2 Риманов интеграл

2.1 Схема на Дарбу

2.1.1 Разделяне на интервал

Нека е даден интервал $[a, b]$.

- $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \ldots \ < x_n = b$, означение $\tilde{x}$
- диаметър на разделянето $d\left(\tilde{x}\right) = \max\limits_{1 \le i \le n} \left(x_i - x_{i-1}\right)$
- по-дребно (по-фино) разделяне: $\tilde{x} \prec \tilde{y}$, ако $\{x_i,\ 0 \le i \le n\} \subset \{y_j,\ 0 \le j \le m\}$

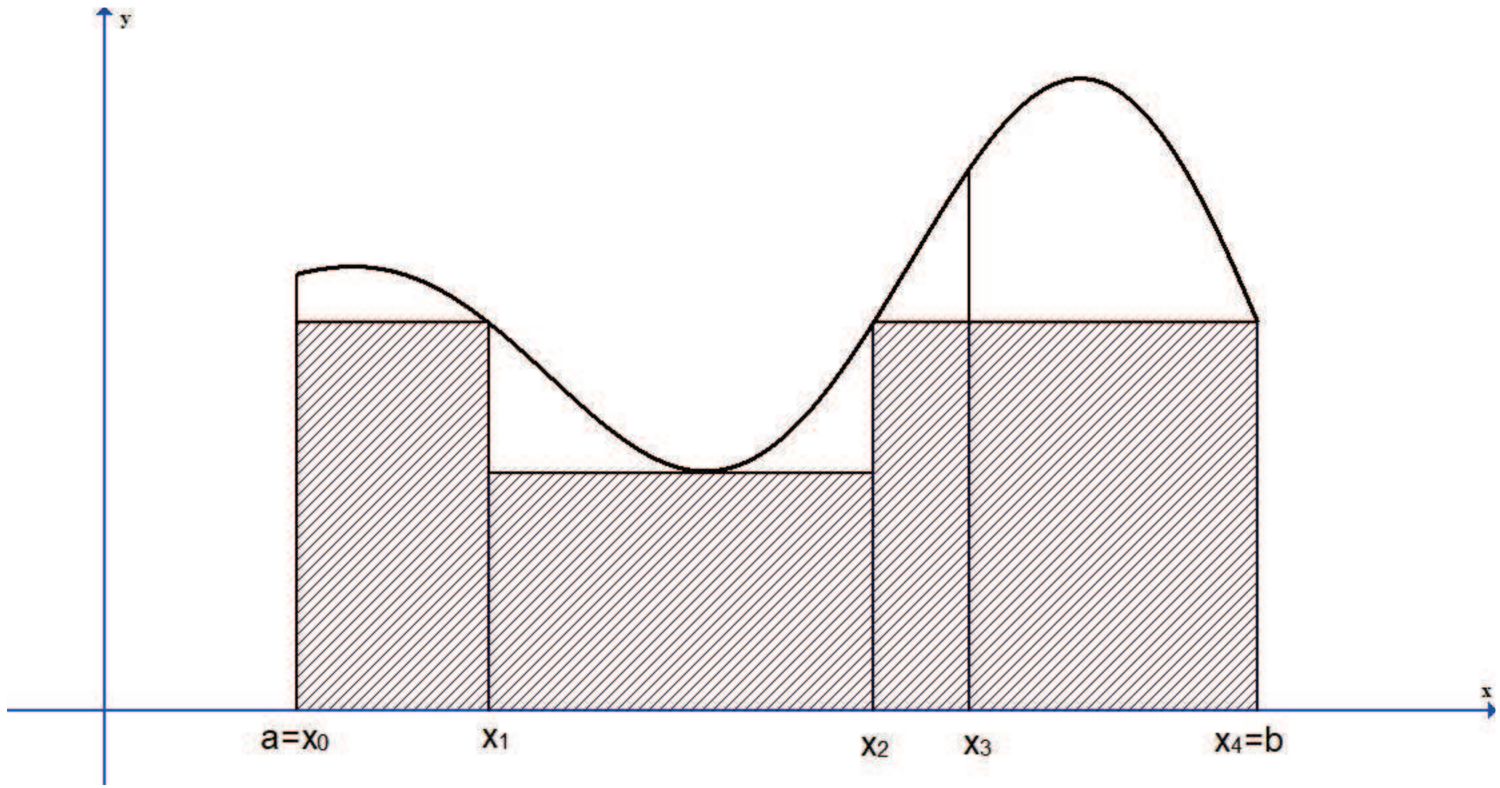
2.1.2 Суми на Дарбу

Нека f е ограничена в интервала $[a, b]$. За разделяне $\tilde{x}$ определяме

- $m_i = \inf\left\{f(x)\ :\ x \in [x_{i-1},\, x_i]\right\}$
- $M_i = \sup\left\{f(x)\ :\ x \in [x_{i-1},\, x_i]\right\}$

