1. Формулирайте критерия на Абел-Дирихле за сходимост на несобствени интеграли от вида $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Нека f и g са интегруеми в $[a,u]$ за всяко $a < u$ и f е монотонна
   - Ако $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ и функцията $\int_a^u f(x)\,dx$ е ограничена, тогава $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ е сходящ.
   - Ако $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L(\text{число})$ и интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ, тогава $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ е сходящ.

2. Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост на несобствен интеграл
   - $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ $\Leftrightarrow$ за всяко $\varepsilon > 0$ има B, т.ч. $\left|\int_u^v f(x)dx\right| < \varepsilon$ за всеки $u, v \in (B, +\infty)$
   - $\int_a^b f(x)dx$ е сходящ(с особеност b) $\Leftrightarrow$ за всяко $\varepsilon > 0$ има δ, т.ч. $\left|\int_u^v f(x)dx\right| < \varepsilon$ за всеки $u, v \in (b-\delta, b)$

3. Критерий за сравнение на несобствени интеграли
   - Нека $0 \le f(x) \le g(x)$ за всяко $x \in (a,b)$. Тогава:
     - Ако $\int_a^b g(x)dx$ е сходящ, то $\int_a^b f(x)dx$ е сходящ
     - Ако $\int_a^b f(x)dx$ е разходящ, то $\int_a^b g(x)dx$ е разходящ
     - Логически факт: $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$
   - (Гранична форма): Нека $f(x) > 0$ за всяко $x \in (a,b)$ и $\lim_{x\to b,\ x<b} \frac{g(x)}{f(x)} = L \neq 0$ (число).
     - Тогава: $\int_a^b g(x)dx$ е сходящ $\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx$ е сходящ

4. Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост на ред
   - Редът $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е сходящ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ има N, т. ч. $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$ за всяко $n > N(n \in \mathbb{N})$ и за всяко $p \in \mathbb{N}$
   - Тоест ако $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е сходящ, то $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

5. Критерий за сравнение на редове
   - Интегрален – Нека $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ е монотонна. Тогава $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходящ $\Leftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ
   - (Съществен случай)Нека $f(x) \ge 0$ за всяко $x \in [1,+\infty)$, монотонно намалява и $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Тогава $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходящ $\Leftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ
     - Доказателство: За $x \in [n, n+1]$ е изпълнено $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$, откъдето $f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le f(n)$. Следователно $\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k)$. Твърдението следва от нарастването на $F(u) = \int_1^u f(x)dx$.

   - Спрямо големината на събираемите – Нека $0 \le a_n \le b_n$ за всяко $n > n_0(b \in \mathbb{N})$. Тогава:
     - Ако $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ е сходящ, то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е сходящ
     - Ако $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е разходящ, то $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ е разходящ
     - Логически факт: $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$
     - (Гранична форма): Нека $a_n > 0$ за всяко$x \in (a,b)$ и $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = L \neq 0$ (число). Тогава: $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ е сходящ $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е сходящ

   - Спрямо „скоростта“ - Нека $a_n > 0, b_n > 0$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ за всяко $n > n_0(n \in \mathbb{N})$. Тогава:
     - Ако $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ е сходящ, то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е сходящ
     - Ако $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е разходящ, то $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ е разходящ
     - Логически факт: $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$

6. Критерий за сходимост на Абел-Дирихле на редове
   - Нека a_n е монотонна
   - Ако $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ и сумите $\sum_{k=1}^{n} b_k$ са ограничени, тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е сходящ.
   - Ако $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L(\text{число})$ и редът $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е сходящ.

7. Критерий на Даламбер за сходимост на редове
   - Нека $a_n > 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.
   - Ако има $0 < q < 1$, за което $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq$ q за всяко n > n_0 ($n \in \mathbb{N}$), то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е сходящ. Следва от $0 \leq a_n \leq q^n$.
   - (Гранична форма) Нека съществува $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Тогава ако $L < 1$, то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е сходящ; ако > 1, то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е разходящ.

