Лекция [illegible] 15. 12. 2021г.

Матрица на линейно изображение

Нека V, V' крайномерни л. пространства над г. поле F и $\varphi \in Hom(V, V')$ и нека $e = \{e_i\}_1^n$ и $f = \{f_j\}_1^m$ са базиси на V и V' съответно. Да разгледаме

$$\varphi(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \dots + a_{m1} f_m$$
$$\varphi(e_2) = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \dots + a_{m2} f_m$$
$$\vdots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \dots + a_{mn} f_m$$

и да образуваме следната матрица:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots & \varphi(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \in F_{m \times n}$$

и $\varphi \underset{e \to f}{\longleftrightarrow} A_{e \to f} = A$

Деф. Матр. A наричаме матрица на л. изобр. φ в базисите e и f на V и V'.
Матр. A е образувана като по стълбове се нареждат координатите на образите $\varphi(e_i)$ на бъл вект. $\{e_i\}_1^n = e$ на V изразени в базиса $f = \{f_j\}_1^m$ на V'.

В частност м. на л. опр. $\varphi \in Hom\, V$ в базиса $e = \{e_i\}_1^n$ се образува като:

$$\varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n$$
$$\varphi(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n \qquad и$$
$$\vdots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n$$

$$\varphi \in Hom\, V \xleftrightarrow[e]{} A_e = A = \left(a_{ij}\right) \in M_n(F)$$

$$A = \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_n) \end{array}$$
$$A = \left(\downarrow \quad \downarrow \quad \sim \quad \downarrow \right)_{n \times n}$$

Вярно и обратното твърдение, т.е

ако $A \in M_n(F) \Rightarrow A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & \dots\ b_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \exists!$

$\exists!\ \varphi \in \operatorname{Hom} V : \varphi(e_i) = b_i,\ i = \overline{1,n}$

$\dim V = n$ и $\varphi \underset{e}{\Leftrightarrow} A = A_e$

Нека V, $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, $w = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

и $\varphi(w) = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$, $\varphi \underset{e}{\Leftrightarrow} A$

<u>Тв!</u> $\varphi(w)_e = A_e w_e \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Действия с лин. изображения

Нека V и V' са л. пр-ва над г. поле F

и $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, V')$ и $\psi \in \operatorname{Hom}(V, V')$

и (когато V и V' са крм. л. пр.) нека $\{e_i\}_1^n = e$

и $\{f_j\}_1^m = f$ са базиси на V и V', съответно.

Нека $\varphi \xrightarrow[e \to f]{} A \in F_{m \times n}$; $\psi \xrightarrow[e \to f]{} B \in F_{m \times n}$

и $\lambda \in F$.

Def: а) Сума на л. и. $\varphi+\psi$ дефинираме

$$\varphi+\psi : \begin{cases} V \to V' \\ a \to (\varphi+\psi)(a) := \varphi(a)+\psi(a) \end{cases}$$

б) Умножение на л. и. φ по елемент $\lambda \in F$ дефинираме:

$$\lambda\varphi : \begin{cases} V \to V' \\ a \to (\lambda\varphi)(a) := \lambda . \varphi(a) \end{cases}$$

Тв: а) ако $\varphi, \psi \in Hom(V, V') \Rightarrow \varphi+\psi \in Hom(V, V')$

б) ако $\varphi \in Hom(V, V')$, $\lambda \in F \Rightarrow \lambda\varphi \in Hom(V, V')$

Тв: V, $\dim V = n$, V', $\dim V' = m$ и e и f базиси на V и V'. Тогава:

а) $\varphi+\psi \xrightarrow[e \to f]{} A+B \in F_{m\times n}$

б) $\lambda\varphi \xrightarrow[e \to f]{} \lambda A \in F_{m\times n}$

в) $Hom(V, V')$, $\varphi+\psi$, $\lambda\varphi$ и $A1 \div A8$ за л. простр. над ч. поле F са в сила, т.е. $Hom(V, V')$ л. простр. над F.

