Лекция 11: Достатъчни условия за локален екстремум. Изпъкнали функции

1 Достатъчни условия за локални екстремуми

Да напомним дефиницията за локален екстремум:

Дефиниция 1.1. *Локален екстремум на функция*
Нека $f : D \to \mathbb{R}$. Казваме, че f има локален минимум в точката x_0, ако съществува $\delta > 0$ такова, че $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$ и $f(x_0) \leq f(x)$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Аналогично, ако при горните условия $f(x_0) \geq f(x)$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то f има локален максимум в x_0. Локалните минимуми и локалните максимуми се наричат локални екстремуми.

Досега разполагаме само с едно необходимо условие за локален екстремум на диференцируема функция:

Теорема 1.2. *Теорема на Ферма*
Нека $f : D \to \mathbb{R}$ и x_0 е точка на локален екстремум за f, като f е диференцируема в x_0. Тогава $f'(x_0) = 0$.

Разбира се, производната на функция, диференцируема в отворен интервал, може да се анулира в някоя точка, без точката да е локален екстремум за функцията (например x^3 е строго растяща в цялата реална права, а производната ѝ се анулира в нулата). Сега ще представим две достатъчни условия за локален екстремум (които не са необходими).

Твърдение 1.3. *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$ за Δ - отворен интервал, и $x_0 \in \Delta$. Нека f е диференцируема в Δ и $f'(x_0) = 0$. Тогава:*

(а) Ако съществува $\delta > 0$ такова, че $f'(x) \geq 0$ за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) \leq 0$ за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 е локален максимум за f.

(б) Ако съществува $\delta > 0$ такова, че $f'(x) \leq 0$ за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) \geq 0$ за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 е локален минимум за f.

(в) Ако съществува $\delta > 0$ такова, че $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, то x_0 е не е локален скстремум за f.

Доказателството се състои в директно приложение на Принципа за монотонност. Например в подточка (а) функцията расте в интервала $(x_0 - \delta, x_0)$, намалява в интервала $(x_0, x_0 + \delta)$ и, разбира се, е непрекъсната в x_0, откъдето следва, че x_0 е локален максимум за f. В подточка (в) трябва да използвате, че f строго расте (строго намалява) в $(x_0 - \delta, x_0)$ и в $(x_0, x_0 + \delta)$.

Приложимостта на горното твърдение е ограничена. Възможно е една диференцируема функция да има локален екстремум в дадена точка, но производната ѝ да мени знака си колкото си иска близо както отляво, така и отдясно на точката, както се вижда от следния

Пример 1.4. Да разгледаме функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирана с $f(0) = 0$ и $f(x) = x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)$, когато $x \neq 0$. Очевидно $f(x) > 0$ винаги, когато $x \neq 0$. Следователно f има локален (и глобален) минимум в нулата. Проверете сами, че $f'(0) = 0$. От друга страна, за $x \neq 0$ имаме

$$f'(x) = 4x^3 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) + x^4 \left(\cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = x^2 \left[4x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x}\right]$$

Знакът на производната се определя от втория множител. Тъй като

$$4x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) \longrightarrow_{x \to 0} 0$$

и $\cos \frac{1}{x}$ приема стойности 1 и -1 в произволно малка околност на нулата, то f' приема както положителни, така и отрицателни стойности във всеки интервал от вида $(-\delta, 0)$ (и във всеки интервал от вида $(0, \delta)$).

Теорема 1.5. *Достатъчно условие за локален екстремум, използващо n-та производна Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е отворен интервал, $x_0 \in \Delta$ и $n \geq 2$. Нека f е $(n-1)$ пъти диференцируема в Δ и n пъти диференцируема в точката x_0, като при това*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad и \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Тогава:

(а) Ако n е четно, то x_0 е точка на локален екстремум за f. При това, ако $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 е строг локален минимум; ако $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 е строг локален максимум.

(б) Ако n е нечетно, то x_0 не е точка на локален екстремум за f.

