1 Диференцируемост

1.1 Производна по направление

1.1.1 Дефиниция и означения

Нека a е вътрешна точка за D_f на функцията $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $||b|| = 1$.

Казваме, че f има производна по направление b в точката a, ако функцията $\varphi(t) = f(a+tb)$ има производна в точката 0.

Означение: $$\frac{\partial f}{\partial b}(a) = \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tb) - f(a)}{t}.$$

1.1.2 Пример

$$f(x,\,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{за } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{за } x = y = 0 \end{cases}.$$

има производна по всяко направление в $(0,\,0)$.

1.1.3 Действия с производни

.

1.2 Частни производни

1.2.1 Дефиниция и означения

Производните по направленията e_i се наричат частни производни.

Означение: $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots a_i + h, \dots a_k) - f(a_1, \dots a_i, \dots a_k)}{h}.$$

1.2.2 Примери

1. $$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

2. $$\left(x + y^2 + z^3\right) e^{xy}$$

1.2.3 Помощно твърдение

Лема (приложение на теоремата за крайните нараствания)

Нека $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ има частна производна по x_p $(1 \leq p \leq k)$ в отвореното кълбо $B^0(a, \delta_0)$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_k)$ и $v = (u_1, u_2, \ldots, v_p, \ldots, u_k)$ са две точки от това кълбо. Тогава съществува $\theta \in (0, 1)$, за което

$$f(u) - f(v) = (u_p - v_p)\frac{\partial f}{\partial x_p}((1-\theta)v + \theta u) .$$

Подробно

$$f(u) - f(v) = (u_p - v_p)\frac{\partial f}{\partial x_p}(u_1, u_2, \ldots, v_p + \theta(u_p - v_p), \ldots, u_k) .$$

Доказателство: Разглеждаме функцията

$$\varphi(t) = f(u_1, u_2, \ldots, v_p + t(u_p - v_p), \ldots, u_k) .$$

1.3 Диференцируемост

1.3.1 Дефиниция и означения

Нека a е вътрешна точка за D_f на функцията $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$.

Казваме, че f **е диференцируема** в точката a, ако има линейна функция $L : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, за която

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{||x-a||} = 0 \ .$$

1.3.2 Градиент

$L(x) = \langle u_L, x \rangle$; u_L се нарича градиент на f в точката a; $u_L = grad\, f(a) = df(a)$

1.3.3 Свойства

1. Ако f е диференцируема в точката a, то f е непрекъсната в a.

2. Ако f е диференцируема в точката a, то f има производна по всяко направление b в точката a, като $\dfrac{\partial f}{\partial b}(a) = \langle grad\, f(a), b \rangle$.

3. В частност, f има частни производни в точката a и
$$grad\, f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right)$$

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)dx_k$$

1.3.4 Примери

1. Действия с производни.

$$grad\,(fg)(a) = g(a)grad\,f(a) \, + \, f(a)grad\,g(a)$$

$$grad\,\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)grad\,f(a) \, - \, f(a)grad\,g(a)}{g^2(a)}$$

2.

$$f(x,\,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{за } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{за } x=y=0 \end{cases}.$$

е непрекъсната в $(0,\,0)$, има производна по всяко направление в $(0,\,0)$, но не е диференцируема в $(0,\,0)$.

1.3.5 Достатъчно условие за диференцируемост

Нека $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ има частни производни в околност $B^0(a,\, \delta_0)$ на точката a (във всяка точка на $B^0(a,\, \delta_0)$).

Ако функциите $\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2},\ \dots,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ са непрекъснати в a, то f е диференцируема в a.

