ДИС-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №2, 24.01.2015 година

Вариант 1. с отговори и решения

1. *(по 5 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) Допирателната към графиката на функцията $f(x) = x^2 + (3x+4)\ln(5x+6)$ в точката с абсциса $x = -1$ има уравнение $y = 3x + 4$. *Решение:* $f(-1) = 1$, $f'(-1) = 3$, $y = 3(x+1) + 1$.

б) Наклонената асимптота на функцията $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}$ при $x \to +\infty$ има уравнение

$y = x - 3$. *Решение:* $f(x) = \left(x - 2 - \dfrac{3}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = x - 3 + x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + 1 + 2 - 2\,e^{-\frac{1}{x}} - \dfrac{3}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - 2\,e^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}\, e^{-\frac{1}{x}} = 0\,.$$

2. *(по 3 точки за верен отговор)* Попълнете:

$$а)\int \sqrt{\frac{(\arcsin x + 1)^7}{1 - x^2}}\, dx = \frac{2}{9}\sqrt{(\arcsin x + 1)^9} + C \quad ;$$

$$б)\int \left(6x^2 + 1\right) \operatorname{arctg} x\, dx = -x^2 + \frac{\ln\left(1 + x^2\right)}{2} + \left(-2x^3 + x\right) \operatorname{arctg} x + C \quad ;$$

$$в)\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C \quad ;$$

$$г)\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 6x + 1}} = \arcsin\frac{x+3}{\sqrt{10}} + C \quad ;$$

$$д)\int \frac{dx}{\sqrt{2\,e^{2x} - 6\,e^{x} + 9}} = -\frac{1}{3}\ln\left(3\,e^{-x} - 1 + \sqrt{(3\,e^{-x} - 1)^2 + 1}\right) + C \quad .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, чертежът е задължителен)*
Да се изследва и построи графиката на функцията:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \frac{2\,x^2 + x + 5}{x+1}\;.$$

Основни резултати и чертеж: Вертикални асимптоти $x = -1$ и $x = 1$.

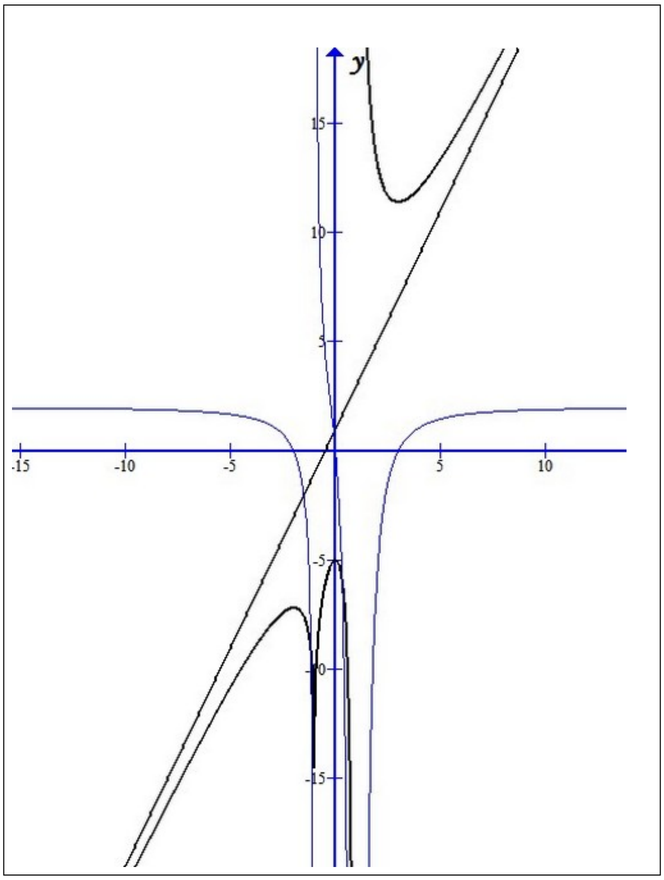
Наклонена асимптота при $x \to +\infty$ (същата и при $x \to -\infty$): $y = 2\,x + 1$.

Производна $f'(x) = -\dfrac{2\,x\,(x-3)\,(x+2)}{(x+1)\,(x-1)^2}$.

