11. Действия с линейни изображения

def Нека U и U' са линейни пространства над числово поле F, φ и $\psi \in Hom(U,U')$ и $\lambda \in F$. Под сума на линейните изображения φ и ψ ще разбираме изображението $\varphi + \psi : U \to U'$, действащо по следния начин: ако $a \in U$, то $(\varphi+\psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a) \in U'$. Под произведение на линейно изображение по число (скалар) ще разбираме изображението $\lambda\varphi : U \to U'$ действащо по следния начин: ако $a \in U$, то $(\lambda\varphi)(a) = \lambda\varphi(a) \in U'$.

$$\varphi + \psi : \begin{cases} U \to U' \\ a \to (\varphi+\psi)(a) := \varphi(a) + \psi(a) \end{cases}$$

$$\lambda\varphi : \begin{cases} U \to U' \\ a \to (\lambda\varphi)(a) := \lambda\varphi(a) \end{cases}$$

def Нека U е линейно пространство над числово поле F, $\varphi \in Hom\,U$, $\psi \in Hom\,U$ и $\lambda \in F$. Под сума на линейните оператори φ и ψ ще разбираме оператора $\varphi+\psi : U \to U$, действащ по следния начин: ако $a \in U$, то $(\varphi+\psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a) \in U$. Под произведение на линейния оператор φ с числото λ ще разбираме оператора $\lambda\varphi : U \to U$, действащ по следния начин: ако $a \in U$, то $(\lambda\varphi)(a) = \lambda\varphi(a)$

$$\varphi + \psi = \begin{cases} U \to U \\ a \to (\varphi+\psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a) \end{cases}$$

$$\lambda\varphi = \begin{cases} U \to U \\ a \to (\lambda\varphi)(a) = \lambda\varphi(a) \end{cases}$$

Th: Ако $\varphi, \psi \in Hom(U,U')$, тогава:
а) $\varphi + \psi \in Hom(U,U')$
б) $\lambda\varphi \in Hom(U,U')$
в) $Hom(U,U')$ е линейно пространство над числово поле F относно операциите $\varphi+\psi$ и $\lambda\varphi$.

Доказателство:

а) За $\forall a, b \in U$ и $\forall \alpha, \beta \in F$ имаме

$\varphi : \varphi(\alpha a + \beta b) = \varphi\alpha(a) + \beta\varphi(a)$

$\psi : \psi(\alpha a + \beta b) = \alpha\psi(a) + \beta\psi(a)$

$(\varphi+\psi)(\alpha a + \beta b) = (\text{по def})\ \varphi(\alpha a + \beta b) + \psi(\alpha a + \beta b) =$
$= \alpha(\varphi(a) + \psi(a)) + \beta(\varphi(b) + \psi(b)) =$
$= \alpha(\varphi+\psi)(a) + \beta(\varphi+\psi)(b) \Rightarrow \varphi+\psi \in Hom(U,U')$

б) За $\forall a, b \in U$ и $\forall \alpha, \beta \in F$ и $\lambda \in F$ имаме:

$\varphi : \varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta(\varphi(b))$

$\psi : \psi(\alpha a + \beta b) = \alpha\psi(a) + \beta\psi(b)$

$(\lambda\varphi)(\alpha a + \beta b) = \lambda\varphi(\alpha a + \beta b) = \lambda(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(a)) =$
$= \alpha(\lambda\varphi(a)) + \beta(\lambda\varphi(b)) = \alpha((\lambda\varphi)(a)) + \beta((\lambda\varphi)(b)) \Rightarrow \lambda\varphi \in Hom(U$

th: Нека U и U' са линейни пространства над числово поле F и $\dim U = n$, $\dim U' = m$. Тогава линейните пространства $Hom(U,U')$ и $F_{m\times n}$ са изоморфни. В частност, изоморфни са и линейните пространства $Hom\,U$ и $M_n(F)$.

Доказателство: Нека векторите $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_m$ са базиси съответно на U и U'. Нека $\Phi : Hom(U,U') \to F_{m\times n}$ е изображение, което съпоставя на всяко линейно изображение $\varphi \in Hom(U,U')$ матрицата му $A \in F_{m\times n}$ в тези базиси.

Ще докажем, че Φ е изоморфизъм на линейни пространства.
Нека $\varphi, \psi \in Hom(U,U')$ и $\varphi \neq \psi$. Тогава за поне едно число i, $1 \leq i \leq n$, имаме $\varphi(e_i) \neq \psi(e_i)$. Следователно, матриците на линейните изображения φ и ψ се различават поне по i-тия стълб, откъдето можем да заключим, че Φ е инекция.
Нека сега $A = (a_{ij})_{m\times n}$ е произволна матрица от $F_{m\times n}$. Според Th $\exists!$ линейно изображение $\varphi \in Hom(U,U')$, което се задава чрез равенствата

$$\varphi(e_1) = a_{11}f_1 + \dots + a_{m1}f_m$$
$$\vdots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + \dots + a_{mn}f_m$$

Тогава A е матрицата на линейното изображение φ във фиксираните бази, откъдето стигаме до извода, че Φ е сюрекция. Щом Φ е инекция и сюрекция $\Rightarrow \Phi$ е биекция.
Остава да покажем, че Φ е линейно изображение, т.е. $\Phi \in Hom(Hom(U,U'), F_{m\times n})$. Тогава за $\forall \alpha, \beta \in F$ и $\forall \varphi, \psi \in Hom(U,U')$ имаме:

$$\Phi(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\Phi(\varphi) + \beta\Phi(\psi) \Rightarrow \Phi \text{ е линейно изображение}$$

