2 Непрекъснатост

2.1 Дефиниция

Нека $a \in D_f$.

Казваме, че f е непрекъсната в a, ако

- f има граница в a и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- a не е точка на сгъстяване за D_f, т.е. има $\delta > 0$, за което $D_f \cap (a - \delta, a + \delta) = \{a\}$
- Дефиниция 1 (Хайне)

  Казваме, че f е непрекъсната в a, ако за всяка редица $\{x_n\}_1^\infty$, за която $x_n \in D_f$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, е изпълнено $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.
- Дефиниция 2 (Коши)

  Казваме, че f е непрекъсната в a, ако за всяко $\varepsilon > 0$ има $\delta > 0$ такова, че за всяко $x \in D_f$, с $|x - a| < \delta$, е изпълнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

2.2 Примери

- $\chi_{\mathbb{Q}}$ е прекъсната във всяка точка

- $[x]$ и $\{x\}$ са прекъснати в целите числа, а в останалите са непрекъснати
- $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{за} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{за} \quad x = 0 \end{cases}$ е прекъсната само в 0

2.3 Локални свойства

- локална ограниченост
- локална постоянност на знака
- аритметични действия
- съставна функция от непрекъснати е непрекъсната

2.4 Непрекъснатост на основните „елементарни“ функции

- непрекъснати навсякъде в дефиниционната си област
- рационални функции
- експонента и логаритъм
- тригонометрични функции

- непрекъснатост на обратната функция – след глобални свойства

2.5 Глобални свойства

2.5.1 Теорема на Вайерщрас

Нека f е непрекъсната във всяка точка на интервала $[a, b]$ (**краен и затворен**). Тогава

- f е ограничена в $[a, b]$
- f има най-малка и най-голяма стойност в $[a, b]$

  подробно – съществуват $x_{min} \in [a, b]$ и $x_{max} \in [a, b]$, за които $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ за всяко $x \in [a, b]$.

Условията за интервала не могат да бъдат отслабени

2.5.2 Теорема за междинните стойности

Нека f е непрекъсната във всяка точка на интервала $[a, b]$ (**краен и затворен**) и l е число между $f(a)$ и $f(b)$ ($l = tf(a) + (1-t)f(b)$ за някое $t \in [0, 1]$). Тогава съществува $c \in [a, b]$, за което $f(c) = l$.

Основен вариант: Нека f е непрекъсната във всяка точка на интервала $[a, b]$ и $f(a) < 0 < f(b)$. Тогава съществува $c \in (a, b)$, за което $f(c) = 0$.

2.5.3 Следствия:

- Образът на интервал е интервал.
- Образът на краен и затворен интервал е краен и затворен интервал.
- Примери: x^n, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$

2.5.4 Монотонност на непрекъсната и обратима функция

Нека f е непрекъсната (във всяка точка на) и обратима в интервал J. Тогава f е строго монотонна в J.

