Лекция 4: Редици от реални числа - последна част. Граници на функции

1 Подредици и точки на сгъстяване. Теорема на Болцано-Вайерщрас (принцип за компактност)

Понятията "точка на сгъстяване" и "подредица" са тясно свързани, както ще се убедим след малко. Важно е да си дадете точна сметка за разликата между "граница" и "точка на сгъстяване".

Дефиниция 1.1. *Точка на сгъстяване*

Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$. Казваме, че a е точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако във всяка околност на a има безброй много членове на редицата. Формално, за всяко U - околност на точката a множеството $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in U\}$ е безкрайно.

Забележете, че броим индексите! Помислете за точките на сгъстяване на $0, 1, 0, 1, \dots$.

Твърдение 1.2. *Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то a е точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, при това единствена.*

Доказателство. Границата е точка на сгъстяване, защото кофинитните множества винаги са безкрайни. Допускаме, че съществува друга точка на сгъстяване $b \in \mathbb{R}, a \neq b$. Ако U е околност на a и V е околност на b, такива че $U \cap V = \emptyset$, то можем да приложим дефинициите за сходяща редица и да достигнем до противоречие с дефиницията за точка на сгъстяване:

$$\underbrace{\{n \in \mathbb{N} : a_n \in U\}}_{\text{кофинитно}} \Rightarrow \underbrace{\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin U\}}_{\text{крайно}} \supset \underbrace{\{n \in \mathbb{N} : a_n \in V\}}_{\text{безкрайно}}$$

Очевидно безкрайно множество няма как да се съдържа в крайно множество. Включването се дължи на факта, че $U \cap V = \emptyset$ влече $\mathbb{R} \setminus U \supset V$. $\square$

Пример 1.3. Като пример можем да разгледаме $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b\,(a \neq b)$ и редицата $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$. Лесно се съобразява, че именно границите a и b на горните редици са точки на сгъстяване на новата редица. Можем да посочим и растяща редица, която няма точки на сгъстяване - $1, 2, 3, \dots, n, \dots$.

Пример 1.4. Знаем, че множеството от рационалните числа $\mathbb{Q}$ е изброимо и следователно може да бъде подредено в редица, нека например

$$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$$

Съобразете, че всяко реално число е точка на сгъстяване на горната редица.

Дефиниция 1.5. *Подредица*

Ако от редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ задраскаме част от членовете така, че да останат безброй много членове и запазим реда на останалите, получаваме подредица на първоначалната. Еквивалентно, всяка строго растяща (безкрайна) редица от естествени числа $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$ задава подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Да си спомним дефиницията на редица като изображение $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Сега казваме, че всяка нейна подредица е композиция на някакво строго растящо изображение $n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ и на $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$k \ \mapsto \ n_k \ \mapsto \ a_{n_k}$$

Твърдение 1.6. *Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща редица от реални числа и $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е нейна подредица. Тогава $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е сходяща към границата на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Доказателство. Нека $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ и U е произволна околност на a. Тогава съществува $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че за всяко $n \geq n_0$ е в сила $a_n \in U$. Тъй като $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ е строго растяща и безкрайна, съществува $k_0 \in \mathbb{N}$ такова, че $n_{k_0} \geq n_0$. Тогава за всяко $k \geq k_0$ имаме $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$ и следователно $a_{n_k} \in U$. Получихме, че $a_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. □

Ето обещаната връзка между подредици и точки на сгъстяване:

Твърдение 1.7. *Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$. Твърдим, че a е точка на сгъстяване на дадената редица точно тогава, когато съществува подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която е изпълнено $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$.*

Доказателство. Ако $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е подредица на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и при това $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$, то ясно е, че a е точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Наистина, ако U е околност на a, то:

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \in U\} \supset \{n_k = n(k) \in \mathbb{N} : k \geq k_0\} \ ,$$

защото след определен индекс k_0 всички членове на подредицата попадат в избраната околност на a.

