Лекция 8: Диференцируемост и производна. Техника на диференцирането

1 Производна - физичен и геометричен смисъл. Диференцируемост. Свойства

Понятието *производна* е въведено през 17-ти век от Нютон и Лайбниц независимо един от друг, с различна мотивация.

Мотивацията на Нютон идва от механиката. Нека е даден закон за движение $x = f(t)$ на точка по права (в момента от времето t координатата на точката е $x = f(t)$ – ако точката не се връща и тръгва от нулата, x е изминатият от нея път). Ако $t_1 < t_2$ са два момента във времето, то средната скорост на точката в интервала $[t_1, t_2]$ е

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \ .$$

Искаме да придадем строг смисъл на интуитивно ясното понятие "моментна скорост" в момента t. Идеята е да намерим към какво "се приближава" средната скорост в интервал, съдържащ t, когато дължината на интервала клони към нула. Естествено е да кажем, че моментната скорост в момента от времето t при закон за движение $f(t)$ е границата

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \ .$$

Мотивацията на Лайбниц идва от геометрията, а именно от задачата за търсене на допирателна към дадена крива. Нека кривата е графиката на функцията f и нека фиксираме точка $(x, f(x))$ от тази графика. Ако сега Δx е "малко отместване" на x, то правата, преминаваща през точките $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ и $(x, f(x))$, е секуща за графиката. Ако $\Delta x \to 0$, то граничното положение на секущата е допирателна към графиката на f в точката $(x, f(x))$. Да напишем аналитично уравнението на секущата (за декартови координати (X, Y) на произволна точка от секущата) – лесно се пише уравнение на права през две точки:

$$Y = f(x) + \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \cdot (X - x)$$

Тогава уравнението на допирателната към графиката на f в точката $(x, f(x))$ ще бъде

$$Y = f(x) + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \cdot (X - x) \ .$$

Ъгловият коефициент на допирателната е границата

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ .$$

По същество, една и съща граница се появява и в задача от механиката, и в задача от геометрията. Даваме следната

Дефиниция 1.1. *Диференцируемост на функция в точка и производна*

Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е отворен интервал, и нека $x \in \Delta$. Казваме, че f е диференцируема в точката x, ако съществува границата

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ .$$

Ако тази граница съществува, нейната стойност се нарича производна на функцията f в точката x и се означава с $f'(x)$ или с $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$.

Разбира се,

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

и в смисъл на съществуване. Частното $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ обикновено се нарича *диференчно частно*.

Пример 1.2.

- Да разгледаме функцията $f(x) = \frac{1}{x}$. Нейната дефиниционна област е $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Фиксираме $x \neq 0$ и се интересуваме от диференцируемостта на f в точката x и евентуално от стойността на производната, като разполагаме само с дефиницията:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x - (x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x} \right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{-\cancel{\Delta x}}{x(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\cancel{\Delta x}} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

  Получихме, че f е диференцируема във всяка точка от дефиниционната си област.

- Разглеждаме функцията $f(x) = |x|$, дефинирана върху цялата реална права, и фиксираме произволно $x \in \mathbb{R}$. Тогава

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{|y| - |x|}{y - x} = \begin{cases} x > 0 : \lim_{y \to x} \frac{y-x}{y-x} = 1 \\ x < 0 : \lim_{y \to x} \frac{-y+x}{y-x} = -1 \\ x = 0 : \lim_{y \to 0} \frac{|y|}{y} \end{cases}$$

  В последния случай за $x = 0$ разглеждаме лява и дясна граница:

$$\lim_{y \to 0} \frac{|y|}{y} = \begin{cases} \lim_{y \to 0^+} \frac{|y|}{y} = 1 \\ \lim_{y \to 0^-} \frac{|y|}{y} = -1 \end{cases}$$

Получихме, че $|\cdot|$ не е диференцируема в точката $x = 0$ и $|\cdot|$ е диференцируема във всяка точка $x \neq 0$. Стойностите на производната, когато тя съществува, са ясни: за $x > 0$ в околност на точката графиката съвпада с права с ъглов коефициент едно, а за $x < 0$ в околност на точката графиката съвпада с права с ъглов коефициент минус едно.

