3 Правило на Лопитал

3.1 Теорема на Коши (обощена теорема за крайните нараствания)

Нека

1. f и g са непрекъснати в $[a,\, b]$
2. f и g имат производна в $(a,\, b)$
3. $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a,\, b)$

Тогава $g(a) \neq g(b)$ и $c \in (a,\, b)$, за което $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Забележка

$c \in (a,\, b) \;\Leftrightarrow\; c = a + t(b - a)\,,\; t \in (0,\, 1)$ — позволява да избегнем ограничението $a < b$

3.2 Правило на Лопитал – основен вариант

За интервал J означаваме с J_0 интервала, състоящ се от вътрешните точки на J. Нека

- $a \in J$
- f и g са непрекъснати в J като $f(a) = g(a) = 0$
- f и g имат производна в $J_0 \setminus \{a\}$ и $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in J_0 \setminus \{a\}$
- съществува границата (крайна или безкрайна) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Тогава $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ (границата съществува).

Начало на доказателство: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(a + t(x-a))}{g'(a + t(x-a))}$

Приложение: ако f е непрекъсната в a, има производна в $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ и съществува крайната границата $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$, то f има производна в a и f' е непрекъсната в a

Примери

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}{x^n} = 0$$

- по-общо: ако f има производни до ред n в $(a-\delta,\ a+\delta)$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}{(x-a)^n} = 0$$

- Функцията $F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{за} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{за} \quad x = 0 \end{cases}$ има непрекъсната производна

3.3 Правило на Лопитал – уточнен вариант

Означаваме с J_* едно от следните множества $(a-\delta,\, a+\delta) \setminus \{a\}$, $(a-\delta,\, a)$, $(a,\, a+\delta)$. Нека

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
- f и g имат производна в J_* и $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in J_*$
- съществува границата (крайна или безкрайна) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Тогава $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ (границата съществува).

Начало на доказателство: Дефинираме $f(a) = g(a) = 0$. По този начин, f и g стават непрекъснати в a , т.е. приложим е основният вариант на правилото на Лопитал.

3.4 Правило на Лопитал – в безкрайност

Нека

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \,=\, \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \,=\, 0$
- f и g имат производна в $(B,\,+\infty)$ и $g'(x)\neq 0$ за всяко $x\in(B,\,+\infty)$
- съществува границата (крайна или безкрайна) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Тогава $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ (границата съществува).

Доказателство: Нека $F(u) = f\left(\dfrac{1}{u}\right)$ и $G(u) = g\left(\dfrac{1}{u}\right)$. Тези функции удовлетворяват условията на уточнени вариант на правилото на Лопитал за интервала $\left(0,\,\dfrac{1}{B}\right)$. Тогава

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u\to 0} \frac{F(u)}{G(u)} = \lim_{u\to 0} \frac{F'(u)}{G'(u)} = \lim_{u\to 0} \frac{-\frac{1}{u^2}\cdot f'\left(\frac{1}{u}\right)}{-\frac{1}{u^2}\cdot g'\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,.$$

3.5 Правило на Лопитал – безкрайни граници

Нека

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$
- f и g имат производна в $(B, +\infty)$ и $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (B, +\infty)$
- съществува границата (крайна или безкрайна) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Тогава $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ (границата съществува).

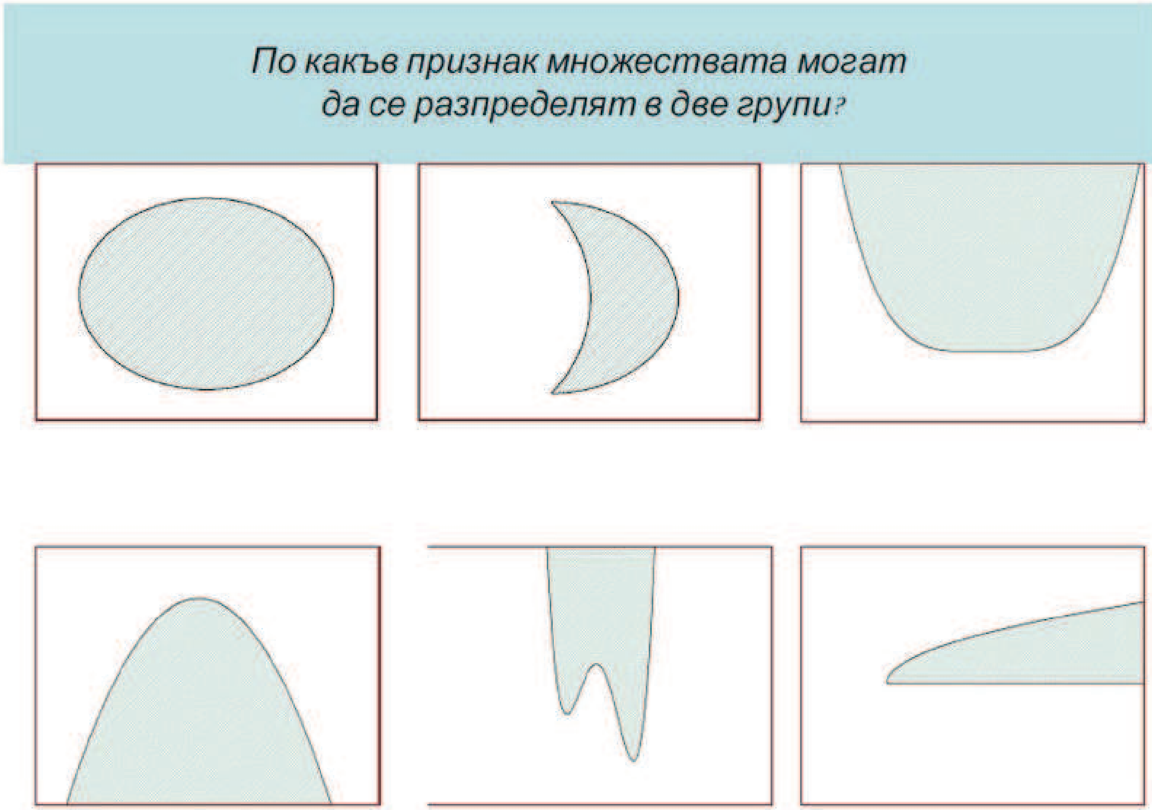
Примери

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{e^x} = 0$; *2)* $a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^a} = 0$; *3)* $a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^a \ln x = 0$.

