Лекция 6 03.11.2021г

# Матрични уравнения

I) $AX = B$

$X = A^{-1}B$

II) $XA = B$

$X = BA^{-1}$

III) $AXB = C$

$X = A^{-1}CB^{-1}$

IV) $? A^{-1} \Leftrightarrow AX = E \Rightarrow X = A^{-1}$

## Матричен вид на елем. Гаус. преобр.

$L_i' = \lambda L_i$

умножаваме отляво

$S_i' = \lambda S_i$

умножаваме отдясно

$$A_i(\lambda) := E + (\lambda - 1)E_{ii} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & 0 & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \;\; 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$A_i(\lambda)A = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & 0 \\ & & \ddots & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} & 0 \dots 0 & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \;\; 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boxed{a_{i1}} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$L_i' = L_i + \lambda L_j$ $\qquad\qquad$ $S_i' = S_i + \lambda S_j$

$$B_{ij}(\lambda) = E + \lambda E_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ j \\ i \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & i & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$B_{ij}(\lambda) A$ $\qquad\qquad$ $A B_{ij}(\lambda)$

$L_i' = L_j , L_j' = L_i$ $\qquad\qquad$ $S_i' = S_j , S_j' = S_i$

$$C_{ij} = E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

$C_{ij} A$ $\qquad\qquad$ $A C_{ij}$

$$C_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots 1 & & & & 0 \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & 1 \ddots 1 & \vdots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & 1 \ddots 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\underbrace{\ldots B_{31}(-2) B_{21}(3) C_{13}}_{A^{-1}} \,\Big|\, A X = B$$

$$X = A^{-1} B$$

I) $AX = B$

$(A|B) \sim \ldots \sim \left(\begin{smallmatrix} * & \ast \\ 0 & \ast \end{smallmatrix} \middle| \ldots \right) \sim \ldots \sim (E|X)$

$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists!$ реш $\quad X = A^{-1}B$

II) $XA = B$

$\left(\frac{A}{B}\right) \sim \ldots \sim \left(\frac{E}{X}\right)$

$(XA)^t = B^t$

$A^t X^t = B^t \Rightarrow X^t$

$X = (X^t)^t$

$(A^t | B^t) \sim \ldots \sim (E | X^t), \quad X = (X^t)^t$

III) $AXB = C$

III$_1$) $AX = Y$

$(A|Y) \sim \ldots \sim (E|X)$

$YB = C$

$(B^t | C^t) \sim \ldots \sim (E | Y^t)$

$\Downarrow \ (Y^t)^t = Y$

III$_2$) $XB = Z$

$AZ = C$

$(A|C) \sim \ldots (E|Z)$

$(B^t | Z^t) \sim \ldots \sim (E | X^t)$

$X = (X^t)^t$

IV) $? A^{-1} \Leftrightarrow AX = E, \quad (A|E) \sim \ldots \sim (E | A^{-1})$

$X = A^{-1}$

Пример: $X\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&-1\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&-1\\4&2&3\\9&6&2\end{pmatrix}$, $XA=B$

$$(A^t|B^t)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&3&2&4&9\\1&1&2&2&2&6\\1&-1&1&-1&3&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&2&2&6\\2&1&3&2&4&9\\1&-1&1&-1&3&2\end{array}\right)\sim$$

$L_2'=L_2-2L_1$

$L_3'=L_3-L_1$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&2&2&6\\0&-1&-1&-2&0&-3\\0&-2&-1&-3&1&-4\end{array}\right)\underset{L_3'=L_3-2L_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&2&2&6\\0&1&1&2&0&3\\0&0&1&1&1&2\end{array}\right)\sim$$

$\det A^t=1\Rightarrow\exists!$

$L_1'=L_1-2L_3$

$L_2'=L_2-L_3$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&2\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&1&1&1&2\end{array}\right)\underset{L_1'=L_1-L_2}{\sim}\left(E\left|\begin{array}{ccc}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&2\end{array}\right.\right),\quad X^t=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$X=(X^t)^t=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

Проверка:

$$\underset{X}{\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}}\underset{A}{\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&-1\\3&2&1\end{pmatrix}}=\underset{B}{\begin{pmatrix}2&2&-1\\4&2&3\\9&6&2\end{pmatrix}}$$

