Решение на задача 8, Юни 2017.

Предварителни теоритични сведения -

1) Разбиване на $[0,1] \times [0,1]$. Нека $0 = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ и $0 < y_0 < y_1 < \cdots < y_d = 1$ (можем да си мислим, че това са делящи точки за двете страни на квадрата). Тогава съвкупността от правоъгълници $\Delta_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ наричаме разбиване на квадрата $[0,1] \times [0,1]$ (обикновено ще бележим с τ). Очевидно

$$[0,1] \times [0,1] = \bigcup_{i,j} \Delta_{i,j}$$

2) Суми на Дарбу. За ограничена функция $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, да означим

$$M_{i,j} = \sup_{(x,y) \in \Delta_{i,j}} f(x,y),$$

$$m_{i,j} = \inf_{(x,y) \in \Delta_{i,j}} f(x,y)$$

За разбиване τ на квадрата $[0,1] \times [0,1]$, дефинираме малка и голяма сума на Дарбу на функцията f -

$$S_\tau(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{d-1} M_{i,j}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j),$$

$$s_\tau(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{d-1} m_{i,j}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

Аналогията с едномерния случай е ясна, като се вземе предвид, че количествата $(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ са просто лицата на правоъгълниците $\Delta_{i,j}$ (за едномерния случай супремумът и инфимумът се умножаваха с **дължините** на интервалчетата в разбиването, тук разбиването се състои от правоъгълничета и съответно умножаваме с техните **лица**) (за краткост нататък, понеже функция, с която ще работим се подразбира, ще означаваме само S_τ и s_τ)

3) Критерий за интегруемост на Дарбу. Ограничената функция f е интегруема върху квадрата $[0,1] \times [0,1]$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува подразбиване τ на $[0,1] \times [0,1]$, такова че

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon$$

Към задачата. Без ограничение на общността, ще считаме, че f е монотонно растяща по двата аргумента. Другите случай се разглеждат аналогично. Поради монотонността по двата аргумента се вижда, че f е ограничена върху квадрата - по-конкретно най-голямата и най-малката ѝ стойност се достигат съответно в $(1,1)$ и $(0,0)$ (по-надолу ще докажем подробно това за произволен квадрат). Ще докажем, че f е интегруема върху $[0,1] \times [0,1]$ използвайки критерия на Дарбу. Нека $\varepsilon > 0$. Ще потърсим разбиване τ за

което $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Понеже трябва просто да намерим разбиване, може да го търсим в конкретен хубав вид - делящите точки на страните да са по равен брой ($n = d$) и отсечките между тях да са равни - по $\frac{1}{n}$ (формално $x_i = \frac{i}{n}$, $y_i = \frac{i}{n}$). Може да си мислим, че сме разбили единичния квадрат на n^2 малки еднакви квадратчета. Да означим такова разбиване с τ_n. Ще докажем, че за достатъчно голямо n е изпълнено $S_{\tau_n} - s_{\tau_n} < \varepsilon$, което ще означава, че τ_n е търсеното от нас разбиване.
Да разгледаме супремумът и инфимумът на f върхи едно квадратче - $\Delta_{i,j}$ - това са числата от по-рано $M_{i,j}$ и $m_{i,j}$. Понеже f е монотонна по първия аргумент, то за $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ имаме $f(x_i, y) \leq f(x, y) \leq f(x_{i+1}, y)$. Понеже f е монотонна по втория аргумент, то за $y_j \leq y \leq y_{j+1}$ получаваме $f(x_i, y_j) \leq f(x_i, y)$ и $f(x_{i+1}, y) \leq f(x_{i+1}, y_{j+1})$. Като заместим последните две неравенства в горното, за $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ и $y_i \leq y \leq y_{i+1}$ (иначе казано $(x, y) \in \Delta_{i,j}$) получаваме

$$f(x_i, y_j) \leq f(x, y) \leq f(x_{i+1}, y_{j+1})$$

По същество това означава, че като имаме функция монотонна по всеки аргумент (когато другият е фиксиран) и я разглеждаме върхи квадрат (със страни успоредни на координатните оси), то най-малката стойност на функцията върху този квадрат се достига в долния му ляв ъгъл, а най-голямата - в горния десен. (забележете, че до тук по никакъв начин не използваме конкретния вид на x_i, y_i).
Накратко казано получихме, че $M_{i,j} = f(x_{i+1}, y_{j+1})$ и $m_{i,j} = f(x_i, y_j)$. Тогава, поради хубавия вид на разбиването $x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j = \frac{1}{n}$ и можем да запишем сумите на Дарбу

$$S_{\tau_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{i+1}, y_{j+1}) \frac{1}{n^2},$$

$$s_{\tau_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j) \frac{1}{n^2}$$

