Дамян Красимиров Динчев ФН: 0MI0600041
Софтуерно инженерство, I курс, I група

Домашна работа № 3

$\{a_n\}_0^{\infty}$; $a_0 = 0$; $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_n - 2}$

Док, че: а) $a_n > -2$ за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
б) $a_n > a_{n+1}$ за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = ?$$

а) $a_n > -2$

$a_0 = 0 > -2$ V

$a_1 = \sqrt[3]{3 \cdot a_0 - 2} = \sqrt[3]{-2} > -2$ V

1) Приемаме, че $a_n > -2$ за $\forall n \in \mathbb{N}$
2) Доказваме за $n+1$:

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_n - 2} > -2 \quad |\,{}^3$$

$3a_n - 2 > -8$
$3a_n > -6$
$a_n > -2$ вярно от 1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ вярно за $n+1$ и вярно за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

б) $a_n > a_{n+1}$?

$a_0 = 0 \quad a_1 = \sqrt[3]{-2}$

$a_0 > a_1$ V

1) Допускаме, че е вярно за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, т.е. $a_n > a_{n+1}$

2) Доказваме за $n+1$:

$a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_n - 2} \quad a_{n+2} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - 2}$

$a_{n+1} > a_{n+2}$

$\sqrt[3]{3a_n - 2} > \sqrt[3]{3a_{n+1} - 2} \quad \uparrow^3$

$3a_n - 2 > 3a_{n+1} - 2 \quad | : 3$

$a_n > a_{n+1}$ → вярно от 1) ⇒

⇒ вярно за $n+1$ ⇒

⇒ вярно за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

⇒ редицата е строго намаляваща

в) $\lim_{n \to \infty} a_n$ - ? Граничен преход

$\lim_{n \to \infty} a_n = l = \lim_{n \to \infty} a_{n+1}$

$a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_n - 2}$

$l = \sqrt[3]{3l - 2} \quad \uparrow^3$

$l^3 = 3l - 2 \Rightarrow l^3 - 3l + 2 = 0$

	1	0	-3	2
1	1	1	-2	0

$(l-1)(l^2 + l - 2) = 0$

=2= ФН: 0MI0600041

$(\ell-1)(\ell^2+\ell-2)=0$

$(\ell-1)(\ell-1)(\ell+2)=0$

$(\ell-1)^2(\ell+2)=0$

$\ell_1 = 1 \quad \ell_2 = -2$, тъй като $\{a_n\}_0^\infty$ е намалява ща

$\Rightarrow \ell = -2$

от а) и б) също се вижда, че редицата е намаляваща и ~~ел~~ елементите ѝ не достигат $-2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$

 ФН: 0MI0600041