Алгебра (част 2)

1. Линейни пространства

Опр: Нека F е числово поле и V е непразно множество, чиито елементи ще наричаме вектори. Във V са дефинирани следните операции:

а) събиране на вектори – на всеки два вектора a и $b \in V$ е съпоставен вектор $c = a+b \in V$, който се нарича сума на a и b.

б) умножение на вектор с число – за всеки вектор $a \in V$ и за всяко $\lambda \in F$ е в сила $\lambda a \in V$.

Ще казваме, че V е линейно пространство над числово поле F, ако са в сила и следните 8 аксиоми:

1) За $\forall a, b, c \in V$ е в сила $(a+b)+c = a+(b+c)$ (асоциативен закон на събирането)
2) За $\forall a, b \in V$ е в сила $a+b = b+a$ (комутативен закон на събирането)
3) Съществува неутрален елемент относно събирането, т.е. такъв вектор θ от V, че $a+\theta = \theta+a = a$ за $\forall a \in V$.
4) За $\forall a \in V$, $\exists$ противоположен на a вектор, такъв, че $a+(-a) = (-a)+a = \theta$ за $\forall a \in V$.
5) За $\forall a \in V$ е в сила $1.a = a.1 = a$ за $\forall a \in V$ и $1 \in F$
6) За $\forall \lambda, \mu \in F$ и за $\forall a \in V$ е изпълнено $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$
7) За $\forall \lambda \in F$ и за $\forall a, b \in V$ е изпълнено $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$
8) За $\forall \lambda, \mu \in F$ и за $\forall a \in V$ е изпълнено $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu).a$

Следствия от аксиомите:

1) Единственост на нулевия вектор

Доказателство: Нека векторите θ' и θ'' удовлетворяват аксиомата за съществуване на неутрален елемент относно събирането. Тогава имаме:

$$\left.\begin{aligned}&\theta' + \theta'' = \theta' \text{ (защото } \theta'' \text{ е нулев вектор)}\\&\theta' + \theta'' = \theta'' \text{ (защото } \theta' \text{ е нулев вектор)}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta' = \theta''$$

2) Единственост на противоположния вектор на даден вектор

Доказателство: Нека a' и a'' са противоположни вектори на a. Тогава имаме:

$$\left.\begin{aligned}&a'+a+a'' = (a'+a)+a'' = \theta + a'' = a'' \text{ и}\\&a'+a+a'' = a'+(a+a'') = a'+\theta = a'\end{aligned}\right\} \Rightarrow a' = a'' = (-a) \text{ и } (-a) \text{ е единствен}$$

3) За $\forall a \in V$ и $0 \in F$ е в сила $0.a = \theta$

Доказателство: Имаме $a + 0.a = 1a + 0a = (1+0)a = 1.a = a$, т.е. $a + 0a = a$. Прибавяйки от двете страни на това равенство вектора $(-a)$, получаваме $0.a = \theta$

4) За $\forall \lambda \in F$ е в сила $\lambda.\theta = \theta$

Доказателство: От равенството $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu).a$, полагаме $\mu = 0$ и от свойството $0.a = \theta$ получаваме $0.a = \lambda.\theta = \theta$

5) За $\forall a \in V$ и $1 \in F$ е в сила $(-1)a = -a$

Доказателство: Имаме $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1-1)a = 0.a = \theta$. Следователно векторът $(-1)a = -a$ (противоположният на a)

6) Ако $\lambda \in F$ и $a \in V$, и $\lambda a = \theta$, то или $a = 0$, или $\lambda = 0$.
Доказателство: Ако $\lambda \neq 0$, умножаваме от двете страни равенството $a\lambda = \theta$ с λ^{-1} ($\lambda . a = \theta \; \cdot \lambda^{-1} \Leftrightarrow \lambda . \lambda^{-1} . a = \lambda^{-1} \theta = \theta$) и получаваме, че $1a = 0 \Rightarrow a = 0$.

7) За $\forall a, b \in V$, уравнението $a + x = b$ има единствено решение във V, т.е. $\exists!\, x = b + (-a)$
Доказателство: Очевидно $x = b + (-a)$ е решение на уравнението. Ако x' е вектор, за който $a + x' = b$, тогава като прибавим вектора $-a$ към двете страни на равенството получаваме $\underbrace{(-a) + a}_{\theta} + x' = b + (-a) \Rightarrow \theta + x' = b + (-a) \Rightarrow x' = b + (-a)$
Оттук $x = x'$, следователно x е единствено решение.

def: Нека $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ и V е линейно пространство над F, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in F$. Казваме, че вектора $c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$ е линейна комбинация на векторите $a_1, a_2, \dots, a_k$ с коефициенти от F.

def: Нека V е линейно пространство над F и нека U е непразно подмножество на V. Казваме, че U е линейно подпространство на V (означаваме $U \leq V$), ако всяка линейна комбинация на вектори от U е вектор от U, или още, U само по себе си е линейно пространство над F относно операциите $a+b$ и λa, дефинирани във V, т.е.:

$\forall \alpha, \beta \in F$ и $\forall a, b \in U$ е в сила $\alpha a + \beta b \in U$ } действията $a+b$, λa
$\forall \lambda \in F$ и $\forall a \in U$ е в сила $\lambda a \in U$ } са затворени в U

Да се докаже, че всяко подпространство съдържа θ:
Доказателство: Нека $U \leq V$. Тогава имаме $a + (-a) \in U$, но $a + (-a) = \theta$ (аксиома 4) следователно $\theta \in U$.

def: Нека V е линейно пространство над F и нека A е непразно множество от вектори. Множеството $\ell(A)$, състоящо се от всички линейни комбинации на векторите от A с коефициенти от F ще наричаме линейна обвивка на множеството A, т.е. $\ell(A) = \{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \mid \alpha_i \in F, a_i \in A\}$
Забележка: $A \subseteq \ell(A) \leq V$ точно тогава когато $A = \ell(A)$

Тс: Ако $U_1, \dots, U_k \leq V$, тогава $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \leq V$

Тс: Ако $A \subseteq U$, а U от своя страна е $\leq V$, тогава $\ell(A)$ съвпада със $\cap U$ (сечението на всички подпространства на V), т.е. $\ell(A)$ е най-малкото линейно пространство, съдържащо векторите от A и техните линейни комбинации.

2. Линейна зависимост и линейна независимост

def: Нека V е линейно пространство над F и нека $a_1,\dots,a_n \in V$. Казваме, че системата вектори $\{a_i\}_{i=1}^n$ е линейно независима ако единствената линейна комбинация на тези вектори с коефициенти от F, даваща θ, е тривиалната, т.е. ако какъвто и $\alpha_i \in F$ да вземем е изпълнено, че $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \theta$, $\Rightarrow \alpha_i = 0$, за $i = \overline{1,n}$

$\{a_i\}_{i=1}^n$ е ЛНЗ $\Longleftrightarrow 0.a_1+0.a_2+\dots+0a_n=\theta$

Казваме, че една безкрайна система вектори е ЛНЗ система, ако всяка нейна крайна подсистема е ЛНЗ система вектори, т.е:

$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ е ЛНЗ $\Longleftrightarrow$ за $\forall n \in N$ имаме, че $\{a_i\}_{i=1}^n$ е ЛНЗ

def: Нека V е линейно пространство над F и нека $a_1,\dots,a_n \in V$. Казваме, че системата вектори $\{a_i\}_{i=1}^n$ е линейно зависима ако $\exists\, \alpha_1,\dots,\alpha_n \in F$, поне един от които коефициенти да е различен от 0, такива, че имаме $\alpha_1 a_1+\dots+\alpha_n a_n=\theta$

Основни свойства на ЛНЗ и ЛЗ системи

1) θ е линейно зависим на всеки друг вектор

2) Всеки отделен ненулев вектор е линейно независим (следва от $\lambda.a=\theta \Rightarrow \lambda=0$, следователно $a\neq 0$)

