Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №2, 25.01.2013 година

отговори и решения

1. *(по 5 точки за верен отговор)* Попълнете:

*а)*Допирателната към графиката на функцията $f(x) = \dfrac{x-6}{x-3}\, e^{x-2}$ в точката с абсциса $x = 2$ има уравнение $y = \quad 7\,x - 10 \quad$;

б) Наклонената асимптота на функцията $f(x) = (3x-2)\, e^{\frac{1}{3x}}$ при $x \to +\infty$ има уравнение

$y = \quad 3\,x - 1 \quad$;

2. *(по 3 точки за верен отговор)* Попълнете:

$$а)\int \frac{\sqrt{(\ln x + 1)^7}}{x}\, dx \quad = \quad \frac{2}{9}\sqrt{(\ln x+1)^7} + C \qquad ;$$

$$б)\int \ln\left(2x + \sqrt{4\,x^2+1}\right)\, dx \quad = \quad x\,\ln\left(2x+\sqrt{4\,x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{4\,x^2+1} + C \qquad ;$$

$$в)\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx \quad = \quad \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C \qquad ;$$

$$г)\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-6x+1}} \quad = \quad \arcsin\frac{x+3}{\sqrt{10}} + C \qquad ;$$

$$д)\int \frac{dx}{\sqrt{2\,e^{2x} - 6\,e^{x} + 9}} \quad = \quad -\frac{1}{3}\ln\left(3\,e^{-x} - 1 + \sqrt{(3\,e^{-x}-1)^2+1}\right) + C \quad .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, чертежът е задължителен)*
Да се изследва и построи графиката на функцията:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^2 - \frac{2\,x^2+3x-3}{x+3} \quad .$$

4. *(10 точки, необходима е обосновка)* Пресметнете неопределения интеграл:

$$\int \frac{5\,x^2 - 2\,x + 6}{(x+1)\,(4\,x^2 - 4\,x + 5)}\, dx \quad .$$

Отговор: $\quad \ln|x+1| + \dfrac{1}{8}\ln\left(4\,x^2 - 4\,x + 5\right) + \dfrac{3}{8}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2\,x-1}{2} + C$

Основни резултати и чертеж за 3.

Вертикални асимптоти $x = -3$ и $x = -1$.

Наклонена асимптота при $x \to +\infty$ (същата и при $x \to -\infty$): $y = -2x + 3$.

Производна $f'(x) = -\dfrac{2x(x+2)(x+5)}{(x+1)(x+3)^2}$.

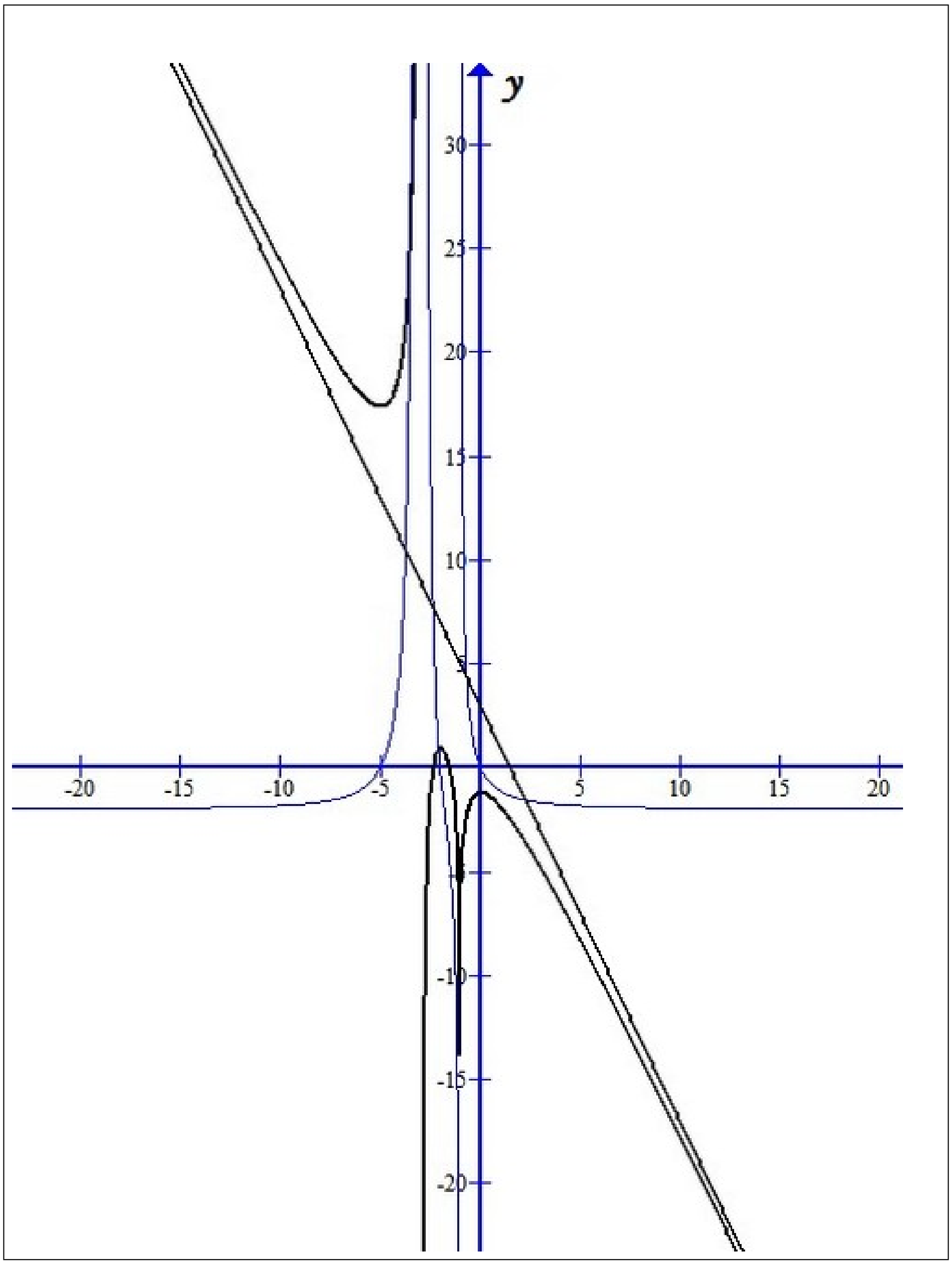
Локален минимум: $f(-5) = 2\ln 2 + 16$.

