Определени интеграли — упражнение

1 Пресмятане на определени интеграли

Формула на Лайбниц и Нютон

Нека f е непрекъсната и ограничена в $(a,\,b)$, а G е примитивна на f в $(a,\,b)$. Тогава:

1. съществуват крайните граници $\lim\limits_{x\to a+0} G(x) = G(a+0)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} G(x) = G(b-0)$.

2. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx \;=\; G(b-0) - G(a+0)$.

1. Пресметнете определения интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{5\,x^2 - 2\,x + 6}{(x+1)\,(4\,x^2 - 4\,x + 5)}\;dx \qquad .$$

2. Пресметнете определения интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}} + 1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}} - 3}\;dx \qquad .$$

3. Пресметнете определените интеграли (k и n са цели числа):

$$\text{а)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx . \sin nx \; dx \qquad \text{б)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx . \cos nx \; dx \qquad \text{в)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx . \cos nx \; dx \qquad .$$

Смяна на променливите

Нека f е непрекъсната в интервал I , а φ има непрекъсната производна в J ,
като $\varphi\,(t) \in I$ за всяко $t \in J$.

Тогава $\displaystyle\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ за всеки $\alpha \in J, \beta \in J$.

4. Пресметнете определения интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x - 2\sin x + 1}{5 - 4\cos x}\, dx \quad .$$

Примери

1. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int\limits_0^1 \frac{t^2+1}{t^4+1} dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, смяна $x = \operatorname{arctg} t$.

2. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} =$ (смяна $x = a\operatorname{tg} t$) $\displaystyle\frac{1}{a^3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2a^3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)\, dt = \frac{1}{8a^3}(\pi+2)$.

3. Нека f е непрекъсната в $[0, 1]$. Тогава

- $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$, смяна $x = \frac{\pi}{2} - t$.

- $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx$, смяна $x = \pi - t$.

4. Нека f е непрекъсната в $[-a, a]$.

- Ако f е нечетна, то $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$. Пример: $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin x dx = 0$.

- Ако f е четна, то $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^{a} f(x)dx$.

  Пример: $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \ln(1+|x|)dx = 2\int\limits_0^{1} \ln(1+x)dx$.

5. $\boxed{\text{Нека } f \text{ е непрекъсната в } \mathbb{R} \text{ и периодична с период } T. \text{ Тогава } \int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx\ .}$

Пример:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4 \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 8 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 8 \int\limits_0^1 \frac{t^2+1}{t^4+1} dt = 2\sqrt{2}\,\pi\ .$$

5. Пресметнете определения интеграл:

$$\int\limits_0^{11\pi} \frac{dx}{\cos^2 x - \sin 2x - 2} \quad .$$

6. Пресметнете определения интеграл:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{7 + x - x^3}{2 - |\sin 7x|}\, dx \quad .$$

Интегриране по части

Нека всяка от функциите f и g е непрекъсната в $[a,\, b]$ и има непрекъсната и ограничена прозводна в $(a,\, b)$. Тогава

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx \;=\; f(b)g(b) - f(a)g(a) \;-\; \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx\ .$$

Примери:

1. $$\int\limits_0^1 x^n\,(1-x)^m\,dx \;=\; \frac{n!.m!}{(n+m+1)!}\ .$$

2. $$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}\ ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\ .}$$

$$\boxed{\text{Следствие:} \qquad \frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}\ .}$$

3. $$\boxed{(-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x dx \ = \ \frac{\pi}{4} \ - \ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ .}$$

$$\boxed{\text{Следствие:} \qquad \frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ .}$$

4. $$\boxed{2\,(-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1} x dx \ = \ \ln 2 \ - \ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\ .}$$

$$\boxed{\text{Следствие:} \qquad \ln 2 \ = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\ .}$$

7. Пресметнете определените интеграли (k е цяло число):

$$\text{а)} \int_{-\pi}^{\pi} x \, \sin kx \; dx \qquad \text{б)} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, \cos kx \; dx \qquad .$$

8. Пресметнете определения интеграл: $\displaystyle \int_0^6 \big(x^2 - 2\,x - 3\big)\, e^{|x-3|} \; dx$.

2 Приложение на определените интеграли

Лице на криволинеен трапец

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx \text{ , където } T = \{a \le x \le b\,,\ g(x) \le y \le f(x)\}\ ,}$$

f и g са непрекъснати в $[a,\, b]$ и $f(x) \geq g(x)$ за $x \in [a,\, b]$

9. Пресметнете лицето на $T = \left\{ 1 \leq x \leq 2\sqrt{2}\,,\ 0 \leq y \leq \ln x \right\}$.

10. Пресметнете лицето на фигурата, ограничена от кривите $y = x \operatorname{arctg}(x+2)$ и $y = \dfrac{\pi}{4} x$.

11. Пресметнете лицето на астроидата $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}\,,\ a > 0$.

Лице на криволинеен сектор

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi\,,\ \ \alpha \leq \beta\,,\ 0 \leq r \leq r(\varphi)\,.$$

12. Пресметнете лицето на фигурата $\left(x^2 + y^2\right)^2 \leq 2xy$.

13. Пресметнете лицето на фигурата $x^4 + y^4 \leq x^2 + y^2$.

Дължина на дъга

гладка крива $\quad l = \displaystyle\int_{a}^{b} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt\,.$

14. Пресметнете дължината на астроидата $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}\,,\ a > 0$.

част от графика на функция $\quad l = \displaystyle\int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx\,,$

f е непрекъсната в $[a,\, b]$, има непрекъсната и ограничена производна в $(a,\, b)$

15. Пресметнете дължината на $y = \ln x\,,\ 1 \leq x \leq 2\sqrt{2}$.

16. Пресметнете дължината на дъгата, която правата $y = x + 16$ отсича от параболата $y = x^2 - 5x$.

полярни координати $\quad l = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi$

17. Пресметнете дължината на „един оборот“ на логаритмичната спирала $r = e^{\varphi}\,,\ \alpha \le \varphi \le \alpha + 2\pi$.

Пресмятане на граници

18. Пресметнете границата $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

19. Пресметнете границата $\displaystyle \lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.

20. Пресметнете границата $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$.