Следващото твърдение е съществено:

Твърдение 1.3. *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ - отворен интервал и $x \in \Delta$. Ако f е диференцируема в x, то f е непрекъсната в x.*

Доказателство. Пресмятаме

$$\lim_{y\to x} f(y) = \lim_{y\to x} (f(y) - f(x)) + f(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (y - x) + f(x) =$$

$$= \lim_{y\to x} \boxed{\frac{f(y) - f(x)}{y - x}} \underbrace{(y - x)}_{\xrightarrow[y\to x]{} 0} + f(x) = f'(x) \cdot 0 + f(x) = f(x)$$

Получихме, че $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$ и следователно f е непрекъсната в точката $x \in \Delta$. $\square$

Да погледнем производната от още една страна, може би най-важната. Идеята на диференцирането е локално (близо до фиксирана точка) да приближим (апроксимираме) нашата евентуално нелинейна функция с афинна (константа плюс линейна). По този начин много свойства на нелинейното изображение могат да се получат чрез пренасяне на свойства на локалните линейни апроксимации (обикновено по-лесни за изучаване).

За да придадем по-точен смисъл на горните "философски" разсъждения, ще запишем дефиницията на производна по друг начин:

Твърдение 1.4. *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ - отворен интервал и $x \in \Delta$. Твърдим, че f е диференцируема в x точно тогава, когато съществува число $A \in \mathbb{R}$ и функция α, дефинирана в $\Delta - x$, $\alpha(0) = 0$ и α непрекъсната в нулата, такива, че*

$$f(x + \Delta x) = f(x) + A \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x) \quad \textit{за всяко} \quad \Delta x \quad \textit{с} \quad x + \Delta x \in \Delta \ .$$

При това, ако имаме диференцируемост, е в сила равенството $f'(x) = A$.

Доказателство. Ако f е диференцируема в x, полагаме

$$\alpha(\Delta x) = \begin{cases} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{\Delta x}, & \text{ако } \Delta x \neq 0 \\ 0, & \text{ако } \Delta x = 0 \end{cases}$$

Тогава от дефиницията на производна имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right) = f'(x) - f'(x) = 0$$

и следователно α е непрекъсната в нулата. Очевидно от дефиницията на α е в сила

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x) \quad \text{за всяко} \quad \Delta x \quad \text{с} \quad x + \Delta x \in \Delta \ .$$

Нека сега имаме

$$f(x+\Delta x) = f(x) + A\cdot\Delta x + \Delta x\cdot\alpha(\Delta x) \quad \text{за всяко} \quad \Delta x \quad \text{с} \quad x+\Delta x \in \Delta$$

за някакво число $A \in \mathbb{R}$ и функция α с $\alpha(0) = 0$ и α непрекъсната в нулата. Тогава от горното равенство за $\Delta x \neq 0$ имаме

$$\alpha(\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - A\cdot\Delta x}{\Delta x}$$

и от непрекъснатостта на α в нулата получаваме

$$0 = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - A\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - A\right),$$

откъдето следва, че f е диференцируема в x и $f'(x) = A$. $\square$

Да си спомним уравнението на допирателната към графиката на f в точката $(x, f(x))$:

$$Y = f(x) + f'(x)(X - x) \quad .$$

Тази допирателна е графиката на афинната функция $g(x+\Delta x) := f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$. Разликата между g и f клони към нула по-бързо от Δx, когато Δx клони към нула, според горното твърдение. Виждаме, че от всички прави, минаващи през $(x, f(x))$, допирателната приближава най-добре f близо до точката x. Линейното изображение, което на Δx съпоставя числото $f'(x)\cdot\Delta x$, се нарича *диференциал* на f в точката x и се означава с $\mathrm{d}f(x)$.

Да видим върху един пример как може да бъде използвано горното твърдение. От нарастването на функцията ще отделим частта, която е линейна по нарастването на аргумента, и така ще намерим производната.

Разглеждаме функцията $f(x) = x^n$, където n е произволно естествено число. Тази функция е дефинирана върху цялата реална права. Фиксираме $x \in \mathbb{R}$ и пресмятаме

$$\begin{gathered} f(x+\Delta x) - f(x) = \\ = (x+\Delta x)^n - x^n = \cancel{x^n} + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n - \cancel{x^n} = \\ = nx^{n-1}\Delta x + \Delta x\underbrace{\left(\binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \binom{n}{n}(\Delta x)^{n-1}\right)}_{\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0} \end{gathered}$$

Следователно f е диференцируема в x и $f'(x) = nx^{n-1}$.

Пример 1.5. За естествено $\alpha > 1$ разглеждаме функцията:

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Да проверим, че f е диференцируема в нулата:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{x^{\alpha-1}}_{\text{сходяща към } 0} \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{ограничена}}\right) = 0$$

2 Правила за диференциране

Ще покажем, че сума, произведение и композиция на диференцируеми функции са диференцируеми. При това ще изведем основните правила за диференциране.

