# Лекция 7: Основни елементарни функции

Започнахме лекцията с резюме на предишната лекция – напомнихме дефиницията на непрекъсната функция, Теоремата на Болцано, Теоремата на Вайерщрас, дефиницията на равномерна непрекъснатост и Теоремата на Кантор.

## 1 Теорема за продължението. Експонента

При разглеждането на експонентата в предишната лекция напомнихме от училище как се дефинира експонента, когато степенният показател е рационално число. За нас засега че експонента е $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = a^x$ за фиксирана основа $a > 0$. В сила са свойствата:

$$\begin{cases} a^x a^y = a^{x+y}\ \forall x, y \in \mathbb{Q} \\ (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy} = a^{yx}\ \forall\, x, y \in \mathbb{Q} \\ \text{Ако } a > 1 \text{ и } x < y, \text{ то } a^x < a^y\ \forall\, x, y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Естествено е да очакваме, че можем да додефинираме тези функции и за степенен показател реално число, като се запазят хубавите свойства. Това е вярно и може да се направи, като се използват конкретните свойства на експонентата. Предпочитаме общия подход, който ни дава необходимо и достатъчно условие кога една функция, дефинирана в рационалните числа, може да бъде додефинирана за всички реални числа така, че полученото изображение да е непрекъснато. При това това е едно хубаво приложение на идеята за равномерна непрекъснатост.

**Дефиниция 1.1.** *Продължение на функция*
Нека $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Казваме, че $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е продължение на $f$, ако $\widetilde{f}(x) = f(x)$ за всяко $x \in \mathbb{Q}$.

**Теорема 1.2.** *Теорема за продължението*
*Нека $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Твърдим, че $f$ притежава непрекъснато продължение $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ точно тогава, когато $f$ е равномерно непрекъсната върху всеки ограничен и затворен интервал $[c, d] \cap \mathbb{Q}$. При това продължението е единствено.*

*Доказателство.* Нека първо знаем, че $f$ притежава непрекъснато продължение $\widetilde{f}$ до реалните числа. Нека $[c, d]$ е произволен ограничен и затворен интервал. Тогава рестрикцията на $\widetilde{f}$ до $[c, d]$ е непрекъсната и следователно тази рестрикция е равномерно непрекъсната според Теоремата на Кантор. Следователно $f$ е равномерно непрекъсната върху $[c, d] \cap \mathbb{Q}$.

Нещо повече, ако $f$ притежава непрекъснато продължение $\widetilde{f}$ до реалните числа, то

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{y \to x} \widetilde{f}(y) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \mathbb{Q}}} f(y)$$

Забележете, че всяко реално число е точка на сгъстяване на рационалните числа и следователно можем да говорим за границата отдясно. Получаваме, че стойностите на $\widetilde{f}$ се определят изцяло от стойностите на $f$, което означава, че непрекъснатото продължение, ако съществува, е единствено. При това виждаме как трябва да дефинираме продължението:

$$\widetilde{f}(x) := \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \mathbb{Q}}} f(y)$$

Длъжни сме обаче да проверим, че границата отдясно съществува, както и дали така дефинираното изображение е непрекъснато.

От необходимото и достатъчно условие на Коши за съществуване на граница на функция имаме, че $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \mathbb{Q}}} f(y)$ съществува точно тогава, когато:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y', y'' \in (x - \delta, x + \delta) \cap \mathbb{Q} \setminus \{x\} : |f(y') - f(y'')| < \varepsilon$$

Равномерната непрекъснатост на $f$ върху всеки краен и затворен интервал влече необходимото и достатъчно условие на Коши около всяка точка $x \in \mathbb{R}$. Наистина, $f$ е равномерно непрекъсната в $[x-1, x+1] \cap \mathbb{Q}$ и следователно за произволно $\varepsilon > 0$ е в сила:

$$\exists \eta > 0 \, \forall y', y'' \in [x-1, x+1], \; |y' - y''| < \eta : |f(y') - f(y'')| < \varepsilon$$

Тогава за $\delta$ в необходимото и достатъчно условие на Коши избираме $\delta := \min\left\{1, \frac{\eta}{2}\right\} > 0$. Убедихме се, че $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \mathbb{Q}}} f(y)$ съществува за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Да проверим, че така дефинираното $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е непрекъснато продължение на $f$. Нека $x \in \mathbb{Q}$ е произволно. Тогава непрекъснатостта на $f$ влече

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \mathbb{Q}}} f(y) = f(x) \Rightarrow \widetilde{f}(x) = f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{Q}$$

Остана да се убедим, че $\widetilde{f}$ е непрекъснато. Ще докажем, че $\widetilde{f}$ е равномерно непрекъснато във всеки ограничен и затворен интервал $[c, d]$, откъдето следва исканата непрекъснатост (ако $x \in \mathbb{R}$ е произволно, равномерната непрекъснатост на $\widetilde{f}$ в интервала $[x-1, x+1]$ влече непрекъснатостта на $\widetilde{f}$ в $x$).