8. Критерий на Коши за сходимост на редове
   - Нека $a_n \geq 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.
   - Ако има $0 < q < 1$, за което $\sqrt[n]{a_n} \leq$ q за всяко n > n_0 ($n \in \mathbb{N}$), то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е сходящ. Следва от $0 \leq a_n \leq q^n$.
   - (гранична форма) Нека съществува $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Тогава ако $L < 1$, то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е сходящ; ако > 1, то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е разходящ.

9. Критерий на Гаус за сходимост на редове
   - Нека $a_n > 0$ и $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\delta}}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, където $\delta > 0$, а редицата $\{c_n\}_{n+1}^{\infty}$ е ограничена. Тогава:
   - При $\lambda > 1$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ
   - При $\lambda < 1$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ
   - При $\lambda = 1$:
     - При $\mu > 1$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ
     - При $\mu \leq 1$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ

10. Радиус на сходимост на степенни редове
    I. Трихотомия: За степенния ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ е изпълнено точно едно от трите:
       - Редът е сходящ само за $x = 0$.
       - Редът е абсолютно сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$
       - $\exists$ число $R > 0$, т.ч.:
         - при $|x| < R$ редът е абсолютно сходящ
         - при $|x| > R$ редът е разходящ
    II. $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ се нарича радиус на сходимост на ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, ако
       - при $|x| < R$ редът е абсолютно сходящ (включва и $R = 0, R = +\infty$)
       - при $|x| > R$ редът е разходящ (включва и $R = 0, R = +\infty$)

11. Функцията $F(x, y)$ се нарича диференцируема в точката (x_0, y_0), ако:
   - Нека $a(x_0, y_0)$ и нека X=(x_0, y_0) е вътрешна точка за D_f на функцията $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Казваме, че f е диференцируема в точката a ако има линейна функция $L: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, за която $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(X)-f(a)-L(X-a)}{||X-a||} = 0$

12. Критерий на Раабе-Дюамел за сходимост на редове

- Нека $a_n > 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.
- Ако има $q > 1$, за което $\mathrm{n}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q$ за всяко n > n_0 ($n \in \mathbb{N}$), то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е сходящ. Следва от $0 \leq a_n \leq q^n$.
- (Гранична форма) Нека съществува $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{n}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L$. Тогава ако $L > 1$, то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е сходящ; ако < 1, то $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е разходящ.
- Доказателство: $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \geq q$
    - $k(a_k - a_{k+1}) \geq q(a_{k+1}) \ \mid -a_{k+1}$
    - $ka_k - (k+1)a_{k+1} \geq (q-1)a_{k+1}$
    - $(k+1)a_{k+1} - (k+2)a_{k+2} \geq (q-1)a_{k+2}$
    - $n_0 a_{n_0} \geq n_0 a_{n_0} - na_n \geq (q-1) \ \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_{k+1}$
    - $\frac{n_0}{q-1} a_{n_0} \geq \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_{k+1} \Rightarrow \text{огр. отгоре}$
    - $\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_{k+1}$ е сходящ $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}$ е сходящ.
    - $\mathrm{n}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$
    - $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$ (харм. ред)
    - $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ е разходящ

13. Критерия на Лайбниц за сходимост на редове

- Нека $a_n \geq 0$ монотонно намалява и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Тогава редът $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е сходящ.
- Доказателство:
    - $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k;$
    - $S_{2m+2} - S_{2m} = (-1)^{2m+1-1} a_{2m+1} + (-1)^{2m+2-1} a_{2m+2} = a_{2m+1} - a_{2m+2} \geq 0,$ ↗расте
    - $S_{2m+1} - S_{2m-1} = (-1)^{2m+1-1} a_{2m+1} + (-1)^{2m-1} a_{2m} = a_{2m+1} - a_{2m} \leq 0,$ ↙намалява
    - $S_{2m+1} - S_{2m} = (-1)^{2m+1-1} a_{2m+1} = a_{2m+1} \Rightarrow S_{2m} \leq S_{2m+1}$
    - $S_{2m+1} \geq S_{2m} \geq S_{2p} \ (m \geq p) \qquad S_{2n} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n-1}$
    - $S_{2m+1} \geq S_{2p+1} \geq S_{2p} \ (p > m)$
    - $\Rightarrow \text{огр. отгоре от } S_1$(коя да е нечетна сума)
    - $\operatorname*{Lim}\limits_{m\to+\infty} S_{2m} = S^{**}; \ \lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m+1} = S^{*} \Rightarrow S_{2m} - S_{2m+1} = a_{2m+1} = S^{**} - S^{*} \Rightarrow$ цялата редица е сходяща
    - $\left|S_{n+p} - S_n\right| \leq a_{n+1}$