Локален минимум: $f(3) = 2\ln 2 + 10$. Локални максимуми: $f(0) = -5$ и $f(-2) = -5 - 2\ln 3$.

Втора производна $f''(x) = \dfrac{4\left(5\,x^2 + 4\,x + 3\right)}{(x+1)^2\,(x-1)^3}$. Функцията е изпъкнала в интервала $(1, +\infty)$.

Функцията е вдлъбната в интервалите $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$.



4. *(10 точки, необходима е обосновка)* Пресметнете определения интеграл:

$$\int\limits_0^{11\pi} \frac{dx}{\cos^2 x - \sin 2x - 2} \quad .$$

Отговор: -11π . *Решение:* Подинтегралната функция е периодична с период π , откъдето:

$$\int\limits_0^{11\pi} \frac{dx}{\cos^2 x - \sin 2x - 2} = 11 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x - \sin 2x - 2} = -11 \operatorname{arctg}\,(2\operatorname{tg} x + 1)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -11\pi \quad .$$

Примитивната в интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ се намира с помощта на смяната $x = \operatorname{arctg} t$:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin 2x - 2} = \int \frac{dt}{-1 - 2t - 2t^2} = -\operatorname{arctg}\,(2t+1) = -\operatorname{arctg}\,(2\operatorname{tg} x + 1) \quad .$$

ДИС-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №2, 24.01.2015 година

Вариант 2. с отговори и решения

1. *(по 5 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) Допирателната към графиката на функцията $f(x) = (3x-5)\,\mathrm{arctg}\,(4-2x) - x^2$ в точката с абсциса $x = 2$ има уравнение $y = -6x + 8$. *Решение:* $f(2) = -4$, $f'(2) = -6$, $y = -6\,(x-2) - 4$.

б) Наклонената асимптота на функцията $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x - 4}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}$ при $x \to +\infty$ има уравнение

$y = x - 9$. *Решение:* $f(x) = \left(x - 8 - \dfrac{4}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = x - 9 + x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + 1 + 8 - 8\,e^{-\frac{1}{x}} - \dfrac{4}{x}\,e^{-\frac{1}{x}}$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(8 - 8\,e^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}\,e^{-\frac{1}{x}} = 0\,.$$

2. *(по 3 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-10\arcsin x)^7}} = \frac{1}{25\sqrt{(1-10\arcsin x)^5}} + C \qquad ;$$

б) $$\int \left(3x^2+2\right)\mathrm{arctg}\,x\;dx = -\frac{x^2}{2} - \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2} + \left(x^3+2x\right)\mathrm{arctg}\,x + C \qquad ;$$

в) $$\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x} = \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{2\cos^2 x} + C \qquad ;$$

г) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x+3}} = \arcsin\frac{x+2}{\sqrt{7}} + C \qquad ;$$

д) $$\int \frac{dx}{\sqrt{5\,e^{2x} - 4\,e^{x} + 1}} = -\ln\left(e^{-x} - 2 + \sqrt{(e^{-x}-2)^2 + 1}\right) + C \quad .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, чертежът е задължителен)*
Да се изследва и построи графиката на функцията:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)^2 + \frac{2\,x^2 - 3x - 3}{x-3}\ .$$

Основни резултати и чертеж: Вертикални асимптоти $x = 1$ и $x = 3$.

