Лекция 2: Реални числа – втора част и сходящи редици

В първата лекция добихме интуитивна представа за реалните числа върху модела на безкрайните десетични дроби. По важното е, че в множество, в което е зададена наредба, научихме какво значи точна горна граница (супремум) и точна долна граница (инфимум). Вече сме готови да формулираме основните свойства на реалните числа, които определят този обект еднозначно, и които са ни напълно достатъчни за по-нататъшната работа.

1 Непрекъснати наредени полета

Дефиниция 1.1. Нека R е множество, в което са дефинирани две бинарни операции (събиране и умножение), както и релацията $\preccurlyeq$:

$$\oplus : R \to R, \quad \otimes : R \to R, \quad \preccurlyeq \subset R \times R \quad (a \preccurlyeq b \Leftrightarrow (a,b) \in \preccurlyeq)$$

$(R, \oplus, \otimes, \preccurlyeq)$ се нарича непрекъснато наредено поле, ако са в сила:

I. Аксиоми за събирането

1. Асоциативност на събирането: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)\ \forall\, a, b, c \in R$.
2. Неутрален елемент при събирането: $\exists\, 0 \in R\ \forall\, a \in R : a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$.
3. Противоположен елемент при събирането: $\forall\, a \in R\ \exists\ (-a) \in R :$
   $a \oplus (-a) = (-a) \oplus a = 0$.
4. Комутативност на събирането: $a \oplus b = b \oplus a\ \forall\, a \in R\ \forall\, b \in R$.

II. Аксиоми за умножението

5. Асоциативност на умножението: $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)\ \forall\, a, b, c \in R$.
6. Неутрален елемент при умножението: $\exists\, e \in R \forall\, a \in R :\ a \otimes e = e \otimes a = a$.
7. Обратен елемент на умножението: $\forall\, a \in R,\ a \neq 0\, \exists\, a^{-1} \in R : a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = e$.
8. Комутативност на умножението: $a \otimes b = b \otimes a\ \forall\, a \in R\ \forall\, b \in R$.
9. Дистрибутвиност на събирането и умножението:
   $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)\ \forall\, a, b, c \in R$.

III. Аксиоми, свързани с наредбата

1. $\forall\, a, b \in R : a \preccurlyeq b$ или $b \preccurlyeq a$.
2. $a \preccurlyeq a\ \forall\, a \in R$.

3. $a \preccurlyeq b$ и $b \preccurlyeq a \Rightarrow a = b \, \forall \, a, b \in R$.
4. $a \preccurlyeq b$ и $b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c \, \forall \, a, b, c \in R$ (транзитивност).
5. $a \preccurlyeq b \Rightarrow a \oplus c \preccurlyeq b \oplus c \, \forall \, a, b, c \in R$ (връзка със събиране).
6. $a \preccurlyeq b \ \Rightarrow a \otimes c \preccurlyeq b \otimes c$ за всички $c \succcurlyeq 0$ и за всички $a, b \in R$ (връзка с умножение).

IV. Принцип за непрекъснатост: Всяко непразно ограничено отгоре подмножество на R притежава супремум в R.

Забележка. В курса по алгебра сте разбрали, че множество, в което са дефинирани две бинарни операции, за които са в сила аксиомите от първите две групи, се нарича поле. Директна сметка (или от курса по алгебра) показва, че неутралният елемент спрямо събирането (нулата) и неутралният елемент спрямо умножението (единицата) са единствени. Би трябвало отново от алгебрата да ви е познат следният пример: множеството $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ от остатъците при деление на дадено *просто* число $p \in \mathbb{N}$ е поле спрямо операциите събиране и умножение по модул p:

$$a \oplus b \equiv a + b \pmod p$$

$$a \otimes b \equiv a \times b \pmod p$$

Проверете сами за множествата $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, снабдени със стандартните операции събиране и умножение, както и със стандартната наредба, кои от аксиомите по-горе са в сила.

