Лекция 6: Непрекъснати функции

Непрекъснатостта на изображения е едно от най-важните понятия в математиката. Обърнете му дължимото внимание.

1 Непрекъснатост на функции

Дефиниция 1.1. *Непрекъсната функция*

Нека $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$. Казваме, че f е непрекъсната в $x_0 \in D$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че ако $x \in D$ и $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Функцията f се нарича непрекъсната, ако f е непрекъсната във всяка точка от дефиниционната си област, т.е. f е непрекъсната в x_0 за всяко $x_0 \in D$. Следният запис е формалната дефиниция:

$$(\forall x_0 \in D)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Налице са следните две възможности:

I. x_0 е точка на сгъстяване на D. Тогава:

$$f \text{ е непрекъсната в } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

II. x_0 не е точка на сгъстяване на D. Това означава, че:

$$\begin{aligned} &\neg\,(\forall U \text{ - околност на } x_0 : (U \cap D) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset) \equiv \\ &\equiv \exists U \text{ - околност на } x_0 : (U \cap D) \setminus \{x_0\} = \emptyset \end{aligned}$$

С други думи, за някакво положително $\delta > 0$ е изпълнено, че $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D = \{x_0\}$. Такива точки се наричат изолирани точки на D. В този случай всяка функция f е непрекъсната в x_0. Наистина, ако $\delta > 0$ е такова, че $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D = \{x_0\}$, каквото и да е $x \in D$ с $|x - x_0| < \delta$, то $x = x_0$ и следователно $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, за произволно $\varepsilon > 0$.

Горната дефиниция за непрекъснатост е във формата на Коши. Еквивалентна дефиниция може да се изкаже и във формата на Хайне:

$$(\forall x_0 \in D)\ \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D,\ x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0 : f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x_0).$$

Еквивалентността на двете дефиниции следва от съответната еквивалентност за граници, когато x_0 е точка на сгъстяване на D, и от факта, че когато x_0 е изолирана точка на D, всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D,\ x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ може да съдържа най-много краен брой членове, различни от x_0.

Да разгледаме свойствата на непрекъснатите функции, свързани с аритметичните действия.

Твърдение 1.2. *Ако $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ и f, g са непрекъснати в x_0, то*

1. *$f + g$ е непрекъсната в x_0.*
2. *$f \cdot g$ е непрекъсната в x_0.*
3. *Ако $g(x_0) \neq 0$, то x_0 принадлежи на дефиниционната област на $\frac{f}{g}$ и $\frac{f}{g}$ е непрекъсната в x_0.*

Доказателството на това твърдение е директно следствие от съответното твърдение за граници, когато x_0 е точка на сгъстяване на D, и заключението е тривиално, когато x_0 е изолирана точка на D. Наистина,

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) = (f \cdot g)(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g} \right)(x_0)$$

Обърнете внимание, че в следващото твърдение (за композиция на непрекъснати функции) изкуственото предположение в съответното твърдение за граници изчезва.

Твърдение 1.3. *Ако $f : D \to D_1$ и $g : D_1 \to \mathbb{R}$ за $D, D_1 \subset \mathbb{R}$, при това f е непрекъсната в $x_0 \in D$ и g е непрекъсната в $y_0 = f(x_0) \in D_1$, то $g \circ f$ е непрекъсната в x_0.*

Доказателство. Избираме произволна $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ такава, че $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$. Понеже f е непрекъсната в x_0, от дефиницията на Хайне следва, че $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x_0)$. Полагаме $y_n = f(x_n)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Тогава за редицата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_1$ е изпълнено $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} y_0 = f(x_0)$. Тъй като g е непрекъсната в y_0, от дефиницията във формата на Хайне получаваме $g(y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} g(y_0)$. Следователно:

$$g(f(x_n)) \xrightarrow[n \to \infty]{} g(f(x_0)) \iff (g \circ f)(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} (g \circ f)(x_0).$$

□

Следствие 1.4. *Композиция на непрекъснати функции е непрекъсната. Формално, ако $f : D \to D_1$ и $g : D_1 \to \mathbb{R}$ ($D, D_1 \subset \mathbb{R}$) са непрекъснати, то $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната.*

Пример 1.5. Да се убедим, че голяма част от функциите, с които обикновено работим, са непрекъснати:

1. Всяка константна функция $f(x) = c$ е непрекъсната.
2. Идентитетът $f(x) = x$ е непрекъсната функция.
3. Всеки полином е непрекъсната функция, дефинирана върху цялата реална права. Това получаваме директно от първите два примера и от това, че произведение и сума на непрекъснати функции са непрекъснати.