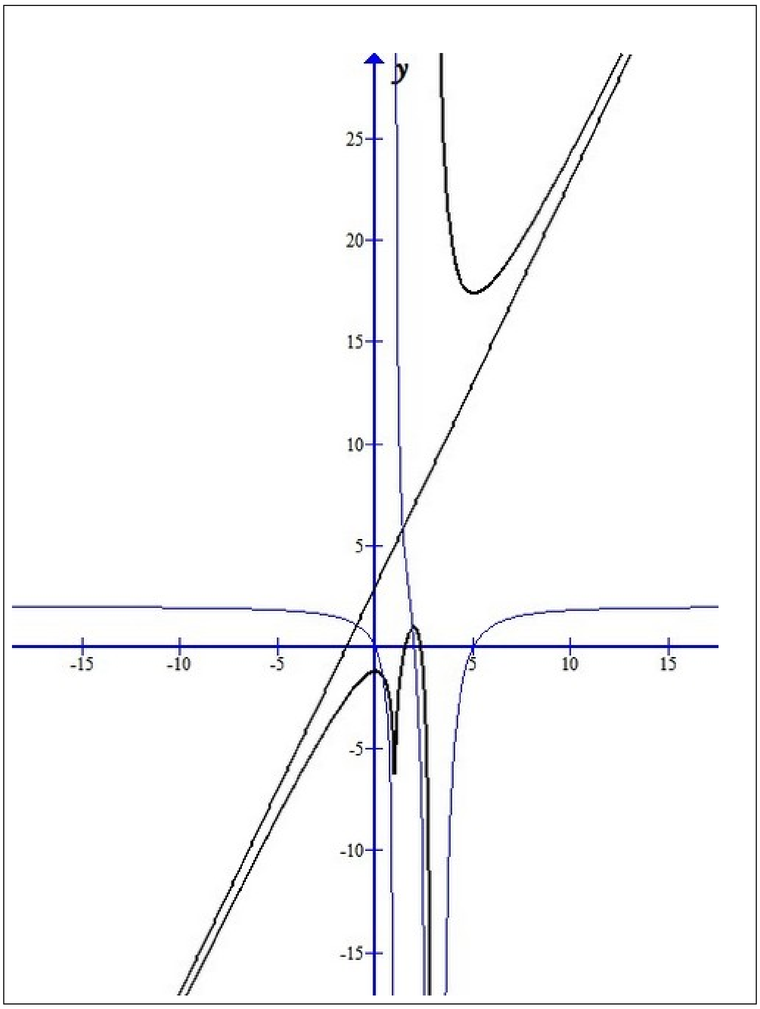
Наклонена асимптота при $x \to +\infty$ (същата и при $x \to -\infty$): $y = 2\,x + 3$.

Производна $f'(x) = \dfrac{2\,x\,(x-2)\,(x-5)}{(x-1)\,(x-3)^2}$.

Локален минимум: $f(5) = 2\ln 2 + 16$. Локални максимуми: $f(2) = 1$ и $f(0) = 1 - 2\ln 3$.

Втора производна $f''(x) = \dfrac{4\left(5\,x^2 - 16\,x + 15\right)}{(x-1)^2\,(x-3)^3}$. Функцията е изпъкнала в интервала $(3, +\infty)$.

Функцията е вдлъбната в интервалите $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$.



4. *(10 точки, необходима е обосновка)* Пресметнете определения интеграл:

$$\int_0^{13\pi} \frac{dx}{4\cos^2 x - \sin 2x + 1} \qquad .$$

Отговор: $\dfrac{13\pi}{2}$. *Решение:* Подинтегралната функция е периодична с период π , откъдето:

$$\int_0^{13\pi} \frac{dx}{4\cos^2 x - \sin 2x + 1} = 13 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\cos^2 x - \sin 2x + 1} = \frac{13}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x - 1}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{13\pi}{2}$$

Примитивната в интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ се намира с помощта на смяната $x = \operatorname{arctg} t$:

$$\int \frac{dx}{4\cos^2 x - \sin 2x + 1} = \int \frac{dt}{5 - 2t + t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x - 1}{2} \qquad .$$

ДИС-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №2, 24.01.2015 година

Вариант 3. с отговори и решения

1. *(по 5 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) Допирателната към графиката на функцията $f(x) = x^2 + (x+4)\arcsin(2x+6)$ в точката с абсциса $x = -3$ има уравнение $y = -4x - 3$. *Решение:* $f(-3) = 9$, $f'(-3) = -4$, $y = -4(x+3) + 9$.

б) Наклонената асимптота на функцията $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 8}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}$ при $x \to +\infty$ има уравнение

$y = x - 3$. *Решение:* $f(x) = \left(x - 2 + \dfrac{8}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = x - 3 + x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + 1 + 2 - 2\,e^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{8}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - 2\,e^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x}\,e^{-\frac{1}{x}} = 0\,.$$

2. *(по 3 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(\arcsin x + 3)^3}} = -\frac{2}{\sqrt{\arcsin x + 3}} + C \qquad ;$$

б) $$\int (6x^2 - 1)\operatorname{arctg} x\; dx = -x^2 - \frac{3\,\ln\left(1 + x^2\right)}{2} + \left(2x^3 - x\right)\operatorname{arctg} x + C \qquad ;$$

