Димитър Красимиров Калудов-II група fn:61348

Домашна работа 5

Задача 1.

$$\mathrm{f(x,y)} = ln\left(\frac{xy}{x^2-y^2}\right) = lnx + lny - \ln(x+y) - \ln(x-y)$$

$$Z'x = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$$

$$Z''xx = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$$

$$Z'''xxx = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+y)^3} - \frac{2}{(x-y)^3}$$

$$Z'''xxy = \frac{2}{(x+y)^3} - \frac{2}{(x-y)^3}$$

$$Z''xy = \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$$

$$\mathrm{Z'''xyy} = -\frac{2}{(x+y)^3} - \frac{2}{(x-y)^3}$$

$$Z'y = \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}$$

$$Z''yy = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2}$$

$$Z'''yyy = \frac{2}{y^3} + \frac{2}{(x+y)^3} - \frac{2}{(x-y)^3}$$

$$Z'''xxx + Z'''xxy - Z'''xyy - Z'''yyy = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+y)^3} - \frac{2}{(x-y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3} - \frac{2}{(x-y)^3} - \frac{2}{y^3} - \frac{2}{(x+y)^3} + \frac{2}{(x-y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3} + \frac{2}{(x-y)^3} = 2\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}\right)$$

Задача 2.

$u = xy^2z$

$v = xy^2 - xy^2z$

$w = y^2 - xy^2$

$$\begin{vmatrix} y^2z & 2xyz & y^2x \\ y^2(1-z) & 2xy(1-z) & -y^2x \\ -y^2 & 2y(1-x) & 0 \end{vmatrix} =$$

$= 2xyz * y^2x * y^2 + \ y^2 * xy^2(1-z) * 2y(1-x) +$

$+y^2x * 2xy(1-z) * y^2 + y^2x * 2y(1-x) * y^2z = 2xy^5$

Задача 3.

$F(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2 + 2xz + 2yz + ax + by + cz$

$U'_x = -2x + 2z + a$

$U'_y = -2y + 2z + b$

$U'_z = -2z + 2x + 2y + c$

$U''_{xx} = -2;\ \ U''_{xy} = 0;\ U''_{yy} = -2$

$U''_{xz} = 2;\ \ U''_{yz} = 2;\ U''_{zz} = -2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Знаците на детерминантите се менят както следва - , + , +

= > по Т. на гл.ас. Делев функцията няма екстремуми.

Задача 4.

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - y^2}\right)$$

ДС: $(\frac{x}{2} - y)(\frac{x}{2} + y) \geq 0$

Очевидно екстремумите на логаритъма и функцията в него съвпадат, така че е достатъчно да разгледаме:

$$Z(x,y) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - y^2}$$

$$\mathrm{Z'x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{4\sqrt{\frac{x^2}{4} - y^2}}$$

$$\mathrm{Z'y} = \frac{y}{\sqrt{\frac{x^2}{4} - y^2}}$$

Приравняваме частните производни на 0 и получаваме 3 подозрителни точки:

M(0;0); N ($\sqrt{\frac{1}{3}}; 0$); P ($-\sqrt{\frac{1}{3}}; 0$)

Заместваме с координатите и виждаме че в M получаваме е, а в N и P ~-0,12

= > в N и P имаме минимуми.

Проверяваме околността на M , в точката Q($\Delta x; 0$)

->$\sqrt{\Delta x^2+1} - \sqrt{\frac{\Delta x^2}{4} - y^2} \approx 1$

=> M е локален минимум.

Задача 5.

$f(x,y) = x^2 e^{-x^2-3x-4y^2}$

$\text{Z'x} = 2xe^{-x^2-3x-4y^2} + x^2(-2x-3)e^{-x^2-3x-4y^2}$

$\text{Z'y} = -8x^2ye^{-x^2-3x-4y^2}$

Намираме подозрителните точки M(- 2;0) и N($\frac{1}{2}$; 0), както и всички останали точки по Ox и всички точки по Oy. Очевидно имаме абсолютен минимум във всяка точка по Oy. Проверяваме по оста Ox:

$f(x) = x^2 e^{-x^2-3x}$

$\text{Z'x} = 2xe^{-x^2-3x} + x^2(-2x-3)e^{-x^2-3x}$

=> Че има максимум в - 2 и в $\frac{1}{2}$ и минимум в 0.

б) Функцията достига своя минимум във всяка точка от Oy и максимуми в (- 2;0)($\frac{1}{2}$; 0)

в) Най-малка стойност в R^2 е 0, а най-голяма стойност в R^2 е 4e^2.

а) Разглеждаме контура $x^2 + 4y^2 = 5$, разглеждаме функцията g(x)= x^2e^{5-3x}

g'(x)= $2xe^{5-3x} - 3x^2e^{-x^2-3x}$

намираме коререните x=$\frac{2}{3}$; $x = 0$

=>имаме минимуми за x=0 и y$\epsilon(-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2})$

И максимуми в ($\frac{2}{3}$;$\frac{\sqrt{41}}{6}$) и ($\frac{2}{3}$;$-\frac{\sqrt{41}}{6}$)