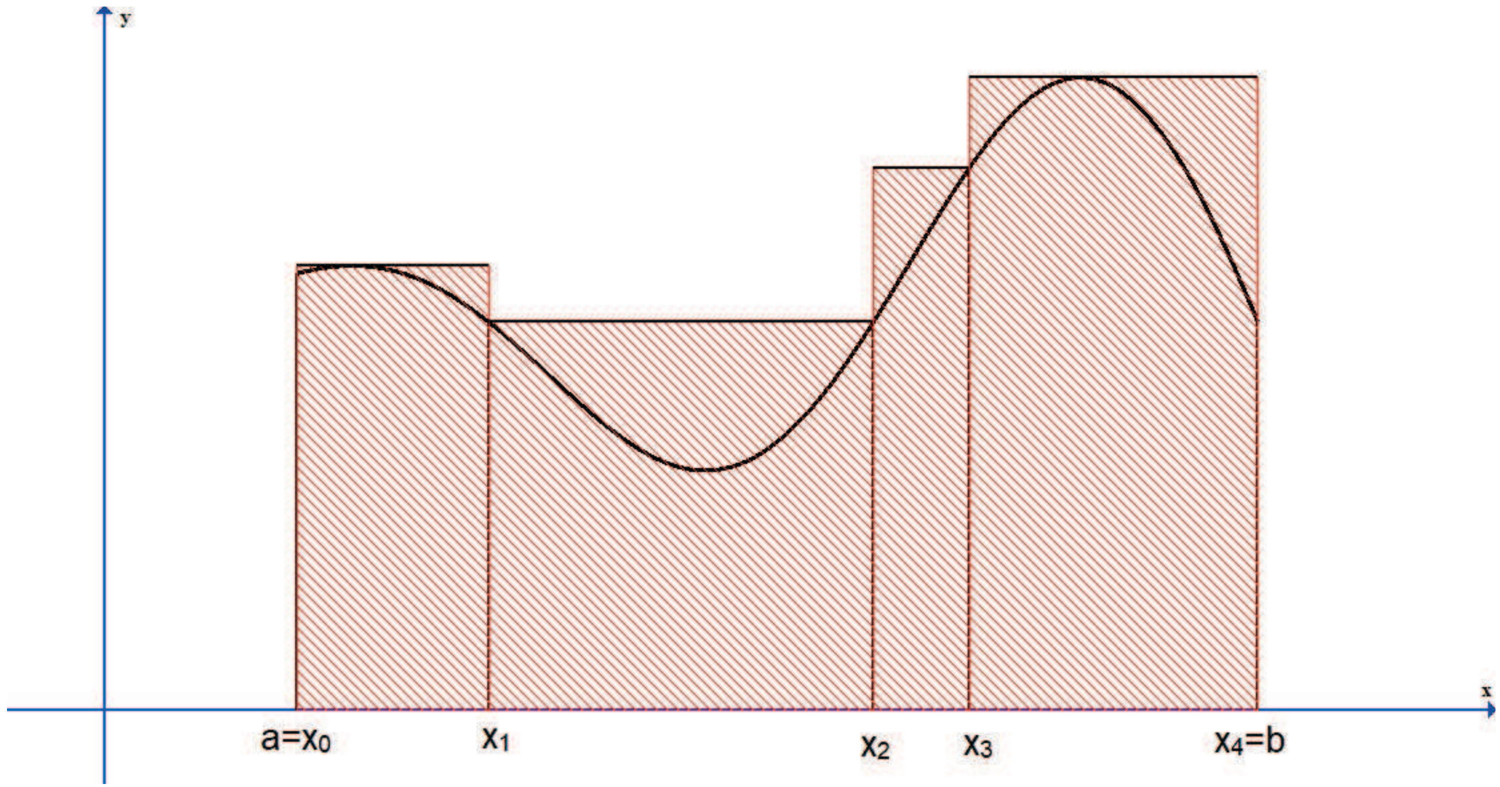
„Малка“ сума на Дарбу

$$\mathbf{s}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1})$$



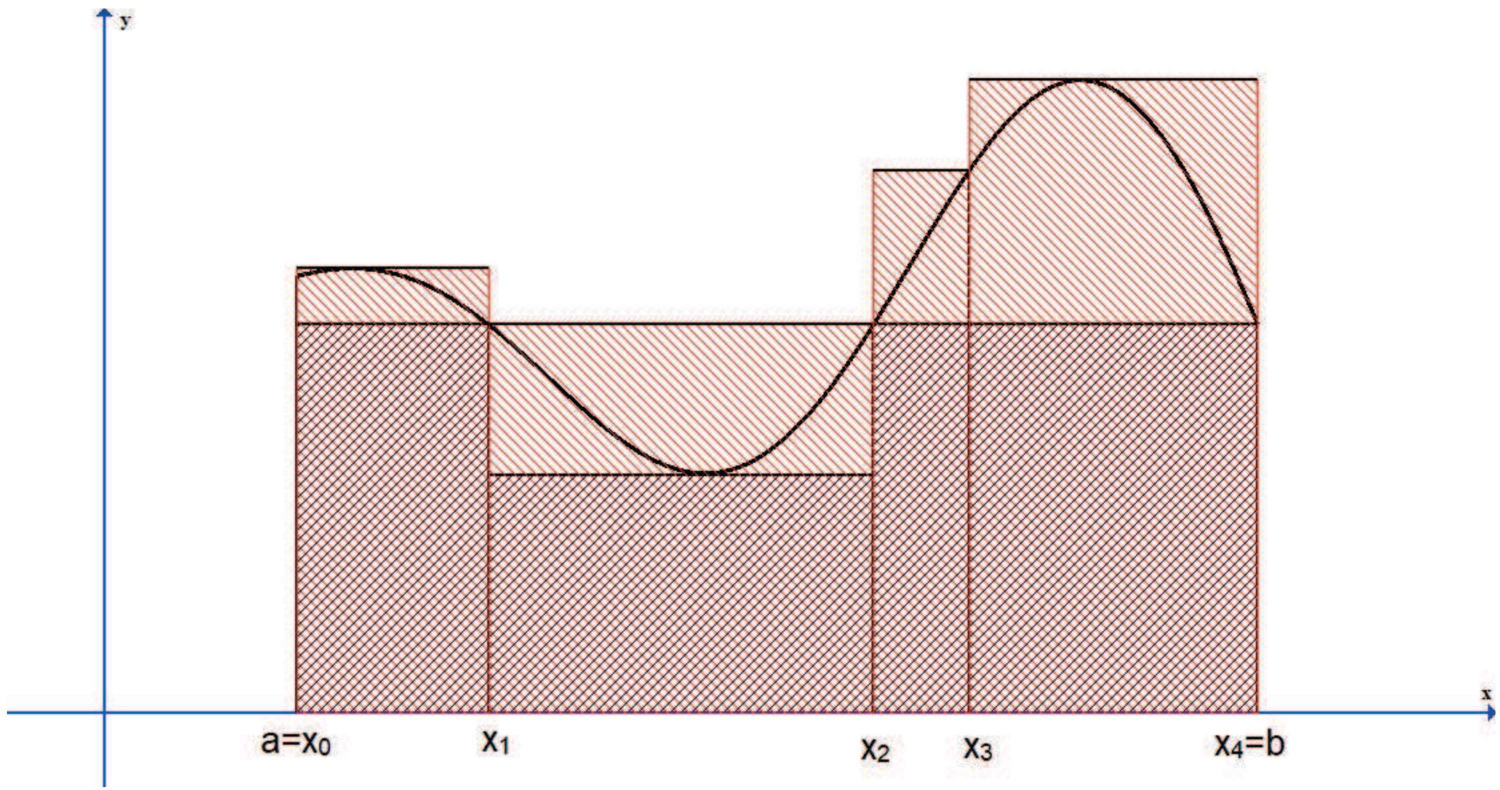
„Голяма“ сума на Дарбу

$$\mathbf{S}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1})$$



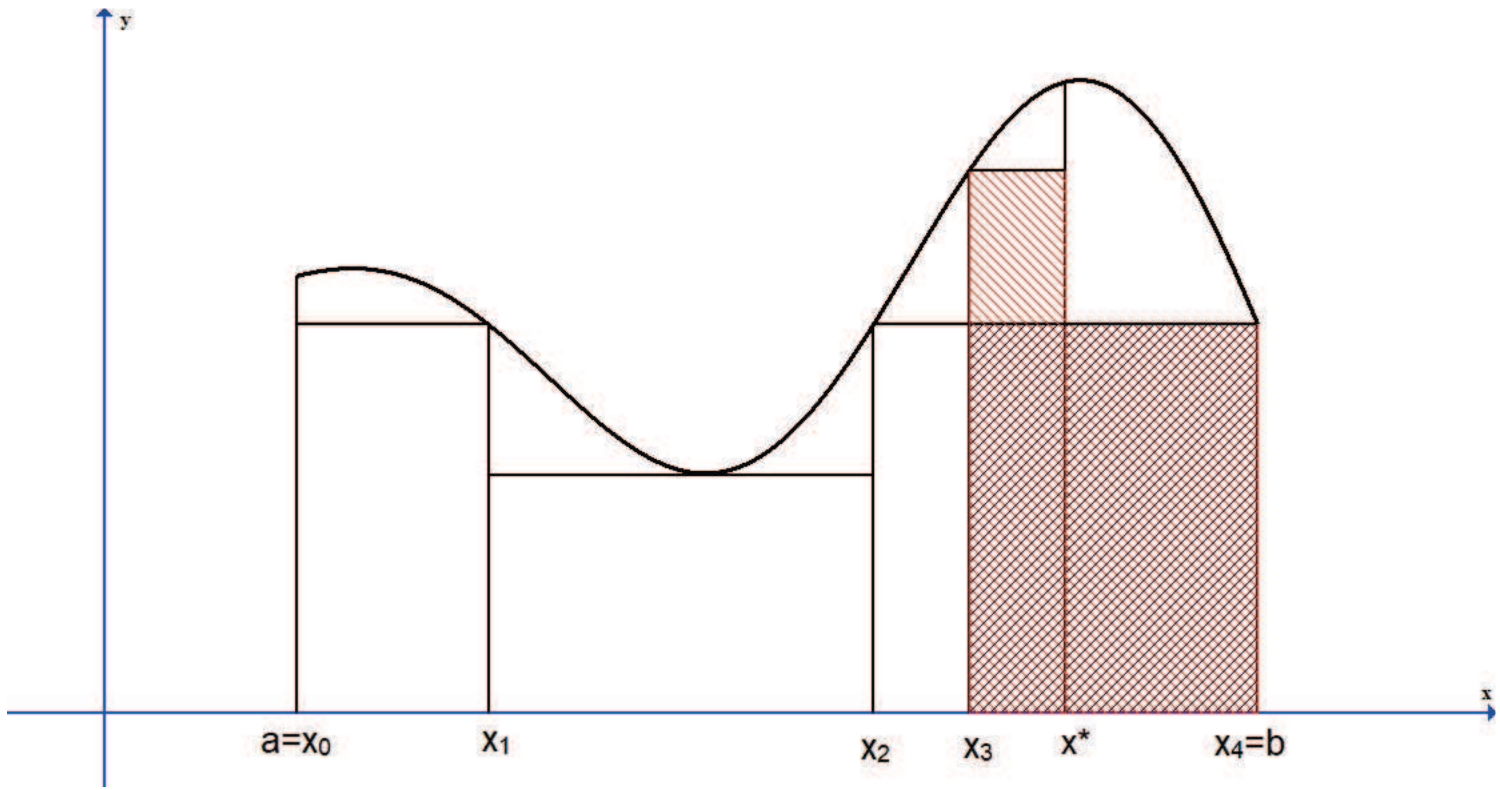
Тривиално неравенство

$$\mathbf{s}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) \leq \mathbf{S}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x})$$