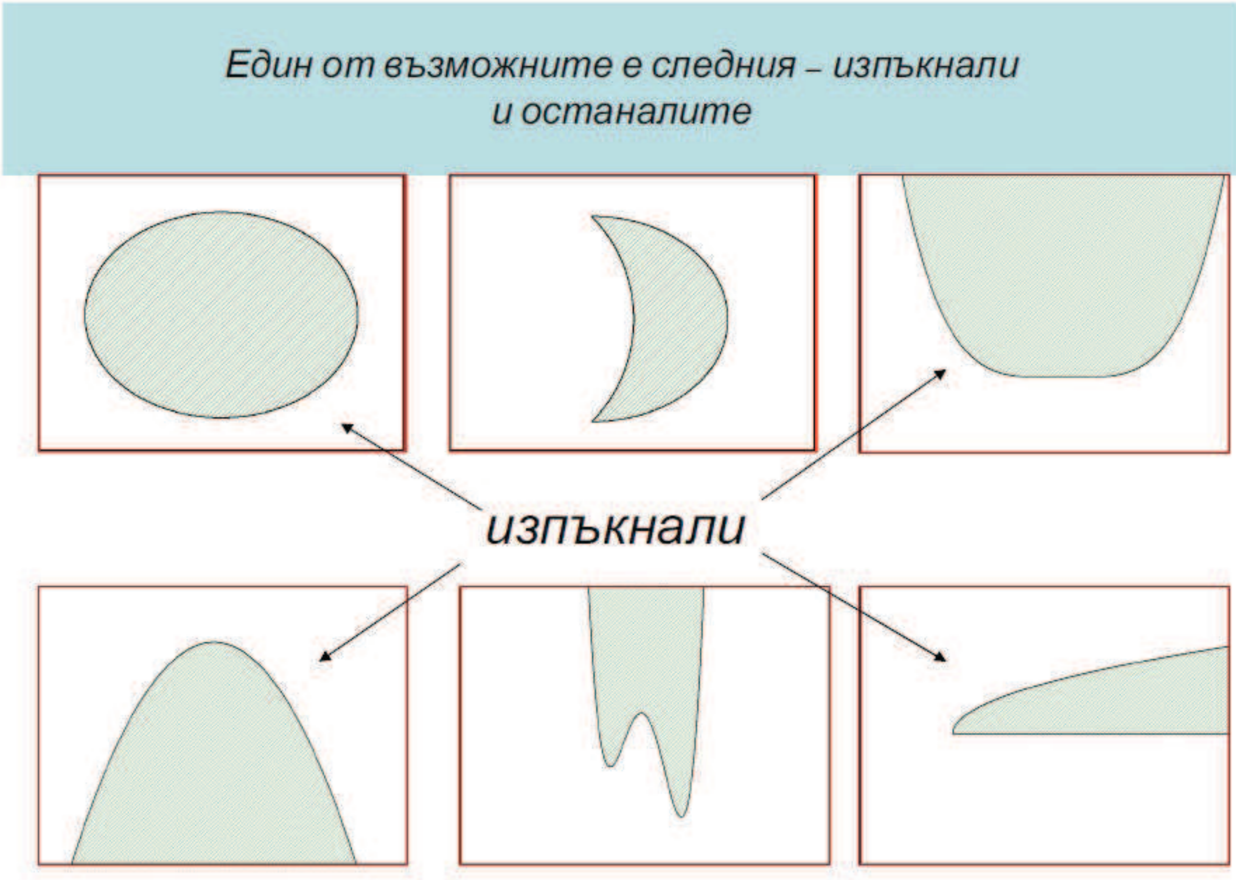
4 Изпъкнали функции

4.1 Изпъкнали множества

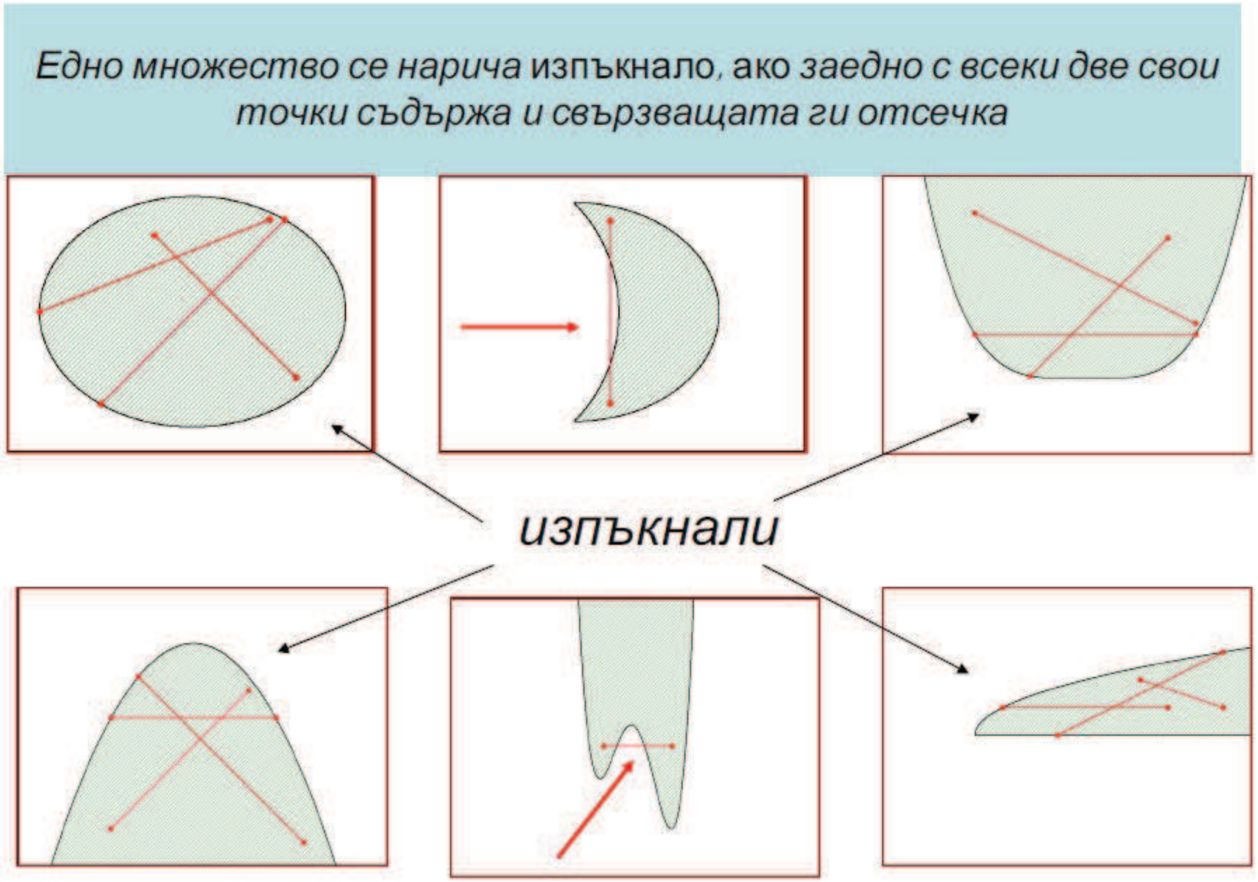
Въпрос



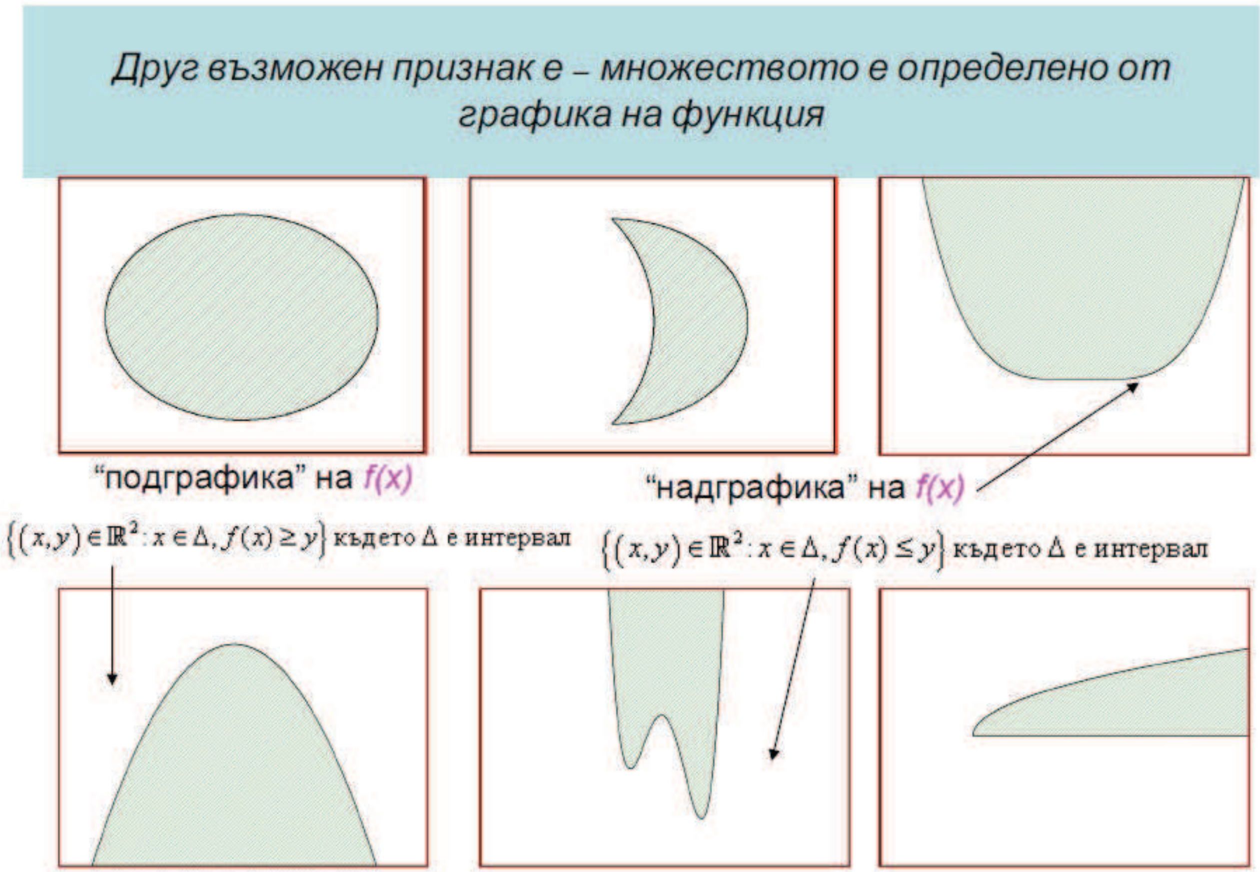
Възможен отговор



Изпъкнали множества

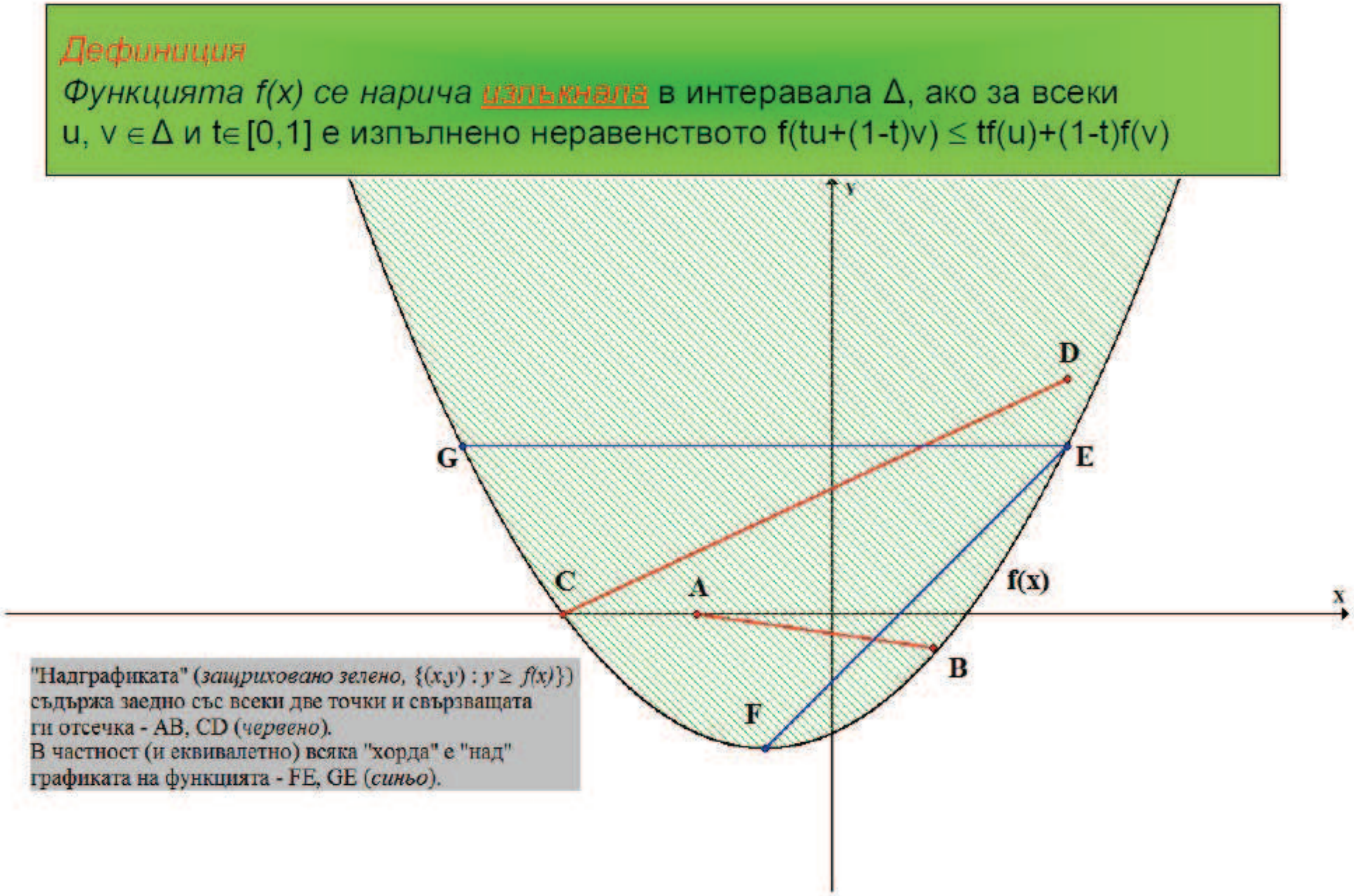


Друг възможен отговор

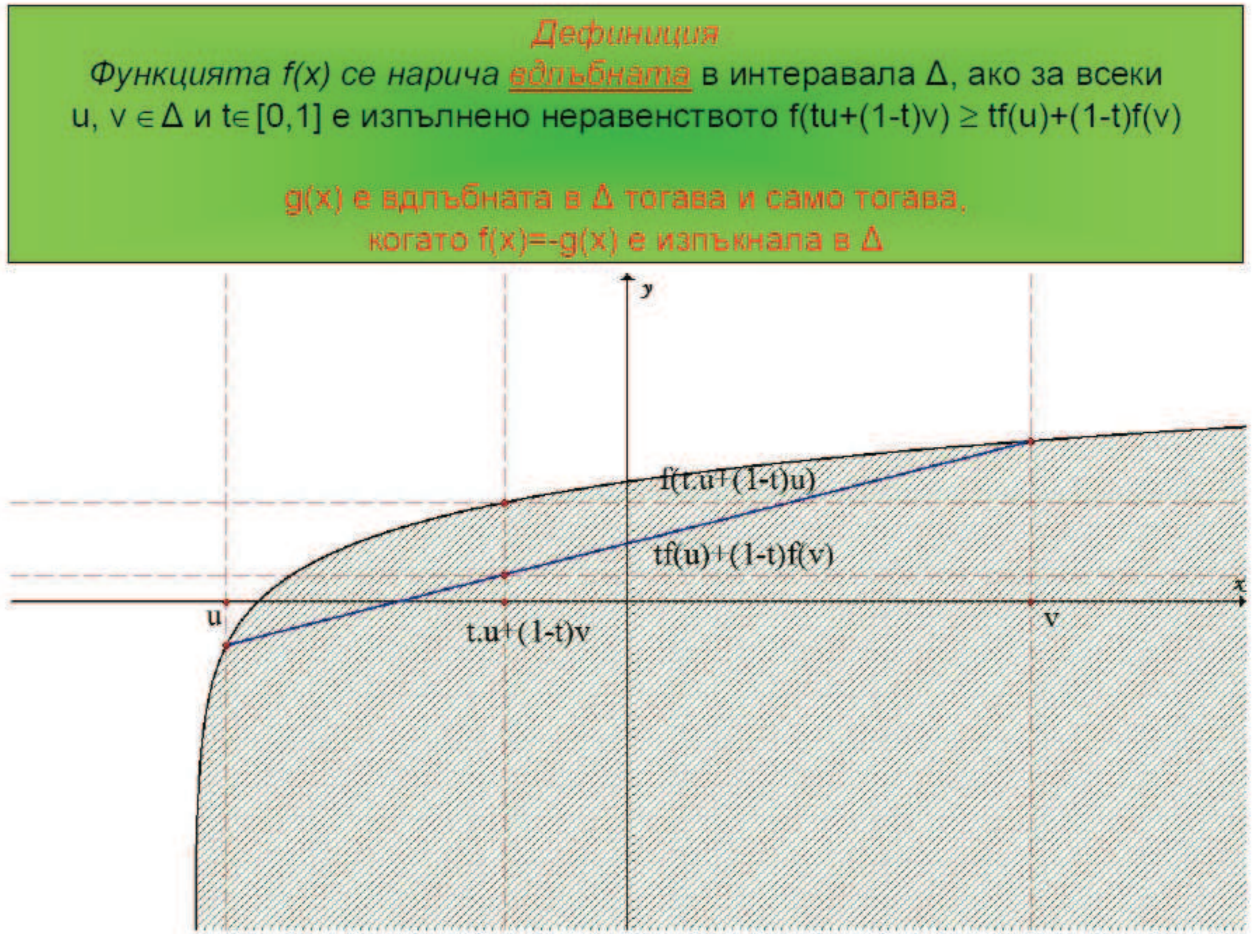


4.2 Изпъкнали функции

4.2.1 Изпъкнали функции



4.2.2 Вдлъбнати функции



4.2.3 Строго изпъкнали (вдлъбнати) функции

- Казваме, че функцията f е строго изпъкнала в интервал Δ, ако за всеки $x,\ y \in \Delta,\ x \neq y$ и всяко $t \in (0,\ 1)$ е изпълнено

  $f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y)$

- Казваме, че функцията f е строго вдлъбната в интервал Δ, ако за всеки $x,\ y \in \Delta,\ x \neq y$ и всяко $t \in (0,\ 1)$ е изпълнено

  $f(tx + (1 - t)y) > tf(x) + (1 - t)f(y)$

4.2.4 Неравенство на Йенсен

Нека f е изпъкнала в интервал Δ. Тогава за всеки $x_k \in \Delta$, $k = 1, 2, \dots n$ и всеки $p_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$ е изпълнено

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} p_k f\left(x_k\right)$$

Ако f е строго изпъкнала и $p_k < 1$, $k = 1, 2, \dots n$, то равенство имаме само за $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

Доказателство: „индуктивна стъпка“ — $s = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$, $y = \dfrac{1}{s} \sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k$. Тогава

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} p_k x_k\right) = f\left(sy + p_{n+1}x_{n+1}\right) \leq sf\left(y\right) + p_{n+1}x_{n+1} \leq s\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{s} f\left(x_k\right) + p_{n+1}x_{n+1}$$

4.2.5 Приложения

За всеки $x_k > 0\,,\ k = 1, 2, \dots n$ и всеки $p_k \geq 0\,,\ k = 1, 2, \dots n\,,\ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ е изпълнено

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$$

Доказателство: $\ln x$ е строго вдлъбната функция.

