Лекция 10 01.12.2021г.

ХСЛУ - продължение

$$(2)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$\theta = (0, \dots, 0) \in F^n$ е реш. на (2) $\Rightarrow$ (2) е винаги съвместима

Тв. $U = \{$решенията на ХСЛУ(2)$\} \leq V = F^n$

Деф. Всеки базис на $U \leq F^n$, $U: |(2)$ наричаме фундаментална система от решения на ХСЛУ (2) $\to$ ФСР на ХСЛУ.

Заб. Ако $V = F^n$ л.пр-во над г.поле F. За $U \leq V$ имаме две представяния

$U = \ell(a_1, \dots, a_k)$ или $U: \|$ ХСЛУ (2)

$a_i \in V$

Нека $r(A) = r$. Ако $r = n = m \iff$ $\det A \neq 0 \iff \exists!$ 0 решение. Имаме ненулеви реш. на ХСЛУ $\iff r < n$ $(r \leq m \leq n)$

Th: Нека $U : \big| \underset{AX=\theta}{\text{ХСЛУ}(2)}$ и $r(A) = r \le n$.
$U \le V = F^n$

Тогава $\dim U = n - r$.

Дво: 1) $r = 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{O} \Rightarrow \overset{U}{\overset{\shortparallel}{V}} : \big| \mathbb{O}x = \theta$

$\Rightarrow \dim U = \dim V = n - 0 = n.$

2) $r = n \Leftrightarrow r = n = m \Leftrightarrow \det A \ne 0 \Leftrightarrow ! \ \theta \in F^n$ е реш $\Leftrightarrow$

$\{\theta\} : \big| Ex = \theta \quad \Leftrightarrow \{\theta\} : \left| \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{array} \right.$ и нямаме ФСР (базис)

$\dim \{\theta\} = n - r = n - n = 0.$

3) $0 < \underset{r(A)}{\overset{\shortparallel}{r}} < n$, т.е. $U : \big| Ax = \theta$, $U < V$

и б.о.о. можем да приемем, че $(2) \Leftrightarrow$

$$(2')\ U: \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{array} \right.$$

$|a_{ij}|_{r \times r} \ne 0$

Полагаме свободните

$(x_1, x_2, \dots, x_r \,|\, x_{r+1}, \dots, x_n)$ е реш (2)

$\xleftarrow{\text{формули на Крамер}}$

$U: | Ax = 0$

$c_1 = (s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1r}, 1, 0, \dots, 0)$

$c_2 = (s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2r}, 0, 1, \dots, 0)$

$\vdots$

$c_{n-r} = (s_{n-r\,1}, s_{n-r\,2}, \dots, s_{n-r\,r}, 0, 0, \dots, 1)$

фиксираме ← пол

Ще покажем, че $\{c_i\}_1^{n-r}$ е ФСР, т.е. е базис на $U \Rightarrow \dim U = n-r$.

1) $\{c_i\}_1^{n-r}$ са ЛНЗ с-ма $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}_{(n-r)\times(n-r)} \neq 0$

$\Leftrightarrow r(c_1, \dots, c_{n-r}) = n-r;$

2) Нека $c \in U \Rightarrow c = (s_1, s_2, \dots, s_r, s_{r+1}, s_{r+2}, \dots, s_n)$ е произволно реш на $U: | Ax = 0$. Нека

$c' = s_{r+1} c_1 + \dots + s_n c_{n-r} \in U$

$c' = (s_1, s_2, \dots, s_r, s_{r+1}, s_{r+2}, \dots, s_n) = c$

$\Rightarrow \forall c \in U$ е $c \in \ell(c_1, \dots, c_{n-r})$

$\Rightarrow \{c_i\}_1^{n-r}$ са базис на $U \Rightarrow \{c_i\}_1^{n-r}$ са ФСР на ХСЛУ

и $U = \ell(c_1, \dots, c_{n-r})$ базис на U и $\dim U = n-r$

Сл: Нека е дадена СЛУ $|Ax=b$

$r(A)=r(\bar{A})\leq n$ и нека x_0 е едно конкретно решение на СЛУ, т.е. $|Ax_0=b$. Тогава всяко решение на СЛУ $|Ax=b$ има вида

$$\boxed{\tilde{x}=x_0+\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2+\dots+\lambda_{n-r}c_{n-r}},$$ където

$\{c_i\}_1^{n-r}$ са ФСР на ХСЛУ $|Ax=0$, а

$\lambda_1,\dots,\lambda_{n-r}\in F$.

