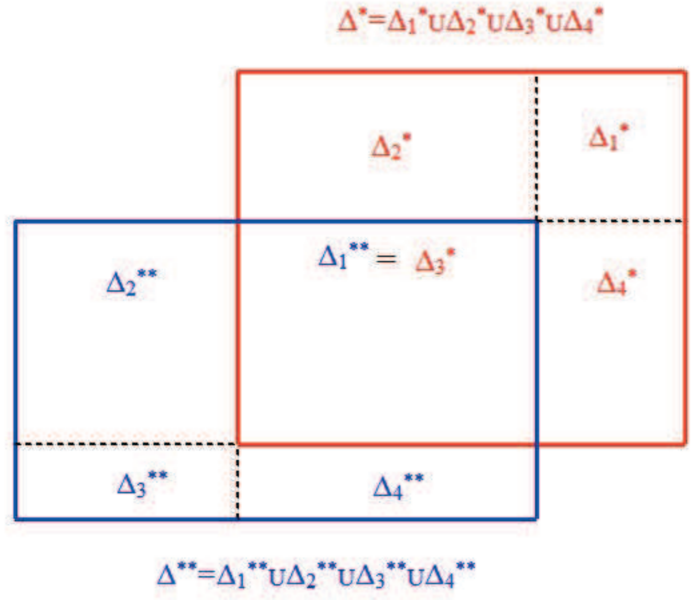
# 1 Двоен интеграл върху правоъгълник

## 1.1 Схема на Дарбу

### 1.1.1 Правоъгълник

- правоъгълник $\Delta = [a, b] \times [p, q]$, отворен правоъгълник $\Delta^0 = (a, b) \times (p, q)$
- лице $S(\Delta) = S\left(\Delta^0\right) = (b-a)(q-p)$, диаметър $d(\Delta) = d\left(\Delta^0\right) = \sqrt{(b-a)^2 + (q-p)^2}$
- разрязване $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \dots \ < x_n = b$ , $p = y_0 < y_1 < y_2 < \ \dots \ < y_k = q$ , означение $\tilde{x}, \tilde{y}$; $\quad \Delta_{i,\,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$
- диаметър на разрязването $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \max\limits_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le k} d(\Delta_{i,\,j})$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} S(\Delta_{i,\,j}) = S(\Delta)$
- по-дребно разрязване
- обединение на правоъгълници — представяне като „базисно“ обединение, което означава, че правите, на които лежат страните им, не пресичат други от тях във вътрешни точки




### 1.1.2 Суми на Дарбу

Нека $f$ е ограничена в правоъгълник $\Delta$. За разрязване $\tilde{x}, \tilde{y}$ определяме

- $m_{i,j} = \inf\{f(x, y) \,:\, (x, y) \in \Delta_{i,j}\}$

- $M_{i,\,j} = \sup\left\{f(x,\,y)\,:\,(x,\,y) \in \Delta_{i,\,j}\right\}$

- „малка“ сума на Дарбу $\mathbf{s}\left(f,\,\Delta,\,\tilde{x},\tilde{y}\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{i,\,j} S\left(\Delta_{i,\,j}\right)$

- „голяма“ сума на Дарбу $\mathbf{S}\left(f,\,\Delta,\,\tilde{x},\tilde{y}\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} M_{i,\,j} S\left(\Delta_{i,\,j}\right)$

- тривиално неравенство $\mathbf{s}\left(f,\,\Delta,\,\tilde{x},\tilde{y}\right) \le \mathbf{S}\left(f,\,\Delta,\,\tilde{x},\tilde{y}\right)$

### 1.1.3 Дефиниция на двоен интеграл върху правоъгълник

- малките суми нарастват
- големите суми намаляват
- $\mathbf{s}\left(f,\,\Delta,\,\tilde{x},\tilde{y}\right) \le \mathbf{S}\left(f,\,\Delta,\,\tilde{u},\tilde{v}\right)$ за всеки две $\tilde{x},\tilde{y}$ и $\tilde{u},\tilde{v}$
- $\underline{I} = \sup\limits_{\tilde{x},\tilde{y}} \mathbf{s}\left(f,\,\Delta,\,\tilde{x},\tilde{y}\right) \le \mathbf{S}\left(f,\,\Delta,\,\tilde{u},\tilde{v}\right)$ за всяко $\tilde{u},\tilde{v}$

- $\underline{I} \le \inf\limits_{\tilde{u},\tilde{v}} \mathbf{S}\,(f,\ \Delta,\ \tilde{u},\tilde{v}) = \overline{I}$

**Казваме, че ограничената в $\Delta$ функция $f$ е интегруема върху $\Delta$, ако $\underline{I} = \overline{I}$**

**Двоен интеграл върху правоъгълник – $\iint\limits_{\Delta} f(x,\,y)\,dxdy$ – единственото число между малките и големите суми на Дарбу**

### 1.1.4 Примери

1. $\chi_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$ не е интегруема върху никой правоъгълник
2. Константите са интегруеми върху всеки правоъгълник и $\iint\limits_{\Delta} C\,dxdy = CS(\Delta)$
3. „Стъпаловидните“ функции са интегруеми.
4. Необходимо и достатъчно условие за интегруемост

Ограничената в $\Delta$ функция $f$ е интегруема върху $\Delta$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ има разрязване $\tilde{x}, \tilde{y}$ на $\Delta$, за което
$\mathbf{S}\,(f,\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}) - \mathbf{s}\,(f,\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}) < \varepsilon$

## 1.2 Интегруеми функции

1. Нека за всяко $y \in [p,\, q]$ функцията $\varphi_y(x) = f(x,\, y)$ е монотонно растяща в $[a,\, b]$ и за всяко $x \in [a,\, b]$ функцията $\psi_x(y) = f(x,\, y)$ е монотонно растяща в $[p,\, q]$. Тогава $f$ е интегруема върху $\Delta = [a,\, b] \times [p,\, q]$.

*Доказателство:* Полагаме $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \ldots n$ и $y_j = p + j \cdot \dfrac{q-p}{n}$, $j = 0, 1, \ldots n$. Тогава $m_{i,j} = f(x_{i-1},\, y_{j-1})$, $M_{i,j} = f(x_i,\, y_j)$, $S(\Delta_{i,j}) = \dfrac{S(\Delta)}{n^2}$ и

$$\mathbf{S}\,(f,\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}) - \mathbf{s}\,(f,\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{S(\Delta)}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\, y_n) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_n,\, y_j) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i,\, y_0) - \sum_{j=1}^{n-1} f(x_0,\, y_j)\right) \leq$$
$$\leq \frac{(2n-1)S(\Delta)}{n^2}\,(f(x_n,\, y_n) - f(x_0,\, y_0))\ .$$

За $\varepsilon > 0$ е достатъчно да изберем $n$ толкова голямо, че $\dfrac{(2n-1)S(\Delta)}{n^2}\,(f(x_n,\, y_n) - f(x_0\, y_0)) < \varepsilon$.