За всеки $x_k > 0\,,\ k = 1, 2, \dots n$ е изпълнено

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Доказателство: $p_k = \dfrac{1}{n}\,,\ k = 1, 2, \dots n\,.$

Неравенство на Хьолдер

За $p > 1\,,\ q > 1\,,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ и неотрицателни $x_k\,,\ y_k\,,\ k = 1, 2, \ldots n$ е изпълнено

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \ \le\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказателство: $\quad uv \le \dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q}$. Нека $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^p\,,\ Y = \sum_{k=1}^{n} y_k^q$. Имаме

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{X^{1/p}} \cdot \frac{y_k}{Y^{1/q}} \ \le\ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k^p}{pX} + \frac{y_k^q}{qY}\right) \ = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ .$$

Неравенство на Коши, Буняковски, Шварц

За неотрицателни $x_k\,,\ y_k\,,\ k = 1, 2, \ldots n$ е изпълнено

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \ \le\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

4.3 Еквивалентни условия

4.3.1 Еквивалентни условия — I-ва част

Функцията f е изпъкнала в интервал Δ тогава и само тогава, когато

за всеки $u,\ v,\ z \in \Delta,\ u < v < z$ е изпълнено

- (1) $\quad f(v) \le \dfrac{z-v}{z-u} f(u) + \dfrac{v-u}{z-u} f(z)$

  Доказателство: $\quad v = tu + (1-t)z \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{z-v}{z-u} \in [0,\, 1]$.

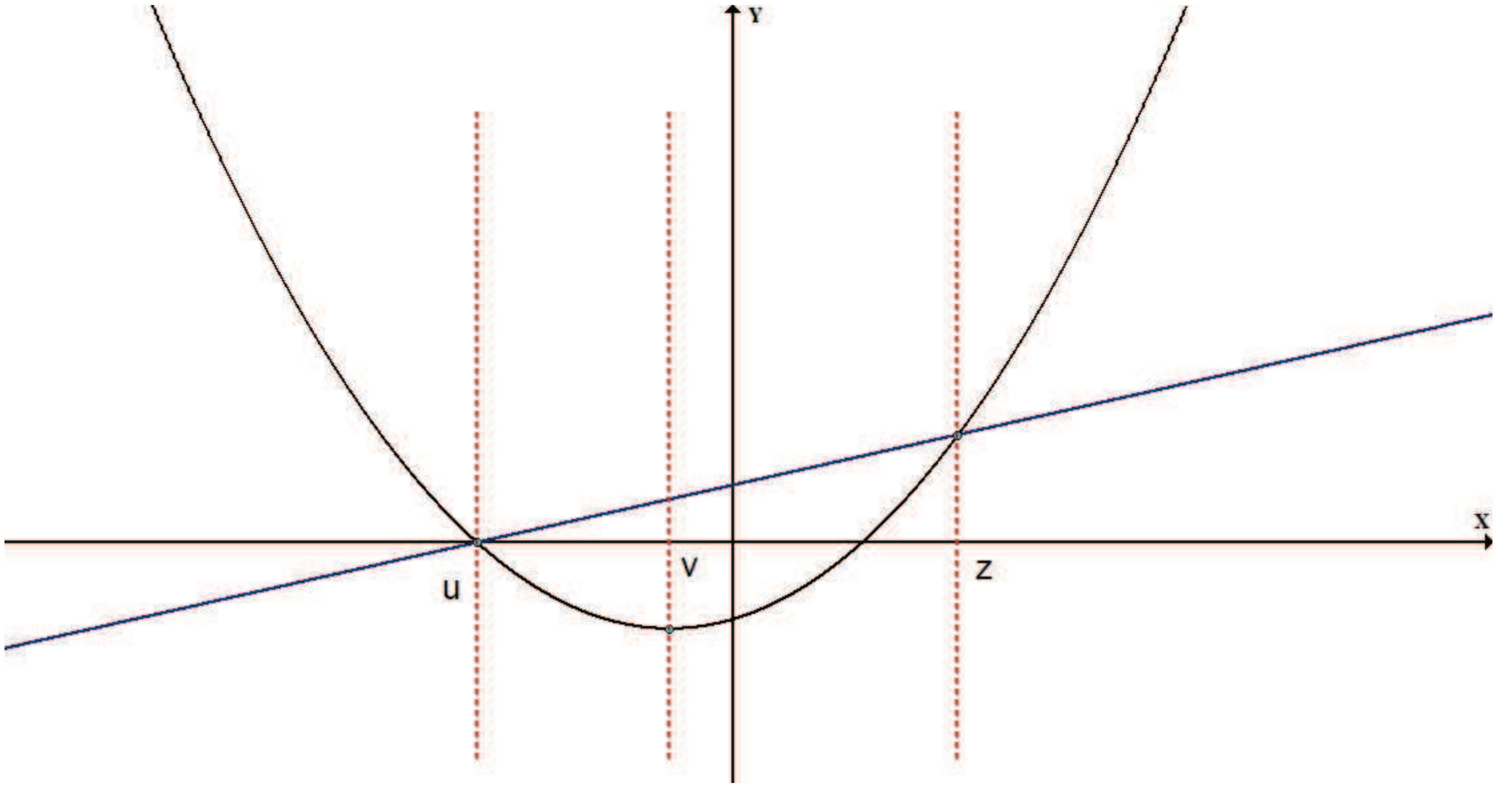
  (1) $\Leftrightarrow$ (4) получаваме с умножаване (разделяне) с $z - u > 0$.

- (2) $\quad f(u) \ge \dfrac{z-u}{z-v} f(v) + \dfrac{u-v}{z-v} f(z)$

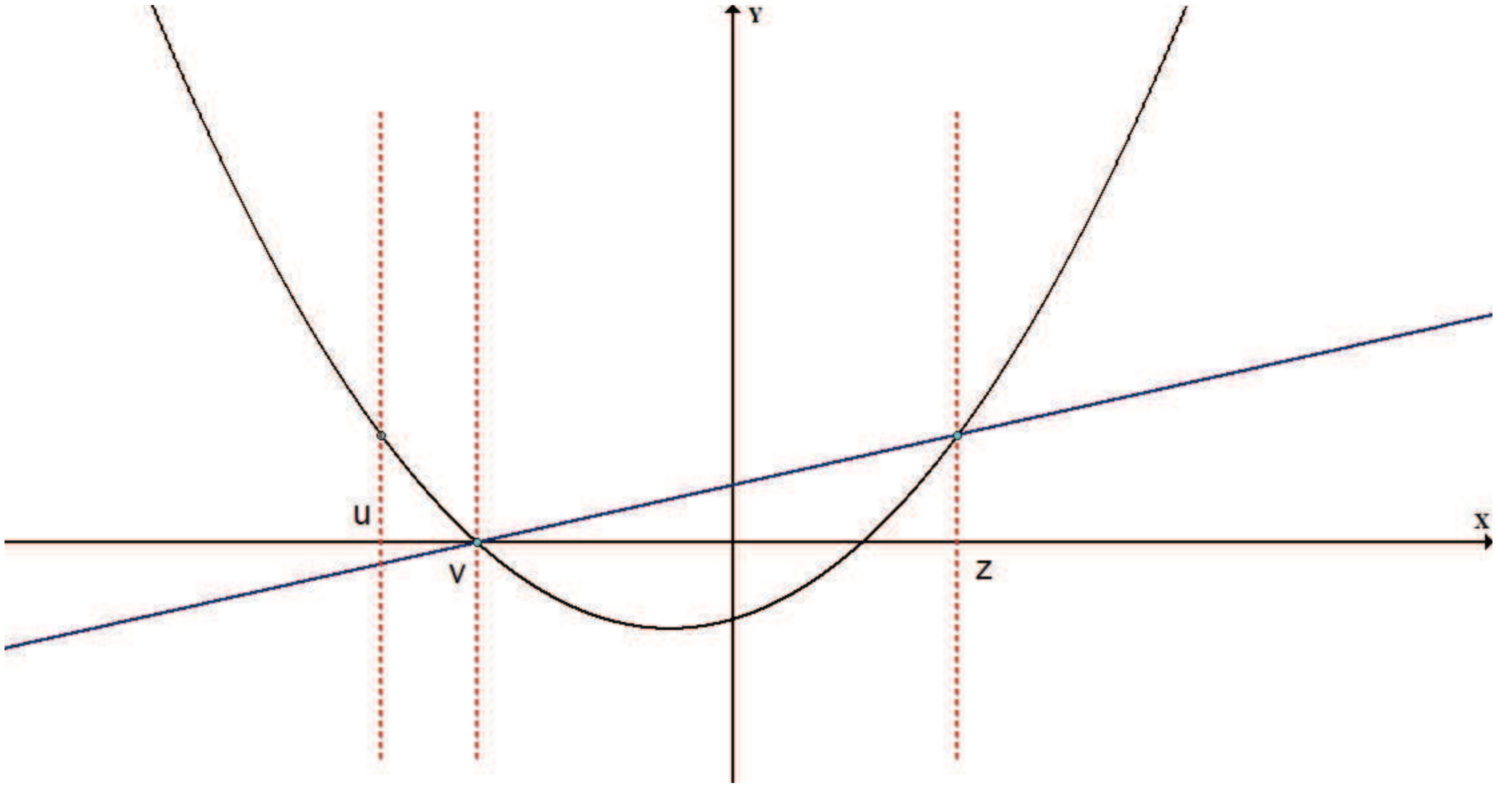
- (3) $\quad f(z) \ge \dfrac{v-z}{v-u} f(v) + \dfrac{z-u}{v-u} f(u)$