3) Всяка подсистема на ЛНЗ система вектори също е ЛНЗ система.
$\{a_i\}_{i=1}^n$ е ЛНЗ система, $k<n \Rightarrow$ подсистемата $\{a_i\}_{i=1}^k$ – ЛНЗ
Доказателство: $\{a_i\}_{i=1}^n$ е ЛНЗ система вектори и $k<n$.
Допускаме, че подсистемата $\{a_i\}_{i=1}^k$ е ЛЗ $\Rightarrow \exists \alpha_1 \in F$: б.о.о. $\alpha_1\neq 0$
Тогава имаме $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_k a_k=\theta$, $\alpha_1\neq 0$. Следователно $\alpha_1 a_1+\dots+\alpha_k a_k+0.a_{k+1}+\dots+0a_n=\theta$, но $\alpha_1\neq 0 \Rightarrow \{a_i\}_{i=1}^n$ е ЛЗ, но това е противоречие с условието $\Rightarrow \{a_i\}_{i=1}^k$ също е ЛНЗ

4) Всяка надсистема на ЛЗ система вектори също е ЛЗ система
$\{a_i\}_{i=1}^n$ е ЛЗ система, $k>n \Rightarrow$ надсистемата $\{a_i\}_{i=1}^k$ – ЛЗ

5) Ако една система от вектори съдържа θ или два пропорционални вектора, то тя е ЛЗ.
Доказателство: Нека $A=\{\theta,a_2,\dots,a_n\}$. Тогава $1.a_1+0.a_2+\dots+0a_n=\theta$ $\Rightarrow$ по дефиниция $\{\theta,a_2,\dots,a_n\}$ е ЛЗ система вектори.
Ако пък $A=\{\mu a_2,a_2,\dots,a_n\}$, $\mu\neq 0$, тогава имаме $\mu a_2-\mu a_2+0a_3+\dots+0a_n=\theta \Rightarrow$ по дефиниция $\{\mu a_2,a_2,\dots,a_n\}$ е ЛЗ система вектори.

6) Една система A от поне два вектора е ЛЗ точно тогава, когато поне един вектор от A е линейна комбинация на останалите вектори от A.
Доказателство: Нека $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ е ЛЗ система вектори и $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_n a_n=\theta$, б.о.о. $\alpha_1\neq 0$. Тогава имаме, че $a_1=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}a_2-\dots-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}a_n$. Обратно, ако $a_1=\beta_2 a_2+\dots+\beta_n a_n$, то $1a_1-\beta_2 a_2-\dots-\beta_n a_n=\theta \Rightarrow$ системата вектори A е ЛЗ.

Основна лема на линейната алгебра

ОЛЛА

Деф. Нека V е линейно пространство над F и са дадени две системи вектори от V, $A=\{a_i\}_{i=1}^{n}$ и $B=\{b_j\}_{j=1}^{k}$. Нека всеки вектор от системата B е линейна комбинация на векторите от системата A. Тогава, ако $k>n$, то векторите от системата B са линейно зависими.

(Казано по-кратко, ако повече на брой вектори се изразяват линейно чрез по-малко на брой, то повечето на брой вектори са ЛЗ).

Доказателство: Ще проведем индукция по n. Нека $n=1$, тогава $A=\{a_1\}$, тогава системата вектори B или съдържа θ или два пропорционални вектора (всички вектори от B са кратни на a_1). Според едно от свойствата за ЛЗ и ЛНЗ системи, векторите от B са линейно зависими.

Нека $n>1$, тогава по условие $\exists$ числата λ_{ij}, $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,n}$:

$$\lambda_{11}a_1+\dots+\lambda_{1,n-1}a_{n-1}+\lambda_{1n}a_n=b_1$$
$$\lambda_{21}a_1+\dots+\lambda_{2,n-1}a_{n-1}+\lambda_{2n}a_n=b_2$$
$$\vdots$$
$$\lambda_{k-1,1}a_1+\dots+\lambda_{k-1,n-1}a_{n-1}+\lambda_{k-1,n}a_n=b_{k-1}$$
$$\lambda_{k1}a_1+\dots+\lambda_{k,n-1}a_{n-1}+\lambda_{kn}a_n=b_k$$

Ако $b_k=\theta$, то системата вектори B е ЛЗ (отново от свойствата на ЛЗ и ЛНЗ системи). Нека $b_k\neq\theta$ и б.о.о. $\lambda_{kn}\neq 0$.
Елиминираме a_n от първите $k-1$ на брой равенства като умножим последното равенство с $-\frac{\lambda_{in}}{\lambda_{kn}}$ и го прибавим към i-тото равенство за всяко $i=\overline{1,k-1}$. Получаваме $k-1$ на брой равенства, в които векторите $b_i-\frac{\lambda_{in}}{\lambda_{kn}}b_k$, за $i=\overline{1,k-1}$ се изразяват като линейна комбинация на векторите $a_1,a_2,\dots,a_{n-1}$. Освен това $k-1>n-1$, следователно според индукционното предположение системата вектори $b_i-\frac{\lambda_{in}}{\lambda_{kn}}b_k$, за $i=\overline{1,k-1}$ е ЛЗ, т.е. $\exists$ числа $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{k-1}$, поне едно от които е различно от 0 (б.о.о. $\mu_1\neq 0$) и са такива, че:

$$\mu_1\left(b_1-\frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{kn}}b_k\right)+\dots+\mu_{k-1}\left(b_{k-1}-\frac{\lambda_{k-1,n}}{\lambda_{kn}}b_k\right)=\theta \Rightarrow$$

$\mu_1 b_1+\dots+\mu_{k-1}b_{k-1}+*b_k=\theta \Rightarrow$ по дефиниция системата вектори $B=\{b_j\}_{j=1}^{k}$ са ЛЗ.

5. Базис, размерност, координати

Лема 1 Нека V е линейно пространство над F и $\{a_i\}_{i=1}^{n} = a_1, \dots, a_n$ е ЛНЗ система вектори. Ако a е вектор, $a \in V$, който не принадлежи на $\ell(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то векторите $a_1, a_2, \dots, a_n, a$ продължават да бъдат ЛНЗ система вектори.

Доказателство: Нека да допуснем, че $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a\}$ е ЛЗ система вектори и нека $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n + \lambda a = \theta$, б.о.о. $\lambda_1 \neq 0$.
Ако $\lambda = 0$, тогава получаваме линейна зависимост на векторите $a_1, a_2, \dots, a_n$, което противоречи с условието.
Ако $\lambda \neq 0$, имаме $a = -\frac{\lambda_1}{\lambda} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} a_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} a_n \Rightarrow a \in \ell(a_1, a_2, \dots, a_n)$, което отново е противоречие $\Rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n, a\}$ е ЛНЗ система.

def Нека V е линейно пространство над числово поле F и B е непразно подмножество на V. Казваме, че B е базис на V над F, ако са изпълнени следните две условия:
1) B е ЛНЗ система вектори
2) за $\forall v \in V$, v е линейна комбинация на векторите от B с коефициенти от F, т.е. $V = \ell(B)$

def Казваме, че едно ненулево пространство V над F е крайномерно, ако V притежава краен базис. В противния случай, ще казваме, че V е безкрайномерно линейно пространство над F.

