (3, 6, 9) = 3e_1 + 6e_2 + 9e_3$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = \{ \varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3) \mid e_1, e_2, e_3 \in V \} = \{ \varphi(e_i) \mid i = \overline{1,3} \}$

Тогава $\operatorname{Im}\varphi = \ell(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3))$

① Нека $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ има матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
$\varphi \in \operatorname{Hom} V$

Да се намерят $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$, $r(\varphi)$ и $d(\varphi)$

Решение:

1) $\operatorname{Ker}\varphi$

Нека $v \in V$. и нека $v = (x, y)$

От твърдението $\Rightarrow \varphi(v) = Av$

$\operatorname{Ker}\varphi : v \in V : \varphi(v) = 0 \iff Av = 0$. Тогава

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left| \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot(-2) \sim \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 \\ x & y \end{array} \quad \text{Нека } \boxed{y = p} \Rightarrow \boxed{x = -2p}$$

$$\Rightarrow (x, y) = (-2p, p) = p(-2, 1)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi : \{(-2, 1)\} \to \dim \operatorname{Ker}\varphi = d(\varphi) = 1$$

2) $\operatorname{Im}\varphi : = \ell((1,2), (2,4)) \Rightarrow$ базис е $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot(-2) \sim (1, 2)$

Нека $v \in V$ и $v = (x, y)$. Спрямо в.-рите $\varphi(e_1)$ и $\varphi(e_2)$ - образи на e_1 и e_2, v изглежда така:

$v = x.\varphi(e_1) + y\varphi(e_2)$, където $\varphi(e_1)$ и $\varphi(e_2)$ са известни от м-цата A на φ:

$$\begin{array}{cc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} A^t = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) \\ \varphi(e_2) \end{pmatrix}$$

Тогава $v = x(1e_1 + 2e_2) + y(2e_1 + 4e_2) = (x, y)\begin{pmatrix} \varphi(e_1) \\ \varphi(e_2) \end{pmatrix}$

$= x(1e_1 + 2e_2) + 2.y(1e_1 + 2e_2) =$

$= \underbrace{(x + 2y)}_{\text{число}} \underbrace{(1e_1 + 2e_2)}_{\text{вектор с координати 1 и 2}} \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi$ има базис $\{(1, 2)\}$

Заб. Базисните вектори на $\operatorname{Ker}\varphi$ намираме, като решим ХСЛУ (т.е. „джиркаме" матрицата на системата, която е дадената м-ца на лин. оп-р)

Базисните вектори на $\operatorname{Im}\varphi$ намираме, като „джиркаме" транспонираната м-ца на φ ($A \to A^t$)

② Нека $V = M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

$\varphi : V \to V$, $\varphi \in \operatorname{Hom} V$ и

$\varphi(X) = AX + XB$, $X \in V$

а) м-цата C на φ в $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$

б) базиси на $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$; $r(\varphi)$ и $d(\varphi)$

Решение:

а) $$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 2E_{11} + 1E_{12} + 1E_{21} + 0E_{22} = (\underbrace{2, 1, 1, 0}_{v_{11}})$$

$$\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (\underbrace{2, 0, 0, 1}_{v_{12}})$$

$$\varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (\underbrace{2, 0, 0, 1}_{v_{21}})$$

$$\varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix} = (\underbrace{0, 2, 2, -2}_{v_{22}})$$

$$\Rightarrow C = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_{11} & v_{12} & v_{21} & v_{22} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

* Не се драскат редове!

б) 1) $\underline{Ker\,\varphi}$: $\varphi(v)=0$ за $v\in V$ <=> $\underline{Cv=0}$ <=>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\Updownarrow}$$, където $v=(v_1,v_2,v_3,v_4)$

$$\left|\begin{array}{l} 2v_1+2v_2+2v_3 = 0 \\ v_1 + 2v_4 = 0 \\ v_1 + 2v_4 = 0 \\ v_2+v_3-2v_4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} :2 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \oplus \\ (-1) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Нека $\boxed{x_4=p}$ => $\boxed{x_1=-2p}$
Нека $\boxed{x_3=q}$ => $\boxed{x_2=2p-q}$
$\Big\}$ $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-2p,2p-q,q,p)$

$$\Rightarrow p\underbrace{(-2,2,0,1)}_{\Updownarrow}+q\underbrace{(0,-1,1,0)}_{\Updownarrow}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