- (4) $\quad (v-u)\, f(z) + (z-v)\, f(u) + (u-z)\, f(v) \ \ge\ 0$

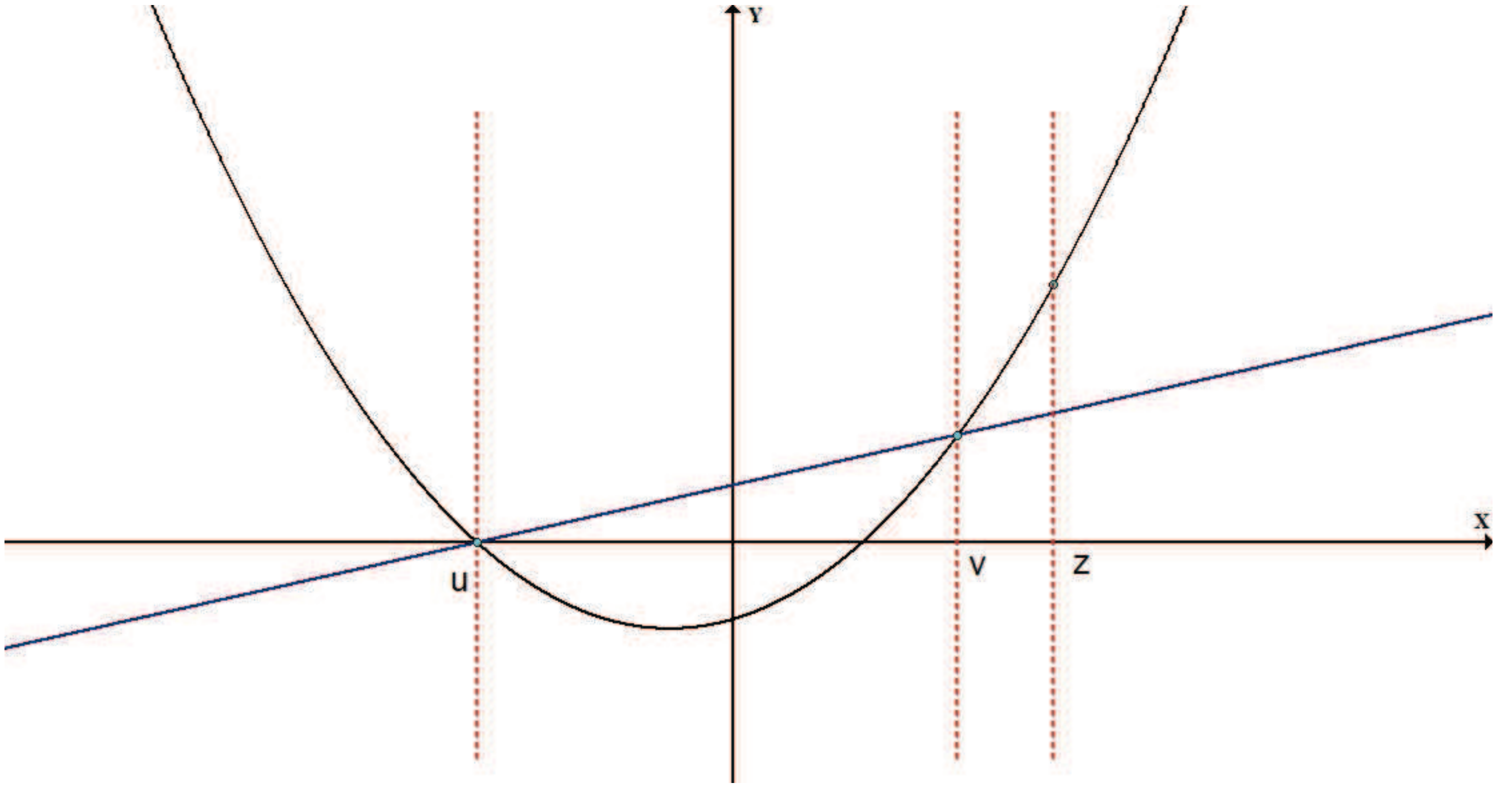
$$(1) \qquad f(v) \leq \frac{z-v}{z-u} f(u) + \frac{v-u}{z-u} f(z)$$



$$(2) \qquad f(u) \;\geq\; \frac{z-u}{z-v}\,f(v) + \frac{u-v}{z-v}\,f(z)$$



$$(3) \qquad f(z) \geq \frac{v-z}{v-u} f(v) + \frac{z-u}{v-u} f(u)$$



4.3.2 Еквивалентни условия — II-ра част

Функцията f е изпъкнала в интервал Δ тогава и само тогава, когато за всеки $u,\ v,\ z \in \Delta,\ u < v < z$ е изпълнено

- (4) $\quad (v-u)\,f(z) + (z-v)\,f(u) + (u-z)\,f(v) \ \geq\ 0$

- (5) $\quad \dfrac{f(u)-f(v)}{u-v} \leq \dfrac{f(z)-f(v)}{z-v}$

Доказателство: записваме (4) във вида

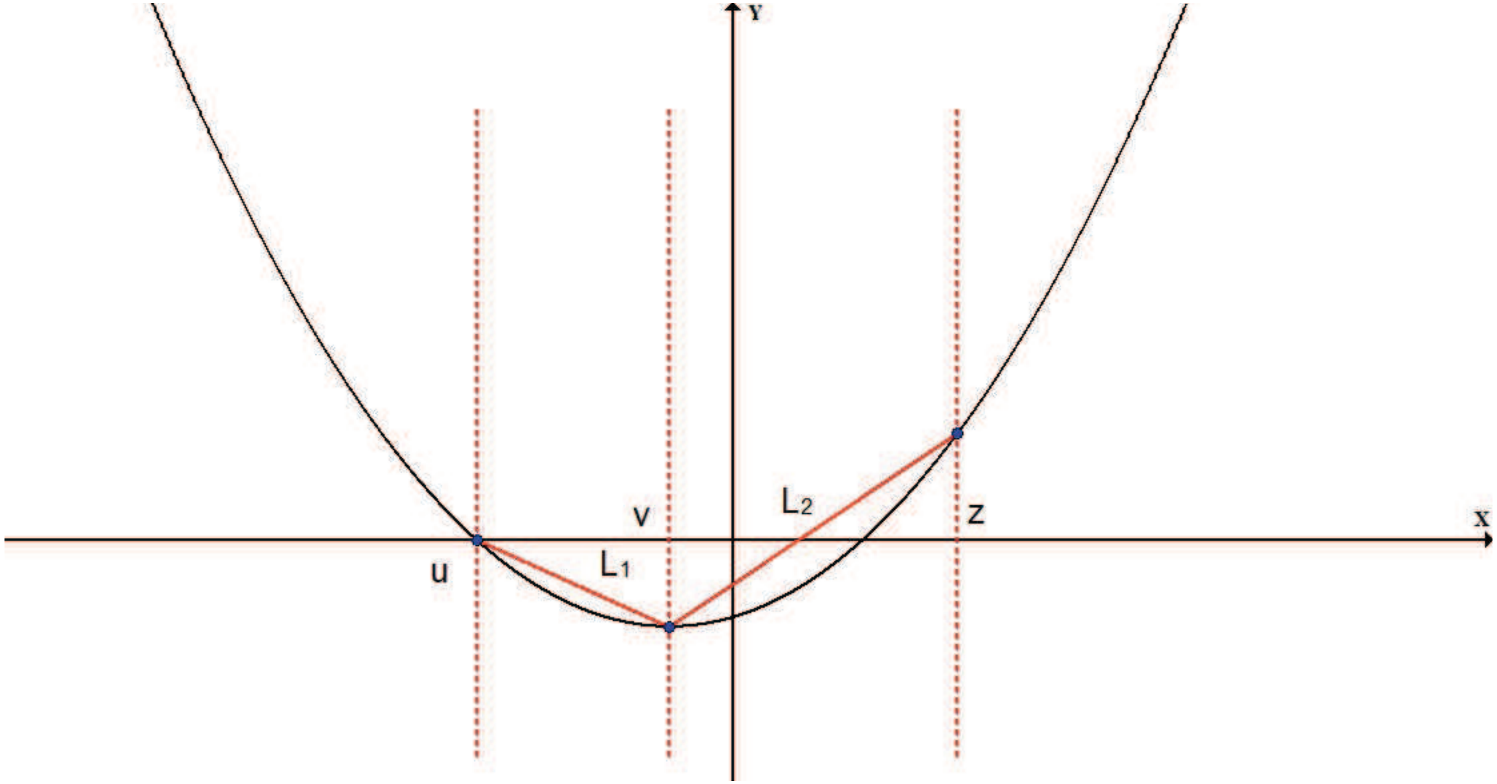
$(v-u)\,f(z) + (z-v)\,f(u) - (v-u+z-v)\,f(v) \ \geq\ 0$, или

$(v-u)\,(f(z)-f(v)) \ \geq\ (z-v)\,(f(v)-f(u))$. След разделяне на $(v-u)(z-v) > 0$, получаваме (5). Преобразуванията са еквивалентни.