Док: Нека б.о.о. $x_{r+1},\dots,x_n$ – своб. неизв. и например $x^0_{r+1}=x^0_{r+2}=\dots=x^0_n=1 \Rightarrow$! кример

$\Rightarrow x^0_1,\dots,x^0_r \Rightarrow x_0=(x^0_1,x^0_2,\dots,x^0_n)$ е конкретното решение на $|Ax=b$, т.е. $|Ax_0=b$.

Нека $\tilde{x}$ е едно произволно решение т.е. $|A\tilde{x}=b \Rightarrow$

$U:|A(\tilde{x}-x_0)=0$ и от предната Тh $\Rightarrow$ $\dim U=n-r$ и нека да изберем една ФСР $\Rightarrow$

Нека $\{c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}\}$ – базис на U

$\Rightarrow \forall$ реш на ХСЛУ, т.е $\forall$ вектор от U

$\exists!\ \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in F$: $\tilde{x} - x_0 = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_{n-r} c_{n-r}$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{x} = x_0 + \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_{n-r} c_{n-r}}$

Th: Всяко подпрво $W \subseteq V = F^n$ е пространство от решения на подходяща ХСЛУ с n неизвестни.

$W: |$ ХСЛУ с неизвестни.

$|Ex = \theta$

$\Updownarrow$

Док: $\dim W = r \leq n$.

1) $\dim W = r = 0 \Leftrightarrow W = \{\theta\} \Leftrightarrow \{\theta\}: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$

2) $\dim W = r = n \Leftrightarrow W = V \Leftrightarrow W = V : |\mathbb{O} x = \theta$.

3) $0 < \dim W = r < n$, т.е $W < V$ и

нека $b_1, b_2, \ldots, b_r$ са базис на $W = \ell(\underbrace{b_1, \ldots, b_r}_{\text{базис}})$

$b_1 = (b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n})$,
$b_2 = (b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n})$, ...
$\ldots b_r = (b_{r1}, b_{r2}, \ldots, b_{rn})$

и да образуваме следната ХСЛУ

$$U: \begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + \dots + b_{rn}x_n = 0 \end{cases} \quad \Big| Bx = \theta$$

$$r(B) = r \underset{\text{права база}}{\Rightarrow} \Rightarrow \dim U = n - r$$

и за U имаме че $U \oplus W = V$.

Ако $a_1, \dots, a_{n-r}$ да са една ФСР на $U: \mid Bx = \theta$, то $b_1, b_2, \dots, b_r, a_1, \dots, a_{n-r}$ са базис на V.

Да разгледаме следната ХСЛУ:

$$W': \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n-r\,1}x_1 + a_{n-r\,2}x_2 + \dots + a_{n-r\,n}x_n = 0 \end{cases} \quad \Big| Ax = \theta$$

$$r(A) = n - r$$

Ще покажем че $W \subseteq W'$ и $\dim W = \dim W' = n - (n - r) = r \Rightarrow W = W'$.

$U: \left| \, Bx = \theta \right.$ и $W: \left| \, Ax = \theta \right.$

и да разгледаме първото им уравнение

$b_{11} a_{11} + \dots + b_{1n} a_{1n} = 0$

x_1 x_n

x_1 x_n

$b_1 = (b_{11}, \dots, b_{1n}) \in W \Rightarrow$ е реш на

$W': \left| \, Ax = \theta \right.$

Аналогично се проверява, че $b_2, \dots, b_r$

също са реш на $W': \left| \, Ax = \theta \right.$

$\Rightarrow W = \ell(\underbrace{b_1, \dots, b_r}_{\text{базис}}) \subseteq W'$

и $\dim W = \dim W' = r \Rightarrow W = W'$

$\Rightarrow$

$W: \left| \, Ax = \theta \right.$.

