1 Сходимост

1.1 Евклидови пространства

1.1.1 Линейни пространства

Предполага се, че студентите са запознати с понятието. В този курс полето на скаларите е $\mathbb{R}$.

Примери

1. $\mathbb{R}^k$, специално $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$; естествен базис
2. $C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f$ е непрекъсната в $[a, b]\}$
3. множеството от всички редици
4. l_∞ множеството от всички ограничени редици
5. $l_1 = \left\{ \{a_n\}_1^\infty : \text{ редът } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ е сходящ} \right\}$
6. $l_2 = \left\{ \{a_n\}_1^\infty : \text{ редът } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ е сходящ} \right\}$

1.1.2 Скаларно произведение

Нека $\mathcal{V}$ е линейно пространство.

Функцията $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ се нарича скаларно произведение, ако

1. $\langle\, x\, ,\, y\, \rangle = \langle\, y\, ,\, x\, \rangle$
2. $\langle\, \lambda x + \mu z\, ,\, y\, \rangle = \lambda \langle\, x\, ,\, y\, \rangle + \mu \langle\, z\, ,\, y\, \rangle$
3. $\langle\, x\, ,\, x\, \rangle \geq 0\, ;\ \langle\, x\, ,\, x\, \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Неравенство на Коши-Буняковски-Шварц

$$|\langle\, x\, ,\, y\, \rangle| \leq \sqrt{\langle\, x\, ,\, x\, \rangle}\sqrt{\langle\, y\, ,\, y\, \rangle}$$

Доказателство:

$$0 \leq \langle\, x + ty\, ,\, x + ty\, \rangle = \langle\, x\, ,\, x\, \rangle + 2t\, \langle\, x\, ,\, y\, \rangle + t^2\, \langle\, y\, ,\, y\, \rangle\ .$$

Примери

1. $\mathbb{R}^k$ *скаларно произведение* $\langle\, x\,,\, y\,\rangle \,=\, \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$

2. $\mathbb{C}$ *скаларно произведение* $\langle\, z_1\,,\, z_2\,\rangle \,=\, Rez_1.Rez_2 + Imz_1.Imz_2$

3. $C[a,\, b]$ *скаларно произведение* $\langle\, f\,,\, g\,\rangle \,=\, \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$

4. l_2 *скаларно произведение* $\langle\, A\,,\, B\,\rangle \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

1.1.3 Норма (дължина на вектор)

Нека $\mathcal{V}$ е линейно пространство.

Функцията $||\,.\,||\,:\,\mathcal{V}\,\rightarrow\,\mathbb{R}$ се нарича норма, ако

- $||\,\lambda x\,||\,=\,|\lambda|\,.\,||\,x\,||$

- $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$
- $\| x \| \geq 0\,; \quad \| x \| = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

Евклидова норма

Ако е заделено скаларно произведение, полагаме $\| x \|_2 = \sqrt{\langle x\,,\, x \rangle}$

Примери

- $\mathbb{R}^k \;-\; \| x \|_1 = \sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|\,; \quad \| x \|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq k} |x_i|\,;$

$\| x \|_\infty \leq \| x \|_2 \leq \| x \|_1$

- $C[a,\, b] \;-\; \| f \|_1 = \int\limits_a^b |f(t)|\, dt\,; \quad \| f \|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,\, b]} |f(t)|$

1.1.4 Метрика (разстояние)

Нека $\mathcal{W}$ е (непразно) множество.

Функцията $\rho\ :\ \mathcal{W}\times\mathcal{W}\ \to\ \mathbb{R}$ се нарича метрика, ако

- $\rho(x,\,y)\ \leq\rho(x,\,z)\ +\ \rho(z,\,y)\ .$
- $\rho(x,\,y)\ \geq 0\ ;\quad \rho(x,\,y)\ =0\ \Rightarrow\ x=y\ .$

Примери

- В нормирано пространство полагаме: $\rho(x,\,y)\ =\ ||\,x-y\,||\ ;$
- В множеството на всички редици $\rho(x,\,y)\ =\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{|x_n-y_n|}{1+\ |x_n-y_n|}\ .$

1.1.5 Топология

Нека $\mathcal{W}$ е (непразно) множество.

