# 1 Сходимост

## 1.1 Дефиниции

Нека $\{a_n\}_1^\infty$ е (безкрайна) числова редица.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича **(безкраен) числов ред**

2. $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ се наричат **частични (парциални) суми** на реда

3. Редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича **сходящ**, ако съществува крайната граница $\displaystyle S = \lim_{n\to\infty} S_n$

4. в противен случай, редът се нарича **разходящ**

5. $S$ се нарича сума на реда, $\displaystyle S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

## 1.2 Примери

1. Ако $a_n = 0$ за всяко $n > n_0$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ е сходящ.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ е разходящ.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ е сходящ за $|q| < 1$ $\left( \text{сума} \quad \frac{1}{1-q} \right)$ и разходящ за $|q| \geq 1$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ е сходящ.

## 1.3 Свойства

1. Добавянето (премахването) на краен брой събираеми не влияе на сходимостта ("адитивност").

2. Ако $a_n \geq 0$ за всяко $n$, то $S_n$ е растяща и, когато редът $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, $0 \leq S_n \leq S$ ("позитивност").

3. Линейност

Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ са сходящи. Тогава $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ е сходящ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

## 1.4 Необходимо и достатъчно условие на Коши

1. Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ тогава и само тогава, когато

за всяко $\varepsilon > 0$ има $N$ такова, че $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$ за всяко $n > N$ $(n \in \mathbb{N})$ и всяко $p \in \mathbb{N}$

2. Примери: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ е разходящ; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ е сходящ.

3. Необходимо условие на Коши:

Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

# 2 Критерии за сходимост

## 2.1 Критерии за сравнение

### 2.1.1 Интегрален критерий

- Общо твърдение:

Нека $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ е монотонна. Тогава $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходящ $\Leftrightarrow$ $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ

- Съществен случай:

Нека $f(x) \geq 0$ за всяко $x \in [1, +\infty)$, монотонно намалява и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Тогава $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходящ $\Leftrightarrow$ $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ

- Доказателство:

За $x \in [n, n+1]$ е изпълнено $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$, откъдето $f(n+1) \leq \int\limits_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$. Следователно,

$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$ . Твърдението следва от нарастването на $F(u) = \int_1^u f(x)\,dx$ .

- Примери:

    1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ

    2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ е сходящ $\Leftrightarrow$ $p > 1$

    3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q (n+1)}$ е сходящ $\Leftrightarrow$ $p > 1$ или $p = 1\,,\ q > 1$

### 2.1.2 Критерий за сравнение I (сравняване на големината на събираемите)

Нека $0 \leq a_n \leq b_n$ за всяко $n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ . Тогава

- Ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.

- Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е разходящ.
- Логически факт: $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$
- Гранична форма:

  Нека $0 < a_n$ за всяко $n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = L \neq 0$ (число). Тогава $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ тогава и само тогава, когато $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.

### 2.1.3 Критерий за сравнение II (сравняване на „скоростта“)

Нека $0 < a_n$, $0 < b_n$ и $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ за всяко $n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ . Тогава

- Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.
- Ако $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е разходящ.

## 2.2 Критерии за редове с положителни членове

### 2.2.1 Критерий на Даламбер

Нека $0 < a_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ .

- (ДУ сходимост) Ако има $0 < q < 1$, за което $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ за всяко $n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ , то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ. Следва от $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{q^{n+1}}{q^n}$ .

- (ДУ разходимост) Ако $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ за всяко $n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ , то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ. В този случай $a_n$ не клони към $0$ . Следва от $a_{n+1} \geq a_n$ .

- (гранична форма) Нека съществува $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ . Тогава

  ако $L < 1$ , то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ; ако $L > 1$ , то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

- Примери:

  1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!}$ е сходящ за всяко $p \geq 0$ .

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n}$ е сходящ за $0 < p < 1$ и разходящ за $p \geq 1$

### 2.2.2 Критерий на Коши

Нека $0 \leq a_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ .

- (ДУ сходимост) Ако има $0 < q < 1$, за което $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ за всяко $n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ , то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ. Следва от $0 \leq a_n \leq q^n$ .

- (ДУ разходимост) Ако $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ за всяко $n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ , то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ. В този случай $a_n$ не клони към $0$. Достатъчно е да съществува подредица $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, за която $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$ .

- (гранична форма) Нека съществува $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Тогава

  ако $L < 1$, то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ; ако $L > 1$, то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

- Примери:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ е сходящ.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ е разходящ.

### 2.2.3 Критерий на Раабе-Дюамел

Нека $0 < a_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ .

- (ДУ сходимост) Ако има $1 < q$ , за което $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \geq q$ за всяко $n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ , то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.

- Схема на доказателството:

  - $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{1}{1+\frac{q}{n}}$
  - $p = \dfrac{1+q}{2}$ , $1 < p < q$

- $\varphi(x) = (x+1)^p - (qx+1)\ ,\ q = 2p-1$
- $\varphi'(0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \le 0\,,\ x \in [0,\, x_0]$
- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{1}{1+\dfrac{q}{n}} \le \dfrac{\dfrac{1}{(n+1)^p}}{\dfrac{1}{n^p}}$

- Схема на друго доказателство:
  - $n a_n - n a_{n+1} \ge q a_{n+1}$ за $n \ge n_0$
  - $n a_n - (n+1)\, a_{n+1} \ge (q-1)\, a_{n+1}$ за $n \ge n_0$
  - $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{n_0+p} (n a_n - (n+1)\, a_{n+1}) \ge \sum_{n=n_0}^{n_0+p} (q-1)\, a_{n+1}$ за $p \in \mathbb{N}$
  - $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{n_0+p+1} a_n \le \frac{n_0 a_{n_0} - (n_0+p)\, a_{n_0+p}}{q-1} \le \frac{n_0 a_{n_0}}{q-1}$