в) $$\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C \qquad ;$$

г) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 6x + 2}} = \arcsin\frac{x-3}{\sqrt{11}} + C \qquad ;$$

д) $$\int \frac{dx}{\sqrt{5\,e^{2x} + 2\,e^{x} + 1}} = -\ln\left(e^{-x} + 1 + \sqrt{(e^{-x} + 1)^2 + 4}\right) + C \quad .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, чертежът е задължителен)*
Да се изследва и построи графиката на функцията:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^2 + \frac{2\,x^2 + 3x - 3}{x+3}\ .$$

Основни резултати и чертеж: Вертикални асимптоти $x = -3$ и $x = -1$.

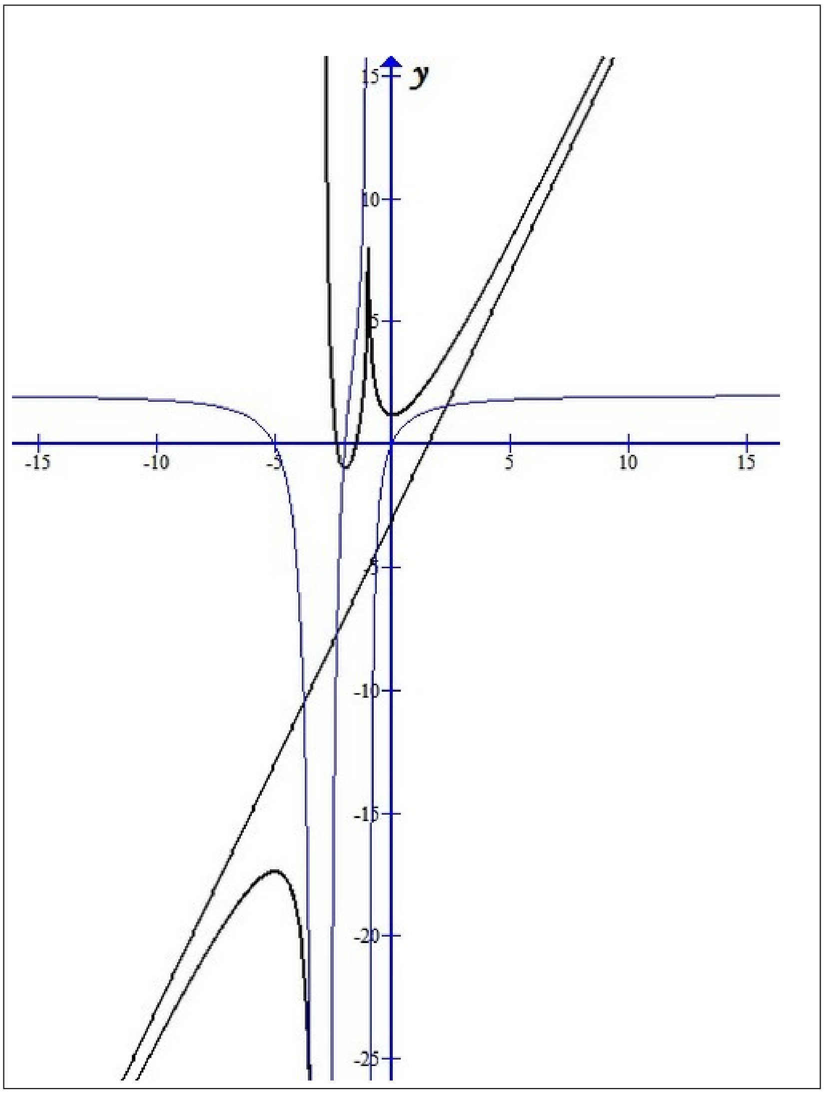
Наклонена асимптота при $x \to +\infty$ (същата и при $x \to -\infty$): $y = 2\,x - 3$.

Производна $f'(x) = \dfrac{2\,x\,(x+2)\,(x+5)}{(x+1)\,(x+3)^2}$.

Локален максимум: $f(-5) = -2\ln 2 - 16$. Локални минимуми: $f(-2) = -1$ и $f(0) = 2\ln 3 - 1$.