# Линейни пространства

ЛП – действ. св-ва, смис

Нека $F$ е (числово) поле, $\alpha, \beta, \gamma, 0, 1$,
Нека $V$ е непразно множ. от елем.
което наричаме вектори $\to a, b, c, d$
Дефиниране опер. събиране на
вектори, т.е. $\forall a, b \in V \to c = a + b \in V$
като са изпълнени следните 4 аксиоми,

A1) асоциативен закон на "+" на вр.:
$\forall a, b, c \in V : (a+b)+c = a+(b+c)$

A2) $\exists$ нулев вектор $\theta \in V : a+\theta = \theta + a = a$ $\forall a \in V$

A3) $\forall a \in V$, $\exists$ противоположен на вр. $a$ $(-a) \in V$:

$$a + (-a) = (-a) + a = \theta$$

A4) комутат. закон на "+" на вр.:
$a + b = b + a, \quad \forall a, b \in V.$

Дефинираме операция умножение на вектор по скалар (вр с число):

$\forall a \in V, \forall \alpha \in F \Rightarrow b = \alpha a \in V$

като са изпълнени още 4 аксиоми

A5) $1 \in F, \forall a \in V \Rightarrow 1a = a$

A6) $\forall a, b \in V, \forall \lambda \in F \Rightarrow \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

A7) $\forall \alpha, \mu \in F \Rightarrow \alpha a + \mu a = (\alpha \underset{F}{+} \mu) a$
$\forall a \in V$

A8) $\forall \alpha, \mu \in F \Rightarrow \alpha(\mu a) = (\alpha \underset{F}{\cdot} \mu) a$
$\forall a \in V$

Деф. $F$-ч.п., $V$, $a+b$, $A1 \div A4$, $\alpha a$, $A5 \div A8$

Тогава $V$ наричаме линейно пр-во над ч.п. $F$.

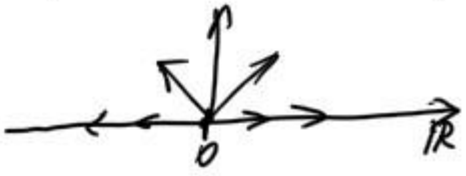
Примери: 1) $V = F_{m \times n}$, $A+B$, $\alpha A$ л.пр. над ч.п. $F$

1') $V = F_{n \times n} = M_n(F)$ е л.пр. над $F$

2) $F^n = \{ a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in F \}$

е л. п. над $F$, $\theta = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{n \text{ позиции}})$

3) а) $V = \mathbb{R}$ л. пр. над $F = \mathbb{R}$




б) $V = \mathbb{R}^2$ л. пр. над $\mathbb{R} = F$

в) $V = \mathbb{R}^3$ л. пр. над $\mathbb{R}$

..., г) $V = \mathbb{R}^n$ е л. простр. над $F = \mathbb{R}$

4) $F[x] = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \mid a_i \in F, n \in \mathbb{N} \}$

$f+g$, $\alpha f$ $\quad F[x]$ е л. пр. над $F$

4') $F^{n+1}[x] = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \mid a_i \in F \}$

$F^{n+1}[x]$ е л. пр. над $F$

## Следствия от аксиоматиката:

1) $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ е еднозначно определен вр в $V$, асоц. з-н за "+" и индукция

$\forall a_i \in V, i = \overline{1,k}$

2) $\theta$ е единствен

<u>Д-во</u>: Доп. противното, т.е. $\theta'$ и $\theta''$ са два нулеви в-ра, тогава

$$\left(\left(\begin{array}{l} \theta'_a + \theta'' = \theta' = a \\ \theta' + \theta''_b = \theta'' = b \end{array}\right.\right. \Rightarrow \theta' = \theta'' = \theta$$

3) Противоположният на в-ра $a$ е еднозначно определен от в-ра $a$, т.е. $(-a)$ е $!$-н.

