Лекция 10: Полином на Тейлър

1 Производни от по-висок ред. Формула на Лайбниц

Да напомним от предишната лекция

Дефиниция 1.1. *Производни от по-висок ред*

Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$ за Δ - отворен интервал, като $f'(x)$ съществува за всяко $x \in \Delta$. Това позволява да разгледаме производната $f' : \Delta \to \mathbb{R}$ като функция с аргумент $x \in \Delta$, понеже изображението $x \mapsto f'(x)$ е добре дефинирано. Означаваме:

$$f''(x) \coloneqq \left(f'\right)'(x)$$

По този начин можем индуктивно да дефинираме производни от колкото си искаме висок ред, стига съответната диференцируемост да е налице.

$$\left.\begin{array}{ll} f'' & : \Delta \to \mathbb{R} \\ f''' & : \Delta \to \mathbb{R} \\ \dots & \\ f^{(n)} & : \Delta \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f^{(n+1)} \coloneqq \left(f^{(n)}\right)'$$

Прието е с $f^{(0)}$ да се означава функцията f.

Пресмятането на n-ти производни (получаване на формула за n-тата производна, зависеща от n) не е алгоритмизирано. Тук ще споменем само основните правила за такова пресмятане.

Ако $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$ са достатъчен брой пъти диференцируеми, то с индукция по степенния показател n (за база използваме правилото за диференциране на сума $(f+g)' = f' + g'$) се доказва, че:

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

Наистина

$$(f+g)^{(n+1)} = \left((f+g)^{(n)}\right)' = \left(f^{(n)} + g^{(n)}\right)' = \left(f^{(n)}\right)' + \left(g^{(n)}\right)' = f^{(n+1)} + g^{(n+1)}$$

Аналогично, ако c е реална константа, то лесно се съобразява, че

$$(c.f)^{(n)} = c.f^{(n)}$$

По-интересно е правилото за намиране на n-та производна на произведение на две функции:

Твърдение 1.2. *(Формула на Лайбниц) Ако $f, g : \Delta \to \mathbb{R}$ са n пъти диференцируеми в отворения интервал Δ, то в сила е формулата:*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Доказателство. Доказателството е с индукция по $n \in \mathbb{N}$.

Формулата е вярна за $n = 1$, защото

$$(fg)' = f'g + fg' = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)} .$$

Нека за някое $n \in \mathbb{N}$ формулата е в сила, тоест имаме

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Да проверим, че формулата е в сила за $n + 1 \in \mathbb{N}$.

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$$

С полагане $m \coloneqq k + 1$ първото събираемо придобива вида

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} \overset{m\,:=k+1}{=} \sum_{m=1}^{n+1} \binom{n}{m-1} f^{(m)} g^{(n-m+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$$

Следователно

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} =$$

$$= f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(n+1)} g^{(0)}$$

Да пресметнем израза в квадратните скоби:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1)+1)}{(k-1)\,!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{k!}(n-k+1+k) = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+2)}{k!} = \binom{n+1}{k}$$

Прилагаме горното равенство и получаваме

$$(fg)^{(n+1)} = f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f^{(n+1)} g^{(0)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{((n+1)-k)}$$

С индукция доказахме, че формулата на Лайбниц е в сила за всяко $n \in \mathbb{N}$. □

2 Полином на Тейлър

Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ отворен интервал и $a \in \Delta$. При въвеждането на производната видяхме, че е в сила формулата:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x)$$

където $R(x) = (x-a)\alpha(x-a)$ и $\alpha(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Това може да бъде записано като $\frac{R(x)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Остатъкът $R(x)$ (разликата между функцията и нейната апроксимация) клони към нула по-бързо от $x-a$, когато x клони към a. Това можем да запишем и по следния начин

$$f(x) = f(x) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

Дефиниция 2.1. *Означение о-малко*
Ако за $g : \Delta \to \mathbb{R}$ е изпълнено, че $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ и $g(x) \neq 0$, то казваме, че $f(x)$ е o-малко от $g(x)$ около a и записваме $f(x) = o(g(x))$, ако:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Казано неформално, ако функцията $f(x)$ е o-малко от функцията $g(x)$, т.е. $f(x) = o(g(x))$ в околност на точката a, то когато x клони към a, f намалява много по-бързо от g.