Казваме, че в $\mathcal{W}$ е зададена топология, ако е дадена система $\mathcal{T}$ от подмножества на $\mathcal{W}$, за която

- $\emptyset \in \mathcal{T}\,, \quad \mathcal{W} \in \mathcal{T}\,.$
- $W_\gamma \in \mathcal{T}\ (\gamma \in \Gamma) \quad \Rightarrow \quad \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \in \mathcal{T}\,.$
- $W_k \in \mathcal{T}\,(k = 1,\, 2,\, \dots\, n) \ \Rightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{n} \in \mathcal{T}\,.$

В метрично пространство топология може да се зададе така:

$W \in \mathcal{T}$ тогава и само тогава, когато за всяко $x \in W$ съществува $\delta > 0$, за което от $\rho(x,\, y) < \delta$ следва $y \in W$.

1.2 Сходящи редици

1.2.1 Дефиниция:

- Редицата $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $X_n \in \mathbb{R}^k$ се нарича сходяща, ако съществува елемент $X_0 \in \mathbb{R}^k$ такъв, че за всяко $\varepsilon > 0$ има число N такова, че за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ е изпълнено $||X_n - X_0|| < \varepsilon$.

  X_0 се нарича граница на $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$; означение $X_0 = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$.

- Алтернатива

  - X_0 се нарича граница на $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ има число N такова, че за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ е изпълнено $||X_n - X_0|| < \varepsilon$.
  - Редицата $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича сходяща, ако има граница

- Еквивалентно условие

  $X_0 = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ тогава и само тогава, когато $\lim\limits_{n\to\infty} \|X_n - X_0\| = 0$

1.2.2 Свойства:

В $\mathbb{R}^k$ е изпълнено

1. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща тогава и само тогава, когато за всяко $1 \leq i \leq k$ редицата $\{x_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща.
2. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща е сходяща тогава и само тогава, когато редицата $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$ има число N такова, че за всяко $n \in \mathbb{N},\ n > N$ и всяко $p \in \mathbb{N}$ е изпълнено $||X_{n+p} - X_n|| < \varepsilon$.
3. Сходимостта не зависи от нормата.
4. Граничният преход запазва алгебричните операции.
5. Всяка ограничена редица има сходяща подредица.

1.2.3 Клонене към безкрайност

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \infty \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} ||X_n|| = +\infty$$

1.2.4 Примери

1. $\mathbb{C}$

- Редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ е (абсолютно) сходящ за всяко $z \in \mathbb{C}$

- $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} \;\Rightarrow\; e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}$

- $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,\ \cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z \;\Rightarrow\; e^{z+2i\pi} = e^z$

2. $\mathbb{R}^k$

Нека $\mathcal{M}$ е квадратна матрица (с реални елементи) от ред k, за която $\sup\limits_{||x||=1} ||\mathcal{M}x|| < 1$. Тогава

- за всяко $x \in \mathbb{R}^k$ е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{M}^n x = 0$;
- за всяко $x \in \mathbb{R}^k$ редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}^n x$ е сходящ;
- за всяка матрица $\mathcal{M}$ и за всяко $x \in \mathbb{R}^k$ редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\mathcal{M}^n x}{n!}$ е сходящ.

2 Топология в $\mathbb{R}^k$

2.1 Вътрешни, външни, гранични точки

2.1.1 Означения

1. $B\,(Y,\,\delta) \,=\, \left\{X \in \mathbb{R}^k \,:\, ||X - Y|| \leq \delta\right\}$ — затворено кълбо с център Y и радиус δ.
2. $B^0\,(Y,\,\delta) \,=\, \left\{X \in \mathbb{R}^k \,:\, ||X - Y|| < \delta\right\}$ — отворено кълбо с център Y и радиус δ.
3. $S\,(Y,\,\delta) \,=\, \left\{X \in \mathbb{R}^k \,:\, ||X - Y|| = \delta\right\}$ — сфера с център Y и радиус δ.

2.1.2 Дефиниции

Нека $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k$.

1. $X \in \mathbb{R}^k$ се нарича **вътрешна** за $\mathcal{A}$, ако има $\delta > 0$, за което $B^0\,(X,\,\delta) \subset \mathcal{A}$;
   винаги $X \in \mathcal{A}$.

2. $X \in \mathbb{R}^k$ се нарича **външна** за $\mathcal{A}$, ако има $\delta > 0$, за което $B^0\,(X,\,\delta) \subset \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}$;
   винаги $X \notin \mathcal{A}$.

