Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Финален тест, 07.02.2013 година

Име:

група: **фак. номер:**

отговорите на 1, 2, 3, 5, 7 и 8 се попълват на този лист,
за 4, 6, 9, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

1. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Редицата $\{a_n\}_1^\infty$ се нарича сходяща, ако съществува число l такова, че за всяко

2. (продължение) *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Казваме, че редицата $\{b_n\}_1^\infty$ клони към $+\infty$, ако за всяко

3. (продължение) *(7 точки, обосновка не е необходима)*
Нека $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$. Попълнете:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \qquad ; \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \qquad ; \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \qquad ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \qquad ; \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \qquad ; \lim_{n\to\infty} |a_n|^{b_n} = \qquad ; \lim_{n\to\infty} |b_n|^{a_n} = \qquad .$$

4. (продължение) *(8 точки)* Обосновете (използвайки дефинициите) отговора си (в предната точка) за случая $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$.

5. *(4+4 точки)* Довършете дефиницията (по два начина):
Казваме, че функцията $f : [0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ има граница L когато x клони към $+\infty$, ако:
(Коши)

(Хайне)

6. (продължение) Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[0\,, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ и $f(0) > L$. Докажете, че:

а) *(5 точки)* $f(x)$ е ограничена в $[0\,, +\infty)$;

б) *(7 точки)* $f(x)$ има най-голяма стойност в $[0\,, +\infty)$.

обърни

отговорите на 1, 2, 3, 5, 7 и 8 се попълват на този лист,
за 4, 6, 9, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

7. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Функцията $f(x)$ се нарича диференцируема в точката a, ако е дефинирана в ....

и ......

8. (продължение) *(4 точки)* Формулирайте теоремата на Лагранж (за крайните нараствания).

9. (продължение) *(12 точки)* Нека функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има производна във всяка точка.
Докажете, че $f(x)$ е растяща в $\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

10. *(12 точки)* Формулирайте и докажете правилото за смяна на променливите за неопределени интеграли.

11. Нека $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x) = \dfrac{3\,x^2+4}{x^4+3\,x^2+2} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{x^2+4}{x^2+3}$ в $\mathbb{R}$.

Докажете, че:

а) *(5 точки)* същесвува число C такова, че функцията $G(x) = F(x) + C$ е нечетна;

б) *(5 точки)* $F(x)$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$;

в) *(5 точки)* $F(x)$ е вдлъбната в интервала $[0\,,\ +\infty)$;

г) *(5 точки)* $xf(2x) \leq F(2x) - F(x) \leq xf(x)$ за всяко $x \in [0\,,\ +\infty)$;

д) *(5 точки)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(F(2013x) - F(x)\right) = 0$.

Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Финален тест, 07.02.2013 година

Име:

група: **фак. номер:**

отговорите на 1, 2, 3, 5, 7 и 8 се попълват на този лист,
за 4, 6, 9, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

1. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Редицата $\{a_n\}_1^\infty$ се нарича сходяща, ако съществува число l такова, че за всяко

2. (продължение) *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Казваме, че редицата $\{b_n\}_1^\infty$ клони към $-\infty$, ако за всяко

3. (продължение) *(7 точки, обосновка не е необходима)*
Нека $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{1}{3}$. Попълнете:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \qquad ; \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \qquad ; \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \qquad ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \qquad ; \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \qquad ; \lim_{n\to\infty} |a_n|^{b_n} = \qquad ; \lim_{n\to\infty} |b_n|^{a_n} = \qquad .$$

4. (продължение) *(8 точки)* Обосновете (използвайки дефинициите) отговора си (в предната точка) за случая $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$.

5. *(4+4 точки)* Довършете дефиницията (по два начина):
Казваме, че функцията $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ има граница L когато x клони към $-\infty$, ако:
(Коши)

(Хайне)

6. (продължение) Нека $f(x)$ е непрекъсната в $(-\infty, 0]$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ и $f(0) < L$. Докажете, че:

а) *(5 точки)* $f(x)$ е ограничена в $(-\infty, 0]$;

б) *(7 точки)* $f(x)$ има най-малка стойност в $(-\infty, 0]$.

обърни

отговорите на 1, 2, 3, 5, 7 и 8 се попълват на този лист,
за 4, 6, 9, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

7. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Функцията $f(x)$ се нарича диференцируема в точката a, ако е дефинирана в ....

и ......

8. (продължение) *(4 точки)* Формулирайте теоремата на Лагранж (за крайните нараствания).

9. (продължение) *(12 точки)* Нека функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има производна във всяка точка. Докажете, че $f(x)$ е намаляваща в $\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \leq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

10. *(12 точки)* Формулирайте и докажете правилото за интегриране по части за неопределени интеграли.

11. Нека $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x) = \dfrac{3\,x^2+5}{x^4+4\,x^2+3} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{x^2+5}{x^2+2}$ в $\mathbb{R}$.

Докажете, че:

а) *(5 точки)* същесвува число C такова, че функцията $G(x) = F(x) + C$ е нечетна;

б) *(5 точки)* $F(x)$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$;

в) *(5 точки)* $F(x)$ е вдлъбната в интервала $[0\,,\ +\infty)$;

г) *(5 точки)* $xf(2x) \leq F(2x) - F(x) \leq xf(x)$ за всяко $x \in [0\,,\ +\infty)$;

д) *(5 точки)* $\lim\limits_{x\to+\infty} (F(2013x) - F(x)) = 0$.

Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Финален тест, 07.02.2013 година

Име:

група: **фак. номер:**

отговорите на 1, 2, 3, 5, 7 и 8 се попълват на този лист,
за 4, 6, 9, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

1. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Редицата $\{a_n\}_1^\infty$ се нарича сходяща, ако съществува число l такова, че за всяко

2. (продължение) *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Казваме, че редицата $\{b_n\}_1^\infty$ клони към $+\infty$, ако за всяко

3. (продължение) *(7 точки, обосновка не е необходима)*
Нека $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{1}{3}$. Попълнете:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \qquad ; \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \qquad ; \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \qquad ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \qquad ; \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \qquad ; \lim_{n\to\infty} |a_n|^{b_n} = \qquad ; \lim_{n\to\infty} |b_n|^{a_n} = \qquad .$$

4. (продължение) *(8 точки)* Обосновете (използвайки дефинициите) отговора си (в предната точка) за случая $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$.

5. *(4+4 точки)* Довършете дефиницията (по два начина):
Казваме, че функцията $f : [0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ има граница L когато x клони към $+\infty$, ако:
(Коши)

(Хайне)

6. (продължение) Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[0\,,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ и $f(0) < L$. Докажете, че:

а) *(5 точки)* $f(x)$ е ограничена в $[0\,,+\infty)$;

б) *(7 точки)* $f(x)$ има най-малка стойност в $[0\,,+\infty)$.

обърни

отговорите на 1, 2, 3, 5, 7 и 8 се попълват на този лист,
за 4, 6, 9, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

7. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Функцията $f(x)$ се нарича диференцируема в точката a, ако е дефинирана в ....

и ......

8. (продължение) *(4 точки)* Формулирайте теоремата на Лагранж (за крайните нараствания).

9. (продължение) *(12 точки)* Нека функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има производна във всяка точка. Докажете, че $f(x)$ е намаляваща в $\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \leq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

10. *(12 точки)* Формулирайте и докажете правилото за смяна на променливите за неопределени интеграли.

11. Нека $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x) = \dfrac{3x^2+5}{x^4+3x^2+2} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{x^2+5}{x^2+3}$ в $\mathbb{R}$.

Докажете, че:

а) *(5 точки)* същесвува число C такова, че функцията $G(x) = F(x) + C$ е нечетна;

б) *(5 точки)* $F(x)$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$;

в) *(5 точки)* $F(x)$ е вдлъбната в интервала $[0, +\infty)$;

г) *(5 точки)* $xf(2x) \leq F(2x) - F(x) \leq xf(x)$ за всяко $x \in [0, +\infty)$;

д) *(5 точки)* $\lim\limits_{x \to +\infty} (F(2013x) - F(x)) = 0$.

Анализ-1, специалност „Софтуерно инженерство“, Финален тест, 07.02.2013 година

Име:

група: **фак. номер:**

отговорите на 1, 2, 3, 5, 7 и 8 се попълват на този лист,
за 4, 6, 9, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

1. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Редицата $\{a_n\}_1^\infty$ се нарича сходяща, ако съществува число l такова, че за всяко

2. (продължение) *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Казваме, че редицата $\{b_n\}_1^\infty$ клони към $-\infty$, ако за всяко

3. (продължение) *(7 точки, обосновка не е необходима)*
Нека $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$. Попълнете:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \qquad ; \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \qquad ; \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \qquad ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \qquad ; \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \qquad ; \lim_{n\to\infty} |a_n|^{b_n} = \qquad ; \lim_{n\to\infty} |b_n|^{a_n} = \qquad .$$

4. (продължение) *(8 точки)* Обосновете (използвайки дефинициите) отговора си (в предната точка) за случая $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$.

5. *(4+4 точки)* Довършете дефиницията (по два начина):
Казваме, че функцията $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ има граница L когато x клони към $-\infty$, ако:
(Коши)

(Хайне)

6. (продължение) Нека $f(x)$ е непрекъсната в $(-\infty, 0]$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ и $f(0) > L$. Докажете, че:

а) *(5 точки)* $f(x)$ е ограничена в $(-\infty, 0]$;

б) *(7 точки)* $f(x)$ има най-голяма стойност в $(-\infty, 0]$.

обърни

отговорите на 1, 2, 3, 5, 7 и 8 се попълват на този лист,
за 4, 6, 9, 10 и 11 се използват само допълнителни листа.

7. *(4 точки)* Довършете дефиницията:
Функцията $f(x)$ се нарича диференцируема в точката a, ако е дефинирана в ....

и ......

8. (продължение) *(4 точки)* Формулирайте теоремата на Лагранж (за крайните нараствания).

9. (продължение) *(12 точки)* Нека функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има производна във всяка точка. Докажете, че $f(x)$ е растяща в $\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

10. *(12 точки)* Формулирайте и докажете правилото за интегриране по части за неопределени интеграли.

11. Нека $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x) = \dfrac{3x^2+7}{x^4+4x^2+3} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{x^2+7}{x^2+3}$ в $\mathbb{R}$.

Докажете, че:

а) *(5 точки)* съществува число C такова, че функцията $G(x) = F(x) + C$ е нечетна;

б) *(5 точки)* $F(x)$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$;

в) *(5 точки)* $F(x)$ е вдлъбната в интервала $[0, +\infty)$;

г) *(5 точки)* $xf(2x) \leq F(2x) - F(x) \leq xf(x)$ за всяко $x \in [0, +\infty)$;

д) *(5 точки)* $\lim\limits_{x \to +\infty} (F(2013x) - F(x)) = 0$.