2 Основни теореми

2.1 Теорема на Ферма

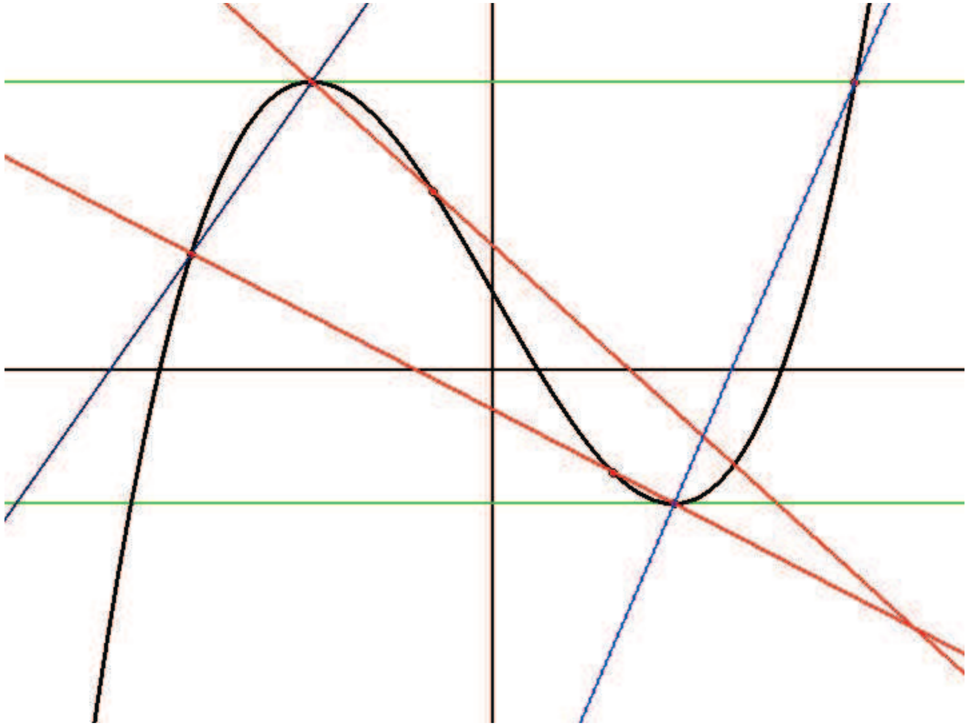
2.1.1 Локални екстремуми

Нека a е вътрешна точка за дефиниционната област D_f на функцията f.

- f има в a **локален максимум**, ако има $\delta > 0$, за което $f(x) \leq f(a)$ за всяко $x \in (a - \delta,\, a + \delta)$
- f има в a **строг локален максимум**, ако има $\delta > 0$, за което $f(x) < f(a)$ за всяко $x \in (a - \delta,\, a + \delta) \setminus \{a\}$
- f има в a **локален минимум**, ако има $\delta > 0$, за което $f(x) \geq f(a)$ за всяко $x \in (a - \delta,\, a + \delta)$
- f има в a **строг локален минимум**, ако има $\delta > 0$, за което $f(x) > f(a)$ за всяко $x \in (a - \delta,\, a + \delta) \setminus \{a\}$