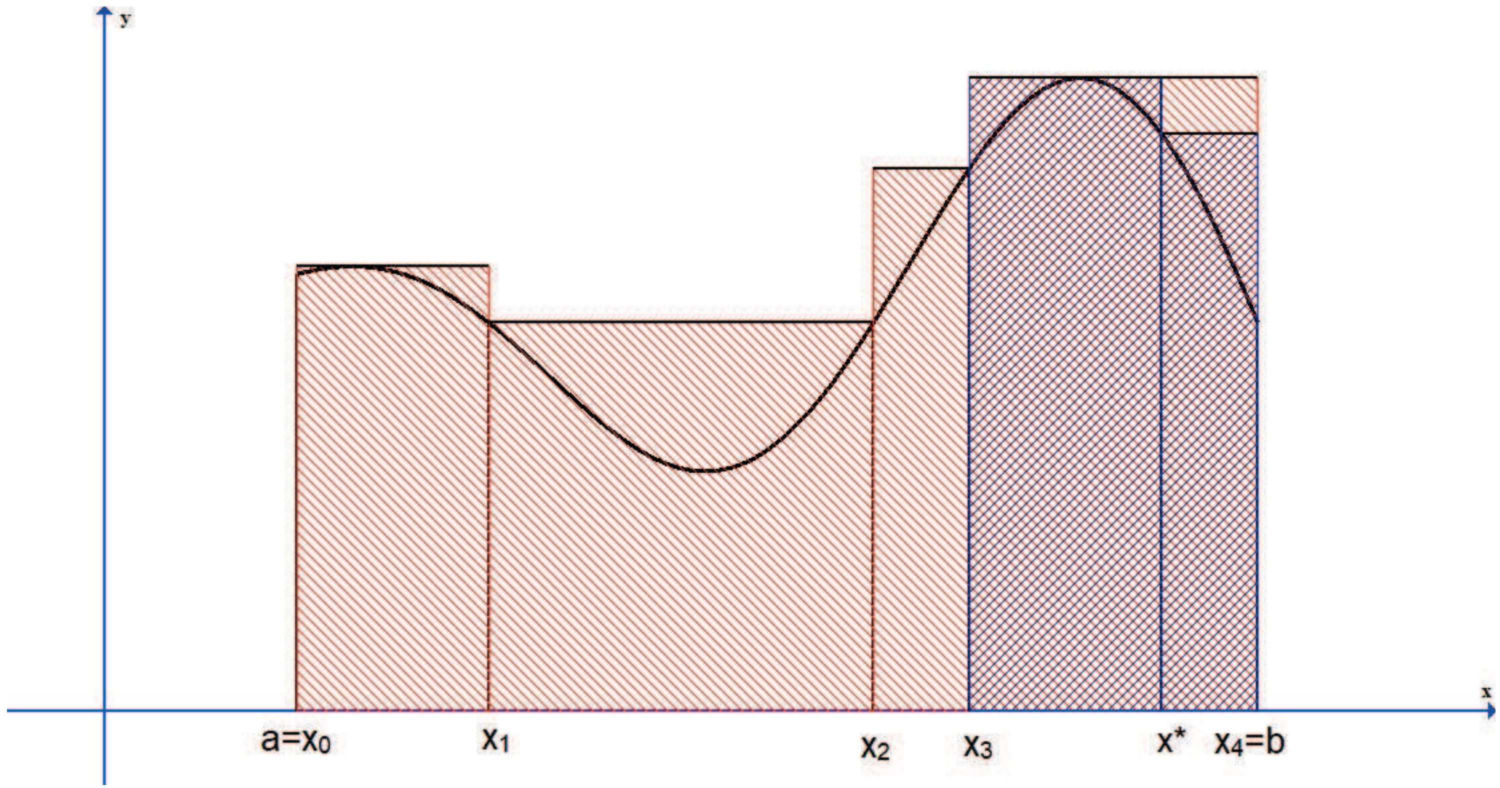
Малките суми нарастват

$$\tilde{x} \prec \tilde{y} \;\Rightarrow\; \mathbf{s}\,(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x}) \leq \mathbf{s}\,(f,\ [a,\ b],\ \tilde{y})$$



Големите суми намаляват

$$\tilde{x} \prec \tilde{y} \;\Rightarrow\; \mathbf{S}\,(f,\ [a,b],\ \tilde{y}) \leq \mathbf{S}\,(f,\ [a,b],\ \tilde{x})$$



2.1.3 „Горен“ и „долен“ интеграл на Дарбу

1. $\mathbf{s}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) \leq \mathbf{S}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{y})$ за всеки две $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$

2. $\underline{I} = \sup\limits_{\tilde{x}} \mathbf{s}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) \leq \mathbf{S}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{y})$ за всяко разделяне $\tilde{y}$

3. $\underline{I} \leq= \inf\limits_{\tilde{y}} \mathbf{S}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{y}) = \overline{I}$

2.1.4 Дефиниция на интегруема функция

Казваме, че ограничената в $[a,\,b]$ функция f е интегруема в $[a,\,b]$, ако $\underline{I} = \overline{I}$

Определен (Риманов) интеграл — $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — единственото число между малките и големите суми на Дарбу

2.1.5 Примери

1. $\chi_{\mathbb{Q}}$ не е интегруема в никой интервал.

2. Константите са интегруеми във всеки интервал и $\displaystyle\int\limits_a^b C\,dx = C(b-a)$

3. Стъпаловидните функции са интегруеми.

2.1.6 Необходимо и достатъчно условие за интегруемост

Ограничената в $[a,\, b]$ функция f е интегруема в $[a,\, b]$ тогава и само тогава, когато

за всяко $\varepsilon > 0$ има разделяне $\tilde{x}$ на $[a,\, b]$, за което $\mathbf{S}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{x}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{x}) < \varepsilon$

Доказателство

$\Rightarrow$ За $\varepsilon > 0$ има разделяния $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ на интервала $[a,\, b]$, за които $\underline{I} - \dfrac{\varepsilon}{2} < \mathbf{s}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{u})$ и $\mathbf{S}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{v}) < \overline{I} + \dfrac{\varepsilon}{2}$. За разделянето $\tilde{x} = \tilde{u} \cup \tilde{v}$, предвид $\underline{I} = \overline{I} = I$, имаме:

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \mathbf{s}(f,\ [a,\ b],\ \tilde{u}) \le \mathbf{s}(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x}) \le \mathbf{S}(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x}) \le \mathbf{S}(f,\ [a,\ b],\ \tilde{v}) < I + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ т.е. } \mathbf{S}(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x}) - \mathbf{s}(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x}) < \varepsilon .$$

$\Leftarrow$ За всяко $k \in \mathbb{N}$ има разделяне $\tilde{x}^{(k)}$ на интервала $[a,\ b]$, за което $\mathbf{S}\left(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x}^{(k)}\right) - \mathbf{s}\left(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x}^{(k)}\right) < \dfrac{1}{k}$.
Понеже $\overline{I} - \underline{I} \le \mathbf{S}\left(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x}^{(k)}\right) - \mathbf{s}\left(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x}^{(k)}\right)$, то $\overline{I} - \underline{I} < \dfrac{1}{k}$ за всяко $k \in \mathbb{N}$, откъдето $\underline{I} = \overline{I}$.