## 2. Ако $f$ е непрекъсната в $\Delta = [a,\, b] \times [p,\, q]$, то $f$ е интегруема върху $\Delta$.

*Доказателство:* Съгласно теоремата за равномерна непрекъснатост, $f$ е равномерно непрекъсната върху $\Delta$. Следователно, за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, за което от $\sqrt{(x^{**} - x^*)^2 + (y^{**} - y^*)^2} < \delta$ следва $|f(x^*,\, y^*) - f(x^{**},\, y^{**})| < \dfrac{\varepsilon}{S(\Delta)}$. Избираме $n$ толкова голямо, че $\dfrac{\sqrt{(b-a)^2 + (q-p)^2}}{n} < \delta$. Полагаме $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$, $i = 0,\, 1,\, \ldots\, n$ и $y_j = p + j \cdot \dfrac{q-p}{n}$, $j = 0,\, 1,\, \ldots\, n$. Имаме $S(\Delta_{i,\,j}) = \dfrac{S(\Delta)}{n^2}$. От теоремата на Вайерщрас, $m_{i,\,j} = f(x_i^*,\, y_j^*)$, $(x_i^*,\, y_j^*) \in \Delta_{i,\,j}$ и $M_{i,\,j} = f(x_i^{**},\, y_j^{**})$, $(x_i^{**},\, y_j^{**}) \in \Delta_{i,\,j}$, откъдето $M_{i,\,j} - m_{i,\,j} < \dfrac{\varepsilon}{S(\Delta)}$. Следователно,

$$\mathbf{S}\,(f,\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}) - \mathbf{s}\,(f,\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{S(\Delta)}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (M_{i,\,j} - m_{i,\,j}) < \frac{S(\Delta)}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{S(\Delta)} = \varepsilon\,.$$

## 3. Ако $f$ е ограничена в $\Delta$ и точките на прекъсване на $f$ са множество с мярка $0$ в смисъл на Пеано-Жордан, то $f$ е интегруема върху $\Delta$.

*Доказателство:* Нека $\mathcal{A}$ е множеството от точки на прекъсване $f$, $M = \sup\{|f(x,\, y)| \,:\, (x,\, y) \in \Delta\}$. За $\varepsilon > 0$ избираме краен брой правоъгълници $\Delta_1^*,\, \Delta_2^* \,\ldots\, \Delta_l^*$, за които точките на $\mathcal{A}$ са вътрешни за $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{s=1}^{l} \Delta_s^*$, $\sum_{s=1}^{l} S(\Delta_s^*) < \frac{\varepsilon}{4M}$ и които образуват „базисно“ обединение със страни върху правите $x = x_s^*$, $y = y_s^*$. Множеството $\mathcal{C} = (\Delta \setminus \mathcal{B}) \cup \partial\mathcal{B}$ е ограничено и затворено и $f$ е непрекъсната в него. Съгласно теоремата за равномерна непрекъснатост, $f$ е равномерно непрекъсната върху $\mathcal{C}$. Следователно, съществува $\delta > 0$, за което от $\sqrt{(x^{**} - x^*)^2 + (y^{**} - y^*)^2} < \delta$ следва $|f(x^*,\, y^*) - f(x^{**},\, y^{**})| < \dfrac{\varepsilon}{2S(\Delta)}$. Избираме $n$ толкова голямо, че $\dfrac{\sqrt{(b-a)^2 + (q-p)^2}}{n} < \delta$. Полагаме $x_i^{**} = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$, $i = 0,\, 1,\, \ldots\, n$ и $y_j^{**} = p + j \cdot \dfrac{q-p}{n}$, $j = 0,\, 1,\, \ldots\, n$.

За всеки правоъгълник $\Delta_{i,\,j}$ от разделянето $\tilde{x} = \widetilde{x^*} \cup \widetilde{x^{**}}$, $\tilde{y} = \widetilde{y^*} \cup \widetilde{y^{**}}$ имаме точно две възможности:

1. $\Delta_{i,j} \subset \mathcal{B}$, тогава $M_{i,j} - m_{i,j} \le 2M$ и

$$\sum_{\Delta_{i,j} \subset \mathcal{B}} (M_{i,j} - m_{i,j})\, S(\Delta_{i,j}) \le 2M \sum_{\Delta_{i,j} \subset \mathcal{B}} S(\Delta_{i,j}) = 2M \sum_{s=1}^{l} S(\Delta_s^*) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

2. $\Delta_{i,j} \subset \mathcal{C}$, тогава $M_{i,j} - m_{i,j} < \dfrac{\varepsilon}{2S(\Delta)}$ и

$$\sum_{\Delta_{i,j} \subset \mathcal{C}} (M_{i,j} - m_{i,j})\, S(\Delta_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{2S(\Delta)} \sum_{\Delta_{i,j} \subset \mathcal{C}} S(\Delta_{i,j}) \le \frac{\varepsilon n^2}{2S(\Delta)} \cdot \frac{S(\Delta)}{n^2} = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Окончателно,

$$\mathbf{S}\,(f,\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}) - \mathbf{s}\,(f,\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}) \;=\; \sum_{\Delta_{i,j} \subset \mathcal{B}} (M_{i,j} - m_{i,j})\, S(\Delta_{i,j}) \;+\; \sum_{\Delta_{i,j} \subset \mathcal{C}} (M_{i,j} - m_{i,j})\, S(\Delta_{i,j}) \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

## 1.3 Множества с мярка 0 в смисъл на Пеано-Жордан

Нека $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ е ограничено. Казваме, че $\mathcal{A}$ има мярка 0 в смисъл на Пеано-Жордан, ако за всяко $\varepsilon > 0$ има краен брой правоъгълници $\Delta_1,\ \Delta_2\ \ldots\ \Delta_l$, за които $\mathcal{A} \subset \bigcup\limits_{s=1}^{l} \Delta_s$ и $\sum\limits_{s=1}^{l} S(\Delta_s) < \varepsilon$.

Свойства

1. Ако $\mathcal{A}$ има мярка 0 в смисъл на Пеано-Жордан, правоъгълниците $\Delta_1,\ \Delta_2\ \ldots\ \Delta_l$ могат да бъдат избрани така, че

   - точките на $\mathcal{A}$ да са вътрешни за $\bigcup\limits_{s=1}^{l} \Delta_s$
   - образуват „базисно“ обединение

2. Ако $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ и $\mathcal{B}$ има мярка 0 в смисъл на Пеано-Жордан, то и $\mathcal{A}$ има мярка 0 в смисъл на Пеано-Жордан.

3. Ако $\mathcal{A}_s,\ 1 \leq s \leq l$ имат мярка 0 в смисъл на Пеано-Жордан, то и $\bigcup\limits_{s=1}^{l} \mathcal{A}_s$ има мярка 0 в смисъл на Пеано-Жордан.

