1. Основни правила при операции с множества. Изброими и неизброими множества

1. За всяко множество A е в сила $\varnothing \subset A$
2. Всяко множество A се съдържа в себе си $A \subseteq A$
3. Ако A_1 и A_2 са две множества, за които $A_1 \subset A_2$ и $A_2 \subset A_1$, то следва, че $A_1 = A_2$
4. Ако за три множества A_1, A_2 и A_3 са в сила включванията $A_1 \subset A_2$ и $A_2 \subset A_3$, то $A_1 \subset A_3$
5. $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, като $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{x : x \in A_1$ или $x \in A_2$ или $x \in A_3 \}$
6. $A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, като $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{x : x \in A_1$ или $x \in A_2$ или $x \in A_3 \}$
7. Комутативен закон: $A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$; $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$
8. Дистрибутивен закон: $A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)$
9. Ако $A_1 \subset A_2$, то $A_1 \cup A_2 = A_2$
10. $A_1 \subset A_2$ тогава и само тогава когато $A_1 \cup A_2 = A_2$
11. Ако $A_1 \subset A_2$ и A са произволни множества, то $A_1 \cap A \subset A_2 \cap A$ и $A_1 \cup A \subset A_2 \cap A$
12. Ако $A_1 \subset A_2$ и $A_1 \subset A_3$, то $A_1 \subset A_2 \cap A_3$
13. Ако $A_1 \subset A_3$ и $A_2 \subset A_3$, то $A_1 \cup A_2 \subset A_3$
14. $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ и $A_1 \cap A_2 \subset A_2$
15. $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ и $A_2 \subset A_1 \cup A_2$
16. $A_1 \cap A = A, A \cup A = A, A \quad \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$

Множеството A се нарича изброимо ако $A \sim N$. Ако A е безкрайно и не е изброимо, то A се нарича неизброимо. Ако A е безкрайно и не е изброимо, то A се нарича неизброимо.

2. Абсолютна стойност. Ограничени множества – принцип за непрекъснатост

Под абсолютна стойност на реалното число x ще разбираме неотрицателното число $|x| = \max(x, -x)$.

За всеки две реални числа x и y са валидни следните свойства:

1) $|x+y| \le |x| + |y|$
2) $|x-y| \ge |x| - |y|$
3) $|x||y| = \| x| - |y\|$
4) $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|, y \ne 0$

Едно множество A от реални числа се нарича ограничено отгоре, ако съществува такова число $a \in R$, че за всяко $x \in A$ е изпълнено неравенството $x \leq a$. Числото a се нарича горна граница на множеството A. Аналогично, числото b се нарича долна граница на множеството A ако за всяко $x \in A$ е изпълнено неравенството $x \geq b$.

$S_A = \sup\{x \in R : x \in A\}, I_A = \inf\{x \in R : X \in A\}$

sup = supremum
inf = infimum

Основно твърдение тук е принципът за непрекъснатост, който гласи че всяко ограничено отгоре множество от реални числа притежава точна горна граница.

Множеството A е ограничено тогава и само тогава, когато съществува такова число $m > 0$, че за всяко $x \in A$ е изпълнено $|x| \leq m$.

3. Околности, точки на сгъстяване. Теорема на Bolzano-Weierstrass

Множеството $U \subset R$ се нарича околност на точка $x_0 \in R$, ако съществува ε-околност на x_0, която се съдържа в U, т.е. $U_\varepsilon(x_0) \subset U$.

Ако U и V са околности на точката $x_0 \in R$, то сечението $U \cap V$ е също околност на x_0.

Казваме, че множеството A е гъсто в B, ако за всяка точка $x \in B$ и за всяка околност $U = U(x)$ имаме $U \cap A \neq \varnothing$. Едно множество A се нарича навсякъде гъсто, ако е гъсто в R. С A ще означаваме някое множество от вида:

$(a,b),[a,b],(a,b],[a,b),(-\infty,a],[a,\infty), R = (-\infty,\infty).$

Една точка $a \in R$ се нарича точка на сгъстяване за едно множество $A \subset R$, ако всяка околност на точката съдържа безкрайно много елементи от A.

Bolzano-Weierstrass – Всяка ограничена редица има поне една точка на сгъстяване.

Но тук трябва да се каже, че има и неограничени редици с точка на сгъстяване.

4.Сходимост на редици. Монотонни редици. Критерий на Cauchy

Една редица ще наричаме сходяща, ако е ограничена и има само една точка на сгъстяване a. Числото a се нарича граница на редицата и се изполват означенията:

$\lim\limits_{x\to\infty} a_n = a, a_n \to a$ при $n \to \infty, a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ или $a_1 a_2, \ldots a_n, \ldots \to a$

Редицата е сходяща към точката а тогава и само тогава, когато във всяка околност на а се съдържат всички елементи на редицата с изключение на краен брой от тях.

Една редица се нарича монотонно растяща ако за всеки два последователни елемента на редицата е изпълнено неравенството $a_n \leq a_{n+1}$. Ако $a_n < a_{n+1}$ редицата се нарича строго растяща. По същия начин редицата е монотонно намаляваща ако $a_n \geq a_{n+1}$ и строго намаляваща ако $a_n > a_{n+1}$.

Всяка монотонно растяща и ограничена отгоре редица е сходяща.

Всяка монотонно намаляваща и ограничена отдолу редица е сходяща.

Критерий на Cauchy – Редицата $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ е сходяща тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число v, че за всяко $n > v$ и $p > 0$ е изпълнено неравенството:

$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$

Ако една редица е сходяща към точката а, то точката а е нейната единствена точка на сгъстяване. В сила е и следното твърдение, което може да се счита като обратно.