- (ДУ разходимост) Ако $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le 1$ за всяко $n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ , то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ. Следва от $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}$

- (гранична форма) Нека съществува $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L$. Тогава ако $L > 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ;    ако $L < 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

- Примери:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.4^n} \cdot \binom{2n}{n}$ е сходящ
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \cdot \binom{2n}{n}$ е разходящ

### 2.2.4 Критерий на Гаус

Нека $0 < a_n$ и $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\delta}}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, където $\delta > 0$, а редицата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена. Тогава

- при $1 < \lambda$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ
- при $\lambda < 1$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ

- при $\lambda = 1$
  - при $1 < \mu$, редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ
  - при $\mu \leq 1$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ
- Схема на доказателството за случая $\lambda = \mu = 1$:

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + \frac{B_n}{n^2} \geq \frac{a_n}{a_{n+1}}\,.$$

- Пример: Редът $\sum_{n=1}^{\infty} Q^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ е сходящ за $0 < Q < \frac{1}{e}$ и разходящ за $Q \geq \frac{1}{e}$.

## 2.3 Критерии за знакопроменливи редове

### 2.3.1 Критерий на Абел - Дирихле

1. Нека

- $a_n$ е монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ;
- сумите $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ са ограничени.

Тогава редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е сходящ.

2. Нека
    - $a_n$ е монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (число);
    - редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ.

   Тогава редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е сходящ.

3. Пример: редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ е сходящ.

### 2.3.2 Критерий на Лайбниц

1. Нека $0 \leq a_n$ монотонно намалява и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ .

   Тогава редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ е сходящ.

2. „Независимо“ доказателство:

   $S_{2n} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n-1}$ , $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n-1} - S_{2n}) = 0$ .

3. Примери:

   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ е сходящ.
   - Нека $0 < a_n$ и $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L > 0$ . Тогава $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ е сходящ.
   - монотонността е съществена: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^{n-1}}$ е сходящ; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$ е разходящ.

# 3 Абсолютно сходящи редове

## 3.1 Абсолютна и условна сходимост

### 3.1.1 Дефиниции

- Редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича **абсолютно сходящ**, ако е сходящ редът $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

  1. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, то той е сходящ.
  2. Обратното не е вярно.
  3. Ако всички събираеми, с изключение на краен брой, са с един и същи знак, то сходимост и абсолютна сходимост съвпадат.

- Редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича **условно сходящ**, ако е сходящ, но не абсолютно сходящ.

  1. За условно сходящ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ редовете $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ са разходящи $\left(a_n^+ = \max\left(a_n,\, 0\right)\,,\ a_n^- = \max\left(-a_n,\, 0\right)\right)$ .

2. Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{p}{n}$ е: разходящ за $p \leq -1$ , условно сходящ за $-1 < p < 0$ , абсолютно сходящ за $0 \leq p$ .

## 3.2 Комутативен закон

### 3.2.1 Формулировка

Нека редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ.

За всяка пермутация $\varphi$ на $\mathbb{N}$ редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ е абсолютно сходящ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Пермутация на $\mathbb{N}$ е всяка функция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, дефинирана за всяко $n \in \mathbb{N}$, и удовлетворяваща

- $\varphi(n) \neq \varphi(k)$ за $n \neq k$
- за всяко $k \in \mathbb{N}$ има $n \in \mathbb{N}$, за което $k = \varphi(n)$

### 3.2.2 Схема на доказателството

- Нека $a_n \geq 0$ и $\varphi$ е пермутация на $\mathbb{N}$.

  1. За $N = \max\limits_{1\leq k\leq n} \varphi(k)$ имаме $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \leq \sum_{k=1}^{N} a_k$.

  2. За $M = \max\limits_{1\leq k\leq n} \varphi^{(-1)}(k)$ имаме $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{M} a_{\varphi(k)}$.

- В общия случай прилагаме доказаното за редовете $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

### 3.2.3 Контра примери

- $$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

- Нека редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е условно сходящ. Тогава

– за всяко $S \in \mathbb{R}$ има пермутация $\varphi$ на $\mathbb{N}$ , за която $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$ ;

– има пермутация $\varphi$ на $\mathbb{N}$ , за която всяко реално число е точка на сгъстяване на редицата $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$ .

## 3.3 Умножаване на редове

### 3.3.1 Формулировка

- За два реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ дефинираме „ред произведение“ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ чрез $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ .

- Ако $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ са сходящи, като поне единият е абсолютно сходящ, то $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ е сходящ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) .$$

- Ако $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ са абсолютно сходящи, то $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ е абсолютно сходящ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) .$$

### 3.3.2 Схема на доказателство за абсолютно сходящи редове

- Нека $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ и $z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$. Тогава

1. $$\sum_{k=0}^{n} z_k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)$$
2. $$\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) \leq \sum_{k=0}^{2n} z_k$$

- В общия случай полагаме $x_n = |a_n|$, $y_n = |b_n|$ и използваме

$$\left|\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) - \sum_{k=0}^{n} c_k\right| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right) - \sum_{k=0}^{n} z_k$$

### 3.3.3 Примери:

1. $$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}\,.$$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ е (условно) сходящ; редът „квадрат“ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(n+1-k)}$ е сходящ.

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ е (условно) сходящ; редът „квадрат“ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$ е разходящ.