Изпит - 2017г.

1з. $\boxed{4т.}$ Критерий на Абел-Дирихле за сходимост на несобствени интеграли от вида $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Формулировка/ Кр. на Абел-Дирихле: Ако е изпълнено, че:

- $g(x)$ монотонно намалява и $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$;
- $f(x)$ има C (ограничена примитивна), за която $\left|\int\limits_a^u f(x)\,dx\right| \leq C$ за всяко $u \geq a$;

то тогава $\int\limits_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)\,dx$ е сходящ. #

2з. $\boxed{12т.}$ Док., че $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$ е условно сходящ.

D-во:

Нека $I := \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2x}{2x} \cdot \sin x^2$. Имаме, че:

① $\frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, т.е. мон. намалява и $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0$;

② $\int 2x \cdot \sin x^2\,dx = -\cos x^2 \leq 1$, т.е. ограничена;

$\Rightarrow$ От ①, ② и кр. на Абел-Дирихле получаваме, че I е условно сходящ. #

Док., че $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$ е условно сходящ.

D-во: Аналогично.

Нека $I := \int\limits_0^{\infty} \cos x^2\,dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{2x}{2x} \cdot \cos x^2$. Имаме, че:

① $\frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, т.е. мон. намалява и $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0$;

② $\int 2x \cdot \cos x^2\,dx = \int \cos x^2\,dx^2 = \sin x^2 \leq 1$, т.е. ограничена,

$\Rightarrow$ От ①, ② и кр. на Абел-Дирихле получаваме, че I е условно сходящ. #

3з) Формулирайте и докажете кр. на Раабе за сходимост на редове. Критерий на Раабе(-Дюамел) - Нека $a_n>0$ и имаме редицата $b_n = n.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$, където редът е $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ДУ за сходимост - Ако има $q>1$, за което $b_n \geq q$ при $n \geq n_0$, то редът е сходящ.

ДУ за разходимост - Ако $b_n \leq 1$, то редът е разходящ.

Гранична форма - Ако $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, то при $b>1$ редът е сходящ, а при $b<1$ редът е разходящ.

Д-во: I. ДУ за разходимост:

Дадено е $n.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \leq 1 \iff \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1+\frac{1}{n} \iff$

$$\iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Знаем, че хармоничният ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ

$\Rightarrow$ кр. за сравнение

II. ДУ за сходимост: Нека $p = \frac{1+q}{2}$.

достатъчно е $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}$, защото $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ е сходящ съгласно интегралния критерий.

Дадено е, че $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1+\frac{q}{n}$

$$\iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{1+\frac{q}{n}} \leq \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} \iff \frac{(n+1)^p}{n^p} \leq 1+\frac{q}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \leq 1+(2p-1).\frac{1}{n}$$

$\Rightarrow (1+x)^p \leq 1+(2p-1).x$ за "малки" x.

Нека $\varphi(x) = (1+x)^p - (1+(2p-1).x)$

$x > -1$

има непрекъсната производна.

$\varphi'(x) = p\cdot(1+x)^{p-1} - (2p-1)$

$\varphi'(0) = -p+1 < 0$

Непрекъсната ($\varphi(x)$) и значи има $\delta>0$, така че

$\varphi'(x)<0$ за $|x|<\delta$.

Но това означава, че $\varphi(x)$ намалява в $[0;\delta]$

$\varphi(x) \le \varphi(0)$ в $[0;\delta]$.

$\Rightarrow$ доказахме $(1+x)^p \le 1+(2p-1)\cdot x$ за $x\in[0,\delta]$

$\Rightarrow (1+\frac{1}{n})^p \le 1+(2p-1)\cdot\frac{1}{n}$ за $n>\frac{1}{\delta}$ #

Интегрален критерий за сходимост - Нека $f:[1;+\infty)\to\mathbb{R}$ е монотонно намаляваща, $f(x)\ge 0$. Тогава е изпълнено:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходящ $\Leftrightarrow \int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ е сходящ

D-во: ① $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ е сходящ $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_1^A f(x)dx$. Обаче имаме, че:

$$\int\limits_1^A f(x)dx = \int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^3 f(x)dx + \int\limits_3^4 f(x)dx + \dots, \text{ т.е.}$$

интегралът е сходящ когато $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_n^{n+1} f(x)dx$ е сходяща.