Доказателство. Използваме формулата на Тейлър за f около точката x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}}_{\text{по условие } = 0} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Опростяваме до:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) = (x - x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}\right]$$

Както бе доказано в предишната лекция, $R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$. Избираме ε такова, че знакът на израза в скобите да зависи само от $f^{(n)}(x_0)$:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right| > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : \left|\frac{R_n(x_0)}{(x - x_0)^n}\right| < \varepsilon$$

Разглеждаме двата случая в условието:

(а) Ако n е четно, то $(x-x_0)^n > 0$ за $x \neq x_0$. Тогава:

$$f^{(n)}(x_0) > 0 \Longrightarrow \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) : \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x_0)}{(x-x_0)^n}\right] > 0$$

Следователно $f(x) > f(x_0)\ \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$ и x_0 е точка на строг локален минимум за f.

$$f^{(n)}(x_0) < 0 \Longrightarrow \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) : \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x_0)}{(x-x_0)^n}\right] < 0$$

Следователно $f(x) < f(x_0)\ \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$ и x_0 е точка на строг локален максимум за f.

(б) Ако n е нечетно, то знакът на $(x-x_0)^n$ се мени в зависимост от това, дали $x < x_0$ или $x > x_0$. По-точно, $(x-x_0)^n > 0$ за $x > x_0$ и $(x-x_0)^n < 0$ за $x < x_0$. Ако $f^{(n)}(x_0) > 0$, то вторият множител е положителен в $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и следователно $f(x) - f(x_0) < 0$ за всички $x \in (x_0-\delta, x_0)$ и $f(x) - f(x_0) > 0$ за всички $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Следователно x_0 не е точка на локален екстремум. Абсолютно аналогично се разглежда случаят $f^{(n)}(x_0) < 0$.

$\square$

Това условие е интересно, особено от теоретична гледна точка, но отново не е достатъчно, дори функцията да е диференцируема колкото си искаме пъти. Примерът по-долу показва това, но той има и друго, по-далеч отиващо значение, затова е добре да го запомните.

Пример 1.6. Ще докажем, че функцията

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

е диференцируема колкото искаме пъти върху цялата реална права, като при това $f^{(n)}(0) = 0$ за всяко естествено n.

Доказателство. Доказателството е с индукция по $n \in \mathbb{N}$ за n-тата производна. При $n = 1$ имаме

$$f'(0) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0 \end{cases}$$

и следователно функцията е диференцируема в нулата с производна нула. Очевидно $f'(x) = 0$ за $x < 0$, а за $x > 0$ пресмятаме и получаваме, че

$$f'(x) = \begin{cases} 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Правим индукционното предположение, че $f^{(n)}$ съществува, като има следния вид

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} Q_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

където Q_n е полином. Базата на индукцията е готова, сега да направим индукционната стъпка – от горното предположение ще получим $n+1$-вата производна. При $x > 0$ просто диференцираме:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left[Q_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right]' = Q_n'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} + Q_n\left(\frac{1}{x}\right)2e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-3} = \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}}\underbrace{\left[\left(-\frac{1}{x^2}\right)Q_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\right]}_{Q_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

Ще означим $Q_{n+1}(y) = -y^2Q_n'(y) + 2y^3Q_n(y)$. Ясно е, че ако Q_n е полином, то Q_{n+1} също е полином (защото и производната на полином е полином). Ако $x < 0$, очевидно $f^{(n+1)}(x) = 0$. Остана да диференцираме $f^{(n)}$ в нулата:

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \begin{cases} *, & x \xrightarrow[x>0]{} 0 \\ 0, & x \xrightarrow[x<0]{} 0 \end{cases}$$

$$\text{където } * : \lim_{x\to 0^+}\frac{Q_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y\to\infty}\frac{yQ_{n+1}(y)}{e^{y^2}} = 0$$

Използвахме, че експонентата расте по-бързо от който и да е полином. С това твърдението е доказано по индукция. □

Сега да разгледаме функциите

$$g_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad g_2(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -e^{-\frac{1}{x^2}}, & x < 0 \end{cases}$$

От горните пресмятания получаваме, че и двете функции са колкото искаме пъти диференцируеми върху цялата реална права и всичките им производни в нулата се анулират. Директно се вижда, че g_1 има строг локален (и глобален) минимум в нулата, а g_2 няма екстремуми.

2 Изпъкнали множества и изпъкнали функции

Изпъкналостта е важно понятие в съвременната математика. В училище сте се сблъсквали с понятието "изпъкнал четириъгълник". Ние ще въведем понятието "изпъкнало подмножество на равнината", като дефиницията по същество остава същата в линейно пространство с произволна размерност.