<u>Заб:</u> $U \leq V$ по два начина

$U = \ell(a_1, \dots, a_k)$ или $U: \left| \, Cx = \theta \right.$

$\Rightarrow U = \ell(\underbrace{a'_1, \dots, a'_r}_{\text{базис}})$

Алгоритъм за намиране на базиси на $U+W$ и $U \cap W$ на $U \leq V$, $W \leq V$

<u>Зад</u>: Нека V е л. п-во над ч. поле F, $U \leq V$, $W \leq V$, като:

1) $U = \ell(a_1, \dots, a_k)$; 2) $U : |(1)$;
$W : |(2)$ $\quad W = \ell(b_1, \dots, b_s)$

3) $U = \ell(a_1, \dots, a_k)$; 4) $U : |(1)$.
$W = \ell(b_1, \dots, b_s)$ $\quad W : |(2)$

Да се намерят базиси на $U+W$ и $U \cap W$.

<u>Реш</u>: I) Всяко от подпр-вата U и W да се зададат по двата възможни начина, т.е

$$U = \ell(a_1, \dots, a_k) = \ell(\underbrace{a_1', \dots, a_t'}_{\text{базис}}), \ \dim U = t$$

$U : |(1)$

$$W = \ell(b_1, \dots, b_s) = \ell(b_1', \dots, b_m'), \ \dim W = m$$

$W : |(2)$

II) Базис на $U+W$ е една МЛНЗП измежду системата
a_1'
a_2'
$\vdots$
a_t'
b_1'
b_2'
$\vdots$
b_m' $\rightsquigarrow \Rightarrow \dim U+W = p$

$c_1 = a_1'$, $c_2 = a_3''$, $c_3 = b_1''$, …, $c_p = b_k''$

III) Базис на $U\cap W$ е една ФСР на ХСЛУ:

$U\cap W: \left|\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\right.$ и нека $d_1, d_2, \ldots, d_q$ е ФСР

$\dim U\cap W = q$.

IV) Проверка:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W)$$

$$p = t + m - q$$

че е тъждество.

Линейни изображения

Нека V и V' са две лин. пр-ва над поле F.

Нека $\varphi : \begin{cases} V \to V' \\ a \to b = \varphi(a) \end{cases}$ е изображение от V към V'.

Def. Казваме, че φ е линейно изображение, ако съгласува операциите "+" вектори и "·" на вектор по скалар в двете л. пр-ва V и V', т.е. ако произволна линейна комбинация $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ на векторите $\{a_i\}_1^k$ в V се изпраща чрез φ в линейна комбинация на образите на тези вектори $\{\varphi(a_i)\}_{i=1}^k$ в V' със същите коеф-ти $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ $\Leftrightarrow$

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \lambda_2 \varphi(a_2) + \dots + \lambda_k \varphi(a_k)$$

Заб. $\forall\, a, c \in V \Rightarrow \varphi(a+c) = \varphi(a) + \varphi(c)$

$\forall\, \lambda \in F \Rightarrow \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a) \Leftrightarrow$

φ е лин. изображение $: V \to V'$

Сл. Ако $\varphi : V \to V'$ е лин изображ, имаме, че са в сила следните р-ва:

1) $\varphi(\theta_V) = \theta_{V'}$;

2) $\forall a \in V,\ \varphi(-a) = -\varphi(a)$;

3) ако $\{b_1, \dots, b_s\}$ ЛЗ с-ма вектори в V, то $\{\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_s)\}$ са също ЛЗ с-ма в V'.