Доказателство: Полагаме $y_i = (a_1, \dots a_{i-1},\, x_i, \dots, x_k)$. Тогава $\lim\limits_{x\to a} y_i = a$ и

$$\left|\frac{f(y_i) - f(y_{i+1}) - (x_i - a_i)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)}{||x-a||}\right| = \frac{|x_i - a_i|}{||x-a||}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}((1-\theta)y_i + \theta y_{i+1}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| \le$$

$$\le \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}((1-\theta)y_i + \theta y_{i+1}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0\,.$$

Следователно,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a) - \displaystyle\sum_{i=1}^{k}(x_i - a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}{||x-a||} = \sum_{i=1}^{k}\lim_{x\to a}\frac{f(y_i) - f(y_{i+1}) - (x_i - a_i)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)}{||x-a||} = 0$$

Пример:

$$f(x,\,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{за } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{за } x=y=0 \end{cases} .$$

е диференцируема в $(0,\,0)$, а $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ са прекъснати в $(0,\,0)$.

1.4 Диференциране на изображение

1.4.1 Частни производни

Нека a е вътрешна точка за D_F на $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$, $b \in \mathbb{R}^k$, $||b|| = 1$.

1. Казваме, че F има производна по направление b в точката a, ако $\Phi(t) = F(a+tb)$ има производна в точката 0.

2. F има производна по направление b в точката $a \iff$ всяка координатна функция на F има производна по направление b в точката a.

3. Производните по направленията e_i се наричат частни производни.

4. *Пример:* крива: $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^l$; допирателен вектор $r'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \ldots x'_l(t))$.

1.4.2 Диференцируемост, градиент на изображениеи

Нека a е вътрешна точка за D_F на $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$.

1. Казваме, че F **е диференцируемо** в точката a , ако има линейно изображение $L : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$, за което

$$\lim_{x \to a} \frac{||F(x) - F(a) - L(x-a)||}{||x-a||} = 0 \ .$$

2. $L(x) = \mathcal{M}_L \, x$; $\mathcal{M}_L$ се нарича градиент на F в точката a ; $\mathcal{M}_L = grad\, F(a) = dF(a)$.

3. F е диференцируемо в точката a $\Leftrightarrow$ всяка координатна функция на F е диференцируема в точката a .

4.
$$grad\, F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_l}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_l}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial F_l}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}$$

1.5 Диференциране на съставно изображение

1.5.1 Основно твърдение

Нека $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ е диференцируемо в точката a и $G : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е диференцируемо в точката $F(a)$. Тогава

$\Phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ \Phi(x) = G(F(x))$ е диференцируемо в точката a и
$grad\Phi(a) = gradG(F(a))\ .\, gradF(a)$.

План на доказателство:

1. По условие $\|F(x) - F(a) - L_F(x-a)\| = o(\|x-a\|)$.

2. $\|L_G\,(F(x)-F(a)-L_F(x-a))\| \le \|L_G\|\,.\,\|F(x)-F(a)-L_F(x-a)\|\,.$

Следователно, $\|L_G\,(F(x)-F(a)-L_F(x-a))\| = o\,(\|x-a\|)\,.$

3. $\|F(x)-F(a)\| \le \|F(x)-F(a)-L_F(x-a)\| + \|L_F(x-a)\| = o\,(\|x-a\|) + \|L_F(x-a)\|\,.$

Следователно, $\|F(x)-F(a)\| \le (1+\|L_F\|)\,\|x-a\|\,.$

4. По условие $\|G(u)-G(b)-L_G(u-b)\| = o\,(\|u-b\|)\,.$

Следователно, $\|G(F(x))-G(F(a))-L_G\,(F(x)-F(a))\| = o\,(\|F(x)-F(a)\|) = o\,(\|x-a\|)\,.$

5. $\|\Phi\,(x)-\Phi\,(a)-L_G\,(L_F(x-a))\| \le$

$$\le \|G(F(x))-G(F(a))-L_G\,(F(x)-F(a))\| + \|L_G\,(F(x)-F(a)-L_F(x-a))\| = o\,(\|x-a\|)\,.$$

1.5.2 Верижно правило

Нека $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ има частни производни в точката a и $G : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}$ има непрекъснати частни производни в точката $F(a)$. Тогава

$\Phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Phi\,(x) = G\,(F\,(x))$ има частни производни в точката a и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\,(a) = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial G}{\partial u_j}\,(F(a)) \cdot \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a)\,.$$

Доказателство:

Можем да предполагаме, че $k = 1$ и $a = 0$. Нека $b_j = F_j(0)$, $1 \leq j \leq l$.