Щом Φ е биекция и линейно изображение $\Rightarrow \Phi$ е изоморфизъм, т.е. $Hom(U,U') \cong F_{m\times n}$ и в частност $Hom\,U \cong M_n(F)$.

def Нека U, U' и U'' са линейни пространства над числово поле F и $\varphi \in Hom(U,U')$, $\psi \in Hom(U',U'')$. Под произведение $\psi\varphi: U \to U''$ на φ и ψ ще разбираме тяхната композиция (първо прилагаме φ към даден вектор от U и после към получения вектор от U' действаме с ψ, т.е. $(\psi\varphi)(a) = \psi(\varphi(a))$.

$$(\psi\circ\varphi)\begin{cases} U \to U'' \\ a \to (\psi\circ\varphi)(a) = \psi(\varphi(a)) \end{cases}$$

Th: Произведението на линейни изображения е линейно изображение, т.е. $\psi\varphi \in Hom(U,U'')$
Доказателство: За $\forall a, b \in U$ и $\forall \alpha, \beta \in F$ имаме:

$$(\psi\circ\varphi)(\alpha a + \beta b) = \psi(\varphi(\alpha a + \beta b)) = \psi(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)) =$$
$$= \alpha\psi(\varphi(a)) + \beta\psi(\varphi(b)) = \alpha(\psi\circ\varphi)(a) + \beta(\psi\circ\varphi)(b) \Rightarrow \psi\circ\varphi \in Hom(U,U'')$$

Th: Нека U, U' и U'' са крайномерни линейни пространства над числово поле F и векторите $e_1, \dots, e_n$; $f_1, \dots, f_m$ и $h_1, \dots, h_k$ са бази съответно на U, U' и U''. Нека $\varphi \in Hom(U,U')$ и $\psi \in Hom(U',U'')$. Тогава, ако $\varphi \to A_{e,f} \in F_{m\times n}$, $\psi \to B_{f,h} \in F_{k\times m}$, то $\psi\varphi \to C_{e,h} \in F_{k\times n}$
Доказателство: Нека $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{k\times m}$. Имаме:

$$\varphi(e_1) = a_{11}f_1 + \dots + a_{m1}f_m \qquad \psi(f_1) = b_{11}h_1 + \dots + b_{k1}h_k$$
$$\varphi(e_2) = a_{12}f_1 + \dots + a_{m2}f_m \qquad \psi(f_2) = b_{12}h_1 + \dots + b_{k2}h_k$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n}f_1 + \dots + a_{mn}f_m \qquad \psi(f_m) = b_{1m}h_1 + \dots + b_{km}h_k$$

Сега:

$$(\psi\varphi)(e_1) = \psi(\varphi(e_1)) = \psi(a_{11}f_1 + \dots + a_{m1}f_m) =$$
$$= a_{11}\psi(f_1) + \dots + a_{m1}\psi(f_m) =$$
$$= a_{11}(b_{11}h_1 + \dots + b_{k1}h_k) + \dots + a_{m1}(b_{1m}h_1 + \dots + b_{km}h_k) =$$
$$= (b_{11}a_{11} + \dots + b_{1m}a_{m1})h_1 + \dots + (b_{k1}a_{11} + b_{k2}a_{21} + \dots + b_{km}a_{m1})h_k$$

Виждаме, че коефициентът пред h_i, $i = \overline{1,k}$ е точно i-тият ред на матрицата B, умножен по първия стълб на матрицата A. Следователно, първият стълб на матрицата на $\psi\varphi$ съвпада с първия стълб на матрицата $C_{e,h}$

$$C_{e,h} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$
$$\psi(\varphi(e_1)) \cdots \psi(\varphi(e_n))$$

12. Ранг и дефект на линейно изображение

Нека V и V' са фиксирани линейни пространства над числово поле F и $\varphi \in Hom(V, V')$.

def Ядро на линейното изображение $\varphi \in Hom(V,V')$ наричаме множеството означено с $Ker\varphi = \{a \in V \mid \varphi(a) = \theta' \in V'\}$

Тв: а) $Ker\varphi \leq V$

б) $Ker\varphi = \{\theta\}$ точно тогава, когато φ е инекция, т.е. за $\forall a,b \in V, a \neq b \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$

Доказателство:

а) За $\forall a,b \in Ker\varphi$ и $\forall \lambda, \mu \in F$, дали $\lambda a + \mu b$ е в $Ker\varphi$

$\varphi(\lambda a + \mu b) = \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(b) = \lambda.\theta + \mu.\theta = \theta \Rightarrow Ker\varphi \leq V$

б) $Ker\varphi = \{\theta\}$, $\theta \in V$ и $\varphi(\theta) = \theta' \in V'$. За $\forall a,b \in V$, такива, че $a \neq b$ нека да допуснем, че $\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow \varphi(a) - \varphi(b) = \theta'$

$\varphi(a-b) = \theta' \Rightarrow a-b \in Ker\varphi = \{\theta\}$. Но от $a-b$ ще следва, че $a=b$, което е противоречие $\Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b) \Rightarrow \varphi$ - инекция