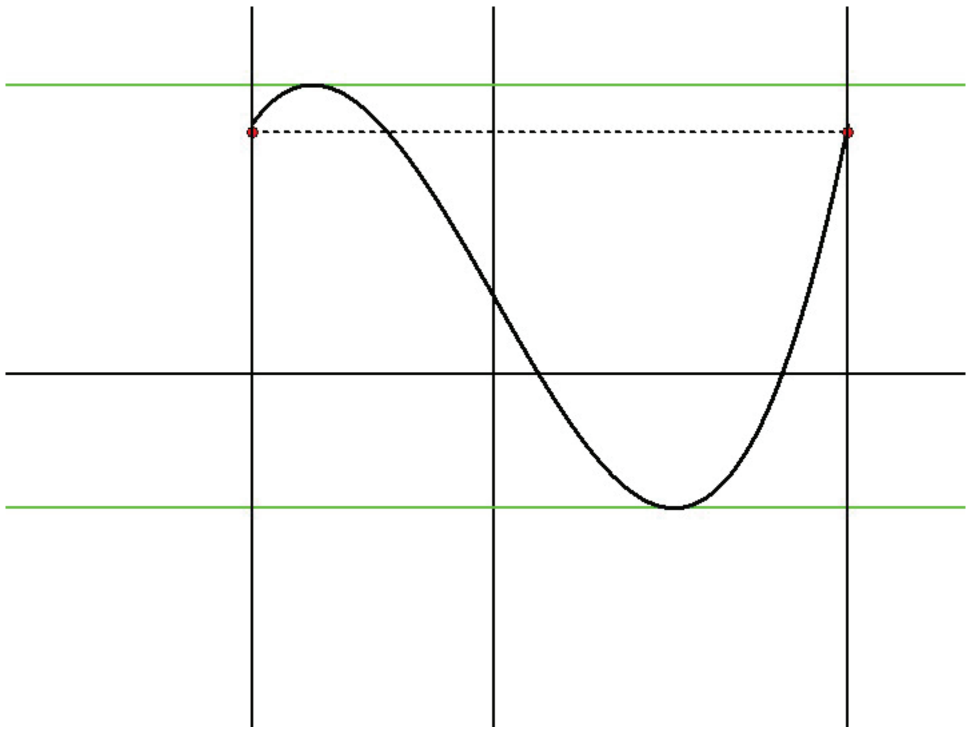
2.1.2 Теорема на Ферма

Нека a е вътрешна точка за дефиниционната област D_f на функцията f, f има в a локален екстремум и f има производна в a. Тогава $f'(a) = 0$.



2.2 Теорема на Рол

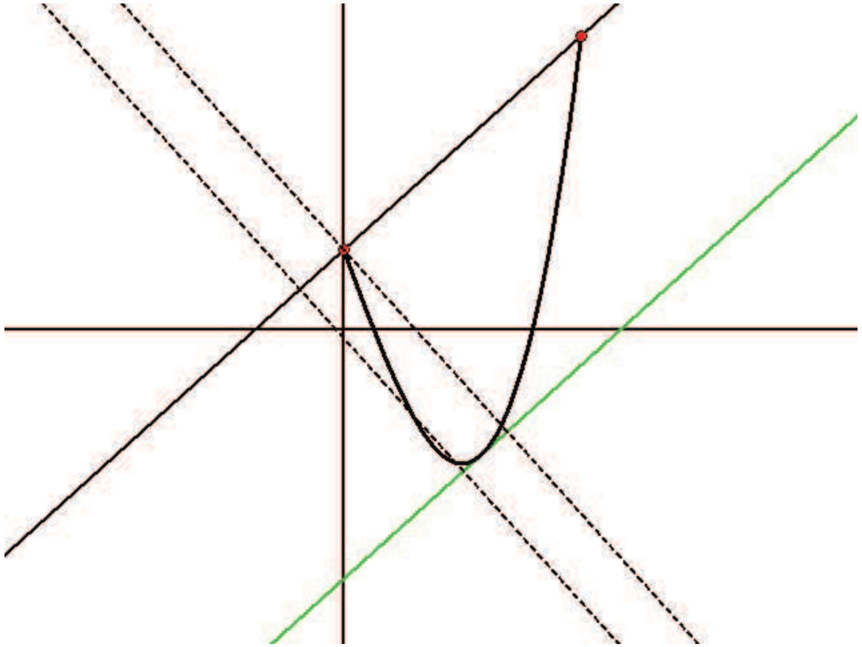
Нека: 1) f е непрекъсната в $[a, b]$; 2) f има производна в (a, b); 3) $f(a) = f(b)$.
Тогава има $c \in (a, b)$, за което $f'(c) = 0$.