Тв: Нека V е ненулево линейно пространство и V е линейна обвивка на краен брой свои вектори. Тогава V е крайномерно над F, т.е. ако $V = \ell(b_1, b_2, \dots, b_k)$, то $\exists$ подсистема на системата вектори $b_1, b_2, \dots, b_k$, която е базис на V.
Доказателство: От $V \neq \{\theta\} \Rightarrow$ поне един от векторите $b_1, b_2, \dots, b_k \neq 0$, б.о.о. $b_1 \neq 0$. Ако $V = \ell(b_1) \Rightarrow b_1$ е базис на V.
Нека $V \neq \ell(b_1)$. Тогава $\exists$ поне един от векторите $b_2, \dots, b_k$, например b_2, който $\notin \ell(b_1) \Rightarrow$ според лемата 1 $\{b_1, b_2\}$ – ЛНЗ.
Ако $V = \ell(b_1, b_2)$, то b_1, b_2 – базис на V. Ако $V \neq \ell(b_1, b_2)$, то $\exists b_3 \notin \ell(b_1, b_2)$ и тогава векторите b_1, b_2, b_3 са ЛНЗ.
Така след краен брой стъпки избираме вектори $b_1, b_2, \dots, b_m$, $m \leq k$, които са ЛНЗ и $V = \ell(b_1, b_2, \dots, b_m) \Rightarrow$ тези вектори образуват базис на V и V е крайномерно ЛП над F.

Тв: Всеки два базиса на ненулево линейно пространство V над полето F съдържат равен брой вектори.
Доказателство: Нека $A = \{a_i\}_{i=1}^{n}$ и $B = \{b_j\}_{j=1}^{k}$ са два базиса на V и нека да допуснем, че $k > n$. Тогава всеки вектор от втория базис се изразява линейно чрез векторите от първия. Следователно от ОЛЛА $\Rightarrow B$ е ЛЗ система вектори – противоречие. B е ЛНЗ система вектори, защото е базис на $V \Rightarrow k \leq n$. Аналогично доказваме и за $n \leq k$, но този път спрямо системата вектори A.
Следователно $n = k$

def Нека V е ненулево линейно пространство над полето F. Размерност на крайномерното линейно пространство V наричаме броя на векторите в кой да е базис на V и бележим с $\dim V$ или $\dim_F V$, т.е. ако $\{b_1, \dots, b_n\}$ е базис на V, то $\dim V = n$. Ако V е безкрайномерно, то казваме, че $\dim V = \infty$

$\{\theta\}$ не притежава базис. По дефиниция се приема, че $\dim \{\theta\} = 0$

Th: Нека V е линейното пространство над F. Тогава:
а) V е крайномерно (n-мерно) ЛП и $\dim V = n < \infty$ точно тогава, когато във V съществуват n на брой ЛНЗ вектори и всеки n+1 на брой вектора са ЛЗ. В този случай, всеки n на брой ЛНЗ вектори от V образуват базис на V.
б) V е безкрайномерно ЛП и $\dim V = \infty$ точно тогава когато за $\forall n \in N$ във V има n на брой ЛНЗ вектора.

Доказателство:
а) ⇒ Нека V е крайномерно и $\dim V = n$. Тогава V притежава базис $a_1, a_2, \dots, a_n$, състоящ се от n на брой вектора ⇒ $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ е ЛНЗ. Нека $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ е произволна система от n на брой вектора във V, които се изразяват линейно чрез базисните. Според ОЛЛ следва, че векторите $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$ са ЛЗ.
⇐ Обратно, нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са ЛНЗ вектори от V и всеки n+1 на брой вектора са ЛЗ. Нека a е произволен вектор от V. Ако $a \notin \ell(a_1, a_2, \dots, a_n)$ според лема ↑ $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - ЛЗ система вектори ⇒ противоречие ⇒ $a \in \ell(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ⇒ $a_1, a_2, \dots, a_n$ са ЛНЗ вектори и всеки вектор a от V е тяхна линейна комбинация ⇒ тези вектори са базис на V и значи V - крайномерно и $\dim V = n$. Нека $b_1, b_2, \dots, b_n$ е произволна система ЛНЗ вектори от V. Ако ∃ вектор от V $\notin \ell(b_1, b_2, \dots, b_n)$, от лема ↑ ще получим n+1 на брой ЛЗ вектори във V - противоречие с $\dim V = n$ ⇒ $V = \ell(b_1, b_2, \dots, b_n)$ и тези вектори са базис на V.

б) ⇒ Нека V е безкрайномерно и $\dim V = \infty$. Да допуснем, че за $\forall n \in N$, всеки n на брой вектора във V са ЛЗ ⇒ $\dim V < n$ - противоречие ⇒ за $\forall n \in N$ всеки n на брой вектора във V са ЛНЗ вектори.
⇐ Ако за $\forall n \in N$, във V има n на брой ЛНЗ вектора от а) следва, че не е възможно V да е крайномерно линейно пространство, т.е V е безкрайномерно и $\dim V = \infty$

Th: Всяка линейно независима система вектори в крайномерното линейно пространство V може да се допълни до базис на V.
Доказателство: Нека $b_1, b_2, \dots, b_n$ са ЛНЗ вектори от V. Ако $V = \ell(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ⇒ тези вектори са базис на V. Ако $V \neq \ell(b_1, b_2, \dots, b_n)$, то ∃ вектор b_{n+1} от V такъв, че $b_{n+1} \notin \ell(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Според лема ↑ векторите $b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}$ са ЛНЗ. Ако $V = \ell(b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1})$ тогава те са базис на V. В противен случай, ∃ вектор b_{n+2} от V, такъв, че $b_{n+2} \notin \ell(b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1})$ и т.н. Така достигаме до система вектори $b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots, b_k$, които са ЛНЗ и $V = \ell(b_1, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots, b_k)$ ⇒ тези вектори са базис на V.

Th: Нека V е крайномерно линейно пространство над F и $W \subset V$ и $\dim V = n < \infty$, тогава W също е крайномерно ЛП и $\dim W \leq n$
Доказателство: $\dim V = \dim W = n$ точно тогава когато $W = V$
Ако $W \subset V$, нека векторите $a_1, a_2, \dots, a_n$ са базис на V ⇒ $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ е ЛНЗ и нека векторите $a_1, a_2, \dots, a_k$ са базис на W ⇒ те също са ЛНЗ ⇒ W е крайномерно ЛП и $\dim W = k$ но понеже W е подпространство на V, следва, че $\dim W < \dim V$ ⇒ $k < n$

Th: Нека V е ненулево крайномерно линейно пространство над F. Една система вектори от V е базис на V точно тогава, когато всеки вектор $w \in V$ се представя по единствен начин като линейна комбинация на самите вектори с коефициенти от F, т.е $\exists! \alpha_i,\ i=\overline{1,n}:\ w = \sum_{i=1} \alpha_i b_i$

Доказателство:

$\Rightarrow$) Нека векторите $b_1, b_2, \dots b_n$ са базис на V, $w \in V$ и допускаме, че има два различни представяния на w, т.е
$w = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$
$w = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_n b_n$
Изваждайки двете равенства, получаваме израза $(\lambda_1 - \mu_1) b_1 + (\lambda_2 - \mu_2) b_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) b_n = \theta$, но от линейната независимост на векторите $b_1, b_2, \dots, b_n$ получаваме $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, $\dots$, $\lambda_n = \mu_n$. Следователно, векторът w се записва по единствен начин като линейна комбинация на векторите $b_1, b_2, \dots, b_n$.

$\Leftarrow$ Обратно, нека векторите $b_1, b_2, \dots, b_n$ са такива, че всеки вектор $w \in V$ се представя по единствен начин като тяхна линейна комбинация. Тогава $V = l(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Нека за произволни $\lambda_i \in F$, $i = \overline{1,n}$ е изпълнено $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n = \theta$, от друга страна имаме $0 b_1 + 0 b_2 + \dots + 0 b_n = \theta$. Тъй като θ се записва по единствен начин като линейна комбинация на векторите $b_1, b_2, \dots, b_n$, то за да няма противоречие с условието, имаме $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0$ и значи тези вектори са ЛНЗ.

def Нека V е ненулево линейно пространство над F и $b_1, b_2, \dots, b_n$ е базис на V и $\dim V = n$. Нека w е вектор за V такъв, че $w = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$ за $\lambda_i \in F$, $i = \overline{1,n}$. Еднозначно определените (от базиса) числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ще наричаме координати на вектора w в базиса $b_1, b_2, \dots, b_n$.