1. Диференциране на сума:
   Нека $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ - отворен интервал. Ако f, g са диференцируеми в $x \in \Delta$, то $f+g$ е диференцируема в x и $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

   Доказателство.

$$
\begin{gathered}
(f+g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x} = \\
= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} = \\
= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)
\end{gathered}
$$

   □

2. Диференциране на произведение:
   Нека $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ - отворен интервал. Ако f, g са диференцируеми в $x \in \Delta$, то fg е диференцируема в x и $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

   Доказателство.

$$
\begin{gathered}
(fg)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(fg)(x+\Delta x) - (fg)(x)}{\Delta x} = \\
= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\, g(x+\Delta x) - f(x)\, g(x)}{\Delta x} = \\
= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\, g(x+\Delta x) - f(x)\, g(x+\Delta x) + f(x)\, g(x+\Delta x) - f(x)\, g(x)}{\Delta x} = \\
= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right) + f(x)\left(g(x+\Delta x) - g(x)\right)}{\Delta x} = \\
= \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\
= f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)
\end{gathered}
$$

   Използвахе, че щом g е диференцируема в x, то g е непрекъсната в x и следователно $\lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$. □

   Следствие 2.1. *Диференциране на произведение с константа:*
   Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ - отворен интервал. Ако f е диференцируема в $x \in \Delta$ и $c \in \mathbb{R}$, то cf е диференцируема в x и $(cf)'(x) = cf'(x)$.

   Доказателство. Наистина, $(c)' = 0$ за всяка константа $c \in \mathbb{R}$, защото $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0$. Следователно

$$
(cf)'(x) = c' f(x) + cf'(x) = cf'(x) \quad .
$$

   □

Следствие 2.2. *Диференциране на разлика:*
Нека $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ - отворен интервал. Ако f, g са диференцируеми в $x \in \Delta$, то $f - g$ е диференцируема в x и $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Наистина, това се получава директно от предишното следствие и от правилото за диференциране на сума:

$$(f-g)'(x) = (f + (-1)g)'(x) = f'(x) + ((-1)g)'(x) = f'(x) - g'(x) \ .$$

3. Диференциране на композиция от функции (съставни функции):
Нека $f : \Delta \to \Delta_1, \ g : \Delta_1 \to \mathbb{R}$, където Δ, Δ_1 - отворени интервали. Ако f е диференцируема в точката $x \in \Delta$ и g е диференцируема в точката $y = f(x)$, то $g \circ f : \Delta \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката x и $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$.

Доказателство. По дефиниция

$$(g \circ f)'(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(g \circ f)(x + \Delta x) - (g \circ f)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x}$$

Лесният начин би бил с деление и умножаване с $f(x+\Delta x) - f(x)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{f(x+\Delta x) - f(x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

и граничен преход. Проблемът е, че не сме сигурни дали $f(x+\Delta x) - f(x) \neq 0$. За да можем да се позовем на твърдението за непрекъснатост на композиция на непрекъснати вместо на твърдението за граница на композиция, ще използваме представянето

$$\begin{cases} f \text{ - диференцируема в } x \Rightarrow f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \\ g \text{ - диференцируема в } y \Rightarrow g(y+\Delta y) = g(y) + g'(y)\Delta y + \beta(\Delta y)\Delta y \end{cases}$$

където $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ и α, β - непрекъснати в точката нула. Използваме представянето за $g(y + \Delta y)$ с $y = f(x)$ и $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ (тоест $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$). Заместваме и получаваме

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g'(f(x))(f(x+\Delta x) - f(x)) + \beta(f(x+\Delta x) - f(x))(f(x+\Delta x) - f(x))}{\Delta x} =$$
$$= g'(f(x)) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \beta(f(x+\Delta x) - f(x))} =$$
$$= g'(f(x)) f'(x) + f'(x) \cdot 0 = g'(f(x)) f'(x)$$

За да пресметнем $\lim_{\Delta x \to 0} \beta(f(x+\Delta x) - f(x)) = 0$, използвахме непрекъснатостта на β в нулата и непрекъснатостта на f в x (f диференцируема в x влече, че f е непрекъсната в x). □

Следствие 2.3. *Диференциране на частно:*
Нека $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ - отворен интервал. Ако f, g са диференцируеми в $x \in \Delta$ и $g(x) \neq 0$, то частното $\frac{f}{g}$ е диференцируемо в x и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)} \; .$$

Доказателство. Пресмятаме, като използваме правилата, получени досега, както и пресметнатата от нас производна на функцията, която на всяко различно от нула число съпоставя неговото реципрочно:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

$$= f'(x)\, \frac{1}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{1}{g^2(x)}\right) g'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\, g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$$

□

Имаме нужда от още едно твърдение, което ни дава условие, гарантиращо диференцируемостта на обратната биекция.