Локални максимуми: $f(-2) = 1$ и $f(0) = 1 - 2\ln 3$.

Втора производна $f''(x) = -\dfrac{4\left(5x^2 + 16x + 15\right)}{(x+1)^2(x+3)^3}$.

Функцията е изпъкнала в интервала $(-\infty, -3)$.

Функцията е вдлъбната в интервалите $(-3, -1)$, $(-1, +\infty)$.



Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №2, 25.01.2013 година

отговори и решения

1. *(по 5 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) Допирателната към графиката на функцията $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}\, e^{x+2}$ в точката с абсциса $x = -2$ има уравнение $y = \quad 5\,x + 13 \quad$;

б) Наклонената асимптота на функцията $f(x) = (4x+1)\, e^{\frac{1}{4x}}$ при $x \to +\infty$ има уравнение

$y = \quad 4\,x + 2 \quad$.

2. *(по 3 точки за верен отговор)* Попълнете:

$$а)\int \frac{1}{x\,(1-10\ln x)^7}\,dx = \frac{1}{60\,(1-10\ln x)^6} + C \quad ;$$

$$б)\int \ln\left(3x + \sqrt{9\,x^2-1}\right)\,dx = x\,\ln\left(3x + \sqrt{9\,x^2-1}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{9\,x^2-1} + C \quad ;$$

$$в)\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x} = \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{2\cos^2 x} + C \quad ;$$

$$г)\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x+3}} = \arcsin\frac{x+2}{\sqrt{7}} + C \quad ;$$

$$д)\int \frac{dx}{\sqrt{5\,e^{2x} - 4\,e^{x} + 1}} = -\ln\left(e^{-x} - 2 + \sqrt{(e^{-x}-2)^2+1}\right) + C \quad .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, чертежът е задължителен)*
Да се изследва и построи графиката на функцията:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - \frac{2\,x^2+x+5}{x+1} \quad .$$

4. *(10 точки, необходима е обосновка)* Пресметнете неопределения интеграл:

$$\int \frac{3\,x^2-4\,x+6}{(x+1)\,(4\,x^2-4\,x+5)}\,dx \quad .$$

Отговор: $\quad \ln|x+1| - \dfrac{1}{8}\ln\left(4\,x^2-4\,x+5\right) + \dfrac{1}{8}\operatorname{arctg}\dfrac{2\,x-1}{2} + C$

Основни резултати и чертеж за 3.

Вертикални асимптоти $x = -1$ и $x = 1$.

Наклонена асимптота при $x \to +\infty$ (същата и при $x \to -\infty$): $y = -2x + 1$.

