Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №1, 14.12.2012 година

с отговори и решения

1. *(по 2 точки за верен отговор, обосновка не е необходима, за междинни пресмятания използвайте допълнителни листа)*
Попълнете:

$$\sin \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \cos \operatorname{arcctg} \frac{5}{12} = \frac{77}{65} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}} = -3 \quad ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-4}\right)^n \arccos \frac{n}{2n+1} = e^6 . \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}\right) = \frac{1}{2} \quad ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{6^{\operatorname{arctg} 6x} - 1}{x} = 6\ln 6 \quad ; \quad f(x) = \sqrt{\sin x} \quad , \quad f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \quad ;$$

$$f(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x^3-x+1} \, , \quad f'(0) = 1 \quad ; \quad f(x) = x^7 e^x + x\, e^{x^2} \sin x - (x+2)^6 \, , \quad f'''(0) = -960$$

$$f(x) = \ln\left(x^4 + \sqrt{x^8 - 1}\right) \, , \quad f'(x) = \frac{4x^3}{\sqrt{x^8-1}}$$

2. *(12 точки, необходима е обосновка, за която използвайте допълнителни листа)*
Пресметнете границата:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1+6x^2\right)^{-x^2} - \sqrt{1+6x^4}}{(x \arcsin x)^2} \, .$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1+6x^2\right)^{-x^2} - \sqrt{1+6x^4}}{(x \arcsin x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+6x^2\right)^{-x^2} - 1 + 1 - \sqrt{1+6x^4}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 \ln\left(1+6x^2\right)}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{-6x^4}{x^4\left(1+\sqrt{1+6x^4}\right)} = -6-3 = -3 \, .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, за която използвайте допълнителни листа)*
Намерете интервалите на нарастване и намаляване на функцията

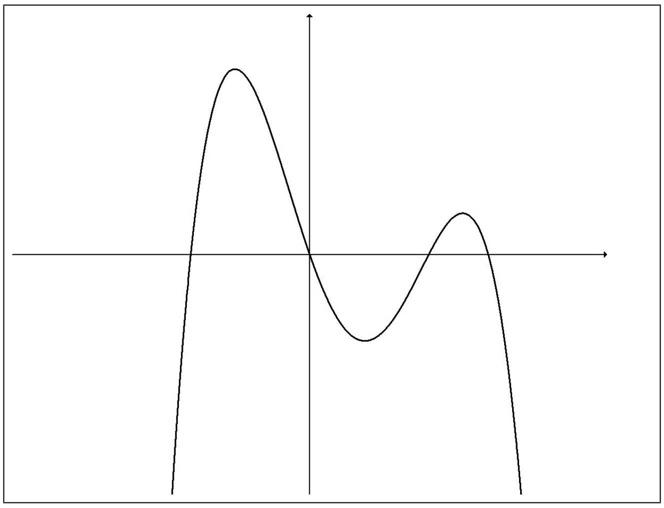
$$f(x) = \frac{x\, e^{-x}}{1+2\,|3x+1|} \, .$$

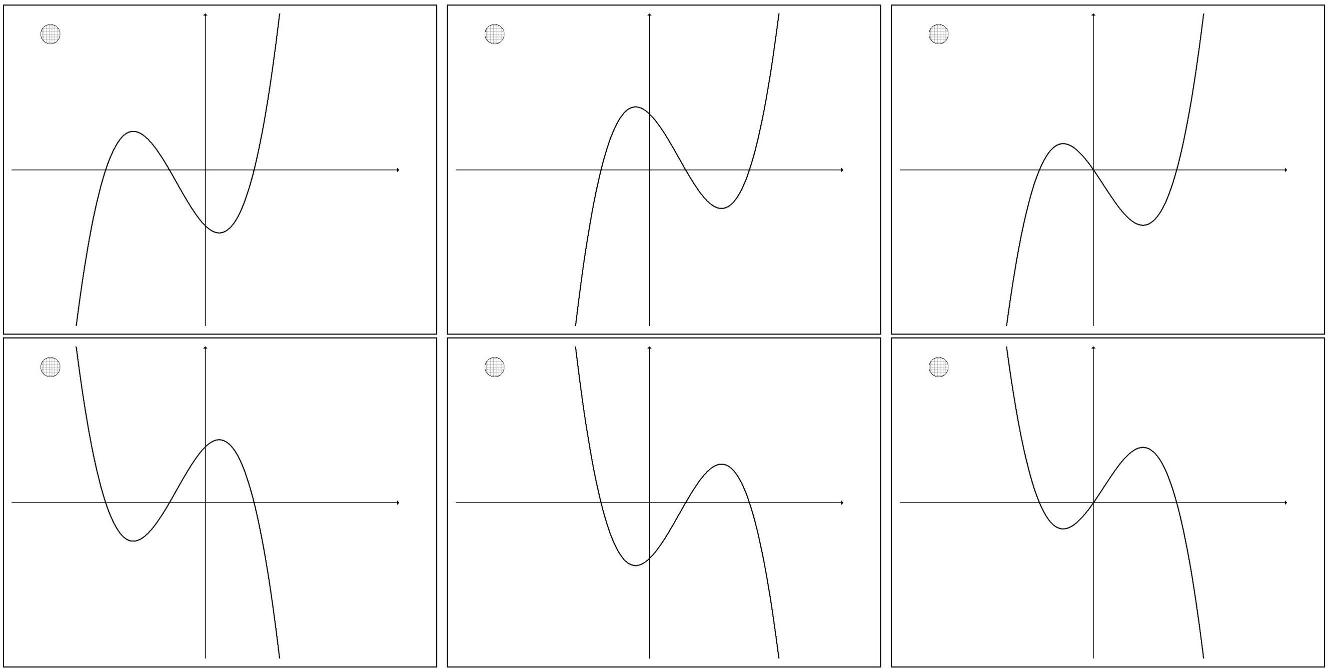
Решение: Имаме $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(3x-1)\, e^{-x}}{(6x+1)^2}$ при $x < -\dfrac{1}{3}$ и $f'(x) = \dfrac{-(x+1)(2x-1)\, e^{-x}}{3\,(2x+1)^2}$ при $x > -\dfrac{1}{3}$. Следователно, в $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$ f расте, в $\left[-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}\right]$ f намалява, в $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$ f расте, в $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ f намалява.

