Лекция 9: Основни теореми за диференцируеми функции

1 Локални екстремуми и Теорема на Ферма

Дефиниция 1.1. *Локален екстремум на функция*

Нека $f : D \to \mathbb{R}$. Казваме, че f има локален минимум в точката x_0, ако съществува $\delta > 0$ такова, че $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$ и $f(x_0) \leq f(x)$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Аналогично, ако при горните условия $f(x_0) \geq f(x)$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то f има локален максимум в x_0. Локалните минимуми и локалните максимуми се наричат локални екстремуми.

Пример 1.2. $f(x) = x^2$, дефинирана върху $[-1, 5]$, има локален (и глобален) минимум в точката 0, но няма локален максимум (глобалният максимум се достига в точката 5, но тя не е локален максимум, защото функцията не е дефинирана в нейна околност). Ако разгледаме $f(x) = c$ за константа $c \in \mathbb{R}$, то всяка точка се явява едновременно локален минимум и локален максимум. На лекцията нарисувахме графиките на по-сложни примери.

Теорема 1.3. *Теорема на Ферма*
Нека $f : D \to \mathbb{R}$ и x_0 е точка на локален екстремум за f, като f е диференцируема в x_0. Тогава $f'(x_0) = 0$.

Доказателство. Б.о.о. считаме, че x_0 е точка на локален максимум, т.е. съществува $\delta > 0$ такова, че $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$ и имаме $f(x_0) \geq f(x) \ \ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Разглеждаме производната $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Имаме два случая - x да клони към x_0 отляво и отдясно. Ако $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{и следователно} \quad f'(x_0) \leq 0$$

Ако $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{и следователно} \quad f'(x_0) \geq 0$$

Получихме, че в точката x_0 стойността на производната може да бъде единствено нула. $\square$

Геометрично, допирателната към графиката в точка на локален екстремум (ако я има) е длъжна да бъде хоризонтална.

2 Теорема на Рол

Теорема 2.1. *Теорема на Рол*
Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Нека f изпълнява условията:

1. *f е диференцируема в (a, b).*

2. *f е непрекъсната в точките a и b.*

3. *$f(a) = f(b)$.*

Тогава съществува точка $\xi \in (a, b)$ такава, че $f'(\xi) = 0$.

Доказателство. Знаем, че f е непрекъсната върху компактния интервал $[a, b]$ и следователно можем да приложим Теоремата на Вайерщрас. Получаваме, че f е ограничена върху $[a, b]$ и достига най-голяма стойност в някоя точка x_{max} и най-малка стойност в някоя точка x_{min}:

$$\exists\, x_{max} \in [a, b] : f(x_{max}) \geq f(x) \;\; \forall\, x \in [a, b]$$

$$\exists\, x_{min} \in [a, b] : f(x_{min}) \leq f(x) \;\; \forall\, x \in [a, b]$$

Поне един от следните случаи е в сила:

- $x_{min} \in (a, b)$. В този случай x_{min} е локален минимум за f (защото дефиниционната област $[a, b]$ на f е околност на x_{min}) и следователно според Теоремата на Ферма е в сила $f'(x_{min}) = 0$.

- $x_{max} \in (a, b)$. В този случай x_{max} е локален максимум за f (защото дефиниционната област $[a, b]$ на f е околност на x_{min}) и следователно според Теоремата на Ферма е в сила $f'(x_{max}) = 0$.

- $x_{min}, x_{max} \in \{a, b\}$. Понеже $f(a) = f(b)$, то $f(x_{max}) = f(x_{min})$, откъдето получаваме, че f е константа. Следователно $\forall\, \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

С това теоремата е доказана. □

Нарисувайте си примери, за да се убедите, че и трите условия от Теоремата на Рол са съществени.

3 Теорема за крайните нараствания и следствия

Теоремата за крайните нараствания е основен инструмент, позволяващ от информация за производната на дадена функция да бъде извлечена информация за самата функция.

Теорема 3.1. *Теорема на Лагранж (Теорема за крайните нараствания)*
Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Нека f изпълнява условията:

1. *f е диференцируема в (a, b).*

2. *f е непрекъсната в точките a и b.*

Тогава съществува точка $\xi \in (a, b)$ такава, че $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Доказателство. Да разгледаме функция $g(x) = f(x) - kx$, където искаме да изберем числото k такова, че g да удовлетворява условията на Теоремата на Рол. Дотук g е диференцируема в (a,b) и непрекъсната в точките a и b, защото f и линейното събираемо са такива. За да е налице $g(a) = g(b)$, трябва $f(a) - ka = f(b) - kb$, откъдето избираме

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Сега от Теоремата на Рол следва, че съществува точка $\xi \in (a,b)$ такава, че $g'(\xi) = 0$. Тъй като $g'(x) = f'(x) - k$ от правилата за диференциране, получаваме

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - k \;\Rightarrow\; f'(\xi) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Намерихме точка $\xi \in (a,b)$, за която е в сила твърдението. $\square$

Следващите две важни теореми са пример за приложения на Теоремата за крайните нараствания на Лагранж.