<u>Д-во</u>: Доп. противното, т.е. $\exists\, a'$ и $a''$ два противоположни на $\underline{a}$ в-ри и да разгледаме

$$\left(\left(\begin{array}{l} a' + a + a'' = (a' + a) + a'' = \theta + a'' = a'' \\ a' + a + a'' = a' + (a + a'') = a' + \theta = a' \end{array}\right.\right.$$

$$\Rightarrow \underline{a' = a'' = (-a)}$$

4) $\forall\, a \in V,\ 0 \in F \Rightarrow 0a = \theta$

<u>Д-во</u>: $a + 0a = 1.a + 0a = (1 \overset{F}{+} 0)a = 1a = a$

$a + 0a = a \ \big|(-a) \Rightarrow \underbrace{(-a) + a}_{} + 0a = \underbrace{(-a) + a}_{}$

$\theta + 0a = \theta \Rightarrow \underline{0a = \theta}$

5) $\forall \lambda \in F,\ \lambda \theta = \theta$

Док: $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a,\ a = \theta,\ \mu = 0 \in F$

$\lambda(0\theta) = (\underset{F}{\lambda 0})\theta \Leftrightarrow \lambda\theta = \theta$

6) $1 \in F \Rightarrow (-1) \in F,\ \forall a \in V$

$(-1)a = (-a)$

Док: $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1+(-1))a = 0a = \theta$

$\left.\begin{array}{l} a + (-1)a = \theta \\ a + (-a) = \theta \end{array}\right\} \underset{!_н}{\Rightarrow} (-1)a = (-a)$

7) Ако $\lambda \in F,\ a \in V$: $\lambda a = \theta \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ a = \theta \end{array}\right.$

Док: $\lambda a = \theta$ или $\lambda = 0$, или $\lambda \neq 0 \underset{F}{\Rightarrow} \exists \lambda^{-1} \in F$

$\lambda^{-1}(\lambda a) = \lambda^{-1}\theta \Leftrightarrow (\underset{1}{\lambda^{-1}\lambda})a = \theta \Leftrightarrow a = \theta$

8) $a + x = b \Rightarrow$ има единствено реш. $x = b + (-a) = b - a$

разлика на векторите $b$ и $a$

**Деф.** Нека $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in F$.
Казваме че в-р $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k \in V$ е линейна комбинация на векторите $a_1, a_2$ до $a_k$ с коеф-ти $\lambda_1, \lambda_2$ до $\lambda_k$.

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$$

**Пример:** 1) $F^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
единични в-ри $e_i = (0, \dots, \underset{i\text{-то място}}{1}, \dots 0)$, $i = 1, \dots, n$

$a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ е л. комб на $e_i$ с к. $a_i$

2) $F_{m \times n}$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $E_{ij}$ м. единици

$A = \sum a_{ij} E_{ij}$ е л. комб на $E_{ij}$ с коеф $a_{ij}$

**Деф:**

**Деф.** Нека $V$ е л.пр. над $F$ и $W$ е непразно подмн-во на $V$.


Казваме, че $W$ е подпр-во на $V$ и означаваме $W \leq V$ ако всяка л. комб. на в-ри от $W$ е в-р от $W$, т.е. $\forall a, b \in W$, $\forall \alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha a + \beta b \in W$. $\Leftrightarrow$ $W \leq V$ ако $W$ е затворено относно операциите $a+b$ и $\lambda a$, т.е. $\forall a, b \in W \Rightarrow a + (-b) \in W$ и $\lambda a \in W$. $\forall \lambda \in F$

**Заб.** Всяко $W \leq V$ само по себе си е л.пр. над $F$.

**Заб:** $W \leq V$, $\forall a \in W \Rightarrow (-a) \in W \Rightarrow a + (-a) = \theta$, $\theta \in W$

$\theta$ принадлежи на всяко подпр-во на $V$.

**Примери:** 1) $V$ л.пр. над $F$, тривиалните подпр-ва на $V$ са: $\{\theta\} \leq V$; $V \leq V$;

2) $V = F_{n \times n}$

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in F \right\} \leq V$$

с.р. $\forall A, B \in W$ и $\forall \lambda, \mu \in F \Rightarrow \lambda A + \mu B \in W$
$\Rightarrow W \leq V.$

2') $V = M_n(F)$

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in F \right\} \leq M_n(F)$$

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in F \right\} \leq M_n(F)$$

$$S = \left\{ A = (a_{ij})_{n \times n} \middle| A^t = A \right\} = \left\{ A = (a_{ij}) \middle| a_{ij} = a_{ji} \right\}$$

A - симетрична матрица, ако $A^t = A$

множество на сим. матр., $S \leq M_n(F)$

$$T = \left\{ A = (a_{ij})_{n \times n} \middle| A^t = -A \right\} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & & -a_{ji} \\ & 0 & \\ a_{ij} & & 0 \end{pmatrix} \middle| A^t = -A \right\}$$

множество на антисиметричните м., $T \leq M_n(F)$
кососиметричните м.