Обратно, нека a е точка на сгъстяване за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Интервалът $(a-1, a+1)$ е околност на a. Тогава съществува $n_1 \in \mathbb{N}$ такова, че $a_{n_1} \in (a-1, a+1)$. Разглеждаме $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ - околност на a. Понеже $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in (a-1, a+1)\}$ е безкрайно (от дефиницията на точка на сгъстяване) и $\{1, 2, \ldots, n_1\}$ е крайно, то съществува $n_2 > n_1$ с $a_{n_2} \in \left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$.

Продължаваме с аналогични разсъждения и избираме индекси $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$. На поредната стъпка имаме околност $\left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right)$ на a. Понеже $\left\{n \in \mathbb{N} : a_n \in \left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right)\right\}$ е безкрайно и $\{1, 2, \ldots, n_{k-1}\}$ е крайно, то съществува $n_k > n_{k-1}$ такова, че $a_{n_k} \in \left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right)$.
По този начин построихме $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \ldots$ (и значи $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е подредица на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$) така, че

$$|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$$

С това доказателството е завършено. □

Следващата теорема е изключително важна и често употребявана. Принципът за непрекъснатост и тук е ключов за верността на заключението.

Теорема 1.8. *Теорема на Болцано-Вайерщрас (Принцип за компактност)*
Всяка ограничена редица има точка на сгъстяване. Еквивалентно, всяка ограничена редица има сходяща подредица.

Доказателство. Първо да съобразим, че ограничеността на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ влече съществуването на $b, c \in \mathbb{R}$ такива, че $a_n \in [b, c] \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Да положим $b_0 := b, c_0 := c$. Разглеждаме интервалите $\left[b_0, \frac{b_0+c_0}{2}\right]$ и $\left[\frac{b_0+c_0}{2}, c_0\right]$. Тогава поне едно от следните множества е безкрайно:

$$\left\{n \in \mathbb{N} : a_n \in \left[b_0, \frac{b_0 + c_0}{2}\right]\right\}$$
$$\left\{n \in \mathbb{N} : a_n \in \left[\frac{b_0 + c_0}{2}, c_0\right]\right\}$$

Ако първото от тях е безкрайно, избираме $b_1 := b_0, c_1 := \frac{b_0+c_0}{2}$. Ако първото множество е крайно, второто множество задължително е безкрайно и тогава полагаме $b_1 := \frac{b_0+c_0}{2}, c_1 := c_0$. Съсредоточаваме се в интервала $[b_1, c_1]$, в който има безброй членове на редицата, и продължаваме по аналогичен начин. Нека за някакво $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ сме построили интервалите

$$[b_0, c_0] \supset [b_1, c_1] \supset [b_2, c_2] \supset \cdots \supset [b_k, c_k]$$

такива, че

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \in [b_k, c_k]\} \text{ е безкрайно множество.}$$

и при това

$$c_i - b_i = \frac{c - b}{2^i} \; \forall i, \; 0 \leq i \leq k$$

Индукционната стъпка е естествена - разглеждаме множествата:

$$\left\{n \in \mathbb{N} : a_n \in \left[b_k, \frac{b_k + c_k}{2}\right]\right\}$$
$$\left\{n \in \mathbb{N} : a_n \in \left[\frac{b_k + c_k}{2}, c_k\right]\right\}$$

Ако първото от тези множества е безкрайно, полагаме $b_{k+1} := b_k, c_{k+1} := \frac{b_k+c_k}{2}$. Ако не, второто от двете множества е безкрайно (поради индукционното предположение), и тогава полагаме $b_{k+1} := \frac{b_k+c_k}{2}, c_{k+1} := c_k$. Сега имаме $[b_k, c_k] \supset [b_{k+1}, c_{k+1}]$, $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in [b_{k+1}, c_{k+1}]\}$ е безкрайно и при това:

$$c_{k+1} - b_{k+1} = \frac{c_k - b_k}{2} = \frac{c - b}{2^{k+1}}$$

В тази конструкция избирахме втория интервал само ако в първия има краен брой членове на редицата. Направихме това за определеност: ако и в двата интервала има безброй членове на редицата, спокойно можем да изберем кой да е от тях и индукционното предположение пак ще бъде в сила за новата стъпка.