г) $Hom(V,V') \cong F_{m\times n}$

$$\varphi \in Hom(V,V') \xrightarrow[e\to f]{} A_{e\to f} = \underset{\sim}{A}$$

Нека V, V', V'' са три л. пр-ва над F и $e=\{e_i\}_1^n$, $f=\{f_j\}_1^m$, $h=\{h_l\}_1^k$ са базиси съответно на V, V' и V''. Нека

$\varphi \in Hom(V,V')$ и $\varphi \xrightarrow[e\to f]{} A \in F_{m\times n}$

$\psi \in Hom(V',V'')$ и $\psi \xrightarrow[f\to h]{} B \in F_{k\times m}$

<u>Деф</u> Композиция (умножение) на ~~л.~~ л. преобр. дефинираме:

$$\psi\circ\varphi : \begin{cases} V \longrightarrow V'' \\ a \to \psi(\varphi(a)) \end{cases}, \text{ те } (\psi\circ\varphi)(a) := \psi(\varphi(a))$$

<u>Тв:</u> а) $\psi\circ\varphi \in Hom(V,V'')$;

б) $\psi\circ\varphi \xrightarrow[e\to h]{} C = BA \in F_{k\times n}$

<u>Заб:</u> С.р. да се проверят $\varphi+\psi$, $\lambda\varphi$, $\psi\circ\varphi$ л. преобр.

Ранг и дефект на линейно изображение

Нека V и V' л. пр-ва над ч. поле F и $\varphi \in Hom(V, V')$.

Ако $\dim V = n$ и $\dim V' = m$, нека $e = \{e_i\}_1^n$ и $f = \{f_j\}_1^m$ са базиси на V и V' и $\varphi \underset{e \to f}{\longleftrightarrow} A \in F_{m \times n}$

<u>Деф</u>: Ядро на л. изображение φ наричаме

$$Ker\varphi := \{w \in V \mid \varphi(w) = \theta_{V'}\}.$$

<u>Тв.</u> а) $Ker\varphi \leq V$;

б) $Ker\varphi = \{\theta_V\} \iff \varphi$ - инекция;

<u>Док</u>: а) $\forall\, u, w \in Ker\varphi$, $\forall\, \alpha, \beta \in F$

$\varphi(u) = \theta_{V'}$, $\varphi(w) = \theta_{V'}$. Тогава

$$\varphi(\alpha u + \beta w) \underset{л.и.}{=} \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(w) = \alpha\theta_{V'} + \beta\theta_{V'} = \theta_{V'}$$

$\Rightarrow \alpha u + \beta w \in Ker\varphi \underset{кр.}{\Longrightarrow} Ker\varphi \leq V$;

б) $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\theta_V\}$ и нека $u \neq w$, $u, w \in V$ и да допуснем, че φ не е инективно
$\varphi(u) = \varphi(w) \Leftrightarrow \varphi(u) - \varphi(w) = \theta_{V'} \Leftrightarrow$

$$\varphi(u-w) = \theta_{V'} \Rightarrow u-w \in \mathrm{Ker}\,\varphi = \{\theta_V\}$$

$\Rightarrow u - w = \theta_V \Leftrightarrow u = w$ противоречие
$\Rightarrow \varphi$ инективно.

Обратно ако φ инекция и допуснем, че $\exists\, w \neq \theta, w \in V : w \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, то
$\varphi(w) = \theta_{V'} = \varphi(\theta_V) \Rightarrow \varphi$ не е инекция
противоречие $\Rightarrow$ $\underline{\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\theta_V\}}$.

<u>Def</u>. Дефект на л.и. $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V')$ е $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi$ и отбелязваме с наричаме

$$d(\varphi) = \dim \mathrm{Ker}\,\varphi.$$

<u>Def</u>. Образ на л. изобр. $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V')$ дефинираме

$$\mathrm{Im}\,\varphi := \{u \in V' \mid \exists w \in V : \varphi(w) = u\} = \{\varphi(w) \mid w \in V\}.$$

Тв. $\operatorname{Im}\varphi \leq V'$.

Дво: $\forall a, b \in \operatorname{Im}\varphi$, $\forall \alpha, \beta \in F \Rightarrow$

$a \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists c \in V : \varphi(c) = a$
$b \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists d \in V : \varphi(d) = b$ $\Rightarrow$

$\alpha a + \beta b \in \operatorname{Im}\varphi$, т.като $\varphi(\alpha c + \beta d) = \alpha a + \beta b$

$\underset{\text{КП}}{\Rightarrow} \operatorname{Im}\varphi \leq V'$.

Деф. Ранг на л.и. $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, V')$ определяме като $\dim \operatorname{Im}\varphi$ и означаваме

$r(\varphi) = \dim \operatorname{Im}\varphi$.

