Лекция 7 10. 11. 2021г.

Линейна независимост и линейна зависимост на система в-ри

Нека V е л. пр. над ч. поле F и имаме система вектори $\{a_i\}_1^n$ от V.

<u>Деф</u>. Казваме, че системата в-ри $\{a_i\}_1^n$ са линейно независима система в-ри (или в-рите са ЛНЗ), ако единствената лин. комб. на тези в-ри $\{a_i\}_1^n$ с коеф-ти $\{\lambda_i\}_1^n$ от F, задаваща θ вр е нулевата, т.е. каквато и комбинация $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \theta \Rightarrow \lambda_i = 0, \; i = \overline{1, n}$.

Една безкрайна система в-ри $\{a_i\}_1^\infty$ е ЛНЗ, ако всяка нейна крайна подсистема в-ри е ЛНЗ.

Def. Казваме, че една система вектори $\{a_i\}_1^n$ е линейно зависима система (или вектори са ЛЗ), ако $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ поне едно от които е $\neq 0$, т.че $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \theta$.

б.о.о. $\lambda_1 \neq 0$

Зад. Една система е ЛЗ или ЛНЗ.

Примери: 1) $V = F^3$ над F и $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ е ЛНЗ с-ма. Наистина, ако

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \theta \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0) + (0, 0, \lambda_3) = \theta \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \theta = (0,0,0) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\xRightarrow{def} \{e_i\}_1^3$ са ЛНЗ с-ма вектори

2) $e_1 = (1,0,0)$
$e_2 = (0,1,0)$
$a = (2,3,0)$

$a = 2e_1 + 3e_2 \Leftrightarrow$

$\underbrace{2}_{\lambda_1 \neq 0} e_1 + \underbrace{3}_{\lambda_2} e_2 \underbrace{-}_{\lambda_3} a = \theta \xRightarrow{def} \{e_1, e_2, a\}$ ЛЗ

Св-ва на ЛЗ и ЛНЗ:

Заб: θ е ЛЗ с всеки друг вектор!

1) $\{a\}$ е ЛНЗ $\Leftrightarrow a \neq \theta$

Дво: $\lambda a = \theta \Rightarrow$ или $\lambda = 0 \overset{}{\underset{def}{\Rightarrow}} \{a\}$ ЛНЗ с-ма $\Rightarrow a \neq \theta$

или $\lambda \neq 0$, то $a = \theta$

2) Подсистема на ЛНЗ с-ма е ЛНЗ с-ма и надсистема на ЛЗ с-ма е ЛЗ с-ма, т.е. ако $\{a_i\}_1^n \in V$, която е ЛНЗ с-ма, то $\forall k \leq n$ имаме че $\{a_i\}_1^k$ е отново ЛНЗ; ако $\{b_j\}_1^n \in V$ са ЛЗ, то $\forall s \geq n$ системата $\{b_j\}_1^s$ е отново ЛЗ с-ма вър.

Дво: Нека $\{a_i\}_1^n \in V$ е ЛНЗ с-ма и $k \leq n$.

Да допуснем противното, т.е. че $\{a_i\}_1^k$ са ЛЗ с-ма вър, $\Rightarrow$ по def $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in F$: $\neq_0$ (б.о.о.)

$\underset{\neq 0}{\lambda_1} a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = \theta$. Тогава

$\underset{\neq 0}{\lambda_1} a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k + 0 . a_{k+1} + 0 a_{k+2} + \dots + 0 a_n = \theta$

$\underset{def}{\Rightarrow} \{a_i\}_1^n$ са ЛЗ сма, което е в противоречие с условието $\{a_i\}_1^n$ ЛНЗ

$\Rightarrow \{a_i\}_1^k$ е ЛНЗ сма вр.

3) Ако в една система вр се съдържа θ или поне два пропорционални вектора, то системата е ЛЗ сма,

т.е. $\underset{\text{ЛЗ сма}}{\{\theta, a_2, a_3, \dots, a_k\}}$ или $\underset{\text{ЛЗ сма}}{\{a_1, \overset{a_2}{\lambda a_1}, a_3, \dots, a_k\}}$. $\lambda \neq 0$

Дво: $\{\theta, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ ЛЗ сма т.к.

$7 . \theta + 0 . a_2 + 0 . a_3 + \dots + 0 . a_k = \theta$;

$\{a_1, \lambda a_1, a_3, \dots, a_k\}$ ЛЗ сма т.к.

