Лекция 13: Интегриране чрез субституции. Интегриране на рационални функции

1 Интегриране чрез субституции

Интегрирането чрез субституции (или смяна на променливите) е единствената техника за интегриране, която ни остана да разгледаме.

Теорема 1.1. *Нека Δ_x и Δ_t са отворени интервали, а $\varphi : \Delta_t \to \Delta_x$ е биекция между тях. Нека φ, φ^{-1} са диференцируеми. Предполагаме, че $f : \Delta_x \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция. Ако е изпълнено:*

$$\int f\left(\varphi\left(t\right)\right)\, \mathrm{d}\left(\varphi\left(t\right)\right) = \int f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)\, dt = F\left(t\right) + C$$

то е в сила:

$$\int f\left(x\right)\, dx = F\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right) + C$$

Доказателство. Знаем, че $F'(t) = f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)$ за всяко $t \in \Delta_t$. Доказателството се състои в диференциране:

$$\begin{gathered}\left[F\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right) + C\right]' = F'\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right)\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right)' = \\ = F'\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right)\left(\varphi^{-1}\right)'\left(x\right) = \left[f\left(\varphi\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right)\right)\varphi'\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right)\right]\left(\varphi^{-1}\right)'\left(x\right) = \\ = f\left(x\right)\varphi'\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right)\left(\varphi^{-1}\right)'\left(x\right)\end{gathered}$$

От друга страна, $\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right) = x$ за всяко $x \in \Delta_x$. Диференцирайки това тъждество, получаваме:

$$\varphi'\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right)\cdot\left(\varphi^{-1}\right)'\left(x\right) = 1 \;\text{ за всяко } x \in \Delta_x\ .$$

Следователно:

$$f\left(x\right)\varphi'\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right)\left(\varphi^{-1}\right)'\left(x\right) = f\left(x\right) \Rightarrow \left[F\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right) + C\right]' = f\left(x\right)$$

$$\int f\left(x\right)\, dx = F\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right) + C$$

С това доказателството е завършено. □

На практика използваме горната теорема по следния начин. Трябва да пресметнем $\int f\left(x\right)\, dx$. Извършваме полагането:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi\left(t\right) \\ t = \varphi^{-1}\left(x\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \int f\left(x\right)\, dx = \int f\left(\varphi\left(t\right)\right)\, \mathrm{d}\left(\varphi\left(t\right)\right) = F\left(t\right) + C = F\left(\varphi^{-1}\left(t\right)\right) + C$$

Субституциите са мощно средство за пресмятане на интеграли. Ще се убедите, че много алгоритми за пресмятане на даден клас интеграли започват с "направете следната смяна на променливите". Възможно е подходящо подбрана смяна на променливите да опрости значително първоначалния интеграл.

В първия пример, който ще дадем за субституция, ще се постараем да опишем подробно всички стъпки. И така, да се пресметне интегралът

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx, \qquad a > 0\ .$$

Естествена субституция за този интеграл (помислете защо) е

$$x = \varphi(t) = a \sin t, \quad \varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-a, a)\ .$$

Обратната биекция

$$\varphi^{-1} : (-a, a) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ \text{ е } \ t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\ .$$

Знаем, че и правата, и обратната биекция са диференцируеми. По този начин можем да получим примитивна в интервала $(-a, a)$. Да отбележим, че $\sqrt{a^2 - x^2}$ е дефинирано и непрекъснато за $x \in [-a, a]$. Следователно нищо не губим. Пресмятаме

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, \mathrm{d}\,(a \sin t) =$$

$$= \int a\sqrt{1 - \sin^2 t}\,(a \cos t)\ dt = \int a^2\, |\cos t|\, (\cos t)\ dt = a^2 \int \cos^2 t\, dt =$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = a^2 \left(\int \frac{dt}{2} + \int \frac{\cos 2t}{2}\, dt\right) = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\int \cos 2t\, \mathrm{d}\,(2t)\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{4} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) + C$$

Използвахме, че $\cos t > 0$ за всяко $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Запомнете, че неопределеният интеграл не е пресметнат, докато не се върнете към първоначалната променлива.