3. $X \in \mathbb{R}^k$ се нарича **гранична** за $\mathcal{A}$, ако не е нито вътрешна, нито външна, т.е. за всяко $\delta > 0$ е изпълнено $\mathcal{A} \cap B^0(X, \delta) \neq \emptyset$ и $\left(\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}\right) \cap B^0(X, \delta) \neq \emptyset$; означение $\partial\mathcal{A}$.

2.1.3 Примери

1. $\partial\mathcal{A} = \partial\left(\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}\right)$

2. $\partial\emptyset = \partial\mathbb{R}^k = \emptyset$

3. $\partial B^0(Y, \delta) = \partial B(Y, \delta) = S(Y, \delta)$

2.2 Отворени и затворени множества

2.2.1 Дефиниции

1. $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k$ се нарича **отворено**, ако $\mathcal{A} \cap \partial\mathcal{A} = \emptyset$; всяка точка $X \in \mathcal{A}$ е вътрешна за $\mathcal{A}$.

2. $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k$ се нарича **затворено**, ако $\partial\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$; всяка точка $X \notin \mathcal{A}$ е външна за $\mathcal{A}$.

2.2.2 Свойства

1. Обединение на отворени е отворено.

2. Сечение на краен брой отворени е отворено.

3. $\mathcal{A}$ е отворено $\Leftrightarrow \mathbb{R}^k \setminus \mathcal{A}$ е затворено.

4. Сечение на затворени е затворено.

5. Обединение на краен брой затворени е затворено.

6. $\mathcal{A}$ е затворено $\Leftrightarrow$ за границата $X_0 = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ на всяка редица $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $X_n \in \mathcal{A}$ е изпълнено $X_0 \in \mathcal{A}$.

7. Нека $\mathcal{A}$ е ограничено и затворено (компактно). Всяка редица $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $X_n \in \mathcal{A}$ има сходяща подредица $\left\{X_{n_p}\right\}_{p=1}^{\infty}$, с граница $\lim\limits_{p\to\infty} X_{n_p} = X_0 \in \mathcal{A}$ (теорема на Болцано).

3 Непрекъснати функции

3.1 Функции, изображения

3.1.1 Означения

1. **Числова функция** $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$

   - Дефиниционна област $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}^k \ : \ \exists y \in \mathbb{R} \ : \ (x,\, y) \in \Gamma_f\right\}$
   - Област на стойностите $R_f = \left\{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \in \mathbb{R}^k \ : \ (x,\, y) \in \Gamma_f\right\}$

2. **Изображение (векторнозначна функция)** $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$

   - Дефиниционна област $D_F = \left\{x \in \mathbb{R}^k \ : \ \exists y \in \mathbb{R}^l \ : \ (x,\, y) \in \Gamma_F\right\}$
   - Област на стойностите $R_F = \left\{y \in \mathbb{R}^l \ : \ \exists x \in \mathbb{R}^k \ : \ (x,\, y) \in \Gamma_F\right\}$

3. **Съставно изображение**

   - $H = G \circ F\,; \quad H(X) = G(F(X))\,.$
   - $H(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k) = G\left(f_1(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k)\,,\, f_2(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k)\,,\, \ldots,\, f_l(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k)\right)$

3.1.2 Примери

1. Координатни функции $P_i : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, $P_i(X) = x_i$.

2. Всяко изображение може да бъде разглеждано като набор от функции

3. Линейна функция $L : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$

   - $L(X+Y) = L(X) + L(Y)$, $L(\lambda X) = \lambda L(X)$
   - $L(X) = \langle v,\, X\rangle = \sum_{i=1}^k v_i x_i$

4. Линейно изображение $L : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$

   - $L(X+Y) = L(X) + L(Y)$, $L(\lambda X) = \lambda L(X)$
   - $L(X) = \mathcal{M}\, X$

5. Квадратична форма $Q_{\mathcal{M}}(X) = \langle \mathcal{M}\, X,\, X\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k m_{i,\,j} x_i x_j$, $Q_{\mathcal{M}}(\lambda X) = \lambda^2 Q_{\mathcal{M}}(X)$

6. Полиноми (пример $P(x,\, y) = x^2 + (xy-1)^2$)

7. Хомогенни функции $F(\lambda X) = \lambda^p F(X)$

3.2 Граница на изображение

3.2.1 Точка на сгъстяване на множество

- Дефиниция 1 (Хайне)

  Y се нарича точка на сгъстяване на множеството $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{\|}$, ако съществува редица $\{X_n\}_1^\infty$, за която 1) $X_n \in \mathcal{A}$; 2) $X_n \neq Y$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = Y$

- Дефиниция 2 (Коши)

  Y се нарича точка на сгъстяване на множеството $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k$, ако за всяко $\delta > 0$ е изпълнено $\mathcal{A} \cap \left(B^0(Y, \delta) \setminus \{Y\}\right) \neq \emptyset$

- Двете дефиниции са еквивалентни

- Y се нарича изолирана точка на множеството $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k$, ако има $\delta > 0$, за което $\mathcal{A} \cap B^0(Y, \delta) = \{Y\}$

3.2.2 Дефиниции

Нека $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ и Y е точка на сгъстяване за D_F.