Сега да изследваме $S_{\tau_n} - s_{\tau_n}$. Оказва се, че доста неща участват и в двете суми. За да го видим, в първата сума сменяме индексите на сумиране $i \to k - 1$, $j \to l - 1$. По този начин границите на сумите са 1 и n, а вътре пише $f(x_k, y_l)$

$$S_{\tau_n} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} f(x_k, y_l) \frac{1}{n^2}$$

Нека запишем сумите до $n - 1$. (Ще разглеждаме $n^2 S_{\tau_n}$ за краткост). Това може да стане така

$$n^2 S_{\tau_n} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f(x_k, y_l) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1} f(x_k, y_l) + f(x_k, y_n)\right) + \sum_{l=1}^{n} f(x_n, y_l)$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} f(x_k, y_l) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k, y_n) + \sum_{l=1}^{n} f(x_n, y_l)$$

Аналогично двойната сума в s_{τ_n} може да се запише с индекси от 1 нататък -

$$n^2 s_{\tau_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} f(x_k, y_l) = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} f(x_k, y_l) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k, y_0) + \sum_{l=0}^{n-1} f(x_0, y_l)$$

(просто преименувахме индексите за да са същите като горните).
Тогава

$$n^2(S_{\tau_n} - s_{\tau_n}) = \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k, y_n) + \sum_{l=1}^{n} f(x_n, y_l) - \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k, y_0) - \sum_{l=0}^{n-1} f(x_0, y_l)(*)$$

Сега да си припомним, че $x_n > x_k > x_0$, за $n-1 \geq k \geq 1$ и $y_n > y_l > y_0$ за $n-1 \geq l \geq 1$ (това е просто, защото делящите точки са в нарастващ ред от 0 към 1). Тогава поради монотонността на функцията по двата ѝ аргумента получаваме $f(x_n, y_n) \geq f(x_k, y_n)$, $f(x_n, y_n) \geq f(x_n, y_l)$, $f(x_0, y_0) \leq f(x_k, y_0)$, $f(x_0, y_0) \geq f(x_0, y_l)$ По този начин получаваме оценки отгоре за четирите суми в $(*)$

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k, y_n) \leq (n-1)f(x_n, y_n),$$

$$\sum_{l=1}^{n} f(x_n, y_l) \leq nf(x_n, y_n),$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k, y_0) \leq -(n-1)f(x_0, y_0),$$

$$-\sum_{l=0}^{n-1} f(x_k, y_n) \leq -nf(x_0, y_0)$$

Като съберем тези неравенства получаваме оценка за $(*)$

$$n^2(S_{\tau_n} - s_{\tau_n}) \leq (2n-1)(f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0))$$

Да си припомним, че крайните точки в разбиването винаги вземаме да са 0 и 1, което значи, че $x_n = y_n = 1$, $x_0 = y_0 = 1$. Това означава, че $f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0) = f(1,1) - f(0,0) \geq 0$ - неотрицателна константа независеща от

n, която можем да означим с C (последното неравенство е отново защото функцията е монотонна по двата си аргумента). Така получаваме

$$S_{\tau_n} - s_{\tau_n} \leq \frac{2n-1}{n^2}C$$

Понеже

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2} = 0$$

то за достатъчно голямо n получаваме

$$S_{\tau_n} - s_{\tau_n} < \varepsilon$$

Коментар. Идеята на решението е по същество същата каквато е идеята на доказателството на факта, че монотонна функция върху реалната права е интегруема (върху крайни интервали). Тук просто има технически усложнения заради "двумерността на ситуацията". С цел добиване на по-добра интуицията за решението, можете да си начертаете един квадрат и да го разделите с успоредни линии на малки квадратчета - подразбиване, с пресечни точки на правите именно (x_i, y_j). След това четете решението и разсъждавайте върху картинката, която сте начертали. Бихте могли да помислите за обобщение на задачата в $\mathbb{R}^3$ - това също би Ви дало по-ясен поглед върху основната идея и разликите при увеличаване на измеренията. Проиграйте си и идеята в някой от другите случай - например растяща по единия аргумент, намаляваща по другия - как точно ще изглеждат неравенствата.

Повече теоритични сведения по въпроса и цялостно изграждане на теорията може да намерите например в записките по ДИС на Р. Леви (достъпни на стария сайт на ФМИ). Изложеното тук е само необходимото за решаване на задачата.