Тв: Нека $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, V')$, $e = \{e_i\}_1^n$ и $f = \{f_j\}_1^m$ бази на V и V' и $\varphi \underset{e \to f}{\longleftrightarrow} A \in F_{m \times n}$.

Тогава $r(A) = r(\varphi)$.

Дво: $A = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_n) \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}_{m \times n}$ $\quad r(A) = r(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \dim \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$

$\operatorname{Im}\varphi = \ell(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ $\quad \dim \operatorname{Im}\varphi = r(\varphi)$

Th (за ранг и дефект на л.и. φ): Нека V е n-мерно л. п-во и $\varphi \in Hom(V, V')$.
Тогава $r(\varphi) + d(\varphi) = n = \dim V$.

Дво: частни сл.: 1) $Ker\,\varphi = \{\theta_V\} \Rightarrow d(\varphi) = 0 \Rightarrow$
$Im\,\varphi = V \Rightarrow r(\varphi) = n = \dim V \Rightarrow n + 0 = n$

2) $Im\,\varphi = \{\theta_{V'}\} \Rightarrow r(\varphi) = 0 \Rightarrow d(\varphi) = n$, т.е.
$Ker\,\varphi = V \Rightarrow 0 + n = n$.

Нека $0 < d(\varphi) \overset{=d}{<} n$ и нека $e_1, \dots, e_d$ базис на $Ker\,\varphi$. Допълваме този базис до б. на V, т.е. $\underbrace{e_1, \dots, e_d}_{Ker\,\varphi}, e_{d+1}, \dots, e_n$ е б. на V.

Ще покажем, че $\varphi(e_{d+1}), \dots, \varphi(e_n)$ е базис на $Im\,\varphi \Rightarrow r(\varphi) = n - d$.

Нека $w \in Im\,\varphi \Rightarrow \exists u \in V \Rightarrow \exists!\, \alpha_i : u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_d e_d + \alpha_{d+1} e_{d+1} + \dots + \alpha_n e_n$

$w = \varphi(u) = \alpha_1 \underbrace{\varphi(e_1)}_{=\theta_{V'}} + \dots + \alpha_d \underbrace{\varphi(e_d)}_{=\theta_{V'}} + \alpha_{d+1}\varphi(e_{d+1}) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) \Leftrightarrow$

$w = \varphi(u) = \alpha_{d+1}\varphi(e_{d+1}) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) \Rightarrow$

$\operatorname{Im}\varphi = \ell(\varphi(e_{d+1}), \ldots, \varphi(e_n))$.

Остава да проверите $\{\varphi(e_j)\}_{d+1}^{n}$ е ЛНЗ сма

Нека $\mu_{d+1}\varphi(e_{d+1}) + \mu_{d+2}\varphi(e_{d+2}) + \ldots + \mu_n\varphi(e_n) = \theta_{V'}$

$$\Leftrightarrow \varphi(\underbrace{\mu_{d+1}e_{d+1} + \ldots + \mu_n e_n}_{c}) = \theta_{V'} \Rightarrow$$

$c \in \operatorname{Ker}\varphi$ и $\{e_i\}_1^d$ са базис на $\operatorname{Ker}\varphi$

$\Rightarrow \exists!\ \mu_j, j=\overline{1,d}: \quad c = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_d e_d$

$$\mu_{d+1}e_{d+1} + \ldots + \mu_n e_n = c = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_d e_d \Leftrightarrow$$

$$-\mu_1 e_1 - \ldots - \mu_d e_d + \mu_{d+1}e_{d+1} + \ldots + \mu_n e_n = \theta_V$$

$\{e_i\}_1^n$ е базис на $V \Rightarrow$ ЛНЗ сма $\underset{def}{\Rightarrow}$

$$-\mu_1 = \ldots = -\mu_d = \boxed{\mu_{d+1} = \ldots = \mu_n = 0}$$

$\underset{def}{\Rightarrow} \{\varphi(e_j)\}_{d+1}^{n}$ са ЛНЗ сма $\underset{def}{\Rightarrow}$ базис на $\operatorname{Im}\varphi$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi = r(\varphi) = n-d \Rightarrow r(\varphi) + d(\varphi) = n-d+d = n$

Заб. Ако $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$

$\mathrm{Ker}\,\varphi \leq V$ и $\mathrm{Im}\,\varphi \leq V$

и $d(\varphi) + r(\varphi) = n$, но в общия случай не е изпълнено че $\mathrm{Ker}\,\varphi \oplus \mathrm{Im}\,\varphi = V$, т.е. $\mathrm{Ker}\,\varphi \oplus \mathrm{Im}\,\varphi \neq V$

Обратим линеен оператор

Нека V е n-мерно л. простр. и $e = \{e_i\}_{1}^{n}$ е базис на V, $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$ и $\varphi \underset{e}{\leftrightarrows} A \in M_n(F)$.