② $f(x)$ е монотонно намаляваща $\Rightarrow f(n)\ge f(n+1)$

Разглеждаме $\int\limits_n^{n+1} f(x)dx$ и стигаме до извода, че:

$$f(n+1) \le \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \le f(n)$$

Сумирайки неравенството за всички n получаваме:

$$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$$

имат еднаква сходимост

$\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$ ③

$\Rightarrow$ сумата е сходяща $\Leftrightarrow$ интегралът е сходящ (кр. за сравнение 2 пъти) #

5з. Довършете дефиницията - функцията $F(x,y)$ се нарича диференцируема в точката (x_0, y_0), ако съществуват числа $A, B \in \mathbb{R}$, такива че $\Delta f = f(x,y) - f(x_0, y_0) =$

$$= A.(x-x_0) + B.(y-y_0) + \alpha_1(x-x_0, y-y_0).(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0, y-y_0).(y-y_0),$$

където: $\lim \alpha_i(x-x_0, y-y_0) = 0$, $i = 1, 2$, $(x,y) \to (x_0, y_0)$. #

7з. Формулирайте и докажете ~~(Thm за)~~ теоремата за равенство на смесените производни.

Thm: Нека $f(x,y)$ е дефинирана над $B_\delta(x_0, y_0)$, както и да съществуват $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, където $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ са непрекъснати в (x_0, y_0).

Тогава $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. $\rightarrow$ Взета от нета

8з. I Нека $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е такава функция, че:

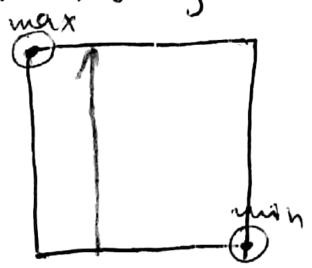
$\forall x$ $f(x,y)$ расте по y;

$\forall y$ $f(x,y)$ намалява по x;

Да се док., че е интегруема в/у $[0;1] \times [0;1]$.

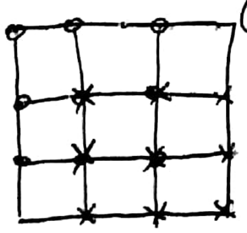
D-во:

① Разглеждаме деф. област, като очевидно от условието $\max f(x,y) = f(0,1)$ и $\min f(x,y) = f(1,0)$.



② Нека $x_i = \frac{i}{n}$, $y_j = \frac{j}{n}$. Тогава:

$$\left.\begin{aligned} m_{ij} &= f(x_i, y_{j-1}) \\ M_{ij} &= f(x_{i-1}, y_j) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} S &= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_{i-1}, y_j) \\ s &= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_{j-1}) \end{aligned}$$



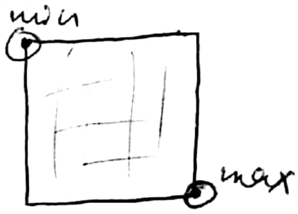
③ От фиг. забелязваме, че има $4n+2$ различни случая

$\Rightarrow |S - s| \leq \frac{1}{n^2} \cdot (4n+2).M$, където $M \geq |f(x,y)|$, $(x,y) \in [0;1] \times [0;1]$ #

II Нека $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ е такава ф-я, че: $\forall x$ $f(x,y)$ (намалява) по y; $\forall y$ $f(x,y)$ (расте) по x; интегруема в/у $[0;1]\times[0;1]$?