Геометрично, от всички прави, минаващи през точката $(a, f(a))$ от графиката на f, правата $y = f(x) + f'(a)(x-a)$ "приляга" най-плътно към графиката на f близо до точката. Сега ще продължим тази идея, като вместо с афинни функции ще приближаваме локално (близо до фиксираната точка) нашата функция с квадратни полиноми (геометрично търсим параболата, която, от всички параболи, минаващи през точката $(a, f(a))$ от графиката на f, "приляга" най-плътно към графиката на f близо до $(a, f(a))$), с полиноми от трета степен и т.н.

Първата ни работа ще бъде да изразим коефициентите на даден полином чрез стойностите на полинома и неговите производни в точката a. Нека P е полином от степен n, който е подреден по степените на $x-a$, тоест има вида

$$P(x) = a_n(x-a)^n + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + a_1(x-a) + a_0 \ .$$

Очевидно, при $x = a$ получаваме $P(a) = a_0$. Последователно диференцираме P и при заместването на променливата x с a получаваме:

$$\begin{aligned}
&P'(x) = na_n(x-a)^{n-1} + (n-1)a_{n-1}(x-a)^{n-2} + \cdots + 2a_2(x-a) + a_1 \Rightarrow P'(a) = a_1 \\
&P''(x) = n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}(x-a)^{n-3} + \cdots + 2a_2 \Rightarrow P''(a) = 2a_2 \\
&P'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} + \cdots + (3.2.1)a_3(x-a) \Rightarrow P'''(a) = 6a_3 \\
&\dots \\
&P^{(n)}(x) = n(n-1)\dots 2\cdot 1\cdot a_n
\end{aligned}$$

Виждаме, че съществува връзка между i-тата производна $P^{(i)}(x)$ и коефициентите на полинома a_i. По-точно:

$$\begin{cases} 0!\,a_0 = P(a) & \iff \quad a_0 = \frac{P(a)}{0!} \\ 1!\,a_1 = P'(a) & \iff \quad a_1 = \frac{P'(a)}{1!} \\ 2!\,a_2 = P''(a) & \iff \quad a_2 = \frac{P''(a)}{2!} \\ 3!\,a_3 = P'''(a) & \iff \quad a_3 = \frac{P'''(a)}{3!} \\ \dots \\ n!\,a_n = P^{(n)}(a) & \iff \quad a_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \end{cases}$$

Следователно, можем да запишем P като

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Дефиниция 2.2. *Полином на Тейлър от n-та степен за f около точката a*

Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$ за Δ - отворен интервал и $a \in \Delta$. Освен това нека

- f е $(n-1)$ пъти диференцируема в Δ.
- f е n пъти диференцируема в точката a.

Тогава полиномът

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

се нарича полином на Тейлър от степен n за f около точката a.

Коефициентите на полинома на Тейлър T_n са избрани така, че всичките му производни до ред n включително съвпадат със съответните производни на f:

$$T_n^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) \quad \text{за всяко} \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, n\} .$$

Наистина, от пресмятанията ни за полиноми следва, че коефициентът пред $(x-a)^i$ в полинома T_n е равен на $\dfrac{T_n^{(i)}(a)}{i!}$, следователно $\dfrac{T_n^{(i)}(a)}{i!} = \dfrac{f^{(i)}(a)}{i!}$ за всяко $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Естествено, независимо от точността на апроксимацията, съществува отклонение между истинската стойност на функцията и стойността на полинома ѝ на Тейлър (това отклонение става нула само ако функцията е полином). Остатък от апроксимацията на f с полином на Тейлър от n-та степен наричаме

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

Следващата ни задача е да дадем някаква информация за този остатък.