Теорема 3.2. *Принцип за константност (Основна теорема на диференциалното смятане)*
Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ - отворен интервал. При това f е диференцируема в Δ. Твърдим, че f е константа точно тогава, когато $f'(x) = 0$ за всички $x \in \Delta$.

Доказателство. Доказателството в правата посока е тривиално (производна на константа е нула). В обратната посока имаме, че $f'(x) = 0 \ \forall x \in \Delta$. Нека $x_1, x_2 \in \Delta$ с $x_1 < x_2$ са произволни. Тогава $[x_1, x_2] \subset \Delta$, защото Δ е интервал. Прилагаме Теоремата на Лагранж и получаваме, че съществува $\xi \in (x_1, x_2)$, в която производната на функцията е нула:

$$0 = f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0\,(x_2 - x_1) = 0$$

Заключаваме, че $f(x_2) = f(x_1) \ \forall x_1, x_2 \in \Delta$, тоест f е константа. $\square$

Обърнете внимание, че условието Δ да е интервал е съществено!

Пример 3.3. Ще изследваме функцията

$$f(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1 + x^2} \ .$$

Първо определяме нейната дефиниционна област - стойностите на аргумента x, за които f е дефинирана. Тъй като аркустангенсът е дефиниран навсякъде, а аркуссинусът – в интервала $[-1, 1]$, трябва:

$$\frac{2x}{1+x^2} \in [-1,1] \iff -1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1 \iff -\left(1 + x^2\right) \le 2x \le 1 + x^2 \iff$$

$$\iff \begin{cases} -1 - 2x - x^2 = -(1+x)^2 \le 0 \\ 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2 \ge 0 \end{cases}$$

Следователно функцията, която изследваме, е дефинирана за всяко $x \in \mathbb{R}$. Къде е диференцируема? Тъй като $\arcsin$ е диференцируема в $(-1, 1)$ и arctg е диференцируема за всеки реален аргумент, то, използвайки горните пресмятания, получаваме, че f е диференцируема в $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Пресмятаме производната:

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \left(\frac{2\left(1+x^2\right) - 2x\,(2x)}{(1+x^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{|1+x^2|}{\sqrt{(1+x^2) - 4x^2}} \left(\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}} \left(\frac{2\left(1-x^2\right)}{(1+x^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \left(\frac{2\left(1-x^2\right)}{1+x^2}\right) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{|1-x^2|} \left(\frac{2}{1+x^2}\right)\left(1-x^2\right) =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \left(1 + \frac{1-x^2}{|1-x^2|}\right)$$

Различаваме следните два случая:

- Ако $x \in (-1, 1)$, то $1 - x^2 > 0$, следователно $\frac{1-x^2}{|1-x^2|} = 1$ и тогава $f'(x) = \frac{4}{1+x^2}$.
- Ако $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, то $1 - x^2 < 0$ и $\frac{1-x^2}{|1-x^2|} = -1$, откъдето $f'(x) = 0$.

Сега, съгласно Приницпа за константност, имаме:

$$\begin{cases} f(x) = const_1 \; \forall x \in (-\infty, -1) \\ f(x) = const_2 \; \forall x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

f е непрекъсната, което влече:

$$\begin{cases} f(-1) = \lim_{x \to -1^-} f(x) = const_1 \\ f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = const_2 \end{cases}$$

Остава да пресметнем:

$$\begin{cases} f(-1) = 2 \operatorname{arctg}(-1) + \arcsin(-1) = 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi = const_1 \\ f(1) = 2 \operatorname{arctg}(1) + \arcsin(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi = const_2 \end{cases}$$

Следователно $f(x) = \pi$ за всяко $x \geq 1$ и $f(x) = -\pi$ за всяко $x \leq -1$.