Фиксираме произволен интервал $[c, d]$ и произволно $\varepsilon > 0$. От факта, че $f$ е равномерно непрекъсната в $[c, d]$ следва, че

$$\exists \delta > 0 \, \forall y', y'' \in [c, d] \cap \mathbb{Q}, \; |y' - y''| < \delta : |f(y') - f(y'')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Нека $x', x'' \in [c, d]$ с $|x' - x''| < \delta$ са произволни. Можем да изберем рационални $y' \in [c, d] \cap \mathbb{Q}$, $y'' \in [c, d] \cap \mathbb{Q}$ така, че следните четири условия да са в сила:

$$\begin{cases} |y' - x'| < \frac{1}{2}\left(\delta - |x' - x''|\right), & |f(y') - \widetilde{f}(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \\ |y'' - x''| < \frac{1}{2}\left(\delta - |x' - x''|\right), & |f(y'') - \widetilde{f}(x'')| < \frac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

Тогава можем да оценим

$$\begin{aligned} |y' - y''| &\leq |y' - x'| + |x' - x''| + |x'' - y''| < \\ &\frac{1}{2}\left(\delta - |x' - x''|\right) + |x' - x''| + \frac{1}{2}\left(\delta - |x' - x''|\right) = \delta - |x' - x''| + |x' - x''| = \delta \end{aligned}$$

и следователно знаем, че $\left|f\left(y'\right)-f\left(y''\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Използвайки това и другите две условия, на които трябваше да отговарят $y'$ и $y''$, получаваме

$$\left|\widetilde{f}\left(x'\right)-\widetilde{f}\left(x''\right)\right| \leq \left|\widetilde{f}\left(x'\right)-f\left(y'\right)\right| + \left|f\left(y'\right)-f\left(y''\right)\right| + \left|f\left(y''\right)-\widetilde{f}\left(x''\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

С това доказателството е завършено. □

**Твърдение 1.3.** *Нека $a>0$ е фиксирана и $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ е дефинирана с $f_a(x) = a^x$. Тогава $f_a$ е равномерно непрекъсната в $[c,d]\cap\mathbb{Q}$ за всяко $[c,d]$.*

*Доказателство.* Нека $y', y'' \in [c,d]\cap\mathbb{Q}$. Знаем, че

$$\left|f_a\left(y'\right)-f_a\left(y''\right)\right| = \left|a^{y'}-a^{y''}\right| = a^{y'}\left|a^{y''-y'}-1\right| \leq \max\left\{a^c, a^d\right\}\left|a^{y''-y'}-1\right|$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. От известната ни граница имаме, че

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon > 0 \\ a^z \xrightarrow[\substack{z\to 0 \\ z\in\mathbb{Q}}]{} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\,\delta>0\;\forall\,z\in\mathbb{Q},\ |z|<\delta : \left|a^z-1\right| < \frac{\varepsilon}{\max\left\{a^c,a^d\right\}}$$

Ако $y', y'' \in [c,d]\cap\mathbb{Q}$ и $|y'-y''|<\delta$, то

$$\left|f_a\left(y'\right)-f_a\left(y''\right)\right| = \left|a^{y'}-a^{y''}\right| \leq \max\left\{a^c,a^d\right\}\left|a^{y''-y'}-1\right| < \max\left\{a^c,a^d\right\}\frac{\varepsilon}{\max\left\{a^c,a^d\right\}} = \varepsilon$$

□

Горното твърдение и теоремата за продължението ни дават основание за следната

**Дефиниция 1.4.** *експонента*
Единственото непрекъснато продължение $\widetilde{f_a}$ на $f_a$ наричаме експонента с основа $a$ и бележим $a^x := \widetilde{f_a}(x)\ \forall\,x\in\mathbb{R}$.

Да отбележим, че ако $x, y \in \mathbb{R}$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ с $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ с $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$, то:

$$\underbrace{a^{x_n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} a^x} \cdot \underbrace{a^{y_n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} a^y} = \underbrace{a^{x_n+y_n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} a^{x+y}}$$

# 2 Растящи и намаляващи функции

**Дефиниция 2.1.** *Растяща функция. Намаляваща функция*
Нека $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$.

- Казваме, че $f$ е растяща в $D$, ако от $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$ следва, че $f(x_1) \leq f(x_2)$. Съответно, $f$ е строго растяща, ако $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Казваме, че $f$ е намаляваща в $D$, ако от $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$ следва, че $f(x_1) \geq f(x_2)$. Съответно, $f$ е строго намаляваща, ако $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Аналогично на съответната дефиниция за редици, казваме, че $f$ е монотонна, ако е (монотонно) растяща или (монотонно) намаляваща.