3 Формула на Тейлър с остатъчен член във формата на Пеано

Твърдение 3.1. *Нека $h : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е отворен интервал, и $a \in \Delta$. Освен това нека*

- *h е $(n-1)$ пъти диференцируема в Δ*
- *h е n пъти диференцируема в точката a*
- *$h(a) = h'(a) = \cdots = h^{(n)}(a) = 0$*

Тогава $h(x) = o((x-a)^n)$, т.е.

$$\frac{h(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Доказателство. Ще проведем индукция по $n \in \mathbb{N}$. Базата на индукцията е $n = 1$, тогава:

$$\frac{h(x)}{x-a} = \frac{h(x) - h(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} h'(a) = 0$$

Да допуснем, че твърдението е в сила за някое $n \in \mathbb{N}$ и да извършим индукционна стъпка към $n+1$. Сега за $h : \Delta \to \mathbb{R}$ знаем, че h е n пъти диференцируема в Δ, h е $n+1$ пъти диференцируема в точката a и

$$h(a) = h'(a) = \cdots = h^{(n)}(a) = h^{(n+1)}(a) = 0 \ .$$

Тогава

$$\frac{h(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{h(x) - h(a)}{(x-a)^{n+1}} \overset{\text{Лагранж}}{=} \frac{h'(\xi(x))(x-a)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{h'(\xi(x))}{(x-a)^n} \ ,$$

където $\xi(x)$ е между a и x. Да отбележим, че h' е $n-1$ пъти диференцируема в Δ, h' е n пъти диференцируема в точката a и

$$h'(a) = \cdots = (h')^{(n-1)}(a) = (h')^{(n)}(a) = 0 \ ,$$

следователно за h' е в сила индукционното предположение. Освен това, щом $\xi(x)$ е между a и x, то $|\xi(x) - a| < |x-a|$. Тогава

$$0 \le \left| \frac{h(x)}{(x-a)^{n+1}} \right| = \left| \frac{h'(\xi(x))}{(x-a)^n} \right| < \left| \frac{h'(\xi(x))}{(\xi(x)-a)^n} \right| \xrightarrow[x \to a]{} 0 \ ,$$

защото $\xi(x) \xrightarrow[x \to a]{} a$ (при това $\xi(x) \neq a$) от Лемата за двамата полицаи. Следователно

$$\frac{h(x)}{(x-a)^{n+1}} \xrightarrow[x \to a]{} 0 \ ,$$

което и трябваше да докажем. □

Ще приложим горното твърдение за остатъка.

Твърдение 3.2. *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$ за Δ - отворен интервал и $a \in \Delta$. Освен това нека*

- *f е $(n-1)$ пъти диференцируема в Δ*

- *f е n пъти диференцируема в точката a*

Тогава $R_n(x) = o\left((x-a)^n\right)$, т.е.

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Доказателство. Да дефинираме $h(x) := R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ за $x \in \Delta$. Тъй като полиномите са диференцируеми колкото си искаме пъти, от предположенията за f следва, че h е $(n-1)$ пъти диференцируема в Δ и h е n пъти диференцируема в точката a. При това от пресметнатото вече съотношение $T_n^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$ за всяко $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ следва, че

$$h^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) - T_n^{(i)}(a) = 0 \; \forall\, 0 \le i \le n \Rightarrow h(a) = h'(a) = \cdots = h^{(n)}(a) = 0 \; .$$

Остана да приложим първото твърдение и да получим

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{h(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

□

Това твърдение оправдава думите “от графиките на всички полиноми от степен не повече от n, графиката на T_n приляга най-плътно към графиката на f близо до точката $(a, f(a))$”.

Дефиниция 3.3. *Формула на Тейлър за f около a с остатъчен член във форма на Пеано*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{o\left((x-a)^n\right)}_{R(x)}$$

Забележете, че формулата на Тейлър за f около a с остатъчен член във форма на Пеано ви дава информация само за поведението на остатъка, когато аргументът клони към a.

4 Формула на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж

За да получим формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж, имаме нужда от по-силни предположения за функцията. И тъй, нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е отворен интервал, и $a \in \Delta$. При това нека f е $(n+1)$ пъти диференцируема в Δ.

Фиксираме $x \in \Delta$ произволно и разглеждаме функциите

- $\varphi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$
- ψ нека да е произволна функция, диференцируема между a и x (тоест в (x,a), ако $x<a$, и в (a,x), ако $a<x$), непрекъсната в a и x, и за която $\psi'(x) \neq 0$ между a и x.

