ДИС-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Финален тест, 30.01.2015 година

Име:

група: **фак. номер:**

отговорите на 1, 3, 6, 7 и 9 се попълват на този лист,
за 2, 4, 5, 8, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

1. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Числото a се нарича граница на редицата $\{a_n\}_1^\infty$, ако за всяко

2. *(9 точки)* Формулирайте и докажете теоремата за граница на произведение на две сходящи редици.

3. *(4+4 точки)* Довършете дефиницията (по два начина):
Казваме, че функцията $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ клони към $+\infty$ когато x клони към $+\infty$, ако:
(Коши)

(Хайне)

4. *(10 точки)* Докажете, че двете дефиниции (условия) са еквивалентни.

5. Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[0\,,\,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ и $f(0) > L$. Докажете, че:

а) *(5 точки)* $f(x)$ е ограничена в $[0\,,\,+\infty)$;

б) *(8 точки)* $f(x)$ има най-голяма стойност в $[0\,,\,+\infty)$.

6. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Функцията $f(x)$ се нарича диференцируема в точката a , ако е дефинирана в ....

и ......

обърни

отговорите на 1, 3, 6, 7 и 9 се попълват на този лист,
за 2, 4, 5, 8, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

7. *(4 точки)* Формулирайте теоремата на Лагранж (за крайните нараствания).

8. *(12 точки)* Нека функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има производна във всяка точка. Докажете, че $f(x)$ е растяща в $\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

9. *(4 точки)* Формулирайте теоремата на Лайбниц-Нютон.

10. *(12 точки)* Формулирайте и докажете теоремата за интегриране по части за определени интеграли.

11. Нека $F(x) = \int\limits_0^x \dfrac{3\,t^2+4}{t^4+3\,t^2+2} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{t^2+4}{t^2+3}\, dt$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Докажете, че:

а) *(5 точки)* $F(x)$ е нечетна;

б) *(5 точки)* $F(x)$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$;

в) *(5 точки)* $F(x)$ е вдлъбната в интервала $[0\,,\ +\infty)$;

г) *(5 точки)* съществува границата $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

ДИС-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Финален тест, 30.01.2015 година

Име:

група: **фак. номер:**

отговорите на 1, 3, 6, 7 и 9 се попълват на този лист,
за 2, 4, 5, 8, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

1. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Числото a се нарича граница на редицата $\{a_n\}_1^\infty$, ако за всяко

2. *(9 точки)* Формулирайте и докажете теоремата за граница на частно на две сходящи редици.

3. *(4+4 точки)* Довършете дефиницията (по два начина):
Казваме, че функцията $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ клони към $-\infty$ когато x клони към $-\infty$, ако:
(Коши)

(Хайне)

4. *(10 точки)* Докажете, че двете дефиниции (условия) са еквивалентни.

5. Нека $f(x)$ е непрекъсната в $(-\infty\,,\,0]$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ и $f(0) < L$. Докажете, че:

а) *(5 точки)* $f(x)$ е ограничена в $(-\infty\,,\,0]$;

б) *(8 точки)* $f(x)$ има най-малка стойност в $(-\infty\,,\,0]$.

6. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Функцията $f(x)$ се нарича диференцируема в точката a , ако е дефинирана в ....

и ......

обърни

отговорите на 1, 3, 6, 7 и 9 се попълват на този лист,
за 2, 4, 5, 8, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

7. *(4 точки)* Формулирайте теоремата на Лагранж (за крайните нараствания).

8. *(12 точки)* Нека функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има производна във всяка точка.
Докажете, че $f(x)$ е намаляваща в $\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \leq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

9. *(4 точки)* Формулирайте теоремата на Лайбниц-Нютон.

10. *(12 точки)* Формулирайте и докажете теоремата за смяна на променливите при определени интеграли

11. Нека $F(x) = \int\limits_0^x \frac{3\,t^2+5}{t^4+4\,t^2+3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t^2+5}{t^2+2}\,dt$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Докажете, че:

а) *(5 точки)* $F(x)$ е нечетна;

б) *(5 точки)* $F(x)$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$;

в) *(5 точки)* $F(x)$ е вдлъбната в интервала $[0\,,\ +\infty)$;

г) *(5 точки)* съществува границата $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

ДИС-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Финален тест, 30.01.2015 година

Име:

група: **фак. номер:**

отговорите на 1, 3, 6, 7 и 9 се попълват на този лист,
за 2, 4, 5, 8, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

1. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Числото a се нарича граница на редицата $\{a_n\}_1^\infty$, ако за всяко

2. *(9 точки)* Формулирайте и докажете теоремата за граница на произведение на две сходящи редици.