Дефиниция 2.1. *Изпъкнало множество*

Множеството $A \subset \mathbb{R}^2$ се нарича изпъкнало, ако за всеки избор на $a' \in A$ и $a'' \in A$ цялата отсечка $[a', a'']$ с крайща тези две точки лежи изцяло в A.

Да запишем формално "отсечката $[a', a'']$ с крайща a' и a''" като множество от точки:

$$\left[a', a''\right] := \left\{a' + t\left(a'' - a'\right) : t \in [0,1]\right\} = \left\{p_1 a' + p_2 a'' : p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1\right\}$$

Двете дефиниции са еквивалентни, защото $a' + t\,(a'' - a') = a' + ta'' - ta' = (1-t)\,a' + ta''$. Достатъчно е да положим $p_1 := 1 - t$ и $p_2 := t$, за да съобразим, че последното равенство по-горе е в сила. Много често числата p_1, p_2 ще наричаме *тегла.* Трябва да помните, че в случая a' и a'' са вектори с по две координати и става въпрос за умножение на вектор с число и за събиране на вектори.

Забележка. Ако имаме две точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, като $x_1 < x_2$, интервалът $[x_1, x_2]$ между тях е всъщност "свързващата ги отсечка":

$$[x_1, x_2] = \{p_1 x_1 + p_2 x_2 : p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1\}$$

Наистина, $x_1 \leq p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq x_2$ от условията върху теглата. Обратно, ако $x \in [x_1, x_2]$, то можем да дефинираме

$$p_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad \text{и} \quad p_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \geq 0$$

Ясно е, че $p_1 + p_2 = 1$. При това

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2 = \frac{1}{x_2 - x_1}\left(\cancel{x_2 x_1} - x x_1 + x x_2 - \cancel{x_1 x_2}\right) = \frac{x\,(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x$$

Значи изпъкналите подмножества на реалната права са точно интервалите.

Понятието "изпъкнала функция" се свежда към понятието "изпъкнало множество" чрез следната

Дефиниция 2.2. *Епиграфика на функция f*

Разглеждаме функция $f : D \to \mathbb{R}$. Епиграфика на f наричаме множеството

$$epi\,(f) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D, y \in \mathbb{R}, y \geq f\,(x)\right\}$$

Интуитивно, това е множеството от точки над графиката на функцията f.

Дефиниция 2.3. *Изпъкнала функция*

Функция $f : D \to \mathbb{R}$ с $D \subset \mathbb{R}$ наричаме изпъкнала, ако $epi\,(f)$ е изпъкнало подмножество на равнината.

Твърдение 2.4. *Нека $f : D \to \mathbb{R}$ с $D \subset \mathbb{R}$. Твърдим, че f е изпъкнала тогава и само тогава, когато D е интервал и за всеки избор на $x_1, x_2 \in D$ и тегла $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$ с $p_1 + p_2 = 1$ е в сила:*

$$f\,(p_1 x_1 + p_2 x_2) \leq p_1 f\,(x_1) + p_2 f\,(x_2)$$

Доказателство. Доказваме последователно двете посоки:

($\Rightarrow$) Имаме, че $epi\,(f)$ е изпъкнало множество. Да вземем $x_1, x_2 \in D$ - произволни (без ограничение на общността $x_1 < x_2$), както и $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$ - произволни с $p_1 + p_2 = 1$. Тогава:

$$\begin{cases} a' = (x_1, f\,(x_1)) \in epi\,(f) \\ a'' = (x_2, f\,(x_1)) \in epi\,(f) \end{cases} \Rightarrow \left[a', a''\right] \subset epi\,(f)$$

Сега точката $p_1 a' + p_2 a''$ има координати $(p_1 x_1 + p_2 x_2, p_1 f\,(x_1) + p_2 f\,(x_2))$ и принадлежи на $epi\,(f)$ поради изпъкналостта на $epi\,(f)$. Следователно $p_1 x_1 + p_2 x_2 \in D$ и
$p_1 f\,(x_1) + p_2 f\,(x_2) \geq f\,(p_1 x_1 + p_2 x_2)$. От произволността на теглата и от забележката погоре получихме и че $[x_1, x_2] \subset epi\,(f)$ за всеки избор на $x_1, x_2 \in D$ с $x_1 < x_2$, което означава, че D е интервал.

