Фамил Фамилев Фн: 0MI06000H1.
Софтуерно инженерство, I курс.

Изпит част 4.

(10) Th. на Лайбниц-Нютон.

Нека f (функция) е непрекъсната в $[a,b]$. Тогава F е диференцируема и е в сила:

$$F'(x) = f(x) \quad \square$$

(11)
$$g(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Док., че $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, $x \in [0;2]$ няма производна за $x = 1$

Д-во. От Th. на Лайбниц-Нютон, за да има $G(x)$ произзводна, то тя трябва да е непрекъсната $g(x)$

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to 1^-} \ne \lim_{x \to 1^+}}_{\text{лявата и дясната са различни в } 1^+ \text{ и } 1^-} \Rightarrow g(x) \text{ е прекъсната в } 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow G(x)$ няма производна в $\underline{1}$

$\square$

(12) Първо док., че ако f е мон. намаляваща в $[a,b]$, то F е интегруема в $[a,b]$

1) $f(a) \geq f(x) \geq f(b)$

$$x_p = a - p\frac{a-b}{n}, \; p = \overline{1,n}$$

$$S(f,[a,b],\tilde{x}) - s(f,[a,b],\tilde{x}) =$$

$$= \sum_1^n M_p(x_{p-1} - x_p) - \sum_1^n m_p(x_{p-1} - x_p) =$$

$$= \frac{a-b}{n}\left(\sum_1^n f(x_{p-1}) - \sum_1^n f(x_p)\right) =$$

$$= \frac{(a-b)(f(a) - f(b))}{n} < \varepsilon.$$ Тогава $S(f,[a,b],\tilde{x}) - s(f,[a,b],\tilde{x}) < \varepsilon$

т.е. f е интегруема в $[a,b] \Rightarrow f(x)$ е ограничена в $[a,b]$, т.е. $\exists d$: $|f(x)| \leq d$

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt =$$

$$= \mu(x - x_0) \; (\mu \in [\inf(f(x)), \sup(f(x)), x \in [a,b]])$$

$$\lim F(x) - F(x_0) = \lim \mu(x - x_0) = \mu \lim(x - x_0) = 0$$

$\Rightarrow$ от Th. за средните стойности

f е непрекъсната в

=2=