1 Реални числа

1.1 Поле

Множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа е **поле**, което означава, че в него са зададени две операции

- събиране — означавано стандартно $+$
- умножение — означавано стандартно $.$

1.1.1 Поле — аксиоми

Сумата и произведението на две числа също е число, като:

- П1 операциите са асоциативни

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a.(b.c) = (a.b).c$$

- П2 операциите са комутативни

$$a + b = b + a \qquad a.b = b.a$$

- П3 имат неутрален елемент

$$0 + a = a \qquad 1.a = a \qquad 0 \neq 1$$

- П4 съществува противоположен елемент
  за всяко a има x, за което $a + x = 0$
  за всяко $a \neq 0$ има x, за което $a.x = 1$
- П5 операциите са „свързани“

$$a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$$

1.1.2 Означения и някои свойства

- Означения
  - $-a$ – противоположен на a, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ – реципрочен на a
  -
$$\sum_{k=1}^{n} a_k\,, \quad \prod_{k=1}^{n} b_k$$
  -
$$na = \sum_{k=1}^{n} a\,, \quad b^n = \prod_{k=1}^{n} b$$
- Някои свойства
  - неутралните елементи са единствени

– противоположният и реципрочният са единствени

– $a.0 = 0,\ -a = (-1).a,\ (-1).(-1) = 1,\ (-a).(-a) = a.a$

- Пример

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (n+1) = n\,(n+1)$$

1.2 Наредено поле

Горните условия не определят еднозначно $\mathbb{R}$. Има важни полета с краен брой елементи. Ако p е просто число (например 2017), множеството от остатъците по модул p е поле.

1.2.1 Наредено поле — аксиоми

Множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа е **наредено поле**, което означава, че в него е зададено подмножество $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ (положителни числа) със свойствата

- Н1 сумата на положителни числа е положително $a \in \mathcal{P}\,,\ b \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad (a+b) \in \mathcal{P}$
- Н2 произведението на положителни числа е положително $a \in \mathcal{P}\,,\ b \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad (a.b) \in \mathcal{P}$
- Н3 $0 \notin \mathcal{P}$ – нулата не е положително число

- H4 за всяко $a \neq 0$ е изпълнено поне едно от двете 1) $a \in \mathcal{P}$, 2) $-a \in \mathcal{P}$

1.2.2 Важни следствия

Означаваме $a < b$ $(b > a)$ $\iff$ $(b - a) \in \mathcal{P}$.

- За всяко $a \in \mathbb{R}$ е изпълнено точно едно от трите
  1) $a < 0$, 2) $a = 0$, 3) $0 < a$
- $0 < 1$
- За всеки две числа $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ е изпълнено точно едно от трите
  1) $a < b$, 2) $a = b$, 3) $b < a$
- От $a < b$ и $b < c$ следва $a < c$
- Всяко наредено поле е безкрайно.

Означение $a \leq b$ $\iff$ $a < b$ или $a = b$

1.2.3 Аритметични действия и неравенства

- От $a < b$ $(a \leq b)$ и $c < d$ $(c \leq d)$ следва $a + c < b + d$ $(a + c \leq b + d)$.

- $0 < a.a\,(= a^2)$ за всяко $a \neq 0$
- От $a < b$ $(a \leq b)$ и $0 < c$ следва $a.c < b.d$ $(a.c \leq b.d)$.
- От $0 \leq a \leq b$ и $0 \leq c \leq d$ следва $a.c \leq b.d$.