Полагаме $y_j = (b_1, \ldots, b_{j-1}, F_j(t), \ldots, F_l(t))$. Тогава $\lim\limits_{t \to 0} y_i = b = F(0)$ и

$$\frac{G(y_j) - G(y_{j+1})}{t} = \frac{F_j(t) - F_j(0)}{t} \cdot \frac{\partial G}{\partial u_j}((1-\theta)y_i + \theta y_{i+1}) \quad \xrightarrow[t \to 0]{} \quad \frac{\partial G}{\partial u_j}(F(0))\ F'_j(0) \, .$$

Следователно,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t} = \sum_{j=1}^{l} \lim_{t \to 0} \frac{G(y_j) - G(y_{j+1})}{t} = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial G}{\partial u_j}(F(0))\ F'_j(0) \, .$$

Пример

$$\left((f(t))^{g(t)}\right)' = g(t)\,(f(t))^{g(t)-1} f'(t) + (f(t))^{g(t)} . \ln f(t) . g'(t)$$

1.6 Производни от по-висок ред

1.6.1 Дефиниция и означения

Нека $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ има частна производна $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ в $B^0(a,\, \delta_0)$. Ако функцията $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ има частна производна по x_j в точката a, казваме, че F има втора производна $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ в точката a.

1.6.2 Примери

1.

$$\frac{\partial^2 \left(x^3 y^2 z\right)}{\partial x \partial y} = 6x^2 yz = \frac{\partial^2 \left(x^3 y^2 z\right)}{\partial y \partial x}\ ; \quad \frac{\partial^2 \left(x^3 y^2 z\right)}{\partial x^2} = 6xy^2 z$$

2.

$$f(x,\, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{за } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{за } x = y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y) = \begin{cases} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \dfrac{4x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ 0 \end{cases} \Rightarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\, 0) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) = \begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \dfrac{4x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ 0 \end{cases} \Rightarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,\, 0) = 1$$

1.6.3 Равенство на смесените производни

Нека $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ има частни производни
$\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}$, $i \neq j$ и втори частни производни $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$ в $B^0\left(a,\, \delta_0\right)$.

Ако функциите $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$ са непрекъснати в a, то $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Доказателство:

Можем да предполагаме, че $k = 2$, $a = (x_0,\, y_0)$.

Полагаме $G(x,\, y) = F(x,\, y) - F(x_0,\, y) - F(x,\, y_0) + F(x_0,\, y_0)$.

$$G(x,\, y) = (x - x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + c_1(x - x_0),\, y) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + c_1(x - x_0),\, y_0)\right) =$$

$$= (x - x_0)\,(y - y_0)\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0 + c_1(x - x_0),\, y_0 + c_2(y - y_0));\,.$$

Аналогично,

$$G(x,\, y) = F(x,\, y) - F(x,\, y_0) - F(x_0,\, y) + F(x_0,\, y_0) =$$

$$(y - y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,\, y_0 + c_3(y - y_0)) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\, y_0 + c_3(y - y_0))\right) =$$

$$= (x - x_0)\,(y - y_0)\,\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x_0 + c_4(x - x_0),\, y_0 + c_3(y - y_0))\,.$$

При $x \neq x_0$, $y \neq y_0$ имаме

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0 + c_1(x - x_0),\, y_0 + c_2(y - y_0)) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x_0 + c_4(x - x_0),\, y_0 + c_3(y - y_0))$$

Предвид непрекъснатостта, исканото се получав с граничен преход $(x,\, y) \longrightarrow (x_0,\, y_0)$.