Втора производна $f''(x) = \dfrac{4\left(5\,x^2 + 16\,x + 15\right)}{(x+1)^2\,(x+3)^3}$. Функцията е вдлъбната в интервала $(-\infty, -3)$.

Функцията е изпъкнала в интервалите $(-3, -1)$, $(-1, +\infty)$.



4. *(10 точки, необходима е обосновка)* Пресметнете определения интеграл:

$$\int_0^{15\pi} \frac{dx}{9\cos^2 x + \sin 2x + 1} \quad .$$

Отговор: 5π . *Решение:* Подинтегралната функция е периодична с период π , откъдето:

$$\int_0^{15\pi} \frac{dx}{9\cos^2 x + \sin 2x + 1} = 15 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{9\cos^2 x + \sin 2x + 1} = \frac{15}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,x + 1}{3}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 5\pi$$

Примитивната в интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ се намира с помощта на смяната $x = \mathrm{arctg}\,t$:

$$\int \frac{dx}{9\cos^2 x + \sin 2x + 1} = \int \frac{dt}{10 + 2t + t^2} = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t+1}{3} = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,x + 1}{3} \quad .$$

ДИС-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №2, 24.01.2015 година

Вариант 4. с отговори и решения

1. *(по 5 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) Допирателната към графиката на функцията $f(x) = (5x-4)\ln(6x-5) + x^2$ в точката с абсциса $x = 1$ има уравнение $y = 8x - 7$. *Решение:* $f(1) = 1$, $f'(1) = 8$, $y = 8(x-1) + 1$.

б) Наклонената асимптота на функцията $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$ при $x \to +\infty$ има уравнение

$y = x$. *Решение:* $f(x) = \left(x - 1 + \dfrac{2}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = x + x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1 + 1 - e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{2}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}\, e^{\frac{1}{x}} = 0\,.$$

2. *(по 3 точки за верен отговор)* Попълнете:

$$а)\int \sqrt{\frac{(\arcsin x + 13)^{13}}{1 - x^2}}\, dx = \frac{2}{15}\sqrt{(\arcsin x + 13)^{15}} + C \quad ;$$

$$б)\int \left(3x^2 - 4\right)\operatorname{arctg} x\, dx = -\frac{x^2}{2} - \frac{5\,\ln\left(1 + x^2\right)}{2} + \left(x^3 - 4x\right)\operatorname{arctg} x + C \quad ;$$

$$в)\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^5 x}\, dx = -\frac{1}{4\sin^4 x} + \frac{1}{2\sin^2 x} + C \quad ;$$

$$г)\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 8x + 1}} = \arcsin\frac{x+4}{\sqrt{17}} + C \quad ;$$

$$д)\int \frac{dx}{\sqrt{8\,e^{2x} + 4\,e^{x} + 1}} = -\ln\left(e^{-x} + 2 + \sqrt{(e^{-x} + 2)^2 + 4}\right) + C \quad .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, чертежът е задължителен)*
Да се изследва и построи графиката на функцията:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \frac{2\,x^2 - 3\,x + 7}{x - 1}\ .$$

4. *(10 точки, необходима е обосновка)* Пресметнете определения интеграл:

$$\int_0^{14\pi} \frac{dx}{\cos^2 x - 4\sin 2x + 4}\ .$$

Отговор: 7π . *Решение:* Подинтегралната функция е периодична с период π , откъдето:

$$\int\limits_0^{14\pi} \frac{dx}{\cos^2 x - 4\sin 2x + 4} = 14 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x - 4\sin 2x + 4} = \frac{14}{2} \operatorname{arctg} 2\,(\operatorname{tg} x - 1)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 7\pi$$

Примитивната в интервала $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ се намира с помощта на смяната $x = \operatorname{arctg} t$:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - 4\sin 2x + 4} = \int \frac{dt}{5 - 8t + 4t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2\,(t - 1) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2\,(\operatorname{tg} x - 1) \quad .$$

ДИС-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №2, 24.01.2015 година

Вариант 5. с отговори и решения

1. *(по 5 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) Допирателната към графиката на функцията $f(x) = x^2 - (2x-5)\,\mathrm{arctg}\,(9-3x)$ в точката с абсциса $x = 3$ има уравнение $y = 9x - 18$. *Решение:* $f(3) = 9$, $f'(3) = 9$, $y = 9\,(x-3) + 9$.