Тъй като този интеграл (и негови варианти) се среща често, ще го пресметнем по още един начин.

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x\, \mathrm{d}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)' dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - (-1)\int \frac{2x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx - \left(-a^2\right) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Последният интеграл е "почти табличен" и вече сме го смятали. Следователно

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \Rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Този пример ви показва, че отговорите, получени при пресмятане на един и същи интеграл по различни начини, може да изглеждат различно. Това не трябва да ви притеснява – просто диференцирайте, за да се убедите, че не сте допуснали грешка. Още една забележка: с интегриране по части като по-горе можете да пресметнете например $\int \sqrt{x^2 + a}\, dx$ (свеждате го към дългия логаритъм), както и да намалите степента на такива изрази в числителя.

Нетривиални примери на субституции ще видите по-нататък. Сега (като подготовка за алгоритъма за интегриране на рационални функции), ще упражним субституцията на Хорнер, която автоматизира отделянето на точен квадрат. Използвайки я, можем да се отървем от първата степен на променливата в произволен квадратен тричлен. По този начин например се пресмятат интеграли от вида

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad \text{или} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (a \neq 0)\ .$$

Полагаме:

$$\left.\begin{array}{l} t = x + \frac{b}{2a} \\ x = t - \frac{b}{2a} \end{array}\right\} \Rightarrow ax^2 + bx + c = a\left(t - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(t - \frac{b}{2a}\right) + c = at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Пример 1.2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x - 2}} = \left\{ \begin{array}{c} t = x + \frac{1}{4} \\ x = t - \frac{1}{4} \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{2\left(t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{16}\right) + t - \frac{1}{4} - 2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{2t^2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2t^2 - \frac{17}{8}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{17}{16}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left| t + \sqrt{t^2 - \frac{17}{16}} \right| + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left| x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}} \right| + C$$

Всъщност, $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{16} = 2x^2 + x - 2$.

Пример 1.3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2 + x + 1}} = \left\{ \begin{array}{c} t = x - \frac{1}{4} \\ x = t + \frac{1}{4} \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{-2\left(t^2 + \frac{t}{2} + \frac{1}{16}\right) + t + \frac{1}{4} + 1}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{-2t^2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{-2t^2 + \frac{9}{8}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{-t^2 + \frac{9}{16}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{9}{16} - t^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{4t}{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{4t}{3}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{4t}{3}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \arcsin\left(\frac{4t}{3}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \arcsin\left(\frac{4x-1}{3}\right) + C$$

2 Интегриране на рационални функции

Основното знание, което трябва да усвоите в частта от курса за неопределени интеграли, е умението да интегрирате рационални функции. Рационална функция се нарича функция, която е частно на два полинома

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \ (P, Q \text{ са полиноми на } x)$$

Естествената дефиниционна област на рационална функция е реалната права, от която са извадени най-много краен брой точки (реалните корени на знаменателя) – значи тази дефиниционна област е обединение на краен брой отворени интервали. Рационалните функции са основният клас функции, пресмятането на чиито определени интеграли е изцяло алгоритмизирано (ако приемем, че можем да намерим корените на знаменателя). Алгоритъмът се състои от следните стъпки:

I. *Свеждане към интегриране на правилна рационална функция, тоест рационална функция, за която степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя.*

   Ако $\deg P \geq \deg Q$ (с $\deg P$ означаваме степента на полинома P), от алгебрата е известно, че съществуват полиноми P_1, P_2 такива, че $\deg P_2 < \deg Q$ и

   $$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$$

   Практически това се прави чрез делене на полиноми – учите се на това на упражнения. Ясно е, че интегралът от P_1 се пресмята лесно, а $\frac{P_2}{Q}$ е правилна рационална функция. Оттук нататък ще предполагаме, че $\deg P < \deg Q$.