1.2.4 Първи дефиниции

- Две нови „операции“
  $\max(a,\, b)$ и $\min(a,\, b)$
- Нова функция
  абсолютна стойност $|x| = \max(x,\, -x)$
- Неравенство на триъгълника $|a+b| \leq |a| + |b|$
- Неравенство на триъгълника $||x| - |y|| \leq |x-y|$
- Интервали
  - $(a, +\infty) = \{x\,:\,a < x\}$ $((-\infty, a) = \{x\,:\,x < a\})$
  - $[a, +\infty) = \{x\,:\,a \leq x\}$ $((-\infty, a] = \{x\,:\,x \leq a\})$
  - $(a, b) = (a, +\infty) \cap (-\infty, b) = \{x\,:\,a < x < b\}$ $(a < b)$

– $[a, b] = [a, +\infty) \cap (-\infty, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ $(a \leq b)$

1.3 Принцип за непрекъснатост

1.3.1 Реалните числа не са ЕДИНСТВЕНОТО наредено поле

Примери

- Рационалните числа $\mathbb{Q}$. Но:

  а) дължината на диагонала на квадрат с дължина на страната 1 не е рационално число

  б) отношението на дължината на окръжност към дължината на диаметъра ѝ не е рационално число

- Полето от рационални функции с цели коефициенти. Това наредено поле не е Архимедово.

1.3.2 Ограничено множество

- $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ се нарича ограничено отгоре, ако има число $c \in \mathbb{R}$, за което $a \leq c$ за всяко $a \in A$. c се нарича горна граница за A; ако $c \leq c_1$, то c_1 също е горна граница за A; множеството от горните граници е ограничено отдолу.

- $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ се нарича ограничено отдолу, ако има число $b \in \mathbb{R}$, за което $b \leq a$ за всяко $a \in A$.

- A е ограничено, ако за подходящо число C: $|a| \leq C$ за всяко $a \in A$.

- $a_0 \in A$ е най-голям (най-малък) елемент, ако $a \leq a_0$ $(a \geq a_0)$ за всяко $a \in A$.

- Най-малкият елемент (когато съществува) на множеството от горните граници на множеството A (непразно и ограничено отгоре) се нарича точна горна граница на A; означава се с $\sup A$.

- Най-големият елемент (когато съществува) на множеството от долните граници на множеството A (непразно и ограничено отдолу) се нарича точна долна граница на A; означава се с $\inf A$.

1.3.3 Принцип за непрекъснатост – формулировка

- Всяко непразно ограничено отгоре множество от реални числа има точна горна граница.
- (дуално) Всяко непразно ограничено отдолу множество от реални числа има точна долна граница.

1.3.4 Теорема на Кантор

- Често използвано твърдение

  Ако A и B са ограничени множества от числа, $A \subset B$, то $\inf B \leq \inf A$ и $\sup A \leq \sup B$.
- Теорема на Кантор
  - Нека $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ и $\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}$ са такива, че $a \leq b$ за всяко $a \in A$ и всяко $b \in B$. Тогава съществуват $c_1 \leq c_2$, за които $a \leq c_1$ за всяко $a \in A$ и $c_2 \leq b$ за всяко $b \in B$.
  - (единственост) Ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват $a \in A$ и $b \in B$ с $b - a \leq \varepsilon$, то $c_1 = c_2$.

2 Естествени числа

Псевдо история $\quad \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$

2.1 Индуктивни множества

- Нека $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ се нарича индуктивно, ако
  1) $1 \in X$; 2) от $x \in X$ следва $(x+1) \in X$.
- Примери $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathcal{P}$, $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x\}$.
- $\mathbb{N}$ е сечението на всички индуктивни множества; то е индуктивно; то е „най-малкото“ индуктивно множество.
- $\mathbb{N}$ не е ограничено отгоре в $\mathbb{R}$ (принцип на Архимед).

2.2 Математическа индукция

Математическата индукция е метод на доказателство, основан на твърдението:

За всяко $n \in \mathbb{N}$ е дадено твърдение $\mathcal{T}(n)$. Ако

I) $\mathcal{T}(1)$ е вярно и

II) за всяко $n \in \mathbb{N}$ от $\mathcal{T}(n)$ следва $\mathcal{T}(n+1)$,

то всички твърдения $\mathcal{T}(n)$ са верни (за всяко $n \in \mathbb{N}$ твърдението $\mathcal{T}(n)$ е вярно).