4. Всички рационални функции (тоест $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, където P и Q са полиноми) са непрекъснати. Да отбележим, че естествената дефиниционна област на R е множеството $\{x \in \mathbb{R} : \; Q(x) \neq 0\}$. Добре е да си дадете сметка, че например $f(x) = \frac{1}{x}$ е непрекъсната, защото нулата не принадлежи на дефиниционната ѝ област. Друг е въпросът, че ако додефинираме тази функция в нулата по какъвто и да е начин, нулата ще бъде точка на прекъсване.

5. Експонентата $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, зададена с $f_a(x) = a^x$, където $a > 0$, е непрекъсната. Наистина, в края на миналата лекция доказахме, че $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

6. Синусът е непрекъсната функция, дефинирана върху цялата реална права.

   Първо ще докажем, че $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$. Използваме неравенството $0 < \sin x \leq x$ за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, което изведохме при разглеждане на границата $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Разширяваме го, като използваме нечетността на $\sin x$, и прилагаме лемата за двамата полицаи:

   $$0 < \sin x \leq x \; \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \underbrace{-|x|}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} \leq \sin x \leq \underbrace{|x|}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} \; \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

   Сега можем да докажем, че $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$. Наистина

   $$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 + \lim_{x\to x_0} (\sin x - \sin x_0) = \sin x_0 + \lim_{x\to x_0} 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} = \sin x_0.$$

   Използвахме, че произведение на две функции, едната от които клони към нула, а другата е ограничена, клони към нула.

7. Косинусът е непрекъсната функция, дефинирана върху цялата реална права. Наистина

   $$\lim_{x\to x_0} \cos x = \lim_{x\to x_0} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) = \cos x_0.$$

2 Основни теореми за непрекъснати функции в компактен интервал

2.1 Теорема на Болцано

Теорема 2.1. *Теорема на Болцано*
Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и $f(a) f(b) < 0$. Тогава съществува $x_0 \in (a,b)$ с $f(x_0) = 0$.

Ще изложим две доказателства, защото всяко от тях е поучително.

Доказателство. Без ограничение на общността (б.о.о.) нека $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Разглеждаме множеството $A = \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}$. Това множество е непразно, защото поне b със сигурност е негов елемент. При това A е ограничено. Следователно A притежава инфимум. Полагаме $x_0 = \inf A$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ е непрекъсната в } a \\ f(a) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \delta_1 > 0 \; \forall x \in [a, a+\delta_1) : f(x) < 0 \Rightarrow x_0 \geq a + \delta_1 > a$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ е непрекъсната в } b \\ f(b) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \delta_2 > 0 \; \forall x \in (b-\delta_2, b] : f(x) > 0 \Rightarrow x_0 \leq b - \delta_2 < b$$

Последователно допускаме, че $f(x_0) > 0$ и $f(x_0) < 0$ и достигаме до противоречие:

- Ако $f(x_0) > 0$, то съществува $\delta > 0$ такова, че $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ и $f(x) > 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (тъй като f е непрекъсната в x_0, то в някаква околност на точката функцията не мени знака си). Следователно $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$ и оттук x_0 не е долна граница на A, което е противоречие с допускането.

- Ако $f(x_0) < 0$, то съществува $\delta > 0$ такова, че $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ и $f(x) < 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Следователно за всяко $x \in [x_0, x_0 + \delta)$ е изпълнено $x \notin A$. Ясно е, че ако $x \in [a, x_0)$, то също $x \notin A$ (защото x_0 е долна граница за A). Така получихме, че $x_0 + \delta$ е долна граница на A, която е по-голяма от $x_0 = \inf A$. Това е противоречие с дефиницията на инфимум.