Има ли $f(x)$ най-голяма стойност в $\mathbb{R}$ и колко е тя? *Решение:* Имаме $f(x) \leq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ при $x \geq -\dfrac{1}{3}$ и $f(x) \leq f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ при $x \leq -\dfrac{1}{3}$ и $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) < 0 < f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Следователно, най-голямата стойност на f е $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{12\sqrt{e}}$.

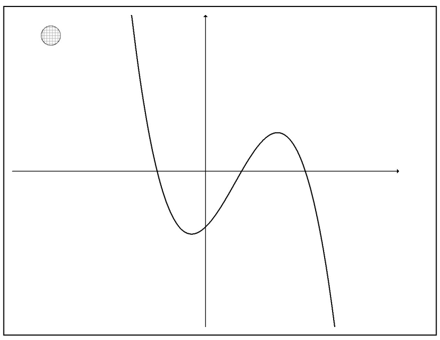
Има ли $f(x)$ най-малка стойност в $\mathbb{R}$ и колко е тя? *Отговор:* Не, защото $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

4. *(5 точки)* Посочете графиката на производната на функцията





Обосновете отговора си: Функцията има три строги локални екстремума, т.е. производната се анулира в $x_1 < x_2 < x_3$. Имаме $x_2 > 0$, т.е верният отговор е във втори стълб. В x_2 функцията има локален минимум, т.е верният отговор е във втори ред.



Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №1, 14.12.2012 година

с отговори и решения

1. *(по 2 точки за верен отговор, обосновка не е необходима, за междинни пресмятания използвайте допълнителни листа)*
Попълнете:

$$\sin \operatorname{arcctg} \frac{4}{3} + \cos \operatorname{arctg} \frac{5}{12} = \frac{99}{65} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+4}} = 2 \quad ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n-4}\right)^n \arccos \frac{n+3}{4-n} = e^7.\pi \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x^4-1}\right) = \frac{3}{2} \quad ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{7^{\operatorname{arctg} 7x} - 1}{x} = 7\ln 7 \quad ; \quad f(x) = \sin\sqrt{x} \quad , \quad f'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad ;$$

$$f(x) = \frac{x^3+2x+1}{x^4-2x^2+1}\,, \quad f'(0) = 2 \quad ; \quad f(x) = x^8 e^x + e^{x^2}\cos x + (x-2)^6\,, \quad f'''(0) = -960$$

$$f(x) = \ln\left(\ln x + \sqrt{\ln^2 x + 1}\right)\,, \quad f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x + 1}}$$

2. *(12 точки, необходима е обосновка, за която използвайте допълнителни листа)*
Пресметнете границата:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-5x^2\right)^{x^2} - \sqrt{1-6x^4}}{\left(x \operatorname{arctg} x\right)^2}\,.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-5x^2\right)^{x^2} - \sqrt{1-6x^4}}{\left(x \operatorname{arctg} x\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-5x^2\right)^{x^2} - 1 + 1 - \sqrt{1-6x^4}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln\left(1-5x^2\right)}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{6x^4}{x^4\left(1+\sqrt{1-6x^4}\right)} = -5+3 = -2\,.$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, за която използвайте допълнителни листа)*
Намерете интервалите на нарастване и намаляване на функцията

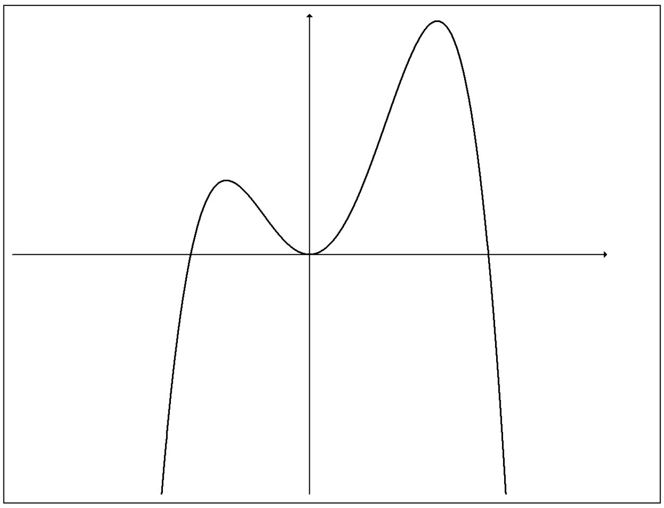
$$f(x) = \frac{x\,e^x}{1+4\,|15x-1|}\,.$$