Тъй като f е $(n+1)$ пъти диференцируема в Δ, $\varphi : \Delta \to \mathbb{R}$ е диференцируема в Δ. Пресмятаме $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \left[\frac{f'(t)}{1!}(-1) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right] - \left[\frac{f''(t)}{2!}2(x-t)(-1) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right] -$$

$$- \cdots - \left[\frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}(-1) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^{n+1}\right] = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Прилагаме Обобщената теорема за крайните нараствания в за функциите φ и ψ в интервала $[x, a]$, ако $x < a$, или в $[a, x]$, ако $a < x$ и получаваме съществуването на точка $\xi(x)$ между a и x, за която е изпълнено

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi(x))}{\psi'(\xi(x))}$$

Лесно се вижда, че $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(a) = R_n(x)$ съгласно означенията по-горе. Използвайки пресмятането на φ', последното равенство можем да запишем като

$$\frac{-R_n(x)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi(x))}{\psi'(\xi(x))} = \frac{-f^{(n+1)}(\xi(x))\,(x - \xi(x))^n}{n!\,\psi'(\xi(x))}$$

Установяваме, че $R_n(x)$ може да се изрази като:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{n!\,\psi'(\xi(x))}\,(\psi(x) - \psi(a))\,(x - \xi(x))^n$$

Така например, ако $\psi(t) = (x - t)^p$ за $p \in \mathbb{N}$, то за ψ са изпълнени всички условия, които поискахме. Наистина, $\psi'(t) = -p\,(x - t)^{p-1}$ не се анулира между a и x. Следователно

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{n!} \cdot \frac{\psi(x) - \psi(a)}{\psi'(\xi(x))} \cdot (x - \xi(x))^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{n!} \cdot \frac{-(x - a)^p}{-p\,(x - \xi(x))^{p-1}} \cdot (x - \xi(x))^n$$

откъдето

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{n!\,p} \cdot (x - a)^p \cdot (x - \xi(x))^{n-p+1}$$

Тази обща форма на остатъчния член се нарича форма на Шлемилх и Рош.

Ако в тази форма вземем $p = 1$, получаваме остатъчния член във формата на Коши:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{n!}\,(x - \xi(x))^n\,(x - a)$$

Ако във формата на Шлемилх и Рош вземем $p = n + 1$, получаваме остатъчния член във формата на Лагранж:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,(x - a)^{n+1}$$

Дефиниция 4.1. *Формула на Тейлър за f около a с остатъчен член във форма на Лагранж*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}}_{\xi(x) \text{ е между } a \text{ и } x}$$

Ако $a = 0$ в горните формули, формулата на Тейлър наричаме **формула на Маклорен**. Изразяването на дадена функция f чрез формулата на Тейлър/Маклорен се нарича **развитие на f**.

5 Развитие на някои функции в ред на Маклорен

В този параграф ще разгледаме основни развития в ред на Маклорен и ще дадем примери за работа с такива развития:

1. Знаем, че за $f(x) = e^x$ е изпълнено $f^{(n)}(x) = e^x \ \forall n \in \mathbb{N}$. Като знаем, че:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

където ξ_x е между a и x, заместваме $a = 0$ и за $f(x) = e^x$ получаваме:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!} \text{ (Лагранж)}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \text{ (Пеано)}$$

Формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Пеано е изключително мощен инструмент за намиране на граници. Използвайте го!

Всъщност от формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Пеано за дадена функция получаваме цяла редица (за различните n) важни граници.

Пример 5.1. За $n = 1$ от развитието на експонентата получаваме

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1}}{x} = \frac{x + o(x)}{x} = 1 + o(1) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

За $n = 2$ и за $n = 3$ съответно имаме

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{\cancel{1+x} + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - \cancel{(1+x)}}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

И така нататък...

2. Ако $f(x) = \sin x$, можем да открием цикличност при диференциране:

$$\begin{cases} f(x) = \sin x & \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = -1 \end{cases}$$

Всяка $(m + 4n)$-та производна на $\sin x$ е равна на съответната m-та производна, където $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. По-кратък запис е $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Следователно:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\sin\left(\xi_x + (2k+3)\frac{\pi}{2}\right)}{(2k+3)!}x^{2k+3} \text{ (Лагранж)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2k+1}\right) \text{ (Пеано)}$$

Пример 5.2. От развитието на синуса можем да получим границите

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) - \cancel{x}}{x^3} = -\frac{1}{3!}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{3!}}{x^5} = \frac{1}{5!}$$

и така нататък.

