Лекция 8 17.11.2021г

Нека $V$ е л. п-во, $V \neq \{0\}$ над п. $F$.
Една с-ма вект. $B$ е базис на $V$, ако
1) $B$ е ЛНЗ с-ма и 2) $V = \ell(B)$.
$\dim_F V = \dim V = n \iff B = \{e_1, \dots, e_n\}$ б. на $V$

Тв. Ако $V$ е кр.м.л.пр. ($\dim V = n < \infty$) и
$W \leq V$. Тогава $W$ е кр.м.л.п-во и
$\dim W \leq \dim V$.

Док: $V = \ell(\{e_1, \dots, e_n\})$ и $W \leq V$
$W = \ell(\underbrace{\{e_1, \dots, e_k\}}_{\text{базис на } W})$, $k \leq n$ $\Rightarrow \dim W = k \leq n$
и $k = n$ $W = V$.

Th: Нека $V \neq \{0\}$ кр.м.л.п-во над п. $F$.
Една с-ма вект. $B = \ell(b_1, \dots, b_n)$ е базис
на $V \iff \forall w \in V$ се представя по
единствен начин като л. комб. на вект.
от $B$ с коеф. с $F$.

<u>Доб</u>: $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ базис на $V$ и $w\in V$

и нека допуснем, че $\alpha_i\in F, \beta_i\in F, i=\overline{1,n}$

$$w=\alpha_1 b_1+\dots+\alpha_n b_n=\beta_1 b_1+\dots+\beta_n b_n$$

$$(\alpha_1-\beta_1)b_1+(\alpha_2-\beta_2)b_2+\dots+(\alpha_n-\beta_n)b_n=\theta$$

$\{b_i\}_1^n$ б. на $V \Rightarrow$ ЛНЗ с-ма $\Rightarrow \underset{i=\overline{1,n}}{\alpha_i-\beta_i=0}$

$\Rightarrow \alpha_i=\beta_i \Rightarrow \exists!\ \alpha_i\in F : w=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i.$

Обратно, ако $\forall w\in V, \exists!\ \alpha_i\in F : w=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i. \Rightarrow$

$l(b_1,\dots,b_n)=V$ и остава да проверим, че

$B=\{b_1,\dots,b_n\}$ е ЛНЗ с-ма, т.е

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\dots+\lambda_n b_n=\theta\\ 0.b_1+0.b_2+\dots+0\,b_n=\theta\end{array}\right\}\ \underset{i=\overline{1,n}}{\lambda_i=0}\ \overset{\text{def}}{\Rightarrow}\ B \text{ ЛНЗ с-ма ври}$$

$\Rightarrow B$ е базис на $V$.

<u>Сл</u>: $V=l(b_1,\dots,b_n)$ и $\exists!$ представяне на нулевият вр като л. комб. на вектори $b_1,\dots,b_n \Leftrightarrow \{b_i\}_1^n$ е б. на $V$.

**Деф.** $V$ - кр. м. л. пр-во над т.п. $F$ $(\neq \{0\})$ и $B=\{b_i\}_1^n$ е базис на $V$, $\forall w \in V \Rightarrow \exists! \alpha_i \in F, i=\overline{1,n}$ : $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$. Казваме, че $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ са координати на вр $w$ относно б. $B$ и означаваме $w_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

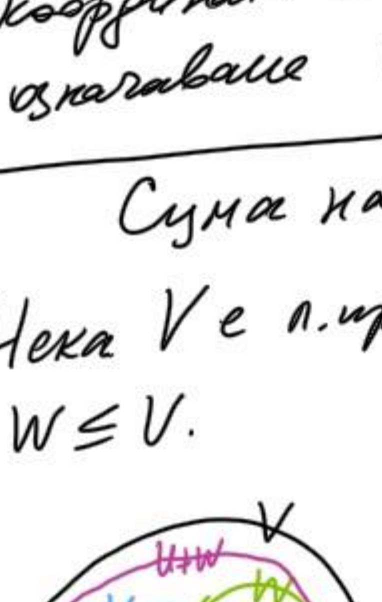
---

## Сума на подпространства

Нека $V$ е л.пр. над т.п. $F$ и $U \leq V$ и $W \leq V$.