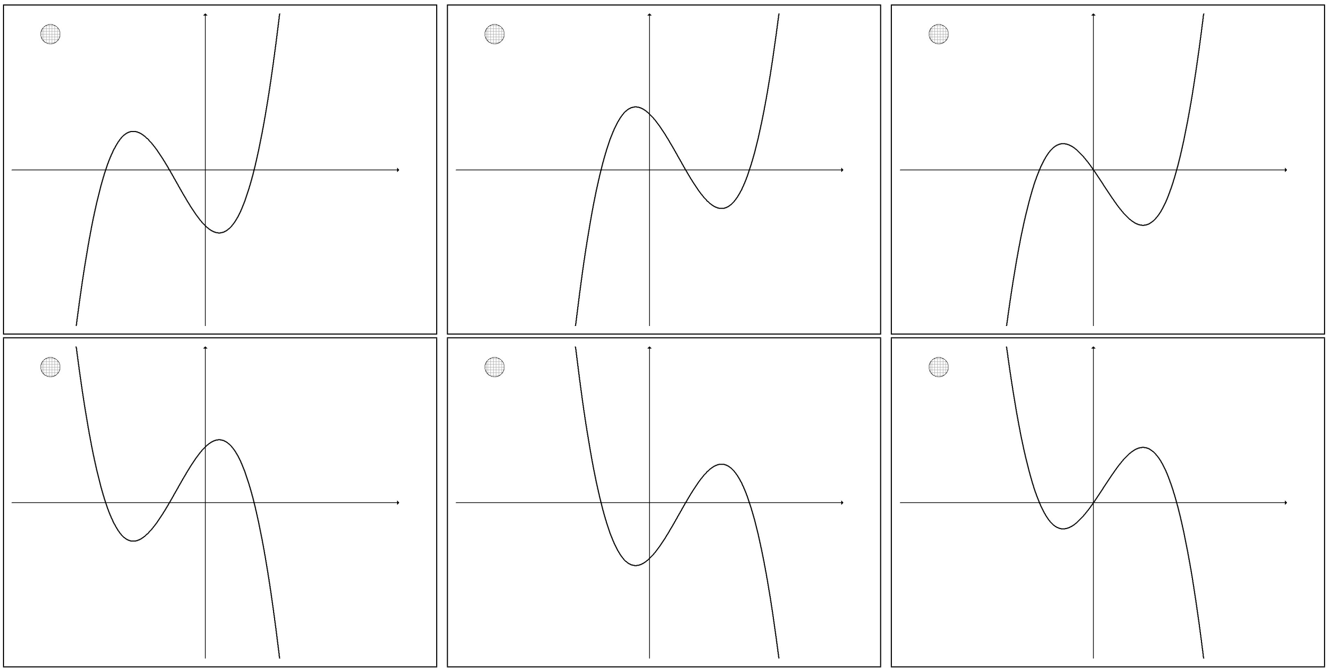
Решение: Имаме $f'(x) = \dfrac{(4x-1)(5x+1)\,e^x}{3\,(20x-1)^2}$ при $x > \dfrac{1}{15}$ и $f'(x) = \dfrac{-\,(3x-1)(4x+1)\,e^x}{5\,(12x-1)^2}$ при $x < \dfrac{1}{15}$. Следователно, в $\left(-\infty\,, -\dfrac{1}{4}\right]$ f намалява, в $\left[-\dfrac{1}{4}\,, \dfrac{1}{15}\right]$ f расте, в $\left[\dfrac{1}{15}\,, \dfrac{1}{4}\right]$ f намалява, в $\left[\dfrac{1}{4}\,, +\infty\right)$ f расте.

Има ли $f(x)$ най-голяма стойност в $\mathbb{R}$ и колко е тя? *Отговор:* Не, защото $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

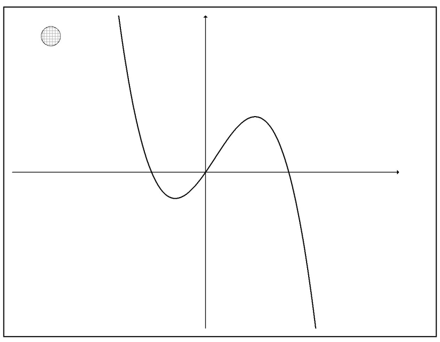
Има ли $f(x)$ най-малка стойност в $\mathbb{R}$ и колко е тя? *Решение:* Имаме $f(x) \geq f\left(\frac{1}{4}\right)$ при $x \geq \frac{1}{15}$ и $f(x) \geq f\left(-\frac{1}{4}\right)$ при $x \leq \frac{1}{15}$ и $f\left(-\frac{1}{4}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{4}\right)$. Следователно, най-малката стойност на f е $f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{80\sqrt[4]{e}}$.

4. *(5 точки)* Посочете графиката на производната на функцията





Обосновете отговора си: Функцията има три строги локални екстремума, т.е. производната се анулира в $x_1 < x_2 < x_3$. Имаме $x_2 = 0$, т.е верният отговор е в трети стълб. В x_2 функцията има локален минимум, т.е верният отговор е във втори ред.



Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №1, 14.12.2012 година

с отговори и решения

1. *(по 2 точки за верен отговор, обосновка не е необходима, за междинни пресмятания използвайте допълнителни листа)*
Попълнете:

$$\sin \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \cos \operatorname{arcctg} \frac{8}{15} = \frac{91}{85} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+4}} = -3 \quad ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n-4}\right)^n \arcsin \frac{n}{2n+1} = e^8 . \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \lim_{x\to -3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{27}{x^3+27}\right) = -\frac{1}{3} \quad ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{8^{\operatorname{arctg} 8x} - 1}{x} = 8 \ln 8 \quad ; \quad f(x) = \sqrt{\cos x} \ , \quad f'(x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \quad ;$$

$$f(x) = \frac{x^4+5x^2+1}{x^3-5x+1} \ , \quad f'(0) = 5 \quad ; \quad f(x) = x^7 e^x - x\, e^{x^2} \sin x - (x+3)^5 \ , \quad f'''(0) = -540$$

$$f(x) = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}\right) \ , \quad f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

2. *(12 точки, необходима е обосновка, за която използвайте допълнителни листа)*
Пресметнете границата:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-4x^2\right)^{x^2} - \sqrt{1-4x^4}}{(x \operatorname{tg} x)^2} .$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-4x^2\right)^{x^2} - \sqrt{1-4x^4}}{(x \operatorname{tg} x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-4x^2\right)^{x^2} - 1 + 1 - \sqrt{1-4x^4}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln\left(1-4x^2\right)}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{4x^4}{x^4\left(1+\sqrt{1-4x^4}\right)} = -4+2 = -2 .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, за която използвайте допълнителни листа)*
Намерете интервалите на нарастване и намаляване на функцията

