1 Сходимост

1.1 Дефиниции

Нека $\{a_n\}_0^\infty$ е (безкрайна) числова редица, $b \in \mathbb{R}$.

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$ се нарича **степенен ред** около b.
- с транслация на аргумента $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, т.е. $b = 0$.
- Област на сходимост $\left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \text{редът } \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n \text{ е сходящ} \right\}$.
- В точката b (точката 0) степенният ред е сходящ.

1.2 Примери

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ — област на сходимост: $\mathbb{R}$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!.x^n$ — област на сходимост: $\{0\}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ — област на сходимост: $(-1,\,1)$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ — област на сходимост: $[0,\,2)$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x-3)^n}{n}$ — област на сходимост: $(-4,\,-2]$

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ — област на сходимост: $[-1,\,1]$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ — област на сходимост: $\mathbb{R}$

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ — област на сходимост: $\mathbb{R}$

1.3 Радиус на сходимост

1.3.1 Трихотомия

За степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е изпълнено точно едно от трите:

1. Редът е сходящ само за $x = 0$.
2. Съществува число $R > 0$, за което
   - при $|x| < R$ редът е абсолютно сходящ;
   - при $|x| > R$ редът е разходящ.
3. Редът е абсолютно сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

1.3.2 Основна лема

Нека степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е сходящ при $x = u \neq 0$. Тогава той е абсолютно сходящ за всяко $|x| < |u|$.

Доказателство: $\quad |a_n x^n| = |a_n u^n| \left|\frac{x}{u}\right|^n \leq \left|\frac{x}{u}\right|^n$ за $n \geq n_0$.

Следствие: Редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е абсолютно сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато той е сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

1.3.3 Доказателство на трихотомията

Нека редът не удовлетворява 1. и не удовлетворява 3. Тогава можем да предполагаме, че за $x = u_1 \neq 0$ степенният ред е сходящ, а за $x = u_2 \neq 0$ — разходящ. Множеството

$$\mathcal{R} = \left\{ 0 < r \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ е абсолютно сходящ за всяко } |x| < r \right\}$$

е непразно ($|u_1| \in \mathcal{R}$) и ограничено отгоре ($|u_2|$ е горна граница). Полагаме $R = \sup \mathcal{R}$.

- За $|x| < R$ има $r \in \mathcal{R}$ с $|x| < r$, т.е. редът е абсолютно сходящ.
- За $|x| > R$ редът е разходящ, защото ако е сходящ, то (съгласно основната лема) $|x| \in \mathcal{R}$.

1.3.4 Дефиниция

$R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ се нарича радиус на сходимост на степенния ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ако

- при $|x| < R$ редът е абсолютно сходящ (включва и $R = 0$, $R = +\infty$);
- при $|x| > R$ редът е разходящ (включва и $R = 0$, $R = +\infty$).

1.3.5 Формула на Адамар

За радиуса R на сходимост на степенния ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е изпълнено $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

(Дефиниция: За неограничена отгоре редица $\{b_n\}_0^{\infty}$ *полагаме* $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ *.)*

Доказателство:

1. случай: редицата $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}_1^\infty$ е неограничена отгоре. Тогава съществува подредица с $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty$. Тогава за $x \neq 0$ общият член на реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ не клони към 0. Степенният ред е сходящ само за $x = 0$ $(R = 0)$.

2. случай: $0 < L = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$.

- При $0 < |x| < \dfrac{1}{L}$ имаме $0 < L|x| < 1$. Нека $0 < L|x| < q < 1$, тогава $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \dfrac{q}{|x|}$ за $n \geq n_0$. Следователно, $\sqrt[n]{|a_n x^n|} \leq q < 1$, т.е. степенният ред е абсолютно сходящ.

- Нека $|x| > \frac{1}{L}$. Имаме подредица $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = L$, тогава $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = L|x| > 1$, т.е. общият член на реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ не клони към 0. Степенният ред е разходящ.

3. случай: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Степенният е абсолютно сходящ $(R = +\infty)$.

Следствие
Ако съществува границата $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, то $R = \dfrac{1}{L}$.

Удобна формула
Ако съществува границата $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, то $R = L$.

1.3.6 Примери

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad - \quad R = +\infty$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad - \quad R = 1$

2 Свойства на сумата на степенен ред

2.1 Диференциране

2.1.1 Формулировка

Нека $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ има радиус на сходимост $R > 0$. Тогава

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ има същия радиус на сходимост.

2. $S(x)$ има производна за всяко $x \in (-R,\, R)$ и $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

3. За всяко $k \in \mathbb{N}$ $S(x)$ има производна ред k за всяко $x \in (-R,\, R)$ и

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} k! \binom{n}{k} a_n x^{n-k} \,.$$

2.1.2 Доказателство

1. Нека $0 < r < R$. Тогава $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$, $r > 0$ е сходящ и, понеже

   $\left|n a_n x^{n-1}\right| = |a_n r^n| \cdot \dfrac{1}{r} \cdot n \left|\dfrac{x}{r}\right|^{n-1}$, то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ е абсолютно сходящ за всяко $|x| < r$.

   Следователно, $r \le R'$, откъдето $R \le R'$.