б) Наклонената асимптота на функцията $f(x) = \dfrac{x^2+8x-4}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$ при $x \to +\infty$ има уравнение

$y = x + 9$. *Решение:* $f(x) = \left(x + 8 - \dfrac{4}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = x + 9 + x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1 - 8 + 8\,e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{4}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-8 + 8\,e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}\, e^{\frac{1}{x}} = 0\,.$$

2. *(по 3 точки за верен отговор)* Попълнете:

$$\text{а) } \int \sqrt{\frac{(13-\arcsin x)^5}{1-x^2}}\, dx = -\frac{2}{7}\sqrt{(13-\arcsin x)^7} + C \quad ;$$

$$\text{б) } \int \left(3x^2+5\right)\mathrm{arctg}\, x\, dx = -\frac{x^2}{2} - 2\ln\left(1+x^2\right) + \left(x^3+5x\right)\mathrm{arctg}\, x + C \quad ;$$

$$\text{в) } \int \sin^2 x.\cos^5 x\, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C \quad ;$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+6}} = \arcsin\frac{x-2}{\sqrt{10}} + C \quad ;$$

$$\text{д) } \int \frac{dx}{\sqrt{5\,e^{2x} - 4\,e^{x} + 4}} = -\frac{1}{2}\ln\left(2\,e^{-x} - 1 + \sqrt{(2\,e^{-x}-1)^2 + 4}\right) + C \quad .$$

3. *(15 точки, необходима е обосновка, чертежът е задължителен)*
Да се изследва и построи графиката на функцията:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - \frac{2\,x^2+x+5}{x+1}\quad .$$

Основни резултати и чертеж: Вертикални асимптоти $x = -1$ и $x = 1$.

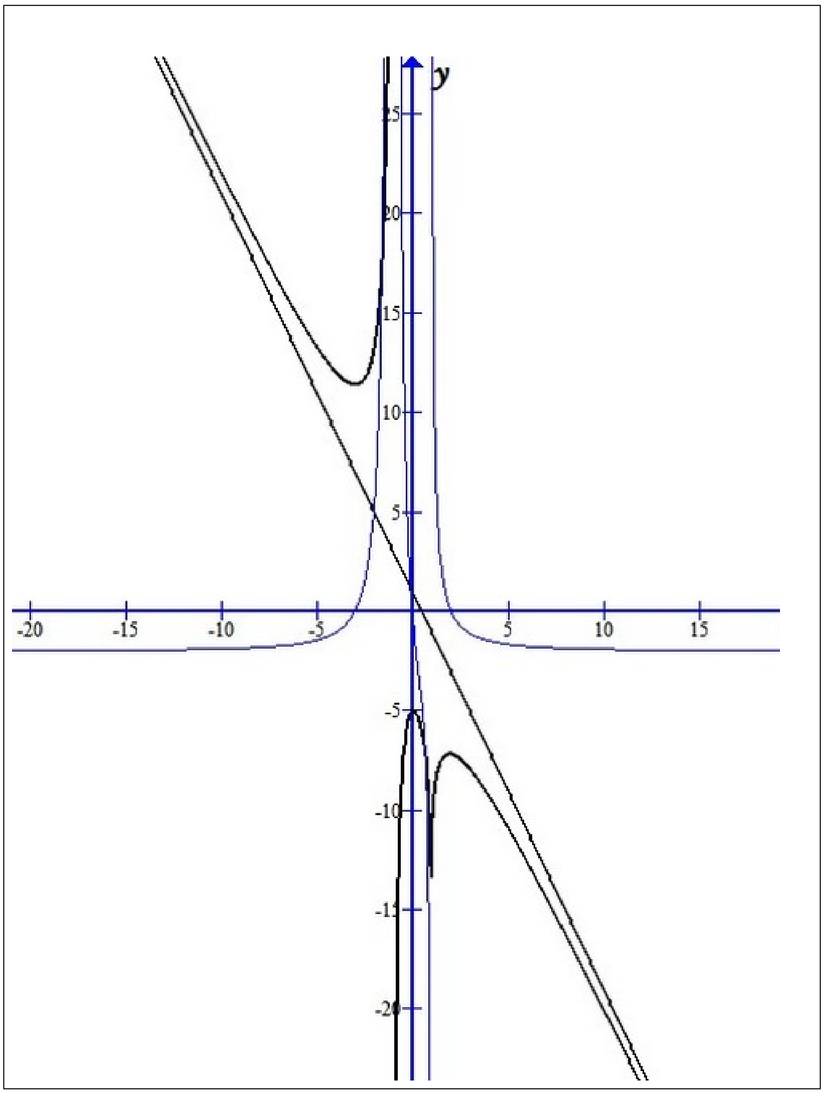
Наклонена асимптота при $x \to +\infty$ (същата и при $x \to -\infty$): $y = -2\,x + 1$.