2.1.7 Интегруеми функции

1. Ако f е монотонна в $[a,\ b]$, то f е интегруема в $[a,\ b]$.

Доказателство Нека f е растяща. Тогава $f(a) \le f(x) \le f(b)$. Разглеждаме разделянето $x_p = a + p\dfrac{b-a}{n}$, $p = 0, 1, \ldots n$. Имаме

$$\mathbf{S}(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x}) - \mathbf{s}(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x}) = \sum_{p=1}^{n} M_p(x_p - x_{p-1}) - \sum_{p=1}^{n} m_p(x_p - x_{p-1}) = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{p=1}^{n} f(x_p) - \sum_{p=1}^{n} f(x_{p-1})\right) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} .$$

За $\varepsilon > 0$ избираме $n \in \mathbb{N}$, за което $\dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} < \varepsilon$. Тогава $\mathbf{S}(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x}) - \mathbf{s}(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x}) < \varepsilon$, т.е. f е интегруема.

2. Ако f е непрекъсната в $[a, b]$, то f е интегруема в $[a, b]$.

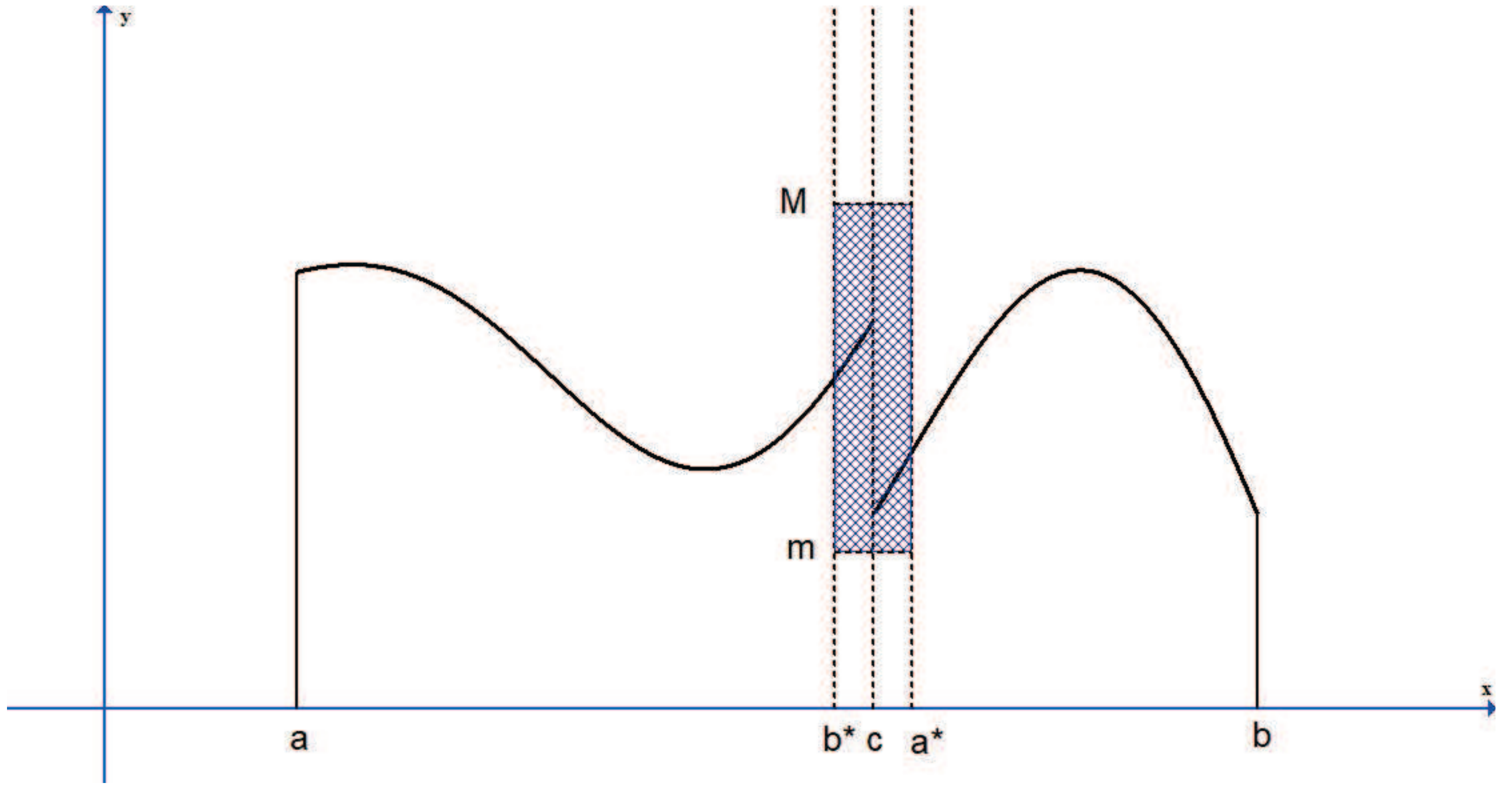
Доказателство Съгласно теоремата на Вайерщрас, f е ограничена. Разглеждаме разделянето $x_p = a + p\,\dfrac{b-a}{n}$, $p = 0, 1, \ldots n$. Отново от теоремата на Вайерщрас $M_p = f(u_p)$, $m_p = f(u_p)$ като $u_p \in [x_{p-1}, x_p]$, $v_p \in [x_{p-1}, x_p]$.
Нека $\varepsilon > 0$. Функцията f е равномерно непрекъсната в $[a, b]$, значи съществува $\delta > 0$, за което от $|x - y| < \delta$ следва $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Избираме $n \in \mathbb{N}$ с $\dfrac{b-a}{n} < \delta$. Тогава $M_p - m_p < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ и

$$\mathbf{S}\,(f,\ [a, b],\ \tilde{x}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a, b],\ \tilde{x}) \ = \ \sum_{p=0}^{n} (M_p - m_p)\,(x_p - x_{p-1}) \ < \ \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{p=0}^{n} (x_p - x_{p-1}) \ = \varepsilon \ .$$

3. Ако f е ограничена в $[a, b]$ и точките на прекъсване на f са краен брой, то f е интегруема в $[a, b]$.

Доказателство (случай на една вътрешна точка c) За $\varepsilon > 0$ избираме $a < b^* < c < a^* < b$
с $(M - m)\,(a^* - b^*) \ < \ \dfrac{\varepsilon}{3}$ $\quad (M = \sup\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\}\ ,\ m = \inf\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\})$.
Функцията f е непрекъсната в интервалите $[a, b^*]$ и $[a^*, b]$, значи има разделяния $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, за които
$\mathbf{S}\,(f,\ [a, b^*],\ \tilde{x}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a, b^*],\ \tilde{x}) \ < \ \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $\mathbf{S}\,(f,\ [a^*, b],\ \tilde{y}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a^*, b],\ \tilde{y}) \ < \ \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Тогава $(M^* = \sup\{f(x) \ : \ x \in [b^*, a^*]\}\ ,\ m^* = \inf\{f(x) \ : \ x \in b^*, a^*]\})$

$$\mathbf{S}\,(f,\ [a, b],\ \tilde{x} \cup \tilde{y}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a, b],\ \tilde{x} \cup \tilde{y}) \ = \ \mathbf{S}\,(f,\ [a, b^*],\ \tilde{x}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a, b^*],\ \tilde{x}) + (M^* - m^*)\,(a^* - b^*) + \mathbf{S}\,(f,\ [a^*, b],\ \tilde{y}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a^*, b],\ \tilde{y}) \ < \ \varepsilon$$



