Контролно 1, Анализ 1, КН, 2 поток

30.11.2012 г.

Тема 1

Зад.1 Да се пресметне границата $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}),\ n\in\mathbb{N}$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}\dfrac{n+1+n-1+2\sqrt{n^2-1}-4n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}+2\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}\dfrac{2\sqrt{n^2-1}-2n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}+2\sqrt{n}} =$

$= 2\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}\dfrac{n^2-1-n^2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}+2\sqrt{n})(\sqrt{n^2-1}+2n)} = -2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n.\sqrt{n}}{(\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1-1/n}+2)\sqrt{n}(\sqrt{1-1/n^2}+1)n} = -2\cdot\dfrac{1}{4.2} = -\dfrac{1}{4}$ □

Зад.2 Да се намери производната на функцията $f(x)=(-x+e^{2x})^{\cos x^3}$

Решение: логаритнуваме: $\ln f(x) = \cos x^3 \ln(-x+e^{2x})$. Диференцираме:

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -3x^2\sin x^3\ln(-x+e^{2x}) + \cos x^3\dfrac{2e^{2x}-1}{e^{2x}-x} \Rightarrow f'(x) = (-x+e^{2x})^{\cos x^3}\left(-3x^2\sin x^3\ln(-x+e^{2x})+\cos x^3\dfrac{2e^{2x}-1}{e^{2x}-x}\right)$

Зад.3 Да се пресметне границата $\lim\limits_{x\to+0}(1/x)^{\sin x}$

Решение: За $u(x)=(1/x)^{\sin x}$ пресмятаме $\lim\limits_{x\to+0}\ln(u(x)) = \lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln(1/x) = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(1/x)}{(1/\sin x)} \overset{\text{Л.}}{=}$

$\overset{\text{Лоп.}}{=} \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{(\ln(1/x))'}{(1/\sin x)'} = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{-(1/x^2)x}{-\cos x(\sin x)^{-2}} = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin^2 x}{x\cos x} = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{\cos x} = 1.0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+0} u(x) = e^0 = 1$ □

Зад.4 Да се изследва и начертае графиката на функцията $f(x)=\dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$

Решение: $D=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ – дефин. област на $f(x)$; $f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$, т.е. $x=2$ е вертикална асимптота. Още $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{4}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{4}x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x-1)}{(x-2)^2}=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{4}x+1$ е наклонена асимптота.

$f'(x)=\dfrac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}$; $f''(x)=\dfrac{6x}{(x-2)^4}$. Така, последователно намираме, че $f(x)$ има единствен екстремум в т. $x=6$, който е локален минимум: $(f'(6)=0,\ f''(6)>0)$ $f(6)=\dfrac{27}{8}$. Също така $f'(x)>0$ за $x\in(-\infty,2)\cup(6,+\infty)$, т.е. там $f(x)$ е растяща, докато $f'(x)<0$ за $x\in(2,6)$, т.е. там $f(x)$ е намаляваща. Виждаме още, че в $x=0$ допирателната към $f(x)$ е абсцисната ос. За $f''(x)$ имаме $f''(0)=0$ ($x=0$, единствен корен на $f''(x)$), като $f''(x)\geq 0$ за $x\geq 0$ и $f''(x)\leq 0$ за $x\leq 0$, т.е. $x=0$ е единствена инфлексна точка, за $x\in(-\infty,0)$ $f(x)$ е вдлъбната и при $x\to-\infty$, клони към наклонената асимптота отдолу. При $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ $f(x)$ е изпъкнала и при $x\to+\infty$, $f(x)$ клони към наклонената асимптота отгоре