Твърдение 2.4. *Нека Δ, Δ' са отворени интервали и $f : \Delta \to \Delta'$ е биекция между тях. Нека $x \in \Delta$ е такова, че f е диференцируема в x, обратната биекция f^{-1} е непрекъсната в точката $y = f(x)$ и $f'(x) \neq 0$. Тогава обратната биекция $f^{-1} : \Delta' \to \Delta$ е диференцируема в точката $y = f(x)$ и*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \; .$$

Доказателство. Първо ще отбележим, че същественото в заключението на твърдението е диференцируемостта на обратната биекция. Стойността на производната може да се получи просто като се приложи правилото за диференциране на сложна функция:

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y \;\forall\, y \in \Delta' \Rightarrow \left(f\left(f^{-1}(y)\right)\right)' = (y)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}\right)'(y) = 1 \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

Трябва да докажем съществуването на границата $\left(f^{-1}\right)'(y) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y}$. За да го направим, полагаме в тази граница $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$. От непрекъснатостта на f^{-1} в точката y получаваме, че

$$\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) \xrightarrow[\Delta y \to 0]{} 0$$

Виждаме, че числителят под границата е точно равен на Δx. Сега трябва да изразим Δy като функция на Δx. Тъй като $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, имаме

$$\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) \Leftrightarrow x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x + \Delta x) = y + \Delta y \Leftrightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Следователно

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

□

3 Основни производни

Вече пресметнахме производните на някои функции в лекцията дотук. Сега систематично ще пресметнем производните на основните елементарни функции, като при това, разбира се, ще доказваме тяхната диференцируемост.

1. $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $(a > 0)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

   Използваме основната граница $\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ и пресмятаме

   $$(e^x)' := \lim_{\Delta x} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^x.1 = e^x$$

   Пресмятането на производната на експонентата с основа $a > 0$ свеждаме към производната на експонентата с основа неперовото число:

   $$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \cdot \ln a$$

2. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ за всяко $x \in (0, +\infty)$.

   Използваме основната граница $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ и пресмятаме

   $$(\ln x)' := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln (x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x}$$

   Пресмятането на производната на логаритъм с основа a свеждаме към производната на естествения логаритъм:

   $$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

3. $(x^a)' = ax^{a-1}$ в естествената дефиниционна област на функциите x^a и x^{a-1}.

   Тази формула заслужава повече коментар, защото всъщност съдържа в себе си много формули – функцията $f(x) = x^a$ зависи от реалния параметър a. Разбира се, за всички реални a тази функция е дефинирана в интервала $(0, +\infty)$ и тогава можем да пресметнем

   $$(x^a)' = \left(e^{a \ln x}\right)' = e^{a \ln x} (a \ln x)' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}$$

   Ако $a = n$ за някое $n \in \mathbb{N}$, то функцията f е дефинирана върху цялата реална права и вече видяхме, че производната е $(x^n)' = nx^{n-1}$ за всяко реално x, което се съгласува добре с нашата формула.

   Ако $a = 0$, то функцията f е константата едно, а формулата дава $\left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{a-1} = 0$. Следователно можем да приемем, че тази формула съдържа и известния ни вече факт, че производната на константа е нула.

   Ако $a = -1$, то функцията f е дефинирана върху $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, диференцируема е в цялата си дефиниционна област и $\left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-2}$, което също се съгласува добре с нашата формула.

Ако $a = \frac{1}{n}$, където $n \in \mathbb{N}$ е нечетно, функцията f е дефинирана върху цялата реална права. За положителен аргумент производната вече е пресметната. За отрицателен аргумент ($x < 0$) можем да пресметнем производната, като използваме, че в този случай $f(-x) = -f(x)$, $-x > 0$ и производната в $-x$:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(-\sqrt[n]{-x}\right)' = -\frac{1}{n}\,(-x)^{\frac{1}{n}-1} \cdot (-1) = \frac{1}{n}\left[(-x)^{n-1}\right]^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

В горното пресмятане използвахме и че $n-1$ е четно. Формулата остана същата. Да отбележим, че нулата не принадлежи на дефиниционната област на производната $\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$. Наистина, функцията не е диференцируема в нулата, защото допирателната към графиката ѝ в точката $(0, 0)$ е вертикална.

4. $(\sin x)' = \cos x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

$$(\sin x)' := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \,.\, \lim_{\Delta x \to 0} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} = 1.\cos x = \cos x$$

5. $(\cos x)' = -\sin x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x\,(-1) = -\sin x$$

6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ за всяко x от дефиниционната област на tg.