II. *Разлагане на знаменателя на множители.*

   От алгебрата (основна теорема на алгебрата) е известно, че ако $\deg Q = n$, то полиномът Q има точно n комплексни корена $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ и

   $$Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = a_0 (x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_n)$$

   Полиномът Q в знаменателя на нашата рационална функция е с реални коефициенти (тоест $a_i \in \mathbb{R}$ за всяко $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$). Тогава, ако едно комплексно число е корен на Q, неговото комплексно спрегнато число също ще бъде корен на Q. Да напомним, че комплексно спрегнатото на $z = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z)$ е $\overline{z} = \mathrm{Re}\,(z) - \mathrm{Im}\,(z)$ (има същата реална част и противоположна имагинерна част). И така, ако z е корен на Q, то

$$0 = \overline{0} = \overline{Q\,(z)} = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} = \overline{a_0 z^n} + \overline{a_1 z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_n} =$$
$$= a_0 \overline{z^n} + a_1 \overline{z^{n-1}} + \cdots + a_n = Q\,(\overline{z})$$

Така показахме, че ако z_i е корен на Q за някое $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то и комплексно спрегнатото му $\overline{z_i}$ е корен на Q. Произведението на $(x - z_i)$ и $(x - \overline{z_i})$ е неразложим над $\mathbb{R}$ полином, стига $z_i \notin \mathbb{R}$. Наистина

$$\left.\begin{aligned} z_i &= \mathrm{Re}\,(z_i) + \mathrm{Im}\,(z_i) \\ \overline{z_i} &= \mathrm{Re}\,(z_i) - \mathrm{Im}\,(z_i) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x - z_i)\,(x - \overline{z_i}) = x^2 - x z_i - x\overline{z_i} + z_i \overline{z_i}$$

$$x^2 - x\,[\mathrm{Re}\,(z_i) + \mathrm{Im}\,(z_i)] - x\,[\mathrm{Re}\,(z_i) - \mathrm{Im}\,(z_i)] + (\mathrm{Re}\,(z_i) + \mathrm{Im}\,(z_i))\,(\mathrm{Re}\,(z_i) - \mathrm{Im}\,(z_i)) =$$
$$= x^2 - x\,[2\,\mathrm{Re}\,(z_i)] + \left[\mathrm{Re}^2\,(z_i) - \mathrm{Im}^2\,(z_i)\right]$$

Дискриминантата на този полином от втора степен е:

$$D = (2\,\mathrm{Re}\,(z_i))^2 - 4\left(\mathrm{Re}^2\,(z_i) - \mathrm{Im}^2\,(z_i)\right) = \cancel{4\,\mathrm{Re}^2\,(z_i)} - \cancel{4\,\mathrm{Re}^2\,(z_i)} + 4\,\mathrm{Im}^2\,(z_i) < 0$$

Следователно полиномът Q с реални коефициенти може да се разложи в произведение на линейни и квадратни множители. Записано формално:

$$Q\,(x) = a_0\,(x - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x - a_s)^{\alpha_s} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{\beta_1} \cdots \left(x^2 + p_t x + q_t\right)^{\beta_t}$$
$$p_j^2 - 4q_j < 0 \;\forall\, j \in \{1, 2, \ldots, t\}$$

III. *Елементарни дроби - дефиниция и интегриране.*

- Елементарна дроб от първи вид (съответства на реален корен на знаменателя) е рационална функция от вида
$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}\ ,$$
където A и a са реални числа, а α е естествено число.
$$\int \frac{A}{(x-a)^{\alpha}}\,dx = A \int \frac{\mathrm{d}\,(x-a)}{(x-a)^{\alpha}} = A \int (x-a)^{-\alpha}\,\mathrm{d}\,(x-a) = \begin{cases} \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + C, \alpha \neq 1 \\ \ln|x-a| + C, \alpha = 1 \end{cases}$$

- Елементарна дроб от втори вид (съответства на двойка комплексно спрегнати корени на знаменателя) е рационална функция от вида
$$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^{\beta}}\ ,$$
където M, N, p и q са реални числа, β е естествено число и $p^2 - 4q < 0$.