14. Формулирайте и докажете теоремата за равенство на смесените производни:

- Нека $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ има частни производни $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, i \neq j$, и втори частни производни $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ в $B^o(a, \delta_o)$.
- Ако $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ са непрекъснати в a, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$(a) = $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$(a).
- Доказателство: Можем да предполагаме, че $k = 2, a = (x_0, y_0)$. Нека $0 \leq c_1, c_2, c_3, c_4 \leq 1$.
    - Пол. $G(x,y) = F(x,y) - F(x_0,y) - F(x,y_0) + F(x_0,y_0)$
    - $G(x,y) = (x - x_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_1(x - x_0), y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c_1(x - x_0), y_0)\right) = (x - x_0)(y - y_0)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(x_0 + c_1(x - x_0), y_0 + c_2(y - y_0)\big)\right)$
    - Аналог. $G(x,y) = F(x,y) - F(x,y_0) - F(x_0,y) + F(x_0,y_0)$
    - $G(x,y) = (y - y_0)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, y_0 + c_3(y - y_0)\big) - \frac{\partial f}{\partial y}\big(x_0, y_0 + c_3(x - x_0)\big)\right) = (x - x_0)(y - y_0)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\big(x_0 + c_4(x - x_0), y_0 + c_3(y - y_0)\big)\right)$
    - При $x \neq x_0, y \neq y_0$ имаме $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big(x_0 + c_1(x - x_0), y_0 + c_2\big(y - y_0\big)\Big)$ = $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big(x_0 + c_4(x - x_0), y_0 + c_3\big(y - y_0\big)\Big)$
    - Предвид непрекъснатостта, исканото се получава с граничен преход $(x, y) \to (x_0, y_0)$

15. Теорема за интегруемост на непрекъсната функция върху правоъгълник

- Ако f е непрекъсната в $\Delta = [a,b] \times [p,q]$, то f е интегруема върху Δ
- Доказателство: Съгласно теоремата за равномерна непрекъснатост, f е равномерно непрекъсната върху Δ. Следователно за всяко $\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, за което от $\sqrt{(x^{**} - x^*)^2 + (y^{**} - y^*)^2} < \delta$ следва $|f(x^*, y^*) - f(x^{**}, y^{**})| < \frac{\varepsilon}{S(\Delta)}$
    - Избираме n толкова голямо, че $\frac{\sqrt{(b-a)^2 + (q-p)^2}}{n} < \delta$. Полагаме $x_i = a + i\frac{b-a}{n}, i = 0,1, \ldots, n$ и $y_j = p + j\frac{q-p}{n}, j = 0,1, \ldots, n$. Имаме $S(\Delta_{i,j}) = \frac{S(\Delta)}{n^2}$. От теоремата на Вайерщрас, $m_{i,j} = f(x_i^*, y_j^*), (x_i^*, y_j^*) \in \Delta_{i,j}$ и $M_{i,j} = f(x_i^{**}, y_j^{**}), (x_i^{**}, y_j^{**}) \in \Delta_{i,j} \Rightarrow M_{i,j} - m_{i,j} < \frac{\varepsilon}{S(\Delta)} \Rightarrow$
    - $S(f, \Delta, (\tilde{x}, \tilde{y})) - s(f, \Delta, (\tilde{x}, \tilde{y})) = \frac{S(\Delta)}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (M_{i,j} - m_{i,j}) < \frac{S(\Delta)}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{S(\Delta)} = \varepsilon$

16. Довършете дефинициите:

- Казваме, че множеството $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ е с мярка нула (в смисъл на Пеано-Жордан), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число $n \in \mathbb{N} : \exists \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ – правоъгълници, такива че $\mathcal{A} \subset \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$ и $\sum_{i=1}^{n} S(\Delta_i) < \varepsilon$, където $S(\Delta_i)$ е лицето на правоъгълника Δ_i
- Казваме, че множеството $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо в смисъл на Пеано-Жордан, ако
    - Съществува правоъгълник $\Delta = [a,b] \times [p,q], \Delta^0 = \Delta = (a,b) \times (p,q), S(\Delta) = S(\Delta^0) = (b-a)(q-p)$.
    - “Елементарна“ фигура: $\Phi = \bigcup_{s=1}^{m} \Delta_s, \Delta_i^0 \cap \Delta_j^0 = \emptyset$ за $i \neq j, S(\Phi) = \sum_{s=1}^{m} S(\Delta_s)$
    - $\Phi_{in} \subset \mathcal{A} \subset \Phi_{out} \Rightarrow S(\Phi_{in}) \leq S(\Phi_{out})$
    - $\underline{\mu}(\mathcal{A}) = sup S(\Phi_{in}) \leq inf S(\Phi_{out}) = \overline{\mu}(\mathcal{A})$
    - $\mathcal{A}$ се нарича измеримо, ако $\underline{\mu}(\mathcal{A}) = \overline{\mu}(\mathcal{A})$

17. Представяне на двоен интеграл като повторни

- Нека $f(x,y)$ е интегруема върху правоъгълника $\Delta = [a,b] \times [p,q]$ и за всяко $x \in [a,b]$ функцията $\psi_x = f(x,y)$ е интегруема в $[p,q]$. Тогава функцията $\varphi(x) = \int_p^q \psi_x(y)\,dy$ е интегруема в $[a,b]$ и $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy$.
- Доказателство: Нека $\tilde{x}, \tilde{y}$ е разрязване на Δ и $(x,y) \in \Delta_{i,j}$. Тогава $m_{i,j} \le f(x,y) \le M_{i,j}$.
  - След интегриране получаваме: $m_{i,j}(y_j - y_{j-1}) \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy \le M_{i,j}(y_j - y_{j-1})$
  - Следователно $\sum_{j=1}^{l} m_{i,j}(y_j - y_{j-1}) \le \int_p^q f(x,y)dy \le \sum_{j=1}^{l} M_{i,j}(y_j - y_{j-1})$, което означава, че $\varphi(x)$ е ограничена във всеки един от интервалите $[x_{i-1}, x_i]$(а значи и в $[a,b]$) и $\sum_{j=1}^{l} m_{i,j}(y_j - y_{j-1}) \le m_i^{\varphi} = \inf\{\varphi(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\} \le \sup\{\varphi(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\} = M_i^{\varphi} \le \sum_{j=1}^{l} M_{i,j}(y_j - y_{j-1})$
  - След умножаване с $x_i - x_{i-1}$ и сумиране по i получаваме: $s(f, \Delta, (\tilde{x}, \tilde{y})) \le s(\varphi, [a,b], \tilde{x}) \le S(\varphi, [a,b], \tilde{x}) \le S(f, \Delta, (\tilde{x}, \tilde{y}))$
  - За $\varepsilon > 0$ избираме разрязване $\tilde{x}, \tilde{y}$ на Δ с $S(f, \Delta, (\tilde{x}, \tilde{y})) - s(f, \Delta, (\tilde{x}, \tilde{y})) < \varepsilon$. Тогава $S(\varphi, [a,b], \tilde{x}) - \mathrm{c}(\varphi, [a,b], \tilde{x}) \le S(f, \Delta, (\tilde{x}, \tilde{y})) - s(f, \Delta, (\tilde{x}, \tilde{y})) < \varepsilon$, което означава, че $\varphi(x)$ е интегруема в $[a,b]$. За всяко разрязване $\tilde{x}, \tilde{y}$ на Δ е изпълнено $s(f, \Delta, (\tilde{x}, \tilde{y})) \le s(\varphi, [a,b], \tilde{x}) \le \int_a^b \varphi(x)dx \le S(\varphi, [a,b], \tilde{x}) \le S(f, \Delta, (\tilde{x}, \tilde{y}))$
  - Следователно $\int_a^b \varphi(x)\,dx = \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy$, защото $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ е между малките и големите суми на Дарбу за $f(x,y)$ в Δ, а $\iint_\Delta f(x,y)\,dxdy$ е единственото такова число.