4. Сума на подпространства

Тв: Нека V е линейно пространство над числово поле F и нека $U, W \subseteq V$. Тогава $U \cap W \subseteq V$.

Доказателство: За $\forall a, b \in U$ и $\forall \alpha, \beta \in F$ е изпълнено $\alpha a + \beta b \in U$. За $\forall a, b \in W$ и $\forall \mu, \gamma \in F$ е в сила $\mu a + \gamma b \in W$, но $\alpha a + \beta b$ също принадлежи на W, следователно $\alpha a + \beta b \in U \cap W \Rightarrow U \cap W \subseteq V$.

Сл: Сечение на произволна фамилия подпространства на дадено линейно пространство също е подпространство, т.е. $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_k \subseteq V$, за $W_i \subseteq V$, $i = \overline{1,k}$.

Тв: Нека V е линейно пространство над числово поле F и нека $U, W \subseteq V$. Тогава обединението на U и W отново е подпространство на V точно тогава, когато едното подпространство се съдържа в другото, т.е. $U \cup W \subseteq V \Leftrightarrow U \subseteq W \subseteq V$ или $W \subseteq U \subseteq V$.

Доказателство: Нека векторът $a \in U \setminus W$, а векторът $b \in W \setminus U$. Тогава $a + b = c$ и векторът $c \in V$. C е сума на двата вектора a и b, следователно $a = c - b$. Да допуснем, че $c \in U \cup W$, т.е. $c \in W$, но и $b \in W \Rightarrow c - b \in W$, но $c - b = a \Rightarrow a \in W$, а това противоречи на факта, че векторът $a \in U \setminus W$. Нека сега $b = c - a$ и нека да допуснем също, че $c \in U$, но и $a \in U \Rightarrow c - a \in U$, но $c - a = b \Rightarrow b \in U$, което е противоречие с $b \in W \setminus U$. Следователно стигаме до извода, че векторът $c \notin$ нито на W, нито на U, нито на тяхното обединение, откъдето можем да заключим, че $U \cup W \not\subseteq V$, ако не са изпълнени $U \subseteq W \subseteq V$ или $W \subseteq U \subseteq V$.

def: Нека $U_1, U_2, \dots, U_n$ са подпространства на линейното пространство V. Под сума $U_1 + U_2 + \dots + U_n$ на тези подпространства ще разбираме множеството от всички вектори v от V, които могат да се представят като сума $v = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, където $u_i \in U_i$ за $i = \overline{1,n}$.

Тв: Сборът от подпространства също е подпространство, т.е. $U + W \subseteq V$.

Доказателство: Нека $U \subseteq V$, тогава $\exists a, b \in U$ и $\exists \alpha, \beta \in F$, за които е изпълнено $\alpha a + \beta b \in U$. Нека сега $W \subseteq V$, то тогава $\exists c, d \in W$ и $\exists \gamma, \mu \in F$, за които е в сила $\gamma c + \mu d \in W$. За всеки два вектора $v_1, v_2 \in V$ (V от дясна страна е $U + W$) $\Rightarrow$ за $v_1, v_2 \in U + W$ и за $\forall \lambda, \gamma \in F$ съществуват векторите $a, b \in U$ и $c, d \in W$, такива, че $v_1 = a + c$ и $v_2 = b + d$. Тогава имаме $\lambda v_1 + \gamma v_2 = \lambda(a + c) + \gamma(b + d) = (\lambda a + \gamma b) + (\lambda c + \gamma d)$, но $\lambda a + \gamma b \in U$, а $\lambda c + \gamma d \in W$, следователно $\lambda v_1 + \gamma v_2 \in U + W$, откъдето можем да заключим, че $U + W \subseteq V$.

Тв:
а) $U_1 + U_2 + \dots + U_n$ е подпространство на V
б) $U_1 + U_2 + \dots + U_n = \ell(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n)$

Th: 4 (Сума и сечение на подпространства)

Нека V е линейно пространство и U_1 и U_2 са крайномерни подпространства на V. Тогава пространствата U_1+U_2 и $U_1 \cap U_2$ също са крайномерни и е в сила равенството:

$$\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Доказателство: Ще разгледаме два случая:

1сл) Ако $U_1 = \{\theta\}$, тогава $U_1+U_2 = U_2$. Тогава сечението на U_1 и U_2 също ще е $\{\theta\}$, за което базис не избираме

2сл) $U_1 \neq \{\theta\}$ и $U_2 \neq \{\theta\}$. Тогава нека $\dim U_1 = k$, $\dim U_2 = l$ и $\dim(U_1 \cap U_2) = r$ ($U_1 \cap U_2$ - крайномерно пространство). Нека $a_1, \dots, a_r$ е базис на сечението на U_1 и U_2. Допълваме го до базис на U_1, т.е $a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_k$ - базис на U_1 и до базис на U_2 - $a_1, \dots, a_r, c_{r+1}, \dots, c_l$. Ще докажем, че системата вектори $a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_k, c_{r+1}, \dots, c_l$ образува базис на U_1+U_2. Оттук ще следва, че U_1+U_2 е крайномерно и $\dim(U_1+U_2) = r+(k-r)+(l-r) = k+l-r = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$.
Очевидно $U_1+U_2 = \ell(a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_k, c_{r+1}, \dots, c_l)$ и остава само да докажем тяхната линейна независимост. За това нека:

$$\underbrace{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r}_{a \in U_1 \cap U_2} + \underbrace{\mu_{r+1} b_{r+1} + \dots + \mu_k b_k}_{b \in U_1} + \underbrace{\xi_{r+1} c_{r+1} + \dots + \xi_l c_l}_{c \in U_2} = \theta \qquad (1)$$

Следователно, получаваме, че $a+b+c=\theta \Rightarrow b = -a-c$, $b \in U_1$, но $-a-c \in U_2 \Rightarrow b \in U_1 \cap U_2$. Тогава b се изразява линейно чрез векторите $a_1, \dots, a_r$, т.е $\exists \alpha_i$ такива, че $b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r$, за $\alpha_i \in F$, $i=\overline{1,r}$. Като извадим от това равенство, равенството $b = \mu_{r+1} b_{r+1} + \dots + \mu_k b_k$ получаваме θ. Но векторите $a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_k$ са базис на $U_1 \Rightarrow$ те са ЛНЗ система вектори относно по дефиниция (за ЛНЗ) всички коефициенти са равни на 0. Тогава равенството (1) приема вида:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r + \xi_{r+1} c_{r+1} + \xi_l c_l = \theta.$$

Но тъй като векторите $a_1, \dots, a_r, c_{r+1}, \dots, c_l$ са базис на U_2, т.е те са линейно независими и по дефиниция коефициентите пред тях са равни на 0. Следователно системата вектори (1) е ЛНЗ. $\Rightarrow$ те е базис на U_1+U_2

5. Директна сума на подпространства

def Нека V е линейно пространство над F. Ще казваме, че V е директна сума на подпространствата си $V_1, V_2, \dots, V_s$, ако всеки вектор $v \in V$ се представя по единствен начин като сума $v_1+v_2+\dots+v_s$, където $v_i \in V_i$, за $i=\overline{1,s}$ (ще означаваме: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$)

Th: Нека V е линейно пространство над F и V_1, V_2 са подпространства на V. Тогава $V = V_1 \oplus V_2$ точно тогава, когато са изпълнени следните две условия:

1) $V_1+V_2=V$
2) $V_1\cap V_2=\{\theta\}$

Доказателство:

⇒) Нека $V=V_1\oplus V_2$. Тогава очевидно $V=V_1+V_2$. Остава да докажем, че $V_1\cap V_2=\{\theta\}$. За тази цел нека $v\in V_1\cap V_2$. Тогава имаме: $v=\underbrace{v}_{\in V_1}+\underbrace{\theta}_{\in V_2}$ и $v=\underbrace{\theta}_{\in V_1}+\underbrace{v}_{\in V_2}$, което означава, че имаме две различни представяния за вектора v. Но за да нямаме противоречие, получаваме, че $v=\theta$ и значи $V_1\cap V_2=\{\theta\}$

⇐) Обратно, нека $V=V_1+V_2$ и $V_1\cap V_2=\{\theta\}$. За да докажем, че $V=V_1\oplus V_2$ трябва да покажем, че всеки вектор $v\in V$ се представя по единствен начин като сума на два вектора, съответно от V_1 и V_2. За целта нека a, b са вектори от V_1, а c, d са вектори от V_2 и $v=a+c=b+d$. Изваждайки тези две равенства получаваме, че $a-c=b-d$, но $a-c\in V_1$, $b-d\in V_2$, следователно $a-c=b-d\in V_1\cap V_2$. Оттук получаваме, че $a-c=b-d=\theta$, т.е. $a=c$ и $b=d$. Така успяхме да забележим, че това представяне на v като сума от вектори е единствено и $V=V_1\oplus V_2$

Сл1 $V_1, V_2, \dots, V_s$ са подпространства на линейното пространство V и $V=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_s$ точно тогава когато са изпълнени следните две условия:

1) $V=V_1+V_2+\dots+V_s$
2) $V_i\cap(V_1+V_2+\dots+V_{i-1}+V_{i+1}+\dots+V_s)=\{\theta\}$ за всяко $i=\overline{1,s}$

Сл2 $V_1, V_2, \dots, V_s$ са подпространства на линейното пространство V и $V=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_s$ точно тогава, когато са изпълнени следните две условия:

1) $V=V_1+V_2+\dots+V_s$
2) θ се представя по единствен начин като сума на вектори съответно от $V_1, V_2, \dots, V_s$.

Тв: Нека V е n-мерно линейно пространство и $e_1, e_2, \dots, e_n$ е базис на V, а k е произволно число от 1 до n, т.е. $1 \leq k \leq n$. Тогава $V = V_1 \oplus V_2$, където $V_1 = \ell(e_1, \dots, e_k)$, $V_2 = \ell(e_{k+1}, \dots, e_n)$. Обратно, ако $V = V_1 \oplus V_2$ и $e_1, \dots, e_k$, $e_{k+1}, \dots, e_n$ са базиси съответно на V_1 и V_2, то $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ е базис на V.

Доказателство: Очевидно $V = V_1 + V_2$. От линейната независимост на векторите $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$. Действително, ако $v \in V_1 \cap V_2$, то v се представя като $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = \alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$, откъдето изваждайки двете равенства, получаваме $\theta \Rightarrow \alpha_i = 0 \Rightarrow v = \theta$.

Тв: Нека V е крайномерно линейно пространство и W е подпространство на V. Тогава съществува подпространство U на V, такова, че $V = W \oplus U$.

Доказателство: Нека $e_1, e_2, \dots, e_k$ е базис на $W \Rightarrow W = \ell(e_1, \dots, e_k)$. Допълваме до базис на V — $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ $(n \geq k)$. Тогава $U = \ell(e_{k+1}, \dots, e_n)$ и съгласно горното твърдение $V = W \oplus U$.

Тв: Всяко ненулево крайномерно линейно пространство V е директна сума на едномерни подпространства.

Доказателство: Нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ е базис на V, тогава $V = \ell(e_1) \oplus \ell(e_2) \oplus \dots \oplus \ell(e_n)$

6. Ранг на система вектори. Ранг на матрица

Ранг на матрица – по дефиниция

Нека $A \in F_{m\times n}$ и нека $1 \le k \le \min(m,n)$. Ако фиксираме произволни k реда и k стълба на матрицата A, елементите, които стоят в пресечните им точки образуват квадратна матрица от k-ти ред. Детерминантата на всяка такава матрица ще наричаме минор на A от ред k. С други думи, минор на A от ред k е всяка детерминанта от вида:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \dots & a_{i_1j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & \dots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}, \quad \text{където} \quad \begin{matrix} 1 \le i_1 < i_2 \dots < i_k \le m \\ 1 \le j_1 < j_2 \dots < j_k \le n \end{matrix}$$

def Нека $A \in F_{m\times n}$. Казваме, че матрицата A има ранг r, и означаваме $r(A)=r$, ако A притежава ненулев минор от ред r и всички минори от по-висок ред са равни на 0. По дефиниция приемаме, че $r(0)=0$.

Забележка: Ако всички минори от $r+1$ ред са равни на 0, то всички минори от ред, по-голям от $r+1$ също са равни на 0.

Забележка: Ако $A \in F_{m\times n}$ и $r = r(A)$, то $r(A^t) = r(A) = r$, като следствие от теоремата за транспонирана детерминанта т.е. $\det B = \det B^t$, за всеки минор B на A.

def Нека V е линейно пространство над полето F и $a_1, a_2, \dots, a_k$ е система вектори от V. Казваме, че системата вектори $\{a_i\}_{i=1}^{k}$ има ранг r (и ще пишем $r(a_1, a_2, \dots, a_k) = r$), ако съществуват r на брой линейно независими вектора от тази система и всеки друг вектор е тяхна линейна комбинация, т.е. б.о.о. векторите $a_1, \dots, a_j$ са ЛНЗ и $a_j \in \ell(a_1, \dots, a_r)$ за $j = r+1, \dots, k$. Казваме още, че сме избрали една максимална линейно независима подсистема (МЛНЗП) $a_1, \dots, a_r$ на $a_1, \dots, a_k$.

Забележка $r(a_1, \dots, a_k) = r = r\underbrace{(a_1, \dots, a_r)}_{ЛНЗ} = \dim \ell(a_1, \dots, a_k)$

Връзка между ранг на матрица и ранг на система вектори

Нека $A \in F_{m\times n}$. Ще означим с $a_1, a_2, \dots, a_m$ вектор редовете на матрицата A, т.е. $a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $a_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$ ... $a_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$. Можем да разглеждаме $a_1, a_2, \dots, a_m$ като вектори от линейното пространство F^n. Аналогично, вектор стълбовете $b_1, b_2, \dots, b_n$ на A ще разглеждаме като вектори на F^m.

Имаме:

$$\begin{array}{cccc} \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \to a_1 \\ \to a_2 \\ \\ \to a_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \quad \uparrow & \quad\quad \uparrow \\ b_1 & \quad b_2 & \quad\quad b_n \end{matrix} & \end{array}$$

! 1) рангът на системата вектори $\{a_i\}_{i=1}^{k}$ (от def) е равен на максималния брой ЛНЗ вектори в тази система
2) $r(a_1, a_2, \dots, a_k) = \dim \ell(a_1, a_2, \dots, a_k)$

Th: (За ранга на матрица)
В сила са следните равенства $r(a_1, a_2, \dots, a_m) = r(b_1, b_2, \dots, b_n) = r(A)$ (ранга на матрицата A)

Доказателство: Тъй като $r(A) = r(A^t) = r$ е достатъчно да проверим само равенството $r(b_1, b_2, \dots, b_n) = r(A)$. Ако $A = 0$, твърдението е очевидно.
Нека $r(A) = r \ge 1$. Без ограничение на общността можем да считаме, че минорът от ред r, стоящ в горния ляв ъгъл на A е ненулев. Нека

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \quad \text{и } \det D \neq 0. \ (\det D = \Delta)$$