4. Нека $\varphi(t),\ \ \psi(t)$ са непрекъснати в интервал $[u,\ v]$, като едната от тях има ограничена производна в $(u,\ v)$. Тогава множеството $\Gamma = \{(\varphi(t),\ \psi(t))\ :\ t \in [u,\ v]\}$ има мярка 0 в смисъл на Пеано-Жордан.

## 1.4 Дефиниция на Риман

### 1.4.1 Необходимо и достатъчно условие за интегруемост II

Ограничената в $\Delta$ функция $f$ е интегруема върху $\Delta$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ има $\delta > 0$ такова, че за всяко разрязване $\tilde{x}, \tilde{y}$ на $\Delta$, за което $d\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) < \delta$ , изпълнено

$$\mathbf{S}\left(f,\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}\right) - \mathbf{s}\left(f,\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}\right) < \varepsilon$$

### 1.4.2 Риманови суми

Нека $f$ е дефиниранана в правоъгълник $\Delta$. За разрязване $\tilde{x}, \tilde{y}$ и $(u_i,\ v_j) \in \Delta_{i,\,j}$ полагаме

$$\mathbf{R}\left(f,\ \Delta,\ \left(\tilde{x}, \tilde{y}\right), \left(\tilde{u}, \tilde{v}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} f\left(u_i,\ v_j\right) S(\Delta_{i,\,j})$$

Очевидно неравенство:

$$\mathbf{s}\left(f,\ \Delta,\ \left(\tilde{x}, \tilde{y}\right)\right) \leq \mathbf{R}\left(f,\ \Delta,\ \left(\tilde{x}, \tilde{y}\right), \left(\tilde{u}, \tilde{v}\right)\right) \leq \mathbf{S}\left(f,\ \Delta,\ \left(\tilde{x}, \tilde{y}\right)\right)$$

#### 1.4.3 Дефиниция

Казваме, че функцията $f$ е интегруема върху $\Delta$, ако съществува число $I$ такова, че за всяко $\varepsilon > 0$ има $\delta > 0$, за което

$$\left|\mathbf{R}\left(f,\ \Delta,\ \left(\tilde{x},\tilde{y}\right),\left(\tilde{u},\tilde{v}\right)\right)\ -\ I\right| < \varepsilon$$

за всяко разрязване $\tilde{x}, \tilde{y}$ с $d(\tilde{x}, \tilde{y}) < \delta$ и всеки набор $(u_i,\ v_j) \in \Delta_{i,\,j}$.

**Двете дефиниции са еквивалентни.**

### 1.5 Свойства

#### 1.5.1 Линейност

1. $$\iint\limits_{\Delta} \left(f(x,y) + g(x,y)\right) dxdy\ =\ \iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy\ +\ \iint\limits_{\Delta} g(x,y)dxdy$$

2. $$\iint\limits_{\Delta} Cf(x,y)dxdy\ =\ C\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy$$

### 1.5.2 Позитивност

$$f(x,y) \geq 0 \;\Rightarrow\; \iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy \;\geq\; 0$$

### 1.5.3 Адитивност

1. Нека правоъгълникът $\Delta$ е разрязан (с вертикална или хоризонтална права) на два правоъгълника $\Delta_1$ и $\Delta_2$. Тогава
$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy \;=\; \iint\limits_{\Delta_1} f(x,y)dxdy \;+\; \iint\limits_{\Delta_2} f(x,y)dxdy$$

2. За всяко разрязване $\tilde{x}, \tilde{y}$
$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\iint\limits_{\Delta_{i,\,j}} f(x,y)dxdy$$

### 1.5.4 Интегруемост на модула

Ако $f(x, y)$ е интегруема върху $\Delta$, то $|f(x, y)|$ е интегруема върху $\Delta$.

### 1.5.5 Интегруемост на произведение

Ако $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми върху $\Delta$, то $f(x, y).g(x, y)$ е интегруема върху $\Delta$.

## 1.6 Представяне на двоен интеграл като повторни

### 1.6.1 Теорема

Нека $f(x, y)$ е интегруема върху правоъгълника $\Delta = [a,\ b] \times [p,\ q]$ и за всяко $x \in [a,\ b]$ функцията $\psi_x(y) = f(x,\ y)$ е интегруема в $[p,\ q]$. Тогава функцията $\varphi(x) = \int\limits_p^q \psi_x(y)dy$ е интегруема в $[a,\ b]$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \iint\limits_\Delta f(x, y)dxdy$ .

### 1.6.2 Доказателство

Нека $\tilde{x}, \tilde{y}$ е разрязване на $\Delta$ и $(x,\, y) \in \Delta_{i,\,j}$ . Тогава $m_{i,\,j} \;\leq\; f(x,\, y) \;\leq\; M_{i,\,j}$ . След интегриране, получаваме

$$m_{i,\,j}\,(y_j - y_{j-1}) \;\leq\; \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,\, y)\, dy \;\leq\; M_{i,\,j}\,(y_j - y_{j-1}) \quad .$$

Следователно,

$$\sum_{j=1}^{l} m_{i,\,j}\,(y_j - y_{j-1}) \;\leq\; \int\limits_{p}^{q} f(x,\, y)\, dy \;\leq\; \sum_{j=1}^{l} M_{i,\,j}\,(y_j - y_{j-1}) \quad ,$$

което означава, че $\varphi(x)$ е ограничена във всеки един от интервалите $[x_{i-1},\, x_i]$ (а значи и в $[a,\, b]$ ) и

$$\sum_{j=1}^{l} m_{i,\,j}\,(y_j - y_{j-1}) \;\leq\; m_i^{\varphi} = \inf\{\varphi(x)\,:\, x \in [x_{i-1},\, x_i]\} \;\leq$$

$$\leq\; \sup\{\varphi(x)\,:\, x \in [x_{i-1},\, x_i]\} = M_i^{\varphi} \;\leq\; \sum_{j=1}^{l} M_{i,\,j}\,(y_j - y_{j-1}) \quad .$$

След умножаване с $x_i - x_{i-1} > 0$ и сумиране по $i$ получаваме

$$\mathbf{s}\,(f,\ \Delta,\ (\tilde{x},\tilde{y})) \le \mathbf{s}\,(\varphi,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) \le \mathbf{S}\,(\varphi,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) \le \mathbf{S}\,(f,\ \Delta,\ (\tilde{x},\tilde{y}))$$

За $\varepsilon > 0$ избираме разрязване $\tilde{x},\tilde{y}$ на $\Delta$ с $\mathbf{S}\,(f,\ \Delta,\ (\tilde{x},\tilde{y})) - \mathbf{s}\,(f,\ \Delta,\ (\tilde{x},\tilde{y})) < \varepsilon$. Тогава $\mathbf{S}\,(\varphi,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) - \mathbf{s}\,(\varphi,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) \le \mathbf{S}\,(f,\ \Delta,\ (\tilde{x},\tilde{y})) - \mathbf{s}\,(f,\ \Delta,\ (\tilde{x},\tilde{y})) < \epsilon$, което означава, $\varphi(x)$ е интегруема в $[a,\,b]$. За всяко разрязване $\tilde{x},\tilde{y}$ на $\Delta$ е изпълнено

$$\mathbf{s}\,(f,\ \Delta,\ (\tilde{x},\tilde{y})) \le \mathbf{s}\,(\varphi,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) \le \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \le \mathbf{S}\,(\varphi,\ [a,\,b],\ \tilde{x}) \le \mathbf{S}\,(f,\ \Delta,\ (\tilde{x},\tilde{y}))\ .$$

Следователно, $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \iint\limits_\Delta f(x,y)dxdy$ , защото $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ е между малките и големите суми на Дарбу за $f(x,\,y)$ в $\Delta$, а $\iint\limits_\Delta f(x,y)dxdy$ е единственото такова число.