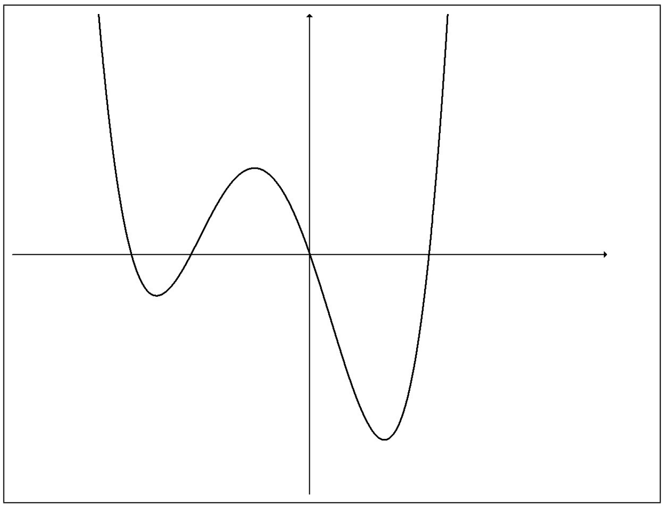
$$f(x) = \frac{x\, e^{-x}}{1+4\,|15x+1|} .$$

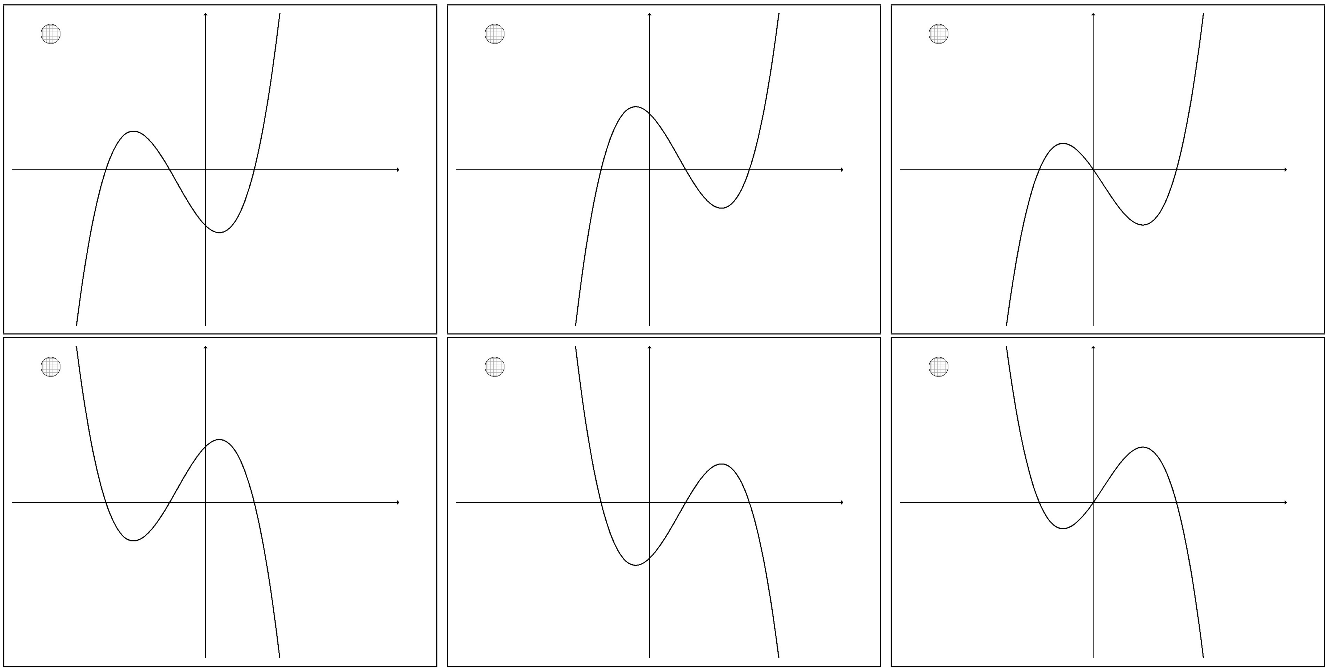
Решение: Имаме $f'(x) = \dfrac{(4x+1)(5x-1)\, e^{-x}}{3\,(20x+1)^2}$ при $x < -\dfrac{1}{15}$ и $f'(x) = \dfrac{-(3x+1)(4x-1)\, e^{-x}}{5\,(12x+1)^2}$ при $x > -\dfrac{1}{15}$. Следователно, в $\left(-\infty, -\dfrac{1}{4}\right]$ f расте, в $\left[-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{15}\right]$ f намалява, в $\left[-\dfrac{1}{15}, \dfrac{1}{4}\right]$ f расте, в $\left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$ f намалява.

Има ли $f(x)$ най-голяма стойност в $\mathbb{R}$ и колко е тя? *Решение:* Имаме $f(x) \le f\left(\frac{1}{4}\right)$ при $x \ge -\frac{1}{15}$ и $f(x) \le f\left(-\frac{1}{4}\right)$ при $x \le -\frac{1}{15}$ и $f\left(-\frac{1}{4}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{4}\right)$. Следователно, най-голямата стойност на f е $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{80\sqrt[4]{e}}$.

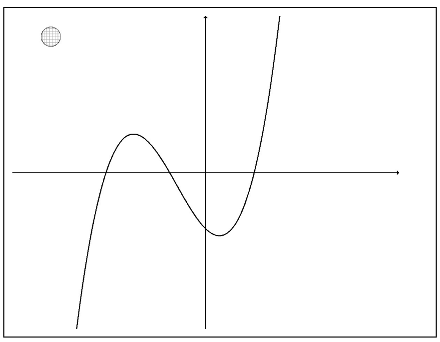
Има ли $f(x)$ най-малка стойност в $\mathbb{R}$ и колко е тя? *Отговор:* Не, защото $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

4. *(5 точки)* Посочете графиката на производната на функцията





Обосновете отговора си: Функцията има три строги локални екстремума, т.е. производната се анулира в $x_1 < x_2 < x_3$. Имаме $x_2 < 0$, т.е верният отговор е в първи стълб. В x_2 функцията има локален максимум, т.е верният отговор е в първи ред.



Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №1, 14.12.2012 година

с отговори и решения

1. *(по 2 точки за верен отговор, обосновка не е необходима, за междинни пресмятания използвайте допълнителни листа)*
Попълнете:

$$\sin \operatorname{arctg} \frac{4}{3} - \cos \operatorname{arcctg} \frac{12}{5} = -\frac{8}{65} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}} = 4 \quad ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n \arccos \frac{n}{2n^2+1} = e^5.\frac{\pi}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8}\right) = -\frac{1}{2} \quad ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^{\operatorname{arctg} 5x} - 1}{x} = 5\ln 5 \quad ; \quad f(x) = \cos\sqrt{x} \quad , \quad f'(x) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad ;$$

$$f(x) = \frac{x^3+4x+1}{x^4-4x^2+1} \, , \quad f'(0) = 4 \quad ; \quad f(x) = x^8 e^x - e^{x^2}\cos x + (x-3)^5 \, , \quad f'''(0) = 540$$

$$f(x) = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}\right) \, , \quad f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

2. *(12 точки, необходима е обосновка, за която използвайте допълнителни листа)*
Пресметнете границата:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1+4x^2\right)^{-x^2} - \sqrt{1+4x^4}}{\left(x\ln(x+1)\right)^2} \, .$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1+4x^2\right)^{-x^2} - \sqrt{1+4x^4}}{\left(x\ln(x+1)\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+4x^2\right)^{-x^2} - 1 + 1 - \sqrt{1+4x^4}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2\ln\left(1+4x^2\right)}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{-4x^4}{x^4\left(1+\sqrt{1+4x^4}\right)} = -4-2 = -6 \, .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, за която използвайте допълнителни листа)*
Намерете интервалите на нарастване и намаляване на функцията

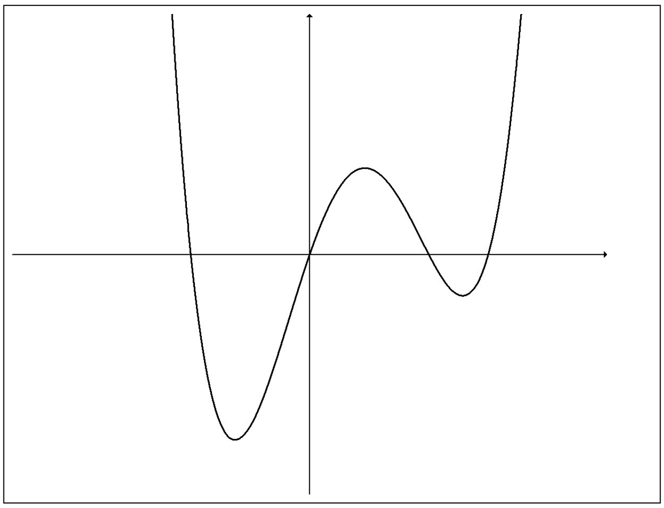
$$f(x) = \frac{x\,e^x}{1+3\,|8x-1|} \quad .$$

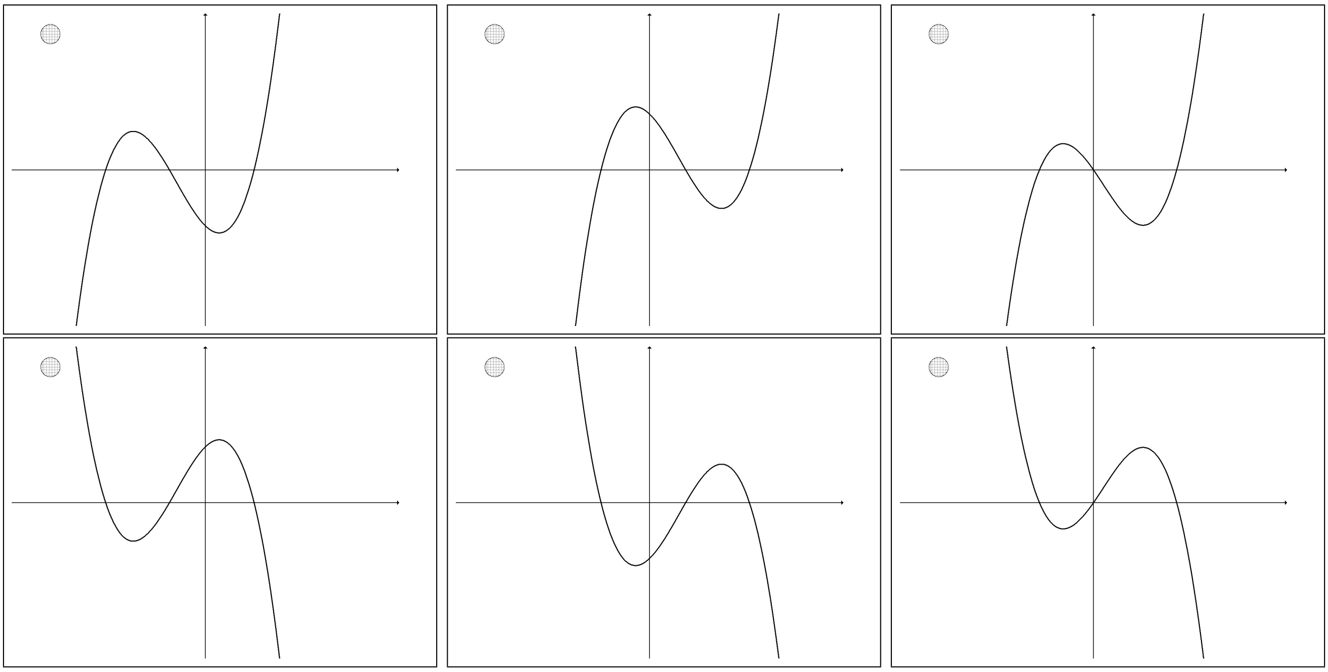
Решение: Имаме $f'(x) = \dfrac{(3x-1)(4x+1)\,e^x}{2\,(12x-1)^2}$ при $x > \dfrac{1}{8}$ и $f'(x) = \dfrac{-\,(2x-1)(3x+1)\,e^x}{4\,(6x-1)^2}$ при $x < \dfrac{1}{8}$.
Следователно, в $\left(-\infty\,, -\dfrac{1}{3}\right]$ f намалява, в $\left[-\dfrac{1}{3}\,, \dfrac{1}{8}\right]$ f расте, в $\left[\dfrac{1}{8}\,, \dfrac{1}{3}\right]$ f намалява, в $\left[\dfrac{1}{3}\,, +\infty\right)$ f расте.