Тогава първите r стълба на A са линейно независими т.е. $b_1, b_2, \dots, b_r$ са ЛНЗ. Действително, ако съществува линейна зависимост между векторите стълбове $b_1, b_2, \dots, b_r$ то същата зависимост ще съществува и между стълбовете на матрицата $D \Rightarrow \det D = 0$, а това е противоречие с $\det D \neq 0 \Rightarrow b_1, b_2, \dots, b_r$ са ЛНЗ система вектори.
За да завършим доказателството на теоремата трябва да докажем, че всеки стълб b_l на A, $r < l \le n$ е линейна комбинация на стълбовете $b_1, \dots, b_r$. За целта нека $i = \overline{1,m}$. Разглеждаме квадратната матрица D_i от $r+1$ ред, която се получава, като се получава като „заградим" матрицата D с i-тия ред и l-тия стълб на A:

$$D_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{il} \end{pmatrix} (r+1) \text{ ред}$$

Ако $i \le r$ D_i има два равни реда $\Rightarrow \det D_i = 0$.
Ако $i > r$, то $\det D_i$ е минор от $(r+1)$ ред на $A \Rightarrow \det D_i = 0$
Да означим с $A_1, \dots, A_r, A_l$ адюнгираните количества на елементите съответно $a_{i1}, \dots, a_{ir}, a_{il}$. Очевидно $A_l = \Delta$. Развиваме $\det D_i$ по $(r+1)$ ред и получаваме $a_{i1}A_1 + \dots + a_{ir}A_r + a_{il}\Delta = 0$, но $\Delta \neq 0 \Rightarrow a_{il} = -\frac{A_1}{\Delta}a_{i1} - \dots - \frac{A_r}{\Delta}a_{ir}$, за $\forall i = \overline{1,m}$. Следователно,
адюнгираните количества A_j, $j = \overline{1,r}$ не зависят от i:

$$A_j = (-1)^{(r+1)+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ \vdots & & & & & & \\ a_{r1} & \dots & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \end{vmatrix}$$

Така всеки елемент a_{il} намиращ се на l-тия стълб b_l е линейна комбинация на съответните елементи на стълбовете $b_1, \dots, b_r$ с едни и същи коефициенти за $\forall i = \overline{1,m}$. Следователно b_l е линейна комбинация на $b_1, \dots, b_r$ със същите коефициенти. Тогава $r(A) = r(a_1, \dots, a_m) = r(b_1, \dots, b_n) = r = r(A^t)$

Сл: Ако A е квадратна матрица от n-ти ред, то $\det A = 0$ тогава и само тогава, когато редовете/стълбовете на A са ЛЗ.
Доказателство: Нека $r(A) < n \overset{Th}{\Rightarrow} \exists$ вектор ред, който е линейна комбинация на останалите редове $\Rightarrow$ (от 1от свойствата на det) $\Rightarrow \det A = 0$. Обратно, ако $\det A = 0 \Rightarrow \nexists$ ненулев минор от ред n $\Rightarrow r < n$.

8. Системи линейни уравнения:

Нека е дадена произволна система линейни уравнения с m на брой уравнения и n на брой неизвестни.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

С A означаваме матрицата на тази система, а с $\bar{A}$ - разширената ѝ матрица. Системата (1) е:
- несъвместима, ако няма решение, т.е. $0x_1 + \dots + 0x_n = c \neq 0$
- съвместима и определена, ако $\exists!$ решение
- съвместима и неопределена, ако $\exists$ безброй решения

Th: (Теорема на Руше – критерий за съвместимост на СЛУ). Една система линейни уравнения е съвместима точно тогава, когато $r(A) = r(\bar{A})$

Доказателство: С $b_1, \dots, b_n$ означаваме вектор стълбовете на матрицата A, а с b - стълба от свободните членове. Тогава имаме, че $r(b_1, \dots, b_n) = r(A) \leq r(b_1, \dots, b_n, b) = r(\bar{A})$. При това $r(A) = r(\bar{A})$ точно тогава, когато b е линейна комбинация на $b_1, \dots, b_n$, т.е. $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ такива, че $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = b$, а това от своя страна е еквивалентно на факта, че n-орката $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ е решение на системата.

Нека системата (1) е съвместима и $r(A) = r(\bar{A}) = r$. След евентуално разместване на уравненията и преномериране на неизвестните, можем да считаме, че минорът в горния ляв ъгъл на A от ред r е ненулев. Тогава първите r реда на $\bar{A}$ са ЛНЗ и всеки друг ред е тяхна линейна комбинация $\Rightarrow$ всяко решение на първите r реда от уравнения на системата е решение и на останалите. Тогава (1) е еквивалентна на:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \quad (2)$$

1) Ако $r = n$, то det на $(2) \neq 0$ и системата (2) има единствено решение, което се получава по формулите на Крамер, т.е. $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \Rightarrow$ (2) е съвместима и определена.
2) Ако $r < n$, записваме системата (2) във вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (3)$$

Неизвестните $x_{r+1}, \dots, x_n$ ще наричаме свободни неизвестни. Ако ~~[illegible]~~ дадем на свободните неизвестни произволни стойности $k_{r+1}, \dots, k_n$, получаваме система от r уравнения с r неизвестни $(x_1, \dots, x_r)$, чиято $\det \neq 0$. Следователно, тя има единствено решение $k_1, \dots, k_r$, което се получава от формулите на Крамер. Следователно n-орката $c = (k_1, \dots, k_r, k_{r+1}, \dots, k_n)$ е решение на системата (3). $\Rightarrow$ и на системата (1)

Извод: Една система линейни уравнения е съвместима и определена ако $r(A) = r(\bar{A}) = r = n$ (n - брой на неизвестните) и единственото и решение се намира по формулите на Крамер.

Една система линейни уравнения е съвместима и неопределена, ако $r(A) = r(\bar{A}) = r < n$ (n - брой на неизвестните) и решенията са резултат от заместване на свободните неизвестни с произволни стойности и пресмятане на свързаните неизвестни чрез формули на Крамер, за да се достигне до решенията на система 1)

8. Хомогенни системи линейни уравнения

ХСЛУ: Нека е дадена следната система линейни уравнения

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (1')$$

Тази ХСЛУ е винаги съвместима, защото притежава нулевото решение. При това, ако $m < n$, то $r(A) = r(\bar{A}) \le m < n$ и тогава системата има безброй много решения. В частност ако $m = n = r(A)$, тогава $\det A \neq 0$ следователно, системата ще има единствено решение и то ще е нулевото.

Тв: Нека матрицата A на системата $(1')$ е квадратна, т.е $m = n$. В този случай системата $(1')$ ще има ненулево решение точно тогава, когато $\det A = 0$.

Тв: Множеството от решения на една хомогенна система линейни уравнения, е подпространство на линейното пространство F^n.

Доказателство: Множеството от решения ще означим с U. Нека $V = F^n$ и нека:

$$\left.\begin{aligned} &\forall u = (u_1, \dots, u_n) \text{ е решение на } (1') \\ &\forall w = (w_1, \dots, w_n) \text{ е решение на } (1') \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad (*)$$

$\forall \alpha, \beta \in F$

$\Rightarrow$ щом u, w са решения на $(1')$, тогава имаме съответно

$$\left.\begin{aligned} a_{11}u_1 + \dots + a_{m}u_n &= 0 \\ a_{11}w_1 + \dots + a_{m}w_n &= 0 \end{aligned}\right\} (**)$$

От $(*)$ и $(**)$ следва, че $\alpha u + \beta w$: $a_{11}(\alpha u_1 + \beta w_1) + \dots + a_m(\alpha u_n + \beta w_n) = (a_{11}u_1 + \dots + a_m u_n).\alpha + (a_{11}w_1 + \dots + a_m w_n).\beta =$ от $(**) \Rightarrow$
$= \alpha.0 + \beta.0 = 0 \Rightarrow (\alpha u + \beta w)$ е решение на $(1') \Rightarrow U \subseteq V = F^n$

def Всеки базис на пространството от решения на една ХСЛУ (ако то е $\neq 0$) ще наричаме фундаментална система решения (ФСР) на тази ХСЛУ. Тоест всяка фундаментална система решения се състои от линейно независими вектори от F^n, които са решения на ХСЛУ и всяко друго решение е тяхна линейна комбинация.