Производна $f'(x) = -\dfrac{2x(x+3)(x-2)}{(x-1)(x+1)^2}$.

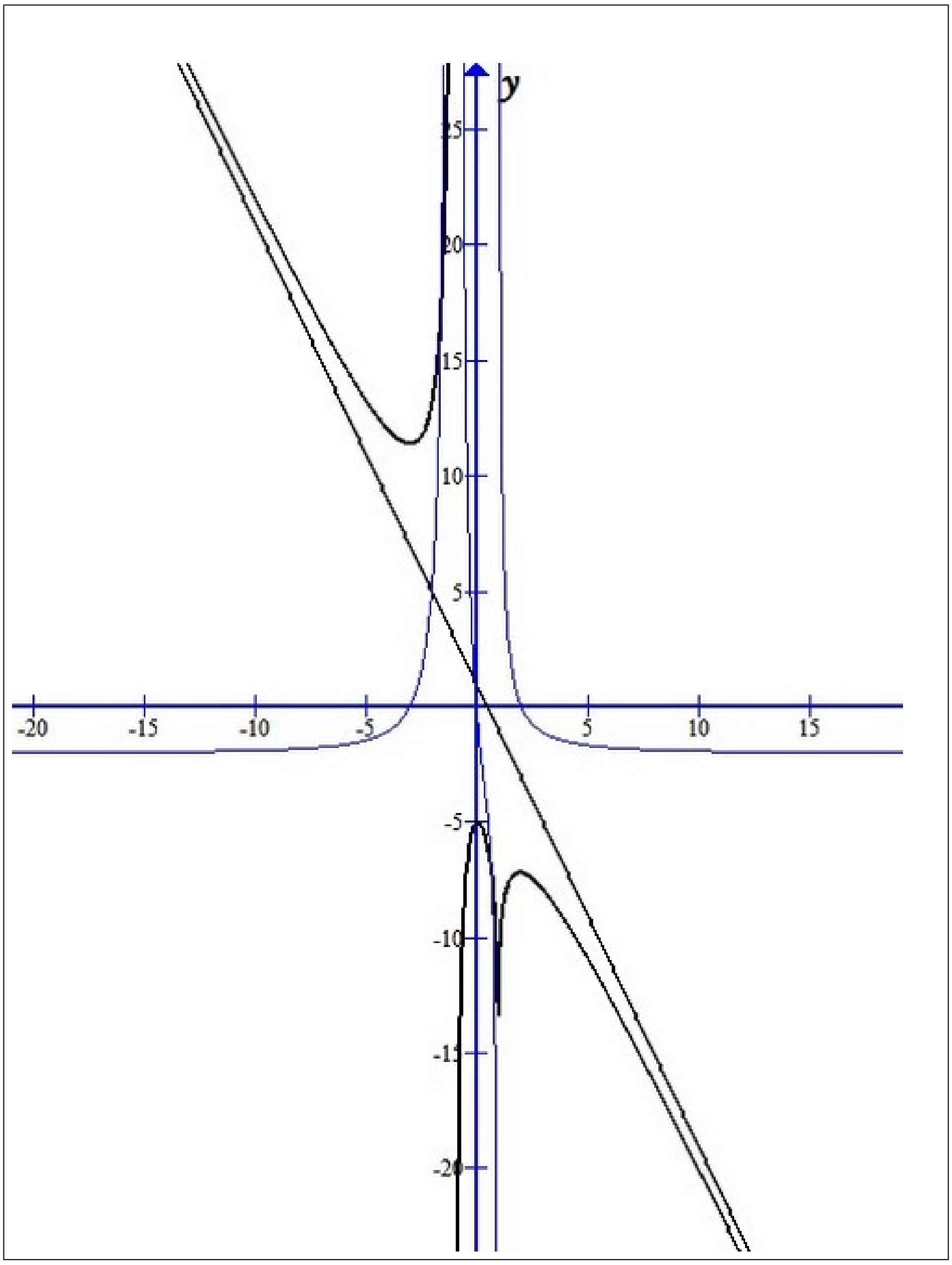
Локален минимум: $f(-3) = 2\ln 2 + 10$.

Локални максимуми: $f(0) = -5$ и $f(2) = -5 - 2\ln 3$.

Втора производна $f''(x) = -\dfrac{4\left(5x^2 - 4x + 3\right)}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

Функцията е изпъкнала в интервала $(-\infty, -1)$.

Функцията е вдлъбната в интервалите $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.



Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №2, 25.01.2013 година

отговори и решения

1. *(по 5 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) Допирателната към графиката на функцията $f(x) = \dfrac{x-6}{x-2}\, e^{x-1}$ в точката с абсциса $x = 1$ има уравнение $y = \quad 9\,x - 4 \qquad\qquad ;$

б) Наклонената асимптота на функцията $f(x) \,=\, (2x-3)\, e^{-\frac{1}{2x}}$ при $x \to +\infty$ има уравнение

$y = \qquad 2\,x - 4 \qquad\qquad .$

2. *(по 3 точки за верен отговор)* Попълнете:

$$\text{а)} \int \frac{1}{x\sqrt{(\ln x - 1)^3}}\, dx \quad = \quad -\frac{2}{\sqrt{\ln x - 1}} + C \qquad ;$$

$$\text{б)} \int \ln\left(x + \sqrt{x^2+9}\right)\, dx \quad = \quad x\,\ln\left(x + \sqrt{x^2+9}\right) - \sqrt{x^2+9} + C \qquad ;$$

$$\text{в)} \int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^4 x} \quad = \quad -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C \qquad ;$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x+2}} \quad = \quad \arcsin\frac{x-3}{\sqrt{11}} + C \qquad ;$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{\sqrt{5\,e^{2x} + 2\,e^{x} + 1}} \quad = \quad -\ln\left(e^{-x} + 1 + \sqrt{(e^{-x}+1)^2 + 4}\right) + C \qquad .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, чертежът е задължителен)*
Да се изследва и построи графиката на функцията:

$$f(x) \,=\, \ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^2 + \frac{2\,x^2 + 3x - 3}{x+3} \quad .$$

4. *(10 точки, необходима е обосновка)* Пресметнете неопределения интеграл:

$$\int \frac{5\,x^2 - 4\,x + 4}{(x+1)\,(4\,x^2 - 4\,x + 5)}\, dx \qquad .$$

Отговор: $\quad \ln|x+1| + \dfrac{1}{8}\ln\left(4\,x^2 - 4\,x + 5\right) + \dfrac{1}{8}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2\,x-1}{2} + C$

Основни резултати и чертеж за 3.

Вертикални асимптоти $x = -3$ и $x = -1$.

Наклонена асимптота при $x \to +\infty$ (същата и при $x \to -\infty$): $y = 2x - 3$.

Производна $f'(x) = \dfrac{2x(x+2)(x+5)}{(x+1)(x+3)^2}$.

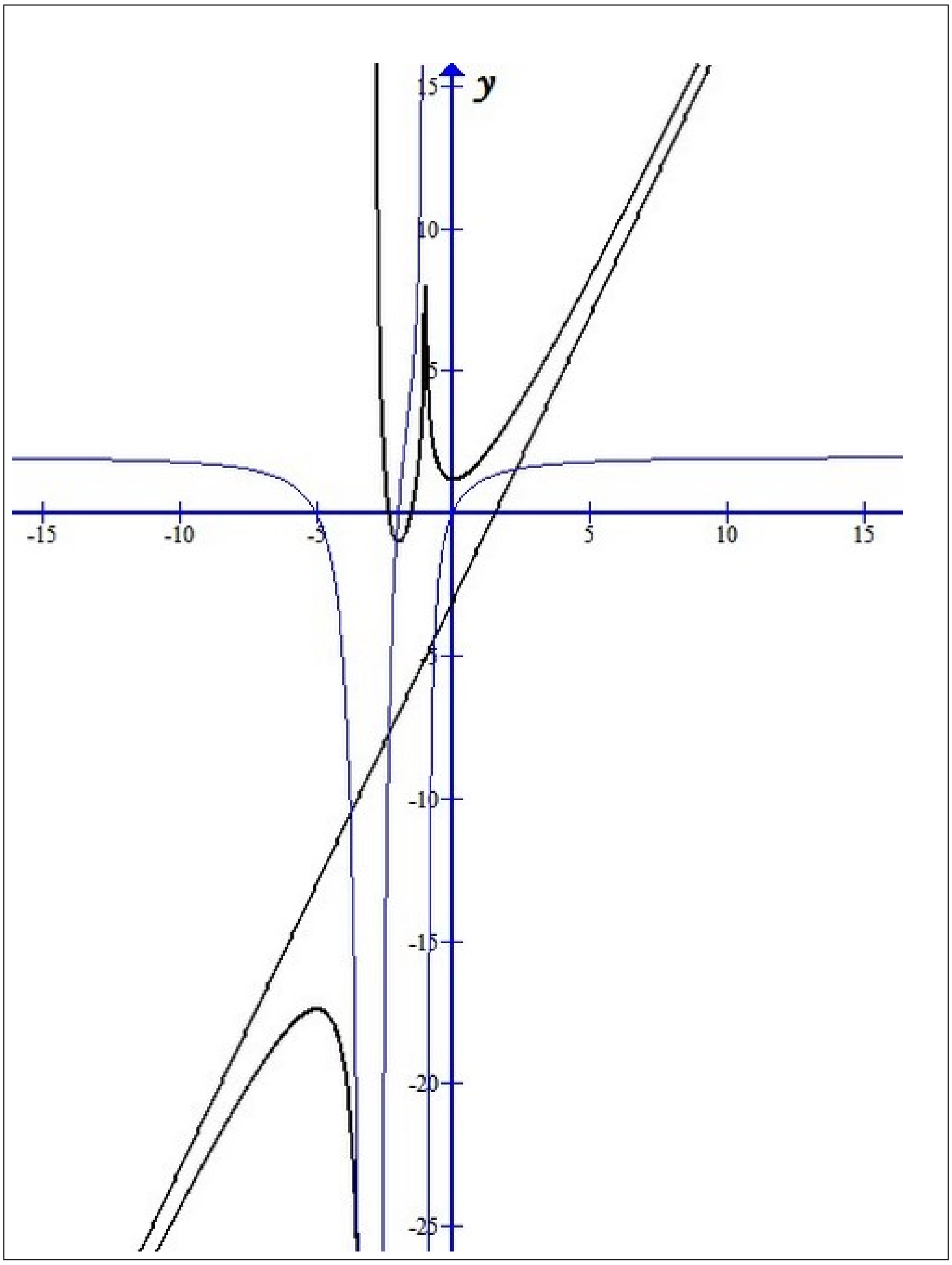
Локален максимум: $f(-5) = -2\ln 2 - 16$.