- Дефиниция 1 (Хайне)

Казваме, че F има граница в Y, ако за всяка редица $\{X_n\}_1^\infty$, за която
1) $X_n \in D_F$; 2) $X_n \neq Y$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = Y$, редицата $\{F(X_n)\}_1^\infty$ е сходяща.

- Всички такива редици имат една и съща граница.
- Дефиниция 1 (Хайне) – уточнение

Казваме, че F има граница L в Y, ако за всяка редица $\{X_n\}_1^\infty$, за която
1) $X_n \in D_F$; 2) $X_n \neq Y$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = Y$, е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} F(X_n) = L$.

- Означение: $L = \lim\limits_{X\to Y} F(X)$
- Дефиниция 2 (Коши)

Казваме, че F има граница в Y, ако за всяко $\varepsilon > 0$ има $\delta > 0$ такова, че за всяко $X \in D_F$ с $0 < ||X - Y|| < \delta$ е изпълнено $||F(X) - L|| < \varepsilon$.

- Двете дефиниции са еквивалентни.
- При $l = 1$ имаме граница на функция.

3.2.3 Свойства

1. Изображението $F(X)$ има граница в Y тогава и само тогава, когато всяка от координатните му функции има граница в Y.

2. Аритметични действия

3. Граница на съставна функция

Нека:

1) $\lim\limits_{X \to Y} F(X) = U_0$ (Y е точка на сгъстяване на D_F)

2.1) L е точка на сгъстяване на D_G

2.2) $\lim\limits_{U \to U_0} G(U) = L$ и, когато $U_0 \in D_G$, е изпълнено $L = G(U_0)$

3) Y е точка на сгъстяване на $\{X \in D_F \,:\, F(X) \in D_G\}$

Тогава $\lim\limits_{X \to Y} \Phi(X) = L$, където $\Phi(X) = G(F(X))$

4. Локална ограниченост

5. За функции — постоянност на знака, граничен преход в неравенства

3.2.4 Примери

1. $$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

2. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ няма граница в $(0,\ 0)$

3. $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ няма граница в $(0,\ 0)$

4. $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ няма граница в $(0,\ 0)$

3.2.5 Граница на изображение в безкрайност

Нека $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ и D_F е неограничено множество.

1. Дефиниция 1 (Хайне)

   Казваме, че F има граница L (или ∞) в ∞, ако за всяка редица $\{X_n\}_1^\infty$, за която 1) $X_n \in D_F$ и $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \infty$, е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} F\,(X_n) = L$.

2. Означение: $L = \lim\limits_{X\to\infty} F(X)$

3. Дефиниция 2 (Коши)

   Казваме, че F има граница L (или ∞) в ∞, ако за всяко $\varepsilon > 0$ има $\delta > 0$ такова, че за всяко $X \in D_F$ с $\delta < ||X||$ е изпълнено $||F\,(X) - L|| < \varepsilon$ (съответно $\varepsilon < ||F\,(X)||$).

4. Двете дефиниции са еквивалентни.

3.2.6 Примери

1. $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} P(x,\, y)e^{-x^2-y^2} = 0$ за всеки полином $P(x,\, y)$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \dfrac{x^2 - y^2}{x^4 + y^4} = 0$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \infty$

4. $\dfrac{x^4 - 4y^4}{x^2 + y^2}$ няма граница в ∞

5. $\dfrac{x^2 + y^2}{x^5 + y^5}$ няма граница в ∞

6. $\dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}$ няма граница в ∞

3.3 Непрекъснатост

3.3.1 Дефиниция

Нека $F\ :\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ и $X_0 \in D_F$.