3. *(4+4 точки)* Довършете дефиницията (по два начина):
Казваме, че функцията $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ клони към $-\infty$ когато x клони към $+\infty$, ако:
(Коши)

(Хайне)

4. *(10 точки)* Докажете, че двете дефиниции (условия) са еквивалентни.

5. Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[0\,,\,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ и $f(0) < L$. Докажете, че:

а) *(5 точки)* $f(x)$ е ограничена в $[0\,,\,+\infty)$;

б) *(8 точки)* $f(x)$ има най-малка стойност в $[0\,,\,+\infty)$.

6. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Функцията $f(x)$ се нарича диференцируема в точката a , ако е дефинирана в ....

и ......

обърни

отговорите на 1, 3, 6, 7 и 9 се попълват на този лист,
за 2, 4, 5, 8, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

7. *(4 точки)* Формулирайте теоремата на Лагранж (за крайните нараствания).

8. *(12 точки)* Нека функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има производна във всяка точка.
Докажете, че $f(x)$ е растяща в $\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

9. *(4 точки)* Формулирайте теоремата на Лайбниц-Нютон.

10. *(12 точки)* Формулирайте и докажете теоремата за интегриране по части за определени интеграли.

11. Нека $F(x) = \int\limits_0^x \dfrac{3\,t^2+5}{t^4+3\,t^2+2} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{t^2+5}{t^2+3}\, dt$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Докажете, че:

а) *(5 точки)* $F(x)$ е нечетна;

б) *(5 точки)* $F(x)$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$;

в) *(5 точки)* $F(x)$ е вдлъбната в интервала $[0\,,\ +\infty)$;

г) *(5 точки)* съществува границата $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

ДИС-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Финален тест, 30.01.2015 година

Име:

група: **фак. номер:**

отговорите на 1, 3, 6, 7 и 9 се попълват на този лист,
за 2, 4, 5, 8, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

1. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Числото a се нарича граница на редицата $\{a_n\}_1^\infty$, ако за всяко

2. *(9 точки)* Формулирайте и докажете теоремата за граница на частно на две сходящи редици.

3. *(4+4 точки)* Довършете дефиницията (по два начина):
Казваме, че функцията $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ клони към $+\infty$ когато x клони към $-\infty$, ако:
(Коши)

(Хайне)

4. *(10 точки)* Докажете, че двете дефиниции (условия) са еквивалентни.

5. Нека $f(x)$ е непрекъсната в $(-\infty\, , \, 0]$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ и $f(0) > L$. Докажете, че:

а) *(5 точки)* $f(x)$ е ограничена в $(-\infty\, , \, 0]$;

б) *(8 точки)* $f(x)$ има най-голяма стойност в $(-\infty\, , \, 0]$.

6. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Функцията $f(x)$ се нарича диференцируема в точката a , ако е дефинирана в ....

и ......

обърни

отговорите на 1, 3, 6, 7 и 9 се попълват на този лист,
за 2, 4, 5, 8, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

7. *(4 точки)* Формулирайте теоремата на Лагранж (за крайните нараствания).

8. *(12 точки)* Нека функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има производна във всяка точка.
Докажете, че $f(x)$ е намаляваща в $\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \leq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

9. *(4 точки)* Формулирайте теоремата на Лайбниц-Нютон.

10. *(12 точки)* Формулирайте и докажете теоремата за смяна на променливите при определени интеграли.

11. Нека $F(x) = \int\limits_0^x \frac{3\,t^2+7}{t^4+4\,t^2+3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t^2+7}{t^2+3}\, dt$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Докажете, че:

а) *(5 точки)* $F(x)$ е нечетна;

б) *(5 точки)* $F(x)$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$;

в) *(5 точки)* $F(x)$ е вдлъбната в интервала $[0\,,\ +\infty)$;

г) *(5 точки)* съществува границата $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.