($\Leftarrow$) Избираме произволни $a' = (x_1, y_1) \in epi\,(f)$ и $a'' = (x_2, y_2) \in epi\,(f)$ (това означава, че $x_1, x_2 \in D$ и $y_1 \geq f(x_1)$, $y_2 \geq f(x_2)$). Нека a е коя да е точка от отсечката, свързваща a' и a''. Следователно:

$$\exists\, p_1 \geq 0\ \exists\, p_2 \geq 0\ ,\ p_1 + p_2 = 1\ : p_1 a' + p_2 a'' = a$$

Покоординатно, можем да запишем $a = (p_1 x_1 + p_2 x_2, p_1 y_1 + p_2 y_2)$. Искаме да докажем, че $a \in epi\,(f)$. Непосредствено от дефиницията:

$$\begin{cases} x_1, x_2 \in D \Rightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 \in D\ ,\ \ \text{защото}\ \ D\ \ \text{е интервал} \\ p_1 y_1 + p_2 y_2 \geq p_1 f\,(x_1) + p_2 f\,(x_2) \geq f\,(p_1 x_1 + p_2 x_2) \end{cases}$$

□

Следното твърдение е подготовка за характеризацията на диференцируемите изпъкнали функции, но и само по себе си е интересно.

Твърдение 2.5. *Нека $f : D \to \mathbb{R}$ с D интервал. Твърдим, че f е изпъкнала тогава и само тогава, когато за всеки избор на $x_1, x_2, x \in D$ с $x_1 < x < x_2$ е в сила неравенството*

$$\frac{f\,(x) - f\,(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f\,(x_2) - f\,(x)}{x_2 - x}$$

Доказателство. Според предишното твърдение, тъй като сме предположили, че D е интервал, изпъкналостта на f е еквивалентна на неравенството

$$f\,(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f\,(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f\,(x_2)$$

винаги, когато $x_1, x_2, x \in D$ изпълняват $x_1 < x < x_2$. От забележката в началото на тази лекция знаем с какви тегла се получава x от x_1, x_2:

$$x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2$$

Използваме, че сумата на теглата е едно, и правим еквивалентни преобразования на неравенството:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{x_2 - x}{\cancel{x_2 - x_1}} \right) (f(x) - f(x_1)) \leq \frac{x - x_1}{\cancel{x_2 - x_1}} (f(x_2) - f(x)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

□

Геометричното значение на това твърдение е, че секущата през $(x, f(x))$ и $(x_1, f(x_1))$ сключва по-малък ъгъл с положителната посока на абцисата от секущата през $(x, f(x))$ и $(x_2, f(x_2))$.

Теорема 2.6. *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е отворен интервал, и нека f е диференцируема в Δ. Твърдим, че f е изпъкнала тогава и само тогава, когато f' е растяща в Δ.*

Доказателство. Доказваме в двете посоки:

($\Rightarrow$) f е изпъкнала. Да вземем произволни точки $x_1, x_2 \in \Delta$ с $x_1 < x_2$. От горното твърдение знаем, че за всяко $x \in (x_1, x_2)$ е в сила неравенството:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Ще извършим граничен преход в това двойно неравенство, когато x клони към x_1 отгоре, както и когато x клони към x_2 отдолу:

$$\begin{cases} x \xrightarrow[x>x_1]{} x_1 \Rightarrow f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \ (f \text{ е диференцируема в } x_1\text{, оттам и непрекъсната в } x_1) \\ x \xrightarrow[x<x_2]{} x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2) \ (f \text{ е диференцируема в } x_2\text{, оттам и непрекъсната в } x_2) \end{cases}$$

Следователно $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, което доказва, че f' е растяща, тъй като $x_1 < x_2$ бяха произволни.

($\Leftarrow$) Производната е растяща в Δ. Разглеждаме произволни $x_1, x_2, x \in \Delta$ с $x_1 < x < x_2$.