6.Аритметични действия със сходящи редици

Ако

$a_1, a_2, ..., a_n, ... \to a$

$b_1, b_2, ..., b_n, ... \to b$

са две сходящи редици съответно с граници a и b . Тогава:

1) Редицата $a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n, ...$ е сходяща и $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}, ...$

2) Редицата $a_1 b_1, a_2 b_2, ..., a_n b_n, ...$ е сходяща и $\lim\limits_{x \to \infty} (a_n b_n) = ab$

3) Ако за редицата са изпълнени условията $a_n \neq 0$ и $a \neq 0$ за всяко $n \in N$, то редицата: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}, ...$ е сходяща и $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{a}$

От тук следват три следствия:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} (a_n + b) = \lim\limits_{x \to \infty} a_n + b = a + b$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} (b a_n) = b \lim\limits_{x \to \infty} a_n = ab$

3. $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \lim\limits_{x \to \infty} (a_n - b) = \lim\limits_{x \to \infty} a_n - \lim\limits_{x \to \infty} b_n = a - b$

4. Ако b_n и $b \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} a_n}{\lim\limits_{x \to \infty} b_n} = \frac{a}{b}$

Ако двете редици $a_1, a_2, ..., a_n, ... \to \ell$ и $b_1, b_2, ..., b_n, ... \to \ell$ са сходящи и имат една и съща граница и редицата $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ удовлетворява условието $a_n \leq c_n \leq b_n$, то тя също е сходяща и $\lim\limits_{x \to \infty} c_n = \ell$.

7. Неограничени числови редици

Редицата $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ се нарича неограничено растяща, ако за всяко реално число $E > 0$ съществува такова число v, че при всяко $n > v$ да имаме $a_n > E$. Редицата се нарича неограничено намаляваща, ако за всяко $E < 0$ съществува v, такова че при всяко $n > v$ да е изпълнено $a_n < E$

.

8. Числови функции – начини на задаване. Ограничени, монотонни, периодични, четни, нечетни функции. Примери – sinx, cosx, tgx и cotgx

Ако множествата A и B се състоят от реални числа, изображението f се нарича числова функция и се означава $f(x)$. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ се наричат равни, ако дефиниционната област A е обща и за всяко $x \in A$ имаме $f(x) = g(x)$. Ако $A_0 \subset A$ е подмножество на A и функцията $f_0(x)$ е дефинирана така че $f_0(x) = f(x)$ при $x \in A_0$, казваме че $f_0(x)$ е рестрикция на $f(x)$. Обратно $f(x)$ се нарича продължение на $f_0(x)$ върху „по-голямото" множество A.

Графика на една f ще наричаме множеството от наредени двойки $(x, f(x))$ когато $x \in A$, записваме го така:

$\partial_f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$

Нагледно една крива представлява графика на функция, ако удовлетворява теста на вертикалната права, тоест всяка права $\| Oy$, пресича кривата най-много в една точка.

$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при g(x) $\neq$ 0) , се наричат съответно

сума, разлика, произведение и частно на $f(x)$ и $g(x)$.

Функцията f се нарича ограничена отгоре върху A, ако съществува $const\ c$, такава че за всяко $x \in A$ е изпълнено $f(x) \le c$.

Функцията f е ограничена отдолу, ако съществува $const\ p$, такава че $f(x) \ge p$ за всяко $x \in A$.

Ако $f(x)$ е ограничена отгоре и отдолу едновременно, то тя се нарича ограничена.

Една функция $f : D_f \to B$ се нарича монотонно растяща (монотонно намаляваща) ако за всеки две точки $x_1, x_2 \in D_f$, за всяко $x_1 < x_2$, е изпълнено: $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$. Ако $f(x_1) < f(x_2)$ (съответно $f(x_1) > f(x_2)$) функцията f се нарича строго растяща (строго намаляваща).

Примери:

$y(x) = \sin x$ е строго растяща при $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$y(x) = \cos x$ е строго намаляваща при $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ $k \in Z$

$y(x) = tgx$ е строго растяща при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $k \in Z$

$y(x) = cotgx$ е строго намаляваща при $x \in (\pi k, \pi k + \pi), k \in Z$

Функцията $f(x)$ е четна, ако за всяко $x \in D_f$ е изпълнено $f(x) = f(-x)$ и нечетна – ако $f(x) = -f(-x)$

Едно число $T > 0$ се нарича период на една функция $f(x): D_f \to B$,ако за всяко $x \in D_f$ стойностите $x - T$ и $x + T \in D_f$ и е изпълнено равенството π $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$. Функцията, която има период T се нарича T-периодична.

Примери на периодични функции са $\sin x$ и $\cos x$ с период 2π, а също tgx и $\cot gx$ с период π.

9. Непрекъснатост на функция в точка и в множество. Свойства на непрекъснатите функции. Примери

Heine – казваме че функцията $f(x): D \to R$ е непрекъсната в точката $x_0 \in D$, ако за всяка сходяща редица от стойности на аргумента $x_1, x_2, ..., x_n, ... \to x_0, x_n \in D$, редицата $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ е сходяща.

Cauchy – казваме че $f(x)$ е непрекъсната в $x_0 \in D$, ако за всяко положително число $\varepsilon > 0$, можем да намерим такова число $\delta > 0$, че за всяко $x \in U_\delta(x_0)$ да бъде изпълнено $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$.

Всяка функция, чиято дефиниционна област съдържа изолирана точка е непрекъсната в тази точка.

Една функция $f(x): D \to R$ се нарича непрекъсната в множеството D, ако е непрекъсната във всяка точка от D.

Ако функцията $f(x): D \to R$ е дефинирана върху отвореното множество $D \subset R$, непрекъсната е при $x = x_0 \in D$ и $f(x_0) > 0 \quad (f(x_0) < 0)$, то съществува $U_\delta(x_0)$, така че за всяко $x \in U_\delta(x_0)$ имаме $f(x) > 0 \quad (f(x) < 0)$.

Ако $f: D \to R$ е непрекъсната при $x = x_0$ и $f(x_0) > 0 \qquad (f(x_0) < 0)$, то съществува $U_\delta(x_0)$, така че от $x \in U_\delta(x_0) \cap D$ следва $f(x) > 0 \quad (f(x) < 0)$.

Нека $f(x), g(x): D \to B$ са непрекъснати в точката $x_0 \in D$ и нека $f(x_0) > g(x_0)$ $(f(x_0) < g(x_0))$, тогава съществува $U_\delta(x_0)$, така че за всяко $x \in U_\delta(x_0) \cap D$ имаме $f(x) > g(x)$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ $(f(x) < g(x)) \cdot$

10. Граница на функция в точка. Свойства. Примери

Функцията $f(x): D \to R$ има граница l в точката x_0, ако съществува продължение $F(x)$ на $f(x)$ върху $D \cup \{x_0\}$ като $F(x)$ е непрекъсната при $x = x_0$ и $F(x_0) = l$.