**Твърдение 2.2.** *Нека* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *- интервал;* $f : \Delta \to \mathbb{R}$ *- монотонна.*

- *Ако* $x_0 \in \Delta$ *е вътрешна точка за* $\Delta$ *или десен край на* $\Delta$*, то съществува* $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$*, като при това* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \le f(x_0)$ *за растяща* $f$ *и* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \ge f(x_0)$ *за намаляваща* $f$*.*

- *Ако* $x_0 \in \Delta$ *е вътрешна точка за* $\Delta$ *или ляв край на* $\Delta$*, то съществува* $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$*, като при това* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \ge f(x_0)$ *за растяща* $f$ *и* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \le f(x_0)$ *за намаляваща* $f$*.*

*Доказателство.* Б.о.о. нека $f$ е намаляваща и $x_0 \in \Delta$ е вътрешна точка за $\Delta$ или десен край на $\Delta$. Тогава множеството $\{f(x) : x \in \Delta,\ x < x_0\}$ е непразно и ограничено отдолу, тъй като $f(x) \ge f(x_0)$ за всяко $x < x_0$ и множеството $\{x \in \Delta :\ x < x_0\}$ не е празно. Дефинираме

$$L \coloneqq \inf \{f(x) : x \in \Delta,\ x < x_0\}$$

За произволно $\varepsilon > 0$ е ясно, че $L + \varepsilon > L$ и следователно можем да намерим $x_1 \in \Delta$ такова, че $x_1 < x_0$ и $f(x_1) < L + \varepsilon$. От дефиницията за $f$ - намаляваща, за произволно $x \in (x_1, x_0)$ е в сила:

$$L - \varepsilon < L \le f(x) \le f(x_1) < L + \varepsilon$$

Следователно, $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\ \ \forall x \in (x_1, x_0)$. Заключаваме, че $L$ е точно лявата граница за $x \to x_0$. При това $L \ge f(x_0)$, защото $f(x_0)$ е долна граница за $\{f(x) : x \in \Delta,\ x < x_0\}$, а $L$ е точната долна граница за същото множество. □

Да отбележим, че ако $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е растяща (намаляваща) и $x_0$ е вътрешна точка за $\Delta$, то:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \left( \lim_{x \to x_0^-} f(x) \ge f(x_0) \ge \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right)$$

Следващото твърдение е директно следствие от дефиницията за непрекъснатост, горните неравенства и знанията ни за леви и десни граници.

**Твърдение 2.3.** *Нека* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *- интервал;* $f : \Delta \to \mathbb{R}$ *- монотонна.*

*(а) Ако* $x_0 \in \Delta$ *е вътрешна точка за* $\Delta$*, то* $f$ *е непрекъсната в* $x_0 \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$*.*

*(б) Ако* $x_0 \in \Delta$ *е ляв край за* $\Delta$*, то* $f$ *е непрекъсната в* $x_0 \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$*.*

*(в) Ако* $x_0 \in \Delta$ *е десен край за* $\Delta$*, то* $f$ *е непрекъсната в* $x_0 \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$*.*

Следващото твърдение е важно. То показва, че в случая на монотонни функции следствието от теоремата на Болцано донякъде може да се обърне.

**Твърдение 2.4.** *Нека* $\Delta$ *- интервал и* $f : \Delta \to \mathbb{R}$ *е монотонна. Твърдим, че* $f$ *е непрекъсната точно тогава, когато* $f(\Delta)$ *е интервал.*

*Доказателство.* Разглеждаме двете посоки на твърдението.

($\Rightarrow$) Правата посока е директна - непрекъснатост на $f$ и $\Delta$ - интервал са точно условията на Следствие 2 от Теоремата на Болцано. Следователно $f(\Delta)$ е интервал. Забележете, че тук монотонност не е необходима.