Деф. Казваме, че φ е обратим л. опер., ако $\exists\, \varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}\, V : \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathcal{E}_V = \mathcal{E}$ тъжд. опер

обратен на φ

Тв. Ако φ е обратим, то φ^{-1} еднозначно се определя от φ, т.е. $\exists!\, \varphi^{-1}$.

Th: Ако $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$ е обратим и $\varphi \underset{e}{\leftrightarrows} A$, то A обр. и $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}\, V \underset{e}{\leftrightarrows} A^{-1} \in M_n(F)$

Th Нека $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, V, $e=\{e_i\}_1^n$ е б. на V.

Следните твърдения са еквивалентни:

а) φ е обратим линеен оп.;

б) $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, т.е $d(\varphi)=0$ и φ-инекция

в) $\operatorname{Im}\varphi = V$, т.е $r(\varphi)=n$ и φ-сюрекция

$\Rightarrow$ $\boxed{\varphi \text{ е изоморфизъм}}$

г) φ изобразява всеки базис на V в базис на V

д) матрицата на φ в кой да е базис на V е обратима м.

Th: Ако $\varphi, \tau \in \operatorname{Hom} V$, τ-обратим л.оп., тогава са в сила следните равенства:

а) $r(\varphi) = r(\varphi\tau) = r(\tau\varphi) = r(\tau^{-1}\varphi\tau)$

б) $r(A) = r(AT) = r(TA) = r(T^{-1}AT)$

$\varphi \underset{e}{\Leftrightarrow} A$, $\tau \underset{e}{\Leftrightarrow} T$, $\tau^{-1} \underset{e}{\Leftrightarrow} T^{-1}$

T обратима

Смяна на базиса

Нека V е n-мерно л. пр-во над т.и. F и $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$, $u, w \in V$ и нека $e = \{e_i\}_1^n$ и $f = \{f_i\}_1^n$ са два базиса на V.

Нека $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = u_e$
$w = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \dots + \beta_n f_n = w_f$

$e \to f \Leftrightarrow \exists!\ \tau \in \mathrm{Hom}\, V$ обратим л. опр. $\tau(e_i) = f_i, \overline{1,n}$

$\Leftrightarrow \tau \underset{e}{\rightleftarrows} T = T_{e\to f}$ и я наричаме

матрица на преход от базиса $\underline{e}$ в $\underline{f}$

като:

$$\tau(e_1) = f_1 = \tau_{11} e_1 + \tau_{21} e_2 + \dots + \tau_{n1} e_n$$
$$\tau(e_2) = f_2 = \tau_{12} e_1 + \tau_{22} e_2 + \dots + \tau_{n2} e_n \quad \Rightarrow$$
$$\vdots$$
$$\tau(e_n) = f_n = \tau_{1n} e_1 + \tau_{2n} e_2 + \dots + \tau_{nn} e_n$$

$$\tau \underset{e}{\leftrightarrow} T = T_{e\to f} = \begin{array}{c} f_1\, f_2\, f_n \\ \begin{pmatrix} \tau_{ij} \end{pmatrix}_{n\times n} \end{array} \in M_n(F)$$

и е ясно, че T е обратима и $T^{-1} = T_{f\to e}$.

Вярно е и обратното, т.е. $\forall$ обратима

м. $T \in M_n(F)$, $\det T \neq 0 \Rightarrow \exists\, T^{-1} \in M_n(F)$

е матрица на прехода от базис в базис

т.е.

$$T = (\tau_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \tau(e_i) = f_i$$

спр. $e = \{e_i\}_1^n$

за n-мерно л. пр-во V над F

т.е. $\exists!\, \tau \in \operatorname{Hom} V$ е обратим и тогава

τ и T се свързват вз. р. и матрица

на прехода от б. $e = \{e_i\}_1^n$ в б. $f = \{f_i\}_1^n$.

Тв: В сила е равенството:

$$\boxed{V_e = T_{e\to f} V_f} \qquad V_e = \tau(V_f)$$

Заб. $U_e = T_{e\to f}\, \underline{U_f}$ м. ур.