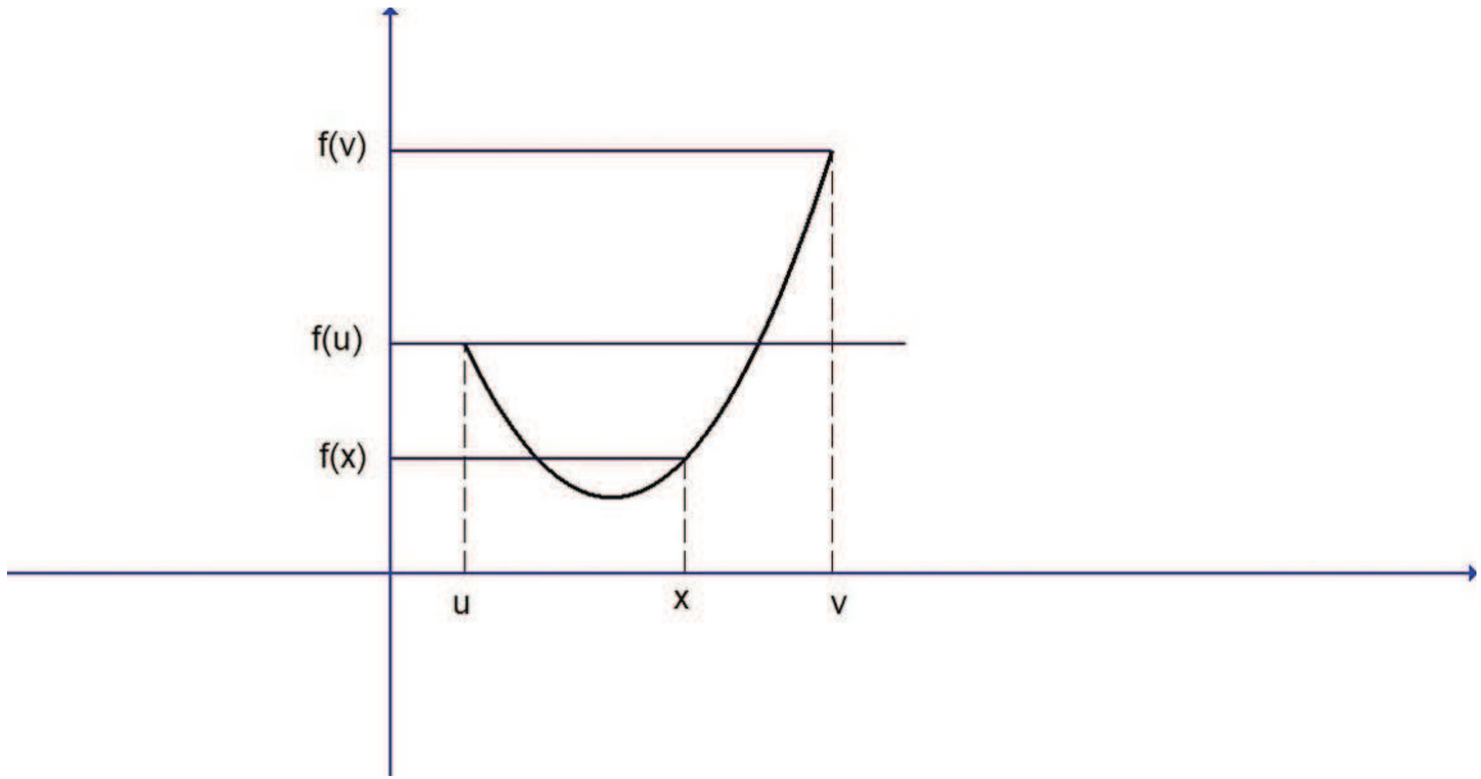
Основна лема: Нека $u \in J$, $v \in J$ и $x \in J$ като $u < v$ и $f(u) < f(v)$. Тогава

- Ако $x < u < v$, то $f(x) < f(u) < f(v)$
- Ако $u < x < v$, то $f(u) < f(x) < f(v)$
- Ако $u < v < x$, то $f(u) < f(v) < f(x)$