$\underset{\neq 0}{-\lambda} a_1 + \underset{\neq 0}{1} a_2 + 0 . a_3 + 0 . a_4 + \dots + 0 . a_k = \theta$

4) Една система от поне два в-ра е ЛЗ сма $\Leftrightarrow$ поне един от в-рите е лин комб на останалите в-ри от системата с коеф-ти от F, т.е

$\{a_i\}_1^k$ е ЛЗ $\underset{б.о.о}{\Leftrightarrow}$ $a_1 = \sum_{j=2}^{k} \mu_j \cdot a_j,\ \mu_j \in F$
$k \geq 2$

Док. $\{a_i\}_1^k$ е ЛЗ $\underset{def}{\Rightarrow}$ $\exists\ \underset{\neq 0}{\mu_1'}, \mu_2', \dots, \mu_k' \in F$:

$$\underset{\neq 0}{\mu_1'} a_1 + \mu_2' a_2 + \dots + \mu_k' a_k = \theta$$

$$a_1 = -\frac{\mu_2'}{\mu_1'} a_2 - \frac{\mu_3'}{\mu_1'} a_3 - \dots - \frac{\mu_k'}{\mu_1'} a_k$$

$$\mu_j = -\mu_j' / \mu_1 \ ,\ j = \overline{2,k} \Rightarrow a_1 = \sum_{j=2}^{k} \mu_j a_j$$

Обратно, $a_1 = \sum_{j=2}^{k} \mu_j a_j \Leftrightarrow$

$$\underset{\neq 0}{(-1)} a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \dots + \mu_k a_k = \theta \ ;$$

$\underset{def}{\Rightarrow}$ $\{a_i\}_1^k$ са ЛЗ сма в-ри.

Лема (ОЛЛА – основна лема на лин. алг.)

Ако повече на брой вектори в V се изразяват линейно (т.е. като лин. комб.) на по-малко на брой вектори, то повечето на брой вектори са ЛЗ сма вектори т.е. нека $A = \{a_j\}_1^n$ и $B = \{b_i\}_1^k$ са две системи в-ри, т.че $\forall b_i \in \ell(A), i = \overline{1,k}$. Тогава ако $k > n$, то B е ЛЗ сма в-ри.

Док: Индукция по n.

$n = 1$: $A = \{a_1\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, $k > 1$

$b_j \in \ell(A) \Leftrightarrow b_j = \lambda_j a_1, j = \overline{1,k} \overset{3)}{\Rightarrow} B$ е ЛЗ сма в-ри

ИП: $A = \{a_j\}_1^n$ и $B = \{b_i\}_1^{k-1}$, $k-1 > n$

и $b_j \in \ell(A) \Rightarrow B$ е ЛЗ сма в-ри

Нека $A = \{a_j\}_1^n$, $B = \{b_i\}_1^k$, $k > n$

и $\underset{j=\overline{1,k}}{b_j \in \ell(A)} \Rightarrow \exists \lambda_{ij} \in F$, $\begin{matrix} i = \overline{1,k} \\ j = \overline{1,n} \end{matrix}$:

$$\left| \begin{array}{l} b_1 = \lambda_{11} a_1 + \lambda_{12} a_2 + \dots + \lambda_{1n} a_n \\ b_2 = \lambda_{21} a_1 + \lambda_{22} a_2 + \dots + \lambda_{2n} a_n \\ \dots \\ b_k = \lambda_{k1} a_1 + \lambda_{k2} a_2 + \dots + \lambda_{kn} a_n \neq \theta \end{array} \right.$$

$\nexists$ (б.о.о.)

$$L_1' = L_1 - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{kn}} L_k$$
$$L_2' = L_2 - \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_{kn}} L_k$$
$$\dots$$
$$L_{k-1}' = L_{k-1} - \frac{\lambda_{k-1n}}{\lambda_{kn}} L_k$$

Ако в B има $\theta \underset{3)}{\Rightarrow} B$ е ЛЗ с-ма;

Нека векторите от B са ненулеви.

$$\left| \begin{array}{l} c_1 = b_1 - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{kn}} b_k = \left(\lambda_{11} - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{kn}} \lambda_{k1}\right) a_1 + \dots + \left(\lambda_{1n-1} - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{kn}} \lambda_{kn-1}\right) a_{n-1} \\ c_2 = b_2 - \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_{kn}} b_k = \left(\lambda_{21} - \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_{kn}} \lambda_{k1}\right) a_1 + \dots + \left(\lambda_{2n-1} - \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_{kn}} \lambda_{kn-1}\right) a_{n-1} \\ \dots \\ c_{k-1} = b_{k-1} - \frac{\lambda_{k-1n}}{\lambda_{kn}} b_k = \left(\lambda_{k-11} - \frac{\lambda_{k-1n}}{\lambda_{kn}} \lambda_{k1}\right) a_1 + \dots \\ \quad + \left(\lambda_{k-1n-1} - \frac{\lambda_{k-1n}}{\lambda_{kn}} \lambda_{kn-1}\right) a_{n-1} \end{array} \right.$$