Теорема 3.4. *Принцип за монотонност*
Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е отворен интервал, е диференцируема в Δ. Тогава:

- *f е растяща в Δ тогава и само тогава, когато $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in \Delta$.*
- *f е намаляваща в Δ тогава и само тогава, когато $f'(x) \leq 0 \; \forall x \in \Delta$.*

Доказателство. Разглеждаме двете посоки на горното твърдение, като б.о.о. се съсредоточаваме върху първата подточка (растяща функция).

($\Rightarrow$) Имаме, че f е растяща. От дефиницията за производна на f:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Забелязваме, че знакът на Δx не оказва влияние върху знака на диференчното частно:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x > 0 \Rightarrow x + \Delta x > x \text{ и } f(x + \Delta x) \geq f(x) \\ \Delta x < 0 \Rightarrow x + \Delta x < x \text{ и } f(x + \Delta x) \leq f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

($\Leftarrow$) Сега знаем, че $f'(x) \geq 0$ за $x \in \Delta$. Взимаме произволни $x_1, x_2 \in \Delta$ с $x_1 < x_2$. Понеже Δ е интервал, то $[x_1, x_2] \subset \Delta$. Тъй като f е диференцируема в (x_1, x_2) и непрекъсната в $[x_1, x_2]$ (от диференцируемост следва непрекъснатост), можем да приложим Теоремата на Лагранж и да получим, че съществува $\xi \in (x_1, x_2) \subset \Delta$ такова, че

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow (x_2 - x_1) f'(\xi) = f(x_2) - f(x_1)$$

Тъй като $x_2 > x_1$ и $f'(\xi) \geq 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$. Тъй като $x_1, x_2 \in \Delta$ с $x_1 < x_2$ бяха произволни, получихме, че функцията f е растяща. □

Забележка 1. При условията на теоремата от $f'(x) > 0 \; \forall x \in \Delta$ следва, че f е строго растяща в Δ (проверете, че същото доказателство дава резултата), но обратното не е вярно. Наистина, функцията $f(x) = x^3$ е строго растяща върху цялата реална права, но производната ѝ $f'(x) = 2x^2$ се анулира в нулата.

Забележка 2. Ако f е растяща в (a, b) и непрекъсната в a (или b), то f е растяща в $[a, b)$ (или $(a, b]$). Получава се чрез директна проверка от дефинициите на непрекъснатост и "растяща".

Дефиниция 3.5. *Производни от по-висок ред*

Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$ за Δ - отворен интервал, като $f'(x)$ съществува за всяко $x \in \Delta$. Това позволява да разгледаме производната $f' : \Delta \to \mathbb{R}$ като функция с аргумент $x \in \Delta$, понеже изображението $x \mapsto f'(x)$ е добре дефинирано. Означаваме:

$$f''(x) \coloneqq \left(f'\right)'(x)$$

По този начин можем индуктивно да дефинираме производни от колкото си искаме висок ред, стига съответната диференцируемост да е налице.

$$\left.\begin{array}{ll} f'' & : \Delta \to \mathbb{R} \\ f''' & : \Delta \to \mathbb{R} \\ \dots & \\ f^{(n)} & : \Delta \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f^{(n+1)} \coloneqq \left(f^{(n)}\right)'$$

Прието е с $f^{(0)}$ да се означава функцията f.

Пример 3.6. Искаме да определим знака на $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!}$ за неотрицателни x.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x - x + \frac{x^3}{3!} \\ f'(x) &= \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} \\ f''(x) &= -\sin x + x \\ f'''(x) &= -\cos x + 1 \end{aligned}$$

Понеже $f'''(x) \geq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$, то f'' е растяща върху цялата реална права. Тъй като $f''(0) = 0$, оттук получаваме, че $f''(x) \geq 0 \; \forall x \in [0, +\infty)$. Следователно f' е растяща в този интервал. Тъй като $f'(0) = 0$, имаме $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in [0, +\infty)$. Оттук можем да заключим, че f е растяща в $[0, +\infty)$. И тъй, последователното прилагане на Принципа за монотонност (и Забележка 2 след него) ни дава (разбира се, като използваме, че $f(0) = 0$):

$$\sin x - x + \frac{x^3}{3!} \geq 0 \; \forall x \geq 0$$

4 Обобщена теорема за крайните нараствания и следствия

Теорема 4.1. *Теорема на Коши (Обобщена теорема за крайните нараствания)*
Нека $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Нека са изпълнени условията:

1. *f, g са диференцируеми в (a, b)*
2. *f, g са непрекъснати в $[a, b]$*
3. *$g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a, b)$*