И тъй, построихме редица от вложени един в друг интервали

$$[b_0, c_0] \supset [b_1, c_1] \supset [b_2, c_2] \supset \cdots \supset [b_k, c_k] \supset [b_{k+1}, c_{k+1}] \supset \cdots$$

Имаме

$$\left.\begin{array}{l} b_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k \leq b_{k+1} \leq \cdots \\ c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_k \geq c_{k+1} \geq \cdots \end{array}\right\} \text{Редиците } \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ и } \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ се схождат към } a.$$

Наистина, тъй като $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре (от c_0) и растяща, тя е сходяща. Да означим границата ѝ с a: $b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$. От друга страна:

$$|c_k - a| \leq |c_k - b_k| + |b_k - a| = \frac{c-b}{2^k} + |b_k - a| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 + 0 \Rightarrow c_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$$

Твърдим, че a е точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Наистина, нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тъй като $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ е околност на a, имаме

$$\left.\begin{aligned} b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a \Rightarrow b_k \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\ \forall k \geq k_1 \\ c_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a \Rightarrow c_k \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\ \forall k \geq k_2 \end{aligned}\right\} k_0 := \max\{k_1, k_2\} \begin{cases} b_{k_0} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \\ c_{k_0} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \end{cases}$$

Сега $a - \varepsilon < b_{k_0} < c_{k_0} < a + \varepsilon$. Следователно според конструкцията на интервалите $[b_k, c_k]$, $k \in \mathbb{N}$ множеството $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in [b_{k_0}, c_{k_0}]\}$ е безкрайно и остава да съобразим, че

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \in [b_{k_0}, c_{k_0}]\} \subset \{n \in \mathbb{N} : a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$$

Това доказва, че a е точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\square$

Важна забележка: От горното доказателство директно се получава, че ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа и $b, c \in \mathbb{R}$ са такива, че $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in [b, c]\}$ е безкрайно, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има точка на сгъстяване, която принадлежи на интервала $[b, c]$.

Пример 1.9. Редицата $\left\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \dots\right\}$ има единствена точка на сгъстяване 0, но не е ограничена и следователно не е сходяща. Да си припомним, че в Твърдение 1.2 доказахме, че сходящите редици имат единствена точка на сгъстяване. Примерът, който дадохме току-що, показва, че обратното твърдение на 1.2 не е вярно в общия случай.

Твърдение 1.10. *Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена редица от реални числа, която има единствена точка на сгъстяване. Тогава редицата е сходяща.*

Доказателство. Имаме, че $b \leq a_n \leq c$ $\forall n \in \mathbb{N}$, тъй като редицата е ограничена. Нека $\varepsilon > 0$ и разгледаме околност $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ на a - единствената точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ще докажем, че a е граница на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Допускаме, че това не е вярно. Тогава съществува $\varepsilon > 0$ такова, че извън $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ има безброй много членове на редицата, т.е. че $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ е безкрайно. Следователно или $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in [b, a-\varepsilon]\}$, или $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in [a+\varepsilon, c]\}$ е безкрайно. (Ако например $a + \varepsilon > c$, приемаме, че $[a+\varepsilon, c] = \emptyset$.) Използваме важната забележка, за да получим:

- Ако първото от двете множества е безкрайно, то съществува точка на сгъстяване d на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такава, че $d \in [b, a-\varepsilon] \Rightarrow d \neq a$.

- Ако второто от двете множества е безкрайно, то съществува d' - точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такава, че $d' \in [a+\varepsilon, c] \Rightarrow d' \neq a$.

И в двата случая получаваме противоречие с единствеността на точката на сгъстяване a. $\square$

2 Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост на числови редици

Да си спомним, че една редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, ако съществува реално число a такова, че $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. В тази дефиниция освен редицата участва и границата, за която предполагаме, че е неизвестна. Добре е да разполагаме с условие за сходимост, в което участват само членовете на редицата, но не и евентуалната граница.