Прилагаме ИП за $C = \{c_i\}_1^{k-1}$, $A' = \{a_j\}_1^{n-1}$

и $c_i \in \ell(A')$ и $k-1 > n > n-1 \Rightarrow C$ е ЛЗ с-ма вбри

$\Rightarrow \exists\ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1} \in F$ т.че.

$$\underset{\underset{0}{\#}}{\mu_1} c_1 + \mu_2 c_2 + \dots + \mu_{k-1} c_{k-1} = \theta$$

б.о.о.

$$\underset{\underset{0}{\#}}{\mu_1}\left(b_1 - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{kn}} b_k\right) + \mu_2\left(b_2 - \frac{\lambda_{2n}}{\lambda_{kn}} b_k\right) + \dots +$$

$$+ \mu_{k-1}\left(b_{k-1} - \frac{\lambda_{k-1n}}{\lambda_{kn}} b_k\right) = \theta \iff$$

$$\underset{\underset{0}{\#}}{\mu_1} b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_{k-1} b_{k-1} + \underset{\in F}{(\dots)} b_k = \theta$$

$\xrightarrow{def}$ $B = \{b_i\}_1^k$ са ЛЗ сист вект

по Индукция $\Rightarrow$ Лемата е док

Базис, размерност, координати

Нека V е л. пр. над поле F.

Лема: Нека $\{a_i\}_1^k$ са ЛНЗ сист вект от V и $b \notin l(\{a_i\}_1^k)$. Тогава $\{a_1, \dots, a_k, b\}$ е отново ЛНЗ с-ма вект

Дво: $\{a_i\}_1^k$ ЛНЗ с-ма и $b \notin \ell(\{a_i\}_1^k)$

и $\overset{\text{нека}}{}$ $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k + \mu b = 0$

I сл. $\underline{\mu = 0}$, то $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k = 0 \overset{\text{def}}{\Rightarrow}$ $\{a_i\}_1^k$ ЛНЗ

$\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0}$ $\Rightarrow_{\text{def}}$ $\{a_1, \ldots, a_k, b\}$ ЛНЗ с-ма

II сл. $\mu \neq 0 \Rightarrow b = -\frac{\lambda_1}{\mu} a_1 - \frac{\lambda_2}{\mu} a_2 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\mu} a_k$

$\Rightarrow b \in \ell(\{a_i\}_1^k)$ и това е в про-

тиворечие с условието $b \notin \ell(\{a_i\}_1^k)$

$\Rightarrow$ Л. е док.

Нека V е ненулево л. пр. над ч.п. F.

Def. Казваме, че една с-ма вектори B от V е базис на V, ако са изпълнени следните две условия: 1) B е ЛНЗ с-ма вектори;

2) $\ell(B) = V$ $\Leftrightarrow$

1) B е ЛНЗ с-ма вектори;
2) $\forall w \in V$ е л.к. на вектори от B с коеф. от F, т.е. $w = \sum \alpha_i b_i$, $\alpha_i \in F$, $b_i \in B$.

<u>Деф.</u> Нека $V \neq \{0\}$ е л. пр-во над F. Казваме, че V е крайномерно л. пр-во, ако V притежава краен базис B, т.е. с-ма от краен брой вектори B е базис на V.
В противен сл., казваме че V е безкрайномерно л. пр-во

<u>Примери:</u> 1) $V = F^n$ над F, то базис на V е $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $e_i = (0, 0, ..., \underset{i\text{-то място}}{1}, ..., 0)$

$$\forall a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in V = F^n \Rightarrow V = \ell(\{e_i\}_1^n)$$

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \qquad \{e_i\}_1^n \text{ е ЛНЗ с-ма}$$

и в частност V е крайномерно л. пр.

2) $V = F_{m\times n}$ над F, $\{E_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ – базис на V
кр. м. л. пр.

3) $V = F^{n+1}[x] = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_i \in F \}$

$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ е базис на V

крайн. л. пр.

3') $V = F[x] = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \mid a_i \in F \}$

$\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ е базис на V

и V е безкрайномерно л. пр-во.