Д-во:

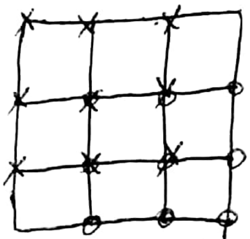
① Разгл. деф. област, като от условието се забелязва че:
$\max f(x,y)=f(1,0)$ и $\min f(x,y)=f(0,1)$.



② Нека $x_i=\frac{i}{n}$, $y_j=\frac{j}{n}$. Тогава:

$m_{ij}=f(x_{i-1},y_j)$

$M_{ij}=f(x_i,y_{j-1})$



$\Rightarrow S=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_i,y_{j-1})$

$s=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_{i-1},y_j)$

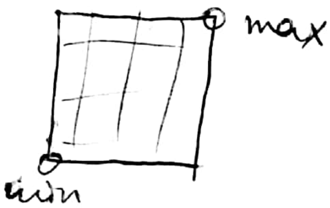
③ От фиг. забелязваме, че има $4n+2$ различни случая

$\Rightarrow |S-s|\leq\frac{1}{n^2}\cdot(4n+2)\cdot M$,

където $M\geq|f(x,y)|$, $(x,y)\in[0;1]\times[0;1]$ ✱

III $\forall x$ $f(x,y)$ расте по y; $\forall y$ $f(x,y)$ расте по x;

Д-во: ① Разглеждаме деф. област, като от условието се забелязва, че:
$\max f(x,y)=f(1,1)$ и $\min f(x,y)=f(0,0)$



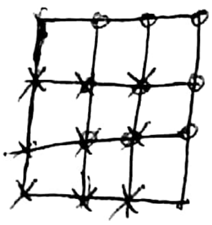
② Нека $x_i=\frac{i}{n}$, $y_j=\frac{j}{n}$. Тогава:

$m_{ij}=f(x_{i-1},y_{j-1})$

$M_{ij}=f(x_i,y_j)$

$\Rightarrow S=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_i,y_j)$

$s=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_{i-1},y_{j-1})$



$\Rightarrow$ ③ От фиг. забелязваме, че има $4n+2$ различни случая

$\Rightarrow |S-s|\leq\frac{1}{n^2}\cdot(4n+2)\cdot M$

$M\geq|f(x,y)|$, $(x,y)\in[0;1]\times[0;1]$ #

$\forall x$ $f(x,y)$ намалява по y; $\forall y$ $f(x,y)$ намалява по x;
Доказва се аналогично на предишните.

#

9з. Довършете дефинициите:

D.- Казваме, че множ. е $A \subset \mathbb{R}^2$ с мярка нула (в смисъл на Пеано-Жордан), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват краен брой правоъгълници $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$, такива че:

$A \subset \bigcup_{s=1}^{m} \Delta_s$ и $\sum_{s=1}^{m} S(\Delta_s) < \varepsilon$ (сумарното лице е по-малко от ε). #

D.- Казваме, че множ. $A \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо (в смисъл на Пеано-Жордан), ако съществува правоъгълник Δ, за който $A \subset \Delta$ и χ_A (характеристична функция на A) е интегруема в/у Δ. Полагаме $S(A) = \iint_{\Delta} \chi_A(x,y)\,dx\,dy$. #

10з. Док., че ако ограниченото множ. A е измеримо, то множ. ∂A от граничните точки на A има мярка нула.

D-во: Дадено е, че A е измеримо, $A \subset \Delta$. Тогава за $\varepsilon > 0$ има разделяне $S(\chi_A, \Delta, \tilde{x}, \tilde{y}) - s(\chi_A, \Delta, \tilde{x}, \tilde{y}) < \frac{\varepsilon}{2}$

Δ_{ij} са някакво вида:

$\{ \Delta_{ij} \subset A \Rightarrow M_{ij} = 1,\ m_{ij} = 1$

$\{ \Delta_{ij} \cap A = \emptyset \Rightarrow M_{ij} = m_{ij} = 0$

$* \begin{cases} \Delta_{ij} \cap (\Delta \setminus A) \neq \emptyset \\ \Delta \cap A \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow M_{ij} = 1,\ m_{ij} = 0$