Обратно, ако φ е инекция и допуснем, че $\exists w \in Ker\varphi$, такъв, че $w \neq \theta$, то $\varphi(w) = \theta'$ и $\varphi(\theta) = \theta'$, но това е противоречие с това, че φ е инекция $\Rightarrow w = \theta \Rightarrow Ker\varphi = \{\theta\}$

def Образ на линейното изображение $\varphi \in Hom(V,V')$ наричаме множеството означено с $Im\varphi = \{\varphi(w) \mid \forall w \in V\} = \{u \in V' \mid \exists w \in V : \varphi(w) = u\}$

Тв: $Im\varphi$ е подпространство на V'

Доказателство: За $\forall \alpha, \beta \in F$ и $\forall c,d \in Im\varphi$, такива, че $\exists$ вектор $a \in V$, за който $\varphi(a) = c$ и $\exists$ вектор $b \in V$, за който $\varphi(b) = d$. За да бъде $Im\varphi \subseteq V'$, то трябва $\alpha c + \beta d \in Im\varphi$. Тогава имаме:

$\alpha c + \beta d = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = (\varphi - ЛИ) = \varphi(\alpha a + \beta b)$, т.е. $\exists\ \alpha a + \beta b \in V$, такъв, че $\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha c + \beta d \Rightarrow \alpha c + \beta d \in Im\varphi$, откъдето можем да заключим, че $Im\varphi \leq V'$.

def Под ранг на линейното изображение φ ще разбираме числото $r(\varphi) = \dim Im\varphi$. Под дефект на линейно изображение φ ще разбираме числото $d(\varphi) = Ker\varphi.\dim$

Тв: Ако V и V' са крайномерни линейни пространства над числово поле F и A е матрицата на φ в кои да са два базиса съответно на V и V', то $r(\varphi) = r(A)$

Доказателство: Нека векторите $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_m$ са базиси съответно на V и V' и A е матрицата на φ в тези базиси. Рангът на A е равен на ранга на системата от нейните вектор стълбове, но стълбовете на A са съставени от координатите на $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_n)$ (в базиса $f_1, \dots, f_m$). Следователно, $r(A) = r(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \dim \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$. От друга страна, всеки вектор от V е линейна комбинация на $e_1, \dots, e_n$, тогава $\forall$ вектор от $Im\varphi$ е линейна комбинация на $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \Rightarrow Im\varphi = \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$. Тогава $r(\varphi) = \dim Im\varphi = \dim \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$, следователно $r(A) = r(\varphi)$

Th: **Теорема за ранга и дефекта**

Ако $\dim V = n < \infty$ и $\varphi \in Hom(V, V')$, то $r(\varphi) + d(\varphi) = n$

Доказателство:

Нека $d(\varphi) = d$ и векторите $e_1, \dots, e_d$ са базис на $Ker\,\varphi$. Допълваме тези линейно независими вектори до базис $e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n$ на V. Ще докажем, че векторите $e_{d+1}, \dots, e_n$ са базис на $Im\,\varphi$, откъдето ще следва, че $r(\varphi) = n - d \Rightarrow$ $r(\varphi) + d(\varphi) = n$

1сл) Ако $Im\,\varphi = \{\theta\}$, т.е. $\varphi = \theta$, то $Ker\,\varphi = V$ и значи $d(\varphi) = n$

2сл) Ако $Ker\,\varphi = \{\theta\}$, т.е. $d = 0$, то $Im\,\varphi = V \Rightarrow n = n + 0$, $\dim V = r(\varphi) + d(\varphi)$

3сл) $0 < d < n$

1 Нека $v \in V$, $u \in Im\,\varphi$, такъв че $u = \varphi(v)$. Нека $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_d e_d + \lambda_{d+1} e_{d+1} + \dots + \lambda_n e_n$, но векторите $e_1, \dots, e_d \in Ker\,\varphi \Rightarrow$ $u = \varphi(v) = \lambda_{d+1}\varphi(e_{d+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n)$. Така всеки вектор от $Im\,\varphi$ е линейна комбинация на векторите $\varphi(e_{d+1}), \dots, \varphi(e_n)$.

Нека $\mu_{d+1}\varphi(e_{d+1}) + \dots + \mu_n \varphi(e_n) = \theta$, $\Rightarrow \varphi(\mu_{d+1}e_{d+1} + \dots + \mu_n e_n) = \theta$. Тогава векторът $\mu_{d+1}e_{d+1} + \dots + \mu_n e_n \in Ker\,\varphi \Rightarrow$ той се изразява линейно чрез векторите $e_1, \dots, e_d$. Нека

$\mu_{d+1}e_{d+1} + \dots + \mu_n e_n = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_d e_d$, т.е.

$-\mu_1 e_1 - \dots - \mu_d e_d + \mu_{d+1}e_{d+1} + \dots + \mu_n e_n = \theta$. Тогава всички коефициенти, в частност $\mu_{d+1}, \dots, \mu_n$ са равни на $0 \Rightarrow$ векторите $\varphi(e_{d+1}), \dots, \varphi(e_n)$ са ЛНЗ и следователно образуват базис на $Im\,\varphi$

Забележка: $\dim V = n < \infty$, $\varphi \in Hom(V, V') \Rightarrow r + d = n$ ($\dim Im\,\varphi + \dim Ker\,\varphi$) но $Ker\,\varphi \oplus Im\,\varphi \neq V$

13. Обратими линейни оператори

Нека V е крайномерно линейно пространство над числово поле F и $\dim V = n < \infty$.

def Казваме, че линейният оператор φ е обратим, ако съществува $\varphi' \in \operatorname{Hom} V$, такъв, че $\varphi\varphi' = \varphi'\varphi = \mathcal{E}$. Тогава означаваме $\varphi' = \varphi^{-1}$ и го наричаме обратен на φ оператор във V. Всеки обратим линеен оператор е биекция и значи е изоморфизъм.