Има ли $f(x)$ най-голяма стойност в $\mathbb{R}$ и колко е тя? *Отговор:* Не, защото $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

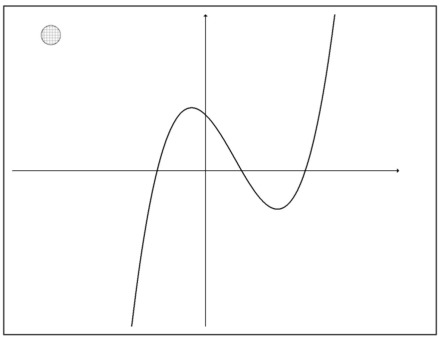
Има ли $f(x)$ най-малка стойност в $\mathbb{R}$ и колко е тя? *Решение:* Имаме $f(x) \geq f\left(\frac{1}{3}\right)$ при $x \geq \frac{1}{8}$ и $f(x) \geq f\left(-\frac{1}{3}\right)$ при $x \leq \frac{1}{8}$ и $f\left(-\frac{1}{3}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{3}\right)$. Следователно, най-малката стойност на f е $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{36\sqrt[3]{e}}$.

4. *(5 точки)* Посочете графиката на производната на функцията





Обосновете отговора си: Функцията има три строги локални екстремума, т.е. производната се анулира в $x_1 < x_2 < x_3$. Имаме $x_2 > 0$, т.е верният отговор е във втори стълб. В x_2 функцията има локален максимум, т.е верният отговор е в първи ред.



Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №1, 14.12.2012 година

с отговори и решения

1. *(по 2 точки за верен отговор, обосновка не е необходима, за междинни пресмятания използвайте допълнителни листа)*
Попълнете:

$$\sin \operatorname{arcctg} \frac{4}{3} - \cos \operatorname{arctg} \frac{12}{5} = \frac{14}{65} \quad ; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+4}} = 4 \quad ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n-2}\right)^n \arcsin \frac{n+2}{2-n} = -e^4.\frac{\pi}{2} \quad ; \qquad \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{5}{x^5-1}\right) = 2 \quad ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{4^{\operatorname{arctg} 4x} - 1}{x} = 8\ln 2 \quad ; \qquad f(x) = \ln\left(3+\sqrt{x}\right) \ , \quad f'(x) = \frac{1}{2\,(3+\sqrt{x})\sqrt{x}} \quad ;$$

$$f(x) = \frac{x^4+5x^2+1}{x^3-5x+1} \ , \quad f'(0) = 5 \quad ; \qquad f(x) = x^7 e^x - x^4 e^{x^2} - (x+1)^7 \ , \quad f'''(0) = -210$$

$$f(x) = \ln\left(\ln x + \sqrt{\ln^2 x - 1}\right) \ , \quad f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x - 1}} \quad ; \qquad ;$$

2. *(12 точки, необходима е обосновка, за която използвайте допълнителни листа)*
Пресметнете границата:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1+5\,x^2\right)^{-x^2} - \sqrt{1+2\,x^4}}{\left(x \operatorname{arctg} x\right)^2} \, .$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1+5\,x^2\right)^{-x^2} - \sqrt{1+2\,x^4}}{\left(x \operatorname{arctg} x\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+5\,x^2\right)^{-x^2} - 1 + 1 - \sqrt{1+2\,x^4}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 \ln\left(1+5\,x^2\right)}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{-2\,x^4}{x^4\left(1+\sqrt{1+2\,x^4}\right)} = -5-1 = -6 \, .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, за която използвайте допълнителни листа)*
Намерете интервалите на нарастване и намаляване на функцията

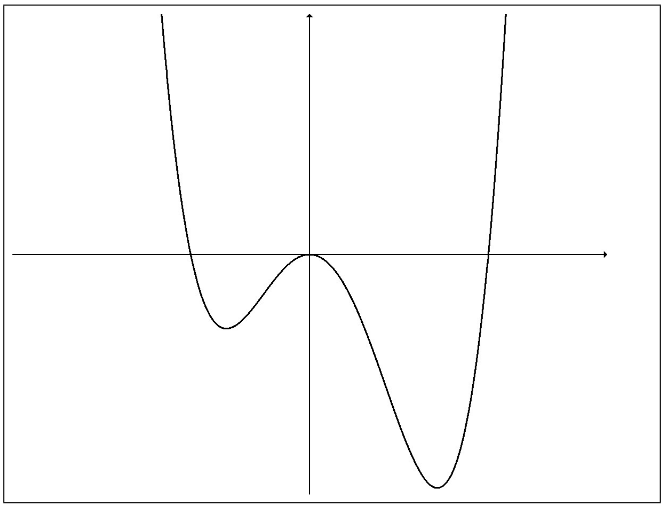
$$f(x) = \frac{x\,e^{-x}}{1+3\,|8\,x+1|} \, .$$