3. Разглеждането на $f(x) = \cos x$ е съвсем аналогично:

$$\begin{cases} f(x) = \cos x & \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = 0 \end{cases}$$

Формулата за n-тата производна на косинуса е $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ и съответно

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\cos\left(\xi_x + (2k+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2k+2)!} x^{2k+2} \text{ (Лагранж)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2k}\right) \text{ (Пеано)}$$

Пример 5.3. От развитието на косинуса получаваме например

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - \cancel{1}}{x^2} = -\frac{1}{2!} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{1}{4!}$$

4. **Бином на Нютон.** Разглеждаме $f(x) = (1+x)^\alpha$, където $\alpha \in \mathbb{R}$. Тази функция е добре дефинирана в отворения интервал $(-1, 1)$. Да диференцираме няколко пъти:

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)^\alpha & \Longrightarrow \quad f^{(0)}(0) = 1 \\ f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1} & \Longrightarrow \quad f^{(1)}(0) = \alpha \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & \Longrightarrow \quad f^{(2)} = \alpha(\alpha-1) \\ f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} & \Longrightarrow \quad f^{(3)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \\ \dots & \\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} & \Longrightarrow \quad f^{(n)}(0) = \alpha\dots(\alpha-n+1) \\ \dots & \end{cases}$$

Забелязваме, че:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$$

Тейлъровото развитие на $f(x) = (1+x)^\alpha$ придобива вида:

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} (1+\xi_x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \text{ (Лагранж)}$$

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o\left(x^n\right) \text{ (Пеано)}$$

Пример 5.4. Да пресметнем границата:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{30}{7}} \left(\sqrt[7]{x^5+2} - \sqrt[7]{x^5-3}\right)$$

Формулата на Маклорен не е директно приложима, защото $x \to \infty$ и всъщност не развиваме функциите на x около нулата. Това ни подсказва, че е подходящо да направим смяна $t = \frac{1}{x}$, защото $x \to \infty \iff t \to 0$.

$$\lim_{t\to 0} t^{-\frac{30}{7}} \left(\sqrt[7]{t^{-5}+2} - \sqrt[7]{t^{-5}-3}\right) = \lim_{t\to 0} t^{-\frac{30}{7}} \left(\sqrt[7]{\frac{1+2t^5}{t^5}} - \sqrt[7]{\frac{1-3t^5}{t^5}}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0} t^{-\frac{30}{7}} \left(t^{-\frac{5}{7}}\right)\left(\sqrt[7]{1+2t^5} - \sqrt[7]{1-3t^5}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^5}\left(\left(1+2t^5\right)^{\frac{1}{7}} - \left(1-3t^5\right)^{\frac{1}{7}}\right)$$

Прилагаме биномната формула и получаваме

$$\begin{cases} \left(1+2t^5\right)^{\frac{1}{7}} = 1 + \binom{\frac{1}{7}}{1} 2t^5 + o\left(t^5\right) = 1 + \frac{2}{7}t^5 + o\left(t^5\right) \\ \left(1-3t^5\right)^{\frac{1}{7}} = 1 - \binom{\frac{1}{7}}{1} 3t^5 + o\left(t^5\right) = 1 - \frac{3}{7}t^5 + o\left(t^5\right) \end{cases}$$

Следователно

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{30}{7}} \left(\sqrt[7]{x^5+2} - \sqrt[7]{x^5-3}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^5}\left(\left(1+\frac{2}{7}t^5 + o\left(t^5\right)\right) - \left(1 - \frac{3}{7}t^5 + o\left(t^5\right)\right)\right) = \frac{5}{7}$$

5. Да разгледаме $f(x) = \ln(1+x)$. Отново диференцираме няколко пъти:

$$\begin{cases} f(x) = \ln(1+x) & \Longrightarrow & f^{(0)}(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} & \Longrightarrow & f^{(1)}(0) = 1 \\ f''(x) = (-1)(1+x)^{-2} & \Longrightarrow & f^{(2)}(0) = -1 \\ f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} & \Longrightarrow & f^{(3)}(0) = 2 \\ f''''(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} & \Longrightarrow & f^{(4)}(0) = -6 \\ \dots \end{cases}$$