=> базис на $Ker\,\varphi$: $\left\{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

$\dim Ker\,\varphi = 2 =$
$= d(\varphi) = 2$

2) Im φ

$\mathrm{Im}\,\varphi := \{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid \exists\, Y \in M_2(\mathbb{R}) : \varphi(Y) = X \}$

$$C \to C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \cdot(-1) \\ \\ /:2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-1} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (0,1,1,-1) \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ (2,0,0,1) \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Базис на $\mathrm{Im}\,\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\,\varphi = r(\varphi) = 2$

Проверка: от Th за ранг и дефект $\Rightarrow$

$r(\varphi) + d(\varphi) = n$

$2 + 2 = 2.2 = 4 \to$ да

③ Нека V е ЛП на полиномите с коеф. от $\mathbb{R}$, ненадвишаващи степен 3: $V = \mathbb{R}^3[x]$, и базис $\{1, x, x^2, x^3\}$. Нека $\varphi : V \to V$, което:

$\varphi(f) = 6f'' - 7f'$ за $\forall$ полином $f \in V$.

а) да се док., че φ е линеен оператор

б) да се намери м-цата A на φ в базиса $\{1, x, x^2, x^3\}$

в) да се намерят базиси на $\mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathrm{Im}\,\varphi$; $r(\varphi)$ и $d(\varphi)$

г) да се определи дали полиномът $f = -7x^2 + 3x + 1$ принадлежи на $\mathrm{Im}\,\varphi$.

решение:

а) Нека $f, g \in V$. Тогава $\left.\begin{matrix} \varphi(f) = 6f'' - 7f' \\ \varphi(g) = 6g'' - 7g' \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

(1) $\Rightarrow \varphi(f) + \varphi(g) = 6f'' + 6g'' - 7f' - 7g'$

$\varphi(f+g) = 6(f+g)'' - 7(f+g)' = 6(f'' + g'') - 7(f' + g') =$

$= 6f'' + 6g'' - 7f' - 7g'$

(2) $\lambda \in \mathbb{R}$ и $f \in V$. Тогава $\lambda \varphi(f) = \lambda(6f'' - 7f') =$
$= \lambda . 6f'' - \lambda . 7f' = 6\lambda f'' - 7\lambda f'$

$\varphi(\lambda f) = 6(\lambda f)'' - 7(\lambda f)' = 6 . \lambda f'' - 7\lambda f'$

$\Rightarrow$ от (1) и (2) $\Rightarrow \varphi$ е лин. оп-р $\Rightarrow \varphi \in \operatorname{Hom} V$

б) базис: $\{1, x, x^2, x^3\}$

$\varphi(1) = 6.1'' - 7.1' = 0 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = (0,0,0,0)$

$\varphi(x) = 6x'' - 7x' = -7 = -7 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = (-7,0,0,0)$

$\varphi(x^2) = (6(x^2)'' - 7(x^2)' = 12 - 14x = 12 - 14x + 0x^2 + 0x^3 = (12,-14,0,0)$

$\varphi(x^3) = 6(x^3)'' - 7(x^3)' = 36x - 21x^2 = 0 + 36x - 21x^2 + 0x^3 = (0,36,-21,0)$

$$\Rightarrow A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \varphi(1) & \varphi(x) & \varphi(x^2) & \varphi(x^3) \end{array} \end{array}$$

! Не драскаме редове!

в) 1) Ker φ: решаваме с-мата $Ax = 0$, за $x \in V$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 0 & -7 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /:2 \\ /:(-21) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -7 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \oplus \\ .(-18) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -7 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(-7) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -7 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ .(-12) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} /:(-7) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array}$$

!система

$x_4 = 0$

$x_3 = 0$

$x_2 = 0$

x_1 е свободно неизвестно => нека $x_1 = p$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (p, 0, 0, 0) = p\,\underline{\underline{(1, 0, 0, 0)}}$

=> базис на $\operatorname{Ker}\varphi$: $\{(1,0,0,0)\}$

$\dim \operatorname{Ker}\varphi = 1 = d(\varphi)$

2) $\operatorname{Im}\varphi$ (не е система, а $A \to A^t$) и „дъщурката" до получаване на ЛНЗ в-ри

$$A^t = \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -7 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -21 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |:(-7) \\ |:2 \\ |:3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-6) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |:(-7) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-12) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ |:(-7) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