Границата на функцията f в точката x_0 е определена еднозначно.

Функцията $f(x)$ има граница l в точката x_0, ако за всяко $\varepsilon > 0$,съществува $\delta > 0$,така че при $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ да имаме $f(x) \in U_\delta(l)$

Функцията $f(x)$ има граница l в точката x_0 ,ако и само ако за всяка редица $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ която клони към x_0 , $x_n \in D, x_n \neq x_0$, съответната редица от функционалните стойности $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)...$ е сходяща и клони към l.

Нека x_0 е точка на сгъстяване за D, където $f, g : D \to R$. Тогава ако $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ и $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$, то :

1. $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$
2. $\lim_{x \to x_0}(f(x) - g(x)) = l_1 - l_2$
3. $\lim_{x \to x_0}(f(x)g(x)) = l_1 l_2$
4. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ при $g(x) \neq 0$ и $l_2 \neq 0$ при $x \in D$

Ако съществува $\delta > 0$, така че $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ при $x \in U_\delta(x_0)$, то от $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$ и $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$, следва $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

12.Специални свойства на непрекъснатите функции

Weierstrass – Всяка функция, която се дефинирана и непрекъсната върху един краен и затворен интервал $[a,b]$ е ограничена.

Ако $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната върху $[a,b]$,то тя достига точната си горна и точната си долна граница. С други думи съществуват точки x_1 и $x_2 \in [a,b]$ такива ,че $f(x_1) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = M$ и $f(x_2) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} = m$.

Cauchy - $f(x)$ Ако е дефинирана и непрекъсната върху $[a,b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то каквото и да бъде числото C ,заключено между $f(a)$ и $f(b)$, съществува поне едно число $\lambda \in [a,b]$, такова че $f(\lambda) = C$.

Множеството от стойностите на една непрекъсната функция дефинирана върху интервала $[a,b]$ е интервалът $[m, M]$, където $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ и $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Функцията $f(x) : D \to R$ се нарича равномерно непрекъсната върху множеството D, ако за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, така че за всеки две точки $x_1, x_2 \in D$ $arctgx : (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, за които $|x_1 - x_2| < \delta$ е изпълнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Осцилация на функцията $f(x)$ върху множеството D се нарича числото $\omega = M - m$, където $m = \inf\{f(x) : x \in D\}$.

Cantor – Ако $f(x) : [a,b] \to R$ е непрекъсната, то $f(x)$ е неравномерно непрекъсната върху множеството $[a,b]$.

Ако $f(x) : [a,b] \to R$ е непрекъсната , то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и такова подразделяне на интервала $[a,b]$ от точки $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, че щом $\max_k |x_k - x_{k-1}| < \delta$, то $\omega_k < \varepsilon$.

13. Обратни функции – обратни на тригонометричните функции

$\arcsin x : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, за която е изпълнено $\sin(\arcsin) = x$ при $x \in [-1,1]$ и $\arcsin(\sin x) = x$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.Нагледно графиката на $\arcsin x$ се получава след завъртане на координатната система на 90° и смяна на местата на x и y и отражение спрямо Oy. Изобщо обратната на $\sin x$ може да се избере по безбройно много причини във всеки един от интервалите $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right], k \in Z$. По-принцип $\arcsin x$ се разглежда само в интервала $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

По същия начин функцията $y(x) = \cos x : R \to [-1,1]$ има обратна $\arccos x : [-1,1] \to [0,\pi]$

$tgx : \bigcup_{k\in Z}\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) \to (-\infty, \infty)$ е $arctgx : (-\infty,\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

а на $cotgx : \bigcup_{k\in Z}(k\pi, \pi+k\pi) \to (-\infty,\infty)$ е $arc\cot gx : (-\infty,\infty) \to (0,\pi)$

14. Непрекъснатост на тригонометричните функции и техните обратни

Функцията $y(x) = \sin x : R \to [-1,1]$ е непрекъсната. Избираме произволно $x_0 \in R$. Тогава за всяко $x \in R$ имаме $\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}$.

Непрекъснатостта на $\cos x$ се установява по същия начин като се използва равенството $\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}$.

Функциите $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $cotgx = \frac{\cos x}{\sin x}$ са непрекъснати във всяка точка от дефиниционната си област.

16. Производна на функция в точка. Връзка между непрекъснатост и диференцируемост

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в някаква околност на точката x_0, тоест $D_f = U(x_0)$. Казваме че функцията $f(x)$ има производна в точката x_0, ако съществува границата $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x \neq 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, която ще означаваме с $f'(x_0)$.

Операцията на намиране производната на една функция се нарича диференциране.

Функциите $y(x) = C = const, y(x) = x^n (n \in N)$, $y(x) = \sin x, y(x) = \cos x, y(x) = a^x$, имат производни във всяка точка от дефиниционната си област.

Функциите $y(x) = \log_a x (a > 0)$ и $y(x) = x^a$ $(a \in R)$ b имат производни при всяко $x > 0$.

Ако функцията $f(x)$ има производна в точката, то тя е непрекъсната в точката x_0.

17. Едностранни производни. Диференциал на функция

Дясна производна на $f(x)$ в точката x_0 наричаме границата $\lim\limits_{\Delta x \to^+ 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f_+(x_0)$, ако съществува По същия начин дефинираме и лява производна $\lim\limits_{\Delta x \to^- 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f_-(x_0)$.

Ако $f(x)$ има производна в точката $x = x_0$, то тя има дясна и лява производна и $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Обратно ако съществуват дясна и лява производна и те са равни, т.е. $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, то $f(x)$ има производната $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Ако $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ казваме, че функцията $y = f(x)$ има в точката x_0 производна $+\infty$ и пишем $f'(x_0) = \infty$.

Ако $f'(x_0) = \infty$, то едностранните производни може да са $f'_+(x_0) = \infty$ и $f'_-(x_0) = \infty$.

Ако $f(x)$ е дефинирана в някаква област $U(x_0)$ има нарастване $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, което може да се представи във вида $\Delta y = A\Delta x + \Delta x \varphi(\Delta x)$, където $A = A(x_0)$ не зависи от Δx, а функцията $\varphi(\Delta x)$ има свойството $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, то $f(x)$ се нарича диференцируема в точката x_0. Произведението $A\Delta x$ се нарича диференциал на $f(x)$ в точката x_0 и се означава с $df(x_0)$ или dy.