Интегрирането на елементарна дроб от втори вид се започва със субституция на Хорнер $y = x + \frac{p}{2}$:

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\beta}}\,dx = \int \frac{M'y+N'}{\left(y^2+b^2\right)^{\beta}}\,dy =$$

$$= M'\int \frac{y}{\left(y^2+b^2\right)^{\beta}}\,dy + N'\int \frac{dy}{\left(y^2+b^2\right)^{\beta}} = \frac{M'}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(y^2+b^2\right)}{\left(y^2+b^2\right)^{\beta}} + N'\int \frac{dy}{\left(y^2+b^2\right)^{\beta}}$$

Първият интеграл е табличен, а с пресмятането на интегралите от вида на второто събираемо се занимахме подробно в миналата лекция.

IV. *Представяне на правилната рационална функция като сума на елементарни дроби.*

Приемаме без доказателство следната алгебрична теорема: Ако $R = \frac{P}{Q}$ е правилна рационална функция и

$$Q(x) = a_0\left(x-a_1\right)^{\alpha_1}\cdots\left(x-a_s\right)^{\alpha_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\beta_1}\cdots\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{\beta_t}$$
$$p_j^2-4q_j<0\;\forall\, j\in\{1,2,\ldots,t\}$$

то съществуват константи $A_1^i, A_2^i, \ldots, A_{\alpha_i}^i$, $i\in\{1,2,\ldots,s\}$, $M_1^j, M_2^j, \ldots, M_{\beta_j}^j, N_1^j, N_2^j, \ldots, N_{\beta_j}^j$, $j\in\{1,2,\ldots,t\}$ такива, че за всяко x в дефиниционната област на R е изпълнено

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{A_1^i}{x-a_i}+\frac{A_2^i}{\left(x-a_i\right)^2}+\cdots+\frac{A_{\alpha_i}^i}{\left(x-a_i\right)^{\alpha_i}}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{t}\left(\frac{M_1^jx+N_j}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{M_2^jx+N_2}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^2}+\cdots+\frac{M_{\beta_j}^jx+N_{\beta_j}}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{\beta_j}}\right)$$

Нашата задача е да намерим неизвестните константи. Забележете, че броят им е

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_s+2\beta_1+\cdots+2\beta_t\;,$$

което от друга страна е равно на степента на знаменателя на рационалната функция. Добре е да правите проверка дали броят на неизвестните константи е равен на степента на знаменателя – може да ви помогне да избегнете някои грешки.

Пример 2.1.

$$I = \int \frac{x^4+1}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{x^4+1}{(x-2)(x+1)}\,dx \Rightarrow \boxed{\frac{x^4+1}{x^2-x-2} = x^2+x+3+\frac{5x+7}{x^2-x-2}}$$

Сега трябва да пресметнем интеграла:

$$\int\left(x^2+x+3+\frac{5x+7}{x^2-x-2}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x+\int\frac{5x+7}{(x-2)(x+1)}\,dx$$

Знаем, че съществуват някакви неизвестни коефициенти A, B такива, че рационалната функция от последния интеграл се представя като

$$\frac{5x+7}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

Следователно
$$5x+7=A\left(x+1\right)+B\left(x-2\right)$$
за всички стойности на x, различни от -1 и 2. Тъй като ако два полинома съвпадат за безброй много различни стойности на променливата, то те съвпадат навсякъде и коефициентите им пред равните степени са равни, горното равенство е тъждество върху цялата реална права.

Първи вариант: Приравняваме коефициентите на полинома
$$A\left(x+1\right)+B\left(x-2\right)=(A+B)x+(A-2B)$$
на коефициентите на $5x+7$:
$$\begin{cases}A+B=5\\ A-2B=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{17}{3}\\ B=-\frac{2}{3}\end{cases}$$
Втори вариант: заместваме в $5x+7=A\left(x+1\right)+B\left(x-2\right)$ променливата със стойностите на двата корена на знаменателя:
$$x:=2\implies 5\cdot 2+7=A(2+1)\implies A=\frac{17}{3}$$
$$x:=-1\implies -5+7=B(-1-2)\implies B=-\frac{2}{3}$$
Завършваме пресмятането на последния интеграл:
$$\int\frac{5x+7}{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}\,dx=\int\left(\frac{17}{3\left(x-2\right)}-\frac{2}{3\left(x+1\right)}\right)\,dx=\frac{17}{3}\ln|x-2|-\frac{2}{3}\ln|x+1|+C\Rightarrow$$
$$\Rightarrow I=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x+\frac{17}{3}\ln|x-2|-\frac{2}{3}\ln|x+1|+C$$