### 1.6.3 Пример

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \frac{dxdy}{x+y+1} = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \frac{dy}{x+y+1}\right) dx = \int\limits_0^1 \left(\ln(x+2) - \ln(x+1)\right) dx =$$

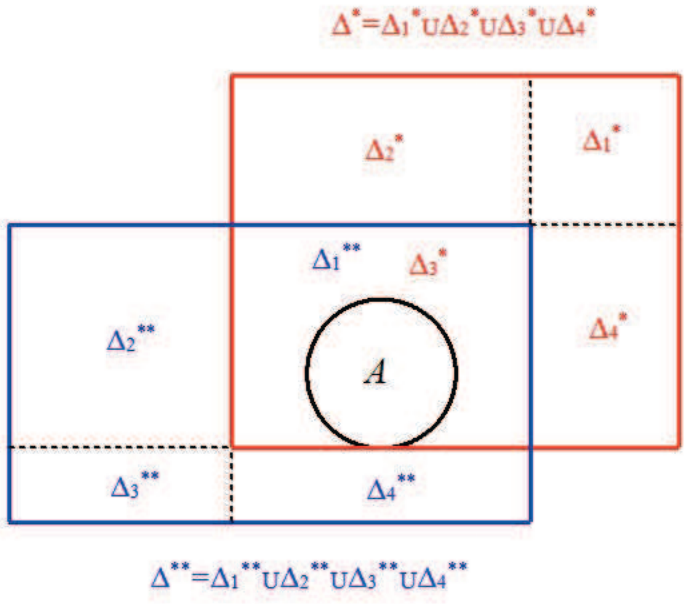
$$= \ln\frac{3}{2} - \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{x+2} - \frac{x}{x+1}\right) dx = \ln\frac{3}{2} + \int\limits_0^1 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \ln\frac{27}{16} \quad .$$

# 2 Измерими множества

## 2.1 Дефиниция

Нека $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ е ограничено. Казваме, че $\mathcal{A}$ е измеримо (има лице) в смисъл на Пеано-Жордан, ако съществува правоъгълник $\Delta$, за който $\mathcal{A} \subset \Delta$ и $\chi_{\mathcal{A}}$ е интегруема върху $\Delta$.

**Интегруемостта и стойността на интеграла не зависят от $\Delta$.**



Съгласно адитивността на двойния интеграл върху правоъгълник, $\chi_{\mathcal{A}}$ е интегруема върху $\Delta^*$ $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}$ е интегруема върху $\Delta^* \cap \Delta^{**}$ $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}$ е интегруема върху $\Delta^{**}$ и

$$\iint\limits_{\Delta^*} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta^* \cap \Delta^{**}} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta^{**}} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)dxdy\,.$$

Полагаме $S(\mathcal{A}) = \iint\limits_{\Delta} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)dxdy\,.$

## 2.2 Примери

1. Правоъгълникът $\Delta = [a,\ b] \times [p,\ q]$ има лице $(b-a)(q-p)$ (т.е. същото, което е постулирано по-рано).

   Наистина, $\Delta \subset \Delta$ и $\iint\limits_{\Delta} \chi_{\Delta}(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} 1dxdy = (b-a)(q-p)\,.$

2. Триъгълникът със страни върху правите $y = 0$, $y = kx$ $(k > 0)$ и $x = 1$ има лице $\dfrac{k}{2}$.

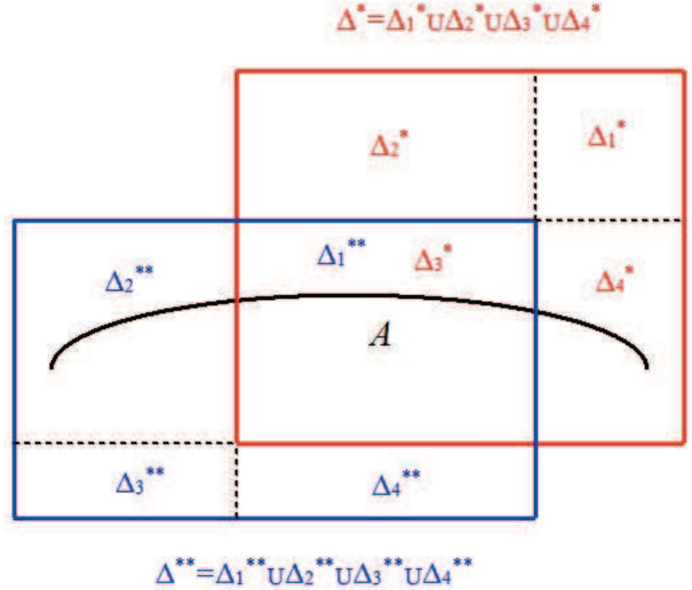
3. $\mathcal{A}$ има мярка 0 в смисъл на Пеано-Жордан тогава и само тогава, когато $S(\mathcal{A}) = 0$.

*Доказателство:* Нека $\mathcal{A}$ има мярка 0 и $\varepsilon > 0$, $\mathcal{A} \subset \Delta$. Избираме краен брой правоъгълници $\Delta_1$, $\Delta_2$ ... $\Delta_l$, за които $\mathcal{A} \subset \bigcup\limits_{s=1}^{l} \Delta_s$, точките на $\mathcal{A}$ да са вътрешни за $\bigcup\limits_{s=1}^{l} \Delta_s$, правите, на които лежат страните им, не пресичат други от тях във вътрешни точки и $\sum\limits_{s=1}^{l} S(\Delta_s) < \varepsilon$.

