Лекция 3 13.10.2024г.

$$F_{m\times n}=\{A=(a_{ij})_{m\times n} \mid a_{ij}\in F\}$$

$$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})=C$$

$$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n},\ \lambda\in F$$

$$F_{n\times n}=M_n(F)=\{A=(a_{ij}) \mid \text{квадратни}\}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

втори диагонал на кв. м. А

главен диагонал

$$F_{1\times n}=F^n=\{\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n) \mid a_i\in F\}$$

наредени n-орки

Триъгълни матрици $\le M_n(F)$

долно Δ-на; горно Δ-на

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ * & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & 0 & a_{1n} \\ & \iddots & \\ a_{n1} & * & \end{pmatrix}_{n\times n} ; \quad \begin{pmatrix} * & & a_{1n} \\ & \iddots & 0 \\ a_{n1} & & \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad \begin{pmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \iddots & 0 \\ a_{n1} & & \end{pmatrix}_{n\times n}$$

диагонална кв. м.

диаг. по 2 диагонал

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}$$ – скаларни кв. матр. $\lambda \in F$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$ единична матрица от n-ти ред

Дефиниране транспониране на матрица: $A \in F_{m\times n}$ и транспонирана на м. A наричаме м-та $A^t \in F_{n\times m}$, т.е $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $A^t=(a_{ji})_{n\times m}$

$\forall \lambda, \mu \in F$, $A, B \in F_{m\times n}$

$$(\lambda A+\mu B)^t = \lambda A^t + \mu B^t$$

$$(A^t)^t = A$$

Ако $A=(a_{ij}) \in M_n(F)$, $A^t \in M_n(F)$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{ji} \\ a_{ij} & a_{22} & \\ & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix} \quad A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{ij} \\ a_{ji} & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$F_{m\times n}$, $A=(a_{ij})\in F_{m\times n}$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+$$

$$+3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Матрицы единицы $E_{ij}\in F_{m\times n}$

$$E_{ij}=\begin{array}{c c}& j\\ i & \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}\end{array},\quad \begin{matrix} i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}\end{matrix}$$

$$A=E_{11}+2E_{12}+3E_{13}+4E_{21}+3E_{22}+E_{23}$$

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}=\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij}\in F_{m\times n}$$

Умножение на матрици

$$F_{m\times n} \cdot F_{n\times k} = F_{m\times k}$$

по правилото ред по столб

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \cdot B=(b_{jl})_{n\times k} = C=(c_{il})_{m\times k}$$

$$c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl}, \quad i=\overline{1,m}, \; l=\overline{1,k}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{1\times 3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}_{1\times 1}$$

$$A_{3\times 4} B_{4\times 2} = C_{3\times 2}$$

$$\cancel{B_{4\times 2} A_{3\times 4}}$$

$$AB \neq BA$$

некомутативно действие е умнож. на матр.

Асоциативност на умножението на матрици: $\forall A, B, C \in M_n(F)$

$$(AB)C = A(BC)$$

<u>По-общо</u>: $A_{m\times n} B_{n\times k} C_{k\times s} = D_{m\times s}$

<u>Дво</u>: $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jl})_{n\times k}$,

$C = (c_{lt})_{k\times s}$, $(AB)C \stackrel{?}{=} A(BC)$

$\underset{m\times k}{V} = AB = (v_{il})_{m\times k}$

$\underset{n\times s}{W} = BC = (w_{jt})_{n\times s}$

$(AB)C = VC = X_{m\times s} = (x_{it})_{m\times s}$

$A(BC) = AW = Y_{m\times s} = (y_{it})_{m\times s}$

$X \stackrel{?}{=} Y \Leftrightarrow x_{it} = y_{it}$, $i = \overline{1,m}$, $t = \overline{1,s}$

$$X_{it} = \sum_{l=1}^{k} V_{il} c_{lt} = \sum_{l=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl}\right) c_{lt} \underset{F}{=}$$

$$= \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} c_{lt}$$

$$Y_{it} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} W_{jt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{l=1}^{k} b_{jl} c_{lt}\right) \underset{F}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} a_{ij} b_{jl} c_{lt} \underset{F}{=} \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} c_{lt}$$

$$\Rightarrow X_{it} = Y_{it},\ \begin{matrix} i=\overline{1,m} \\ t=\overline{1,s} \end{matrix} \Rightarrow X = Y$$

$$\Rightarrow (AB)C = A(BC)$$

Свойст. 1) $AB \neq BA$ некомутативност

2) $A(BC) = (AB)C$ асоциативност

3) дистрибутивност (когато са дефинирани)