$\underline{W_e} = T_{e\to f}\, W_f$ умн. матр [illegible] при смяна на базиса) Нека V е n-м. л. пр-во над пол. F и $e=\{e_i\}_1^n$ и $f=\{f_i\}_1^n$ са два базиса на V.

Нека $\varphi \in \mathrm{Hom}\,V$ и $\varphi \xrightarrow[e]{} A = A_e$, $\varphi \xrightarrow[f]{} B = B_f$.

Тогава $B = B_f = T^{-1}A_eT = T^{-1}AT$, където $T = T_{e\to f}$ е м. на прехода от б. e в б. f.

$$\boxed{B = T^{-1}AT}$$

Док: $e \to f \iff \exists!\, \tau \in \mathrm{Hom}\,V$ обратим: $\tau(e_i)=f_i,\ i=\overline{1,n}$ и $\tau \xrightarrow[e]{} T = T_{e\to f}$ обратима м.

$$\varphi \xleftrightarrow[f]{} B = \begin{pmatrix}\varphi(f_1) & \dots & \varphi(f_n)\\ \downarrow & & \downarrow\end{pmatrix} = (b_{ij})_{n\times n} \text{ като}$$

$$\varphi(f_j) = b_{1j}f_1 + b_{2j}f_2 + \dots + b_{nj}f_n,\ j=\overline{1,n}$$

и нека да действаме с τ^{-1} върху горното рав-во $\Rightarrow \tau^{-1}(\varphi(f_j)) = b_{1j}\,\tau^{-1}(f_1)+\dots+b_{nj}\,\tau^{-1}(f_n)$

$\iff$

$$(\tau^{-1}\circ\varphi)(f_j) = \tau^{-1}(\varphi(f_j)) = b_{1j}e_1 + \dots + b_{nj}e_n$$

$\tau(e_i) = f_i$ и $\tau^{-1}(f_i) = e_i \Rightarrow$

$$(\tau^{-1}\circ\varphi)(\tau(e_j)) = b_{1j}e_1 + \dots + b_{nj}e_n \Leftrightarrow$$

$$(\tau^{-1}\circ\varphi\circ\tau)(e_j) = b_{1j}e_1 + \dots + b_{nj}e_n$$

$$\tau^{-1}\varphi\tau \xrightarrow{e} B = B_f \xleftarrow{f} \varphi$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau \xrightarrow{e\to f} T \\ \varphi \xrightarrow{e} A \\ \tau^{-1} \xrightarrow{f\to e} T^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \tau^{-1}\varphi\tau \xrightarrow{e} T^{-1}AT = B$$

$$\boxed{B_f = T^{-1}A_eT}, \ T_{e\to f}$$

Подобни матрици

Def: Казваме, че две кв. м. $A, B \in M_n(F)$ са подобни и означаваме $A \sim B$, ако $\exists$ обратима м. $T \in M_n(F)$, т.че

$$B = T^{-1}AT.$$

Заб Ако $\varphi \in \operatorname{Hom} V$, $\dim V = n$ и $\underline{e}$ и $\underline{f}$ са два б. на V, то $\varphi \underset{e}{\leftrightarrows} A$ и $\varphi \underset{f}{\leftrightarrows} B$ както $B = T^{-1}AT$, където $T = \underset{\text{обратим.}}{T_{e \to f}}$ $\Rightarrow$

Всички матрици на един линеен опер. в n-м. л. простр. V са подобни.

Вярно е и обратното твърдение.

Тв: Ако $A, B \in M_n(F)$, $A \sim B$, то $\exists \varphi \in \operatorname{Hom} V$ в $\dim V = n$ и два базиса $e = \{e_i\}_1^n$ и $f = \{f_i\}_1^n$ на V, в които φ има матрици съответно A и B.

Док: $A \sim B \Rightarrow \exists$ обратима м. T, $\det T \neq 0$, $r(T) = n$.