φ - обратим линеен оператор; φ^{-1} - обратен на φ оператор $\Big\} \Rightarrow (\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$

$\varphi \cdot \varphi' = \varphi' \cdot \varphi = \mathcal{E}$

$\varphi: a \to \varphi(a) = b \xrightarrow{\varphi^{-1}} \varphi^{-1}(b) = a$

Тв: Нека φ е обратим линеен оператор във V. Ако в даден базис на V на φ съответства матрица A, то A е обратима матрица и в същия базис на φ^{-1} съответства матрицата A^{-1}.

Доказателство: Нека в дадения базис на φ^{-1} съответства A'. Имаме $\varphi\varphi' = \varphi'\varphi = \mathcal{E} \Leftrightarrow AA' = A'A = E$. Следователно A е обратима матрица и $A^{-1} = A'$.

Th: Нека $\varphi \in \operatorname{Hom} V$. Тогава следните условия са еквивалентни:
1) φ е обратим линеен оператор
2) $\operatorname{Ker}\varphi = \{\theta\}$ (т.е. $d = d(\varphi) = 0$)
3) $\operatorname{Im}\varphi = \{\theta\}$ (т.е. $r = r(\varphi) = n$)
4) φ преобразува всеки базис на V в базис на V
5) матрицата A на φ във всеки базис на V е обратима

Доказателство:

1) $\Rightarrow$ 2) Нека φ е обратим линеен оператор и $v \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогава $\varphi(v) = \theta \Rightarrow$ действайки със φ^{-1} получаваме $\varphi^{-1}(\varphi(v)) = \varphi^{-1}\theta$ $\Rightarrow (\varphi^{-1}\varphi)(v) = \mathcal{E}(v) = v \Rightarrow v = \theta \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{\theta\}$, $d = d(\varphi) = 0 \Rightarrow$ φ е инекция

2) $\Rightarrow$ 3) Нека $\operatorname{Ker}\varphi = \{\theta\}$, т.е. $d = d(\varphi) = 0$. От Th за ранга и дефекта $r(\varphi) + d(\varphi) = n$ следва, че $r(\varphi) = n$, т.е. $\operatorname{Im}\varphi = V \Rightarrow$ φ е сюрекция

3) $\Rightarrow$ 4) Нека $\operatorname{Im}\varphi = V$ и векторите $e_1, \dots, e_n$ са базис на V. Тогава имаме $\operatorname{Im}\varphi = V = \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \Rightarrow$ векторите $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ са линейно независими, т.е. те са базис на V, значи имаме φ: базис на $V \to$ базис на V

4) $\Rightarrow$ 5) Нека $e_1, \dots, e_n$ е произволен базис на V и A е матрицата на φ в този базис. Векторите $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ са базис на $V \Rightarrow$ те са линейно независими. $r(A)$ е равен на ранга на системата от нейните вектор стълбове, които са координатите на $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ в базиса $e_1, \dots, e_n$. Тогава $r(A) = \dim \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \dim V = n \Rightarrow$ $\det A \neq 0$, откъдето следва, че A е обратима матрица

5) $\Rightarrow$ 1) Нека $e_1, \dots, e_n$ е фиксиран базис на V и на φ съответства матрица A в този базис. A е обратима матрица и $\det A \neq 0$. Нека при дадения базис на матрицата A^{-1} съответства линеен оператор φ'. Тогава на операторите $\varphi\varphi'$ и $\varphi'\varphi$ съответстват матриците $AA^{-1} = E$ и $A^{-1}A = E$. Следователно $\varphi\varphi' = \varphi'\varphi = \mathcal{E}$, т.е. φ е обратим линеен оператор.

Забележка: Ако $\dim U = \infty$, то някои от тези еквивалентни твърдения не са в сила (от 2) както и от 3) не следва обратимост на φ).

Св: Нека $\varphi, \tau \in \operatorname{Hom} U$ и τ е обратим линеен оператор. Тогава

а) $r(\varphi\tau) = r(\tau\varphi) = r(\varphi)$

б) Ако $A, T \in M_n(F)$ и T е обратима матрица, то $r(AT) = r(TA) = r(A)$

Доказателство: Нека векторите $e_1, \dots, e_n$ са базис на U, A е матрицата на φ в този базис и T е матрицата на τ в същия базис, $\det T \neq 0 \Rightarrow \exists!\ \tau^{-1}$ и T^{-1}. Тогава

$r(\varphi\tau) = r(\tau\varphi) = r(\varphi) = r$

$r(AT) = r(TA) = r(A) = r$

14. Смяна на базиса

Нека V е крайномерно линейно пространство над числово поле F и нека $e_1,\dots,e_n$ и $f_1,\dots,f_n$ са два базиса на V. Всеки вектор от втория базис се изразява линейно чрез векторите от първия, т.е.