Една функция $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 тогава и само тогава, когато има производна в точката x_0. Производната и диференциалът са свързани с равенството $df = f'(x_0)\Delta x$.

Казваме, че функцията $f(x)$ е диференцируема в дефиниционната си област, ако е диференцируема във всяка точка от нея.

18. Правила за диференциране

Ако $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в точката x_0, то такива са и $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $g(x)\neq 0$, като:

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x),$$
$$[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x),$$
$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Ако $f_k(x) \quad (k=1,...,n)$ са диференцируеми в точката x_0 и $C_k \quad (k=1,...,n)$ са константи, то:

$\left[\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(x)\right]' = \sum_{k=1}^{n} C_k f'_k(x)$ и в частност $\left[Cf(x)\right]' = Cf'(x)$.

$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ при $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ и $(\cot gx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ при $x \neq k\pi, k\in Z$.

Ако функциите $y=g(x)$ и $z=f(y)$ са диференцируеми съответно в точките x_0 и $y_0=g(x_0)$, то композицията $z(x)=f(g(x))$ е диференцируема в точката x_0 и

$$z'(x_0)=f'(y_0)g'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Диференциалът на една функция $y=f(x)$ има един и същи вид, а именно $dy=f'(x)dx$ при смяна на независимата променлива. Това свойство се нарича инвариантност на формата на първия диференциал.

19. Производни и диференциали от произволен ред. Формула на Leibniz

Нека функцията $f(x): D_f \to R$ има първа производна и е вътрешна точка за D_f. Тогава ако съществува границата $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x\neq 0}} \dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$ казваме, че има втора производна при $x=x_0$ и я означаваме с $f''(x_0)$.Или по-общо за всяко $n\in N$ имаме

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

Функцията която има производни за всяко $n\in N$, се нарича безкрайно диференцируема.

Формула на Leibniz – Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ имат производни до ред n (вкл.), то функцията $\omega(x)=u(x)v(x)$ има също производни до ред n (вкл.).

Диференциал на една функция наричаме израза, който е линейна част на нарастването: $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \varphi(\Delta x)\Delta x$ или както установихме $df = f'(x_0)dx$. Той се нарича още първи диференциал. Втори диференциал наричаме диференциала на първия диференциал, т.е.:

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = dxd(f'(x)dx) = dxf''(x)dx = f''(x)dx^2$$

Ако функцията $f(x)$ има производна от ред n, то под n-ти диференциал разбираме: $d^n f = d(d^{n-1}f) = f^{(n)}(x)dx^n$ или $y^n = \dfrac{d^n y}{dx^n}$

Свойства на n-тия диференциал:

1. $d^n(Au + Bv) = Ad^n u + Bd^n v$
2. $d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d^k u d^{n-k} v$

20. Основни теореми на диференциалното смятане. (Fermat, Rolle)

Казваме, че функцията $f(x)$ има в точката $x_0 \in D_f$ локален минимум (максимум) ако съществува такава $\delta-$околност на x_0 , $U_\delta(x_0) \subset D_f$, така че за всяко $x \in U_\delta(x_0)$ да е изпълнено $f(x) \geq f(x_0)$ $\quad (f(x) \leq f(x_0))$

Локалните максимуми и минимуми могат да се обединят с общия термин локални екстремуми.

Fermat – Ако функцията $f(x)$ има при $x_0 \in D_f$ локален екстремум и е диференцируема в x_0, то $f'(x_0) = 0$

Rolle – Нека една функция $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната върху интервала $[a,b]$. Нека освен това тя е диференцируема в (a,b) и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува поне една точка $\xi \in (a,b)$, такава, че $f'(\xi) = 0$.

21. Продължение. (Lagrange, Cauchy)

Lagrange – Нека функцията $f(x):[a,b] \to R$ е непрекъсната и диференцируема при $x \in (a,b)$. Тогава съществува поне една точка $\xi \in (a,b)$, за която $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$. Тази теорема често се нарича теорема за крайните нараствания. Тя може да се запише и във вида: $f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)$, където $b = x$, $a = x_0$, $0 < \theta = \dfrac{\xi - x_0}{x - x_0} < 1$.

Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в дефиниционния си интервал D, то условието $f'(x) = 0$ при $x \in D$ е необходимо и достатъчно $f(x)$ да бъде константа.

Cauchy – Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в интервала $[a,b]$ и са диференцируеми върху (a,b), то съществува такава точка $\xi \in (a,b)$, че

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi)$$

22. Формули на Taylor и Maclaurin

Нека $f(x)$ е произволен полином от степен не по-висока от n, т.е. $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Ако заместим x с x_0+h, получаваме $f(x_0+h)=a_0+a_1(x_0+h)+a_2(x_0+h)^2+...+a_n(x_0+h)^n$ и след разкриване на скобите се получава: $f(x_0+h)=b_0+b_1h+b_2h^2+...+b_nh^n$. След диференциране на равенството за $f(x_0+h)$ получаваме: $f'(x_0+h)=b_1+2b_2h+...+nb_nh^{n-1}$.

Нека функцията $f(x)$ има производни до ред $(n+1)$ при $x\in U_\delta(x_0)$. Тогава за всяко $x\in U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ съществува ξ принадлежаща на отворения интервал с краища x_0 и x, такава, че $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Ако $x_0=0$ формулата на Taylor се нарича формула на Maclaurin.

23. Разлагане на основните елементарни функции

Показателна функция $f(x)=e^x$ или $e^x=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}+o(x^n)$

Хиперболични функции $f(x)=shx$ и $f(x)=chx$

За $f(x)=shx$ имаме $shx=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+...+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}), x\to 0$

Тригонометрични функции $f(x)=\sin x$ имаме

$f^{(2n)}(x)=\sin x\left(x+\dfrac{\pi}{2}(2n)\right), f^{(2n)}(0)=0, f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$

И следователно за: $\cos x=x-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+...(-1)^n+\dfrac{x^2n}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$

Степенна функция $f(x)=(1+x)^a, a\in R^1$, тогава $(1+x)^a=\sum_{k=0}^{n}C_a^kx^k+o(x^n)$

Логаритмична функция $f(x)=\ln(1+x), x\in(-1,\infty)$, тогава

$\ln(1=x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+...+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n), x\to 0$

Маклореново разлагане на e^x с остатъчен член във формата на Lagrange:

$e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi$

24. Теореми на Лопитал

Теоремите на Лопитал дават възможност за намиране на граници на функции от вида $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в точка x_0, в която едновременно $f(x_0)=g(x_0)=0$.