Пример 2.2.
$$I=\int\frac{x^4}{x^3-1}\,dx=\int\frac{x^4}{\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}\,dx\Rightarrow\boxed{\frac{x^4}{x^3-1}=x+\frac{x}{x^3-1}}$$
Пресмятаме интеграла:
$$\int\left(x+\frac{x}{x^3-1}\right)\,dx=\frac{x^2}{2}+\int\frac{x}{x^3-1}\,dx$$
Отново използваме метода на неопределените коефициенти. В този случай x^3-1 се разлага на един линеен множител $x-1$ и един квадратен множител x^2+x+1 без реални корени. Тогава съществуват неизвестни коефициенти A,B,C така, че да е в сила представянето:
$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$
Следователно е в сила тъждеството
$$x=A\left(x^2+x+1\right)+\left(Bx+C\right)\left(x-1\right)$$

С едно заместване получаваме единия от коефициентите:

$$x := 1 \implies 1 = A(1+1+1) \implies A = \frac{1}{3}$$

Образуваме система, като коефицинетите пред съответните едночлени на x от двете страни на равенството приравняваме:

$$\begin{cases} \text{коефициентът пред } \; x^2: \quad 0 = A + B \Longrightarrow A + B = 0 \implies B = -\frac{1}{3} \\ \text{свободният член: } \; 0 = A - C \implies C = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Остава да заместим:

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{3\,(x-1)} + \frac{1-x}{3\,(x^2+x+1)} \right) dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx$$

За получения интеграл ще направим субституция за отделяне на точен квадрат:

$$\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} x = t - \frac{1}{2} \\ t = x + \frac{1}{2} \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{-t + \frac{3}{2}}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right) + 1}\,dt =$$

$$= \int \frac{-t + \frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}}\,dt = -\int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}}\,dt + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)}{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{1}{2} \ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) + C \Rightarrow$$

$$I = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln\left(x^2 + x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Пример 2.3.

$$I = \int \frac{1}{x^4+1}\,dx$$

В този интеграл степента на числителя е строго по-малка от степента на знаменателя, така че можем да прескочим първата стъпка. Въпросът с разлагането на знаменателя на множители изисква малко внимание. Можем да проявим изобретателност, но можем и просто да използваме малко от знанията си от алгебрата – корените на този полином са комплексните корени на -1, тоест $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $e^{i\frac{5\pi}{4}}$ и $e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Като умножим линейните множители, съответстващи на двойките комплексно спрегнати корени, получаваме

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = x^2 - \sqrt{2}x + 1$$

$$\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = x^2 + \sqrt{2}x + 1$$

Следователно $x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$ и трябва да разложим подинтегралната функция като

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

Оттук навсякъде имаме тъждеството между полиноми

$$1=(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

Заместваме

$$x:=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Longrightarrow 1=\left(A\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+B\right)\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Longrightarrow 1=2B+2i\cdot(A\sqrt{2}+B)\Longrightarrow B=\frac{1}{2},\ A=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$x:=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\Longrightarrow 1=\left(C\cdot\frac{-1+i}{\sqrt{2}}+D\right)\cdot\left(-2\sqrt{2}\cdot\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -1=-2D+2i\cdot(-C\sqrt{2}+D)\Longrightarrow D=\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

И тъй, получихме

$$\int\frac{1}{x^4+1}\,dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)dx$$

Довършете пресмятанията самостоятелно.

Пример 2.4.