2.1.8 Необходимо и достатъчно условие за интегруемост II

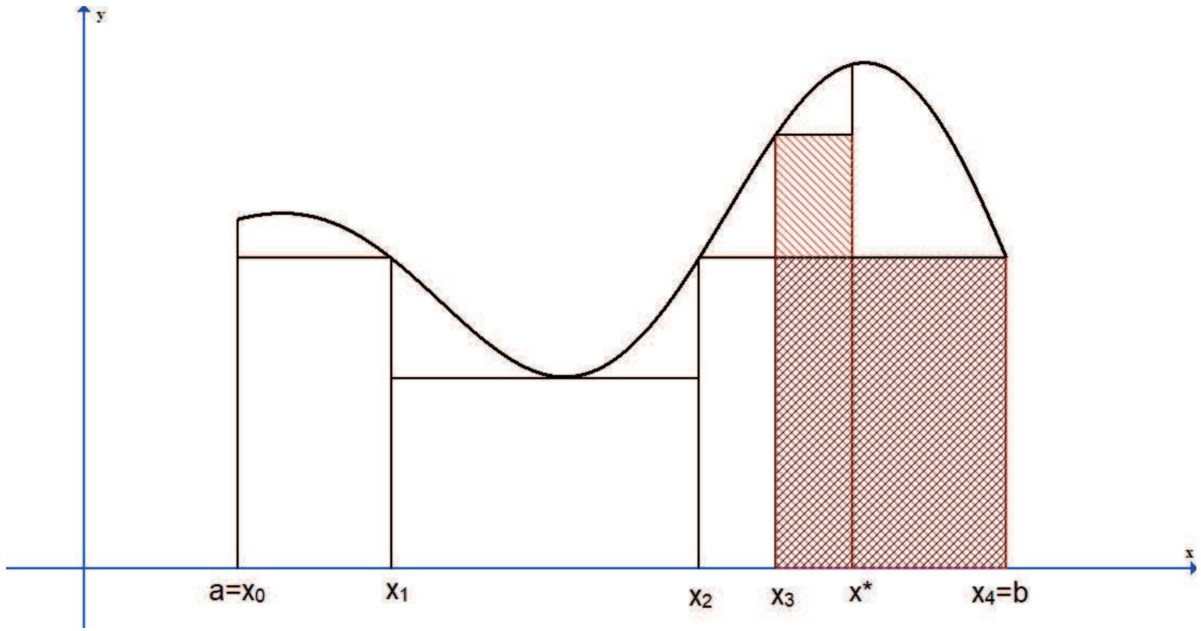
Ограничената в $[a,\, b]$ функция f е интегруема в $[a,\, b]$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ има $\delta > 0$ такова, че за всяко разделяне $\tilde{x}$ на $[a,\, b]$, за което $d\,(\tilde{x}) < \delta$, е изпълнено

$$\mathbf{S}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) < \varepsilon$$

Доказателство

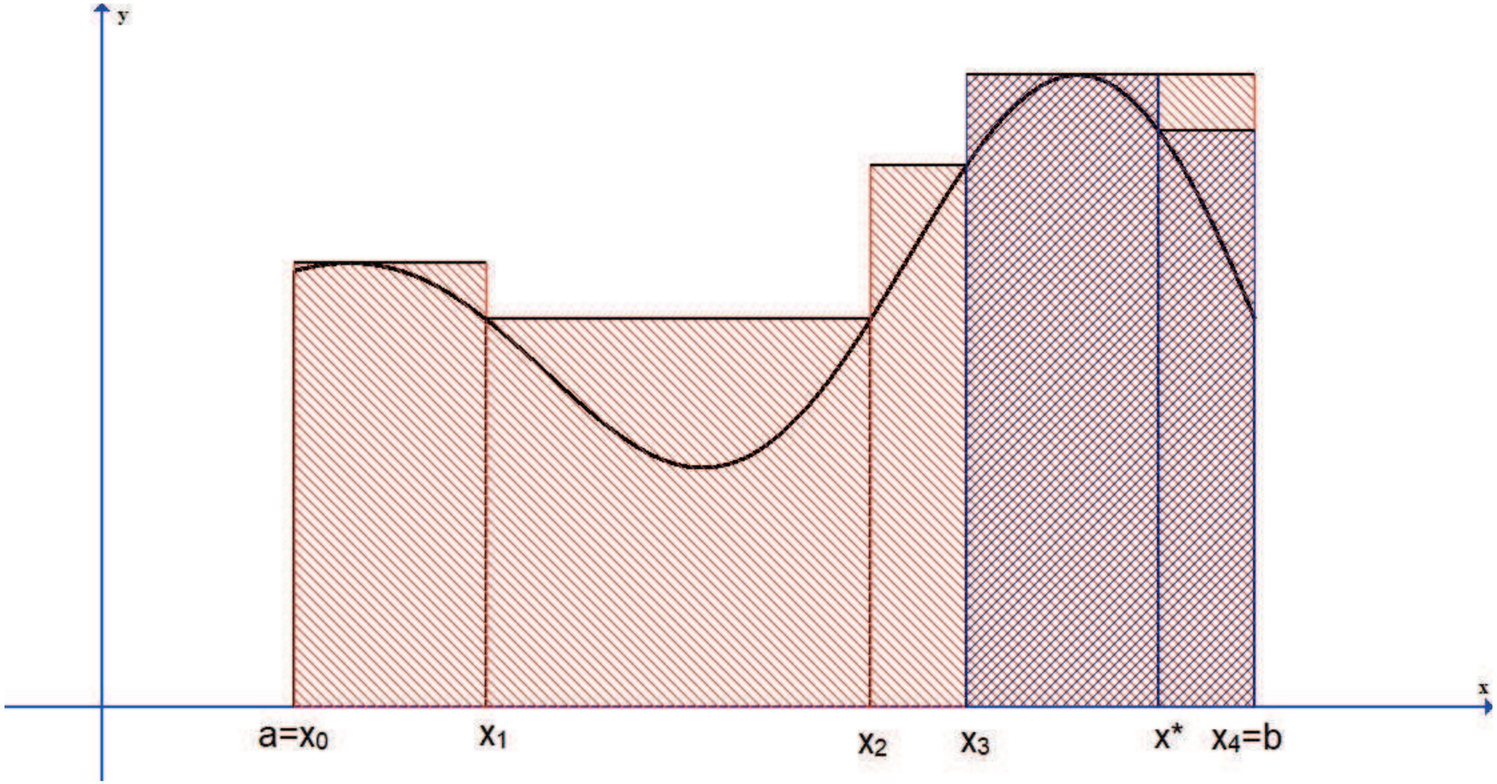
„малко“ нарастване

$$\mathbf{s}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x}\cup\tilde{y})\ -\ \mathbf{s}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x})\ \le p(M-m)d(\tilde{x})\,, \text{ където } \quad p = \#\tilde{y} - 2$$