2.3 Теорема на Лагранж (за крайните нараствания)

Нека: 1) f е непрекъсната в $[a,\, b]$; 2) f има производна в $(a,\, b)$.

Тогава има $c \in (a,\, b)$, за което $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



2.4 Следствия

За интервал J означаваме с J_0 интервала, състоящ се от вътрешните точки на J.

2.4.1 Основна теорема на интегралното смятане

Нека: 1) f е непрекъсната в J ; 2) f има производна в J_0 .
Ако $f'(x) = 0$ за всяко $x \in J_0$, то f е константа в J .

Пример: $f'(x) = f(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато $f(x) = C\,e^x$.

2.4.2 Доказване на тъждества

Ако $f'(x) = g'(x)$ за всяко $x \in J_0$ и $f(x_0) = g(x_0)$ за някое $x_0 \in J$, то $f(x) = g(x)$ за всяко $x \in J$.

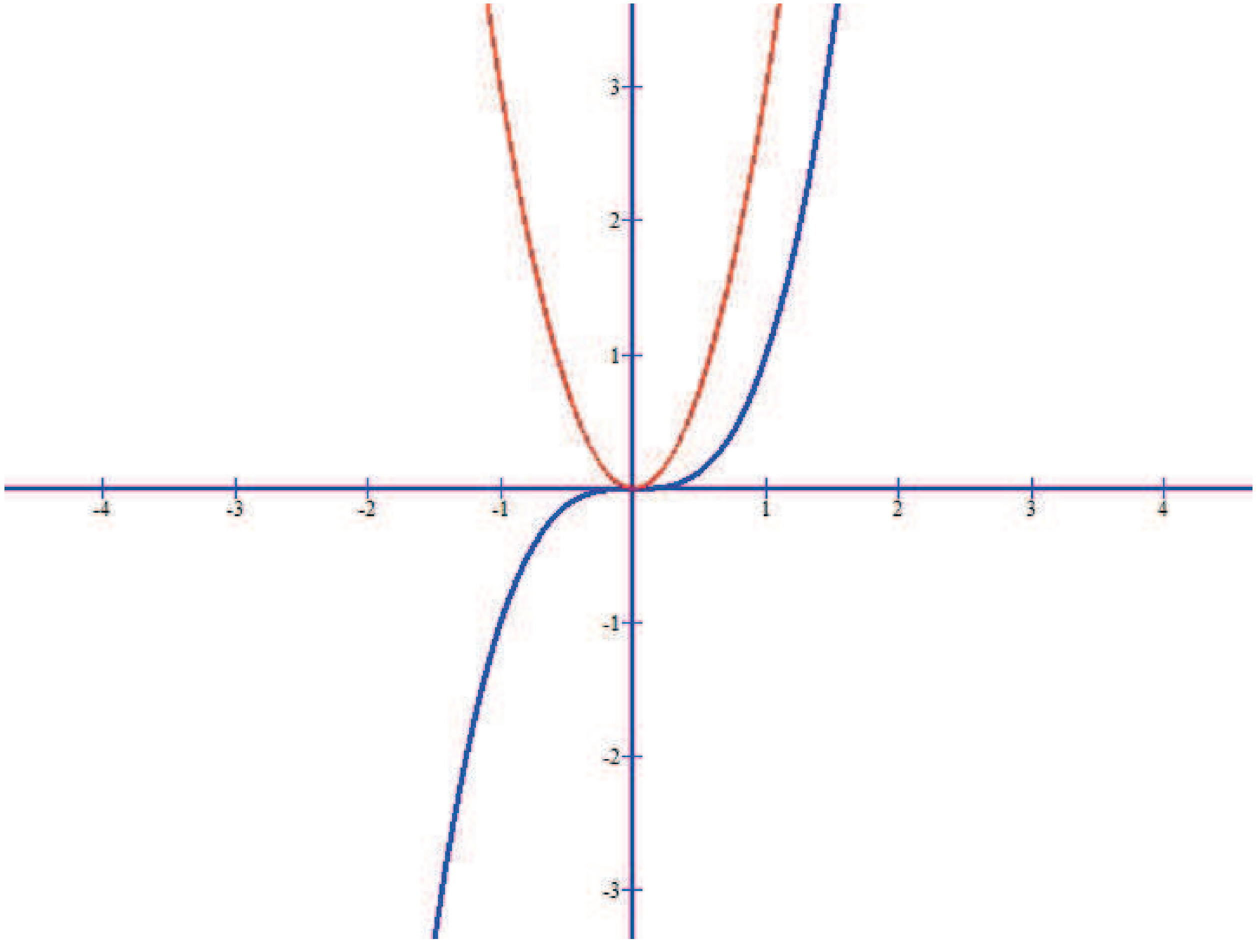
Пример: $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$ за всяко $x \in [-1,\, 1]$.