За разделянето на $\Delta$, определено от страните на тези правоъгълници и функцията $\chi_{\mathcal{A}}$ имаме:

$M_{i\,j} \le 1$ когато $\Delta_{i\,j} \subset \bigcup\limits_{s=1}^{l} \Delta_s$ и $M_{i\,j} = 0$ в противен случай. Следователно,

$$\mathbf{S}(\chi_{\mathcal{A}},\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}) - \mathbf{s}(\chi_{\mathcal{A}},\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}) \le \mathbf{S}(\chi_{\mathcal{A}},\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}) \le \sum_{s=1}^{l} S(\Delta_s) < \varepsilon .$$

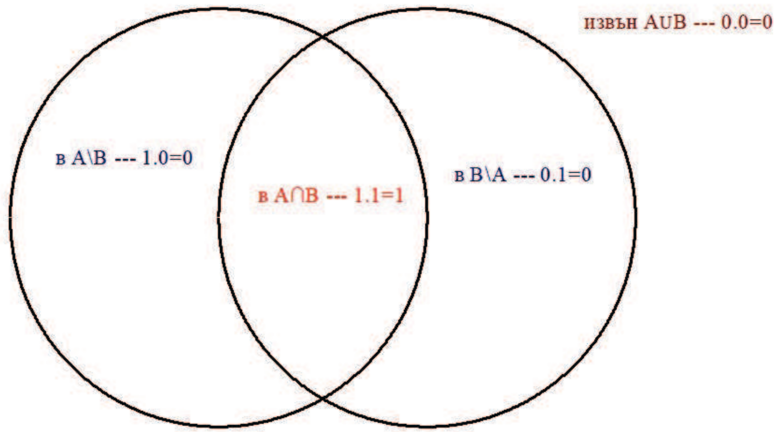



Обратно, нека $0 = S(\mathcal{A}) = \iint\limits_{\Delta} \chi_{\mathcal{A}}(x,y)dxdy$. За $\varepsilon > 0$ има разделяне на $\Delta$, за което $\mathbf{S}\,(\chi_{\mathcal{A}},\ \Delta,\ \tilde{x},\tilde{y}) < \varepsilon$. Имаме $M_{i\,j} = 1$ когато $\Delta_{i\,j} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ и $M_{i\,j} = 0$ в противен случай, т.е. правоъгълниците с $\Delta_{i\,j} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ покриват $\mathcal{A}$ и сумарното им лице е по-малко от $\varepsilon$.

## 2.3 Свойства

1. Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са измерими в смисъл на Пеано-Жордан, то $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ е измеримо.

Следва от равенството $\chi_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} = \chi_{\mathcal{A}} . \chi_{\mathcal{B}}$ и факта, че произведение на интегруеми функции е интегруема функция.

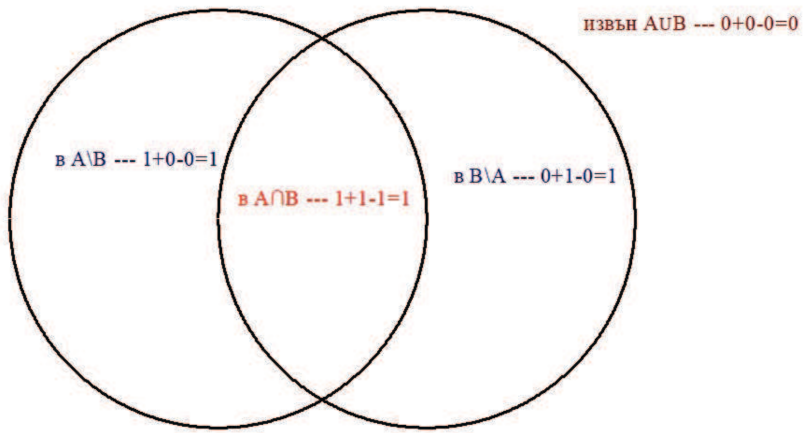



2. Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са измерими в смисъл на Пеано-Жордан, то $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ е измеримо и

$S(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B}) - S(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ .

Ако $S(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 0$ , то $S(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = S(\mathcal{A}) + S(\mathcal{B})$ .

Следва от равенството $\chi_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} = \chi_{\mathcal{A}} + \chi_{\mathcal{B}} - \chi_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}$ и линейността.




3. $\mathcal{A}$ е измеримо в смисъл на Пеано-Жордан тогава и само тогава, когато множеството от граничните точки $\partial\mathcal{A}$ има мярка 0 в смисъл на Пеано-Жордан ($S\,(\partial\mathcal{A}) = 0\,$).

*Доказателство:* Нека $\mathcal{A}$ е измеримо, $\mathcal{A} \subset \Delta$ и $\varepsilon > 0$. Съществува разрязване $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ на $\Delta$, за което $\mathbf{S}\,(\chi_{\mathcal{A}},\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}) - \mathbf{s}\,(\chi_{\mathcal{A}},\ \Delta,\ \tilde{x}, \tilde{y}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, или $\displaystyle\sum_{m_{i,j}=0, M_{i,j}=1} S(\Delta_{i,\,j}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Нека $h = \dfrac{\varepsilon}{4(k(b-a)+n(q-p))}$. Разглеждаме правоъгълниците

- $\Delta_i^* = [x_i - h,\, x_i + h] \times [p,\, q]$, вместо $x_0 - h$ вземаме $x_0$, вместо $x_n + h$ вземаме $x_n$.
- $\Delta_j^{**} = [a,\, b] \times [y_j - h,\, y_j + h]$, вместо $y_0 - h$ вземаме $y_0$, вместо $y_k + h$ вземаме $y_k$.

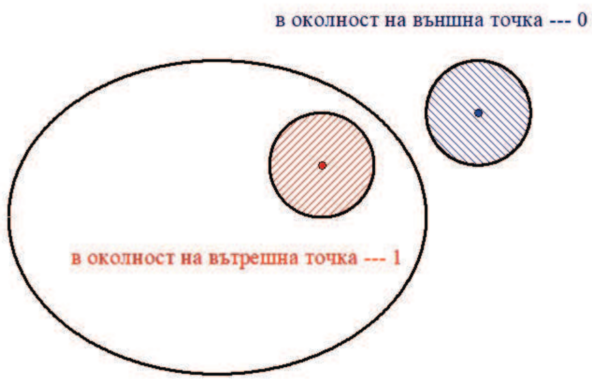
За правоъгълниците $\Delta_{i,\,j}$, $m_{i,j} = 0$, $M_{i,j} = 1$, $\Delta_i^*$, $0 \le i \le n$, $\Delta_j^{**}$, $0 \le j \le k$ имаме

- сумарно лице по-малко от $\varepsilon$.
- $\partial\mathcal{A} \subset \displaystyle\bigcup_{m_{i,j}=0, M_{i,j}=1} \Delta_{i,\,j} \cup \bigcup_{i=0}^{n} \Delta_i^* \cup \bigcup_{j=0}^{k} \Delta_j^{**}$.

  Ако $(x,\, y) \in \partial\mathcal{A}$ и $(x,\, y) \notin \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} \Delta_i^* \cup \bigcup_{j=0}^{k} \Delta_j^{**}$, то $(x,\, y)$ е вътрешна за някой правогълник $\Delta_{i,\,j}$. За него $m_{i,j} = 0$, $M_{i,j} = 1$.

Следователно, $\partial\mathcal{A}$ има мярка 0 в смисъл на Пеано-Жордан.