Локални минимуми: $f(-2) = -1$ и $f(0) = 2\ln 3 - 1$.

Втора производна $f''(x) = \dfrac{4\left(5x^2 + 16x + 15\right)}{(x+1)^2 (x+3)^3}$.

Функцията е вдлъбната в интервала $(-\infty, -3)$.

Функцията е изпъкнала в интервалите $(-3, -1)$, $(-1, +\infty)$.



Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №2, 25.01.2013 година

отговори и решения

1. *(по 5 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) Допирателната към графиката на функцията $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}\, e^{x+2}$ в точката с абсциса $x = -2$ има уравнение $y =$ $9\,x + 23$;

б) Наклонената асимптота на функцията $f(x) = (3x+2)\, e^{-\frac{1}{3x}}$ при $x \to +\infty$ има уравнение

$y =$ $3\,x + 1$.

2. *(по 3 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) $$\int \frac{(\ln x + 13)^{13}}{x}\, dx = \frac{1}{14}\,(\ln x + 13)^{14} + C \quad;$$

б) $$\int \ln\left(2x + \sqrt{4\,x^2 - 1}\right)\, dx = x\,\ln\left(2x + \sqrt{4\,x^2 - 1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{4\,x^2 - 1} + C \quad;$$

в) $$\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^5 x}\, dx = -\frac{1}{4\sin^4 x} + \frac{1}{2\sin^2 x} + C \quad;$$

г) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 8x + 1}} = \arcsin\frac{x+4}{\sqrt{17}} + C \quad;$$

д) $$\int \frac{dx}{\sqrt{8\,e^{2x} + 4\,e^{x} + 1}} = -\ln\left(e^{-x} + 2 + \sqrt{(e^{-x} + 2)^2 + 4}\right) + C \quad.$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, чертежът е задължителен)*
Да се изследва и построи графиката на функцията:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \frac{2\,x^2 - x + 5}{x-1} \quad.$$

4. *(10 точки, необходима е обосновка)* Пресметнете неопределения интеграл:

$$\int \frac{5\,x^2 + 2\,x + 6}{(x-1)\,(4\,x^2 + 4\,x + 5)}\, dx \quad.$$

Отговор: $\ln|x-1| + \dfrac{1}{8}\,\ln\left(4\,x^2 + 4\,x + 5\right) - \dfrac{3}{8}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2\,x+1}{2} + C$

Основни резултати и чертеж за 3.

Вертикални асимптоти $x=-1$ и $x=1$.

Наклонена асимптота при $x\to+\infty$ (същата и при $x\to-\infty$): $y=2x+1$.

Производна $f'(x) = -\dfrac{2x(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-1)^2}$.