„малко“ намаляване

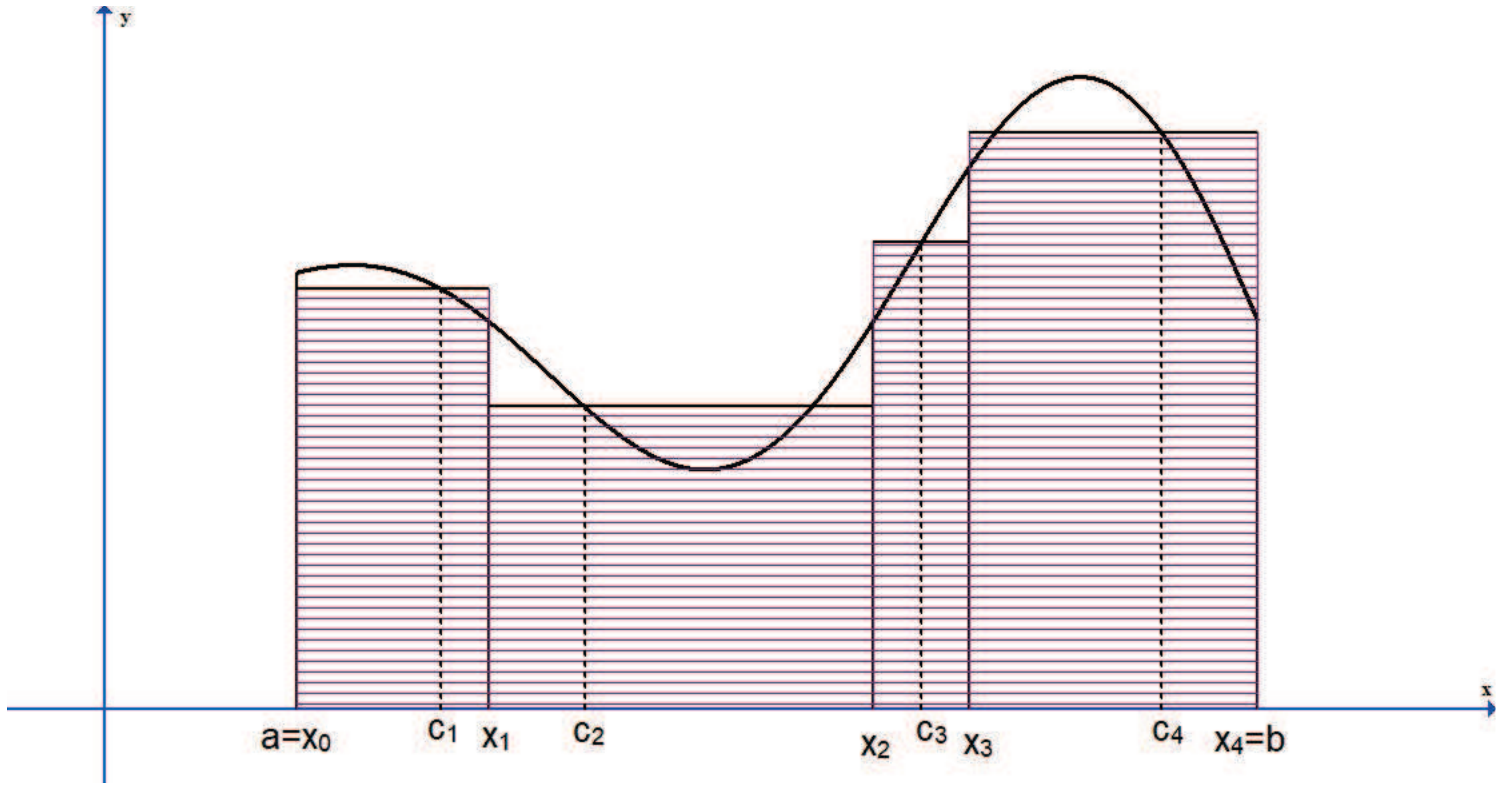
$$\mathbf{S}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) - \mathbf{S}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x}\cup\tilde{y}) \le p(M-m)d(\tilde{x})\,,\ \text{където}\quad p = \#\tilde{y} - 2$$



2.2 Дефиниция на Риман

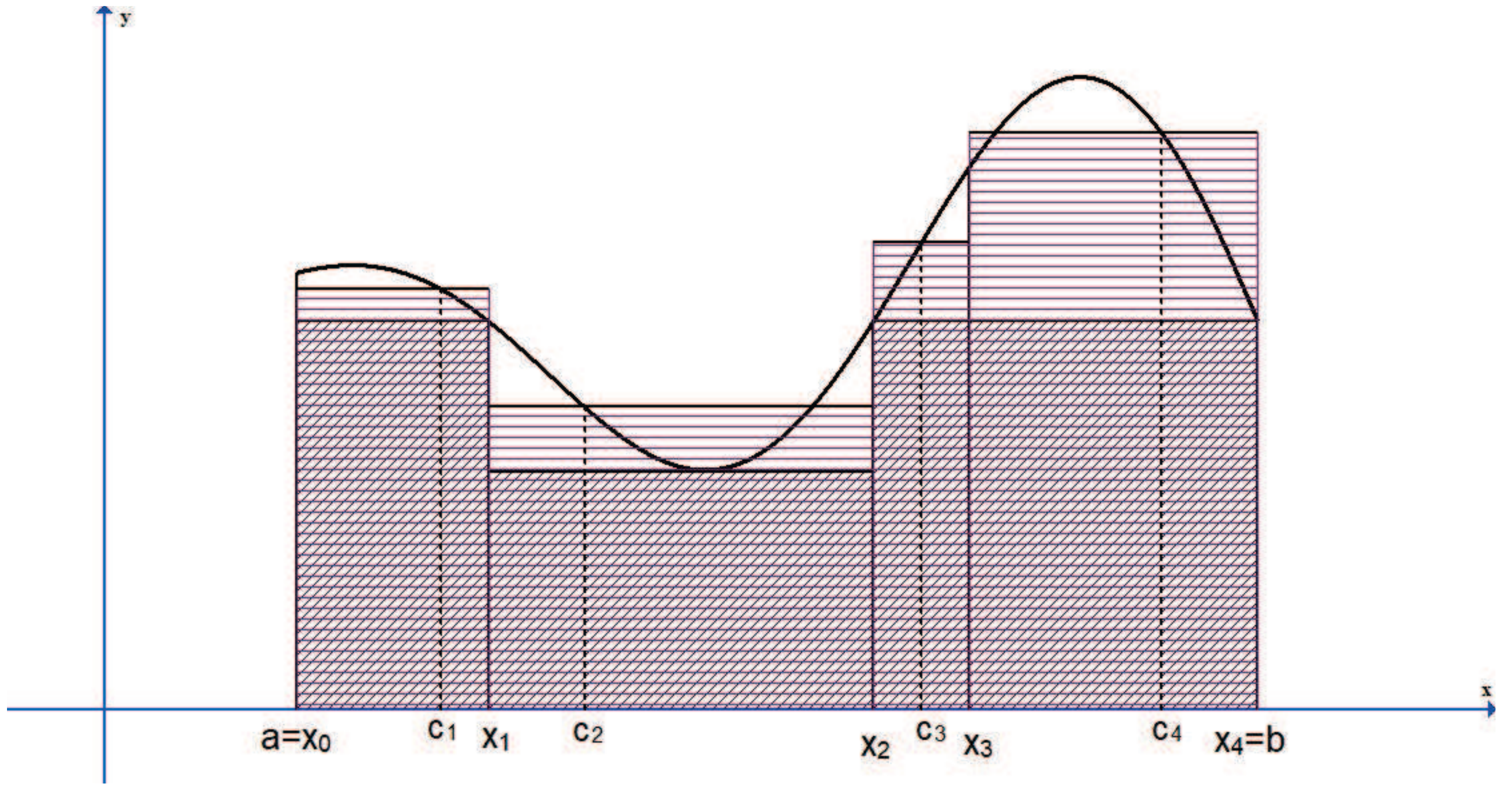
2.2.1 Риманови суми

$$\mathbf{R}\left(f,\ [a,\, b],\ \tilde{x},\ \tilde{c}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)\ , \quad c_i \in [x_{i-1},\, x_i]$$