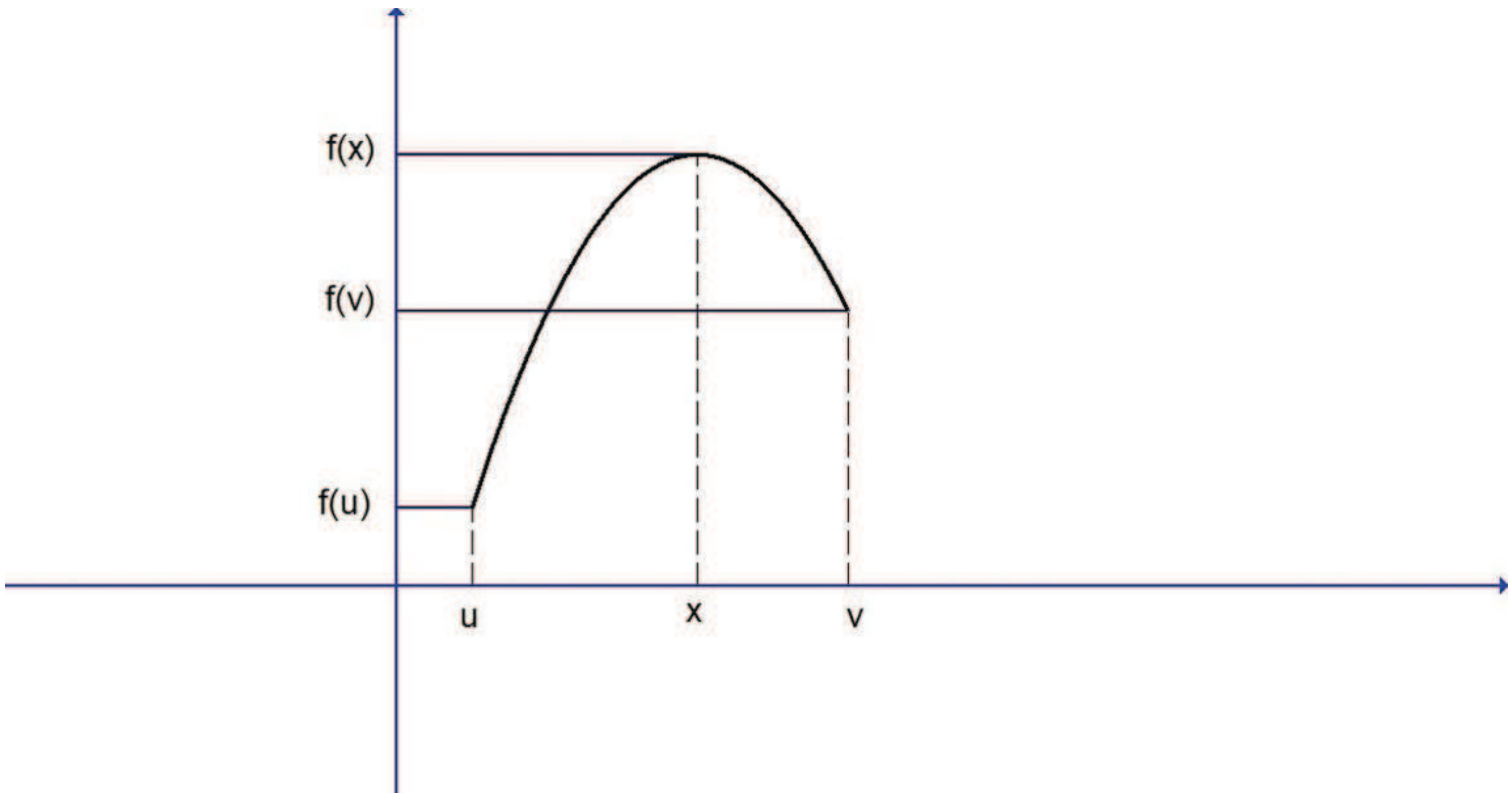
Основна лема (втора формулировка): Нека $u \in J$, $v \in J$ и $x \in J$ като $u < x < v$. Тогава

- или $f(u) < f(x) < f(v)$
- или $f(v) < f(x) < f(u)$
- Доказателство: или $f(u) < f(v)$, или $f(v) < f(u)$. За случая $f(u) < f(v)$