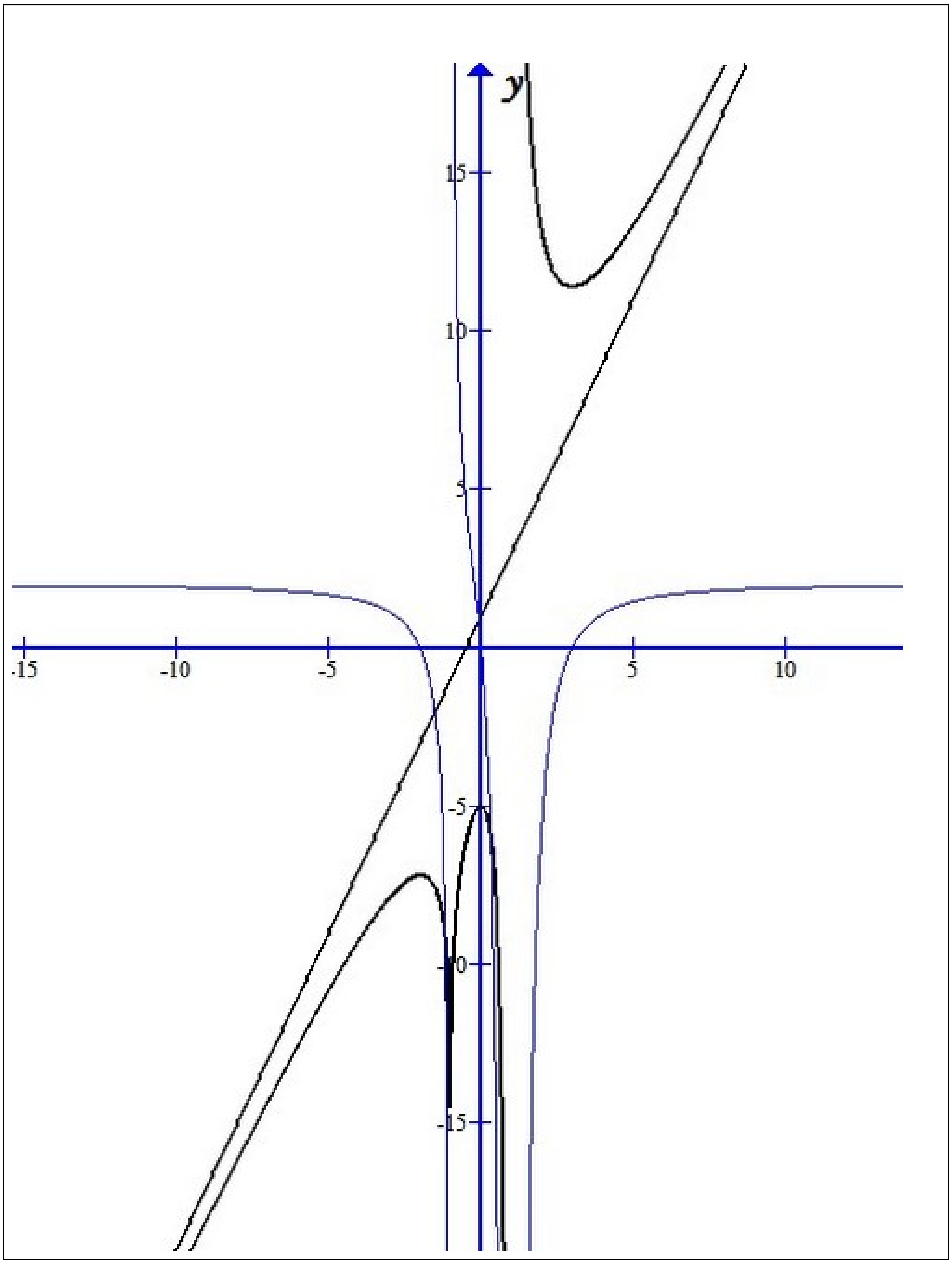
Локален минимум: $f(3) = 2\ln 2 + 10$.

Локални максимуми: $f(0) = -5$ и $f(-2) = -5 - 2\ln 3$.

Втора производна $f''(x) = \dfrac{4\left(5x^2+4x+3\right)}{(x+1)^2(x-1)^3}$.

Функцията е изпъкнала в интервала $(1, +\infty)$.

Функцията е вдлъбната в интервалите $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$.



Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №2, 25.01.2013 година

отговори и решения

1. *(по 5 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) Допирателната към графиката на функцията $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}\, e^{x+3}$ в точката с абсциса $x = -3$ има уравнение $y =$ $7\,x + 25$;

б) Наклонената асимптота на функцията $f(x) = (4x-3)\, e^{\frac{1}{4x}}$ при $x \to +\infty$ има уравнение

$y =$ $4\,x - 2$.

2. *(по 3 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) $$\int \frac{\sqrt[3]{(\ln x + 13)^5}}{x}\, dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(\ln x + 13)^8} + C \quad ;$$

б) $$\int \ln\left(3x + \sqrt{9\,x^2+1}\right)\, dx = x\,\ln\left(3x + \sqrt{9\,x^2+1}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{9\,x^2+1} + C \quad ;$$

в) $$\int \sin^2 x . \cos^5 x\, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C \quad ;$$

г) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+6}} = \arcsin\frac{x-2}{\sqrt{10}} + C \quad ;$$

д) $$\int \frac{dx}{\sqrt{5\,e^{2x} - 4\,e^{x} + 4}} = -\frac{1}{2}\ln\left(2\,e^{-x} - 1 + \sqrt{(2\,e^{-x}-1)^2 + 4}\right) + C \quad .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, чертежът е задължителен)*
Да се изследва и построи графиката на функцията:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)^2 + \frac{2\,x^2 - 3x - 3}{x-3} \quad .$$

4. *(10 точки, необходима е обосновка)* Пресметнете неопределения интеграл:

$$\int \frac{3\,x^2 + 4\,x + 6}{(x-1)\,(4\,x^2 + 4\,x + 5)}\, dx \quad .$$

Отговор: $\ln|x-1| - \dfrac{1}{8}\ln\left(4\,x^2 + 4\,x + 5\right) - \dfrac{1}{8}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2\,x+1}{2} + C$

Основни резултати и чертеж за 3.

Вертикални асимптоти $x = 1$ и $x = 3$.

Наклонена асимптота при $x \to +\infty$ (същата и при $x \to -\infty$): $y = 2x + 3$.

Производна $f'(x) = \dfrac{2x(x-2)(x-5)}{(x-1)(x-3)^2}$.

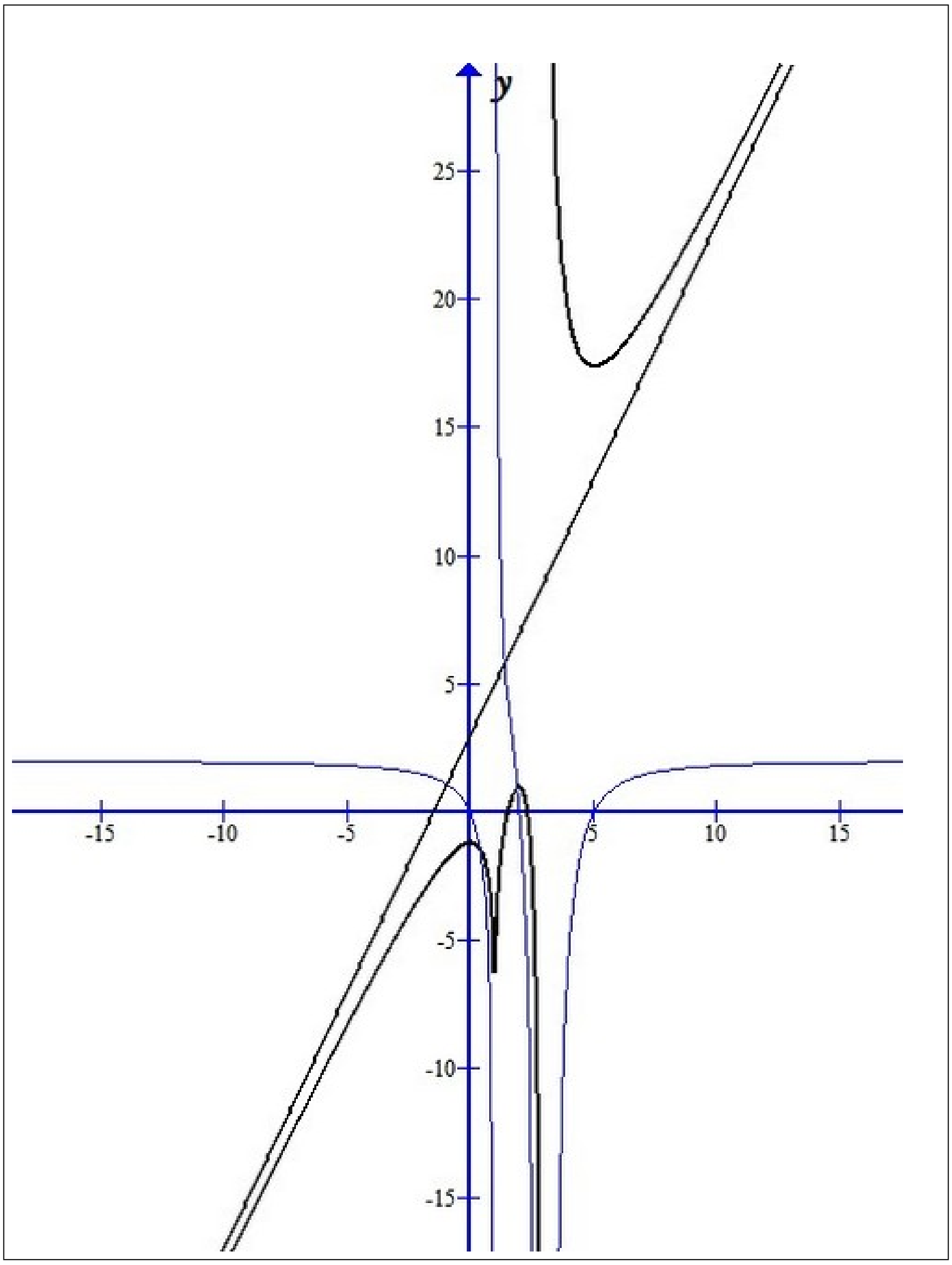
Локален минимум: $f(5) = 2\ln 2 + 16$.