Дефиниция 2.1. *Фундаментална редица*
Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална, ако е изпълнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall m \geq n_0 \, \forall n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на числова редица е друго условие, което по същество е еквивалентно на принципа на непрекъснатост.

Теорема 2.2. *(Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост на числова редица) Една редица от реални числа е сходяща точно тогава, когато е фундаментална.*

Доказателство. Доказателството провеждаме в двете посоки:

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална

Нека $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ и $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ и следователно съществува $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че за всички $n \geq n_0$ е в сила $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Да вземем кои да е две числа $m \geq n_0$ и $n \geq n_0$. Тогава:

$$\left.\begin{matrix} |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow |a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща

Преди всичко да покажем, че от фундаменталността на една редица следва нейната ограниченост. Наистина, да вземем $\varepsilon = 15 > 0$. Тогава съществува $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че за всички $n \geq n_0$ и за всички $m \geq n_0$ е в сила $|a_n - a_m| < 15$. В частност, ако вземем $m = n_0$, получаваме, че за всички $n \geq n_0$ е в сила $|a_n - a_{n_0}| < 15$. Следователно

$$a_n \in (a_{n_0} - 15, a_{n_0} + 15) \ \forall n \geq n_0 \ .$$

Избираме:

$$\begin{cases} b := \min\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_0 - 1}, a_{n_0} - 15\} & \Rightarrow b \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N} \\ c := \max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_0 - 1}, a_{n_0} + 15\} & \Rightarrow c \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Следователно $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена.

Съгласно принципа за компактност съществува подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, която е сходяща. Нека $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$. Ще докажем, че $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Избираме произволно $\varepsilon > 0$. Идеята е да използваме подходящ член на подредицата, за да направим числото

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a|$$

по-малко от ε за сметка на индекса n.

От фундаменталността на редицата имаме, че съществува $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че за всички $n \geq n_0$ и за всички $m \geq n_0$ е в сила $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогава, ако k е толкова голямо, че $n_k \geq n_0$, и за всички $n \geq n_0$ ще получим $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$, тоест ще направим първото събираемо малко. Да отбележим, че съществува $k_1 \in \mathbb{N}$ такова, че за всички $k \geq k_1$ е в сила $n_k \geq n_0$.

За да направим второто събираемо малко, трябва да използваме, че подредицата клони към a. Наистина, от $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$ и $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ следва, че съществува $k_2 \in \mathbb{N}$ такова, че за всички $k \geq k_2$ е в сила $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Готови сме да фиксираме произволно $n \geq n_0$ (n_0 зависи само от ε). Избираме $k := \max\{k_1, k_2\}$. Тогава от $k \geq k_1$ имаме $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$, а от $k \geq k_2$ имаме $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следователно

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

за всички $n \geq n_0$. С това доказателството е завършено. □

Пример 2.3. Да разгледаме редицата с общ член $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Ясно е, че тази редица е строго растяща ($a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1} > a_n$). При това

$$a_{2^{k+1}} - a_{2^k} = \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^k+2^k} > 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

Виждаме, че $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е фундаментална (няма как да удовлетворява условието за фундаменталност, ако $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$). Следователно $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не може да бъде сходяща. Като използваме, че тази редица е растяща, получаваме и че тя не е ограничена отгоре.

3 Граници на функции - дефиниции на Коши и Хайне

Следващата ни цел е да въведем понятието "граница на функция, когато аргументът клони към x_0" ($\lim_{x\to x_0} f(x)$). Интуицията би трябвало да бъде какво е поведението на втората координата на точка от графиката на функцията, когато първата координата се приближава към x_0. Ще започнем с няколко съвсем неформални примера.

Пример 3.1.