Лесно можем да проверим по индукция, че

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)(-3)\dots(-n+1)(1+x)^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$$

Следователно

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Сега можем да запишем Маклореновото развитие на логаритъма:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi_x)^{n+1}} \text{ (Лагранж)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n) \text{ (Пеано)}$$

Пример 5.5. Знаем, че $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, но не ни е известно "колко бързо" е това клонене. За да получим някаква информация за това, ще развием $f(x) = e-(1+x)^{\frac{1}{x}}$ около нулата (само до втора степен).

$$f(x) = e-(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e\left(1-e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}\right)$$

Развиваме $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) \Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)$$

Сега можем да запишем горния израз по следния начин:

$$e\left(1-e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}\right) = e\left(1-e^{\cancel{1}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)-\cancel{1}}\right) = e\left(1-e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)}\right)$$

Сега ще използваме развитието на експоненатата около нулата. По същество, развиваме композиция на две изображения. Можем да го направим, защото $y(x) := -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)$ клони към нула, когато x клони към нула.

$$e^{y(x)} = 1 + y(x) + \frac{y^2(x)}{2!} + o\left(y^2(x)\right) \Rightarrow 1 - e^{y(x)} = -y(x) - \frac{y^2(x)}{2!} + o\left(y^2(x)\right)$$

Да забележим, че остатъкът $o\left(y^2(x)\right)$ е $o\left(x^2\right)$. Наистина

$$\frac{o\left(y^2(x)\right)}{x^2} = \frac{o\left(y^2(x)\right)}{y^2(x)} \cdot \frac{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)^2}{x^2} \longrightarrow_{x\to 0} 0 \cdot \frac{1}{4} = 0\ .$$

Тогава можем да запишем

$$\begin{aligned} e\left(1-e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)}\right) &= e\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)^2+o\left(x^2\right)\right) = \\ &= e\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)\right)+o\left(x^2\right)\right) = e\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)\right) = \\ &= e\left(\frac{x}{2}-\frac{11}{24}x^2+o\left(x^2\right)\right)\ ,\ \text{ тоест }\ e-(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left(\frac{x}{2}-\frac{11}{24}x^2+o\left(x^2\right)\right) \end{aligned}$$

Използвахме многократно, че сума на краен брой функции от вида $o\left(x^2\right)$ е функция от вида $o\left(x^2\right)$. Получихме, че $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ клони към неперовото число с линейна скорост. Получихме и следните две граници:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}-\frac{ex}{2}}{x^2} = -\frac{11}{24}e\ .$$

Пример 5.6. Да се развие в полином на Маклорен до четвърта степен функцията $f(x) = \ln(\cos x)$.

Представяме f във вида

$$\ln(\cos x) = \ln(1+(\cos x - 1))$$

Ще използваме развитията на логаритъма

$$\ln\left(1+y\right) = y - \frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right)$$

и на косинуса

$$\cos x - 1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$$

Заместваме в развитието на логаритъма y с $y(x) := -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$. Можем да го направим, защото $y(x) \longrightarrow_{x\to 0} 0$. При това да забележим, че остатъкът $o\left(y^2\left(x\right)\right)$ е от вида $o\left(x^4\right)$. Наистина

$$\frac{o\left(y^2\left(x\right)\right)}{x^4} = \frac{o\left(y^2\left(x\right)\right)}{y^2\left(x\right)} \cdot \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)\right)^2}{x^4} \longrightarrow_{x\to 0} 0 \cdot \frac{1}{4} = 0\ .$$

Причината е, че $y(x)$ се представя като x^2, умножено по функция, която клони към крайно число, различно от нула, когато x клони към нула. Да се върнем към $\ln\left(\cos x\right)$. Заместваме y с резултата от развитието на $\cos x - 1$:

$$\ln\left(\cos x\right) = y - \frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right) = \left[-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)\right]^2 + o\left(x^4\right) =$$

$$= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{x^2}{2!}\right)^2 + o\left(x^4\right) = -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right) x^4 + o\left(x^4\right) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)$$

Майсторлъкът в този тип задачи е предварително да улучите до кой член да развивате – ако напишете твърде много членове, ще смятате прекалено дълго, а ако напишете твърде малко членове, може да не ви стигнат.