($\Leftarrow$) Обратно, нека $f(\Delta)$ е интервал. Допускаме, че $x_0 \in \Delta$ е точка на прекъсване за $f$. Б.о.о. считаме, че $f$ е намаляваща и $x_0$ е вътрешна точка за $\Delta$. Ако $x_1 < x_0 < x_2$, то:

$$f(x_1) \geq \lim_{x \to x_0^-} f(x) > \lim_{x \to x_0^+} f(x) \geq f(x_2)$$

Оказва се, че $[f(x_2), f(x_1)] \not\subset f(\Delta)$. Противоречието се дължи на допускането, че $f$ има точка на прекъсване в $\Delta$. $\square$

**Следствие 2.5.** *Монотонните функции имат най-много изброимо много точки на прекъсване.*

Наистина, на всяка точка на прекъсване съответства отворен интервал, който не съдържа стойности на функцията. При това на различни точки на прекъсване съответстват отворени интервали, които не се пресичат. Тъй като система от два по два непресичащи се отворени интервали върху реалната права не може да бъде повече от изброима (във всеки интервал има рационално число), това доказва следствието.

**Твърдение 2.6.** *Нека $\Delta$ е интервал и $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е строго монотонна и непрекъсната. Тогава $f : \Delta \to f(\Delta)$ е биекция и обратната биекция $f^{-1} : f(\Delta) \to \Delta$ е строго монотонна и непрекъсната.*

*Доказателство.* От строгата монотонност на $f$ следва, че $f$ е инекция. Отново б.о.о. считаме, че $f$ е строго намаляваща. Нека $y_1, y_2 \in f(\Delta)$. Искаме да покажем, че $y_1 < y_2$ влече $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. Да означим

$$\begin{aligned} x_1 = f^{-1}(y_1) &\iff y_1 = f(x_1) \\ x_2 = f^{-1}(y_2) &\iff y_2 = f(x_2) \end{aligned}$$

Ако допуснем, че $x_1 < x_2$, то от $f$ строго намаляваща имаме $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$, което не е вярно. Ако допуснем, че $x_1 = x_2$, то $y_1 = y_2$, което не е вярно. Следователно $f^{-1}(y_1) = x_1 > x_2 = f^{-1}(y_2)$. С това сме доказали, че обратната биекция $f^{-1}$ е строго намаляваща.

След като $f^{-1}$ е монотонна и $f^{-1}(f(\Delta)) = \Delta$ е интервал, от предишното твърдение следва, че $f^{-1}$ е непрекъсната. $\square$

## 3 Основни елементарни функции

Готови сме да докажем съществуването и непрекъснатостта на операциите коренуване и логаритмуване.

1. Коренуване
   Нека естественото число $n \in \mathbb{N}$ е фиксирано. Разглеждаме степенната функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

а) $n$ - нечетно. Знаем, че $f$ е строго растяща. Тъй като $f$ е непрекъсната, $f(\mathbb{R})$ е интервал. Освен това:

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \text{ и } \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

Следователно в $f(\mathbb{R})$ има произволно малки и произволно големи стойности, откъдето получаваме $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. И тъй, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е биекция. Обратната биекция $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ според последното твърдение е строго растяща и непрекъсната. Тази обратна биекция наричаме кореނуване с показател $n$: $\sqrt[n]{\cdot} \equiv f^{-1}$. Разбира се, от факта, че това е обратната биекция, имаме $(\sqrt[n]{y})^n = y$ за всяко $y \in \mathbb{R}$ и $\sqrt[n]{x^n} = x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

б) $n$ - четно. Тъй като в този случай $f$ не е инекция, разглеждаме нейната рестрикция до интервала $[0, +\infty)$. Функцията $f|_{[0,+\infty)}$ е непрекъсната в интервала $[0, +\infty)$ и следователно множеството от нейните стойности също е интервал. Тъй като $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ и $f(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, това множество от стойности е точно интервалът $[0, +\infty)$. И така, $f|_{[0,+\infty)} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ е биекция. Нейната обратна биекция

$$\sqrt[n]{\cdot} := \left[ f|_{[0,+\infty)} \right]^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

е непрекъсната и строго растяща според последното твърдение. Тази обратна биекция наричаме коренуване с показател $n$. От факта, че това е обратната биекция, имаме $(\sqrt[n]{y})^n = y$ за всяко $y \in [0, +\infty)$ и $\sqrt[n]{x^n} = x$ за всяко $x \in [0, +\infty)$.

2. Логаритмуване
Разглеждаме експонентата $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = a^x$ за основа $a > 1$.