След като $f(x_0) \not> 0$ и $f(x_0) \not< 0$, то остава $f(x_0) = 0$. □

Доказателство. Второто доказателство може да бъде разглеждано и като алгоритъм за търсене на корен на f. Отново б.о.о. нека $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Означаваме $a_0 := a, b_0 := b$.

$$\text{В зависимост от } f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) \text{ полагаме } \begin{cases} \text{ако } f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_0 := \frac{a_0+b_0}{2} \in (a, b) \\ \text{ако } f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) < 0 \Rightarrow a_1 := \frac{a_0+b_0}{2},\ b_1 := b_0 \\ \text{ако } f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) > 0 \Rightarrow a_1 := a_0,\ b_1 := \frac{a_0+b_0}{2} \end{cases}$$

В първия случай сме намерили корен и алгоритъмът приключва успешно. Ако сме построили интервала $[a_n, b_n]$ с $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ и $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$,

$$\text{в зависимост от } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \text{ полагаме } \begin{cases} \text{ако } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_0 := \frac{a_n+b_n}{2} \in (a, b) \\ \text{ако } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \Rightarrow a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2},\ b_{n+1} := b_n \\ \text{ако } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0 \Rightarrow a_{n+1} := a_n,\ b_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$$

Отново в първия случай сме намерили корен и алгоритъмът е приключил успешно. В противен случай можем да продължим.

Ако не сме намерили корен за краен брой стъпки, построили сме редица от вложени един в друг интервали $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ такива, че:

$$f(a_n) < 0 \text{ и } f(b_n) > 0\ \forall n \in \mathbb{N}; \text{ в сила е } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Да забележим, че поради характера на построението:

$$\begin{cases} a = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le a_{n+1} \le \cdots \\ b = b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge b_{n+1} \ge \cdots \end{cases}$$

Сега, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена ($a \le a_n \le b\ \forall n \in \mathbb{N}$) и растяща, следователно е сходяща - да означим $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. Също така, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена ($a \le b_n \le b\ \forall n \in \mathbb{N}$) и намаляваща, следователно е сходяща - ще покажем, че и $\lim_{n\to\infty} b_n = x_0$. Наистина,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} [(b_n - a_n) + a_n] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{b-a}{2^n} + a_n\right] = 0 + x_0 = x_0$$

Остава да използваме, че f е непрекъсната в интервала (a, b):

$$\left.\begin{array}{l} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \\ f(a_n) > 0 \\ f \text{ е непрекъсната в } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0) \text{ и } f(x_0) \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \\ f(b_n) < 0 \\ f \text{ е непрекъсната в } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0) \text{ и } f(x_0) \leq 0$$

От $f(x_0) \geq 0$ и $f(x_0) \leq 0$ получаваме, че $f(x_0) = 0$. С това доказателството е завършено. □

Следствие 2.2. *(Теорема за междинните стойности)*
Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Ако $c \in \mathbb{R}$ е между $f(a)$ и $f(b)$ - това значи $f(a) < c < f(b)$ или $f(b) < c < f(a)$, то съществува такова $x_0 \in (a, b)$, че $f(x_0) = c$.

Доказателство. Разглеждаме функцията $g(x) = f(x) - c$. Тази функция е непрекъсната, дефинирана е в ограничения и затворен интервал $[a, b]$ и за нея е в сила $g(a) \cdot g(b) < 0$. Прилагаме Теоремата на Болцано за g и получаваме $x_0 \in (a, b)$ с $0 = g(x_0) = f(x_0) - c$. □

Пример 2.3. Да разгледаме функцията $f(x) = x^2$ в интервала $[0, 2]$. Ако $c = 2$, то c се намира между $f(0) = 0$ и $f(2) = 4$. Следователно, съществува $x_0 \in (0, 2) : x_0^2 = 2$.