$U \cap W \leq V$

$U + W = \ell(U \cup W)$




**Тв.** Сечение на фамилия от подпр-ва на $V$ е подпр-во на $V$, т.е.

$$H = \bigcap_{\substack{W_i \leq V \\ i \in I}} W_i \leq V, \text{ ако } W_i \leq V.$$

**Док:** $i \in I$, $W_i \leq V$, $\forall a,b \in W_i$ ($\forall a,b \in H$), $\forall \alpha,\beta \in F \Rightarrow \alpha a + \beta b \in W_i$ ($i \in I$) $\Rightarrow \alpha a + \beta b \in H$

$\Rightarrow H \leq V$.

$U \cap W \le V$.

<u>Тб.</u> $U \le V$ и $W \le V$, то

$$U \cup W \le V \iff \begin{cases} U \le \overset{= U\cup W}{W} \le V \\ W \le \underset{= U\cup W}{U} \le V \end{cases}$$

Наистина, ако $a \in U\setminus W$ и $b \in W\setminus U$,

ще покажем, че $a+b=c \notin U\cup W$

$\Rightarrow U\cup W \not\le V$.

$$\underset{\in U}{a} + b = \underset{\in U\,(\text{доп.})}{c} \Rightarrow \underset{\in W\setminus U}{b} = \underset{\in U}{c-a} \quad \text{противоречие}$$

$\Rightarrow c \notin U$.

$$a + \underset{\in W}{b} = \underset{\in W\,(\text{доп.})}{c} \Rightarrow \underset{\in U\setminus W}{a} = c-b \in W \quad \text{противоречие}$$

$\Rightarrow c \notin W \Rightarrow c \notin U\cup W \Rightarrow U\cup W \not\le V$.

**Деф.** Нека $V$ е л. пр-во над $F$, $U \le V$, $W \le V$.
Сума $U+W$ на подпр-вата $U$ и $W$
наричаме $U+W = \left\{ b = u+w \;\middle|\; \begin{matrix} \exists u \in U \\ \exists w \in W \end{matrix} \right\}$.

**Тв.** $U+W \le V$.

**Д-во:** Нека $\forall a, b \in U+W$, $\forall \alpha, \beta \in F$

$$\Rightarrow \alpha a + \beta b = \alpha(u_1+w_1) + \beta(u_2+w_2) \Leftarrow$$

$a \in U+W \Rightarrow \exists u_1 \in U, \exists w_1 \in W : a = u_1 + w_1$

$b \in U+W \Rightarrow \exists u_2 \in U, \exists w_2 \in W : b = u_2 + w_2$

$$\alpha a + \beta b = (\underbrace{\alpha u_1 + \beta u_2}_{u \in U}) + (\underbrace{\alpha w_1 + \beta w_2}_{w \in W})$$

$$\Downarrow \text{def}$$

$$\in U+W \xRightarrow[\text{Кр}]{} U+W \le V.$$

**Сл:** $U+W^{\le V} \Leftrightarrow U+W = \ell(U \cup W)$.

**Def** (обобщение) Нека $V$ е л. пр. над п. $F$ и $W_j \leq V$, $j=\overline{1,k}$. Тогава сума на подпространствата $W_1, \dots, W_k$ нар.

$$W_1+W_2+\dots+W_k=\{v=u_1+\dots+u_k \mid \exists u_j \in W_j,\ j=\overline{1,k}\} \leq V$$

**Сл:** $W_1+W_2+\dots+W_k=\ell(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k)$.

**Th** (за размерностите на $U+W$ и $U \cap W$) Нека $V$ е л. пр-во над п. поле $F$ и нека $U \leq V$ и $W \leq V$ са две кр.-м. л. подпр. на $V$, $\dim U = k < \infty$, $\dim W = s < \infty$. Тогава $U+W$ и $U \cap W$ са също кр.м.л.пр-ва и е в сила следната зависимост:

$$\dim(U+W)=\underbrace{\dim U}_{k}+\underbrace{\dim W}_{s}-\underbrace{\dim(U \cap W)}_{r}$$

Дво: Ясно е, че $U \cap W$ е кр. м. л. пр-во, т.к. $U \cap W \subseteq U \leq V$ и $U \cap W \subseteq W \leq V$

$\dim U \cap W \leq \min(k, s)$.