<u>Th</u>: Едно $\neq \{\theta\}$ л. пр-во V е крайномерно л. пр-во над F $\iff$ V е л. обвивка на краен брой вектори от V, т.е.

V е кр.м. л. пр. $\iff V = \ell(b_1, \dots, b_k)$ за някое $k \geq n$

$B = \{b_j\}_1^n$ - базис на V

<u>Дво</u>: V е кр.м. л. пр, т.е. притежава краен базис $B = \{b_j\}_1^n \Rightarrow V = \ell(b_1, \dots, b_n)$, т.е. $k = n$

Обратно, нека $V = \ell(b_1, \dots, b_k)$, $k \geq n$.

Ако $\forall b_j = \theta \Rightarrow V = \{\theta\}$, но по усл. $V \neq \{\theta\}$ $\Rightarrow$

$\exists$ б.о.о. $b_1 \neq \theta$ и имаме сл. два случая:

1) $\ell(b_1) = V$ $\underset{\text{и}}{\Rightarrow}$ $\underset{\text{ЛНЗ}}{\{b_1 \neq \theta\}} \Rightarrow \{b_1\}$ базис на V

т.е. кр.м.л.пр.

2) $\ell(b_1) \subsetneqq V$ и лемата $\exists\, b_2 \notin \ell(b_1)$

$b_1 \neq \theta$ ЛНЗ $\Rightarrow$ $\{b_1, b_2\}$ ЛНЗ сист. вектори

$\ell(\{b_1, b_2\})$

или $\ell(b_1, b_2) = V \underset{\text{def}}{\Rightarrow} \underset{\text{базис}}{\{b_1, b_2\}}$ на $V \Rightarrow$ кр.м.л.пр.

или $\ell(b_1, b_2) \subsetneqq V$ и $\exists\, b_3 \notin \ell(b_1, b_2) \underset{\text{лемата}}{\Rightarrow}$

$\{b_1, b_2, b_3\}$ ЛНЗ сист. вектори

и т.н. и след краен брой стъпки

ще достигнем до ЛНЗ сист. вектори

$\{b_j\}_1^n \in V$; $V = \ell(\{b_j\}_1^n) \Rightarrow$

$\Downarrow$ базис на V и V кр.м.л.пр.во

над F

Th. Нека V е $\neq\{\theta\}$ кр.м.л. пр-во над F. Броят на векторите в кои да са двата базиса $A=\{a_i\}_1^n$ и $B=\{b_j\}_1^k$ (на V) е един и същ, т.е. $n=k$.

Дво: $A=\{a_i\}_1^n$ – базис на V $\quad B=\{b_j\}_1^k$

$\ell(A)=V \quad \Rightarrow \quad b_j \in V=\ell(A)$

и ако допуснем, че $\boxed{k \geq n}$ от ОЛЛА $\Rightarrow B$ са ЛЗ сма в противоречие с B – базис $\Rightarrow \boxed{k \leq n}$

$B=\{b_j\}_1^k$ – базис на V $\quad \Rightarrow \quad A=\{a_i\}_1^n$

$\ell(B)=V \quad\quad a_i \in V=\ell(B)$

и ако допуснем, че $n \geq k$, ибо от ОЛЛА $\Rightarrow$ A са ЛЗ сма в противоречие с A е базис на $V \Rightarrow \boxed{n \leq k}$

$\Rightarrow n=k.$

Def. Нека $V \neq \{\theta\}$ кр.м. л. п-во над F. Броят на векторите в кой да е базис на V наричаме размерност на V над F и означаваме $\dim_F V = \dim V = n$, т.е $\{a_1, \ldots, a_n\}$ – базис на V.

По дефиниция $\dim V := \infty$, ако V е безкрайномерно л. п-во.

По def: $\dim\{\theta\} := 0$, но $\{\theta\}$ не притежава базис !!!

