Лекция 9 24.11.2021г

Ранг на система в-ри и ранг на матрица

Деф
Нека F е ч. поле и $A \in F_{m\times n}$. Фикс $1 \le k \le \min(m,n)$ и избираме произволни k-реда и k-стълба от A и образуваме кв. м. D от общите им елти. $\det D$ наричаме минор от ред k, т.е

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & & & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

$1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_k \le m$ и $\det D$ е минор от ред k
$1 \le j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_k \le n$

Пр
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 2 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 2 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}_{3\times 3}$$

минор от 3-ти ред

Def Една матрица $A \in F_{m\times n}$ има ранг $\underline{r}$ и означаваме $r(A) = \text{rang}(A) = \text{rank}(A) = r$ ако $\exists$ минор $\neq 0$ от ред r и всеки минор от $(r+1)$-ред е $= 0$; $r(\mathbb{0}) := 0$;

Заб. Ако $r(A) = r$, то всички минори от ред $k > r$ ~~…~~ са нулеви.

Заб. $A \in F_{m\times n}$, $r(A) = r \Rightarrow A^t \in F_{n\times m}$, $r(A^t) = r(A) = r$, т.к. $\det A^t = \det A$

~~Def~~. Пр.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}_{5\times 6} \qquad r(A) \stackrel{?}{=} 4$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 4$$

Нека V е л. пр. над ч. поле F и $\{a_i\}_1^k$, $a_i \in V$.

Деф. Казваме, че системата вектори $\{a_i\}_1^k$ има ранг r и означаваме $r(\{a_i\}_1^k) = r(a_1, a_2, \dots, a_k) = r$, ако в системата $\exists$ r на брой ЛНЗ вектори и всеки друг вектор е тяхна лин. комб., т.е.

$r(a_1, \dots, a_k) = r$, то $\exists$ МЛНЗП $\{a'_1, \dots, a'_r\}$:

$\forall a_j \in l(\{a'_i\}_1^r)$

$r(a_1, a_2, \dots, a_k) = r(\underbrace{a'_1, \dots, a'_r}_{\text{база}}) = \dim l(a_1, \dots, a_k)$

Пр: $a_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$a_2 = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$

$a_3 = (1, 3, 5, 7, 9, 11) = a_1 + a_2 \in l(a_1, a_2)$

$a_4 = (0, 2, 4, 6, 8, 10) = 2a_2 \in l(a_1, a_2)$

$a_5 = (0, 0, 1, 2, 3, 4) \notin l(a_1, a_2)$

$r(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = r(a_1, a_2, a_5) = 3$

една МЛНЗП е $\{a_1, a_2, a_5\}$

друга МЛНЗП $\{a_1, a_4, a_5\}$

Тh (ранг на матрица): Нека F е ч. поле и $A \in F_{m\times n}$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ като с $a_1, \dots, a_m$ и $b_1, \dots, b_n$ ~~реда~~ означим съответно вектор-редовете и вектор-стълбове на м. A.

Тогава $r(A) = r(a_1, \dots, a_m) = r(b_1, \dots, b_n) = r_A$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \downarrow b_1 & \downarrow b_2 & \downarrow b_3 & \downarrow b_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \to a_1 \\ \to a_2 \\ \vdots \\ \to a_m \end{array} \end{array}$$

Дво: Нека $r(A) = r = r(A^t)$, то е достатъчно да покажем, че $r(A) = r = r(b_1, \dots, b_n)$.