Нека $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ са прозволни. Тогава съществуват редици $\left\{x_n^1\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{x_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ от рационални числа, клонящи съответно към $x_1$ и $x_2$. Избираме $r, s \in \mathbb{Q}$ такива, че $x_1 < r < s < x_2$. За достатъчно големи индекси имаме $x_n^1 < r < s < x_n^2$ и следователно:

$$\underbrace{a^{x_n^1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} a^{x_1}} < a^r < a^s < \underbrace{a^{x_n^2}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} a^{x_2}} \Rightarrow a^{x_1} \leq a^r < a^s \leq a^{x_2}$$

От горния граничен преход можем да заключим, че $f_a$ е строго растяща за $a > 1$. Тъй като $f_a(\mathbb{Q}) \subset (0, +\infty)$, то $f_a(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty)$. Да забележим, че $a^x \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$. Наистина, ако съществува $x$ с $a^x = 0$, то $a^x a^{-x} = a^0 = 1 = 0.a^{-x}$ и стигаме до противоречие. От знанията ни за геометричната прогресия имаме, че

$$a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \quad \text{и} \quad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Следователно в множеството от стойности $f_a(\mathbb{R})$ има произволно големи числа, както и числа, произволно близки до нула. Тъй като $f_a$ е непрекъсната, множеството от нейните стойности е интервал и следователно получихме, че $f_a(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. И тъй, за $a > 1$ функцията

$$f_a : (-\infty, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$$

е строго растяща непрекъсната биекция. Абсолютно аналогично, за $a \in (0,1)$ функцията $f_a : (-\infty,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ е строго намаляваща непрекъсната биекция.

И в двата случая обратната биекция $f_a^{-1} : (0,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$ е добре дефинирана, непрекъсната и строго монотонна. Тази обратна биекция наричаме логаритмуване с основа $a$ и означаваме $\log_a := f_a^{-1}$. Логаритъмът с основа неперовото число $e$ се нарича естествен логаритъм и се означава с ln. От факта, че експонентата и логаритмуването са взаимно обратни биекции, имаме $\log_a(a^x) = x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ и $a^{\log_a y} = y$ за всяко $y \in (0,+\infty)$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Разбира се, постоянно се използват границите

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \ .$$

3. Обратни тригонометрични функции

а) Разглеждаме $f(x) = \sin x$. Тази функция не е инекция, затова е прието да се разглежда нейната рестрикция върху интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Изображението

$$\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

е строго растяща непрекъсната биекция. Неговата обратна биекция

$$\arcsin \equiv \left(\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

се нарича аркуссинус и е строго растяща и непрекъсната от нашето твърдение. От факта, че рестрикцията на синуса върху интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и аркуссинусът са взаимно обратни биекции, имаме

$$\sin(\arcsin y) = y \ \forall\, y \in [-1,1] \ \text{ и } \ \arcsin(\sin x) = x \ \forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ .$$

б) Аналогично е прието да се разглежда рестрикцията на косинуса върху интервала $[0,\pi]$. Изображението

$$\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$$

е строго намаляваща непрекъсната биекция. Неговата обратна биекция

$$\arccos \equiv \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$$

се нарича аркускосинус и е строго намаляваща и непрекъсната.

в) По същия начин

$$\mathrm{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty,+\infty)$$

е строго растяща непрекъсната биекция. Нейната обратна биекция

$$\mathrm{arctg} \equiv \left(\mathrm{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1} : (-\infty,+\infty) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

се нарича аркустангенс и е строго растяща и непрекъсната. Добре е да запомните, че

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{2} \ \text{ и } \lim_{x\to-\infty} \mathrm{arctg}\, x = -\frac{\pi}{2} \ .$$

г) Последно, изображенията

$$\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)} : (0,\pi) \to (-\infty,+\infty) \quad \text{и} \quad \operatorname{arccotg} : (-\infty,+\infty) \longrightarrow (0,\pi)$$

са взаимно обратни строго намаляващи непрекъснати биекции.

**Настоятелно ви препоръчвам да нарисувате графиките на току-що разгледаните функции. Правено е на лекцията!**

## 4 Основни граници

$$(1) \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$(3) \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \left(\text{В частност, } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\right)$$

Извеждането на (3) е директно от (2) и от непрекъснатостта на логаритъма:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\log_a(1+x)\right) = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$$

$$(4) \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \text{за всяко} \quad a > 0 \ \left(\text{В частност, } \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\right)$$

Наистина, ако $a \neq 1$, можем да пресметнем

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} \overset{y:=a^x-1}{=} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\log_a(1+y)}{y}} = \ln a \quad \text{от} \quad (3) \quad .$$

Ако $a = 1$, от двете страни на (4) стоят нули и следователно равенството остава в сила.

$$(5) \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

Наистина, ако $a \neq 0$, можем да пресметнем

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{a\ln(1+x)}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}1} \cdot \frac{a\ln(1+x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0} a \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}1} = a$$

Ако $a = 0$, от двете страни на (5) стоят нули и следователно равенството остава в сила.