1.6.4 Втори диференциал

Нека $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в $B^0(a, \delta_0)$. Ако изображението $grad\, F(x)$ е диференцируемо в точката a, казваме, че F има втора производна (втори диференциал) в точката a.

$$grad\,(grad\, F)\,(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_k}(a) \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial^2 x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_k}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_k^2}(a) \end{pmatrix} = \mathcal{D}_{F(a)}$$

$$d^2F(a) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j$$

1.6.5 Втора производна по направление

Нека F е два пъти диференцируема в точката a, $||b|| = 1$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b^2}(a) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) b_i b_j = \left\langle \mathcal{D}_{F(a)} b,\, b \right\rangle$$

Нека F е два пъти диференцируема в околност на точката a, $||b|| = 1$, $\varphi(t) = F(a + tb)$.

$$\varphi'(t) = \langle grad\, F(a+tb)\,,\ b \rangle \ ; \quad \varphi''(t) = \left\langle \mathcal{D}_{F(a+tb)} b,\, b \right\rangle$$

2 Локални екстремуми

2.1 Необходими условия

2.1.1 Дефиниция

Нека a е вътрешна точка за дефиниционната област D_F на функцията $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$. Казваме, че F има в a

- **локален максимум**, ако има $\delta > 0$, за което $F(x) \leq F(a)$ за всяко $x \in B^0(a, \delta)$
- **строг локален максимум**, ако има $\delta > 0$, за което $F(x) < F(a)$ за всяко $x \in B^0(a, \delta) \setminus \{a\}$
- **локален минимум**, ако има $\delta > 0$, за което $F(x) \geq F(a)$ за всяко $x \in B^0(a, \delta)$
- **строг локален минимум**, ако има $\delta > 0$, за което $F(x) > F(a)$ за всяко $x \in B^0(a, \delta) \setminus \{a\}$

2.1.2 Примери

1. $F_1(x,\, y) = x^4 + 4x^2y^2 + y^4$ има в $(0,\, 0)$ строг локален минимум

2. $F_2(x,\, y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ има в $(0,\, 0)$ локален минимум

3. $F_3(x,\, y) = -x^4 - y^4$ има в $(0,\, 0)$ строг локален максимум

4. $F_4(x,\, y) = x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4$ няма в $(0,\, 0)$ локален екстремум

5. *Забележка:* $\dfrac{\partial F_s}{\partial x}(0,\, 0) \;=\; \dfrac{\partial F_s}{\partial y}(0,\, 0) \;=\; 0\,,\; s = 1,\, 2,\, 3,\, 4$

2.1.3 Необходими условия с първа производна

Нека $F\,:\,\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ има в a (вътрешна точка за D_F)

- локален екстремум
- производна по направление b

Тогава $\quad \dfrac{\partial F}{\partial b}(a) = 0$. Ако F е диференцируема в a , то $\quad grad\, F(a) = 0$.

2.1.4 Необходими условия с втора производна

Нека $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ е два пъти диференцируема в околност $B^0\,(a,\, \delta_0)$ на a (вътрешна точка за D_F).

Ако F има локален минимум (максимум) в a, то $\big\langle \mathcal{D}_{F(a)} u,\, u \big\rangle \geq 0$ $\big(\big\langle \mathcal{D}_{F(a)} u,\, u \big\rangle \leq 0\big)$ за всяко $u \in \mathbb{R}^k$.

Еквивалентно: $\big\langle \mathcal{D}_{F(a)} u,\, u \big\rangle \geq 0$ $\big(\big\langle \mathcal{D}_{F(a)} u,\, u \big\rangle \leq 0\big)$ за всяко $u \in \mathbb{R}^k$, $||u|| = 1$.

2.2 Достатъчни условия

Нека $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ е два пъти диференцируема в околност $B^0\,(a,\, \delta_0)$ на a (вътрешна точка за D_F), като $grad\, F(a) = 0$ и всички втори производни на F са непрекъснати в a.

Ако $\big\langle \mathcal{D}_{F(a)} u,\, u \big\rangle > 0$ $\big(\big\langle \mathcal{D}_{F(a)} u,\, u \big\rangle < 0\big)$ за всяко $u \in \mathbb{R}^k$, $u \neq 0$, то F има строг локален минимум (максимум) в a.