$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(A+B)C = AC + BC$$

4) $(AB)^t = B^t A^t$

$$(A_{m\times n} B_{n\times k})^t = (C_{m\times k})^t = C^t_{k\times m}$$

$$\cancel{A^t, B^t = A_{n\times m} \cdot B^t_{k\times n}}$$
$m \neq k$

$$B^t A^t = B^t_{k\times \underline{n}} A^t_{\underline{n}\times m} = C^t_{k\times m}$$

5) $\forall A, B \in M_n(F)$ наричаме комутатор на A и B следната матрица

$$[A, B] = AB - BA$$

Комутатора на B и A е $BA - AB$

$$[B, A] = -[A, B]$$

6) $f(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n,\ c_i \in F$ $\quad \forall A \in M_n(F)$

$$f(A) := c_0 A^n + c_1 A^{n-1} + \dots + c_{n-1} A + c_n E$$

стойност на полинома f от м. A

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $f = x^3 + 2x^2 + x + 5$

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$f = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} +$

$+ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$A^n = \underbrace{A \ldots A}_{n\text{-пъти}}$

$= \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

Пермутации и инверсии

$\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

$S_n = \{\sigma : \Omega_n \xrightarrow[\text{биекция}]{} \Omega_n\} = \{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k & \ldots & i_n \end{pmatrix}\}$

пермутация

идентитет

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} = (i_1, i_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = id = (1)$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (21) \in S_2$

транспозиция

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 & \ldots & n \end{pmatrix} = (57) \in S_n$

Инверсия в пермутация

$\sigma \in S_n$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$, т.е.

$i < j \qquad j < i$

Деф Казваме, че σ е четна/нечетна пермутация, ако броят на инверсиите в нея е ~~четен~~/нечетен.

$|S_n| = n!$ – броят на всички пермутации на n-елта

$S_3 \underset{\text{с.р}}{=} ?$

Ако $\sigma \in S_n$ е четна / нечетна, то

$\tau \circ \sigma$ е нечетна / четна пермутация.

Детерминанти

Нека A = (a_{ij}) е квадратна матрица от n-ред, т.е. е от M_n(F). На матрицата A ще съпоставим число (скалар) от полето F, което ще наричаме детерминанта на матрицата A и ще означаваме с detA = |a_{ij}|.

Да разгледаме сист. линейни уравнения (СЛУ)

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_1 = \left(\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}\right) \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,x_2 = \left(\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}\right) \end{cases}$$

$\in M_2(F)$

(1) $\Leftrightarrow$ матрица на системата (1) $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$A \to \det A := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in F$$

главен диаг. – втори диагонал

$$\underset{=}{\underline{a_{11}}}\,\underset{=}{\underline{a_{22}}} - \underset{=}{\underline{a_{12}}}\,\underset{=}{\underline{a_{21}}}$$

Разрешение СЛУ с 3 неизвестными

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} (\det A)\,x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ (\det A)\,x_2 = \begin{vmatrix} & b_1 & \\ & b_2 & \\ & b_3 & \end{vmatrix} \\ (\det A)\,x_3 = \Big| \quad \xrightarrow[\in M_3(F)]{} \begin{vmatrix} a_{ij} & b_1 \\ & b_2 \\ & b_3 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \det A \in F$$

$$\det A := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \in F$$

Правило на Сарус

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \qquad +$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \qquad -$$

Правило на Δ-ците

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad -$$

Пример: Да се пресметне:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1.1.(-1) + 2.2.4 + 0.7.(-3) - \left(4.1.(-3) + 2.7.1 + 0.2.(-1)\right) =$$

$$= \dots$$

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta_1 \\ \Delta x_2 = \Delta_2 \end{cases}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad \Delta_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta_1 \\ \Delta x_2 = \Delta_2 \\ \Delta x_3 = \Delta_3 \end{cases}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{правило}}{\underset{\Delta\text{-ците}}{=}}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \dots, \quad \Delta_2 = \dots$$

$$\Delta_3 = \dots$$