- Дефиниционната област на $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ е $Dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Графиката на тази функция е права (графиката на $g(x) = x + 1$), от която е извадена точката с координати $(1, 2)$. Ако една точка е върху тази графика и първата ѝ координата се приближава към 1, втората ѝ координата се приближава към 2: $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

- Да разгледаме функцията "цяла част на x": $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Тя е дефинирана върху цялата реална права. Поведението на втората координата на точка от нейната графика (спомнете си как изглежда от лекции или си я нарисувайте), когато първата координата се приближава към цяло число, е различно в зависимост от това дали първата координата се приближава към цялото число отляво или отдясно. Съответно $\lim_{x\to x_0} f(x)$ не съществува, когато x_0 е цяло число.

- Функцията $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ е с дефиниционна област $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тя няма граница при $x \to 0$ по по-сложна причина от ситуацията в предишния пример: ако изберем колкото искаме малка околност на нулата, върху графиката има точки с първа координата в тази околност и втора координата кое да е реално число в интервала $[-1, 1]$.

Преди да въведем строго понятието "граница на функция, когато аргументът клони към x_0", трябва да имаме представа кога аргументът на функция с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}$ може "да се приближава към x_0".

Дефиниция 3.2. *Точка на сгъстяване на $D \subset \mathbb{R}$*

Нека $D \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. Казваме, че x_0 е точка на сгъстяване на D, ако за всяка околност U на x_0 множеството $U \cap D$ е безкрайно.

Пример 3.3.
- Множеството от точките на сгъстяване на интервала $(3, +\infty)$ е интервалът $[3, +\infty)$.
- Множеството от точките на сгъстяване на $D \equiv (-\infty, -1] \cup (0, 1) \cup \{5\} \cup \{17 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ е $(-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup \{17\}$.
- Правете разлика между точка на сгъстяване на редица от реални числа и точка на сгъстяване на множество (например множеството от членовете на дадена редица)! Например точките на сгъстяване на редицата $0, 1, 0, 1, \ldots$ са 0 и 1, а множеството $\{0, 1\}$ няма точки на сгъстяване.

Твърдение 3.4. *Нека $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*

(а) x_0 е точка на сгъстяване на D.

(б) Във всяка околност U на x_0 има точка от D, различна от x_0 ($(U \cap D) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$).

(в) Съществува редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$, $x_n \neq x_0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ такава, че $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$.

(г) Съществува редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}$ такава, че $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ и $|x_{n+1} - x_0| < |x_n - x_0|$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Доказателство. (а) $\Rightarrow$ (б) : Тривиално.

(б) $\Rightarrow$ (в) : За произволно $n \in \mathbb{N}$ разглеждаме околност $\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ на x_0:

$$\left[D \cap \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)\right] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\, x_n \in \left[D \cap \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)\right] \setminus \{x_0\} \Rightarrow x_n \in D,\ x_n \neq x_0,\ |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$$

Следователно построихме $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$, $x_n \neq x_0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ и $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, откъдето следва $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$.

(в) $\Rightarrow$ (г) : Знаем, че съществува редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}$, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$. Ще построим нейна подредица, за която (г) е в сила. Предварително е ясно, че която и подредица на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ да вземем, тя ще клони към x_0 и всичките ѝ членове ще се съдържат в

$D \setminus \{x_0\}$. Нека означим $n_1 := 1$. Тъй като $x_{n_1} \neq x_0$, имаме $|x_{n_1} - x_0| > 0$ и следователно можем да изберем $n_2 > n_1$ с $|x_{n_2} - x_0| < |x_{n_1} - x_0|$. Нека сме избрали $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ такива, че $|x_{n_i} - x_0| < |x_{n_{i-1}} - x_0|$ за всички i, $2 \leq i \leq k$. Отново $|x_{n_k} - x_0| > 0$ и следователно $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ влече съществуването на $\overline{n} \in \mathbb{N}$ такова, че за всяко $n \geq \overline{n}$ е в сила $|x_n - x_0| < |x_{n_k} - x_0|$. Избираме n_{k+1} такова, че $n_{k+1} \geq \overline{n}$ и $n_{k+1} > n_k$. Тогава $|x_{n_{k+1}} - x_0| < |x_{n_k} - x_0|$. По този начин построихме подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такава, че $|x_{n_{k+1}} - x_0| < |x_{n_k} - x_0|$ за всяко $k \in \mathbb{N}$.