Еквивалентно: $\big\langle \mathcal{D}_{F(a)} u,\, u \big\rangle > 0$ $\big(\big\langle \mathcal{D}_{F(a)} u,\, u \big\rangle < 0\big)$ за всяко $u \in \mathbb{R}^k$, $||u|| = 1$

Доказателство

1. $\min\limits_{||u||=1} \left\langle \mathcal{D}_{F(a)} u,\, u \right\rangle = m > 0$ *(теорема на Вайерщрас)*

2. $\max\limits_{||u||=1} \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{k} |u_i u_j| = M > 0$ *(теорема на Вайерщрас)*

3. има $\delta > 0$, за което $\left| \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right| < \dfrac{m}{2M}$ за всяко $1 \le i \le k$, всяко $1 \le j \le k$

   и всяко $||x - a|| < \delta$ *(непрекъснатост на производните)*

4. За $0 < ||x - a|| < \delta$, $b = \dfrac{x - a}{||x - a||}$, $|t| < \delta$ имаме

   $\left| \left\langle \mathcal{D}_{F(a+tb)} b,\, b \right\rangle - \left\langle \mathcal{D}_{F(a)} b,\, b \right\rangle \right| < \dfrac{m}{2}$, следователно $\left\langle \mathcal{D}_{F(a+tb)} b,\, b \right\rangle > \dfrac{m}{2}$

5. За $\varphi(t) = F(a + tb)$ имаме $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(t) > 0$, следователно $\varphi(0) < \varphi(1)$.

2.3 Дефинитни квадратични форми

Нека $\mathcal{M}$ е симетрична $k \times k$ матрица, $Q_{\mathcal{M}}(u) = \langle Mu,\, u\rangle$.

- $Q_{\mathcal{M}}$ се нарича **положително (отрицателно) дефинитна**, ако $Q_{\mathcal{M}}(u) \geq 0$ ($Q_{\mathcal{M}}(u) \leq 0$) за всяко $u \in \mathbb{R}^k$ (еквивалентно: за всяко $u \in \mathbb{R}^k$, $||u|| = 1$)

- $Q_{\mathcal{M}}$ се нарича **строго положително (отрицателно) дефинитна**, ако $Q_{\mathcal{M}}(u) > 0$ ($Q_{\mathcal{M}}(u) < 0$) за всяко $u \in \mathbb{R}^k$, $u \neq 0$ (еквивалентно: за всяко $u \in \mathbb{R}^k$, $||u|| = 1$)

- $Q_{\mathcal{M}}$ е положително (отрицателно) дефинитна $\Leftrightarrow$ собствените стойности на $\mathcal{M}$ са неотрицателни (неположителни) числа.

- $Q_{\mathcal{M}}$ е строго положително (отрицателно) дефинитна $\Leftrightarrow$ собствените стойности на $\mathcal{M}$ са положителни (отрицателни) числа

2.4 Критерий на Силвестър

Нека $\mathcal{M}$ е симетрична $k \times k$ матрица, $Q_{\mathcal{M}}(u) = \langle \mathcal{M}u,\, u\rangle$.

- $Q_{\mathcal{M}}$ е (строго) положително дефинитна $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m_{1\,1} & m_{1\,2} & \dots & m_{1\,i} \\ m_{2\,1} & m_{2\,2} & \dots & m_{2\,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{i\,1} & m_{i\,2} & \dots & m_{i\,i} \end{vmatrix} \geq 0 \ (> 0)$

- $Q_{\mathcal{M}}$ е (строго) отрицателно дефинитна $\Leftrightarrow (-1)^i \begin{vmatrix} m_{1\,1} & m_{1\,2} & \dots & m_{1\,i} \\ m_{2\,1} & m_{2\,2} & \dots & m_{2\,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{i\,1} & m_{i\,2} & \dots & m_{i\,i} \end{vmatrix} \geq 0 \ (> 0)$

2.5 Примери

1. $F(x,\, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ има в $(1,\, 1)$ строг локален минимум, $(0,\, 0)$ е седловидна.