2.4.3 Критерий за монотонност

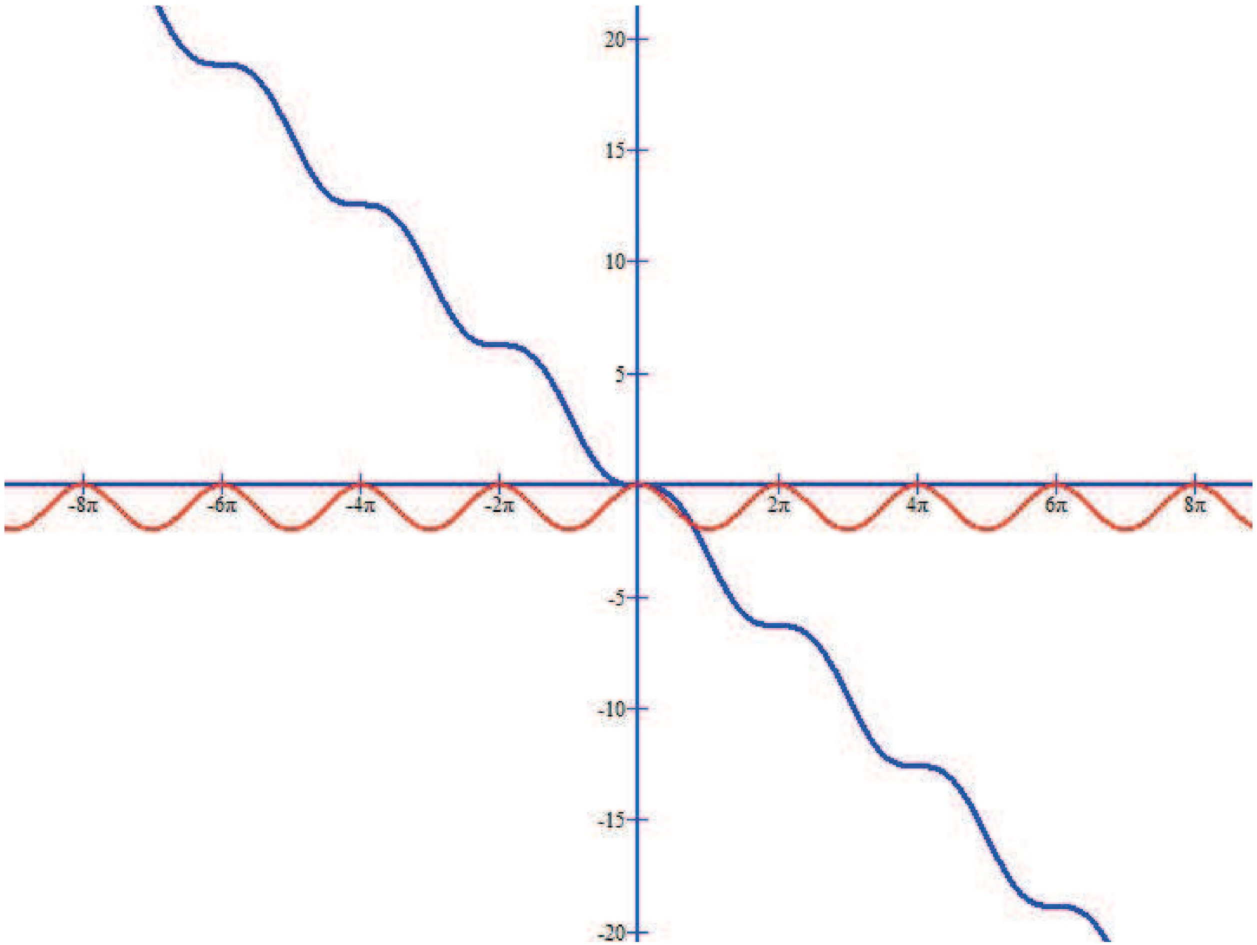
Нека: 1) f е непрекъсната в J; 2) f има производна в J_0.
Тогава