Th Нека U е пространството от решения на една ХСЛУ. Тогава ако $r(A) = r(\bar{A}) = r$, то $\dim U = n-r$, т.е. всяка ФСР се състои от $n-r$ на брой решения.

Доказателство: Ако $r(A) = 0$, т.е. $A = 0$, то $U = F^n$ и $\dim U = n$.
Нека $A \neq 0$ и първите r реда на A са линейно независими. Записваме системата (1') във вида:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{array} \quad (3'), \text{ където } \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Давайки на свободните неизвестни $x_{r+1}, \dots, x_n$ последователно стойности $(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0) \dots (0,0,\dots,1)$, всеки един от тези случаи намираме еднозначно определени стойности за неизвестните $x_1, \dots, x_r$. Така получаваме $n-r$ на брой решения на ХСЛУ (3'):

$$\begin{array}{l} c_1 = (k_{11}, \dots, k_{1r}, 1, 0, \dots, 0) \\ c_2 = (k_{21}, \dots, k_{2r}, 0, 1, \dots, 0) \\ \vdots \\ c_{n-r} = (k_{n-r,1} \dots k_{n-r,r}, 0, 0, \dots, 1) \end{array} \quad (4)$$

Тогава, ясно е, че $\{c_i\}_{i=1}^{n-r}$ е ЛНЗ система вектори, защото матрицата C, съставена от тези вектори, има ранг равен на $n-r$. Остава да проверим, че решенията на (3') е линейна комбинация на вектори от (4). Нека $c = (k_1, \dots, k_r, k_{r+1}, \dots, k_n)$ е произволно решение на (3'). Векторът $c' = k_{r+1}c_1 + \dots + k_n c_{n-r}$ също е решение на (3') и $c = (k_1, \dots, k_r, k_{r+1}, \dots, k_n) \Rightarrow c = c'$ и значи c е линейна комбинация на векторите $c_1, \dots, c_{n-r}$.

Th Всяко подпространство W на линейното пространство $V = F^n$ е пространство от решенията на подходяща хомогенна система линейни уравнения с n неизвестни.

Доказателство: Ще разгледаме 3 случая:

1сл) $r = n$, т.е. $\dim W = n-r = 0$ и значи $W = \{0\}$, то можем да вземем ХСЛУ, чиято матрица съвпада с E_n от ред n.

2сл) $r = 0$, т.е. $\dim W = n-r = n$ и значи $W = V = F^n$, то можем да вземем система с едно уравнение и нулеви коефициенти пред $x_1, \dots, x_n$.

3сл) $0 < r < n$. Нека векторите $b_1 = (b_{11}, \dots, b_{1n}) \dots b_{n-r}(b_{n-r,1} \dots b_{n-r,n})$ са базис на W. Да разгледаме системата

$$\begin{array}{l} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{n-r,1}x_1 + \dots + b_{n-r,n}x_n = 0 \end{array} \quad (5)$$

Тъй като $\{b_i\}_{i=1}^{n-r}$ – ЛНЗ, $r(\{b_i\}_{i=1}^{n-r}) = n-r$. Тогава пространството U от решенията ѝ е с размерност $\dim U = n-(n-r) = r$. Нека векторите $a_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, a_r = (a_{r1}, \dots, a_{rn})$ са базис на U, т.е. ФСР на (5).
Да разгледаме системата:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{array} \quad (6)$$

Рангът на матрицата на тази система $= r \Rightarrow$ пространството W' от решенията ѝ има размерност $n-r$. Ще докажем, че $W \subseteq W'$. Наистина $a_1, \dots, a_r$ – решения на (5) (всяко от тях удовлетворява първото ѝ уравнение). Но това означава, че векторът b_1 е решение на системата (6), т.е. $b_1 \in W'$. Аналогично $b_2, \dots, b_{n-r} \in W'$, но векторите $b_1, \dots, b_{n-r}$ са базис на W, то $W \subseteq W'$. Сега от $\dim W = n-r = \dim W'$ следва, че $W = W'$. Следователно пространството от решения на ХСЛУ (6) е точно W.

9. Линейни изображения

def: Нека V и V' са линейни пространства над числово поле F и $\varphi: V \to V'$ е изображение от V към V'. Казваме, че φ е линейно изображение, ако образът на произволна линейна комбинация от вектори от V е същата линейна комбинация на образите им във V', т.е. ако $a_1, \dots, a_k \in V$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$ следва, че $\varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \dots + \lambda_k \varphi(a_k)$, или още:

$$\varphi: \begin{cases} V \to V' \\ a \to \varphi(a) \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \lambda_1 \varphi(a_1) + \dots + \lambda_k \varphi(a_k)$$

$\varphi \in Hom(V, V')$

$Hom(V,V')$ е множеството от всички линейни изображения от V към V'. В частност, ако $V \equiv V'$, тогава φ - линеен оператор и вместо $Hom(V,V')$ пишем $Hom(V)$

Св: Ако φ е линейно изображение ($\varphi \in Hom(V,V')$) то в сила са:
1) За $\forall a, b \in V \Rightarrow \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
2) За $\forall a \in V$ и $\forall \lambda \in F \Rightarrow \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$

И обратно, ако 1) и 2) са дадени то от тях следва, че φ е линейно изображение

Св: Нека φ е линейно изображение ($\varphi \in Hom(V,V')$), тогава е вярно, че:
1) $\varphi(\theta) = \theta$
2) за $\forall$ вектор $a \in V$ е в сила $\varphi(-a) = \underline{-\varphi(a)}$ противоположният вектор на $\varphi(a)$ във V'.
3) Ако системата вектори $a_1, \dots, a_k$ са линейно зависими вектори от V, то $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)$ също са линейно зависими вектори във V'.

Доказателство: Векторите $a_1, \dots a_k$ са ЛЗ от $V \Rightarrow$ по дефиниция за линейна независимост имаме, че $\exists \alpha_1, \dots \alpha_k$ такива, че $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = \theta$ като б.о.о. $\alpha_1 \neq 0$. Действаме с φ.
$\varphi(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k) = \varphi(\theta) = \theta$, но $\varphi(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k)$ е равно на $\alpha_1 \varphi(a_1) + \dots + \alpha_k \varphi(a_k)$ следователно $\alpha_1 \varphi(a_1) + \dots + \alpha_k \varphi(a_k) = \theta$, но $\alpha_1 \neq 0$ откъдето по def: $\varphi(a_1) \dots \varphi(a_k)$ са ЛЗ система вектори

Примери:
1) O (нулевото изображение): $O = \begin{cases} V \to V' \\ a \to \theta \end{cases}$, за $\forall a \in V$ е вярно $O(a) \to \theta$
2) $id_V = \mathcal{E}$ (тъждественото изображение, идентитет): $\mathcal{E} = \begin{cases} V \to V \\ a \to \varphi(a) = a \end{cases}$ за $\forall a \in V$ е вярно $\mathcal{E}(a) = a$.
3) $V = M_n(F) \Rightarrow \varphi: \begin{cases} V \to V \\ A \to A^t \end{cases}$, $\varphi \in Hom\, V$
4) Нека $m \geq n$, $m, n \in N$. Изображението $\varphi: F^m \to F^n$:
$$\varphi: \begin{cases} F^m \to F^n \\ \underbrace{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_m)}_{\in F^m} \to \underbrace{\varphi(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)}_{\in F^n} \end{cases}$$
5) Нека $m < n$, $m, n \in N$. Изображението $\varphi: F^m \to F^n$:
$$\varphi: \begin{cases} F^m \to F^n \\ \underbrace{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)}_{\in F^m} \to \underbrace{\varphi(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, 0 \dots 0)}_{\in F^n} \end{cases}$$

Th: Нека V и V' са линейни пространства над числово поле F и $\dim V = n < \infty$. Тогава за всеки базис $e_1, \dots, e_n$ на V и произволни n вектора $v_1, \dots, v_n \in V'$, съществува единствено линейно изображение $\varphi: V \to V'$, такова, че $\varphi(e_i) = v_i$, за $i = \overline{1,n}$.