Частни случай:

Ако $U = \{\theta\}$ и $W \leq V \Rightarrow U + W = W$

$U \subseteq W \leq V$

Ако $W = \{\theta\}$ и $U \leq V \Rightarrow U + W = U$

$W \subseteq U \leq V$

Ако $U \leq V$, $W \leq V$, $U \cap W = \{\theta\}$

тогава сечен. няма базис, но $\dim U \cap W = 0$.

Нека $U \neq \{\theta\}$, $U \leq V$, $W \neq \{\theta\}$, $W \leq V$,

$U \cap W \neq \{\theta\}$

нека $\dim U \cap W = r \leq \min(k, s)$

Да изберем базис $a_1, a_2, \ldots, a_r$ на $U \cap W$

и да допълним до базис на $U$, т.е. нека

$a_1, a_2, \ldots, a_r, b_{r+1}, \ldots, b_k$ е базис на $U$

Нека $a_1, a_2, \dots, a_r, c_{r+1}, \dots, c_s$ базис на $W$.

Ще покажем, че тогава

(*) $a_1, a_2, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_k, c_{r+1}, \dots, c_s$ са базис на $U+W$

В частност, $\dim(U+W) = \cancel{r} + k - \cancel{r} + s - r =$

$= k + s - r = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$.

Действително, $l(a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_k, c_{r+1}, \dots, c_s) = U+W$

$\forall v \in U+W \Rightarrow v = u + w = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i + \sum_{i=r+1}^{k} \alpha_i b_i +$

$+ \sum_{j=1}^{r} \beta_j a_j + \sum_{j=r+1}^{s} \beta_j c_j \Rightarrow v \in l(a_i, b_j, c_e)$

Остава да ~~..~~ проверим, че с-мата в (*)

е ЛНЗ с-ма в-ри

$$\underbrace{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r}_{a \in U \cap W} + \underbrace{\gamma_{r+1} b_{r+1} + \dots + \gamma_k b_k}_{b \in U} + \underbrace{\mu_{r+1} c_{r+1} + \dots + \mu_s c_s}_{c \in W} = \theta$$

$$a + b + c = \theta$$

$$a+b+c=\theta \Leftrightarrow \underset{U \ni}{b} = \underbrace{-a-c}_{\in W} \Rightarrow b \in U \cap W$$

и $\{a_i\}_1^r$ са б. на $U \cap W \Rightarrow \exists!\ \overset{\in F}{\theta_1, \dots, \theta_r}$ !

$$\left.\begin{aligned} b &= \theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 + \dots + \theta_r a_r \\ b &= \gamma_{r+1} b_{r+1} + \dots + \gamma_k b_k \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$-\theta_1 a_1 - \theta_2 a_2 - \dots - \theta_r a_r + \gamma_{r+1} b_{r+1} + \dots + \gamma_k b_k = \theta$$

$\{a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_k\}$ б. на $U \Rightarrow$ ЛНЗ с-ма

$$\overset{\Rightarrow}{\text{def}} \ -\theta_1 = -\theta_2 = \dots = -\theta_r = 0$$

$$\boxed{\gamma_{r+1} = \gamma_{r+2} = \dots = \gamma_k = 0}$$

$$a+b+c=\theta \Leftrightarrow a+c=\theta \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} c_{r+1} + \dots + \mu_s c_s = \theta$$

$\{a_1, \dots, a_r, c_{r+1}, \dots, c_s\}$ б. на $W \Rightarrow$ ЛНЗ с-ма

$$\overset{\Rightarrow}{\text{def}} \ \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = \mu_{r+1} = \dots = \mu_s = 0}$$

$\Rightarrow$ def $\circledast$ е ЛНЗ с-ма $\overset{\Rightarrow}{\text{def}}$ е б. на $U+W$

Така показахме, че $\{a_1, \dots, a_z, b_{z+1}, \dots, b_k, c_{z+1}, \dots, c_s\}$ е б. на $U+W \Rightarrow U+W$ е кр. м. л. пр-во и