- Казваме, че F е непрекъснато в X_0, ако

  1. F има граница в X_0 и $\lim\limits_{X \to X_0} F(X) = F(X_0)$
  2. X_0 е изолирана точка за D_F

- Дефиниция 1 (Хайне)

  Казваме, че F е непрекъснато в X_0, ако за всяка редица $\{X_n\}_1^\infty$, за която $X_n \in D_F$ и $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_0$, е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} F(X_n) = F(X_0)$.

- Дефиниция 2 (Коши)

  Казваме, че F е непрекъснато в X_0, ако за всяко $\varepsilon > 0$ има $\delta > 0$ такова, че за всяко $X \in D_F$, с $||X - X_0|| < \delta$, е изпълнено $||F(X) - F(X_0)|| < \varepsilon$.

3.3.2 Примери

1. $$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{за } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{за } x=y=0 \end{cases}$$ е прекъсната в $(0,\, 0)$.

2. $$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{за } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{за } x=y=0 \end{cases}$$ е прекъсната в $(0,\, 0)$.

3. Навсякъде непрекъснати

- Координатни функции $P_i \,:\, \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad P_i(X) = x_i$.
- Линейно изображение $L \,:\, \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$.
- Квадратична форма $\quad Q_{\mathcal{M}}(X) = \langle \mathcal{M}\, X,\, X\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} m_{i,\,j}x_ix_j$.
- Полиноми.

3.3.3 Локални свойства

1. При $l = 1$ непрекъснатост на функция.

2. Изображението $F(X)$ е непрекъснато в X_0 тогава и само тогава, когато всяка от координатните му функции е непрекъсната в X_0.

3. Алгебрични действия.

4. Локална ограниченост.

5. Само за функции – локална постоянност на знака.

Нека $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ е навсякъде непрекъсната.

- множеството $\left\{X \in \mathbb{R}^k : f(X) > 0\right\}$ е отворено;
- множеството $\left\{X \in \mathbb{R}^k : f(X) \geq 0\right\}$ е затворено;
- множеството $\left\{X \in \mathbb{R}^k : f(X) = 0\right\}$ е затворено.

6. Съставно изображение от непрекъснати е непрекъснато.

3.3.4 Теорема на Вайерщрас

- Нека $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната във всяка точка на ограничено и затворено (компактно) множество $\mathcal{A}$. Тогава

  1. f е ограничена в $\mathcal{A}$.

  2. f има най-малка и най-голяма стойност в $\mathcal{A}$.

- Нека $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ е непрекъснато във всяка точка на ограничено и затворено (компактно) множество $\mathcal{A}$. Тогава F е ограничено в $\mathcal{A}$.

- Приложение: $\left(x^2 + xy - 2y^2\right) e^{-x^2-y^2}$ има най-малка и най-голяма стойност в $\mathbb{R}^2$.

3.3.5 Равномерна непрекъснатост

- Дефиниция

  Казваме, че изображението $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ е **равномерно непрекъснато** в $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всеки $X,\ Y \in \mathcal{A}$ и $||X - Y|| < \delta$ е изпълнено $||F(X) - F(Y)|| < \varepsilon$.

- Отрицание

  Функцията F не е равномерно непрекъснато в $\mathcal{A}$, ако съществува $\varepsilon_0 > 0$ такова, че за всяко $\delta > 0$ съществуват $X_\delta,\ Y_\delta \in \mathcal{A}$, за които $||X_\delta - Y_\delta|| < \delta$ и $||F(X_\delta) - F(Y_\delta)|| \geq \varepsilon_0$.

- Ако F е равномерно непрекъснато в $\mathcal{A}$, то F е непрекъснато във всяка точка на $\mathcal{A}$.

Теорема за равномерната непрекъснатост

Нека $\mathcal{A}$ е ограничено и затворено (компактно) и F е непрекъснато във всяка точка на $\mathcal{A}$. Тогава F е равномерно непрекъснато в $\mathcal{A}$.

Схема на доказателството:

- Допускаме противното

- има $\varepsilon_0 > 0$ и две редици $\{X_n\}$, $\{Y_n\} \subset \mathcal{A}$, за които $||X_n - Y_n|| < \dfrac{1}{n}$ и $||F(X_n) - F(Y_n)|| \geq \varepsilon_0$.

- има подредица $\left\{X_{n_k}\right\}$, която $\lim\limits_{k\to\infty} X_{n_k} = X_0 \in \mathcal{A}$.

- тогава $\lim\limits_{k\to\infty} Y_{n_k} = X_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\left|F(X_{n_k}) - F(Y_{n_k})\right|\right| = 0$, противоречие.