$$f_1 = \tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \dots + \tau_{n1}e_n$$
$$f_2 = \tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \dots + \tau_{n2}e_n \quad (1),\ \tau \in Hom\,V,\ \tau: e\to f \Leftrightarrow T = T_{e\to f}$$
$$\vdots$$
$$f_n = \tau_{1n}e_1 + \tau_{2n}e_2 + \dots + \tau_{nn}e_n$$

def Матрицата $T=(\tau_{ij})_{n\times n}$ наричаме матрица на прехода от базис (1) към базис (2), т.е от $e\to f$.

$$T=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn}\end{pmatrix}_{n\times n}$$

Пример: $u\in V$, $u_e = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$, $u_e = \tau(u) = T_{e\to f}\cdot u_f$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}}_{u_e} = \underbrace{(\tau_{ij})_{n\times n}}_{T_{e\to f}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}}_{u_f}$$

$$T=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn}\end{pmatrix}_{n\times n}$$

Стълбовете на матрицата T са съставени от координатите на векторите от втория базис спрямо първия. $\Rightarrow$ стълбовете на T са линейно независими $\Rightarrow r(T)=n$. Следователно, T е обратима матрица. Обратно, нека $T=(\tau_{ij})_{n\times n}$ е обратима матрица и $e_1,\dots,e_n$ са базис на V. Тогава векторите $f_1,\dots,f_n$, изразени линейно чрез векторите $e_1,\dots,e_n$, са линейно независими $\Rightarrow$ образуват базис на V. Така всяка обратима матрица T е матрица на прехода от произволен базис на V, към друг базис, определен от равенствата (1).

Th: Нека $\varphi\in Hom\,V$ и на φ съответства матрица $A=(a_{ij})_{n\times n}$ в базиса $e_1,\dots,e_n$ ($\varphi\rightleftarrows A\in M_n(F)$) и матрица $B=(b_{ij})_{n\times n}$ в базиса $f_1,\dots,f_n$ ($\varphi\rightleftarrows B\in M_n(F)$). Тогава $\boxed{B=T^{-1}AT}$

Доказателство: Нека $\tau\in Hom\,V$ и има матрица T в базиса $e_1,\dots,e_n$ ($\tau\rightleftarrows T\in M_n(F)$). Тъй като B е матрица на φ в базиса $f_1,\dots,f_n$ ($\varphi\rightleftarrows B\in M_n(F)$), то $\varphi(f_i)=b_{1i}f_1+\dots+b_{ni}f_n$, $i=\overline{1,n}$. Прилагаме оператора τ^{-1} ($\tau^{-1}(f_i)=e_i$) и получаваме $\tau^{-1}\varphi(f_i)=b_{1i}e_1+\dots+b_{ni}e_n$. В равенството $\tau^{-1}\varphi(f_i)=b_{1i}e_1+\dots+b_{ni}e_n$ заместваме f_i с $\tau(e_i)$ $\Rightarrow$ $\tau^{-1}\varphi\tau(e_i)=b_{1i}e_1+\dots+b_{ni}e_n$, $i=\overline{1,n}$. От тук можем да заключим, че операторът $\tau\varphi\tau^{-1}$ има матрица B в базиса $e_1,\dots,e_n$ ($\tau\varphi\tau^{-1}\rightleftarrows B\in M_n(F)$). От друга страна операторите φ и τ имат матрици съответно A и T в базиса $e_1,\dots,e_n$, тогава операторът $\tau^{-1}\varphi\tau$ има матрица $T^{-1}AT$ в базиса $e_1,\dots,e_n$ ($\tau^{-1}\varphi\tau\rightleftarrows T^{-1}AT$) $\Rightarrow B=T^{-1}AT$

def Нека $A, B \in M_n(F)$. Казваме, че матриците A и B са подобни, ако $\exists$ обратима матрица T, такава, че $B = T^{-1}AT$. В този случай ще пишем $A \sim B$.

Сл. Матриците A и B, съответстващи на линейния оператор $\varphi \in Hom\,V$ в различни базиси $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ на V, са подобни, т.е. $A \sim B$.

Тв. Релацията $A \sim B$ е релация на еквивалентност.

Доказателство:

1) Нека $A \sim A$ точно тогава, когато $A = E^{-1}AE = EAE$;

2) Нека $A \sim B$, тогава $\exists T$, $\det T \neq 0$ такава, че $B = T^{-1}AT$
$\Rightarrow TBT^{-1} = A \Rightarrow (T^{-1})^{-1}BT^{-1} = A$. Нека $\exists T^{-1} = U \Rightarrow$
$U^{-1}BU = A \Rightarrow B \sim A$

3) Нека $A \sim B$ и $B \sim C$, тогава $\exists T$-обратима матрица, такава, че $B = T^{-1}AT$ и нека $\exists U$-обратима матрица, такава, че $C = U^{-1}BU$, това е еквивалентно на
$U^{-1}(T^{-1}AT)U = (U^{-1}T^{-1})A(TU) = (TU)^{-1}A(TU) \Rightarrow$
$\exists TU$-обратима матрица, такава, че $A \sim C \Rightarrow$
$A \sim B$ е релация на еквивалентност.

Тв. (обратно на следствието) Нека $A, B \in M_n(F)$ и $A \sim B$. Тогава съществува линеен оператор $\varphi \in Hom\,V$ и два базиса на V, такива, че матриците на φ в тези два базиса са съответно матриците A и B.