Обратното се получава от факта, че точките на прекъсване на $\chi_{\mathcal{A}}$ са $\partial\mathcal{A}$ и достатъчното условие зи интегруемост върху правоъгълник.




### 2.4 „Класическа“ дефиниция

- Лице на правоъгълник $\Delta = [a,\, b] \times [p,\, q]$, $\Delta^0 = (a,\, b) \times (p,\, q)$,
$S\,(\Delta) = S\left(\Delta^0\right) = (b-a)(q-p)$

- „Елементарна“ фигура $\Phi = \bigcup\limits_{s=1}^{m} \Delta_s$, $\Delta_i^0 \cap \Delta_j^0 = \varnothing$ за $i \neq j$, $S(\Phi) = \sum\limits_{s=1}^{m} S(\Delta_s)$
Можем да предполагаме, че правите, на които лежат страните съставящите правоъгълници, не пресичат други от тях във вътрешни точки.

- Вписани и описани „елементарни“ фигури

$$\Phi_{in} \subset \mathcal{A} \subset \Phi_{out} \;\Rightarrow\; S(\Phi_{in}) \leq S(\Phi_{out})$$

- $\underline{\mu}\,(\mathcal{A}) = \sup S(\Phi_{in}) \leq \inf S(\Phi_{out}) = \overline{\mu}\,(\mathcal{A})$
- $\mathcal{A}$ се нарича измеримо, ако $\underline{\mu}\,(\mathcal{A}) = \overline{\mu}\,(\mathcal{A})$

# 3 Двоен интеграл върху измеримо множество

## 3.1 Дефиниция

Нека $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ е ограничено. За $f(x,\, y)$, дефинирана в $\mathcal{A}$, полагаме

$$f_{\mathcal{A}}(x,\, y) = \begin{cases} f(x,\, y) & \text{за } (x,\, y) \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{за } (x,\, y) \notin \mathcal{A} \end{cases} \quad \text{( „неформално“} \quad f_{\mathcal{A}}(x,\, y) = \chi_{\mathcal{A}}(x,\, y).f(x,\, y)) \ .$$

Казваме, че $f(x,\, y)$ е интегруема върху $\mathcal{A}$, ако съществува правоъгълник $\Delta$, за който $\mathcal{A} \subset \Delta$ и $f_{\mathcal{A}}(x,\, y)$ е интегруема върху $\Delta$.

Интегруемостта и стойността на интеграла не зависят от $\Delta$.

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} f_{\mathcal{A}}(x,y)dxdy$$

## 3.2 Свойства

1. Нека $\mathcal{A}$ е измеримо и затворено, $f(x,y)$ е непрекъсната в $\mathcal{A}$. Тогава $f(x,y)$ е интегруема върху $\mathcal{A}$.


$\mathcal{A}$ е измеримо, значи ограничено. Следователно, $f(x,y)$ е ограничена върху $\mathcal{A}$, т.е. $f_{\mathcal{A}}(x,\, y)$ е ограничена. Точките на прекъсване на $f_{\mathcal{A}}$ се съдържат в $\partial\mathcal{A}$, което е достатъчно за интегруемостта.

2. Нека $\mathcal{A}$ е измеримо и $f(x,y)$ е интегруема върху $\mathcal{A}$. Тогава

$$\inf_{(x,y)\in\mathcal{A}} f(x,y)\,.\,S(\mathcal{A}) \le \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)dxdy \le \sup_{(x,y)\in\mathcal{A}} f(x,y)\,.\,S(\mathcal{A})\;.$$

Ако $S(\mathcal{A}) = 0$ , то $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)dxdy = 0$ .

3. Линейност

- $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{A}} \left(f(x,y) + g(x,y)\right) dxdy \;=\; \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)dxdy \;+\; \iint\limits_{\mathcal{A}} g(x,y)dxdy$
- $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{A}} Cf(x,y)dxdy \;=\; C\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)dxdy$

4. Позитивност

$f(x,y) \ge 0 \;\Rightarrow\; \displaystyle\iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)dxdy \;\ge\; 0$

5. Адитивност

Нека $f(x,y)$ е интегруема върху $\mathcal{A}$ и върху $\mathcal{B}$. Тогава $f(x,y)$ е интегруема върху $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ и върху $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ и

$$\iint\limits_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\mathcal{B}} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}} f(x,y)dxdy\ .$$

Ако $S\left(\mathcal{A}\cap\mathcal{B}\right)=0$, то

$$\iint\limits_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\mathcal{A}} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\mathcal{B}} f(x,y)dxdy$$

Наистина, $f_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}=f_{\mathcal{A}}.\chi_{\mathcal{B}}$ и $f_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}}=f_{\mathcal{A}}+f_{\mathcal{B}}-f_{\mathcal{A}\cap\mathcal{B}}$ .

6. Интегруемост на модула

Ако $f(x,y)$ е интегруема върху $\mathcal{A}$, то $|f(x,y)|$ е интегруема върху $\mathcal{A}$.

7. Интегруемост на произведение

Ако $f(x,y)$ и $g(x,y)$ са интегруеми върху $\mathcal{A}$, то $f(x,y).g(x,y)$ е интегруема върху $\mathcal{A}$.

# 4 Пресмятане на двойни интеграли

## 4.1 Представяне на двоен интеграл като повторни

### 4.1.1 Криволинеен трапец

Нека $\varphi$ и $\psi$ са непрекъснати в $[a, b]$, $\varphi(x) \le \psi(x)$ за всяко $x \in [a, b]$. Множеството

$$\mathcal{T} = \begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \end{cases}$$

се нарича криволинеен трапец (с основи, успоредни на ординатната ос).

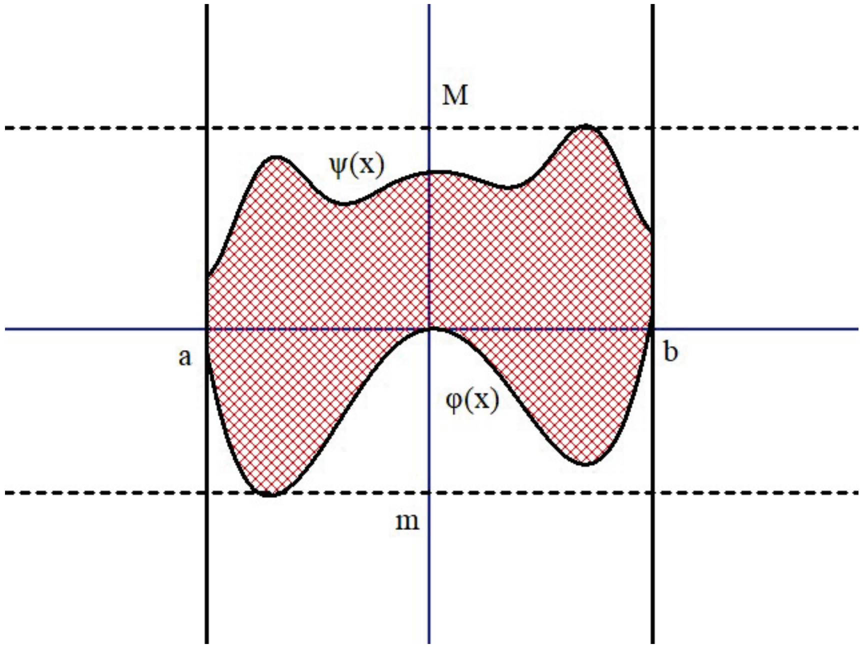
### 4.1.2 Твърдение

Нека $f(x, y)$ е непрекъсната в $\mathcal{T}$. Тогава

$$\iint\limits_{\mathcal{T}} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