Док: $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_s b_s = \theta_V$, б.о.о. $\lambda_1 \neq 0$

$\Rightarrow \varphi(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_s b_s) \underset{\text{л.из.}}{=} \underset{\neq 0}{\lambda_1} \varphi(b_1) + \dots + \lambda_s \varphi(b_s) = \theta_{V'}$

$\Rightarrow_{\text{def}} \{\varphi(b_i)\}_1^s$ са ЛЗ с-ма в V'

Деф: 1) $\underset{\substack{\| \\ O_{V \to V'}}}{O} : \begin{cases} V \to V' \\ a \to \theta_{V'} \end{cases}$ е нулево изображение;

2) $\underset{\substack{\| \\ \varepsilon_V}}{\varepsilon} : \begin{cases} V \to V \\ a \to a \end{cases}$ е идентитет или тъждествено изображение;

$$\varphi : \begin{cases} V \to V' \\ a \to b = \varphi(a) \end{cases} \qquad \varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \dots + \lambda_k \varphi(a_k)$$

$Hom(V, V') = \{ \varphi : V \to V' \mid \varphi$ - лин. изображ.$\}$

φ - лин. изобр. от V в V' $\Leftrightarrow$ φ е хомоморфизъм на л. п-во V в л. п-во V'.

$$\varphi : \begin{cases} V \to V \\ a \to b = \varphi(a) \end{cases}$$ φ - линеен оператор в V

$Hom\, V = \{ \varphi : V \to V \mid \varphi$ - линейно$\}$.

<u>Пример:</u> 1) $\mathbb{O}$ - л. из. ; ε_V - л. опр;

2) $V = F^n \to V' = F^m$, $m \geq n$

$\varphi \in Hom(V, V')$ с.р.

$$\varphi : \begin{cases} V \to V' \\ (a_1, \dots, a_n) \to (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

3) $$d : \begin{cases} V \to V = F[x] \\ f(x) \to f'(x) \end{cases}$$ - линеен оператор диференциране

Th. Нека V и V' са две л. пр-ва над F и $\dim V = n < \infty$. Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на V и нека $w_1, w_2, \dots, w_n$ са произволни n-на брой вектори от V'. Тогава $\exists!$ л. изобр.

$$\varphi : \begin{cases} V \to V' \\ e_i \to w_i, \; i = \overline{1,n} \end{cases}, \text{ т.е. } \varphi(e_i) = w_i, \; i = \overline{1,n}$$

Д-во: $\exists!$)

$$\varphi : \begin{cases} V \to V' \\ a \to \varphi(a) := \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = w \end{cases}$$

$\forall a \in V \Rightarrow \exists! \lambda_i : a = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, $\{e_i\}_1^n$ базис на V. $\Rightarrow$ коректно изображение

$$\varphi(a) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n$$
$$\parallel \; \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$$

и φ - лин. изобр. е директно се проверява

$!$:) $\varphi(e_i) = w_i$ и $\psi(e_i) = w_i$, $i = \overline{1,n}$

$\forall a \in V$

$$\varphi(a) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n =$$
$$= \lambda_1 \psi(e_1) + \dots + \lambda_n \psi(e_n) = \psi(a)$$
$$\Rightarrow \varphi = \psi.$$

Деф. Нека $\varphi: \begin{cases} V \to V' \\ a \to b = \varphi(a) \end{cases}$ е изображ.

Казваме, че φ е изоморфизъм м/у V и V' и означаваме $V \cong V'$ $(V \overset{\varphi}{\cong} V')$, ако

1) φ – лин. изображение $\Big\}$ "+" $\cong$
2) φ – биекция

Заб. $V \overset{\varphi}{\cong} V' \Rightarrow V' \overset{\varphi^{-1}}{\cong} V$
$a \to b \qquad\qquad b \to a$

Тв. Ако $\varphi: \begin{cases} V \to V' \\ a \to \varphi(a) = b \end{cases}$ е изоморфизъм

и $\{a_i\}_1^k$ е ЛНЗ с-ма в $V \Rightarrow$

$\{\varphi(a_i)\}_1^k$ е ЛНЗ с-ма в V'.