Доказателство: Щом $A \sim B$, тогава $\exists T$-обратима матрица, такава, че $B = T^{-1}AT$ и нека $e_1, \dots, e_n$ е произволен базис на V. Нека $\tau \in Hom\,V$ и $\tau \rightleftarrows T \in M_n(F)$, а $\varphi \in Hom\,V$ и $\varphi \rightleftarrows A \in M_n(F)$. Операторът τ е обратим, понеже матрицата T е обратима, и значи векторите $f_1 = \tau(e_1), \dots, f_n = \tau(e_n)$ също образуват базис на V. Тогава T е матрицата на прехода от първия към втория базис $(e \to f)$. Следователно, от Тh имаме, че матрицата на оператора φ в базиса $f_1, \dots, f_n$ на V, е точно $B \Rightarrow$ от Тв $A \sim B$.

Тв: Подобните матрици имат $(A \sim B)$:

а) равни детерминанти $\rightarrow \det A = \det B$

б) равни рангове $\rightarrow r(A) = r(B)$

Доказателство: Нека $A \sim B$, тогава $\exists T$-обратима: $B = T^{-1}AT$

а) $\det B = \det(T^{-1}AT)$, от Тh за умножение на детерминанти получаваме, че $\det B = \det(T^{-1}AT) = (\det T^{-1})(\det A)(\det T) =$
$= (\det T^{-1} \cdot \det T) \cdot \det A =$ (умножение на det) $\det(T^{-1}T) \cdot \det A$
$= \det E \cdot \det A = 1 \cdot \det A = \det A \Rightarrow \det B = \det A$

б) $r(B) = r(T^{-1}AT) = r(AT) = r(A)$

15. Характеристичен полином и характеристични корени на квадратна матрица

Нека $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(F)$. Да разгледаме матрицата

$$A - xE = \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{pmatrix}$$

Детерминантата на тази матрица е:

$$\det(A-xE) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})}_{\substack{\mathrm{tr}A \\ \text{Следа на м. } A}} x^{n-1} + \dots + \det A$$

def Полиномът $\det(A-xE)$ се нарича характеристичен полином на матрицата A и ще го бележим с $f_A(x)$, а корените на този полином $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ се наричат характеристични корени на матрицата A.

Th: (Хамилтън-Кейли) Всяка $A\in M_n(F)$ е корен на $f_A(x)$.

Св: Ако матрицата $A\in M_n(F)$ е триъгълна (елементите под главния диагонал са 0), то характеристичните корени на матрицата A са елементите, стоящи по главния диагонал на A, т.е.

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & & & * \\ & a_{22}-x & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}-x \end{vmatrix} = (a_{11}-x)(a_{22}-x)\dots(a_{nn}-x)$$ и корените са $\lambda_1=a_{11}, \lambda_2=a_{22}\dots\lambda_n=a_{nn}$

Тв: Подобните матрици $A\sim B$ имат един и същ характеристичен полином, т.е. $f_A(x)=f_B(x)$

Доказателство: Нека $A\sim B$, тогава $\exists T$ - обратима матрица, такава, че $B=T^{-1}AT$. От правилото за умножение на детерминанти получаваме:

$$f_B(x) = \det(B-xE) = \det(T^{-1}AT - xE) = \det(T^{-1}AT - xT^{-1}ET)$$
$$= \det(T^{-1}(A-xE)T) = \det T^{-1}.\det(A-xE).\det T =$$
$$= \det(A-xE) = f_A(x)$$

Нека V е линейно пространство и $\dim V = n<\infty$, $\varphi\in \mathrm{Hom}\,V$. Нека $e_1,\dots,e_n$ и $f_1,\dots,f_n$ са два базиса на V и матрицата на φ в базиса $e_1,\dots,e_n$ е A ($\varphi \underset{e}{\to} A$), а матрицата на φ в базиса $f_1,\dots,f_n$ е B ($\varphi \underset{f}{\to} B$). Нека $\exists T = T_{e\to f}$ и $\tau\in\mathrm{Hom}\,V$ е обратим линеен оператор, тогава $B = T^{-1}AT$, следователно, че $B\sim A \Rightarrow f_A(x)=f_B(x)$ - това ни дава възможност да говорим за характеристичен полином на линеен оператор.

def Характеристичен полином на линейния оператор $\varphi\in\mathrm{Hom}\,V$ ще наричаме характеристичния полином $f_A(x)$ на матрицата на линейния оператор φ в кой да е базис на V. Корените на полинома наричаме характеристични корени на φ и означаваме $f_\varphi(x)=f_A(x)$, $\varphi \underset{e}{\to} A\in M_n(F)$

16. Собствени вектори и собствени стойности на линеен оператор

def Нека V е линейно пространство над числово поле F и $\varphi \in Hom\,V$. Един вектор v от V наричаме собствен вектор на φ, ако:
1) $v \neq \theta$
2) съществува число $\lambda \in F$, такова, че $\varphi(v) = \lambda v$.

Числото λ се нарича собствена стойност на φ, съответстваща на собствения вектор v.

$\underset{\in V,\ v\neq\theta}{v} \longleftrightarrow \lambda \in F : \varphi(v) = \lambda v$

Забележка: $\varphi(\theta) = \lambda.\theta$, но θ не е собствен вектор

Th Нека V е линейно пространство над числово поле F, $\varphi \in Hom\,V$ и λ е собствена стойност на φ, $\lambda \in F$. Множеството от собствени вектори, отговарящи на дадена собствена стойност λ, заедно с θ образуват подпространство на V, т.е.
$U = \{ v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v;\ \text{заедно със } \theta \} \subseteq V$.