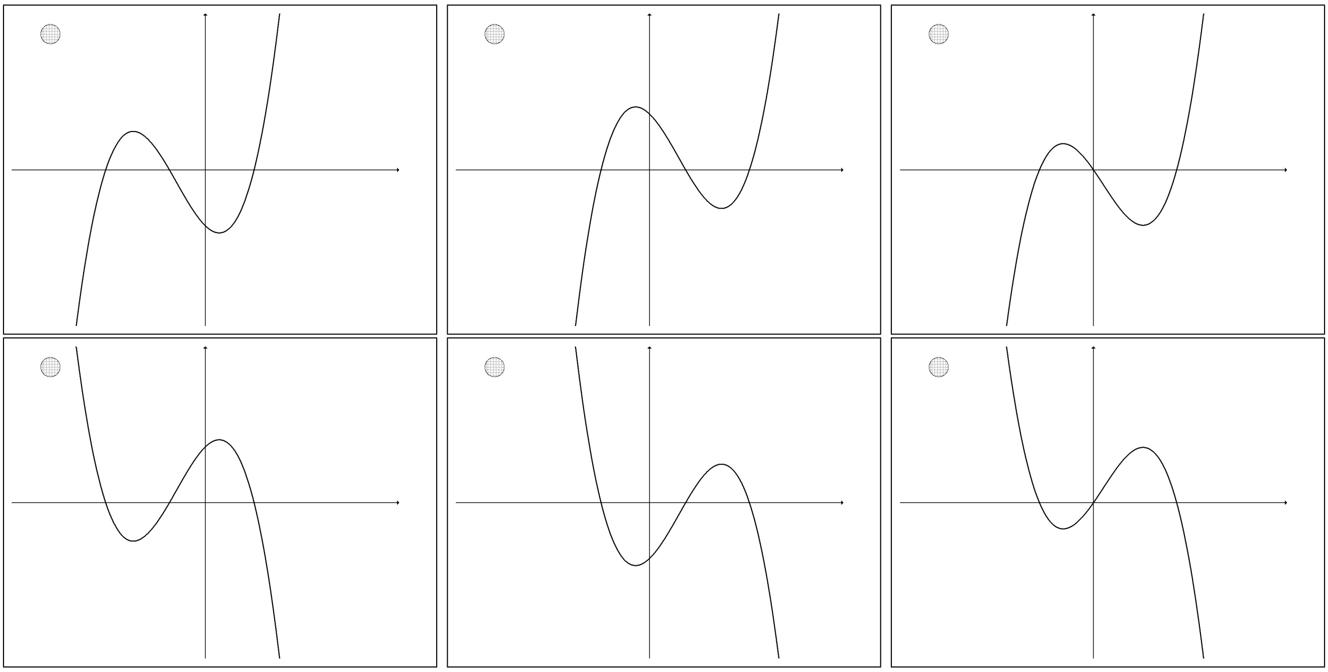
Решение: Имаме $f'(x) = \dfrac{(3x+1)\,(4x-1)\;e^{-x}}{2\,(12x+1)^2}$ при $x < -\dfrac{1}{8}$ и $f'(x) = \dfrac{-\,(2x+1)\,(3x-1)\;e^{-x}}{4\,(6x+1)^2}$ при $x > -\dfrac{1}{8}$. Следователно, в $\left(-\infty\,,-\dfrac{1}{3}\right]$ f расте, в $\left[-\dfrac{1}{3}\,,-\dfrac{1}{8}\right]$ f намалява, в $\left[-\dfrac{1}{8}\,,\dfrac{1}{3}\right]$ f расте, в $\left[\dfrac{1}{3}\,,+\infty\right)$ f намалява.

Има ли $f(x)$ най-голяма стойност в $\mathbb{R}$ и колко е тя? *Решение:* Имаме $f(x) \le f\left(\frac{1}{3}\right)$ при $x \ge -\frac{1}{8}$ и $f(x) \le f\left(-\frac{1}{3}\right)$ при $x \le -\frac{1}{8}$ и $f\left(-\frac{1}{3}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{3}\right)$. Следователно, най-голямата стойност на f е $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{36\sqrt[3]{e}}$.

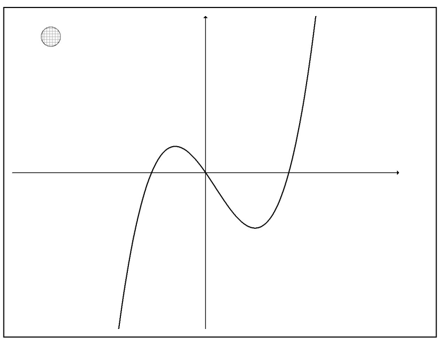
Има ли $f(x)$ най-малка стойност в $\mathbb{R}$ и колко е тя? *Отговор:* Не, защото $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

4. *(5 точки)* Посочете графиката на производната на функцията





Обосновете отговора си: Функцията има три строги локални екстремума, т.е. производната се анулира в $x_1 < x_2 < x_3$. Имаме $x_2 = 0$, т.е верният отговор е в трети стълб. В x_2 функцията има локален максимум, т.е верният отговор е в първи ред.



Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №1, 14.12.2012 година

с отговори и решения

1. *(по 2 точки за верен отговор, обосновка не е необходима, за междинни пресмятания използвайте допълнителни листа)*
Попълнете:

$$\sin \operatorname{arcctg} \frac{3}{4} - \cos \operatorname{arctg} \frac{15}{8} = \frac{28}{85} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+4}} = -3 \quad ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n-4}\right)^n \arccos \frac{n^2}{2n^2+1} = e^3.\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \lim_{x\to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{27}{x^3-27}\right) = \frac{1}{3} \quad ;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{\operatorname{arctg} 3x} - 1}{x} = 3\ln 3 \quad ; \quad f(x) = \sqrt{\ln x + 2} \;, \quad f'(x) = \frac{1}{2\,x\sqrt{\ln x + 2}} \quad ;$$

$$f(x) = \frac{x^3+6x+1}{x^4-6x^2+1} \;, \quad f'(0) = 6 \quad ; \quad f(x) = x^8 e^x + x^4 e^{x^2} - (x-1)^8 \;, \quad f'''(0) = 336$$

$$f(x) = \ln\left(x^3 + \sqrt{x^6+1}\right) \;, \quad f'(x) = \frac{3\,x^2}{\sqrt{x^6+1}}$$

2. *(12 точки, необходима е обосновка, за която използвайте допълнителни листа)*
Пресметнете границата:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-6\,x^2\right)^{x^2} - \sqrt{1-2\,x^4}}{\left(x \operatorname{tg} x\right)^2} \,.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-6\,x^2\right)^{x^2} - \sqrt{1-2\,x^4}}{\left(x \operatorname{tg} x\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-6\,x^2\right)^{x^2} - 1 + 1 - \sqrt{1-2\,x^4}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln\left(1-6\,x^2\right)}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{2\,x^4}{x^4\left(1+\sqrt{1-2\,x^4}\right)} = -6+1 = -5 \,.$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, за която използвайте допълнителни листа)*
Намерете интервалите на нарастване и намаляване на функцията