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в интервала (x_0, b), $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} g(x) = 0$ и $g^{'}(x) \neq 0$ при $x \in (x_0, b)$. Ако съществува $\lim\limits_{x\to x_0+0} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = A$, то съществува и $\lim\limits_{x\to x_0+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми при $x > a$, като $g^{'}(x) \neq 0$ при $x > a$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Тогава ако съществува границата $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = A$, то съществува и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

25. Изследване на функции чрез производните им. Растене и намаляване. Локални и глобални ектремуми

$$f(x) = x - \sin x$$

Нейната производна $f^{'}(x) = 1 - \cos x > 0$ е положителна, което означава че е монотонно растяща, т.е. ако $x > 0$, то $f(x) > f(0)$, което означава, че $f(x) = x - \sin x > f(0) = 0$, $x - \sin x > 0$ или $\sin x < x$ при $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Но $\sin\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, т.е. $1 < \dfrac{\pi}{2}$. Понеже $\sin\dfrac{\pi}{2}$ е най-голямата стойност на $\sin x$, то и при $x > \dfrac{\pi}{2}$ ще имаме $\sin x < x$. Окончателно $\sin x < x$ при $x > 0$.

Точките в които производната на една функция е равна на 0, се наричат стационарни точки, а тези, в които функцията е непрекъсната, а производната £ е равна на 0 или не съществува, се наричат критични точки.

Точката x_0 се нарича точка на строг максимум (минимум), ако съществува $U_\delta(x_0)$, така че за всяко $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ е изпълнено $f(x) < f(x_0)$ $\quad (f(x) > f(x_0))$. Точките, в които $f(x)$ има максимум или минимум, се наричат екстремни точки.

Нека функцията $f(x)$ е диференцируема при $x \in U_\delta(x_0)$ и е непрекъсната в точката x_0. Ако $f^{'}(x)$ си мени знака от – към + при прехода през x_0, то x_0 е точка на строг минимум. Ако $f^{'}(x)$ си мени знака от + към -, то x_0 е точка на строг максимум.

Нека x_0 е стационарна точка на $f(x)$, т.е. $f^{'}(x) = 0$ и нека съществува $f^{''}(x_0) = 0$ и $f^{''}(x) = 0$ е непрекъсната при $x = x_0$, тогава:

1) ако $f^{''}(x0) > 0$, то x_0 е точка на строг минимум;

2) ако $f^{''}(x0) < 0$, то x_0 е точка на строг максимум.

26. Продължение – изпъкналост, вдлъбнатост, инфлексни точки

Ако за всеки две точки $x_1, x_2 \in (a, b)$ е изпълнено неравенството

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} f$ се нарича вдлъбната, а в случай на строго неравенство – строго вдлъбната. Ако $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} f$ се нарича изпъкнала (или строго изпъкнала).

Ако съществува $\delta > 0$ така, че в единия от интервалите $(x_0-\delta, x_0), (x_0, x_0+\delta)$ $f(x)$ е изпъкнала, а в другия – вдлъбната, то x_0 се нарича инфлексна точка.

Нека x_0 е инфлексна точка за $f(x)$. Ако $f''(x)$ съществува в някаква околност $U(x_0)$ и $f''(x)$ е непрекъсната в x_0, то $f''(x)=0$.

Ако $f(x)$ е непрекъсната в x_0 и $f''(x)$ си сменя знака при прехода през x_0, то x_0 е инфлексна точка.

Ако $f''(x)=0$ и $f'''(x)\neq 0$, то x_0 е инфлексна точка за $f(x)$.

27. Продължение. Асимптоти

Вертикална асимптота – ако е изпълнено поне едно от условията $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\pm\infty$, то правата с уравнение $x=x_0$ се нарича вертикална асимптота към графиката на $y=f(x)$.

Наклонена асимптота – правата $y=kx+n$ се нарича дясна асимптота за функцията $y=f(x)$ ако съществува границата $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx-n]=0$. Когато $x\to-\infty$, говорим за лява асимптота. Ако $k\neq 0$ асимптотата е наклонена, а ако $k=0$ - хоризонтална.

Правата $y=kx+n$ е асимптота към графиката на $y=f(x)$ при $x\to\infty$ тогава и само тогава, когато съществуват границите $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=n$

28. Неопределен интеграл – основни свойства. Таблични интеграли

Нека функциите $f(x)$ и $F(x)$ са дефинирани в (a,b). Ако $F'(x)$ съществува и за всяко $x\in(a,b)$ имаме $F'(x)=f(x)$, то функцията $F(x)$ се нарича примитивна на $f(x)$.

Ако $F_1(x)$ и $F_2(x)$ са две примитивни на $f(x)$ в интервала (a,b), то за всяко $x\in(a,b)$ е изпълнено $F_1(x)=F_2(x)+C$, където C е произволна константа.

Съвкупността от всички примитивни на функцията $f(x)$ в някакъв интервал D се нарича неопределен интеграл от функцията $f(x)$ и се пише $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Операцията на намиране на неопределен интеграл на дадена функция се нарича интегриране. Интегрирането е операция обратна на диференцирането.

Таблични интеграли:

1) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$ 2) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ 3) $\int e^x dx = e^x + C$

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$ 5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6 $\int \cos x dx = \sin x + C$ 7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ 8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -cotgx + C$

9) $\int shxdx = chx + C$ 10) $\int chxdx = shx + C$ 11) $\int \dfrac{1}{ch^2 x} dx = thx + C$

12) $\int \dfrac{1}{sh^2 x} dx = -cothx + C$ 13) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$

14) $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$ 15) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$

Свойства:

1) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$ 2) $\int dF(x) = F(x) + C \Rightarrow \int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$

3) Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат примитивни в някакъв интервал, то за всеки $\alpha, \beta \in R$ такива, че $\alpha\beta \neq 0$, функцията $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ също има примитивна и $\int [\alpha f(x) + \beta f(x)] dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.