3) $F^n = V$, $\forall k \le n$, $F^k \le F^n$, те

$\{\theta\} \le F \le F^2 \le F^3 \le \dots \le F^k \le \dots \le F^n$

$F^k = \{ a = (a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_i \in F \}$

$F^k = \{ a = (a_1, a_2, \dots, a_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k \text{ нули}}) \mid a_i \in F \} \le F^n$

4) $\mathbb{R} \le \mathbb{R}^2 \le \mathbb{R}^3 \le \dots \le \mathbb{R}^n$

5) $F^2[x] \le F^3[x] \le \dots \le F^{n+1}[x] \le F^{n+2}[x] \le \dots \le F[x]$

$ax+b$ $\quad$ $ax^2+bx+c$

<u>Тв.</u> Сечение на две (на фамилия от) подпр-ва на $V$ е подпр-во на $V$.

<u>Док.</u> $W_1 \le V$, $W_2 \le V \Rightarrow ?$ $W_1 \cap W_2 \le V$

$\forall a, b \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \alpha a + \beta b$

$\forall \alpha, \beta \in F$

$a \in W_1 \Rightarrow \alpha a \in W_1$

$b \in W_1 \Rightarrow \beta b \in W_1$

$\alpha a + b\beta \in W_1 \le V$

$a \in W_2 \Rightarrow \alpha a \in W_2$

$b \in W_2 \Rightarrow \beta b \in W_2$

$\alpha a + \beta b \in W_2 \le V$

$\alpha a + \beta b \in W_1 \cap W_2$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2 \le V$.

Деф. Нека $V$ е л. пр-во над $F$ и $A$ е произволно непразно подмн-во от в-ри от $V$. Множеството $l(A)$, което се състои от всички вектори от $A$ и всички техни линейни комбинации с коеф-ти от $F$ се нарича линейна обвивка на мн $A$.

Пр. $l(0)=\{0\}$; $l(V)=V$ изобщо, ако $W \leq V$, то $l(W)=W$;

Тв. Ако $A \subseteq V$, $A \neq \emptyset$, то $A \subseteq l(A) \leq V$, т.е. лин. обвивка на множество $A$ е подпр-во на $V$, съдържащо множество $A$, дори е най-малкото подпр-во с това св-во

Док: $A \subseteq l(A) = \left\{ \begin{matrix} a, b, \ldots \in A \\ \text{дадени} \end{matrix} \right\} \leq V$

$$\forall a, b \in l(A) \xrightarrow[\in l(A)]{} \alpha a + \beta b \in l(A)$$
$$\forall \alpha, \beta \in F$$

$$A \subseteq l(A) = \bigcap_{W_j \leq V} W_j \leq V.$$


$A = \{a, b, c\} \subseteq V$

$a+b = d$

$a+c = \cancel{e}$

$b+c = f$

$\lambda a + \mu b + \nu c \quad \forall \lambda, \mu, \nu \in F$

<u>Пр:</u> $F^2 = \{(a,b) \mid a, b \in F\}$

$e_1 = (1,0)$ и $e_2 = (0,1)$

$\{e_1\} \subseteq l(e_1) = \{(a,0) \mid a \in F\} \leq F^2$

$\{e_2\} \subseteq l(e_2) = \{(0,b) \mid b \in F\} \leq F^2$

$l(e_1, e_2) = \{(a,b) \mid a, b \in F\} = F^2 \leq F^2$

<u>Зад.</u> ? Лин. обвивка на множ. $\emptyset \neq A \subseteq V$.

Най-малкото подпр-во $l(A) \leq V$, съдържащо ~~множ~~ векторите от множеството $A$ и всички техни линейни комбинации.