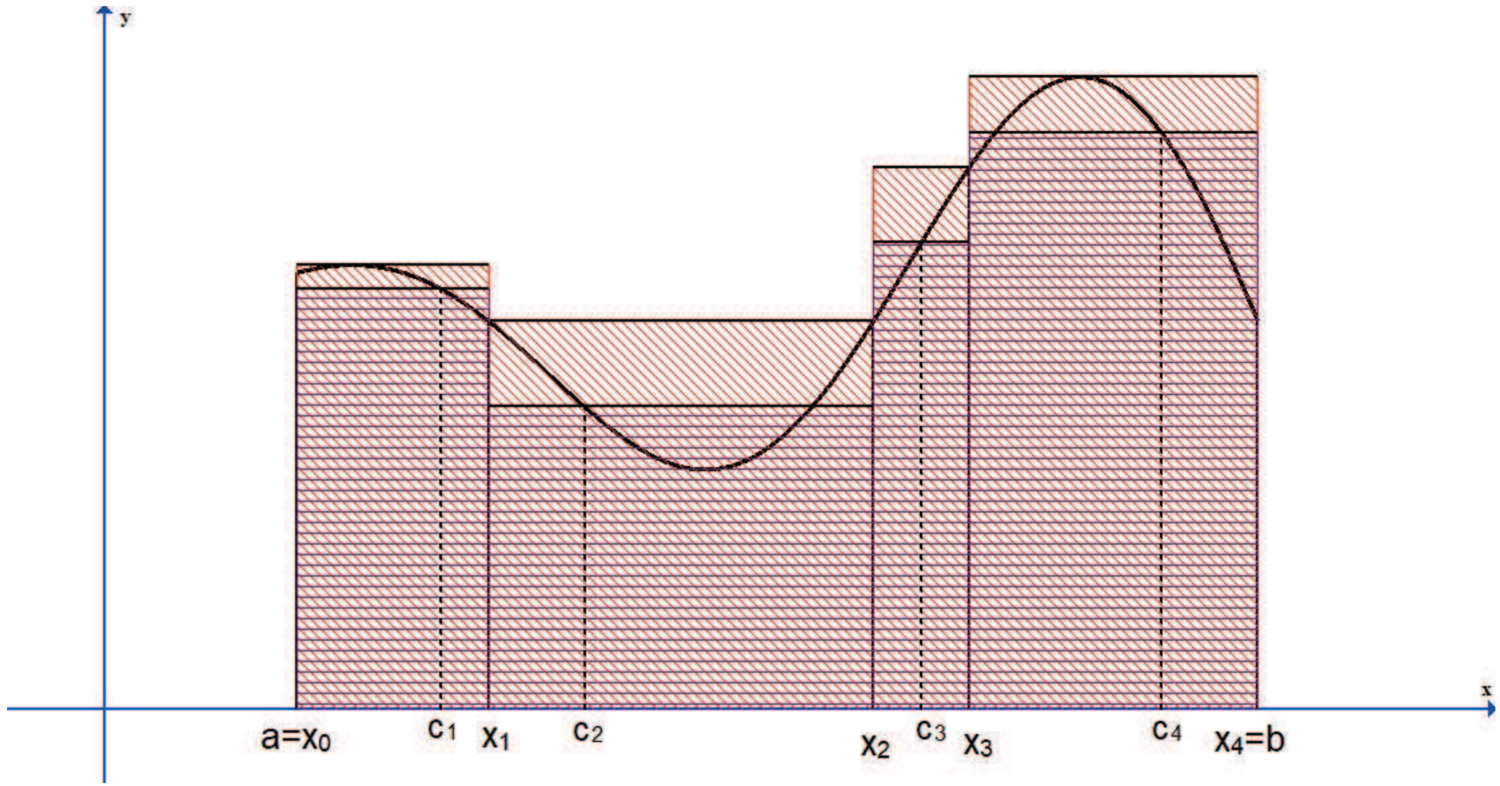
За едни и същи делящи точки, сумата на Риман е по-голяма от малката сума на Дарбу

$$\mathbf{s}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x})\ \leq\ \mathbf{R}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x},\ \tilde{c})$$



За едни и същи делящи точки, сумата на Риман е по-малка от голямата сума на Дарбу

$$\mathbf{R}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x},\ \tilde{c})\ \leq\ \mathbf{S}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x})$$



2.2.2 Дефиниция на Риман

Казваме, че функцията f е интегруема в $[a,\ b]$, ако съществува число I такова, че за всяко $\varepsilon > 0$ има $\delta > 0$, за което

$$\left|\mathbf{R}\,(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x},\ \tilde{c}) - \ I\right| < \varepsilon$$

за всяко разделяне $\tilde{x}$ с $d(\tilde{x}) < \delta$ и всеки набор $\tilde{c}\,,\ c_i \in [x_{i-1},\ x_i]$.

2.2.3 Основно твърдение

Двете дефиниции са еквивалентни.

Доказателство

Риман $\Rightarrow$ Дарбу

1. Ограниченост: в неравенството

$$\left|\mathbf{R}\,(f,\ [a,\ b],\ \tilde{x},\ \tilde{c}) - \ I\right| < 1$$

фиксираме $\tilde{x}$ с $d(\tilde{x}) < \delta$ и $\tilde{c}\,,\ i \neq\ p$.

2. За $\varepsilon > 0$ и $\tilde{x}$ има $\tilde{c}$ с

$$\mathbf{R}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x},\ \tilde{c}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) < \varepsilon$$

3. За $\varepsilon > 0$ и $\tilde{x}$ има $\tilde{c}$ с

$$\mathbf{S}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) - \mathbf{R}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x},\ \tilde{c}) < \varepsilon$$

Дарбу $\Rightarrow$ Риман

Пример: За непрекъсната функция f

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

2.3 Свойства на определените интеграли

2.3.1 Линейност

1. Нека f и g са интегруеми в $[a,\,b]$. Тогава $f+g$ е интегруема в $[a,\,b]$ и

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Доказателство $\quad \mathbf{R}\,(f+g,\ [a,\,b],\ \tilde{x},\ \tilde{c}) = \mathbf{R}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x},\ \tilde{c}) + \mathbf{R}\,(g,\ [a,\,b],\ \tilde{x},\ \tilde{c})$

2. Нека f е интегруема в $[a,\,b]$, $C \in \mathbb{R}$. Тогава Cf е интегруема в $[a,\,b]$ и

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

Доказателство $\quad \mathbf{R}\,(Cf,\ [a,\,b],\ \tilde{x},\ \tilde{c}) = C\mathbf{R}\,(f,\ [a,\,b],\ \tilde{x},\ \tilde{c})$

2.3.2 Позитивност

1. Нека f е интегруема в $[a,\,b]$ и $f(x) \geq 0$ за всяко $x \in [a,\,b]$. Тогава $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$

2. Ако f е интегруема в $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, то $f(x) = 0$ за всяка точка на непрекъснатост на f.