29. Интегриране, чрез внасяне под знака на диференциала

Нека функцията $f(u)$ има примитивна в D_f, а функцията $\varphi(x)$ е диференцируема в D_φ и $\varphi : D_\varphi \to D_f$. Тогава функцията $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ има неопределен интеграл в D_φ и ако положим $F(u) = \int f(u)du$, то имаме $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C$

.

30. Интегриране, чрез субституция. Интегриране по части

$f(x)dx = f[\varphi(t)]\, d\varphi(t) = f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)dt$

Означаваме с $u(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$, откъдето имаме $f(x)dx = u(t)dt$. Нека $U(t)$ е примитивна за $u(t)$. Следователно $\int u(t)dt = U(t) + C$, т.е.

$I = \int f(x)dx = \int u(t)dt = U(t) + C = U[\omega(x)] + C$

Интегриране по части:

$\int (uv)' dx = \int u'vdx + \int uv' dx + C$, ако причислим C към интеграла $\int (uv)' dx$, имаме $uv = \int u' dx + \int uv' dx$ или $\int u' dx = uv - \int uv' dx$, като последното може да се запише и така: $\int vdu = uv - \int udv$, което се нарича формула за интегриране по части.

31. Интегриране на рационални функции

Интегралите от рационални функции представляват много важен клас ,понеже почти всички останали интеграли по-нататък се свеждат към тях с помощта на подходящи субституции. Както е известно рационалните функции са тези, които са частно от два полинома ,т.е. $\int R(\sin x,\cos x)dx \ f(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, където $P_m(x)$ е полином от степен m, $Q_n(x)$ - от степен n. Коефициентите на $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ са реални числа. Засега ще предположим, че $m<n$ и в този случай ще казваме, че $f(x)$ е правилна дроб.

32. Интегриране на някои класи ирационални функции

Интеграли от вида $\int R\left(x,\left(\dfrac{ax+b}{ch+d}\right)^{r-1},...,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx$, където $r_k\in Q(k=1,...,n), a,b,c,d\in R^1, ad-bc\neq 0$. В този случай се полага $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^p$, където p е общият знаменател на рационалните числа $r_1,r_2,...,r_n$.

33. Ойлерови субституции. Дигеренциален бином

Интеграли от вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, където $a\neq 0, b^2-4ac\neq 0$. Тези интеграли се свеждат до интеграли от рационални функции чрез така наречените Ойлерови субституции;

1) ако $a>0$, полагаме $\sqrt{ax^2+bx+c=}\pm t\pm\sqrt{a}x$;

2) ако $c>0$, полагаме $\sqrt{ax^2+bx+c=}\pm xt\pm\sqrt{c}$

3) ако $b^2-4ac>0$ полагаме $\sqrt{ax^2+bx+c=}\pm t(x-\alpha)$,където α е единият от корените на $ax^2+bx+c=0$. Изборът на знаците е в зависимост от конкретната задача.

Изразът $x^m\left(a+bx^n\right)^p$ където m,n и p са рационални числа, а числата $a,b\in R$ са различни от 0, се нарича диференциален бином.

1) Числото p е цяло, полагаме $x=t^2$

2) Числото $\dfrac{m+1}{n}$ е цяло, полагаме $a+bx^n=t$

3) Числото $\dfrac{m+1}{n}+p$ е цяло, полагаме $t=\dfrac{a+bx^n}{x^n}$

34. Интегриране на рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$

$R(u,v)=\frac{u^2-4uv+3u^2v-2}{u^4+v^4+3^2v^2+3u-v+2}$. Ако в една такава функция u е заместено с $\sin x$, а v - с $\cos x$, то получаваме рационална функция от тригонометричните функции $\sin x$ и $\cos x$. И така интеграла от вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$ се привеждат към интеграли от рационална функция чрез субституцията $t=tg\frac{x}{2}$. Тъй като $\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, то $\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},x=2arctgt,dx=\frac{2}{1+t^2}dt$. Ако подинтегралната функция $R(u,v)$ удовлетворява допълнителни условия, то рационализирането на $\int R(\sin x,\cos x)dx$ става по-лесно със следните субституции:

1) Ако $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ полагаме $T>0$ $t=\cos x$.

2) Ако $R(\sin x,-\cos)=-R(\sin x,\cos x)$ полагаме $t=\sin x$

3) Ако $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ полагаме $t=tgx$

35. Определен интеграл – интеграл на Риман

Изразът $\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ се нарича интегрална сума на Риман за $f(x)$, съответстваща на разделянето (σ).

Функцията $f(x)$ се нарича интегрируема по Риман върху $[a,b]$, ако съществува число I със следното свойство: за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ така, за всяко разделяне (σ) на $[a,b]$ за което $h(\sigma)<b$ е изпълнено $\left|\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$ при всеки избор на точките $\xi_i\in[x_i,x_i+1](i=0,1,...,n-1)$. Числото I се нарича определен интеграл на Риман и се означава $\int_a^b f(x)dx$. С други думи $\int_a^b f(x)dx=\lim_{h(\sigma)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$.

Ако $f(x)$ е интегрируема по Риман върху интервала $[a,b]$, то тя е ограничена върху $[a,b]$.

36. Суми на Дарбу – свойства

$S(\sigma)=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i,s(\sigma)=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i$. Числата $S(\sigma)$ и $s(\sigma)$ се наричат съответно голяма и малка сума на Дарбу, съответстващи на разделянето (σ). Разделянето (σ') на $[a,b]$ се нарича издребняване на разделянето (σ). Ако всяка точка на разделянето (σ') се съдържа в (σ) (но не и обратно) и пишем $(\sigma')\supset(\sigma)$.

Нека $(\sigma)\subset(\sigma')$ като разлагането (σ') е получено от (σ) чрез добавяне на p нови точки на делене, тогава в сила следните неравенства:

$$0 \le S(\sigma) - S(\sigma^{'}) \le p(M-m)h(\sigma)$$

$$0 \le s(\sigma) - s(\sigma^{'}) \le p(M-m)h(\sigma)$$

С други думи големите суми на Дарбу намаляват при издребняване на (σ), а малките растат. Всяка малка сума на Дарбу е по-малка от всяка голяма сума на Дарбу, с други думи ако (σ_1) и (σ_2) са две разделяния на интервала $[a,b]$, то $s(\sigma_1) \le S(\sigma_2)$.