Доказателство: За $a, b \in U$ и $\alpha, \beta \in F$, имаме, че $\varphi(a) = \lambda a$ и $\varphi(b) = \lambda b$. Тогава $\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha(\lambda a) + \beta(\lambda b) = \lambda(\alpha a) + \lambda(\beta b) = \lambda(\alpha a + \beta b) \Rightarrow \alpha a + \beta b \in U$, т.е. собствен вектор $\leftrightarrow \lambda \Rightarrow U \subseteq V$.

Нека
$$U: \begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)\alpha_n = 0 \end{cases}$$
е ХСЛУ.

ХСЛУ има ненулево решение (б.о.о. $\alpha_1 \neq 0$) $- \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \Rightarrow$ $\det(\text{ХСЛУ}) = 0$.

$\underline{\det(A - \lambda E)} = f_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ е характеристичен корен на $\varphi \Rightarrow \lambda$ е собствена стойност на φ
($\lambda \in F$)

Обратно, ако λ е характеристичен корен на φ и $\lambda \in F$, то $f_A(\lambda) = 0 = \det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow$ ХСЛУ, задаваща U има ненулево решение
$v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, б.о.о. $\alpha_1 \neq 0$ $\neq \theta$; $\varphi(v) = \lambda v$ $\Rightarrow \lambda$ е собствена стойност на $\varphi \leftrightarrow$ собствен вектор v

Th Нека V е крайномерно линейно пространство над числово поле F и $\varphi \in Hom\,V$. Тогава характеристичните корени на φ, принадлежащи на F и само те, са всичките собствени стойности на φ.

Забележка:
1) Ако $F = \mathbb{C}$, $f_\varphi(x) = f_A(x) \in \mathbb{C}[x] \Rightarrow$ Всички характеристични корени са комплексни числа (Th на Даламбер) и всички те са собствени стойности на φ.
2) Ако $F = \mathbb{R}$, $f_\varphi(x) = f_A(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow$ Тогава характеристичните корени са или $\mathbb{R}$ или по двойки комплексно спрегнати числа $\to$ Не всички характеристични корени са и собствени стойности, а само $\mathbb{R}$ измежду тях числа.

Тв: Нека V е линейно пространство над числово поле F, $\dim V = n$ и $\varphi \in \operatorname{Hom} V$. Ако $v_1, \dots, v_k$ са собствени вектори, отговарящи на различни собствени стойности на φ, съответно $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$, за $i \neq j$), то $v_1, \dots, v_k$ са линейно независими вектори.

def

Доказателство: Ще проведем индукция по k.

$k = 1$: Векторът $v_1 \neq \theta$ по def $\Rightarrow$ v_1 е линейно независим

$k > 1$: Да допуснем, че векторите $v_1, \dots, v_k$ са ЛЗ и нека $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1} + \mu_k v_k = \theta$ (1)

Действаме с оператора φ, отчитайки, че $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, за $i = \overline{1,k}$ и получаваме $\mu_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \mu_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + \mu_k \lambda_k v_k = \theta$ (2)

Умножаваме равенството 1) с λ_k и изваждаме го от равенството 2), получаваме:

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \dots + \mu_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = \theta \quad (3)$$

От индукционното предположение всички коефициенти в равенството (3) = 0 и тъй като $\lambda_i \neq \lambda_k$, за $i = \overline{1,k-1}$ получаваме $\mu_1 = \dots = \mu_{k-1} = 0$. От равенството (1), понеже $v_k \neq 0$, то $\mu_k = 0$ (защото $\mu_k v_k = \theta$). Следователно, векторите $v_1, \dots, v_k$ са линейно независими.

Забележка:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$$

Th: (Линеен оператор с прост спектър)

Нека V е n-мерно линейно пространство над числово поле F и $\varphi \in \operatorname{Hom} V$. Ако φ има n на брой две по две различни собствени стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (прост спектър), то съществува базис на V от собствени вектори, в който матрицата D, съответстваща на оператора φ, е диагонална т.е.:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(F)$$

Доказателство: Нека $v_1, \dots, v_n$ са собствени вектори на φ, съответстващи на $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. От предходното твърдение имаме, че тези вектори са линейно независими и щом са n на брой, следователно те образуват базис на V и $\varphi \to D$, като има вида:

$$\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0.v_2 + \dots + 0v_n$$
$$\varphi(v_2) = \lambda_2 v_2 + 0.v_1 + \dots + 0v_n$$
$$\vdots$$
$$\varphi(v_n) = \lambda_n v_n + 0.v_1 + \dots + 0.$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Сл. Нека A е квадратна матрица от n-ти ред, която има n на брой различни характеристични корена ($\lambda_i \neq \lambda_j$, за $i \neq j$). Тогава A е подобна на диагонална матрица ($A \sim D$).

Доказателство: Нека $U = \mathbb{C}^n$ и векторите $e_1, \dots, e_n$ са фиксиран базис на U и $\varphi \in \mathrm{Hom}\, U$. Тогава A е матрицата на линейния оператор φ в този базис, φ има n на брой различни собствени стойности $\rightarrow$ от Th за прост спектър $\exists$ базис $u_1, \dots, u_n$ на U, в който $\varphi \leftrightarrow D$ и $\exists$ T неособена матрица, такава, че $D = T^{-1}AT \Rightarrow D \sim A$.