<u>Примери:</u> 1) $V = F_{m \times n}$ над F, $\{E_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ базис на V тк $\forall A \in V$, $A = \sum a_{ij} E_{ij}$,

т.е $\ell(\{E_{ij}\}) = V$, $\dim F_{m \times n} = m.n$;

1') $V = M_n(F)$ над F, $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ базис на V $\Rightarrow \dim M_n(F) = \underline{\underline{n^2}}$;

2) $V = F^n = \{ a = (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in F \}$

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$
$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ са базис на F^n и $\dim V = \dim F^n = n$
$\vdots$
$e_n = (0, 0, \dots, 1)$

2') $V = \mathbb{R}^n$ $\dim \mathbb{R}^n = n$ над $F = \mathbb{R}$;

3) $V = F^{n+1}[x]$, $\underbrace{\{1, x, \dots, x^n\}}_{\text{базис на } V} \Rightarrow \dim V = n+1$
$\dim V = \dim F^{n+1}[x]$

4) $V = F[x]$, $\{1, x, \dots, x^n, \dots\} \Rightarrow \dim F[x] = \infty$;

<u>Th</u> Нека V е лин. пр-во над г. поле F.
Тогава:
a) V е крайномерно, т.е. $\dim V = n \Leftrightarrow$
$\exists$ n на брой ЛНЗ в-ри и всеки $(n+1)$ на брой вектори от V са ЛЗ система в-ри
Всеки ~~n~~ на брой ЛНЗ в-ри са базис на V;

б) V е безкрайномерно л. пр-во над $\mathbb{F}$
$\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists$ подсистема $\{a_i\}_1^n \in V$
които са ЛНЗ с-ма вектори

Док-во: а) $\dim V = n < \infty \underset{def}{\Rightarrow} \exists \{a_i\}_1^n$ базис

на $V \Rightarrow \{a_i\}_1^n$ ЛНЗ с-ма и $\forall w \in V, w \in \ell(\{a_i\}_1^n)$

Нека $a_1, \dots, a_n, b$ са произволни $(n+1)$ на
(или $b_1, b_2, \dots, b_n, b$)

брой вектори $\Rightarrow$ ако допуснем че

$b \notin \ell(\{a_i\}_1^n) \Rightarrow \{a_1, \dots, a_n, b\}$ са ЛНЗ с-ма
в противоречие с $\{a_i\}_1^n$ е базис
и $b \in \ell(\{a_i\}_1^n)$

$\Rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n, b\}$ е ЛЗ с-ма вектори.

Ако $\{c_1, \dots, c_n\}$ са ЛНЗ с-ма от V в $\dim V = n$

$\forall w \in V$: $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i \Rightarrow V = \ell(\{c_i\}_1^n)$
$\Rightarrow \{c_i\}_1^n$ - базис на V.

б) $\dim V = \infty$ и нека $n \in \mathbb{N}$ произволно естествено. Ако допуснем, че в V

$\exists \{b_1, \dots, b_n\}$ ЛЗ система $\underset{\text{б.о.о.}}{\Rightarrow}$ $b_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j b_j$

$b_n \in \ell(b_1, \dots, b_{n-1})$ и ако $\{b_j\}_1^{n-1}$ са ЛНЗ

$\Rightarrow \dim V = n-1$ противоречие с $\dim V = \infty$

т.е. $\{b_j\}_1^n$ е ЛНЗ, $\forall n \in \mathbb{N}$;

Обратното е очевидно, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\exists \{a_i\}_1^n$ ЛНЗ и $\exists a_{n+1} \notin \ell(\{a_i\}_1^n) \Rightarrow$ ЛНЗ система

и т.н. до ∞ $\Rightarrow$ $\dim V = \infty$.

Сл: Нека $V \neq \{0\}$ крайномерно и нека $\{a_i\}_1^k$ е ЛНЗ система

Λ, нрво над F и нека ... вектори от V. Тогава системата $\{a_i\}_1^k$

може да се допълни до базис на V,

т.е. $\{a_i\}_1^n$, $\dim V = n \geq k$.

Док: $\{a_i\}_1^k$ ЛНЗ с-ма и $\dim V = n < \infty$.

$\ell(\{a_i\}_1^k) = V \Rightarrow \{a_i\}_1^k$ базис на V,

т.е. $\dim V = n = k$

или $\ell(\{a_i\}_1^k) \subsetneqq V \Rightarrow \exists\, a_{k+1} \notin \ell(\{a_i\}_1^k)$

и Лемата $\Rightarrow$ $\{a_i\}_1^{k+1}$ са ЛНЗ с-ма

и проверка $\ell(\{a_i\}_1^{k+1}) = V \Rightarrow$

$\dim V = k+1 = n$, или

$\ell(\{a_i\}_1^{k+1}) \subsetneqq V \Rightarrow \exists\, a_{k+2} \notin \ell(\{a_i\}_1^{k+1})$

и Лемата $\Rightarrow$ $\{a_i\}_1^{k+2}$ са ЛНЗ с-ма

и т.н. след краен брой стъпки в

кр.н. пр. V достигаме до

$\{a_i\}_1^n$ – базис на V, т.е. $\dim V = n$.