$\dim(U+W) = k+s-z = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

**Заб.** $U+W = \{c = a+b \mid \exists a \in U, \exists b \in W\}$

$\forall v \in U \cap W \Rightarrow v = \underset{\in U}{v} + \underset{\in W}{\theta} = \underset{\in U}{\theta} + \underset{\in W}{v} =$

$= \underset{\in U}{\frac{2}{3}v} + \underset{\in W}{\frac{1}{3}v} = \underset{\in U}{\frac{4}{5}v} + \underset{\in W}{\frac{1}{5}v}$

**Деф.** Нека $V$ е л. пр-во над поле $F$ и $U \leq V$ и $W \leq V$. Директна сума на подпр-вата $U$ и $W$ наричаме подпр-вото $U \oplus W = \{c = a+b \mid \exists! a \in U, \exists! b \in W\} \leq V$

**Def** (обобщение) $V$ л.пр. над $F$ и $W_j \le V$, $j=\overline{1,k}$.

Директна сума на $W_1, W_2, \dots, W_k$ наричаме

подмножеството $W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k = \{v=\sum_{j=1}^{k} u_j \mid \exists!\, u_j \in W_j\}$
$\le V$

**Th:** ~~Нека~~ $V = V_1 \oplus V_2 \iff$ 1) $V = V_1 + V_2$
2) $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$

**Док:** $V = V_1 \oplus V_2 \Rightarrow$ 1) $V = V_1 + V_2$ по def

и $w \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \exists!\, w_1 \in V_1$ : $w = w_1 + w_2$
$\exists!\, w_2 \in V_2$

$$\underset{\in V_1}{w_1} = w - \underset{\in V_2}{w_2} \Rightarrow w_1 \in V_1 \cap V_2$$
$$w_2 \in V_1 \cap V_2$$

$w = w + \theta = \theta + w$ са две представяния

$\Rightarrow w = \theta \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$.

Обратно нека са в сила 1) и 2) $\Rightarrow$

$V = V_1 + V_2$ и $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$.

$\Downarrow$

$w = a + b = c + d$, $\quad a, c \in V_1$; $\; b, d \in V_2$

$\underbrace{a-c}_{\in V_1} = \underbrace{d-b}_{\in V_2} \Rightarrow a-c = d-b \in V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$

$\Rightarrow a-c = \theta$ и $d-b = \theta$
$a = c$ $\quad b = d \Rightarrow \exists!\, a \in V_1, \; \exists!\, b \in V_2$

$w = a+b \xRightarrow{def} V = V_1 \oplus V_2$. [illegible]

---

Th (обобщение на пр. Б.)

$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k \Leftrightarrow$

1) $V = V_1 + V_2 + \dots + V_k$

2) $V_j \cap (V_1 + \dots + V_{j-1} + V_{j+1} + \dots + V_k) = \{\theta\}$, $j = \overline{1,k}$

<u>Сл</u>! $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k \Leftrightarrow V = V_1 + V_2 + \dots + V_k$ и $\theta$ вр се представя по ! начин $\sum_{i=1}^{k} w_i = \theta$

Тв: Нека $V$ е $n$-мерно л. пр-во над ч. поле $F$.
Нека $\{e_i\}_1^n$ е базис на $V$ и $1 \leq k \leq n$.
Тогава $V_1 = \ell(e_1, \dots, e_k)$, $V_2 = \ell(e_{k+1}, \dots, e_n)$

$\Rightarrow V_1 \oplus V_2 = V$.

Обратно, ако $V = V_1 \oplus V_2$, то ако $e_1, \dots, e_k$ е базис на $V_1$, а $e_{k+1}, \dots, e_n$ е б. на $V_2$, тогава $\{e_i\}_1^n$ е базис на $V$.
В частност, $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

Дво: $\underbrace{e_1, \dots, e_k}_{V_1 = \ell(e_i, i=\overline{1,k})}, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_n}_{V_2 = \ell(e_i, i=\overline{k+1,n})}$ базис на $V$ $\overset{?}{\Rightarrow} V = V_1 \oplus V_2$

$\forall w \in V, \exists!\, \alpha_i \in F: \; w = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k}_{u_1 \in V_1} + \underbrace{\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n}_{u_2 \in V_2}$

$\Rightarrow w = \overset{\in V_1}{u_1} + \overset{\in V_2}{u_2} \Rightarrow V = V_1 + V_2$.