Производна $f'(x) = -\dfrac{2\,x\,(x+3)\,(x-2)}{(x-1)\,(x+1)^2}$.

Локален минимум: $f(-3) = 2\ln 2 + 10$. Локални максимуми: $f(0) = -5$ и $f(2) = -5 - 2\ln 3$.

Втора производна $f''(x) = -\dfrac{4\left(5x^2 - 4x + 3\right)}{(x-1)^2\,(x+1)^3}$. Функцията е изпъкнала в интервала $(-\infty, -1)$.

Функцията е вдлъбната в интервалите $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.



4. *(10 точки, необходима е обосновка)* Пресметнете определения интеграл:

$$\int_0^{15\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + \sin 2x + 1}\, dx \qquad .$$

Отговор: 15π . *Решение:* Подинтегралната функция е периодична с период π , откъдето:

$$\int_0^{15\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + \sin 2x + 1} = 15 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x + \sin 2x + 1} = 15 \operatorname{arctg}\,(\operatorname{tg} x + 1)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 15\pi$$

Примитивната в интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ се намира с помощта на смяната $x = \operatorname{arctg} t$:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x + \sin 2x + 1} = \int \frac{dt}{2 + 2t + t^2} = \operatorname{arctg}\,(t+1) = \operatorname{arctg}\,(\operatorname{tg} x + 1) \qquad .$$

ДИС-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Тест №2, 24.01.2015 година

Вариант 6. с отговори и решения

1. *(по 5 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) Допирателната към графиката на функцията $f(x) = (x+3)\arcsin(3x+6) - x^2$ в точката с абсциса $x = -2$ има уравнение $y = 7x + 10$. *Решение:* $f(-2) = -4$, $f'(-2) = 7$, $y = 7(x+2) - 4$.

б) Наклонената асимптота на функцията $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 8}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$ при $x \to +\infty$ има уравнение

$y = x + 3$. *Решение:* $f(x) = \left(x + 2 + \dfrac{8}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = x + 3 + x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1 - 2 + 2\, e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{8}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-2 + 2\, e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x}\, e^{\frac{1}{x}} = 0 .$$

2. *(по 3 точки за верен отговор)* Попълнете:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,\sqrt[3]{\arcsin x + 12}}} = \frac{5}{6}\sqrt[6]{(\arcsin x + 12)^5} + C$;

б) $\displaystyle\int \left(3x^2 - 7\right)\operatorname{arctg} x\, dx = -\frac{x^2}{2} + 4\ln\left(1 + x^2\right) + \left(x^3 - 7x\right)\operatorname{arctg} x + C$;

в) $\displaystyle\int \sin^5 x.\cos^2 x\, dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 8x - 9}} = \arcsin\frac{x-4}{\sqrt{7}} + C$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2e^{2x} + 6\, e^{x} + 9}} = -\frac{1}{3}\ln\left(3\, e^{-x} + 1 + \sqrt{(3\, e^{-x} + 1)^2 + 1}\right) + C$.

3. *(15 точки, необходима е обосновка, чертежът е задължителен)*
Да се изследва и построи графиката на функцията:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^2 - \frac{2\,x^2 + 3x - 3}{x+3} .$$

Основни резултати и чертеж: Вертикални асимптоти $x = -3$ и $x = -1$.