$\Rightarrow \exists$ обратим л. опер $\tau \in \operatorname{Hom} V$: $\tau(e_i) = f_i$, $n = \dim V$

където f_i са векторстълбовете на м. T ($\{f_i\}$ са ЛНЗ $\Rightarrow \{f_i\}$ са също базис на V)

Тогава $B = T^{-1}AT$, $T_{e \to f}$; $A \underset{e}{\leftrightarrows} \varphi$, $B \underset{f}{\leftrightarrows} \varphi$

<u>Сл</u>: Подобните матрици $(A \sim B)$ имат:

а) равни детерминанти;

б) равни рангове;

<u>Дв</u>: а) $A \sim B$, $\exists$ обр. м-т T : $B = T^{-1}AT$

$$\underset{\det B}{\underset{\parallel}{\det(T^{-1}AT)}} \underset{\text{умн } \det}{=} \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T \underset{F}{=}$$

$$= \det T^{-1} \cdot \det T \cdot \det A \underset{\text{умн } \det}{=} \underset{\det E = 1}{\underset{\parallel}{\det T^{-1}T}} \cdot \det A \Rightarrow$$

$$\det B = \det A;$$

б) $r(T^{-1}AT) = r(A) = r(B)$

Алгоритъм

Нека V, e_1, e_2, e_3 - б. на V и $\varphi \in \mathrm{Hom}\,V$: $\varphi(a_i) = b_i$, $i = 1,2,3$. Да се намери: или докаже

а) коректност на $\varphi \in \mathrm{Hom}\,V$;

$? \; \varphi \xrightarrow[e]{} A_e = A, \quad \varphi \xrightarrow[a]{} B_a$

б) ако u_e и w_a, $u, w \in V$, то

$? \; \varphi(u)_e, \; \varphi(w)_e, \; \varphi(u)_a, \; \varphi(w)_a$

в) ? б. на $\mathrm{Ker}\,\varphi$

г) ? б. на $\mathrm{Im}\,\varphi$

д) B^{2022} (когато A е в хубав вид)

Реш. а) $\{a_i\}_1^n$ е базис на V, $r(a_1, a_2, a_3) = 3$, $\det\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\{a_i\}_1^3$ ЛНЗ

$\underset{\text{Т}_1}{\Rightarrow} \exists! \, \varphi \in \mathrm{Hom}\,V : \varphi(a_i) = b_i, \, i = \overline{1,3}$

Разглеждаме следната СЛУ

$$\left|\varphi(a_i)=b_i \iff \right| \alpha_{1i}\varphi(e_1)+\alpha_{2i}\varphi(e_2)+\alpha_{3i}\varphi(e_3)= \underset{i=1,2,3}{(\beta_{1i},\beta_{2i},\beta_{3i})}$$

$i=1,2,3$

с неизвестни $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$

$$\left(\alpha_{1i}\ \alpha_{2i}\ \alpha_{3i} \,\middle|\, (\beta_{1i},\beta_{2i},\beta_{3i})\right) \sim (E| \Rightarrow \begin{matrix}\varphi(e_1)\\ \varphi(e_2)\\ \varphi(e_3)\end{matrix}$$

$$\varphi \xrightarrow[e]{} A_e = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$e \to a \quad и \quad \underset{\text{образ}}{T_{e\to a}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$\varphi \xrightarrow[a]{} B_a = \underbrace{T^{-1}A}\,T$$

Удачно полагане $\quad K = T^{-1}A \quad \underset{\text{отляво}}{/T}$

$$B = KT \quad като \quad A = TK$$

б) $u_e = T_{e\to a} u_a$

$$(T|A|u_e) \sim \dots \sim (E|K|u_a)$$

$$\Rightarrow \boxed{B = B_a = KT} \quad \begin{matrix} u_e, u_a \\ w_e, w_a \\ \| \\ Tw_a \end{matrix} \Rightarrow$$

а)

$\varphi(u)_e = A u_e \qquad \varphi(u)_a = B u_a$

$\varphi(w)_e = A w_e \qquad \varphi(w)_a = B w_a$

в) базис на $\operatorname{Ker}\varphi = \{ w \in V \mid \varphi(w) = 0 \}$

$\operatorname{Ker}\varphi : \mid Ax = 0$ и една ФСР е базис на $\operatorname{Ker}\varphi$

г) $\operatorname{Im}\varphi = \ell(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)) \Rightarrow$

базис на $\operatorname{Im}\varphi$ е една МЛНП на с-ма $\{\varphi(e_i)\}_1^3$.

д) $B^{2022} = (T^{-1}AT)^{2022} =$

$= T^{-1}AT\,T^{-1}AT \ldots T^{-1}AT =$

$= T^{-1}A\,TT^{-1}A\,TT^{-1}A \ldots TT^{-1}AT =$

$= T^{-1}A^{2022}T$

и лесно се пресмята A^{2022}.