Дефиниция 2.4. *Интервал*
$\Delta \subset \mathbb{R}$ наричаме интервал, ако от $x_1 \in \Delta, x_2 \in \Delta$ и $x_1 < x_2$ следва, че $[x_1, x_2] \subset \Delta$.

Следствие 2.5. *Непрекъснат образ на интервал е интервал. Формално, нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и Δ е интервал. Тогава множеството от сойности на f*

$$f(\Delta) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \Delta,\ y = f(x)\} = \{f(x) : x \in \Delta\}$$

е интервал.

Доказателство. Изхождаме от дефиницията за интервал. Ще вземем две точки $y_1, y_2 \in f(\Delta)$, които удовлетворяват $y_1 < y_2$. Искаме да покажем, че $[y_1, y_2] \subset f(\Delta)$, тоест искаме да покажем, че произволна точка $y \in [y_1, y_2]$ е елемент на $f(\Delta)$. От $y_1, y_2 \in f(\Delta)$ следва, че съществуват $x_1, x_2 \in \Delta$ такива, че $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Тъй като не е възможно $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$, възможни са само следните два случая:

- Ако $x_1 < x_2$, то $[x_1, x_2] \subset \Delta$, защото Δ е интервал. Тъй като $y_1 = f(x_1) < y < f(x_2) = y_2$ и f е непрекъсната в $[x_1, x_2]$, от теоремата за междинните стойности получаваме, че съществува $x_0 \in (x_1, x_2)$ с $f(x_0) = y$. Следователно $y \in f(\Delta)$.

- Ако $x_1 > x_2$, то $[x_2, x_1] \subset \Delta$, защото Δ е интервал. Тъй като $y_2 = f(x_2) > y > f(x_1) = y_1$ и f е непрекъсната в $[x_2, x_1]$, от теоремата за междинните стойности получаваме, че съществува $x_0 \in (x_2, x_1)$ с $f(x_0) = y$. Следователно $y \in f(\Delta)$.

Доказахме, че $[y_1, y_2] \subset f(\Delta)$, следователно $f(\Delta)$ е интервал. □

2.2 Теорема на Вайерщрас

Теорема 2.6. *Теорема на Вайерщрас*
Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава f е ограничена (т.е. $f([a, b])$ е ограничено множество от реални числа) и f има най-голяма стойност (т.е. съществува $x_{max} \in [a, b]$: $f(x_{max}) = \sup f([a, b]) = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$) и най-малка стойност (т.е. съществува $x_{min} \in [a, b] : f(x_{min}) = \inf f([a, b]) = \inf \{f(x) : x \in [a, b]\}$).

Доказателство. Допускаме, че $f([a, b])$ не е ограничено, т.е.

$$\neg (\exists N \in \mathbb{N} \, \forall x \in [a, b] : |f(x)| \le N) \equiv$$
$$\equiv \forall N \in \mathbb{N} \, \exists x \in [a, b] : |f(x)| > N$$

Последователно даваме на N стойности $1, 2, 3, \ldots, n \ldots$. Така,

$$\begin{cases} \text{За } N = 1 : \exists x_1 \in [a, b] \;,\;\; |f(x_1)| > 1 \\ \text{За } N = 2 : \exists x_2 \in [a, b] \;,\;\; |f(x_2)| > 2 \\ \ldots \\ \text{За } N = n : \exists x_n \in [a, b] \;,\;\; |f(x_n)| > n \\ \ldots \end{cases}$$

Построили сме редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b]$, за която $|f(x_n)| > n$. Прилагаме Теоремата на Болцано-Вайерщрас към ограничената редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и получаваме нейна сходяща подредица. Нека това е $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$. Сега:

$$\left.\begin{matrix} x_0 \in [a, b] \\ f \text{ е непрекъсната в } x_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$$

По построение обаче имаме, че $|f(x_{n_k})| > n_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, което е в противоречие с горната граница. Следователно допускането ни е невярно и $f([a, b])$ е ограничено множество.