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \overset{\text{Лагранж}}{=} f'(\xi)}_{x_1<\xi<x} \leq \underbrace{f'(\eta) \overset{\text{Лагранж}}{=} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}}_{x<\eta<x_2}$$

За неравенството по средата използвахме, че $\xi < x < \eta$ и f' е растяща. Получихме неравенството от предишното твърдение, от което следва, че f е изпъкнала. □

Следствие 2.7. *Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е отворен интервал, и нека f е два пъти диференцируема в Δ. Тогава f е изпъкнала точно когато $f'' \geq 0$ в Δ.*

Наистина, от теоремата f е изпъкнала точно когато f' е растяща в Δ, а от Принципа за монотонност f' е растяща в Δ точно когато $(f')' = f'' \geq 0$ в Δ.

Твърдение 2.8. *Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ е изпъкнала. Тогава f е непрекъсната във всяка точка от вътрешността на дефиниционната си област, тоест f е непрекъсната във всяка точка x_0, която притежава околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, съдържаща се изцяло в D.*

Доказателство. Тъй като x_0 е във вътрешността на D, можем да намерим точки $x_1, x_2 \in D$ такива, че $x_1 < x_0 < x_2$. Означаваме с l_1 секущата през точките $(x_1, f(x_1))$ и $(x_0, f(x_0))$, тоест l_1 е афинна функция (константа плюс линейна, $l_1(y) = cy + d$ за някакви константи c и d), за която $l_1(x_1) = f(x_1)$ и $l_1(x_0) = f(x_0)$. Аналогично нека l_2 е секущата през точките $(x_0, f(x_0))$ и $(x_2, f(x_2))$. Ще докажем, че са в сила неравенствата:

$$l_2(x) \leq f(x) \leq l_1(x) \ \forall x \in (x_1, x_0) \quad \text{и} \quad l_1(x) \leq f(x) \leq l_2(x) \ \forall x \in (x_0, x_2)$$

Десните неравенства са очевидни от геометрична гледна точка – отсечката между точки от графиката трябва да е над графиката на изпъкнала функция. Ако имате съмнения, разпишете си го с неравенства. Левите неравенства се доказват аналогично, затова ще се занимаем само с първото от тях.

Да допуснем, че не е вярно, че $l_2(x) \leq f(x) \ \forall x \in (x_1, x_0)$. Това означава, че съществува точка $x \in (x_1, x_0)$ такава, че $l_2(x) > f(x)$. Тъй като $x_1 < x < x_0 < x_2$, съществуват тегла $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = 1$ такива, че $x_0 = q_1 x + q_2 x_2$. Тогава от изпъкналостта на f и от факта, че l_2 е афинна, получаваме

$$l_2(x_0) = f(x_0) \leq q_1 f(x) + q_2 f(x_2) < q_1 l_2(x) + q_2 f(x_2) = q_1 l_2(x) + q_2 l_2(x_2) = l_2(q_1 x + q_2 x_2) = l_2(x_0)$$

което е противоречие. С това неравенствата са доказани.

Правим граничен преход в току-що доказаните неравенства, като оставяме x да клони към x_0 – отгоре или отдолу. Използваме, че афинните функции с непрекъснати:

- За $x \in (x_1, x_0)$ е изпълнено, че:

$$\left.\begin{aligned} l_1(x) &\xrightarrow[x \to x_0^-]{} l_1(x_0) = f(x_0) \ \ (l_1 \text{ е непр. в } x_0) \\ l_2(x) &\xrightarrow[x \to x_0^-]{} l_2(x_0) = f(x_0) \ \ (l_2 \text{ е непр. в } x_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} l_2(x) \leq \lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq \lim_{x \to x_0^-} l_1(x)$$

  От лемата за двамата полицаи следва, че $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} f(x_0)$.

- За $x \in (x_0, x_2)$ е изпълнено, че:

$$\left.\begin{aligned} l_1(x) &\xrightarrow[x \to x_0^+]{} l_1(x_0) = f(x_0) \ \ (l_1 \text{ е непр. в } x_0) \\ l_2(x) &\xrightarrow[x \to x_0^+]{} l_2(x_0) = f(x_0) \ \ (l_2 \text{ е непр. в } x_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} l_1(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \leq \lim_{x \to x_0^+} l_2(x)$$

  От лемата за двамата полицаи следва, че $f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} f(x_0)$.