=> базис на $\operatorname{Im}\varphi$: $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\} = \{1, x, x^2\} \to \dim \operatorname{Im}\varphi = 3 = r(\varphi)$

$$\left.\begin{matrix} d(\varphi) = 1 \\ r(\varphi) = 3 \end{matrix}\right\} d(\varphi) + r(\varphi) \overset{?}{=} n \Leftrightarrow 1 + 3 \overset{?}{=} 4 \to \text{да}$$

в) дали $(f = -7x^2 + 3x + 1) \in Im\varphi$? <=>

$f = \lambda_1(1,0,0,0) + \lambda_2(0,1,0,0) + \lambda_3(0,0,1,0)$

т.е. дали $f \in$ ЛК на базисните в-ри на $Im\varphi$:

$f = 1 + 3x - 7x^2 + 0x^3 = (1,3,-7,0)$, т.е:

$$(1,3,-7,0) = \underbrace{(\lambda_1,0,0,0) + (0,\lambda_2,0,0) + \lambda_3(0,0,\lambda_3,0)}_{\Rightarrow(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,0)}$$

$<=> \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = -7 \\ \lambda_4 = 0 \end{array} \right.$ Имаме поне едно $\lambda \neq 0$ => векторите $f(1,3,-7,0)$ и базисните в-ри на $Im\varphi$ са ЛЗ, т.е. f се представя като ЛК на б.в-ри на $Im\varphi$ => $f \in Im\varphi$

II н)

$$\begin{array}{r} \text{б.в-ри} \\ \\ \\ f \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-3) \\ \cdot(7) \\ \oplus \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

След като получим нулев ред, сл като сме "зачуркали", то $f \in Im\varphi$

④ V - ЛП и базис: $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Нека φ: $\varphi \in Hom\,V$

$\varphi(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4) =$

$= (5\lambda_1 + 5\lambda_2 - 5\lambda_3 - 4\lambda_4)e_1 + (-\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)e_2 +$

$+ (2\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4)e_3 + (-6\lambda_1 - 2\lambda_2 + 6\lambda_3 + 4\lambda_4)e_4$

Да се намерят:

1) А-м-цата на φ в $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
2) базис на $Ker\varphi$
3) базис на $Im\varphi$
4) $d(\varphi)$ и $r(\varphi)$

Решение:

1) $\varphi(e_1) = \varphi(\overset{\lambda_1}{1}\cdot e_1 + \overset{\lambda_2}{0}\cdot e_2 + \overset{\lambda_3}{0}\cdot e_3 + \overset{\lambda_4}{0}\cdot e_4) =$

$= (5\cdot 1 + 5\cdot 0 - 5\cdot 0 - 4\cdot 0)e_1 + (-1\cdot 1 - 2\cdot 0 + 0 + 0)e_2 +$

$+ (2\cdot 1 - 0 - 2\cdot 0 - 0)e_3 + (-6\cdot 1 - 2\cdot 0 + 6\cdot 0 + 4\cdot 0)e_4 =$

$= 5e_1 - 1e_2 + 2e_3 - 6e_4 \to (5, -1, 2, -6) = \varphi(e_1)$

$\varphi(e_2) = 5e_1 - 2e_2 - 1e_3 - 2e_4 \to (5, -2, -1, -2) = \varphi(e_2)$

$\varphi(e_3) = -5e_1 + 1e_2 - 2e_3 + 6e_4 \to (-5, 1, -2, 6) = \varphi(e_3)$

$\varphi(e_4) = -4e_1 + 1e_2 - 1e_3 + 4e_4 \to (-4, 1, -1, 4) = \varphi(e_4)$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -6 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) & \varphi(e_4) \end{array} \end{array}$$

2) Ker φ: <u>система</u>

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -6 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ |:2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ (5)\ (2)\ (-3) \\ \oplus \\ \oplus \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \oplus \\ \oplus \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-4} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |:8 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot(+7) \cdot(5) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \;\; x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \end{array} \to \boxed{x_4 = 0} \quad \boxed{x_3 = p} \Rightarrow \boxed{x_1 = p}$$

$$\boxed{x_2 = 0}$$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (p, 0, p, 0) = p(1, 0, 1, 0)$