18. Множеството от граничните точки $\partial\mathcal{A}$ има мярка 0 в смисъл на Пеано-Жордан, когато $\mathcal{A}$ е измеримо ($S(\partial\mathcal{A}) = 0$). Измеримо $\Rightarrow$ мярка 0

- Доказателство: Нека $\mathcal{A}$ е измеримо, $\mathcal{A} \subset \Delta$ и $\varepsilon > 0$. Съществува разрязване $\tilde{x}, \tilde{y}$ на Δ, за което $S(\chi_{\mathcal{A}}, \Delta, \tilde{x}, \tilde{y}) - s(\chi_{\mathcal{A}}, \Delta, \tilde{x}, \tilde{y}) < \frac{\varepsilon}{2}$, или $\sum_{m_{ij}=0,\ M_{ij}=1} S(\Delta_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{2}$.
- Нека $h = \frac{\varepsilon}{4(k(b-a)+n(q-p))}$. Разглеждаме правоъгълниците:
  - $\Delta^*{}_i = [x_i - h, x_i + h] \times [p,q]$, вместо $x_0 - h$ вземаме x_0, вместо $x_0 + h$ вземаме x_n
  - $\Delta^{**}{}_j = [a,b] \times [y_j - h, y_j + h]$, вместо $y_0 - h$ вземаме y_0, вместо $y_0 + h$ вземаме y_k
- За правоъгълниците $\Delta_{i,j}, m_{i,j} = 0, M_{i,j} = 1, \Delta_i^*, 0 \le i \le n, \Delta_i^{**}, 0 \le j \le k$ имаме:
  - Сумарно лице по-малко от ε
  - $\partial\mathcal{A} \subset \bigcup_{m_{i,j}=0, M_{i,j}=1} \Delta_{i,j} \cup \bigcup_{i=0}^{n} \Delta_i^* \cup \bigcup_{j=0}^{k} \Delta_i^{**}$.
- Ако $(x,y) \in \partial\mathcal{A}$ I $(x,y) \notin \bigcup_{i=0}^{n} \Delta_i^* \cup \bigcup_{j=0}^{k} \Delta_i^{**}$, то (x,y) е вътрешна за някой правоъгълник $\Delta_{i,j}$. За него $m_{i,j} = 0, M_{i,j} = 1$.
- Следователно, $\partial\mathcal{A}$ има мярка 0 в смисъл на Пеано-Жордан.
- Обратната посока се получава от факта, че точките на прекъсване на $\chi_{\mathcal{A}}$ са $\partial\mathcal{A}$ и достатъчното условие за интегруемост върху правоъгълник

19. Множеството $\mathcal{A}$ е измеримо в смисъл на Пеано-Жордан, когато множеството от граничните точки има $\partial\mathcal{A}$ мярка 0. Мярка 0 $\Rightarrow$ измеримо

- Нека множеството от граничните точки $\partial\mathcal{A}$ има мярка 0. Ако сме вътре в множеството, то $\chi_{\mathcal{A}}$ в околност е 1, $\chi_{\mathcal{A}} = 1$. Ако сме извън множеството $\chi_{\mathcal{A}}$ в околност е 0, т.е. $\chi_{\mathcal{A}} = 0$.
- Единствено по границата имаме точки на прекъсване, т.е. имаме точки на прекъсване на $\chi_{\mathcal{A}}$. Тъй като границата е с мярка 0 $\Rightarrow$ $\partial\mathcal{A}$ е с мярка 0 $\Rightarrow$ $\chi_{\mathcal{A}}$ е интегруема върху $\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A}$ е измеримо