Сега ще формулираме две важни теореми, чието строго доказателство излиза извън рамките на този курс.

Теорема 1.2. *Съществува непрекъснато наредено поле.*

Да се докаже тази теорема означава да се построи поне един конкретен модел на реалните числа. Такива има много в литературата. Ние коментирахме модела с безкрайните десетични дроби, но не проверихме строго всички аксиоми. В учебника на Джаков, Леви, Малеев и Троянски е използван модела със сечения на Дедекинд. Най-популярният и естествен модел е с попълването на рационалните числа.

Теорема 1.3. *Непрекъснатото наредено поле е единствено в следния смисъл: Нека са дадени две наредени полета $(R_1, \oplus_1, \otimes_1, \leq_1)$ и $(R_2, \oplus_2, \otimes_2, \leq_2)$. Тогава съществува биекция $\varphi : R_1 \to R_2$, за която са в сила следните свойства:*

1. $\varphi\,(a \oplus_1 b) = \varphi\,(a) \oplus_2 \varphi\,(b) \ \forall \, a, b \in R_1$

2. $\varphi\,(a \otimes_1 b) = \varphi\,(a) \otimes_2 \varphi\,(b) \ \forall \, a, b \in R_1$

3. $a \leq_1 b \iff \varphi\,(a) \leq_2 \varphi\,(b) \, \forall \, a, b \in R_1$

В учебника на Джаков, Леви, Малеев и Троянски е добавена още една аксиома към списъка с аксиомите, определящи непрекъснато наредено поле, и е отбелязано, че тя се получава от останалите. Ето защо:

Твърдение 1.4. *(Аксиома на Архимед) Ако $(R, \oplus, \otimes, \leq)$ е непрекъснато наредено поле с неутрален елемент относно умножението e, то $\{e, e+e, e+e+e, \ldots\}$ не е ограничено отгоре.*

Доказателство. Допускаме, че множеството $A = \{e, e+e, \ldots, ne, \ldots\}$ е ограничено отгоре (тук с ne сме означили единичния елемент, събран със себе си n пъти). Съгласно **1.14 Принцип за непрекъснатост** съществува $\sup A \in R$. Тогава $\sup A - e < \sup A$ (използвахме, че $e > 0$ – проверете!). От дефиницията на супремум оттук получаваме, че съществува $n \in \mathbb{N}$ с $ne > \sup A - e$. Следователно $ne + e > \sup A$. Тъй като $ne + e = (n+1)e \in A$, достигнахме до противоречие. □

2 Изброими множества

В допълнение към вече фиксираните означения - тези на естествените ($\mathbb{N}$), на целите ($\mathbb{Z}$), на рационалните ($\mathbb{Q}$) и на реалните числа ($\mathbb{R}$), ще използваме $\mathbb{J}$ за означение на множеството на ирационалните числа, тоест $\mathbb{J} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Засега сме сигурни, че това множество не е празно (в първата лекция доказахме, че числото $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ не е рационално). Постоянно ще използваме, че във всеки отворен интервал от реални числа има както рационални, така и ирационални числа. Следващото твърдение е доказано в учебника на Джаков, Леви, Малеев и Троянски от аксиомите. Ние (за да не повтаряме разсъждение, подобно на доказателството на аксиомата на Архимед) ще го направим в модела на реалните числа като безкрайни десетични дроби.

Твърдение 2.1. *Ако $a, b \in \mathbb{R}$ са произволни с $a < b$, то интервалът (a, b) съдържа поне едно рационално число.*

Доказателство. Без ограничение на общността можем да предположим, че $a = a_0.a_1a_2\cdots$ и $b = b_0.b_1b_2\cdots$ са неотрицателни числа (иначе можем да вземем $(-b, -a)$ или $(-a, 0)$, или $(0, b)$). Пак без ограничение на общността можем да предположим, че десетичното представяне на a не завършва с 9 в период (иначе вземаме десетичното представяне на a като крайна десетична дроб). Сега $a < b$ означава, че съществува $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такова, че $a_i = b_i$ за всички $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ и $a_n < b_n$. Нека $j \geq n+1$ е такова, че $a_j \neq 9$. Тогава $r := a_0.a_1a_2\cdots a_{j-1}(a_j + 1)$ е крайна десетична дроб (следователно рационално число), която е строго по-голяма от a и строго по-малка от b. □