Доказателство: Дефинираме изображението $\varphi: V \to V'$ по следния начин: ако $a = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ е произволен вектор от V, то $\varphi(a) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Изображението $\varphi(a)$ е коректно дефинирано, тъй като векторът $\varphi(a) \in V'$ се определя еднозначно от вектора $a \in V$. Очевидно $\varphi(e_i) = v_i$, $i = \overline{1,n}$. Проверката, че изображението φ е линейно е директна:
$\varphi(a) = \varphi(\sum_1^n \lambda_i e_i) = \sum_1^n \lambda_i \varphi(e_i) = \sum_1^n \lambda_i v_i$

Нека да допуснем, че $\exists \varphi, \psi: V \to V'$ са линейни изображения такива, че $\varphi(e_i) = v_i = \psi(e_i)$, за $i = \overline{1,n}$. От линейността на φ и ψ следва, че ако $a = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ е произволен вектор от V, то $\varphi(a) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_1 \psi(e_1) + \dots + \lambda_n \psi(e_n) = \psi(a)$. Следователно, $\varphi = \psi$

def: Нека V и V' са линейни пространства над F и $\varphi: V \to V'$ е изображение. Казваме, че φ е изоморфизъм на линейното пространство, ако:

1) φ е линейно изображение
2) φ е биекция

Ще казваме още, че пространствата V и V' са изоморфни и ще означаваме $V \cong V'$, $V \overset{\varphi}{\cong} V'$

C. Ако $\begin{array}{l} \varphi: V \to V' \\ a \to \varphi(a) = b \end{array}$ е изоморфизъм, то $\begin{array}{l} \varphi^{-1}: V' \to V \\ b \to \varphi^{-1}(b) = a \end{array}$ също е изоморфизъм

Th: При изоморфизъм, образ на линейно независима система вектори, също е линейно независима система

Доказателство: Нека $\varphi: V \to V'$ е изоморфизъм и векторите $e_1, \dots, e_n \in V$ са линейно независими. Нека $\lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = \theta \in V'$. Прилагаме φ^{-1} към това равенство получаваме $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m = \theta \in V$. От това, че векторите $e_1, \dots, e_n$ са ЛНЗ следва, че $\lambda_1, \dots, \lambda_m = 0$ и значи векторите $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$ са ЛНЗ

Th: Две крайномерни линейни пространства V и V' над F са изоморфни тогава, когато имат еднаква размерност

Доказателство: Нека $\varphi: V \to V'$ е изоморфизъм, $\dim V = n$ и векторите $e_1, \dots, e_n$ - базис на V. Съгласно предишното твърдение векторите $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ са ЛНЗ. Нека b е произволен вектор от V' и $a \in V$, за който $\varphi(a) = b$. Ако $a = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, то $b = \varphi(a) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n)$. Така $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ са ЛНЗ вектори и всеки вектор $\in V'$ е тяхна линейна комбинация $\Rightarrow \varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$ - базис на V', откъдето $\dim V' = n = \dim V$

Обратно, нека $\dim V = \dim V' = n$, $e_1, \dots, e_n$ и $e_1', \dots, e_n'$ са базиси съответно на V и V', то дефинираме $\varphi: V \to V'$ такова, че $\varphi(e_i) = e_i'$, за $i = \overline{1,n}$. Ще докажем, че φ е биекция, откъдето $V \cong V'$. Нека $b = \lambda_1 e_1' + \dots + \lambda_n e_n' \in V'$. Векторът $a = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ е такъв, че $\varphi(a) = \lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = \lambda_1 e_1' + \dots + \lambda_n e_n' = b$. Така φ е сюрекция. (1)

Нека $a = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$ и $c = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$ са два различни вектора от V. Тогава за поне едно i, $1 \leq i \leq n$ имаме $\mu_i \neq \beta_i$, т.е. $\left.\begin{array}{l} \varphi(a) = \mu_1 \varphi(e_1) + \dots + \mu_n \varphi(e_n) = \mu_1 e_1' + \dots + \mu_n e_n' \\ \varphi(c) = \beta_1 \varphi(e_1) + \dots + \beta_n \varphi(e_n) = \beta_1 e_1' + \dots + \beta_n e_n' \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(c) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi$ е инекция (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow \varphi$ е биекция

10 Матрица на линейно изображение / линеен оператор

Нека V и V' са крайномерни линейни пространства и $\varphi \in Hom(V, V')$. Нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $f_1, f_2, \dots, f_m$ са базиси съответно на линейните пространства V и V' над F. Образите на векторите $e_1, e_2, \dots, e_n$ под действието на φ са линейни комбинации на векторите $f_1, f_2, \dots, f_m$. Тогава нека разлагаме:

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m \\
\varphi(e_2) &= a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{m2}f_m \\
&\vdots \\
\varphi(e_n) &= a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m
\end{aligned}$$

Образуваме матрицата:

$$\varphi \to A_{e \to f} = A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \in F_{m\times n}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & & \varphi(e_n) \end{matrix}$$

def Матрицата $A_\varphi \in F_{m\times n}$ се нарича матрица на линейното изображение във фиксираните бази $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $f_1, f_2, \dots, f_m$ съответно на линейните пространства V и V' над F.

Нека φ е линеен оператор, действащ във крайномерното линейно пространство V над F и $e_1, \dots, e_n$ е базис на V. Тогава нека разлагаме:

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{m1}e_n \\
\varphi(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{m2}e_n \\
&\vdots \\
\varphi(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{mn}e_n
\end{aligned}$$

Образуваме матрицата:

$$\varphi \to A_e = A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \in M_n(F)$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & & \varphi(e_n) \end{matrix}$$

def Квадратната матрица A_φ е матрица на линейния оператор φ в базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ и се образува като по стълбовете се поставят координатите на образите на $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ на базисните вектори $e_1, e_2, \dots, e_n$

Нека u е произволен вектор от U, такъв, че $u = z_1e_1 + \dots + z_ne_n$ и $\varphi(u) = w = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$. Тогава координатите на $\varphi(u) = w$ във фиксиран базис $e_1, \dots, e_n$ на U са резултат от умножението на координатите на u и матрицата A на оператора φ в дадения базис, т.е. $\varphi(u) = w_t = A u_e$

$$\varphi \in Hom(U, U') \Leftrightarrow A_{e \to f} \Rightarrow \varphi(u) = A_{e \to f} . u_e = u'_f \quad (\text{Ако } U \neq U')$$

Т6: В сила е матричното равенство $w = A.u$ $(w = \varphi(u))$

Доказателство: Имаме:

$$\varphi(u) = \varphi(z_1e_1 + z_2e_2 + \dots + z_ne_n) = z_1\varphi(e_1) + z_2\varphi(e_2) + \dots + z_n\varphi(e_n) =$$
$$= z_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_1 + \dots + a_{n1}e_n) + z_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n) + \dots +$$
$$+ z_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n) =$$
$$= (a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n}z_n)e_1 + (a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \dots + a_{2n}z_n)e_2 + \dots +$$
$$+ (a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \dots + a_{nn}z_n)e_n = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n \Leftrightarrow$$

$$w^t = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A . \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = A . u^t$$