- $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in J_0$ тогава и само тогава, когато f е растяща в J.
- $f'(x) \leq 0$ за всяко $x \in J_0$ тогава и само тогава, когато f е намаляваща в J.
- Ако $f'(x) > 0$ за всяко $x \in J_0$, то f е строго растяща в J.
- Ако $f'(x) < 0$ за всяко $x \in J_0$, то f е строго намаляваща в J.

Пример: $\quad x^3$ е строго растяща, но $\dfrac{d\left(x^3\right)}{dx}(0) = 0$



Пример: $\sin x - x$ е строго намаляваща, но $\dfrac{d\,(\sin x - x)}{dx}(2k\pi) = 0$



2.4.4 Доказване на неравенства

Нека

- $f(x_0) = g(x_0)$ за някое $x_0 \in J$
- $f'(x) \geq g'(x) \ \ (f'(x) > g'(x))$ за всяко $x \in J_0 \setminus \{x_0\}$

Тогава

- $f(x) \geq g(x) \ \ (f(x) > g(x))$ за всяко $x \in J\,,\ x_0 < x$
- $f(x) \leq g(x) \ \ (f(x) < g(x))$ за всяко $x \in J\,,\ x < x_0$

Пример:

- $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ за всяко $0 < x$

- $e^x > \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$ за всяко $0 < x$

- $e^x < \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$ за всяко $x < 0$

- $e^x > \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!}$ за всяко $x \neq 0$

2.4.5 Достатъчни условия за локален екстремум

Нека

- f е непрекъсната в $(a - \delta, a + \delta)$

- f има производна в $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$

Тогава

- ако $f'(x) \geq 0$ за $x \in (a-\delta,\, a)$ И $f'(x) \leq 0$ за $x \in (a,\, a+\delta)$, то f има локален максимум в a

- ако $f'(x) > 0$ за $x \in (a-\delta,\, a)$ И $f'(x) < 0$ за $x \in (a,\, a+\delta)$, то f има строг локален максимум в a

- ако $f'(x) \leq 0$ за $x \in (a-\delta,\, a)$ И $f'(x) \geq 0$ за $x \in (a,\, a+\delta)$, то f има локален минимум в a