Бихме могли да докажем, че във всеки отворен интервал (a, b) има поне едно ирационално число, с транслация на $\sqrt{2}$ с рационално число. Искаме обаче по-добре да бъде осъзнат фактът, че в някакъв смисъл ирационалните числа са много повече от рационалните.

Дефиниция 2.2. *Кардиналност на множество*

Нека M е множество. Казваме, че M е крайно и има n елемента (означаваме $|M| = n$), когато съществува биекция $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to M$. Можем да мислим, че чрез изображението φ сме номерирали елементите на M с естествените числа $1, 2, \ldots, n$. Така $M = \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)\}$.

Тази идея се се продължава и за безкрайните множества. Представата ни е, че две множества "имат равен брой елементи" (математическият термин е имат еднаква кардиналност или мощност), ако съществува биекция между тях. Особено често се работи с "най-малките" от всички безкрайни множества:

Дефиниция 2.3. *Изброимо множество*

Множество M е изброимо, ако съществува биекция $\varphi : \mathbb{N} \to M$. Аналогично на горния запис, $M = \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n), \ldots\}$.

Да разгледаме някои свойства на изброимите множества:

1. Ако M е изброимо и $N \subset M$, то N е крайно или изброимо.
2. Ако M_n е изброимо за всяко $n \in \mathbb{N}$, то $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ е изброимо. Наистина,

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = \{x : \exists\, n \in \mathbb{N}, x \in M_n\} \begin{cases} M_1 & = \left\{a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots\right\} \\ M_2 & = \left\{a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots\right\} \\ \dots & \\ M_n & = \{a_1^n, a_2^n, a_3^n, \dots\} \\ \dots & \end{cases}$$

   и можем да номерираме елементите на получената безкрайна (надясно и надолу) матрица, обхождайки я например по квадрати.

3. $\mathbb{Z} = \underbrace{\{\dots, -2, -1\}}_{\text{изброимо}} \cup \{0\} \cup \underbrace{\{1, 2, \dots\}}_{\text{изброимо}} \Rightarrow \mathbb{Z}$ е изброимо.
4. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\right\}}_{\text{изброимо}} \Rightarrow \mathbb{Q}$ е изброимо.
5. $\mathbb{J}$ не е изброимо.

   Доказателство. Нека $A = \{0.a_1a_2a_3 \cdots : a_i \in \{0,1\}, i \in \mathbb{N}\} \subset [0,1)$. Достатъчно е да докажем, че A не е изброимо. Наистина, $A \subset \mathbb{R} = \mathbb{Q}cup\mathbb{J}$. Ако $\mathbb{J}$ беше изброимо, от горните свойства се получава, че A също трябва да бъде изброимо. Забележете, че като се ограничихме с безкрайни десетични дроби само от нули и единици, два елемента на A са равни точно когато съвпадат десетичните им представяния – изчезна проблемът с 9 в период.

   И тъй, нека допуснем противното, тоест A е изброимо. Следователно съществува биекция $\varphi : \mathbb{N} \to A$, която номерира елементите на A:

$$A \ni \begin{cases} \varphi(1) := a^1 & = 0.\ a_1^1\ a_2^1\ a_3^1 \cdots \\ \varphi(2) := a^2 & = 0.\ a_1^2\ a_2^2\ a_3^2 \cdots \\ \dots & \\ \varphi(n) := a^n & = 0.\ a_1^n\ a_2^n\ a_3^n \cdots \\ \dots & \end{cases}$$

   Дефинираме $\overline{a_j^i} = \begin{cases} 0, & \text{ако } a_j^i = 1 \\ 1, & \text{ако } a_j^i = 0 \end{cases}$. Строим безкрайната дроб $\overline{a} = 0.\ \overline{a_1^1}\ \overline{a_2^2}\ \overline{a_3^3} \cdots \in A$.