Тогава съществува $\xi \in (a, b)$ такова, че:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Забележка: Третото условие е съществено. Да разгледаме $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ в интервала $[-1, 1]$. Всички условия без третото са изпълнени и заключението на теоремата не е вярно:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x}{3x^2} = \frac{2}{3x} \neq 0 = \frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} \; \forall x \in (-1, 1) \; .$$

Доказателство. Дефинираме функцията $h(x) = f(x) - kg(x)$, като искаме да изберем числото k по такъв начин, че да се удовлетворява равенството $h(a) = h(b)$. Следователно, искаме:

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \iff k(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a)$$

Ако допуснем, че $g(a) = g(b)$, то всички условия на Теоремата на Рол ще бъдат изпълнени за функцията g и следователно ще съществува $x \in (a, b)$ такова, че $g'(x) = 0$. Това противоречи на третото условие. Получихме, че $g(a) \neq g(b)$ и следователно можем да изберем

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \; .$$

Очевидно е, че h е диференцируема в (a,b) (като линейна комбинация на диференцируеми) и непрекъсната в $[a,b]$ (като линейна комбинация на непрекъснати). Тъй като $h(a) = h(b)$, можем да приложим Теоремата на Рол за h и да получим, че съществува $\xi \in (a,b)$ такова, че $h'(\xi) = 0$. От правилата за диференциране имаме $h'(x) = f'(x) - kg'(x)$ и следователно

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - kg'(\xi) \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Намерихме точка $\xi \in (a,b)$, за която твърдението от теоремата е в сила. □

Добре е да си дадете сметка защо Обобщената теорема за крайните нараствания не може да бъде получена с прилагане на Теоремата на Лагранж поотделно към числителя и знаменателя и комбиниране на получените резултати.

В тази лекция ще приложим Обобщената теорема за крайните нараствания към правилото на Лопитал за търсене на граници, а в следващата лекция ще видим далеч по-съществено приложение.

Теорема 4.2. *1-ва теорема на Лопитал (неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$)*
Нека $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ са диференцируеми в (a,b) и непрекъснати в точката b. Нека освен това $f(b) = g(b) = 0$, $g'(x)$ не се анулира в (a,b) и съществува границата $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогава съществува границата $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ и двете граници са равни, т.е.

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Забележка: При прилагане на тази теорема е възможно да се загуби информация. Напълно е възможно оригиналната граница да съществува, а границата на частното от производните – не. Ето пример:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}}_{=0} = 0$$

Тук използвахме, че произведението на ограничена функция и функция, клоняща към нула, клони към нула. Какво се получава, ако приложим горната теорема в този случай?

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)}{\cos x} =$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos x}}_{=0} - \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x} = -\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$$

Последната граница не съществува, следователно не можем да използваме Лопитал - условията от теоремата не са изпълнени.

Доказателство. Нека $x \in (a,b]$ е произволна. Прилагаме Обобщената теорема за крайните нараствания към функциите f и g в интервала $[x,b]$. Възможно е да го направим, защото всички условия са удовлетворени. Получаваме, че съществува $\xi(x) \in (x,b)$ такова, че:

$$\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Важно е да отбележим, че ξ зависи от избора на x, което бележим с $\xi(x)$ и понякога с ξ_x. В зависимост от това, кое x избираме, интервалът $[x, b]$ се мени, което може да доведе до смяна на ξ, за което е в сила дадената теорема. И така, имаме:

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(\xi(x))}{g(\xi(x))} = \lim_{y \to b^-} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

Последното равенство е точно това, което искаме. Извършихме полагане $y \coloneqq \xi(x)$ и остана да съобразим, че при $x \xrightarrow[x<b]{} b$ е в сила $y = \xi(x) \to b$, като $y < b$ (от $\xi(x) \in (x, b)$ и Лемата за двамата полицаи). $\square$

Теорема 4.3. *2-ра теорема на Лопитал (неопределеност от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)*
Нека $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ са диференцируеми в (a, b). Нека освен това:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty \text{ и } \lim_{x \to b^-} g(x) = \infty$$

При това $g'(x)$ не се анулира в (a, b) и съществува границата $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогава съществува границата $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ и двете граници са равни, т.е.