Тогава:

$\sum_{\Delta_{ij}(*)} S(\Delta_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2}$, но $\partial A \subset \bigcup_{\Delta_{ij}(*)} \Delta_{ij} \cup \bigcup_{p=1}^{s} \Delta_p$

$\Rightarrow \sum_{p=1}^{s} S(\Delta_p) < \frac{\varepsilon}{2}$ #

Док., че ако множеството ∂A от граничните точки на ограниченото множ. A има мярка нула, то A е измеримо. ©

Д-во: χ_A: • ако (x_0, y_0) е вътрешна точка, то за всички (x,y) от $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ следва $(x,y) \in A$.

χ_A е непрекъсната в (x_0, y_0).

• ако (x_0, y_0) е външна, то от $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ следва $(x,y) \notin A$.

χ_A е непрекъсната в (x_0, y_0).

$\Rightarrow \{(x,y) : \chi$ е непрекъсната$\} \subset \partial A \rightarrow$ от това, че има мярка нула дадено по условие

Тогава:

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \Delta \\ \chi_A \text{ ограничена} \\ \text{точки на прекъсване имат мярка нула} \end{array}\right\} \Rightarrow \chi_A \text{ е интегруема.}$$ #

~~[illegible]~~

7з. ДУ за равенство на смесените производни - Нека F има частни производни в околност на (x_0, y_0) и има втори частни производни $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ и те са непрекъснати в (x_0, y_0). Тогава $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ в точката (x_0, y_0). Д-во:

① Нека вземем върхове със знак +.

$$\Delta(x,y) = F(x,y) + F(x_0,y_0) - F(x_0,y) - F(x,y_0)$$

② Нека $\varphi(u) = F(u,y) - F(u,y_0)$. Тогава след като заместим получаваме: $\Delta(x,y) = \varphi(x) - \varphi(x_0)$

③ Очевидно $\varphi'(u) = \frac{\partial F}{\partial x}(u,y) - \frac{\partial F}{\partial x}(u,y_0)$

$$\Delta(x,y) = (x-x_0)\cdot \varphi'(x_0 + \theta_1(x-x_0)) =$$

$$= (x-x_0)\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0+\theta_1(x-x_0), y) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0+\theta_2(x-x_0), y_0)\right) \overset{(*)}{=}$$

Прилагаме отново Thm за крайните нараствания (*)

$$\overset{(*)}{=} (x-x_0)\cdot(y-y_0)\cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\left(x_0 + \theta_1(x-x_0), y_0 + \theta_2(y-y_0)\right),$$

където: $\begin{vmatrix} 0 < \theta_1 < 1 \\ 0 < \theta_2 < 1 \end{vmatrix}$.

④ Нека $\psi(u) = F(x,u) - F(x_0,u)$. Заместваме и получаваме: $\Delta(x,y) = \psi(y) - \psi(y_0)$

⑤ Знаем, че $\psi'(u) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,u) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,u)$

Прилагаме Thm за крайните нараствания и получаваме:

$$\Delta(x,y) = (y-y_0)\cdot\psi'(y_0 + \theta_3(y-y_0)) =$$

$$= (y-y_0)\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0+\theta_3(y-y_0)) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_3(y-y_0))\right) \overset{(**)}{=}$$

Прилагаме отново Thm за крайните нараствания. (**)

$$\overset{(**)}{=} (y-y_0)\cdot(x-x_0)\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\left(x_0+\theta_4(x-x_0), y_0+\theta_3(y-y_0)\right),$$

където: $\begin{vmatrix} 0 < \theta_3 < 1 \\ 0 < \theta_4 < 1 \end{vmatrix}$

⑥ Нека $(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)$ и $\begin{vmatrix} x \neq x_0, & x \to x_0 \\ y \neq y_0, & y \to y_0 \end{vmatrix}$.

Тогава следва, че:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \quad \#$$