Док: $\{a_i\}_1^k$ са ЛНЗ в V. Да разгледаме

$$\lambda_1 \varphi(a_1) + \dots + \lambda_k \varphi(a_k) = \theta_{V'}, \quad \lambda_i \in F, \; i = \overline{1,k}$$

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \varphi(\theta_V) \text{ и } \exists\, \varphi^{-1}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \theta_V \overset{\text{ЛНЗ}}{\Rightarrow} \lambda_i = 0 \overset{\text{деф}}{\Rightarrow} \{\varphi(a_i)\} \text{ ЛНЗ}$$

Th Две крайномерни л. простр. V и V' са изоморфни $\Leftrightarrow$ са от една и съща размерност.

$$\exists\, V \overset{\varphi}{\cong} V' \Leftrightarrow \dim V = \dim V' = n < \infty$$

Док.: $\Rightarrow$) $\varphi: V \to V'$ е изоморфизъм

$\dim V = n < \infty$ и $e_1, \dots, e_n$ – базис на V

$\Rightarrow \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ – е базис на $V' \Rightarrow$

$\dim V = \dim V' = n.$

$\downarrow$

$\{e_i\}$ базис $\Rightarrow$ ЛНЗ $\xRightarrow{Th} \{\varphi(e_i)\}_1^n$ ЛНЗ сила

$b \in V'$ и φ – изоморф. $\Rightarrow \exists\, a \in V : \varphi(a) = b$

$a \in V \Rightarrow \exists!\, \alpha_1 \dots \alpha_n : a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$\varphi(a) = b \underset{Л.И.}{=} \alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n)$

$\Rightarrow V' = \ell(\underbrace{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)}_{ЛНЗ}) \Rightarrow$

$\{\varphi(e_i)\}_1^n$ – б. на $V' \Rightarrow \dim V = \dim V' = n.$

Обратно, ако $\dim V = \dim V' = n < \infty$

и нека $e_1, \dots, e_n$ – б. на V и $e'_1, \dots, e'_n$ – б. на V'.

Тогава $\exists!\ \varphi \in \operatorname{Hom}(V, V') : \varphi(e_i) = e'_i$, $i = \overline{1,n}$.

φ – инекция: $a \in V$, $c \in V$, $a \neq c$

$a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$c = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$

$\exists$ поне $\alpha_i \neq \beta_i$

$$\Rightarrow \varphi(a) = \alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = \alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_n e'_n$$

$$\varphi(c) = \beta_1 \varphi(e_1) + \dots + \beta_n \varphi(e_n) = \beta_1 e'_1 + \dots + \beta_n e'_n$$

$$\Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(c)$$

φ – сюрекция: $\forall\, b \in V' \Rightarrow b = \gamma_1 e'_1 + \dots + \gamma_n e'_n =$

$$= \gamma_1 \varphi(e_1) + \dots + \gamma_n \varphi(e_n) \underset{\text{л.и.}}{=} \varphi(\underbrace{\gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n}_{d})$$

$\exists\, d = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n \in V : \varphi(d) = b$

$\Rightarrow \varphi$ – биекция + л.из. $\Rightarrow \underline{V \overset{\varphi}{\cong} V'}$.

Извод: С точност до изоморфизъм за всяко фикс. ест. число n, $\exists!$ n-мерно лин. п-во $F^n = \{a = (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in F\}$.
над числ.F

Ако V – произволно n-мерно л. п-во над F и да изберем базис на V: $e_1, \dots, e_n$ – б. на V

Тогава $\varphi: \begin{cases} V \to F^n \\ e_i \to (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-та поз.}}, 0, \dots 0)_{i=\overline{1,n}} \end{cases}$

Изоморфизъм м/у $V \cong F^n$.

От алгебрична гледна точка две изоморфни n-мерни лин. п-ва ще считаме за неразличими, т.е.
$\forall$ вярно алг. св-во в $V \Leftarrow\Rightarrow$
Вярно алг. св-во в V'.