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказателство. Избираме произволни точки x, x_0 от интервала (a, b) такива, че $a < x_0 < x < b$. Прилагаме Обобщената теорема за крайните нараствания към функциите f и g в интервала $[x_0, x] \subset (a, b)$ (възможно е да го направим, защото всички предположения са в сила). Получаваме, че съществува точка $\xi(x, x_0)$ (тя зависи както от избора на x, така и от избора на x_0), разположена между x и x_0, т.е. $x_0 < \xi(x, x_0) < x$, за която е в сила:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi(x, x_0))}{g'(\xi(x, x_0))}$$

Да означим границата $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава съществува $\bar{\delta} > 0$ такова, че ако $y \in \left(b - \bar{\delta}, b\right)$, то

$$\left|\frac{f'(y)}{g'(y)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Ако $x_0 > b - \bar{\delta}$, то и $\xi(x, x_0) \in \left(b - \bar{\delta}, b\right)$, откъдето

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - L\right| = \left|\frac{f'(\xi(x, x_0))}{g'(\xi(x, x_0))} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Оттук получаваме

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0) - Lg(x) + Lg(x_0)| &< \frac{\varepsilon}{2}|g(x) - g(x_0)| \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x) - Lg(x)| &= |f(x) - f(x_0) - Lg(x) + Lg(x_0) + f(x_0) - Lg(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f(x_0) - Lg(x) + Lg(x_0)| + |f(x_0) - Lg(x_0)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2}|g(x) - g(x_0)| + |f(x_0) - Lg(x_0)| \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - Lg(x)| < \frac{\varepsilon}{2}|g(x) - g(x_0)| + |f(x_0) - Lg(x_0)| \quad | : g(x)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left|1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(x_0) - Lg(x_0)}{g(x)}\right|$$

Следователно

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{|g(x)|}\left(\frac{\varepsilon}{2}|g(x_0)| + |f(x_0) - Lg(x_0)|\right) .$$

Фиксирали сме някакво x_0, за което $b > x_0 > b - \bar{\delta}$. Тъй като по предположение $|g(x)| \xrightarrow[x \to b^-]{} +\infty$, можем да изберем $\delta > 0$ (без ограничение на общността δ е толкова малко, че $x_0 < b - \delta$) такова, че за всички $x \in (b - \delta, b)$ е в сила

$$\frac{1}{|g(x)|}\left(\frac{\varepsilon}{2}|g(x_0)| + |f(x_0) - Lg(x_0)|\right) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Забележете, че тук първо избрахме x_0 близо до b, фиксирахме го, и после видяхме колко близо трябва x да бъде до b при така фиксираното x_0. И тъй, получихме, че за всички $x \in (b - \delta, b)$ е изпълнено неравенството

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Тъй като $\varepsilon > 0$ беше произволно, с това доказателството на теоремата е завършено. $\square$

На основата на доказаните първа и втора Теорема на Лопитал можем да формулираме и докажем други теореми. Например, досега разглеждахме леви граници за частното на две функции, но съвсем лесно можем да си представим условията и твърденията за аналогичния случай на десни граници. Освен това, възможно е аргументът да клони към $+\infty$, $-\infty$ или ∞.

Теорема 4.4. *Следствия от теоремите на Лопитал*

1. *Нека $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ са диференцируеми в (a, b) и $g'(x) \neq 0$ в (a, b). Ако едното от следните две условия е в сила*

   (а) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$

   (б) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$

   и ако съществува границата $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *то съществува и границата* $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *и те са равни, т.е.*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

2. *Нека $f, g : (c, +\infty)$ са диференцируеми и $g'(x) \neq 0$ в $(c, +\infty)$. Ако едното от следните две условия е в сила*

   (а) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

   (б) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \infty$

и ако съществува границата $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, *то съществува и* $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, *като двете граници са равни, т.е.*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Доказателство. Ще направим разсъжденията само за втората част. Разглеждаме границата $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$. Да извършим полагане $t := \frac{1}{x}$ и да означим
$F(t) := f\left(\frac{1}{t}\right), G(t) := g\left(\frac{1}{t}\right)$. Тогава пресмятаме

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{G(t)} = \underbrace{\left\{\begin{matrix}\left[\frac{0}{0}\right]\\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\end{matrix}\right\}}_{\text{Лопитал}} = \lim_{t\to0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cancel{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cancel{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

□

ЗАДАЧА ЗА ОБМИСЛЯНЕ ВКЪЩИ:

Дефиниция 4.5. *Едностранна производна на функция* f

Ако $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, то дефинираме дясна производна на f в точката a чрез

$$f'(a+0) := \lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Ако $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, то дефинираме дясна производна на f в точката b чрез

$$f'(b-0) := \lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x}$$

Задача. Нека $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в точката a и диференцируема в (a,b). Нека съществува $\lim_{x\to a^+} f'(x) = L$. Докажете, че f е диференцируема в точката a и $f'(a+0) = L$.