Множеството от всички малки суми $s(\sigma_1)$ е ограничено отгоре. От принципа за непрекъснатост следва, че съществува точна горна граница на сумите $s(\sigma_1)$,т.е. $\sup s(\sigma_1) = \underline{I}$ и числото $\underline{I}$ се нарича долен интеграл на Дарбу. По същия начин установяваме, че съществува числото $\bar{I} = \inf S(\sigma_2)$, което се нарича горен интеграл на Дарбу.

За всеки две разделяния (σ_1) и (σ_2) на $[a,b]$съществуват числата $\underline{I}$ и $\bar{I}$, за които $s(\sigma_1) \le \underline{I} \le \bar{I} < S(\sigma_2)$.

37. Основни свойства на Римановия интеграл

Ако $f(x)$е интегрируема върху интервала $[a,b]$, то тя е интегрируема върху всеки под интервал $[a_i,b_i] \subset [a,b]$.

Ако $c \in (a,b), f(x)$ е интегрируема върху $[a,c]$и $[c,b]$, то $f(x)$е интегрируема върху $[a,b]$и $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Ако $f(x)$и $g(x)$са интегрируеми върху $[a,b]$, то сумата $f(x)+g(x)$е интегрируема върху $[a,b]$ и $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Ако $f(x)$ е интегрируема върху $[a,b]$, а c е произволна константа, то функцията $c.f(x)$ е интегрируема върху $[a,b]$ и $\int_a^b (cf(x)dx) = c\int_a^b f(x)dx$.

Ако $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани върху $[a,b]$, при това $f(x)$ е интегрируема върху $[a,b]$, а $g(x)$се отличава от $f(x)$в краен брой точки от $[a,b]$,то $g(x)$е интегрируема върху $[a,b]$ и $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Ако $f(x)$и $g(x)$са интегрируеми върху $[a,b]$, то $f(x)g(x)$е интегрируема върху $[a,b]$.

Ако $f(x)$ е интегрируема върху $[a,b]$ и $f(x) \ge 0$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Ако $f(x) \le g(x)$ при $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Ако $f(x)$е интегрируема върху $[a,b]$, $|f(x)|$ е също интегрируема и $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$. От интегрируемостта на $|f(x)|$ не следва интегрируемост $f(x)$, което се вижда от следния пример. Нека $f(x) = D(x) - \frac{1}{2}$, където $D(x)$ е вече разгледаната функция на Dirichlet.

38. Класи интегрируеми по Риман функции

Ако една функция $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,b]$, то тя е интегрируема по Риман. Ако $f(x)$ е ограничена върху $[a,b]$ и е непрекъсната с изключение на краен брой точки, то $f(x)$ е интегрируема в смисъл на Риман върху $[a,b]$. Ако $f(x)$ е монотонна върху $[a,b]$, то тя е интегрируема.

Теорема за средните стойности – ако $f(x)$ е непрекъсната върху $[a,b]$, то съществува $\xi \in [a,b]$, така че $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Ако $f(x)$ е интегрируема по Риман върху $[a,b]$, то функцията $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ е непрекъсната.

39. Теорема и формула на Нютон – Лайбниц

Newton-Leibniz – ако $f(x)$ е интегрируема върху $[a,b]$ и е непрекъсната при $x = x_0$, то $F(x)$ е диференцируема при $x = x_0$ и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, то функцията $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ е примитивна на $f(x)$. Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, то $\int_a^x f(t)dt = \phi(x) - \phi(a)$, където $\phi(x)$ е една от примитивните на $f(x)$.

Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ са интегрируеми по Риман върху $[a,b]$ и $U(x) = U_0 + \int_a^x u(t)dt, V(x) = V_0 + \int_a^x v(t)dt$, където U_0 и V_0 са произволни константи. Тогава функциите $U(x)u(x)$ и $V(x)v(x)$ са интегрируеми по Риман върху $[a,b]$ и $\int_a^b U(x)u(x)dx = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)v(x)dx$ или друго я че записано $\int_a^b U(x)u(x)dx = U(b)V(b) - U(a)V(a) - \int_a^b V(x)v(x)dx$.

Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ са непрекъснати върху $[a,b]$, заедно с първите си производни, то е валидна формулата за интегриране по части $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$

Смяна на променливите – нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в $[a,b]$, $\varphi(t):[\alpha,\beta]\to[a,b]$ е диференцируема и има непрекъсната производна $\varphi©(t)$ като $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$. Тогава $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi^{'}(t)dt$.

40. Приложение на определения интеграл – дължина на дъга и т.н.

Наредената двойка функции $\begin{vmatrix} x=x(t) \\ y=y(t) \end{vmatrix}$, които са дефинирани и непрекъснати в интервала $[\alpha,\beta]$ се нарича дъга. Множеството от наредени двойки $[x(t),y(t)]$, когато $t\in[\alpha,\beta]$, се нарича графика на дъгата.

Ако съвкупността от числата I_σ (когато (σ) описва всички възможни разделяния на $[\alpha,\beta]$) е ограничена отгоре, то казваме че дъгата е ректифицируема. Под дължина на дъгата ℓ разбираме точната горна граница на множеството $\{I_\sigma\}_\sigma$

Ако функцията $\begin{vmatrix} x=x(t) \\ y=y(t) \end{vmatrix}$ $t\in[\alpha,\beta]$ имат непрекъснати първи производни при $t\in[\alpha,\beta]$, то дъгата е ректифицируема и нейната дължина се дава с формулата $\ell=\int_\alpha^\beta\sqrt{x^{'2}(t)+y^{'2}(t)dt}$.

Ако дъгата е зададена чрез функцията $y=f(x)$ при $x\in[\alpha,\beta]$, тогава $\begin{vmatrix} x=t \\ y=f(t) \end{vmatrix}$ и формулата за дължина на дъга става $\ell=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+f^{'2}(x)}dx$.

Ако дъгата е зададена чрез полярно уравнение $\rho=f(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$, тогава нейната дължина е $\ell=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\left[\rho^{'}(\theta)\right]^2}d\theta$

41. Числови редове – абсолютно и условно сходящи

Редът $\sum_{k=1}^\infty x_k$ се нарича абсолютно сходящ, ако е сходящ редът $\sum_{k=1}^\infty |x_k|$. Редът $\sum_{k=1}^\infty x_k$ се нарича условно сходящ, ако $\sum_{k=1}^\infty x_k$ е сходящ, а $\sum_{k=1}^\infty |x_k|$ е разходящ.