Да пристъпим към втората част на теоремата - достигане на най-голяма и най-малка стойност в ограничения и затворен дефиниционен интервал на f. С цел опростяване на записа въвеждаме означението:

$$\sup f([a, b]) \equiv \sup_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$$

Ще построим "максимизираща редица". За произволно $n \in \mathbb{N}$ имаме:

$$\sup_{[a,b]} f - \frac{1}{n} < \sup_{[a,b]} f \Rightarrow \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > \sup_{[a,b]} f - \frac{1}{n}$$

Построихме редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b]$, за която $f(x_n) > \sup_{[a,b]} f - \frac{1}{n}$. Съгласно Теоремата на Болцано-Вайерщрс (принцип за компактност) съществува нейна подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_{max} \in [a, b]$. По построение:

$$\underbrace{\sup_{[a,b]} f - \frac{1}{n_k}}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} \sup_{[a,b]} f} < f(x_{n_k}) \le \underbrace{\sup_{[a,b]} f}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} \sup_{[a,b]} f}$$

От лемата за двамата полицаи получаваме, че

$$f\left(x_{n_k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sup_{[a,b]} f \ .$$

От друга страна, непрекъснатостта на f в точката $x_{max} \in [a,b]$ влече, че

$$f\left(x_{n_k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} f\left(x_{max}\right) \ .$$

Следователно $f\left(x_{max}\right) = \sup_{[a,b]} f$ е най-голяма стойност за f.

Проверката за достигане на най-малка стойност е аналогична. $\square$

Следствие 2.7. *Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава $f\left([a,b]\right)$ е ограничен и затворен интервал.*

За доказателството е достатъчно да приложим второто следствие от Теоремата на Болцано и Теоремата на Вайерщрас.

2.3 Равномерна непрекъснатост. Теорема на Кантор

Дефиниция 2.8. *Равномерна непрекъснатост*

Нека $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$. Казваме, че f е равномерно непрекъсната в D, ако е в сила:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ \forall x' \in D,\ \left|x - x'\right| < \delta : \left|f\left(x\right) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon$$

Добре е да осъзнаете разликата между дефиницията за равномерна непрекъснатост и дефиницията за непрекъснатост:

$$\boxed{\forall x \in D}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x' \in D,\ \left|x - x'\right| < \delta : \left|f\left(x\right) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon$$

Разликата се състои в едно разместване. При равномерната непрекъснатост δ зависи само от ε, но не и от точката x, докато при непрекъснатостта δ може да зависи и от x. Равномерната непрекъснатост е по-силна от непрекъснатостта в смисъл, че равномерно непрекъсната функция винаги е непрекъсната, докато обратното не е задължително вярно (следващата теорема дава достатъчно условие, когато обратното е вярно). Грубо казано, равномерната непрекъснатост забранява "безкрайната стръмност" на функцията, но разгледайте внимателно втория пример.

Пример 2.9. Да разгледаме функцията $f\left(x\right) = x^2$.

(a) Функцията f е равномерно непрекъсната в множеството $[-M, M]$ за произволно положително $M > 0$.

В този случай имаме

$$\left|f\left(x\right) - f\left(x'\right)\right| = \left|x^2 - x'^2\right| = \left|x - x'\right|\left|x + x'\right| \leq 2M\left|x - x'\right|$$

и за произволно $\varepsilon > 0$ можем да намерим $\delta > 0$, която зависи само от ε. Наистина, ако сме фиксирали $\varepsilon > 0$, достатъчно е да положим $\delta := \frac{\varepsilon}{2M} > 0$ и да получим

$$\left|x - x'\right| < \delta = \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow \left|f\left(x\right) - f\left(x'\right)\right| \leq 2M\left|x - x'\right| < 2M\delta = \varepsilon$$

(б) Функцията f не е равномерно непрекъсната в множеството $[0,+\infty)$.

Да допуснем, че за $\varepsilon = 1 > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че от $|x - x'| < \delta$ да следва $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Ако $x \in [0,+\infty)$ е произволно, за точката $x' := x + \frac{\delta}{2}$ имаме, че $x' \in [0,+\infty)$ и при това $|x - x'| < \delta$. От друга страна:

$$|x'^2 - x^2| = \cancel{x^2} + \delta x + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \cancel{x^2} = \delta x + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Следователно за достатъчно големи x стойността $|f(x) - f(x')|$ ще стане по-голяма от едно.