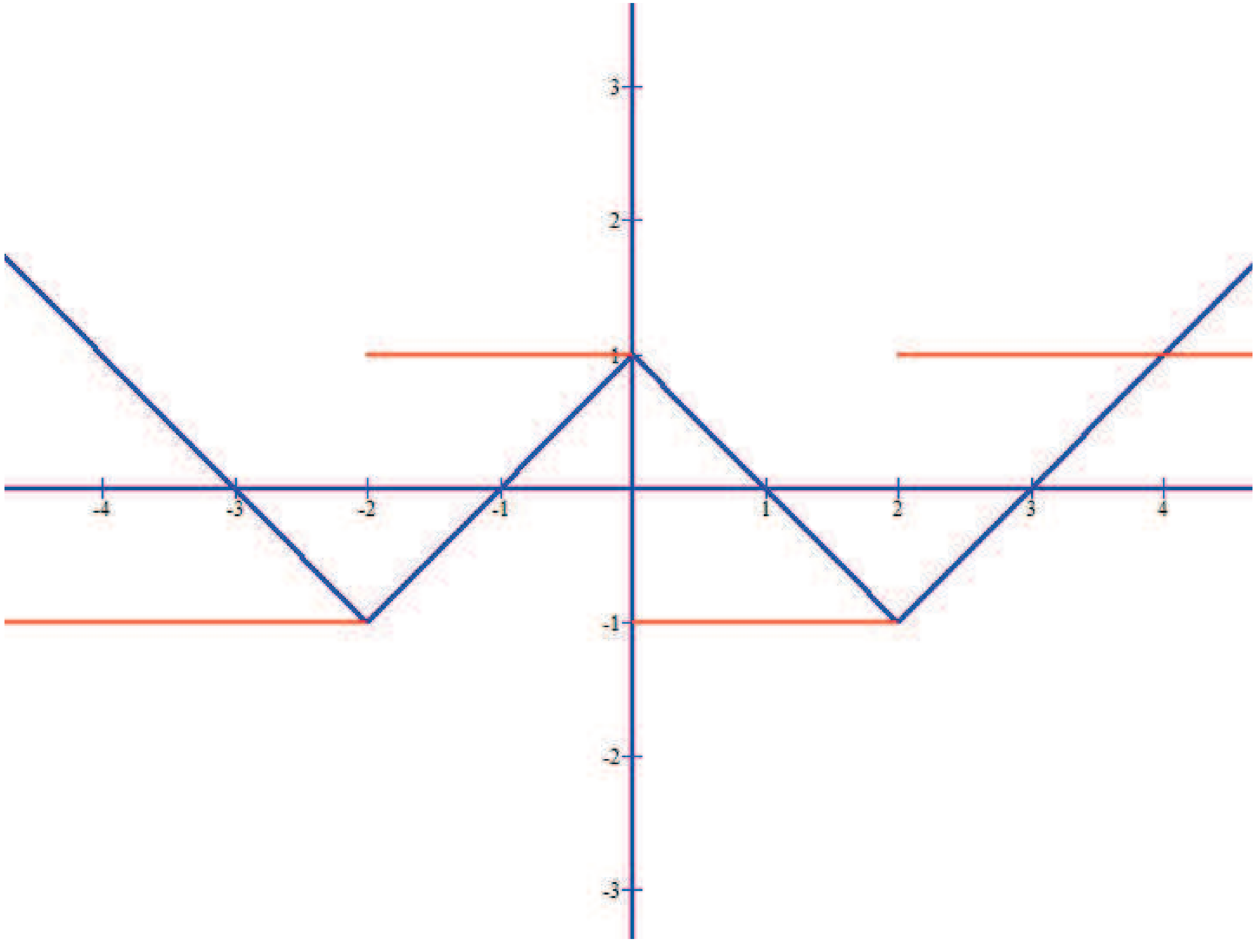
- ако $f'(x) < 0$ за $x \in (a-\delta,\, a)$ И $f'(x) > 0$ за $x \in (a,\, a+\delta)$, то f има строг локален минимум в a