   Прилагаме правилото за диференциране на частно:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x + \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

7. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ за всяко x от дефиниционната област на cotg.

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x + \sin x\,(\cos x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ за всяко $x \in (-1, 1)$.

   Да напомним, че

$$\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \ , \quad \arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

   са взаимно обратни биекции. Тъй като крайщата на единия интервал се изобразяват в крайщата на другия интервал,

$$\sin|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1, 1) \ , \quad \arcsin|_{(-1,1)} : (-1, 1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

също са взаимно обратни биекции. Знаем, че $(\sin x)' = \cos x \neq 0 \ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и сме доказали, че аркуссинусът е непрекъсната функция. Следователно всички предположения на твърдението за диференцируемост на обратната биекция са изпълнени и можем да заключим, че arcsin е диференцируема за всяко $x \in (-1, 1)$. Пресмятаме

$$\sin(\arcsin x) = x \ \forall x \in (-1,1) \Rightarrow (\sin(\arcsin x))' = x' \ \forall x \in (-1,1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(\arcsin x)\,(\arcsin x)' = 1 \ \forall x \in (-1,1)$$

Така получаваме, че производната на $\arcsin x$ е:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Използвахме, че косинусът е положителен в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Убедете се, че в крайщата на интервала допирателните към графиката на аркуссинуса са вертикални и следователно там не можем да очакваме диференцируемост.

9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ за всяко $x \in (-1, 1)$.

   Отново (съответните рестрикции на) косинусът и аркускосинусът са взаимно обратни биекции между интервалите $(0, \pi)$ и $(-1, 1)$. Знаем, че $(\cos x)' = -\sin x \neq 0 \ \forall x \in (0, \pi)$ и сме доказали, че аркускосинусът е непрекъсната функция. Следователно всички предположения на твърдението за диференцируемост на обратната биекция са изпълнени и можем да заключим, че arccos е диференцируема за всяко $x \in (-1, 1)$. Пресмятаме

$$\cos(\arccos x) = x \ \forall x \in (-1,1) \Rightarrow (\cos(\arccos x))' = x' \ \forall x \in (-1,1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\sin(\arccos x)\,(\arccos x)' = 1 \ \forall x \in (-1,1)$$

   Следователно,

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\cos(\arccos x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

   Използвахме, че синусът е положителен в интервала $(0, \pi)$. Отново аркускосинусът не е диференцируем в точките 1 и -1.

10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

    Да напомним, че

$$\operatorname{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, +\infty) \ , \quad \operatorname{arctg} : (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

    са взаимно обратни биекции. Вече знаем, че $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ и сме доказали, че аркустангенсът е непрекъсната функция. Следователно всички предположения на твърдението за диференцируемост на обратната биекция са изпълнени и можем да заключим, че arctg е диференцируема за всяко реално x. Пресмятаме:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))' = x' \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}\,(\operatorname{arctg} x)' = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Следователно,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Наложи се да използваме формулата $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}$, позната от тригонометрията.

11. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Да напомним, че

$$\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)} : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty) \ \ , \ \ \operatorname{arccotg} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$$

са взаимно обратни биекции. Вече знаем, че $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ и сме доказали, че аркускотангенсът е непрекъсната функция. Следователно всички предположения на твърдението за диференцируемост на обратната биекция са изпълнени и можем да заключим, че arccotg е диференцируема за всяко реално x. Пресмятаме:

$$\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x))' = x' \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arccotg} x)} (\operatorname{arccotg} x)' = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Следователно,

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\sin^2(\operatorname{arccotg} x) = -\frac{1}{1 + (\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x))^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Тук използвахме формулата $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 \alpha}$.

Една забележка относно техниката на диференцирането. Когато ви се налага да диференцирате функция на степен функция $f(x)^{g(x)}$ (разбира се, необходимо е $f(x) > 0$), единственият избор е

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = e^{g(x)\ln f(x)} (g(x)\ln f(x))' = f(x)^{g(x)} (g(x)\ln f(x))'$$

Понякога това се прави изкуствено, тоест ако $f(x) > 0$, пресмята се производната чрез

$$f'(x) = \left(e^{\ln f(x)}\right)' = e^{\ln f(x)} (\ln f(x))' = f(x)(\ln f(x))'.$$

Разбира се, за да има полза от това, трябва да логаритмувате преди да диференцирате. Идеята е, че по-лесно се диференцира сума от произведение и произведение с константа от степенна функция.