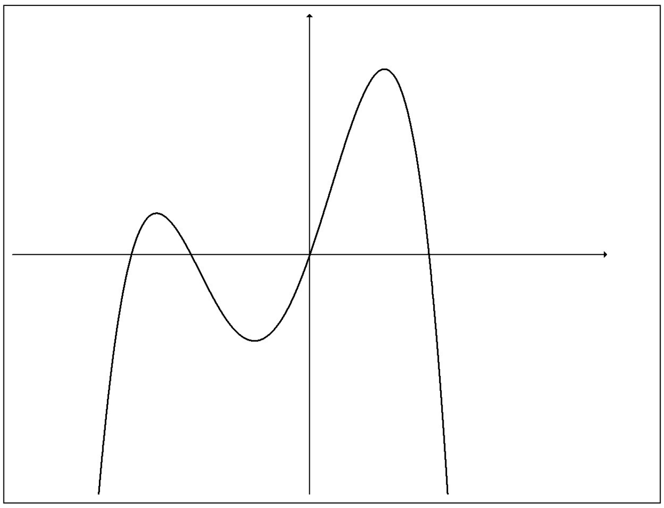
$$f(x) = \frac{x\,e^x}{1+2\,|3\,x-1|} \,.$$

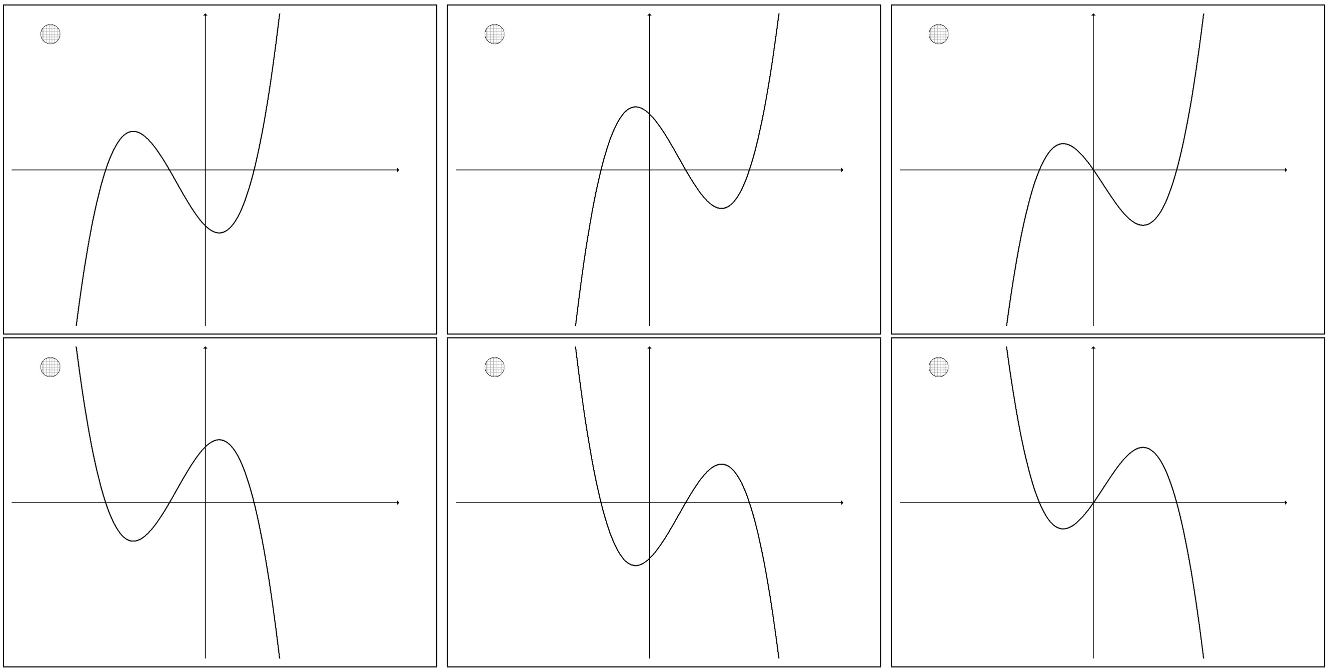
Решение: Имаме $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\,(3x+1)\,e^x}{(6x-1)^2}$ при $x > \dfrac{1}{3}$ и $f'(x) = \dfrac{-\,(x-1)\,(2x+1)\,e^x}{3\,(2x-1)^2}$ при $x < \dfrac{1}{3}$.
Следователно, в $\left(-\infty\,, -\dfrac{1}{2}\right]$ f намалява, в $\left[-\dfrac{1}{2}\,, \dfrac{1}{3}\right]$ f расте, в $\left[\dfrac{1}{3}\,, \dfrac{1}{2}\right]$ f намалява, в $\left[\dfrac{1}{2}\,, +\infty\right)$ f расте.

Има ли $f(x)$ най-голяма стойност в $\mathbb{R}$ и колко е тя? *Отговор:* Не, защото $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Има ли $f(x)$ най-малка стойност в $\mathbb{R}$ и колко е тя? *Решение:* Имаме $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$ при $x \geq \frac{1}{3}$ и $f(x) \geq f\left(-\frac{1}{2}\right)$ при $x \leq \frac{1}{3}$ и $f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{2}\right)$. Следователно, най-малката стойност на f е $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12\sqrt{e}}$.

4. *(5 точки)* Посочете графиката на производната на функцията





Обосновете отговора си: Функцията има три строги локални екстремума, т.е. производната се анулира в $x_1 < x_2 < x_3$. Имаме $x_2 < 0$, т.е верният отговор е в първи стълб. В x_2 функцията има локален минимум, т.е верният отговор е във втори ред.