   Остава да забележим, че $\overline{a} \neq a^n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, защото $\overline{a_n^n} \neq a_n^n$. (Представяме си, че елементите на A са наредени както по-горе. Тръгваме по диагонал от горе-вляво към долу-вдясно, като на всяка стъпка *инвертираме*, т.е. изтриваме a_i^i и записваме

$\overline{a_i^i}$. Методът се нарича канторов диагонален процес.) Така се получава елемент $\overline{a}$ на A - лесно се вижда, че той е от подходящия вид, но е различен от всички останали елементи на A. Тъй като ние допуснахме, че в редицата са всички елементи на A, то достигнахме до противоречие. $\square$

3 Редици от реални числа

Дефиниция 3.1. *Редица*

Всяко изображение $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ се нарича редица от реални числа. Вместо $a(1), a(2), \ldots, a(n) \ldots$ често използваме записа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

При изучаването на редици понякога е удобно да се използват понятията от следващата подсекция.

3.1 Кофинитност на множества

Дефиниция 3.2. *Кофинитно множество*

Едно множество $A \subset \mathbb{N}$ от естествени числа се нарича кофинитно, ако $\mathbb{N} \setminus A$ е крайно или празно.

Пример 3.3.

$$\{n \in \mathbb{N} : 5n > 516\} \text{ - кофинитно}$$
$$\{n \in \mathbb{N} : n = 2p, p \in \mathbb{N}\} \text{ - не е кофинитно}$$
$$\left\{n \in \mathbb{N} : 7n^2 - 3n - 100 > 0\right\} \text{ - кофинитно}$$

Да разгледаме някои свойства на кофинитните множества:

1. Ако за множества A, B е изпълнено, че $\mathbb{N} \supset B \supset A$ и A е кофинитно, то и B е кофинитно.

2. Ако $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ са кофинитни, то $\bigcap_{i=1}^k A_i$ е кофинитно (защото крайно обединение на крайни множества е крайно).

$$\mathbb{N} \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{k} (\mathbb{N} \setminus A_i)}_{\text{крайно}}.$$

3. Множеството $A \subset \mathbb{N}$ е кофинитно точно тогава, когато $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq n_0 : n \in A$.

   Наистина, ако A е кофинитно, можем да положим $n_0 := \max(\mathbb{N} \setminus A) + 1$ и тогава $n \in A$ за всички $n \geq n_0$. Обратно, ако условието е в сила, разликата $\mathbb{N} \setminus A \subset \{1, 2, \ldots, n_0 - 1\}$ е крайна.

   Например от (2) сега е очевидно, че $\left\{n \in \mathbb{N} : 1 - \frac{1}{n} > \frac{9}{10}, 7n^2 - 3n - 100 > 0\right\}$ е кофинитно.

Ако едно свойство е изпълнено за всяко n от някакво кофинитно множество, ще казваме, че "свойството е изпълнено за всяко n от някъде нататък" или "свойството е изпълнено за почти всички n".

3.2 Сходящи редици от реални числа

Дефиниция 3.4. *Околност (на точка)*

Нека $a \in \mathbb{R}$ и $U \subset \mathbb{R}$. Казваме, че U е околност на точката a, ако съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U$.

Следващата дефиниция е основна за този курс:

Дефиниция 3.5. *Граница на редица и сходяща редица*

Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ има граница $a \in \mathbb{R}$, ако за всяка околност U на a множеството $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in U\}$ е кофинитно. С други думи, всяка околност на a съдържа почти всички членове на редицата. Означаваме:

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Ако за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ съществува $a \in \mathbb{R}$ с $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, казваме, че $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща редица.