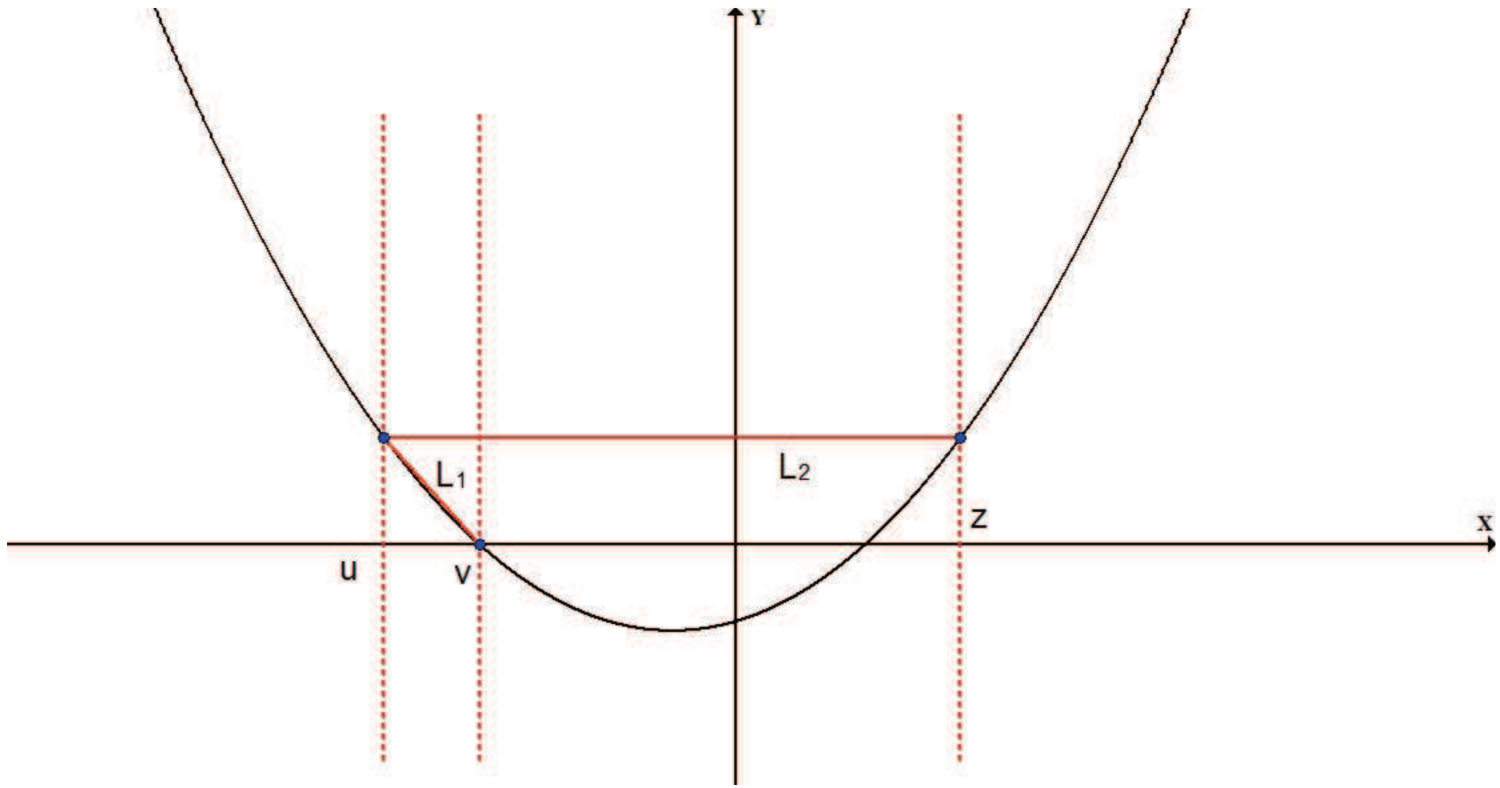
- (6) $\quad \dfrac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \dfrac{f(z)-f(u)}{z-u}$

- (7) $\quad \dfrac{f(u)-f(z)}{u-z} \leq \dfrac{f(v)-f(z)}{v-z}$

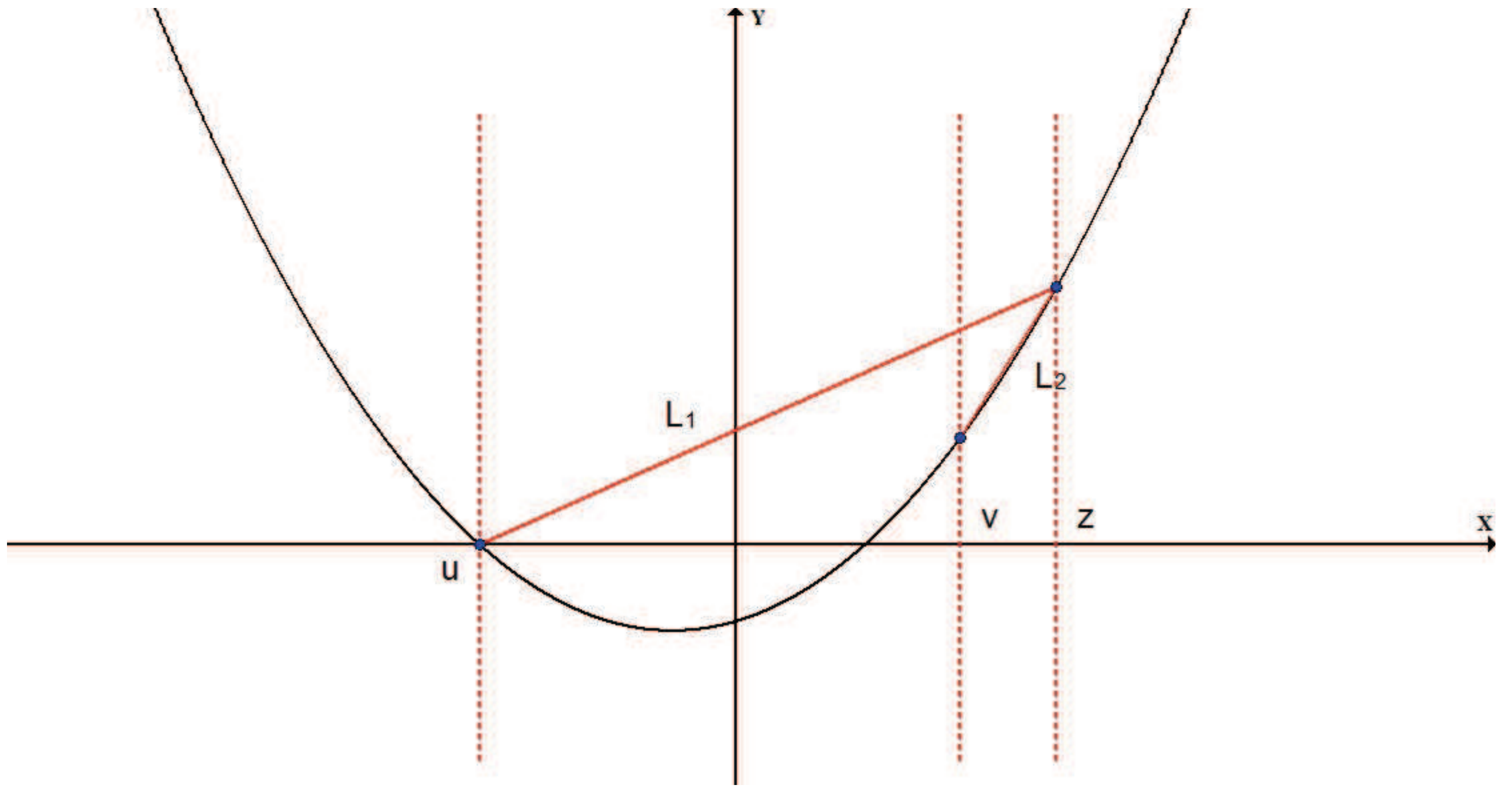
$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v} \leq \frac{f(z)-f(v)}{z-v} \tag{5}$$



$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \frac{f(z)-f(u)}{z-u} \tag{6}$$



$$(7) \qquad \frac{f(u) - f(z)}{u - z} \leq \frac{f(v) - f(z)}{v - z}$$



4.3.3 Вдлъбнати, строго изпъкнали (вдлъбнати) функции

- Функцията f е вдлъбната в интервал Δ тогава и само тогава, когато неравенствата (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) са в противоположната посока.