Локални максимуми: $f(2) = 1$ и $f(0) = 1 - 2\ln 3$.

Втора производна $f''(x) = \dfrac{4\left(5x^2 - 16x + 15\right)}{(x-1)^2(x-3)^3}$.

Функцията е изпъкнала в интервала $(3, +\infty)$.

Функцията е вдлъбната в интервалите $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$.



Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №2, 25.01.2013 година

отговори и решения

1. *(по 5 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) Допирателната към графиката на функцията $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}\, e^{x+3}$ в точката с абсциса $x = -3$ има уравнение $y =$ $3\,x + 11$;

б) Наклонената асимптота на функцията $f(x) = (2x+3)\, e^{\frac{1}{2x}}$ при $x \to +\infty$ има уравнение

$y =$ $2\,x + 4$.

2. *(по 3 точки за верен отговор)* Попълнете:

$$\text{а)} \int \frac{1}{x\,\sqrt[3]{\ln x + 12}}\, dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\ln x + 12)^2} + C \quad ;$$

$$\text{б)} \int \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right) dx = x\,\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right) - \sqrt{x^2 - 9} + C \quad ;$$

$$\text{в)} \int \sin^5 x . \cos^2 x\; dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C \quad ;$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 8x - 9}} = \arcsin\frac{x-4}{\sqrt{7}} + C \quad ;$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{\sqrt{2e^{2x} + 6\,e^{x} + 9}} = -\frac{1}{3}\ln\left(3\,e^{-x} + 1 + \sqrt{(3\,e^{-x} + 1)^2 + 1}\right) + C \quad .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, чертежът е задължителен)*
Да се изследва и построи графиката на функцията:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \frac{2\,x^2 + x + 5}{x+1} \quad .$$

4. *(10 точки, необходима е обосновка)* Пресметнете неопределения интеграл:

$$\int \frac{5\,x^2 + 4\,x + 4}{(x-1)\,(4\,x^2 + 4\,x + 5)}\, dx \quad .$$

Отговор: $\ln|x-1| + \dfrac{1}{8}\ln\left(4\,x^2 + 4\,x + 5\right) + \dfrac{1}{8}\operatorname{arctg}\dfrac{2\,x+1}{2} + C$

Основни резултати и чертеж за 3.

Вертикални асимптоти $x = -1$ и $x = 1$.

Наклонена асимптота при $x \to +\infty$ (същата и при $x \to -\infty$): $y = 2x - 1$.

Производна $f'(x) = \dfrac{2x(x+3)(x-2)}{(x-1)(x+1)^2}$.

Локален максимум: $f(-3) = -2\ln 2 - 10$.

Локални минимуми: $f(0) = 5$ и $f(2) = 5 + 2\ln 3$.

Втора производна $f''(x) = \dfrac{4\left(5x^2 - 4x + 3\right)}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

Функцията е вдлъбната в интервала $(-\infty, -1)$.

Функцията е изпъкнала в интервалите $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.