Съществуването на лява и дясна граница за f в точката x_0 означава, че $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$, т.е. f е непрекъсната в точката x_0 . □

3 Неравенство на Йенсен. Приложения

Изпъкналостта е един от най-мощните инструменти за доказване на неравенства. Основна роля в такива приложения играе следното

Твърдение 3.1. *Неравенство на Йенсен*
Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е изпъкнала. Нека $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Delta$ са произволни и $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ са тегла. Тогава е в сила неравенството:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$$

Доказателство. Доказателството е с индукция по $n \in \mathbb{N}$.

- База на индукцията е $n = 2$, т.е. имаме две точки $x_1, x_2 \in \Delta$ и тегла $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0 :$ $p_1 + p_2 = 1$. Тогава изпъкналостта на f влече

$$f(p_1 x_1 + p_2 x_2) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)$$

- Индукционното предположение е, че за някое $n \in \mathbb{N}$ е в сила неравенството на Йенсен, т.е. изпълненено е:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$$

Да направим индукционната стъпка - да се убедим, че неравенството остава в сила и за $n+1$. Нека са дадени произволни $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in \Delta$ и произволни тегла $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0, p_{n+1} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1$. Ако някое от теглата е нула, можем директно да приложим индукционното предположение. Ако теглата са положителни, полагаме

$$\widetilde{p} = 1 - p_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i\right) - p_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$\widetilde{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\widetilde{p}}\, x_i = \frac{1}{\widetilde{p}} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Да отбележим, че коефициентите, използвани при дефиницията на $\widetilde{x}$, имат свойствата на тегла:

$$\frac{p_i}{\widetilde{p}} \geq 0 \ \forall\, i \in \{1, \dots, n\}\ , \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\widetilde{p}} = \frac{1}{\widetilde{p}} \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Оттук непосредствено се проверява, че $\widetilde{x} \in \Delta$, защото Δ е интервал. Имаме също, че

$$\widetilde{p}\,\widetilde{x} + p_{n+1} x_{n+1} = \widetilde{p}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i x_i}{\widetilde{p}}\right) + p_{n+1} x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + p_{n+1} x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i$$

Прилагаме неравенството от базовия случай за двете точки $\widetilde{x}$ и x_{n+1} и двете тегла $\widetilde{p} \geq 0$ и $p_{n+1} \geq 0$ с $\widetilde{p} + p_{n+1} = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) = f(\widetilde{p}\,\widetilde{x} + p_{n+1} x_{n+1}) \overset{\text{База}}{\leq} \widetilde{p} f(\widetilde{x}) + p_{n+1} f(x_{n+1})$$

Тъй като вече проверихме, че $\widetilde{x}$ е изпъкнала комбинация на n точки от Δ, можем да приложим индукционното предположение и да получим

$$\widetilde{p}f\left(\widetilde{x}\right)+p_{n+1}f\left(x_{n+1}\right)=\widetilde{p}f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i x_i}{\widetilde{p}}\right)+p_{n+1}f\left(x_{n+1}\right)\overset{\text{И.П.}}{\leq}$$

$$\overset{\text{И.П.}}{\leq}\widetilde{p}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{\widetilde{p}}f\left(x_i\right)\right)+p_{n+1}f\left(x_{n+1}\right)=\sum_{i=1}^{n+1}p_i f\left(x_i\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n+1}p_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n+1}p_i f\left(x_i\right)$$

Това завършва доказателството по индукция на неравенството на Йенсен. □

Пример 3.2. Нека $a_1>0, a_2>0, \dots, a_n>0$ са произволни, и $p_1\geq 0, p_2\geq 0, \dots p_n\geq 0$, $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ са тегла. Тогава е в сила наравенството:

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\dots a_n^{p_n}\leq p_1a_1+p_2a_2+\dots+p_na_n,\text{ т.е. }\prod_{i=1}^{n}a_i^{p_i}\leq\sum_{i=1}^{n}p_ia_i$$

В частност, ако теглата са равни помежду си, тоест $p_i=\frac{1}{n}\ \forall\, 1\leq i\leq n$, то горното неравенство задава връзка между средно аритметично и средно геометрично:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}}_{\text{Средно геометрично}}\leq\underbrace{\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}}_{\text{Средно аритметично}}$$