  Не е възможно $f(x) < f(u) < f(v)$

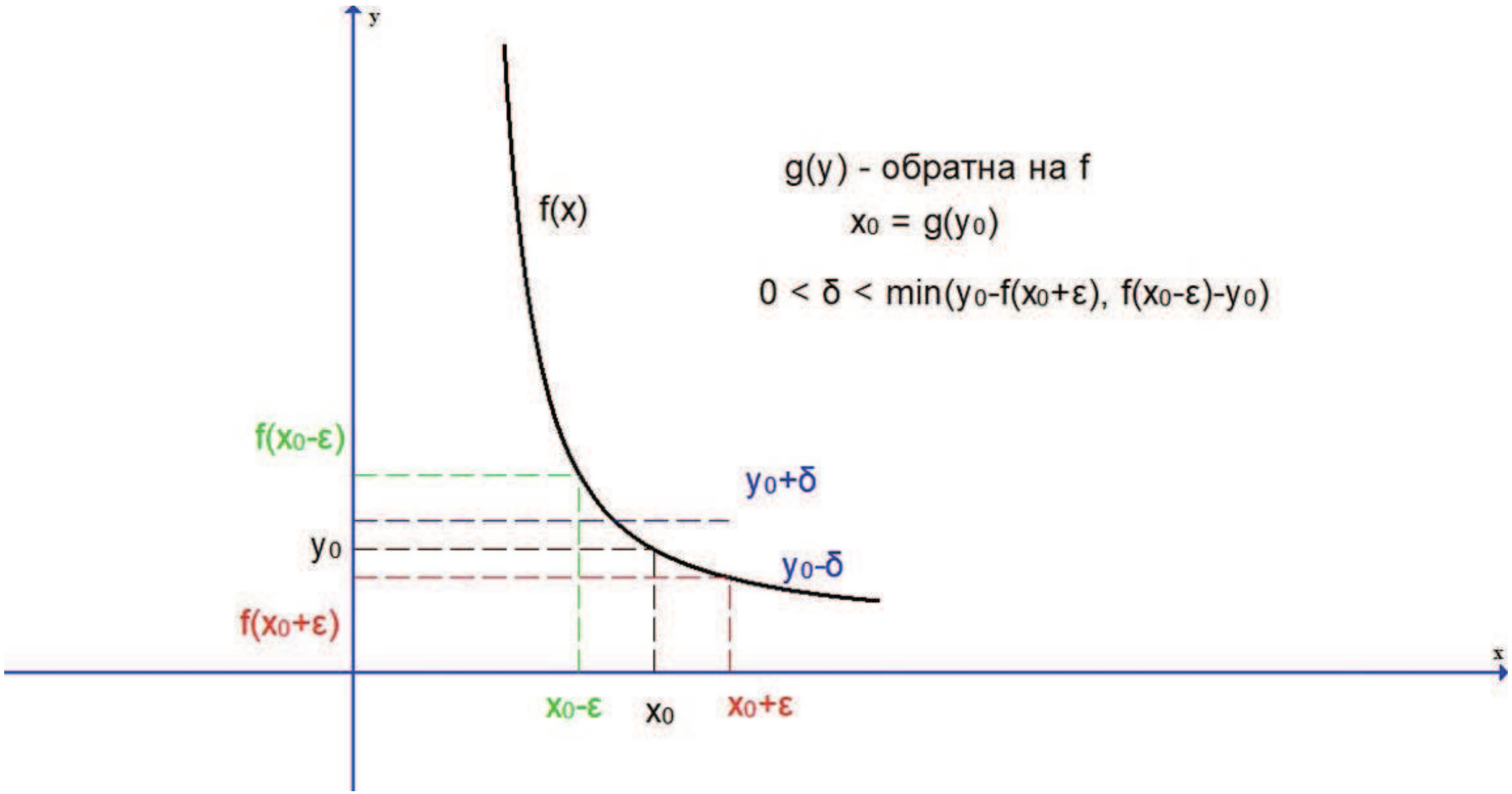


Не е възможно и $f(u) < f(v) < f(x)$



2.5.5 Непрекъснатост на обратната функция

Нека f е непрекъсната (във всяка точка на) и обратима в интервал J. Тогава обратната ѝ g е непрекъсната в интервала $f(J)$.



2.5.6 Следствия

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{x} = 1$

2.6 Равномерна непрекъснатост

2.6.1 Дефиниция

Казваме, че функцията f е **равномерно непрекъсната** в интервала J, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всеки $x,\ y \in J$ и $|x - y| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Отрицание

Функцията f не е равномерно непрекъсната в интервала J, ако съществува $\varepsilon_0 > 0$ такова, че за всяко $\delta > 0$ съществуват $x_\delta,\ y_\delta \in J$, за които $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ и $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

Ако f е равномерно непрекъсната в интервала J, то f е непрекъсната във всяка точка на интервала J.

Примери:

- x^2 не е равномерно непрекъсната в $[0, +\infty)$
- x^2 е равномерно непрекъсната в $[0, A]$ $(A > 0)$
- $\dfrac{1}{x}$ не е равномерно непрекъсната в $(0, +\infty)$
- $\dfrac{1}{x}$ е равномерно непрекъсната в $[A, +\infty)$ $(A > 0)$
- Нека $J = J_1 \cup J_2$ (интервали). f е равномерно непрекъсната в интервала J тогава и само тогава, когато f е равномерно непрекъсната в интервала J_1 И f е равномерно непрекъсната в интервала J_2
- Равномерно непрекъснатите функции в даден интервал са линейно пространство.

2.6.2 Теорема за равномерната непрекъснатост

Нека f е непрекъсната във всяка точка на интервала $[a, b]$ (**краен и затворен**). Тогава f е равномерно непрекъсната в интервала $[a, b]$.

Схема на доказателството:

- Допускаме противното
- има $\varepsilon_0 > 0$ и две редици $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset [a, b]$, за които $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.
- има подредица $\left\{x_{n_k}\right\}$, която $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]$
- тогава $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \left(f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right) = 0$, противоречие

2.6.3 Приложения

- Периодична и непрекъсната в $\mathbb{R}$ функция е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{arctg} x$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$.
- $\sqrt[3]{x}$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$.
- Въпрос: съществува ли ограничена и непрекъсната в $\mathbb{R}$ функция, която НЕ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$?