Пример 2.10. Да разгледаме функцията $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Ще покажем, че f е равномерно непрекъсната в цялата си дефиниционна област.

За произволно $\varepsilon > 0$ избираме $\delta = \varepsilon^2 > 0$ (сетихме се да направим това, защото това δ върши работа в нулата, където функцията е "най-стръмна"). Разглеждаме следните два случая:

1. Ако поне едно от x и x' е в интервала $[\delta,+\infty)$, то

$$|f(x) - f(x')| = |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| = \frac{|x - x'|}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}}$$

и имаме

$$\sqrt{x} + \sqrt{x'} \geq \sqrt{\delta} \text{ и следователно } \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

Оттук получаваме

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| = \frac{|x + x'|}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} \leq \frac{|x - x'|}{\sqrt{\delta}} < \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

Естествено, тук ползвахме, че $x, x' \in [0,+\infty)$ и $|x - x'| < \delta$ от дефиницията.

2. Ако $x, x' \in [0,\delta)$, то

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| < \sqrt{\delta} - 0 = \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

Убедихме се, че и в двата случая изборът на $\delta = \varepsilon^2$ е подходящ за доказването на равномерната непрекъснатост на f.

Теорема 2.11. *Теорема на Кантор*
Ако $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната, то f е равномерно непрекъсната в $[a,b]$.

Доказателство. Допускаме противното, тоест f не е равномерно непрекъсната в $[a,b]$:

$$\neg\left(\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x \in [a,b]\ \forall x' \in [a,b],\ |x - x'| < \delta : |f(x) - f(x')| < \varepsilon\right) \equiv$$
$$\equiv \exists\varepsilon_0 > 0\,\forall\delta > 0\,\exists x \in [a,b]\ \exists x' \in [a,b],\ |x - x'| < \delta : |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0$$

Последователно даваме стойности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ на δ. Имаме:

$$\begin{cases} \delta = 1 \Rightarrow \exists x_1, x_1' \in [a,b] : |x_1 - x_1'| < 1 \text{ и } |f(x_1) - f(x_1')| \geq \varepsilon_0 \\ \delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x_2, x_2' \in [a,b] : |x_2 - x_2'| < \frac{1}{2} \text{ и } |f(x_2) - f(x_2')| \geq \varepsilon_0 \\ \ldots \\ \delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists x_n, x_n' \in [a,b] : |x_n - x_n'| < \frac{1}{n} \text{ и } |f(x_n) - f(x_n')| \geq \varepsilon_0 \\ \ldots \end{cases}$$

Получаваме редиците $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ и $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ с

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \, \forall \, n \in \mathbb{N} \text{ и } |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0 \, \forall \, n \in \mathbb{N}$$

Редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена и според Теоремата на Болцано-Вайерщрас съществува нейна подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ с $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 \in [a,b]$. Да разгледаме подредицата $\left\{x'_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ на $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ със същите индекси. Ще покажем, че тя е сходяща и има същата граница:

$$|x'_{n_k} - x_0| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Следователно $x'_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$. Сега:

$$f \text{ е непрекъсната в } x_0 \in [a,b] \Rightarrow \begin{cases} f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \\ f\left(x'_{n_k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \end{cases}$$

Получаваме, че $f(x_{n_k}) - f\left(x'_{n_k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) - f(x_0) = 0$. По построение обаче имахме $|f(x_{n_k}) - f\left(x'_{n_k}\right)| \geq \varepsilon_0$ за всяко $k \in \mathbb{N}$. Полученото противоречие завършва доказателството на теоремата. $\square$

ЗАДАЧА ЗА ОБМИСЛЯНЕ ВКЪЩИ:

Упражнение 2.12. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е равномерно непрекъсната върху цялата реална права. Докажете, че f има линеен ръст, тоест съществуват константи C_1 и C_2 такива, че

$$|f(x)| \leq C_1 + C_2 \cdot |x|$$

за всяко реално x.