(г) $\Rightarrow$ (а) : Знаем, че съществува редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}$ такава, че $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ и $|x_{n+1} - x_0| < |x_n - x_0|$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Забележете, че последните неравенства влекат, че $x_n \neq x_m$ за произволен избор на $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$. Тогава за произволно $\varepsilon > 0$ имаме

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D \supset \{x_n : |x_n - x_0| < \varepsilon\} \supset \{x_n : n \geq n_0\} \ ,$$

което е безкрайно. $\square$

Дефиниция 3.5. *Граница на функция (във формата на Коши)*

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ и нека $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на D. Казваме, че функцията f има граница $L \in \mathbb{R}$, когато аргументът клони към x_0 (и пишем $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$), ако за всяка околност U на L съществува околност V на x_0 такава, че за всяко $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$ е в сила $f(x) \in U$.

Можем да формулираме тази дефиниция по еквивалентен начин: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всички $x \in D \setminus \{x_0\}$, за които $|x - x_0| < \delta$, е в сила $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Пример 3.6. Ще покажем, че $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Първо да отбележим, че дефиниционната област на функцията $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ е $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ и следователно 0 е нейна точка на сгъстяване.

Основните неравенства, с които ще започнем, ще получим от геометрични съображения. Нека $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ е произволно. Означаваме с $O(0,0)$ началото на координатната система, с $A(1,0)$ пресечната точка на единичната окръжност с положителната част на абцисата, с $B(\cos x, \sin x)$ точка върху единичната окръжност, отговаряща на централен ъгъл x, и с $C(1, \mathrm{tg} x)$ пресечната точка на лъча $\vec{OB}$ с права през A, перпендикулярна на абцисата. Тогава лицето на триъгълника $\triangle OAB$ (равно на $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x$) не надминава лицето на сектора OAB от единичния кръг, което не надминава лицето на триъгълника $\triangle OAC$ (равно на $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \mathrm{tg} x$). Съобразяваме колко е лицето на сектора OAB от единичния кръг, като забележим, че лицето на сектора от единичния кръг, отговарящо на централен ъгъл 2π, е π (знаете, че лицето на кръг с радиус r е πr^2), и тогава търсеното лице, което отговаря на централен ъгъл x, е $\frac{1}{2} \cdot x$. Получаваме неравенствата:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x \leq \frac{1}{2} \cdot x \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \mathrm{tg} x \quad \Rightarrow \quad \sin x \leq x \leq \mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Отчитайки, че всички количества са положителни, от горните неравенства за всички $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ получаваме

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq 1 - \frac{\sin x}{x} \leq 2\sin^2 \frac{x}{2} \leq 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot x^2 \ \text{ за всяко } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le 1 - \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{2} \cdot x^2 \ \text{ за всяко } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\} \ \text{ заради четността на } \frac{\sin x}{x} \text{ и } x^2$$

Нека сега $\varepsilon > 0$ е произволно. Полагаме $\delta := \sqrt{2\varepsilon}$. За всяко $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ от горните пресмятания получаваме

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon \ , \quad \text{с което сме доказали, че} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ .$$

Завършваме лекцията с друга дефиниция на граница на функция, чиято еквивалентност с дефиницията на граница на функция във формата на Коши ще докажем след една седмица.

Дефиниция 3.7. *Граница на функция (във формата на Хайне)*

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ и нека $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на D. Казваме, че функцията f има граница $L \in \mathbb{R}$, когато аргументът клони към x_0, ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}$ от стойности на аргумента, която клони към x_0, съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ клони към L.

$$\left(\forall \ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\} \, , \ x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0 : \ f\left(x_n\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} L \right)$$

ЗАДАЧИ ЗА ОБМИСЛЯНЕ ВКЪЩИ (до следващата седмица):

Упражнение 3.8. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа. Докажете, че $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ тогава и само тогава, когато $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ няма точка на сгъстяване.