1 Неопределен интеграл

1.1 Примитивна

- За интервал J означаваме с J_0 интервала, състоящ се от вътрешните точки на J.

  Казваме, че F е примитивна на f в J, ако F е непрекъсната в J, има производна в J_0 и $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in J_0$

- Ако f е непрекъсната в J, то има примитивна в J.

- Разликата на всеки две примитивни е константа.

- Примитивните на някои елементарни функции не могат да се представят като елементарни.

- Неопределен интеграл $\displaystyle\int f(x)dx$ – множеството от всички примитивни или коя да е от тях

1.2 Основни неопределени интеграли

1. $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ при $\alpha \neq -1$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

4. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \ln\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} + C$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$$

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$$

1.3 Основни свойства

- $$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

- $$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

- $$\int \left(Bf(x)\right)dx = B\int f(x)dx$$

- $$\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

1.4 Методи на интегриране

1.4.1 Внасяне зад диференциала

- Означение: $\displaystyle\int f(x)dg(x) = \int f(x)g'(x)dx$

- $\displaystyle\int f(x)d\left(Bg(x)\right) = \int Bf(x)dg(x) = B\int f(x)dg(x)$

- $\displaystyle\int f(x)dg(x) = \int f(x)d\left(g(x) + B\right)$

- Нека $F(u)$ е примитивна на $f(u)$, а g има производна. Тогава $F(g(x))$ е примитивна на $f(g(x))g'(x)$.

- $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))dg(x) = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$

1.4.2 Внасяне зад диференциала – примери

- Добавка към таблицата $(\, a > 0\,)$

1. $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (\, a \neq 1\,)$$

2. $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

3. $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\,\ln\sqrt{\left|\frac{a+x}{a-x}\right|} + C$$

4. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

- $$\int x\left(x^2+2018\right)^{2019}dx=\frac{\left(x^2+2018\right)^{2020}}{4040}+C$$

- $$\int \frac{xdx}{x^2+2x+2}=\ln\sqrt{x^2+2x+2}-\operatorname{arctg}(x+1)+C$$

- $$\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{d\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,.\,\cos^2\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$$

1.4.3 Смяна на променливите

- Нека $F(t)$ е примитивна на $f(g(t))g'(t)$, а $g(t)$ има производна и е обратима с обратна $h(x)$. Тогава $F(h(x))$ е примитивна на $f(x)$.

- $$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt=F(t)+C=F(h(x))+C$$

- $$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \ (x = \operatorname{tg} t)\ \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\, dt$$
$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C$$

1.4.4 Интегриране по части

- Нека $f(x)$ и $g(x)$ имат непрекъснати производна и $G(x)$ е примитивна на $f'(x)g(x)$. Тогава $f(x)g(x) - G(x)$ е примитивна на $f(x)g'(x)$.

- $$\int f(x)g'(x)dx = \int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

1.4.5 Интегриране по части – примери

- $$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}\int \ln x dx^4 = \frac{1}{4}\left(x^4 \ln x - \int x^3 dx\right) = \dots$$

- $$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$$

- $$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx = \dots$$

- $$\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x - 3\int x^2 \sin x dx = \dots$$

- $$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

- $$\int \sqrt{x^2+1} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \int x d\sqrt{x^2+1} =$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}\,dx$$