17. Инвариантни подпространства

Нека V е линейно пространство над числово поле F, $U \subseteq V$ и $\varphi \in Hom V$.

def: Казваме, че подпространството U е инвариантно относно φ или φ-инвариантно, ако за всеки вектор $u \in U$ имаме $\varphi(u) \in U$.

Забележка: Ако U е φ-инвариантно подпространство на V, то можем да разглеждаме действието на φ само върху U. Този линеен оператор в линейното пространство U ще наричаме ограничение на φ върху U и ще означим с $\varphi|_U$, т.е. $\varphi|_U(u) = \varphi(u)$, за $u \in U$.

Примери: Нека V е крайномерно линейно пространство и $\varphi \in Hom V$.

1) Подпространствата $\{\theta\}$ и V са φ-инвариантни
2) Подпространствата $Im\varphi$ и $Ker\varphi$ са φ-инвариантни
   За $\forall w \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(w) = \theta \in Ker\varphi \Rightarrow$ (по def) $Ker\varphi$ е φ-инв. $\subseteq V$
   За $\forall w \in Im\varphi$, $\exists u \in V$, такова че $\varphi(u) = w \Rightarrow \varphi(w) = \varphi(\underbrace{\varphi(u)}_{w})$
   $\Rightarrow \varphi(w) \in Im\varphi \Rightarrow Im\varphi$ е φ-инв. $\subseteq V$
3) Нека λ е собствена стойност на φ:
   а) Подпространството $U = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ е φ-инвариантно
   За $\forall v \in U \Rightarrow \varphi(v) = \lambda v \in U \subseteq V \Rightarrow \varphi(v) \in U \Rightarrow U$ е φ-инв. $\subseteq V$
   б) Нека v е един собствен вектор, съответстващ на λ и $U = \ell(v)$. Тогава U е едномерно φ-инвариантно $\subseteq V$.
   За $\forall u \in U$, $u = \mu v \Rightarrow \varphi(u) = \mu\varphi(v) \Rightarrow \mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v \Rightarrow$
   $\Rightarrow \varphi(u) \in U \Rightarrow U$ е φ-инв. $\subseteq V$ и φ действа като хомотетия в U.

Сл. от 3б) Ако един линеен оператор φ притежава собствена стойност, то той има едномерно инвариантно подпространство (вярно е и обратното). В частност, всеки оператор в крайномерно ненулево линейно пространство над $\mathbb{C}$ има едномерно инвариантно подпространство относно съответния оператор.

th: Нека V е крайномерно ненулево линейно пространство над $F = \mathbb{R}$ и $\varphi \in Hom V$. Тогава φ има едномерно или двумерно инвариантно подпространство.

Доказателство: Нека векторите $e_1, e_2, \dots, e_n$ са базис на V над $\mathbb{R}$ и φ има матрица A в този базис ($\varphi \rightarrow A \in M_n(\mathbb{R})$). Знаем, че изображението, съпоставящо на всеки вектор $\in V$ наредена n-орка от координатите му във фиксирания базис, е изоморфизъм от V към $\mathbb{R}^n$. Ще приемем, че:

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$
$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$
$\vdots$
$e_n = (0, 0, \dots, 1)$

По този начин $V \subseteq \mathbb{C}^n$, като векторите $e_1, e_2, \dots, e_n$ са базис на линейното пространство $\mathbb{C}^n$ над $\mathbb{C}$. Тогава $\exists!$ линеен оператор $\bar{\varphi}$, такъв, че $\bar{\varphi}: \begin{cases} \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \\ a \rightarrow \bar{\varphi}(a) \end{cases}$ и $\bar{\varphi}$ има матрица A в този базис, но $\bar{\varphi}(v) = \varphi(v)$ за $\forall v \in V$. Тогава

според Th на Даламбер, $\bar{\varphi}$ има собствена стойност $\lambda \in \mathbb{C}$.
Нека $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Нека $c \neq \theta$ и $c \in \mathbb{C}^n$ е собствен вектор на $\bar{\varphi}$, съответстващ на λ, тогава $c = y + iz$, $y, z \in \mathbb{R}$ $= a + ib$. Да означим

$a = y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$b = z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

От $\bar{\varphi}(c) = \lambda c = \bar{\varphi}(y + iz) = \bar{\varphi}(y) + i\bar{\varphi}(z) = \varphi(y) + i\varphi(z)$

От друга страна, $\bar{\varphi}(c) = \lambda c = (\alpha + i\beta)(a + ib) = (\alpha a - \beta b) + i(\beta a + \alpha b)$

Приравнявайки реалните и имагинерните части в двете страни на двете равенства, получаваме:

$$\begin{cases} \varphi(a) = \alpha a - \beta b & , \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \varphi(b) = \beta a + \alpha b & a, b \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3)$$

Нека $U = \ell(a, b)$, $U \subseteq V$. От равенства (3) показват, че U е φ-инвариантно. При това, $\dim U \leq 2$ и $U \neq \{\theta\}$.
Ако $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \beta = 0$, $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow U = \ell(a)$ - едномерно φ-инв. $\subseteq V$
Ако $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow U = \ell(a, b)$ - двумерно φ-инв. $\subseteq V$.