Ако един ред $\sum_{k=1}^\infty x_k$ е абсолютно сходящ, той е и сходящ. Ако един ред $\sum_{k=1}^\infty x_k$ е с неотрицателни (не положителни) членове и редицата $x_1,x_2,...,x_n,...$ е ограничена отгоре (отдолу), той е сходящ.

Принцип за сравнение – нека членовете на двата реда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ са свързани с условието $0 \le |x_n| \le y_n$ при $n \ge n_0$, тогава:

1) Ако $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ е сходящ, то $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ е абсолютно сходящ

2) Ако $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ е разходящ, то и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ $(y_k \ge 0)$ е разходящ

Критерий на D'Alambert – Ако за всяко $n \ge n_0$, $x_n \ne 0$ имаме $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \le q < 1$, то редът $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ е абсолютно сходящ. Ако при $n \ge n_0$ $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \ge q > 1$, то $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ е разходящ.

Ако съществува границата $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = q$, то при $q < 1$, редът $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ е абсолютно сходящ, а при $q > 1$ е разходящ.

Cauchy – ако при $n \ge n_0$ е изпълнено $\sqrt[n]{|x_n|} \le q < 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ е абсолютно сходящ, а при $\sqrt[n]{|x_n|} \ge q > 1$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ е разходящ.

Ако съществува $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} = q$, то $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, е сходящ при $q < 1$ и разходящ при $q > 1$ (ако $q = 1$ не може да се направи заключение).

Leibniz – ако $a_k \ge a_{k+1} > 0$ и $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, то редът $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ е сходящ.

Ако $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ е абсолютно сходящ, то редът $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ получен чрез разместване на членовете на $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, е също абсолютно сходящ и има същата сума.

Riemann – ако редът $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ е сходящ (условно) и Y е произволно реално число, то членовете му могат да бъдат разместени така, че $\sum_{k=1}^{\infty} x_{m(k)} = Y$.

Нека редовете $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ са сходящи със суми съответно X и Y, като единият от тях (например $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$) е сходящ абсолютно. Тогава $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ е сходящ и сумата му е $Z = XY$.

42. Редици и редове от функции

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

Казваме, че горната редица е сходяща в D, ако за всяла фиксирана стойност на $x_0 \in D$ съответната числова редица $f_1(x_0), f_2(x_0), ..., f_n(x_0), ...$ е сходяща и означаваме нейната граница $f(x_0)$. С други думи за всяко $\varepsilon > 0$ съществува v, така че при $n > v$ $\left|f_n(x_0) - f(x_0)\right| < \varepsilon$. Ако всяко $\varepsilon > 0$ съществува v, което зависи само от ε, но не и от x, така че $\left|f_n(x_0) - f(x_0)\right| < \varepsilon$ за всяко $x \in D$ говорим за равномерна сходимост на редицата от функции.

Weierstrass – ако съществува ред с положителни членове $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, който е сходящ и освен това $\left|u_n(x)\right| \leq a_n$ за всяко $x \in D$, то редът $u_1(x) + u_2(x) + ...$ е равномерно сходящ.

Ако редицата от непрекъснати функции $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ е равномерно сходяща върху $x \in D$, то границата $f_0(x)$ е непрекъсната върху D. Ако редът от непрекъснати функции $u_1(x) + u_2(x) + ...$е равномерно сходящ, то сумата $S(x)$ е непрекъсната функция.

Граничен преход под знака на интеграла – ако редицата от функции $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$, които са непрекъснати в интервала $[a,b]$, е равномерно сходяща, то $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b l \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

43. Степенни редове. Ред на Тейлър-Маклорен

Функционален ред от вида $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$, където $a_0, a_1, ..., a_n, ...$са реални числа се нарича степенен ред. В степенния ред $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_n(x)$ функциите са избрани по специален начин, а именно $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$. Непосредствено се вижда че степенния ред е сходящ при $x = x_0$ и неговата сума е a_0. Степенният ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ е абсолютно сходящ при всички $x \in R$, за които $|x - x_0| < R$ и разходящ при всички x, за които $|x - x_0| > R$, ако $R = \infty$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ е сходяща за всяко $x \in R$.

Интервалът $\left(x_0 - R, x_0 + R\right)$ или $\left(-\infty, \infty\right)$се нарича интервал на сходимост на степенен ред. В точките $x_0 - R$ и $x_0 + R$ предварително не може да се каже нищо за сходимостта.

Ако редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ е сходящ при $x \neq x_1$, то той е абсолютно сходящ при всяко x, за което $|x-x_0| < |x_1 - x_0|$. Степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ е равномерно сходящ във всеки интервал от вида $\left[x_0 - r, x_0 + r\right]$ при $r < R$. Степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ може да се диференцира (и интегрира) произволен брой пъти в интервала на сходимост.

Taylor – степенният ред:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

се нарича ред на Taylor за безкрайно диференцируемата функция $f(x) \in D$. При $x_0 = 0$ редът се нарича ред на Maclaurin. Непосредствено от формулата на Taylor следва редът $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ е сходящ към $f(x)$ в точката $x \in D$, тогава и само тогава, когато $\lim_{n \to \infty} R_n(x, x_0) = 0$.

44. Несобствени интеграли

Несобствен интервал от първи род от функцията $f(x)$ дефинирана върху $[a, \infty)$ и интегрируема по Риман върху всеки интервал от вида $[a, p] \subset [a, \infty)$ се нарича границата $\lim_{p \to \infty} \int_a^p f(x)dx$ (ако съществува) и се означава с $\int_a^{\infty} f(x)dx$, т.е. $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{p \to \infty} \int_a^p f(x)dx$. Казва се още, че несобствения интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ е сходящ, а функцията $f(x)$ е интегрируема в несобствен смисъл. Ако границата $\lim_{p \to \infty} \int_a^p f(x)dx$ не съществува казваме, че $\int_a^{\infty} f(x)dx$ е разходящ. Несобственият интеграл $\int_a^{\infty} fdx$ се нарича абсолютно сходящ, ако $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ е сходящ. Ако един интеграл е сходящ, но не е абсолютно сходящ, той се нарича условно сходящ.