Можем да преформулираме горната дефиниция по много начини:
$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff \forall U$ - околност за a : $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in U\}$ е кофинитно.
$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff \forall U$ - околност за a : $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin U\}$ е крайно.
$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff \forall \varepsilon > 0 : \{n \in \mathbb{N} : a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ е кофинитно.
$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.
$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$.
Разходяща редица се нарича редица, която не е сходяща. Логическото отрицание дава:

$$\neg\left(\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon\right) \equiv$$
$$\equiv \forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon$$

Упражнение. Да се направят логическите отрицания на еквивалентните дефиниции.

Пример 3.6. Да разгледаме няколко примера:

1. $\sqrt{2}$ може да се приближи с произволна точност - 1; 1.4; 1.41 и т.н. В рамките на настоящата терминология, $\sqrt{2} = 1 \cdot b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \cdots$ и следователно:

   $$\sqrt{2} = \lim_{n\to\infty} (1 \cdot b_1 b_2 b_3 \cdots b_n)$$

   По-точно, за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че за всяко $n \geq n_0$ имаме $|1 \cdot b_1 b_2 b_3 \cdots b_n - \sqrt{2}| = 0 \cdot \underbrace{000\ldots0}_{\text{n на брой}} b_{n+1} b_{n+2} \ldots \leq 10^{-n} < \varepsilon$.

2. Важно е да отбележим, че $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff |a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3. $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   Да вземем произволно $\varepsilon > 0$. Ще покажем, че $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ е в сила от някъде нататък. Неравенството е еквивалентно на $\frac{1}{n} < \varepsilon$ или $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Избираме $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Тогава $\forall n \geq n_0 : \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

4. Пример за разходяща редица: $0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, 0, \ldots$

3.3 Основни свойства на сходящите редици от реални числа – първа част

1. Прибавянето или задраскването на краен брой членове на редицата не влияе на сходимостта (и на границата).

2. Сходящите редици са ограничени, т.е. ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, то множеството $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ е ограничено.

   Доказателство. Нека $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Тогава множеството $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in (a-6, a+6)\}$ е кофинитно. Нека $a_n \in (a-6, a+6)$ за всички $n \geq n_0$. Следователно $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [m, M]$, където:

   $$M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a+6\}$$
   $$m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a-6\}$$

   □

3. Нека $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ и $a_n \leq b_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогава $a \leq b$.

   Доказателство. Допускаме, че $b < a$. Разглеждаме $U = \left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right)$ - околност на b, и $V = \left(\frac{a+b}{2}, +\infty\right)$ - околност на a. Тогава множеството $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in V\} \cap \{n \in \mathbb{N} : b_n \in U\}$ е кофинитно като сечение на две кофинитни множества. Ако n_0 принадлежи на това сечение, имаме $a_{n_0} \in V$ и $b_{n_0} \in U$. Тогава $b_{n_0} < a_{n_0}$, защото $b_{n_0} < \frac{a+b}{2} < a_{n_0}$. Това е противоречие с $a_n \leq b_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. □

   Следствие. Ако една редица е сходяща, то нейната граница е единствена.

   Наистина, да допуснем, че $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. Тогава, прилагайки два пъти горното твърдение, получаваме $a \leq b$ и $a \geq b$, следователно $a = b$.

4. (Лема за двамата полицаи) Нека $a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ и $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

   Доказателство.

   $$\text{Нека } \varepsilon > 0 \text{ е произволно. Тогава } \begin{cases} \exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_1 : a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_2 : b_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \end{cases}$$

   Означаваме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогава

   $$\forall\, n \geq n_0 : a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \Rightarrow c_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\ \forall\, n \geq n_0.$$

   □

ЗАДАЧА ЗА ОБМИСЛЯНЕ ВКЪЩИ (до следващата седмица):

Упражнение 3.7. Едно реално число x се нарича *алгебрично*, ако съществува полином P с цели коефициенти такъв, че $P(x) = 0$. Докажете, че алгебричните числа са изброимо много.