2.2.1 Примери

- Всяко непразно множество от естествени числа има най-малък елемент.
- Ако $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ е строго растяща редица от естествени числа (т.е. $n_k \in \mathbb{N}$), то всеки член на редицата не е по-малък от номера си (т.е. $n_k \geq k$ за всяко $k \in \mathbb{N}$).
- (Неравенство на Бернули) Нека $x \geq -1$ е реално число. За всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $(1+x)^n \geq 1+nx$.
- Биномна формула на Нютон:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n\,(n-1)}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{k} x^k + \cdots + x^n$$

2.2.2 Рекурентни (индуктивни) дефиниции

Както се вижда от примерите, доказателство на стъпката се опира на връзката на твърдението $\mathcal{T}(n+1)$ с предходните твърдения. Когато тази връзка е зададена като дефиция на обектите имаме рекуретна (индуктивна) дефиниция на (редица от) обекти.

Малко по-точно, рекурентната дефиниция се състои от две:

- „база“ — дефиниция на обекта $\mathcal{O}(1)$
- „стъпка“ — дефиниция на обекта $\mathcal{O}(n+1)$ чрез предходните обекти
- Примери
  - факториел (произведението на първите n естествени числа)
    I) $0! = 1\,;$ II) $(n+1)! = (n+1)\,.n!$
  - двоен факториел (произведението на първите n четни естествени чисала)
    I) $0!! = 1\,;$ II) $(2\,(n+1))!! = 2\,(n+1)\,.\,(2n)!!$, имаме (след групиране на множителите) $(2n)!! = 2^n.n!$
  - двоен факториел (произведението на първите n нечетни естествени чисала)
    I) $1!! = 1\,;$ II) $(2n+1)!! = (2n+1)\,.\,(2n-1)!!$
  - биномни коефициенти (триъгълник на Паскал)
    I) $\binom{0}{0} = 1$
    II) $\binom{n+1}{0} = 1\,,$ $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ за $1 \le k \le n\,,$ $\binom{n+1}{n+1} = 1$

3 Рационални числа

3.1 Цели числа

- за $X \subset \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$ полагаме $aX = \{ax \,:\, x \in X\}$
- за $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$ полагаме $X + Y = \{x + y \,:\, x \in X\,,\ y \in Y\}$
- примери: четни числа $2\mathbb{N}$, нечетни числа $2\mathbb{N} + \{1\}$
- цели числа $\mathbb{Z} = (-1)\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$
- $\mathbb{Z}$ не е ограничено отгоре в $\mathbb{R}$, всяко $\emptyset \neq X \subset \mathbb{Z}$, ограничено отгоре, има най-голям елемент
- $\mathbb{Z}$ не е ограничено отдолу в $\mathbb{R}$, всяко $\emptyset \neq X \subset \mathbb{Z}$, ограничено отдолу, има най-малък елемент
- ако $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ и $b - a > 1$, то съществува $m \in \mathbb{Z}$ такова, че $a < m < b$, ($m \in (a, b)$,)
- множеството $\mathbb{Z}$ е изброимо

3.2 Рационални числа

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \,:\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

- $\sqrt{2} \notin Q$

  ако $\sqrt{2} \in Q$, то $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, като можем да считаме, че най-много едното е четно

  от равенството $2n^2 = m^2$ следва, че m е четно $(m = 2k)$, но тогава $n^2 = 2k^2$, т.е. и n е четно
- Съществуват положителни ирационални числа a и b, за които a^b е рационално

  два случая $2^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ и $2^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$
- множеството $\mathbb{Q}$ е изброимо
- Във всеки отворен интервал има рационални числа
- множеството $\mathbb{R}$ НЕ е изброимо
- Във всеки отворен интервал има ирационални числа