Далин Далчев фн: 0МI 0600041.
Софтуерно инженерство, I курс.

Изпит част 2

(3) Функцията $f(x)$ дефинирана за $\forall x \in \mathbb{R}$ ($DO = \mathbb{R}$) има граница L, когато ~~х~~ клони към $+\infty$, ако:

Хайне: $f(x)$ клони към L, ~~тогава~~, ако $x \to +\infty$
за $\forall$ редица от точки на DO $\{x_n\} \to +\infty$
имаме също и $\{f(x)\} \to L$

Коши: ~~К~~ Казваме, че функцията има граница $\underline{\underline{L}}$
~~Когато $x \to +\infty$~~
ако за $\forall \varepsilon$ има и число C:
$x \in DO(\mathbb{R})$ и $x > C$ имаме и $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(4) Хайне и Коши са еквивалентни (условията):

1) Коши $\Rightarrow$ Хайне

Нека $\{x_n\}_1^\infty \to +\infty \Rightarrow \forall C > 0 \ \exists N; \forall n > N \Rightarrow x_n > C$

Нека $\underline{\varepsilon > 0}$, според Коши: $\exists C > 0: x > C \ |f(x) - L| < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists N \ \forall n > N: x_n > C \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

и $\Rightarrow f(x_n) \to L$

2.) Хайне $\to$ Коши

Допускаме, че Коши не е в сила, т.е. $\exists \varepsilon > 0 : \forall C > 0$

$\exists x : (x > C$ имаме

$|f(x) - L| \geq \varepsilon)$

Фиксираме ε_0, $C_n := n$, ~~като~~ $\Rightarrow \forall C_n \, \exists x_n > C$ и

това x_n е ~~в~~ редицата от условието на Хайне

$\{x_n\} \to +\infty$

От допускането ни $\Rightarrow \forall x_n |f(x) - L| \geq \varepsilon_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x_n)| \not\to L \Rightarrow$ Хайне не е в сила

$\Rightarrow$ Хайне $\Rightarrow$ Коши

от 1) и 2) $\Rightarrow$ Хайне е еквивалентно на Коши (условията)

$\square$

=2=

⑤ Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[0;+\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ и $f(0)>L$. Док, че

а) $f(x)$ е ограничена в $[0;+\infty)$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists C>0: \forall x>C:$

$|f(x)-L|<\varepsilon$

$\Rightarrow f(x)\in(L-\varepsilon;L+\varepsilon)$

Избираме $\varepsilon_0=1 \Rightarrow$ за $x>C$ $f(x)$ е ограничена:

$L-1<f(x)<L+1$

Разгл. интерва $[0;C]$ – краен. затворен инт.

f е непрекъсната в $[0;+\infty) \Rightarrow f$ е непр. в $[0;C]$

от Th. на Вайерщрас $f(x)$ достига най-голяма и най-малка стойност и е ограничена в околността им.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ е огр. в } [0;C] \\ f(x) \text{ е огр. в } [C;+\infty] \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ е огр. в } [0;+\infty)$$

б) $f(x)$ има НТС в $[0;+\infty)$

$\lim f(x)=L \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists C>0;\ \forall x>C \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$f(x)\in(L-\varepsilon;L+\varepsilon)$

Избираме $\varepsilon=\dfrac{f(0)-L}{2}>0$

$\Rightarrow f(x)<\varepsilon+L \Rightarrow f(x)<\dfrac{f(0)-L}{2}=\dfrac{f(0)+L}{2}<f(0)$

за $\forall x>C: f(x)<f(0)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Разгл. интервала } [0;C] \text{ – краен затворен интервал} \\ f \text{ е непрекъсната в } [0;C] \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Вайерщрас}$$

$\Rightarrow$ в $[0; c]$ се достига НГС и озн. $f(x_0)$ - НГС

т.е. $\left. \begin{array}{l} f(0) \le f(x_0) \text{ в } [0; c] \\ f(x) \le f(0) \text{ в } (0; +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) < f(0)$ в $[0; +\infty)$

$\Rightarrow$ в $[0; +\infty)$ се дотига НГС. □