Б.О.О. можем да считаме, че A има вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ a_{r+11} & a_{r+12} & \dots & a_{r+1r} & a_{r+1r+1} & \dots & a_{r+1n} \\ \dots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & a_{mr+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

$\det D = \Delta \neq 0$

Тогава

Образуване следните матрици

$$D_{\bar{i}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2l} \\ - & - & - & & | \\ - & - & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{\bar{i}1} & a_{\bar{i}2} & \dots & a_{\bar{i}r} & a_{\bar{i}l} \end{pmatrix} \quad (r+1)\times(r+1)$$

$r < l \le n$

$1 \le \bar{i} \le m$

$D = (a_{ks})_{r\times r}$, $\det D \neq 0$ $\Rightarrow$ $\{b_1' \; b_2' \dots b_r'\}$ вектор-ите на D са ЛНЗ с-ма вр-и

$\Downarrow$

$A = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_r & \Big| & \\ \downarrow & & \downarrow & \Big| & \end{pmatrix}$ $\{b_1, \dots, b_r\}$ са ЛНЗ с-ма вр-и

Ще покажем, че $\forall\, b_l \in \ell(b_1, \dots, b_r)$,

$r < l \le n \Rightarrow \{b_1, \dots, b_r\}$ МЛНЗП

на $\{b_j\}_1^n \Rightarrow r(b_1, \dots, b_n) = r = r(A)$.

Ако $1 \le \bar{i} \le r \Rightarrow \det D_{\bar{i}} = 0$, защото имаме два равни реда в $D_{\bar{i}}$.

Ако $r+1 \le \bar{i} \le m \Rightarrow \det D_{\bar{i}} = 0$, т.к. $r(A) = r$ и всеки минор от $r+1$-ред $\Rightarrow \det D_{\bar{i}} = 0$.
е такъв минор

$$\det \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{ij} & \vdots & a_{1l} \\ \Delta & \vdots & a_{2l} \\ & & \vdots \\ a_{r1} \; \cdots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{i1} \; \cdots & a_{ir} & a_{il} \end{vmatrix} \underset{\text{разв. по } (r+1)\text{-ред}}{=} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} +$$
$$\det \Delta_i = 0$$

$$\ldots + a_{ir}A_{ir} + a_{il}(-1)^{r+1+r+1}\underset{\neq 0}{\Delta} =$$

$$A_{i1} = (-1)^{r+1+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} & a_{1l} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rr} & a_{rl} \end{vmatrix}$$ и независи от избора на i

Аналогично A_{ik}, $k = \overline{1,r}$ независят от избора на i $\Rightarrow$ $A_{ik} = A_k$, $k = \overline{1,r}$

$\Rightarrow$

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \ldots + a_{ir}A_r + a_{il}\underset{\neq 0}{\Delta} = 0 \iff$$

$$a_{il} = \underbrace{-\frac{A_1}{\Delta}}_{\lambda_1} a_{i1} \underbrace{-\frac{A_2}{\Delta}}_{\lambda_2} a_{i2} - \ldots \underbrace{-\frac{A_r}{\Delta}}_{\lambda_r} a_{ir} \quad \in F!$$

$1 \leq i \leq m$

$$a_{il} = \lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \ldots + \lambda_r a_{ir} \Rightarrow$$

за $1 \leq i \leq m$, $r < l \leq n$
$$b_l = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_r b_r \Rightarrow$$

$\Rightarrow b_l \in \ell(b_1,\dots,b_r) \Rightarrow \exists$ МЛНЗП на

$\{b_j\}_1^n$, която е $\{b_j\}_1^r \Rightarrow$

$r(b_1,\dots,b_n) = r(\underbrace{b_1,\dots,b_r}_{\text{ЛНЗсист}}) = r = r(A) =$

$= r(A^t) = r(a_1,\dots,a_m) \Rightarrow$ Тh е доказ

<u>Сл!</u> $A \in M_n(F)$, то $r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

и $r(A) = r < n \Leftrightarrow \det A = 0$.