Доказателство. Можем да запишем горния израз с помощта на $e^{\ln}$, без да го променим, т.е. искаме да докажем, че:

$$e^{\ln\left(a_1^{p_1}a_2^{p_2}\dots a_n^{p_n}\right)}=e^{\ln a_1^{p_1}+\ln a_2^{p_2}+\dots+\ln a_n^{p_n}}=e^{p_1\ln a_1+p_2\ln a_2+\dots+p_n\ln a_n}\overset{?}{\leq}e^{\ln\left(p_1a_1+p_2a_2+\dots+p_na_n\right)}$$

Ако логаритмуваме двете страни на израза, вече се опитваме да докажем:

$$p_1\ln a_1+p_2\ln a_2+\dots+p_n\ln a_n\overset{?}{\leq}\ln\left(p_1a_1+p_2a_2+\dots+p_na_n\right)$$

Да разгледаме функцията ln в естествената ѝ дефиниционна област $(0,+\infty)$. Имаме, че $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ и $(\ln x)''=-\frac{1}{x^2}$ (с отрицателен знак за всяко x от дефиниционната област). Следователно ln не е изпъкнала, но $(-\ln)$ е. За нея е в сила неравенството на Йенсен за $f\coloneqq(-\ln)$:

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}p_i\left(-\ln a_i\right)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\ln a_i\right)\quad\Big|\,.(-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln\left(\sum_{i=1}^{n}p_ia_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}p_i\ln\left(a_i\right)\iff$$

$$\iff\ln\left(p_1a_1+p_2a_2+\dots+p_na_n\right)\geq p_1\ln a_1+p_2\ln a_2+\dots+p_n\ln a_n$$

С това първоначалното неравенство е доказано. □

Пример 3.3. *Неравенство на Юнг*
Дадени са $a, b > 0$ и $p, q > 1$, за които $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (това ще са нашите тегла). Да се докаже неравенството на Юнг:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Доказателство. В предишния пример приложихме неравенството на Йенсен за $f(x) := (-\ln x)$. Сега обаче е удобно да изследваме поведението на експонентата $f(x) := e^x$. Знаем, че $(e^x)'' = e^x > 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$. Следователно функцията e^x е изпъкнала и можем да приложим Йенсен. Преди това правим следните означения:

$$\begin{cases} e^{x_1} := a^p & \iff \quad x_1 = p \ln a \\ e^{x_2} := a^q & \iff \quad x_2 = q \ln b \end{cases}$$

От неравенството на Йенсен:

$$e^{\left(\frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{q}x_2\right)} \leq \frac{1}{p}e^{x_1} + \frac{1}{q}e^{x_2} \Rightarrow e^{(\ln a + \ln b)} \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \Rightarrow e^{\ln ab} = ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$$

Това приключва доказателството на неравенството на Юнг. □

Пример 3.4. *Неравенство на Хьолдер*
Нека $a_1, a_2, \dots a_n$ са положителни и $b_1, b_2, \dots, b_n$ са положителни, а $p, q > 1$ са такива, че $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Да се докаже неравенството на Хьолдер:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказателство. Ще извършим полагане, след което ще приложим вече доказаното неравенство на Юнг. И така, нека:

$$A_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{и} \quad B_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \quad \forall \, 1 \leq i \leq n$$

От неравенството на Юнг за $A_i, B_i > 0$ и теглата $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$ следва:

$$A_i B_i \leq \frac{1}{p}A_i^p + \frac{1}{q}B_i^q \quad \Bigg| \sum_{i=1}^{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p}A_i^p + \frac{1}{q}B_i^q\right) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} A_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} B_i^q$$

Нека сега подробно разпишем дясната страна на това неравенство:

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} A_i^p = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right]^p = \frac{1}{p}\cancel{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)}\cancel{\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}\right)} = \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} B_i^q = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right]^q = \frac{1}{q}\cancel{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)}\cancel{\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}\right)} = \frac{1}{q}$$

Следователно можем да опростим:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} A_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} B_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leq 1$$

Отново записваме A_i и B_i в явен вид:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i B_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}} \right) \left(\frac{b_i}{(\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$

Окончателно получаваме:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$\square$