2. $F(x,\, y,\, z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$ има в $\left(\dfrac{1}{2},\, 1,\, 1\right)$ строг локален минимум и в $\left(-\dfrac{1}{2},\, -1,\, -1\right)$ строг локален максимум.

3 Теорема за неявната функция

3.1 Неявни функции

Нека $F : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, D_F е отворено. Казваме, че $\varphi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ е неявна функция, зададена от уравнението $F(x, y) = 0$, ако съществува отворено $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{\|}$, за което

- $(x, \varphi(x)) \in D_F$ за всяко $x \in \mathcal{A}$
- $F(x, \varphi(x)) = 0$ за всяко $x \in \mathcal{A}$

3.2 Примери

1. $F_1(x, y) = x^4 + 4x^2y^2 + y^4 + 1$

2. $F_2(x, y) = x^4 + y^4$

3. $F_3(x, y) = x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4$

4. $F_4(x, y) = \left(x^2 + y^2 - 4\right)\left(x^4 + y^4\right)$

3.3 Теорема (за неявната функция)

Нека $F(x,\, y) \,:\, \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната и има частна производна $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ в околност $B^0((a,\, b),\, \delta_0)$ на точката $(a,\, b)$, която е непрекъсната в $(a,\, b)$, като $F(a,\, b) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,\, b) \neq 0$.

Тогава съществуват $c > 0$, $\delta > 0$ и функция $\varphi \,:\, \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, дефинирана в $\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \,:\, |x_i| \leq \delta \right\}$, за които

- $|\varphi(x)| \leq c$ за всяко $x \in \mathcal{K}$
- $\varphi(a) = b,\ F(x,\, \varphi(x)) = 0$ за всяко $x \in \mathcal{K}$
- φ е непрекъсната $\mathcal{K}$
- φ е единствена с горните свойства

3.4 Диференциране на неявни функции

Ако $F(x, y)$ има непрекъсната частни производни $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $1 \le i \le k$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ в $B^0((a, b), \delta_0)$, то φ има непрекъснати частни производни като

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = - \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

Ако $F(x, y)$ има непрекъсната частни производни до ред m, то φ има непрекъснати частни производни до ред m.

3.5 Примери

1. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{x+y}{x-y} \quad \Rightarrow \quad y'' = \dfrac{2\left(x^2 + y^2\right)}{(x-y)^3}$

2. $x + y + z = e^z \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{e^z - 1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{-1}{(e^z - 1)^3}$

3.6 Неявни изображения

Нека $F : \mathbb{R}^{k+l} \longrightarrow \mathbb{R}^l$, D_F е отворено. Казваме, че $\Phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ е неявно изображение, зададено от уравнението $F(x, y) = 0$, ако съществува отворено $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k$, за което

- $(x, \Phi(x)) \in D_F$ за всяко $x \in \mathcal{A}$
- $F(x, \Phi(x)) = 0$ за всяко $x \in \mathcal{A}$

3.7 Теорема за неявното изображение

Нека $F(x, y) : \mathbb{R}^{k+l} \longrightarrow \mathbb{R}^l$ е непрекъснато и има непрекъснати частни производни $\dfrac{\partial F}{\partial y_j}$, $1 \le j \le l$ в околност $B^0((a, b), \delta_0)$ на точката (a, b), като $F(a, b) = 0$ и

$$J_{F,\,\tilde{y}}(a,\,b) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_l} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_l}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_l}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_l}{\partial y_l} \end{vmatrix}(a,\,b) \neq 0\ .$$

Тогава съществуват $c > 0$, $\delta > 0$ и изображение $\Phi\,:\,\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$, дефинирано в $\mathcal{K} = \left\{x \in \mathbb{R}^k\,:\,|x_i| \leq \delta\right\}$, за които

- $||\Phi(x)|| \leq c$ за всяко $x \in \mathcal{K}$
- $\Phi(a) = b,\ F(x,\,\varphi(x)) = 0$ за всяко $x \in \mathcal{K}$
- Φ е непрекъснато $\mathcal{K}$
- Φ е единствено с горните свойства
- Ако $F(x,\,y)$ има непрекъсната частни производни $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq k$, в $B^0((a,\,b),\,\delta_0)$, то Φ има непрекъснати частни производни.