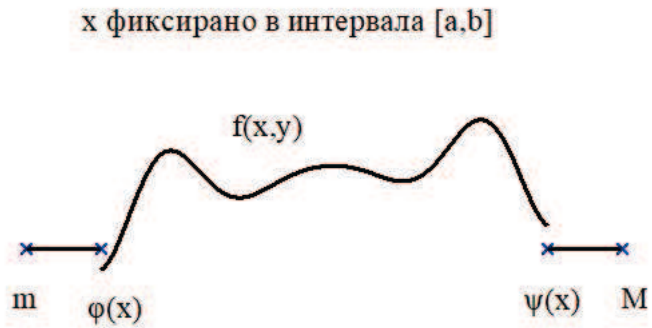
*Доказателство:* Криволинейният трапец $\mathcal{T}$ е измеримо множество, защото $\partial\mathcal{T}$ е обединение на графиките $\{(x,\,\varphi(x))\,:\,x\in[a,\,b]\}$, $\{(x,\,\psi(x))\,:\,x\in[a,\,b]\}$ и отсечките $\{x=a,\,\varphi(a)\le y\le\psi(a)\}$, $\{x=b,\,\varphi(b)\le y\le\psi(b)\}$. Понеже $\mathcal{T}$ е затворено, а $f(x,y)$ е непрекъсната в него, то $f(x,y)$ е интегруема върху $\mathcal{T}$. Нека $m=\min\{\varphi(x)\,:\,x\in[a,\,b]\}$, $M=\max\{\psi(x)\,:\,x\in[a,\,b]\}$ и $\Delta=[a,\,b]\times[m,\,M]$.

$f_{\mathcal{T}}$ е интегруема върху $\Delta$, а за всяко фиксирано $x\in[a,\,b]$ функцията $f(x,y)$ има най-много две точки на прекъсване и е ограничена.



Имаме

$$\iint\limits_{\mathcal{T}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} f_{\mathcal{T}}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left( \int\limits_m^M f_{\mathcal{T}}(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx \ ,$$




защото

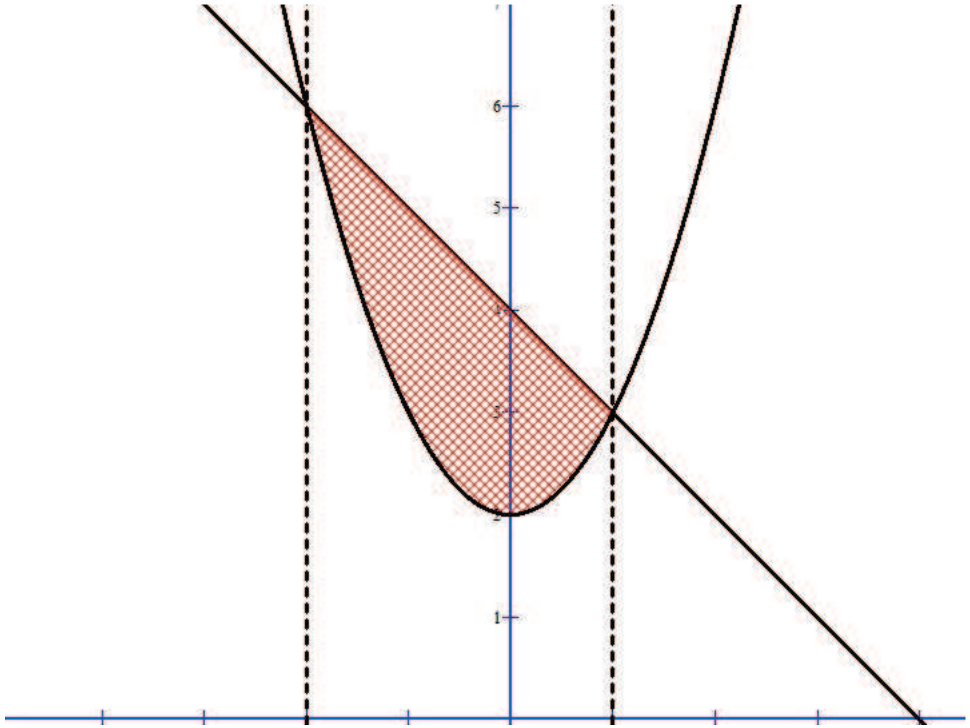
$$\int_m^M f_{\mathcal{T}}(x,y)dy = \int_m^{\varphi(x)} 0dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy + \int_{\psi(x)}^M 0dy$$

### 4.1.3 Примери

1. Пресметнете двойния интеграл: $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x^2}{(x+y)^2}\,dxdy$ , където $D$ е множеството, определено от неравенствата $y \geq x^2 + 2$ и $y \leq 4 - x$ .

*Решение :* Представяме $D$ като криволинеен трапец.
$D = \left\{-2 \leq x \leq 1\,,\ x^2 + 2 \leq y \leq 4 - x\right\}$. Имаме:

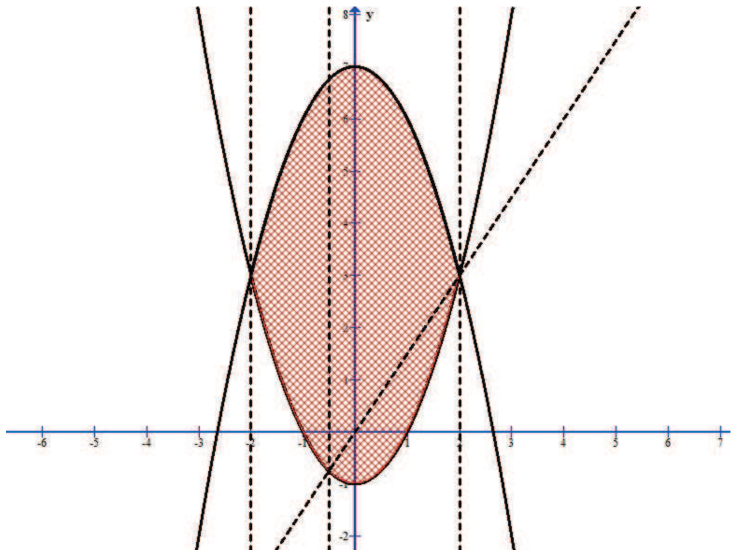
$$\iint\limits_D \frac{x^2}{(x+y)^2}\,dxdy = \int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2+2}^{4-x} \frac{x^2\,dy}{(x+y)^2}\right)dx = \int_{-2}^{1}\left(-\frac{x^2}{x^2+x+2} + \frac{x^2}{4}\right)dx = \ldots$$




2. Пресметнете двойния интеграл: $\displaystyle\iint\limits_D |3x - 2y| \; dxdy$ , където $D$ е множеството, ограничено от параболите $y = x^2 - 1$ и $y = 7 - x^2$ .