- Функцията f е строго изпъкнала (вдлъбната) в интервал Δ тогава и само тогава, когато в неравенствата (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) (противоположните им) не се допуска равенство, т.е. те са строги.

4.4 Монотонност на диференчното частно

- Функцията f е изпъкнала (вдлъбната) в интервал Δ тогава и само тогава, когато за всяко $a \in \Delta$ функцията $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ е растяща (намаляваща) в $\Delta \setminus \{a\}$.

- Функцията f е строго изпъкнала (вдлъбната) в интервал Δ тогава и само тогава, когато за всяко $a \in \Delta$ функцията $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ е строго растяща (намаляваща) в $\Delta \setminus \{a\}$.

4.5 Непрекъснатост

- Ако f е изпъкнала (вдлъбната) в интервал Δ и $a \in \Delta$ е вътрешна точка, то съществуват крайните граници $f'_-(a) = \lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ и $f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

- Ако f е изпъкнала (вдлъбната) в интервал Δ и $a \in \Delta$ е вътрешна точка, то f е непрекъсната в a.

4.6 Еквивалентни условия при наличие на производна

Нека f е непрекъсната в интервал Δ и има производна във вътрешните му точки. Тогава

1. f е изпъкнала (вдлъбната) в Δ тогава и само тогава, когато f' е растяща (намаляваща) в Δ.

   Доказателство:

   $\Rightarrow$ Нека f е изпъкнала в интервала Δ и $x < y$, $x, y \in \Delta$. За всеки $x < u < v < y$ имаме

$$f'(x) \leq \frac{f(u)-f(x)}{u-x} = \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \leq \frac{f(v)-f(u)}{v-u} =$$

$$= \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \leq \frac{f(y)-f(v)}{y-v} = \frac{f(v)-f(y)}{v-y} \leq f'(y)$$

$\Leftarrow$ Нека $u < v < z$ са от Δ. От теоремата за крайните нараствания получаваме $\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v} = f'(c_1)$, $u < c_1 < v$ и $\dfrac{f(z)-f(v)}{z-v} = f'(c_2)$, $v < c_2 < z$. От нарастването на f' и $c_1 < v < c_2$ следва условието (5).

2. f е строго изпъкнала (вдлъбната) в Δ тогава и само тогава, когато f' е строго растяща (намаляваща) в Δ.

3. f е изпъкнала (вдлъбната) в Δ тогава и само тогава, когато

за всяка вътрешна точка $a \in \Delta$ и всяко $x \in \Delta$ е изпълнено $f(x) \geq f'(a)\,(x-a) + f(a)$

$(f(x) \leq f'(a)\,(x-a) + f(a))$

Доказателство:

$\Rightarrow$ Нека f е изпъкнала в интервала Δ и $a \in \Delta$ е вътрешна точка.
Полагаме $g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$.

При $x < a$ имаме $g'(x) = f'(x) - f'(a) \leq 0$, т.е. $g(x)$ е намаляваща в интервала $\{t \leq a\} \cap \Delta$, което дава $g(x) \geq g(a) = 0$.

При $x > a$ имаме $g'(x) = f'(x) - f'(a) \geq 0$, т.е. $g(x)$ е растяща в интервала $\{t \geq a\} \cap \Delta$, което дава $g(x) \geq g(a) = 0$.

$\Leftarrow$ Нека $x < y$ са от Δ и $t \in (0, 1)$. Полагаме $u = tx + (1-t)y$.
Тогава $f(x) \geq f'(u)(x-u) + f(u)$ и $f(y) \geq f'(u)(y-u) + f(u)$. Следователно

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f'(u)(t(x-u) + (1-t)(y-u)) + (t+1-t)f(u) = f(u) .$$

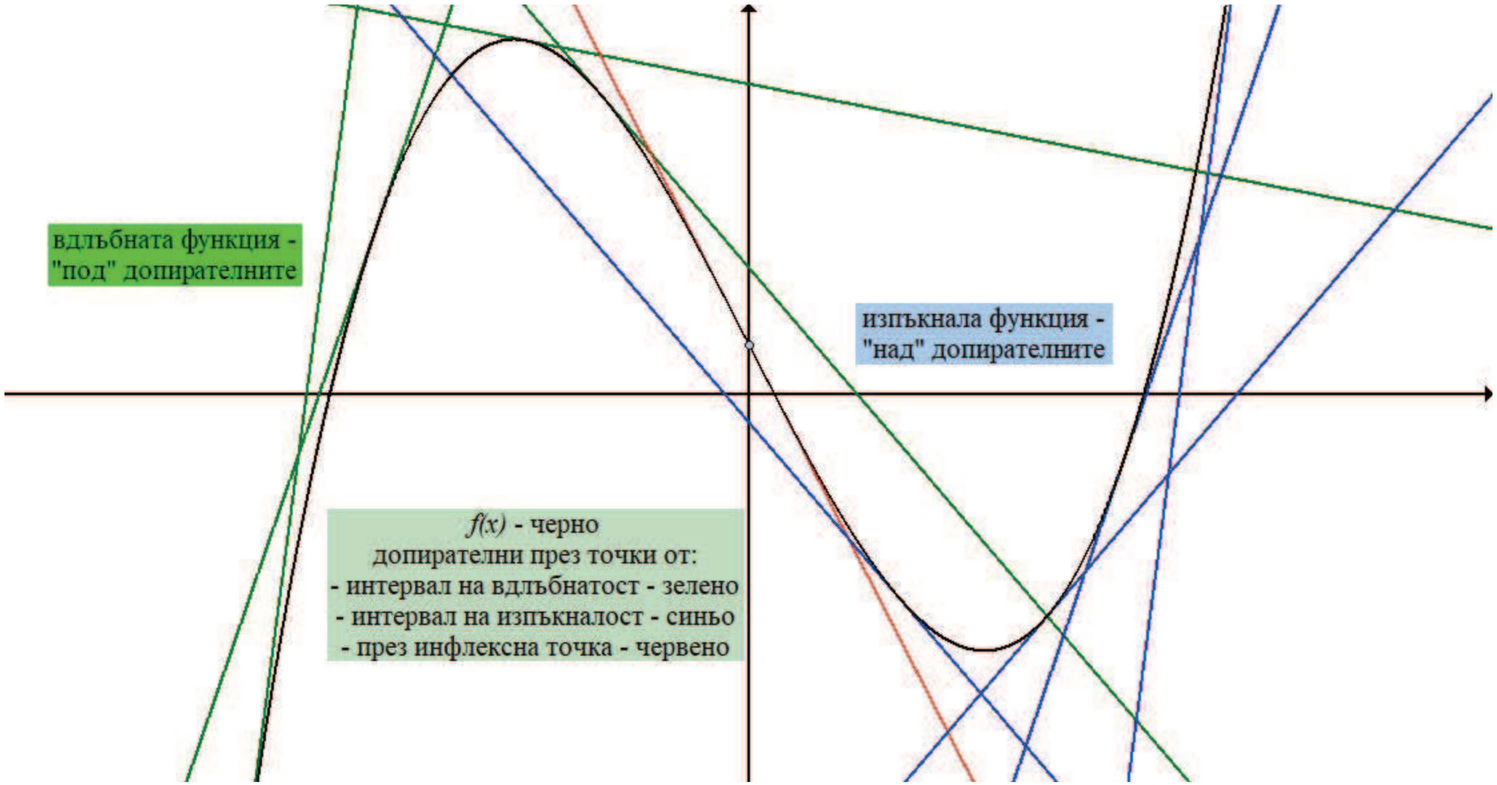
4. f е строго изпъкнала (вдлъбната) в интервал Δ тогава и само тогава, когато

за всяка вътрешна точка $a \in \Delta$ и всяко $x \in \Delta \setminus \{a\}$ е изпълнено $f(x) > f'(a)(x-a) + f(a)$

$(f(x) < f'(a)(x-a) + f(a))$

5. Ако f е изпъкнала (вдлъбната) в Δ , то f' е непрекъсната.