2.4.6 Достатъчни условия за липса на локален екстремум

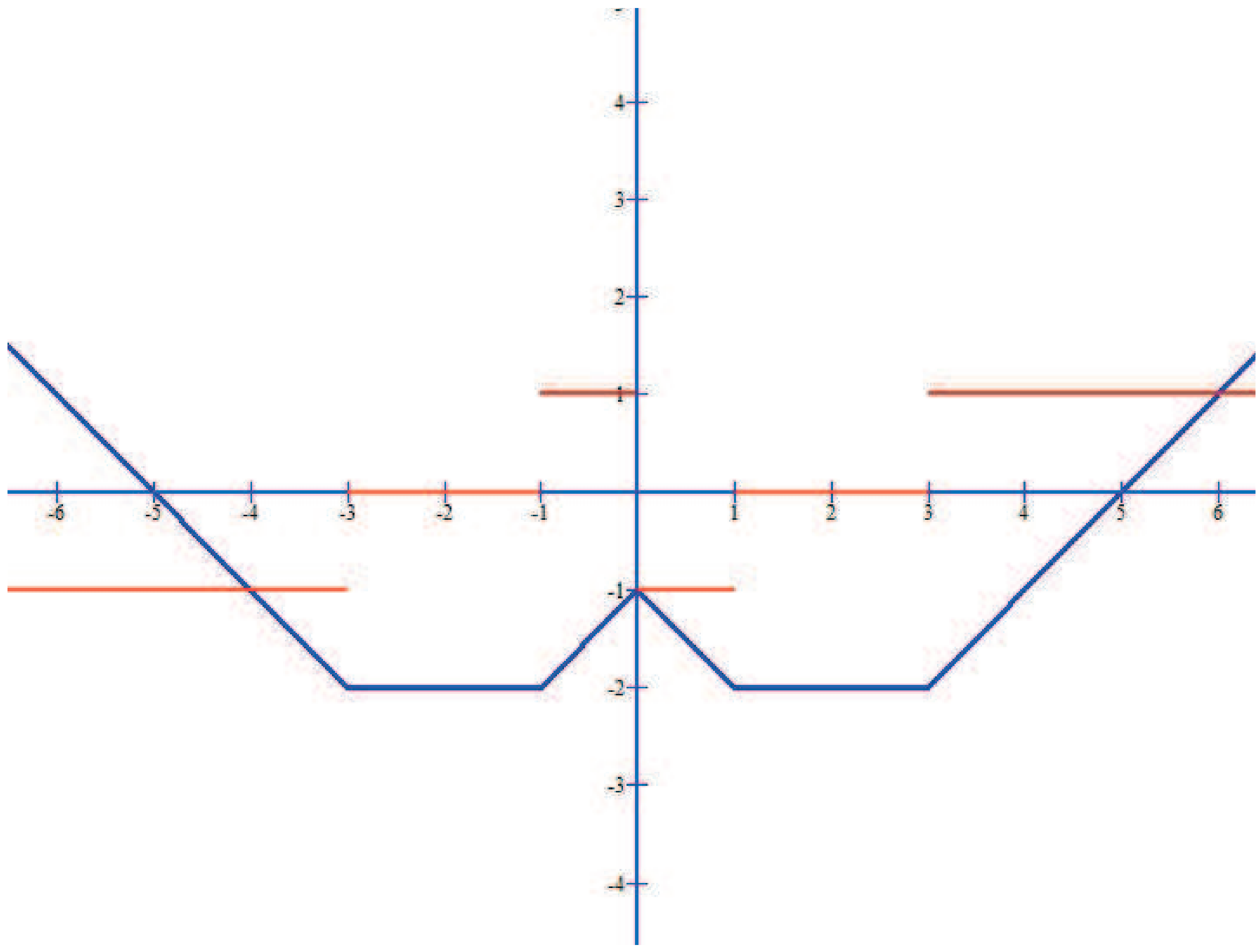
- ако $f'(x) > 0$ за $x \in (a-\delta,\, a)$ И $f'(x) > 0$ за $x \in (a,\, a+\delta)$, то f няма локален екстремум в a

- ако $f'(x) < 0$ за $x \in (a-\delta,\, a)$ И $f'(x) < 0$ за $x \in (a,\, a+\delta)$, то f няма локален екстремум в a

Пример 1



Пример 2



2.4.7 Достатъчни условия за локален екстремум с втора производна

Нека

- f има производна в $(a - \delta,\ a + \delta)$, като $f'(a) = 0$
- f има втора производна в a

Тогава

- ако $f''(a) < 0$, то f има строг локален максимум в a
- ако $f''(a) > 0$, то f има строг локален минимум в a