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2\,(x+1)}$$

В този пример подинтегралната функция е правилна рационална функция и знаменателят вече е разложен на множители. Остава ни да разложим подинтегралната функция в сума на елементарни дроби:

$$\frac{1}{(x-1)^2\,(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

Следователно получаваме следното тъждество между полиноми:

$$1=A\,(x-1)\,(x+1)+B\,(x+1)+C\,(x-1)^2$$

Заместваме

$$x:=1\ \Longrightarrow\ 1=B(1+1)\ \Longrightarrow\ B=\frac{1}{2}$$

$$x:=-1\ \Longrightarrow\ 1=C(-1-1)^2\ \Longrightarrow\ C=\frac{1}{4}$$

Трябва ни още едно уравнение. Може би най-лесно е да приравним коефициентите пред x^2 в полиномиалното тъждество:

$$0=A+C\ \Longrightarrow\ A=-C=-\frac{1}{4}$$

Следователно получихме

$$\int\left(-\frac{1}{4\,(x-1)}+\frac{1}{2\,(x-1)^2}+\frac{1}{4\,(x+1)}\right)dx=-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{4}\ln|x+1|+C$$

Пример 2.5.

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2\,(x^2+1)^2}\,dx$$

Отново подинтегралната функция е правилна рационална функция и знаменателят вече е разложен на множители. Остава да разложим подинтегралната функция в сума на елементарни дроби:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2\,(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

Следователно за всяка стойност на променливата е в сила

$$x+1 = A\,(x-1)\left(x^2+1\right)^2 + B\left(x^2+1\right)^2 + (Cx+D)\,(x-1)^2\left(x^2+1\right) + (Ex+F)\,(x-1)^2$$

Заместваме корените на знаменателя в горното тъждество:

$$x := 1 \implies 1+1 = B(1^2+1)^2 \implies B = \frac{1}{2}$$

$$x := i \implies 1+i = (i-1)^2\,(iE+F) \implies 1+i = (iE+F)\,(-1-2i+1) \implies$$

$$\implies 1+i = -2i\,(iE+F) \implies 1+i = 2E-2iF \implies 1 = 2E,\ 1 = -2F \implies E = \frac{1}{2},\ F = -\frac{1}{2}$$

По този начин намерихме половината от константите. Тъй като знаменателят има кратни корени, един от възможните начини за намиране на останалите коефициенти е да диференцираме полиномиалното тъждество (без да разкриваме никакви скоби):

$$(x+1)' = \left(A\,(x-1)\left(x^2+1\right)^2 + B\left(x^2+1\right)^2 + (Cx+D)\,(x-1)^2\left(x^2+1\right) + (Ex+F)\,(x-1)^2\right)'$$

Разписваме:

$$\begin{aligned}1 = A\left(x^2+1\right)^2 + A\,(x-1)\,(4x)\left(x^2+1\right) + B\,(4x)\left(x^2+1\right) + C\,(x-1)^2\left(x^2+1\right) +\\ + 2\,(Cx+D)\,(x-1)\left(x^2+1\right) + (Cx+D)\,(2x)\,(x-1)^2 +\\ + E\,(x-1)^2 + 2\,(Ex+F)\,(x-1)\end{aligned}$$

Отново прилагаме директното заместване с $x := 1$ и $x := i$ и използваме, че вече знаем стойностите на B, E и F:

$$x := 1 \implies 1 = 4A + 8B \implies A = -\frac{3}{4}$$

$$x := i \implies 1 = 2i\,(iC+D)\,(i-1)^2 + E\,(i-1)^2 + 2\,(iE+F)\,(i-1) \implies$$

$$\implies 1 = 4\,(iC+D) - 2iE - 2E + 2iF - 2iE - 2F \implies 1 = i(4C-4E+2F) + (4D-2E-2F) \implies$$

$$\implies 4C-4E+2F = 0, 4D-2E-2F = 1 \implies C = \frac{3}{4},\ D = \frac{1}{4}$$

И тъй, получихме

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2\,(x^2+1)^2}\,dx = \int \left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3x+1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

Оттук нататък довършете пресмятанията сами.