$\Rightarrow$ базис на $\operatorname{Ker}\varphi$: $\{(1,0,1,0)\} \to \dim \operatorname{Ker}\varphi = 1$

3) базис на $\operatorname{Im}\varphi$: $A \to A^t$ (няма система)

$$A^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & -6 \\ 5 & -2 & -1 & -2 \\ \cancel{-5} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{6} \\ -4 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} /:5 \\ \\ /:(-4) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ базис на $\operatorname{Im}\varphi$: $\{(1,0,1,-2), (0,1,-3,4)\}$

$\dim \operatorname{Im}\varphi = 2$

4) $d(\varphi) = \dim \operatorname{Ker}\varphi = 1$

$r(\varphi) = \dim \operatorname{Im}\varphi = 2$

⑤ Нека V - ЛП с базис $\{e_i\}$ $i=\overline{1,4}$ и $\varphi \in Hom\,V$ има матрица:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ в базиса $\{e_i\}_1^4$

$\quad\;\; a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$

Да се намерят базиси на $Ker\,\varphi$, $Im\,\varphi$, $Ker\,\varphi + Im\,\varphi$, $Ker\,\varphi \cap Im\,\varphi$

Решение:

1) $\underline{Ker\,\varphi}$: пр-вото от р-ята на $AX = 0$

$$Ker\,\varphi: \left| \begin{aligned} -1x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 1x_3 + 1x_4 &= 0 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1x_4 &= 0 \\ -1x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 1x_4 &= 0 \end{aligned} \right.$$

тази система има матрица:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} .(-1) \\ \\ \\ \oplus \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} +1 & 2 & 3 & +2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} .(-1).(-2) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

Нека $\boxed{x_4 = p} \Rightarrow \boxed{x_3 = -p}$

Нека $\boxed{x_2 = q} \Rightarrow \boxed{x_1 = p - 2q}$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (p-2q, q, -p, p) = p(1,0,-1,1) + q(-2,1,0,0)$

$\Rightarrow$ базис на $Ker\,\varphi$: $\{\underbrace{(1,0,-1,1)}_{k_1}, \underbrace{(-2,1,0,0)}_{k_2}\}$

2) $\mathrm{Im}\,\varphi = \ell(a_1, a_2, a_3, a_4)$

$$\begin{array}{c} a_1\to \\ a_2\to \\ a_3\to \\ a_4\to \end{array}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}}_{A^t} \cdot(-3)\cdot(-2) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{1}\end{pmatrix}\cdot(-1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ базис на $\mathrm{Im}\,\varphi$: $\{\underbrace{(1,0,-1,1)}_{i_1}, \underbrace{(0,1,-1,1)}_{i_2}\}$

3) $\mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{Im}\,\varphi = \ell(k_1, k_2) + \ell(i_1, i_2) =$
$= \ell(k_1, k_2, i_1, i_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot(-1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot(+2)\cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ базис на $\mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{Im}\,\varphi$:
$\{(0,0,-1,1), (0,1,0,0), (1,0,0,0)\}$

4) $\mathrm{Ker}\,\varphi \cap \mathrm{Im}\,\varphi \to$ ФСР на ХСЛУ, като за целта трябва да представим $\mathrm{Im}\,\varphi$ като система

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \text{Нека } \left.\begin{matrix} x_3 = p \\ x_4 = q \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = p - q \\ x_1 = p - q \end{matrix}$$

Тогава $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (p-q, p-q, p, q) =$

$= p(\underbrace{1, 1, 1, 0}_{v_1}) + q(\underbrace{-1, -1, 0, 1}_{v_2})$, т.е. имаме система с коеф. п/р неизв. v_1 и v_2:

$$\operatorname{Im}\varphi: \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{-2} & \cancel{-1} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array} \oplus \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus (2) \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-1) \oplus \oplus \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$$

Нека $\boxed{x_4 = p} \Rightarrow \boxed{x_1 = p} \Rightarrow \boxed{x_3 = -p}$.

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (p, 0, -p, p) = p(1, 0, -1, 1)$

$\Rightarrow$ базис на $Ker\varphi \cap Im\varphi$: $\{(1, 0, -1, 1)\}$

б) <u>доп.</u> $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

базиси на: $Ker\varphi$, $Im\varphi$, $Ker\varphi \cap Im\varphi$, $Ker\varphi + Im\varphi$