2. Нека $0 < r < R'$. Тогава $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|n a_n r^{n-1}\right|$, $r > 0$ е сходящ и, понеже

   $|a_n x^n| = \left|n a_n r^{n-1}\right| \cdot \dfrac{r}{n} \cdot \left|\dfrac{x}{r}\right|^{n}$, то $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е абсолютно сходящ за всяко $|x| < r$.

   Следователно, $r \le R$, откъдето $R' \le R$.

3. Нека $|x_0| < R$. Избираме $|x_0| < r < R$. Полагаме

   $C = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| r^{n-2}$. Тогава за $|x| < r$ е изпълнено

$$\left| \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n}{x - x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x_0^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k - n x_0^{n-1} \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_0^k (x - x_0) \sum_{p=0}^{n-2-k} x^{n-2-k-p} x_0^p \right) \right| \leq |x - x_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-2-k} r^{n-2} \right) = C\,|x - x_0| \,.$$

2.1.3 Примери

1. За всяко $x \in \mathbb{R}$ е изпълнено $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, следователно $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2. За всяко $x \in \mathbb{R}$ е изпълнено $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

3. За всяко $x \in \mathbb{R}$ е изпълнено $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)' = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

4. За всяко $x \in (-1, 1)$ е изпълнено $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}\right)' = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}$,

следователно $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

5. За всяко $x \in (-1, 1)$ е изпълнено $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$,

следователно $\operatorname{arctg} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

2.2 Непрекъснатост

2.2.1 Формулировка

Нека $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ има радиус на сходимост $0 < R < +\infty$ и редът $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ е сходящ (или $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ е сходящ). Тогава

$$\lim_{x \to R,\, x<R} S(x) = S \quad \text{(съответно} \lim_{x \to -R,\, x>-R} S(x) = S \text{).}$$

2.2.2 Доказателство за $R = 1$

Нека $0 < \varepsilon$. Съществува $N \in \mathbb{N}$, за което $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ за всяко $n \geq N$ и всяко $p \in \mathbb{N}$.

Тогава за всяко $0 < x < 1$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+p} a_n (1 - x^n) \right| = (1-x) \left| \sum_{n=N+1}^{N+p} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right| = (1-x) \left| \sum_{k=0}^{N} x^k \sum_{n=N+1}^{N+p} a_n + \sum_{k=N+1}^{N+p-1} x^k \sum_{n=k+1}^{N+p} a_n \right| \leq$$

$$\leq \ (1-x)\sum_{k=0}^{N} x^k \left|\sum_{n=N+1}^{N+p} a_n\right| + \sum_{k=N+1}^{N+p-1} x^k \left|\sum_{n=k+1}^{N+p} a_n\right| < \ \frac{\varepsilon}{2}(1-x) \sum_{k=0}^{N+p-1} x^k \ < \ \frac{\varepsilon}{2}$$

за всяко $p \in \mathbb{N}$. Следователно, $\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (1-x^n)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ за всяко $0 < x < 1$.

Съществува $0 < \delta < 1$, за което $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n (1-x^n)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ за всяко $1-\delta < x < 1$. Тогава $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-x^n)\right| < \varepsilon$ за всяко $1-\delta < x < 1$.

2.2.3 Примери

1. $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

2. $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} .$$

3 Ред на Маклорен за някои функции

3.1 Ред на Тейлор

3.1.1 Дефиниция

Нека $f(x)$ има производни от всеки ред в околност на b.

Редът $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (x-b)^n$ се нарича **ред на Тейлор** за $f(x)$ около b.

3.1.2 Необходими условия

Нека $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$ има радиус на сходимост $0 < R < +\infty$. Тогава

- $f(x)$ има производни от всеки ред в околност на b.
- $a_n = \dfrac{f^{(n)}(b)}{n!}$.

3.1.3 Пример

Функцията

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

- има производни от всеки ред навсякъде в $\mathbb{R}$.
- редът ѝ на Тейлор около 0 е сходящ.
- сумата му не съвпада с $F(x)$.

3.1.4 Сходимост

Нека $f(x)$ има производни от всеки ред в околност на b.

Редът на Тейлор $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$ е сходящ и сумата му съвпада с $f(x)$ за онези x, за които

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k\right) = 0 \quad \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k = R_{n+1}(x,\, b)\right) .$$

3.2 Ред на Маклорен

3.2.1 Примери

1. $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

2. $\displaystyle \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

3. $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ за всяко } x \in \mathbb{R} \,.$$

4. $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ за всяко } x \in (-1,\, 1) \,.$$

5. $$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n} \text{ за всяко } x \in (-1,\, 1] \,.$$

6. $$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \text{ за всяко } x \in [-1,\, 1] \,.$$

7. $$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n \text{ за всяко } x \in (-1,\, 1) \,.$$

8.

(a) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot x^{2n} \text{ за всяко } x \in (-1,\, 1) \,.$$

(б) $$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} \cdot x^{2n+1} \quad \text{за всяко } x \in [-1,\ 1]\,.$$

(в) $$x = \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} \cdot \sin^{2n+1} x \quad \text{за всяко } x \in [-\tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{\pi}{2}]\,.$$

(г) $$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

(д) $$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

9.

(а) $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot x^{2n} \quad \text{за всяко } x \in [-1,\ 1]\,.$$

(б) $$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} \cdot x^{2n+1} \quad \text{за всяко } x \in [-1,\ 1]\,.$$