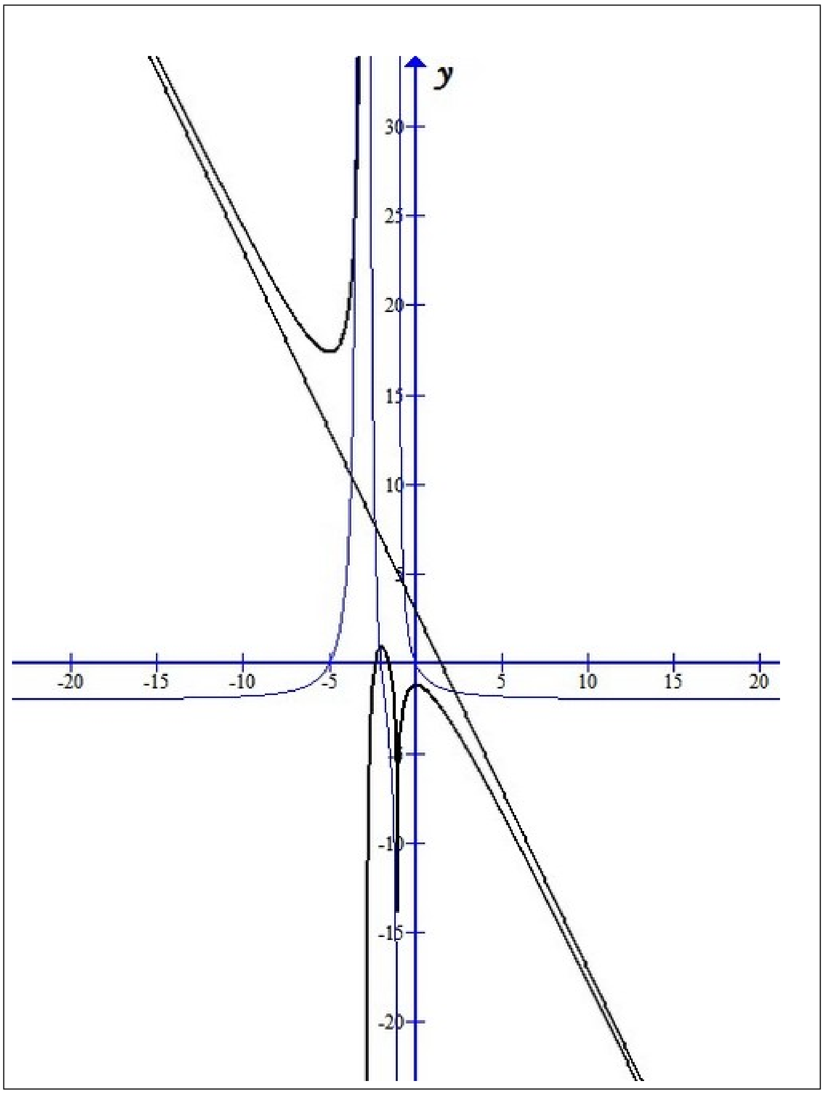
Наклонена асимптота при $x \to +\infty$ (същата и при $x \to -\infty$): $y = -2\,x + 3$.

Производна $f'(x) = -\dfrac{2\,x\,(x+2)\,(x+5)}{(x+1)\,(x+3)^2}$.

Локален минимум: $f(-5) = 2\ln 2 + 16$. Локални максимуми: $f(-2) = 1$ и $f(0) = 1 - 2\ln 3$.

Втора производна $f''(x) = -\dfrac{4\left(5x^2 + 16x + 15\right)}{(x+1)^2\,(x+3)^3}$. Функцията е изпъкнала в интервала $(-\infty, -3)$.

Функцията е вдлъбната в интервалите $(-3, -1)$, $(-1, +\infty)$.



4. *(10 точки, необходима е обосновка)* Пресметнете определения интеграл:

$$\int_0^{13\pi} \frac{dx}{4\cos^2 x + \sin 2x + 1}\, dx \quad .$$

Отговор: $\dfrac{13\pi}{2}$. *Решение:* Подинтегралната функция е периодична с период π , откъдето:

$$\int_0^{13\pi} \frac{dx}{4\cos^2 x + \sin 2x + 1} = 13 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\cos^2 x + \sin 2x + 1} = \frac{13}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x + 1}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{13\pi}{2}$$

Примитивната в интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ се намира с помощта на смяната $x = \operatorname{arctg} t$:

$$\int \frac{dx}{4\cos^2 x + \sin 2x + 1} = \int \frac{dt}{5 + 2t + t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x + 1}{2} \quad .$$