- Ако $F(x, y)$ има непрекъсната частни производни до ред m, то Φ има непрекъснати частни производни до ред m.

3.8 Частни производни на неявно изображение

$$\begin{aligned} xu - yv &= 0 \\ yu + xv &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}$$

3.9 Условни екстремуми

Нека a е вътрешна точка за D_F на функцията $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ и за D_G на изображението $G : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$, $l < k$ като $G(a) = 0$.

Казваме, че F има в a

- **локален максимум при условие** G, ако има $\delta > 0$, за което $F(x) \leq F(a)$ за всяко $x \in B^0\,(a,\,\delta)$ и $G(x) = 0$

- **строг локален максимум при условие** G, ако има $\delta > 0$, за което $F(x) < F(a)$ за всяко $x \in B^0\,(a,\,\delta) \setminus \{a\}$ и $G(x) = 0$

- **локален минимум при условие** G, ако има $\delta > 0$, за което $F(x) \geq F(a)$ за всяко $x \in B^0\,(a,\,\delta)$ и $G(x) = 0$

- **строг локален минимум при условие** G, ако има $\delta > 0$, за което $F(x) > F(a)$ за всяко $x \in B^0\,(a,\,\delta) \setminus \{a\}$ и $G(x) = 0$

3.10 Множители на Лагранж

Нека $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в $B^0\,(a,\,\delta_0)$, $G : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$, $l < k$ има непрекъснати частни производни в $B^0\,(a,\,\delta_0)$, като $G(a) = 0$ и $rank\,(grad\,G(a)) = l$.

Ако F има в a локален екстремум при условие G, то съществува $\lambda \in \mathbb{R}^l$, за който $grad\,H(a) = 0$, където $H(x) = F(x) - \langle \lambda,\, G(x) \rangle$.

Идея за дакязателство при $l = 1$ *:*

Има неявна функция $G(x^*, \varphi(x^*)) = 0$. За $\Phi(x) = F(x^*, \varphi(x^*))$ имаме $grad\,\Phi(a^*) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial F}{\partial x_{k+1}}(a) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a^*) = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_{k+1}}(a)}{\dfrac{\partial G}{\partial x_{k+1}}(a)}$$

3.11 Пример

Нека $\mathcal{M}$ е симетрична $k \times k$ матрица. Стационерните точки на $Q_{\mathcal{M}}(x) = \langle \mathcal{M}x, x \rangle$ при условие $||x||^2 = 1$ са собствените вектори на $\mathcal{M}$.

Условен локален максимум имаме в съотвестващите на най-голямата собствена стойност на $\mathcal{M}$, условен локален минимум имаме в съотвестващите на най-малката собствена стойност, в останалите — няма условен локален екстремум.

3.12 Най-голяма и най-малка стойност на функция

Да се намерят най-голямата и най-малката стойности на $f(x,\, y,\, z) \;=\; (x+y+z)\, e^{-x^2-y^2-z^2}$ върху полукълбото $x^2+y^2+z^2 \leq 4\,,\; 0 \leq z\,.$

1. вътре – $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$, стойност $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

2. полусфера – $\left(\dfrac{\pm 2}{\sqrt{3}}, \dfrac{\pm 2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, стойности $\dfrac{8\sqrt{3}}{e^4}$ и $\dfrac{-2\sqrt{3}}{e^4}$

3. отворен кръг – $\left(\dfrac{\pm 1}{2}, \dfrac{\pm 1}{2}, 0\right)$, стойност $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{e}}$

4. окръжност – $\left(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0\right)$, стойност $\dfrac{\pm 2\sqrt{2}}{e^4}$