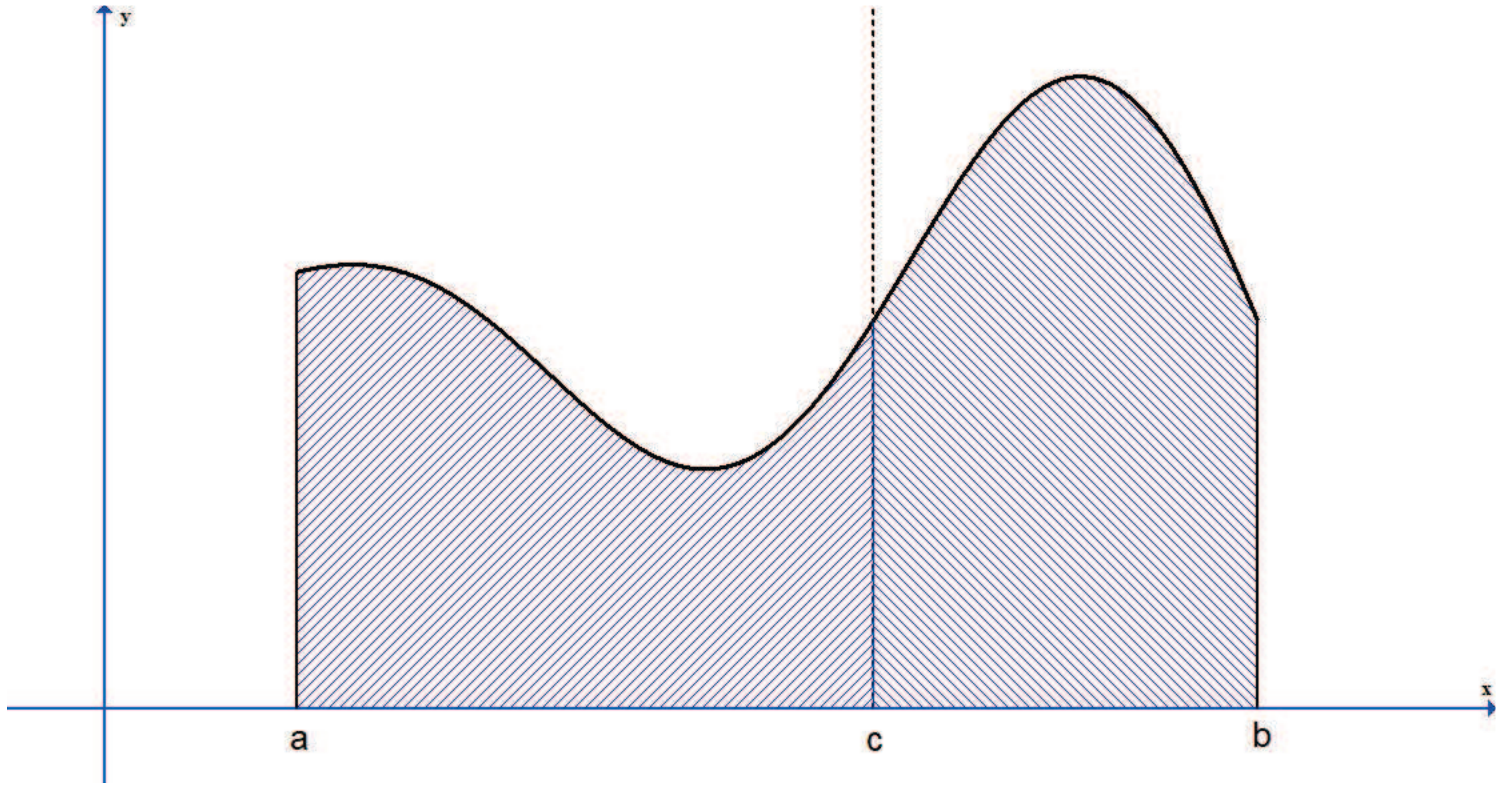
3. *Интегриране на неравенства:* $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$

2.3.3 Адитивност

Нека $c \in (a, b)$. f е интегруема в $[a, b]$ тогава и само тогава, когато f е интегруема в $[a, c]$ И f е интегруема в $[a, b]$. Изпълнено е:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \,.$$

Доказателство



За разделяне $\tilde{x}$ на $[a,\, b]$, за което $c \in \tilde{x}$, полагаме $\tilde{u} = \{u \in \tilde{x}\,;\, u \le c\}$ и $\tilde{v} = \{v \in \tilde{x}\,;\, u \ge c\}$. Тогава

$$\mathbf{s}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{x}) \ = \ \mathbf{s}\,(f,\ [a,\, c],\ \tilde{u}) + \mathbf{s}\,(f,\ [c,\, b],\ \tilde{v}) \quad \text{и} \quad \mathbf{S}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{x}) \ = \ \mathbf{S}\,(f,\ [a,\, c],\ \tilde{u}) + \mathbf{S}\,(f,\ [c,\, b],\ \tilde{v})\ .$$

$\Rightarrow$ Нека $\varepsilon > 0$. Съществува разделяне $\tilde{y}$ на $[a,\, b]$, за което $\mathbf{S}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{y}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{y}) < \varepsilon$. Нека $\tilde{x} = \tilde{y} \cup \{c\}$. Тогава

$$\mathbf{S}\,(f,\ [a,\, c],\ \tilde{u}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a,\, c],\ \tilde{u})\ \ (\ \text{също и}\ \ \mathbf{S}\,(f,\ [c,\, b],\ \tilde{v}) - \mathbf{s}\,(f,\ [c,\, b],\ \tilde{v})\ )\ \leq$$

$$\leq\ \mathbf{S}\,(f,\ [a,\, c],\ \tilde{u}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a,\, c],\ \tilde{u}) + \mathbf{S}\,(f,\ [c,\, b],\ \tilde{v}) - \mathbf{s}\,(f,\ [c,\, b],\ \tilde{v})\ =$$

$$=\ \mathbf{S}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{x}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{x})\ \leq\ \mathbf{S}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{y}) - \mathbf{s}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{y})\ <\ \varepsilon\ .$$

За произволно разделяне $\tilde{y}$ на $[a,\, b]$ отново полагаме $\tilde{x} = \tilde{y} \cup \{c\}$. Тогава

$$\mathbf{s}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{y})\ \leq\ \mathbf{s}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{x})\ =\ \mathbf{s}\,(f,\ [a,\, c],\ \tilde{u}) + \mathbf{s}\,(f,\ [c,\, b],\ \tilde{v})\ \leq\ \int\limits_a^c f(x)dx\ +\ \int\limits_c^b f(x)dx\ \leq$$

$$\leq\ \mathbf{S}\,(f,\ [a,\, c],\ \tilde{u}) + \mathbf{S}\,(f,\ [c,\, b],\ \tilde{v})\ =\ \mathbf{S}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{x})\ \leq\ \mathbf{S}\,(f,\ [a,\, b],\ \tilde{y})\ \ ,$$

т.е сумата на двата интеграла е между малките и големи суми за f в $[a,\, b]$, откъдето следва исканото равенство.

2.3.4 Интегруемост на модула

Ако f е интегруема в $[a,\, b]$, то $|f|$ е интегруема в $[a,\, b]$.

План на доказателство

1. $f_+(x) = \max(f(x),\, 0)\,,\ \ f_-(x) = \max(-f(x),\, 0)$

2. $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)\,,\ \ f(x) = f_+(x) - f_-(x)$

3. $M_i^+ - m_i^+ \le M_i - m_i$

Следствие

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\, dx \le (b-a) \sup_{x\in[a,\, b]} |f(x)|$$

2.3.5 Интегруемост на произведение

Ако f и g са интегруеми в $[a,\, b]$, то $f.g$ е интегруема в $[a,\, b]$.

План на доказателство

1. Ако $f(x) \geq 0$ и f е интегруема в $[a,\, b]$, то f^2 е интегруема в $[a,\, b]$.

$M_i^* = M_i^2$, $m_i^* = m_i^2$

$$\mathbf{S}\left(f^2,\ [a,\, b],\ \tilde{x}\right) - \mathbf{s}\left(f^2,\ [a,\, b],\ \tilde{x}\right) \leq 2M\left(\mathbf{S}\left(f,\ [a,\, b],\ \tilde{x}\right) - \mathbf{s}\left(f,\ [a,\, b],\ \tilde{x}\right)\right) .$$

2. Ако f е интегруема в $[a,\, b]$, то f^2 е интегруема в $[a,\, b]$.

$f^2(x) = \left(f(x) + C\right)^2 - 2Cf(x) + C^2 , \quad f(x) + C \geq 0$

3. $f(x)g(x) = \dfrac{1}{4}\left(\left(f(x) + g(x)\right)^2 - \left(f(x) - g(x)\right)^2\right)$

2.3.6 Първа теорема за средните стойности

Обща формулировка

Нека f и g са интегруеми в $[a, b]$, като $g(x) \geq 0$ за всяко $x \in [a, b]$. Тогава съществува число C, за което

1. $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leq C \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

2. $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = C \int\limits_a^b g(x)dx$

Формулировка за непрекъсната функция

Нека f е непрекъсната, а g е интегруема в $[a, b]$, като $g(x) \geq 0$ за всяко $x \in [a, b]$. Тогава съществува число $a \leq c \leq b$, за което

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int\limits_a^b g(x)dx$$