Нека $w \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow w = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k = \beta_{k+1} e_{k+1} + \dots + \beta_n e_n$

$\Rightarrow$

$$\beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k - \beta_{k+1} e_{k+1} + \dots + (-\beta_n) e_n = \theta$$

$\{e_i\}_1^n$ б. на $V \Rightarrow$ ЛНЗ сист. $\overset{\Rightarrow}{def}$

$$\beta_1 = \dots = \beta_k = \beta_{k+1} = \dots = \beta_n = 0$$

$$\Rightarrow w = \theta \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{\theta\} \underset{Tp}{\Rightarrow} \overset{V}{V_1 \oplus V_2}$$

Обратно, нека $V_1 \oplus V_2 = V$ и нека $e_1, \dots, e_k$ - б. на $V_1$ и $e_{k+1}, \dots, e_n$ е б. на $V_2$.
Ще покажем, че $\{e_i\}_1^n$ е б. на $V$.

$$V = \ell(\{e_i\}_1^n) = V_1 + V_2 \Rightarrow \forall w \in V, \ \exists! a \in V_1, \ \exists! b \in V_2$$

$$w = a + b = \underset{\exists! \alpha_i}{(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k)} + \underset{\exists! \alpha_i}{(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n)}$$

остава да проверим, че $\{e_i\}_1^k$ е ЛНЗ сист. вкр

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n = \theta \iff$$

$$\underset{\in V_1}{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k} = \underset{\in V_2}{(-\lambda_{k+1}) e_{k+1} + \dots + (-\lambda_n) e_n}$$

$\Rightarrow$

$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \in V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$

$-\lambda_{k+1} e_{k+1} - \dots - \lambda_n e_n \in V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$ $\Rightarrow$

$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k = \theta \qquad \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n = \theta$

$\{e_i\}_1^k$ б. на $V_1 \Rightarrow$ ЛНЗ с-ма $\qquad \{e_i\}_{k+1}^n$ б. на $V_2 \Rightarrow$ ЛНЗ с-ма

$\overset{\text{def}}{\Rightarrow} \lambda_i = 0,\ i = \overline{1,k} \qquad \overset{\text{def}}{\Rightarrow} \lambda_i = 0,\ i = \overline{k+1,n}$

$\Rightarrow \lambda_i = 0,\ i = \overline{1,n} \underset{\text{ЛНЗ}}{\overset{\text{def}}{\Rightarrow}} \{e_i\}_1^n$ е ЛНЗ с-ма

$\underset{\text{б.}}{\overset{\text{def}}{\Rightarrow}} \{e_i\}_1^n$ е базис на $V$.

<u>Тв:</u> Нека $V$ е кр.м. л.пр-во ($\dim V = n < \infty$) и $U \leq V$, то $\exists W \leq V$ : $U \oplus W = V$.

<u>Д-во:</u> $\dim U \leq \dim V = n$

$\dim U = \dim V = n \Rightarrow U = V,\ W = \{\theta\}$

$V = V \oplus \{\theta\}$. Нека $\dim U < \underset{\dim V}{\overset{n}{\shortparallel}}$

Нека $\dim U = k < \dim V = n$ и

$e_1, \dots, e_k$ – Б на $U$. Допълваме до

базис на $V$, т.е. нека $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ е

базис на $V$ и def $W := \ell(e_{k+1}, \dots, e_n)$

$U = \ell(e_1, \dots, e_k)$, $W = \ell(e_{k+1}, \dots, e_n)$

$$U \oplus W = V \Rightarrow \exists W \le V ! \; U \oplus W = V.$$

<u>Тв!</u> Нека $V$ е $n$-мерно л.пр. над ч.п. $F$

и $e_1, \dots, e_n$ е базис на $V$. Тогава

$V = \ell(e_1) \oplus \ell(e_2) \oplus \dots \oplus \ell(e_n)$, т.е.

$V$ е директна сума на 1-мерни

подпр-ва, които са л. обвивки

на вектори от даден базис