Графика и допирателни



4.7 Графика и асимптоти

- Нека f има производна в $(B, +\infty)$ и асимптота $y = kx + b$ при $x \to +\infty$.
  - ако f е изпъкнала в $(B, +\infty)$, то $f(x) \geq kx + b$ за всяко $x > B$
  - ако f вдлъбната в $(B, +\infty)$, то $f(x) \leq kx + b$ за всяко $x > B$
- Нека f има производна в $(-\infty, B)$ и асимптота $y = kx + b$ при $x \to -\infty$.
  - ако f е изпъкнала в $(-\infty, B)$, то $f(x) \geq kx + b$ за всяко $x < B$
  - ако f вдлъбната в $(-\infty, B)$, то $f(x) \leq kx + b$ за всяко $x < B$

Доказателство: Нека f е изпъкнала в интервала $(B, +\infty)$. f' е растяща, следователно съществува границата $L = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ (крайна или $+\infty$). От условието за асимптота и правилото на Лопитал получаваме $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{1} = L$. Нарастването на f' означава, че $f'(x) \leq k$ за всяко $x \in (B, +\infty)$. За функцията $g(x) = f(x) - (kx + b)$ имаме $g'(x) = f'(x) - k \leq 0$, т.е. тя намалява. Отново от условието за асимптота намираме $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, което означава, че $g(x) \geq 0$ за всяко $x \in (B, +\infty)$.

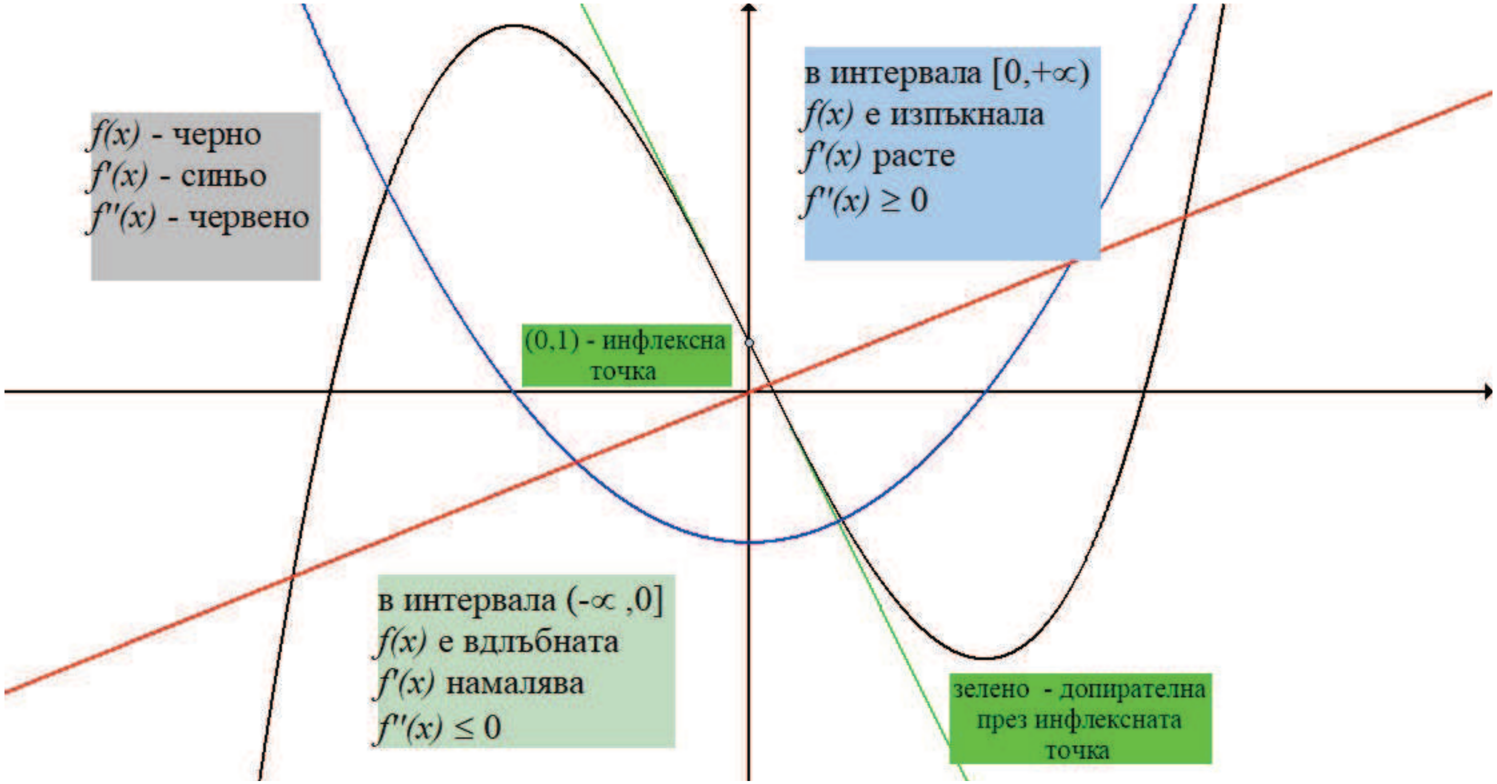
4.8 Еквивалентни условия при наличие на втора производна

Нека f е непрекъсната в интервал Δ и има втора производна във вътрешните му точки.

- f е изпъкнала (вдлъбната) в Δ тогава и само тогава, когато $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ за всяка вътрешна точка $x \in \Delta$.

- Ако $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ за всяка вътрешна точка $x \in \Delta$, то f е строго изпъкнала (вдлъбната) в Δ.

НДУ с производна и втора производна



5 Формула на Тейлър

5.1 Формулировка

Нека $f(x)$ има производни до ред $n+1$ в околност $(a-\delta\,,\; a+\delta)$ на точката a и $p>0$. За всяко $x \in (a-\delta\,,\; a+\delta)$ съществува c между a и x такова, че

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \;+\; \left(\frac{x-a}{x-c}\right)^{p} \frac{(x-c)^{n+1}}{n!\,p}\, f^{(n+1)}(c) \;=$$

$$=\; f(a) \;+\; (x-a)\, f'(a) \;+\; \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) \;+\; \ldots \;+\; \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \;+\; R_{n+1}(x,\, p)$$

Еквивалентна формулировка

Понеже числата между a и x могат да бъдат представени във вида $a + t\,(x-a)$ за $t \in (0\,,\, 1)$ заключението на теоремата може да бъде формулирано и така:

съществува $\theta \in (0\,,\,1)$, за което

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{\,(k)}(a) \;+\; \frac{(x-a)^{n+1}\,(1-\theta)^{n+1-p}}{n!\,p}\, f^{(n+1)}\,(a+\theta\,(x-a))\;\;.$$

5.2 Доказателство

При $t \in [0\,,\,1]$ полагаме

$$\varphi(t) \;=\; f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\,(1-t)^k\, f^{\,(k)}\,(a+t\,(x-a)) \;-\; Q\,(1-t)^p\;\;.$$

Избираме Q така, че $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, т.е. $Q \;=\; f(x) \;-\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{\,(k)}(a)$. Имаме

$$\varphi'(t) \;=\; -\,(x-a)\,f'\,(a+t\,(x-a)) \;-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{(x-a)^k}{(k-1)!}\,(1-t)^{k-1}\,f^{\,(k)}\,(a+t\,(x-a)) \;+\; \frac{(x-a)^{k+1}}{k!}\,(1-t)^k\,f^{\,(k+1)}\,(a+t\,(x-a))\right) \;+\; Qp\,(1-t)^{p-1} \;=$$

$$=\; -\,\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\,(1-t)^n\,f^{\,(n+1)}\,(a+t\,(x-a)) \;+\; Qp\,(1-t)^{p-1}\;\;.$$

От теоремата на Рол, приложена за функцията $\varphi(t)$, получаваме исканото.

5.3 Различни форми на остатъчния член

- форма на Лагранж: $R_{n+1}(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))$, получава се при $p = n+1$;
- форма на Коши: $R_{n+1}(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))$, получава се при $p = 1$;
- форма на Пеано: $R_{n+1}(x) = o((x-a)^n)$, може да бъде получена от основната теорема, при предположение, че $f^{(n+1)}(x)$ е ограничена в околността $(a-\delta\,,\ a+\delta)$. При по-слаби предположения се получава от следващото твърдение.

5.4 Единственост на развитието на Тейлър

Нека $f(x)$ има производни до ред n в околност $(a-\delta\,,\ a+\delta)$ на точката a и $(n+1)$-ва производна в точката a.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} b_k\,(x-a)^k}{(x-a)^n} = 0$$

тогава и само тогава, когато $b_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ за $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n$.

5.5 Развитие на Маклорен за някои елементарни функции

- $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x)$

  $$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{\theta x} = \frac{x^{n+1}\,(1-\theta_0)^n}{n!}\,e^{\theta_0 x} = o\,(x^n)$$

- $\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3}(x)$
- $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x)$
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_{n+1}(x)$
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + R_{n+1}(x)$
- $\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$
- $\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$