Система линейни уравнения (СЛУ). Хомогенни СЛУ (ХСЛУ). Т-ма Руше

Нека е зададена СЛУ

$$(1)\ \left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ – м. на (1); $\bar{A} = (a_{ij} | b_i)$ – разширена м. на (1)

Една СЛУ е съвместима $\iff$ $\exists$ решение на (1)

Една СЛУ (1) е несъвместима $\iff$ няма реш. (1) $\iff$ $\bar{A} = (a_{ij} | b_i) \sim \dots \sim (0\,0 \dots 0 | b'_s)_s,\ b'_s \neq 0$

Една СЛУ е съвместима и определена $\iff$ $\exists!$ реш. на СЛУ. $\bar{A} \sim (\diagdown | \vdots)$ $\Delta \neq$ by det

Една СЛУ е съвместима и неопределена $\iff$ $\exists$ безброй много реш. на СЛУ. трапецовиден вид

Th (Руше) Една СЛУ (1) е съвместима $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$.

Док: От предния въпрос имаме че

$r(A) = r(b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$r(\bar{A}) = r(b_1, b_2, \ldots, b_n, b) \geq r(A)$.

Тогава $r(\bar{A}) = r(A) \Leftrightarrow b \in \ell(b_1, \ldots, b_n)$

$\Leftrightarrow \exists\, \lambda_i \in F,\ i = \overline{1,n} : b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n$

$\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ е реш на $(1) \Leftrightarrow (1)$ съвместима

Нека (1) СЛУ, е съвместима, че $r(\bar{A}) = r(A) = r$ и б.о.о. можем да разгледаме

$$(1) \Leftrightarrow (1') \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

$r \leq n$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Ако $r=n$ по формули на Крамер $\Rightarrow \exists!$ реш. на

$$(1')\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+\dots+a_{1r}x_r=b_1 \\ \text{— — - —} \\ a_{r1}x_1+\dots+a_{rr}x_r=b_r \end{array}\right.$$

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$i=\overline{1,r}$

$\det A=\Delta=|a_{ij}|_{r\times r}\neq 0$ (1) съвм. и определена с-ма

Ако $r<n$

$$(1'')\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1+\dots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-\dots-a_{1n}x_n \\ \text{— — — -} \\ a_{r1}x_1+\dots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\dots-a_{rn}x_n \end{array}\right.$$

$\det \Delta=\Delta=|a_{ij}|_{r\times r}\neq 0$ (1) съвместима и неопределена с-ма

$x_{r+1},\dots,x_n$ – свободни неизвестни

За всяко полагане $x_{r+1}=s_{r+1},\dots,x_n=s_n$ на свободните неизвестни достигаме до (1') и по формули на Крамер може да пресметнем $!$ т.е. $x_1=s_1,\dots,x_r=s_r$, определени от $s_{r+1},\dots,s_n$, т.е.

$(s_1, \ldots, s_r, \underbrace{s_{r+1}, \ldots, s_n})$ реш на $(1'') \Leftrightarrow (1)$

$(s_1', \ldots, s_r', s_{r+1}', \ldots, s_n')$ реш на (1)

то двете решения са 1 и също $\Leftrightarrow$

$s_{r+1} = s'_{r+1}, \ldots, s_n = s'_n$.

ХСЛУ

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

(2) е винаги съвместима тк $\theta \in F^n$ е реш на (2)

$r(A) = r < n$ – сист. (2) съвм и неопределена

$r(A) = r \le m < n$

$\Downarrow$ б.о.о.

$$(2')\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_n \longleftrightarrow V = F^n$ л. простр. над F

Ако $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ са реш. на (2),

то $\forall \lambda, \mu \in F \Rightarrow \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \mu(\beta_1, \dots, \beta_n)$ е реш. на (2) $\underset{кр.}{\Rightarrow}$

$\{$реш. на (2)$\} \leq F^n = V$

Мн-вото от реш. на една ХСЛУ е подпр-во на $V = F^n$.

Пр. $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$

$a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0$

$a_{11}\beta_1 + \dots + a_{1n}\beta_n = 0$

$a_{11}(\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1) + \dots + a_{1n}(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) \underset{F}{=}$

$= \lambda\underbrace{(a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n)}_{=0} + \mu\underbrace{(a_{11}\beta_1 + \dots + a_{1n}\beta_n)}_{=0}$

За всяко друго ур. от (2) аналог. проверка