*Решение :* За да се освободим от модула, представяме $D$ като обединение на криволинейни трапеци. $D = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ , където

$$T_1 = \begin{cases} -2 \leq x \leq -\dfrac{1}{2} \\ x^2 - 7 \leq y \leq 1 - x^2 \end{cases}, \quad T_2 = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ x^2 - 7 \leq y \leq \dfrac{3x}{2} \end{cases}, \quad T_3 = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ \dfrac{3x}{2} \leq y \leq 1 - x^2 \end{cases}.$$



Следователно

$$\iint\limits_{D} |3\,x\ -2\,y\,|\ dxdy = \iint\limits_{T_1} |3\,x\ -2\,y\,|\ dxdy + \iint\limits_{T_2} |3\,x\ -2\,y\,|\ dxdy + \iint\limits_{T_3} |3\,x\ -2\,y\,|\ dxdy\ =$$

$$= \int\limits_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left( \int\limits_{x^2-7}^{1-x^2} (-3x+2y)\,dy \right) dx\ + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{2} \left( \int\limits_{x^2-7}^{\frac{3x}{2}} (3x-2y)\,dy \right) dx\ + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{2} \left( \int\limits_{\frac{3x}{2}}^{1-x^2} (-3x+2y)\,dy \right) dx\ =$$

$$= \int\limits_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left(-\,3x\left(8-2x^2\right) + \left(1-x^2\right)^2 - \left(x^2-7\right)^2\right) dx\ + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{2} \left(3x\left(\frac{3x}{2}+7-x^2\right) - \left(\frac{3x}{2}\right)^2 + \left(x^2-7\right)^2\right) dx\ +$$

$$+ \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{2} \left(-3x\left(1-x^2-\frac{3x}{2}\right) + \left(1-x^2\right)^2 - \left(\frac{3x}{2}\right)^2\right) dx\ =\ \ldots$$

## 4.2 Смяна на променливите

### 4.2.1 Формулировка

1. $f(x, y)$ е непрекъсната в измеримо и затворено множество $D$

2. $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi : \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$ е изображение, дефинирано в отворено множество $W$, за което

   - $\Phi$ има непрекъснати частни производни в $W$
   - $\Phi$ е обратимо в $W$
   - $J_\Phi(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ в $W$

3. $D^* = \{(u, v) \in W : \Phi(u, v) \in D\}$

Тогава

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\varphi(u, v), \psi(u, v))\, |J_\Phi(u, v)|\, dudv$$

### 4.2.2 Коментари

1. Необратимо изображение с ненулев якобиян

Изображението $\Phi \ : \begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{cases}$ има навсякъде непрекъснати производни, $J_\Phi(u,\, v) = e^{2u} > 0$, но не е обратимо.

2. За една променлива няма модул

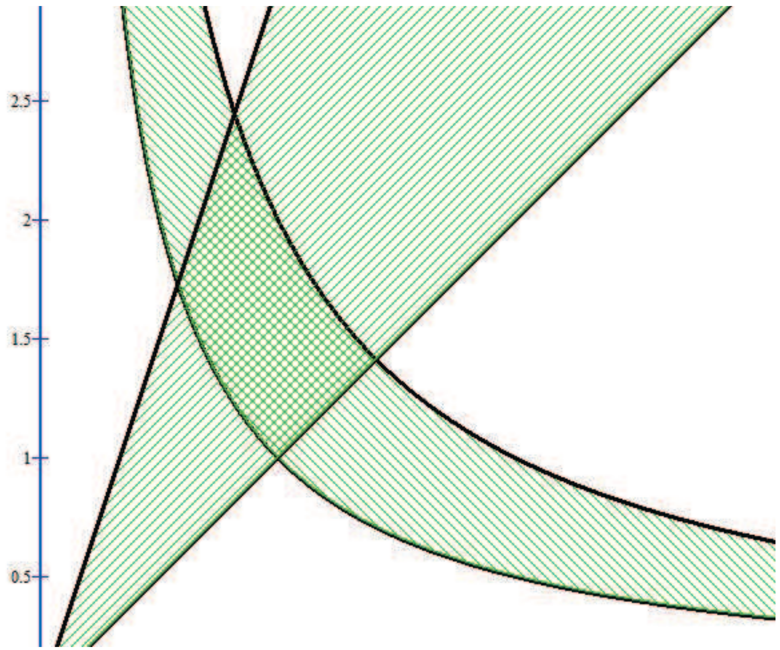
### 4.2.3 Примери

1. Да се пресметне лицето на частта от равнината $D$, определена от неравенствата: $x \leq y \leq 3x\,; \quad 1 \leq xy \leq 2\,.$

*Решение:* Извършваме смяната $\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{v}{u}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$. Тя има непрекъснати частни производни при

$u > 0$, $v > 0$ и е обратима в същото множество. За якобиана намираме:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{v}{u^3}} & \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{uv}} \\ \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2u} < 0\,.$$




$D^*$ е правоъгълникът $[1, 3] \times [1, 2]$. Тогава

$$S(D) = \iint\limits_{D} 1\, dxdy = \iint\limits_{D^*} \frac{1}{2u}\, dudv = \int\limits_{1}^{3} \frac{du}{2u} \cdot \int\limits_{1}^{2} 1 dv = \ln\sqrt{3}\,.$$

2. Да се пресметне двойният интеграл $\iint\limits_{D} |\sin(x+y)|\; dxdy$ , където $D$ е частта от равнината, определена от неравенствата $0 \le x \le \pi$ и $0 \le y \le \pi$ .

*Решение:* $D = T_1 \cup T_2$ , където

$$T_1 = \begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \pi - x \end{cases} , \quad T_2 = \begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ \pi - x \le y \le \pi \end{cases} .$$

Смяната $\begin{cases} x = \pi - u \\ y = \pi - v \end{cases}$ показва, че

$\iint\limits_{T_1} |\sin(x+y)|\; dxdy = \iint\limits_{T_2} |\sin(x+y)|\; dxdy$ . Тогава

$$\iint\limits_{D} |\sin(x+y)|\ dxdy = 2\iint\limits_{T_1} \sin(x+y)\ dxdy = 2\int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi-x}\sin(x+y)\ dy\right)dx =$$

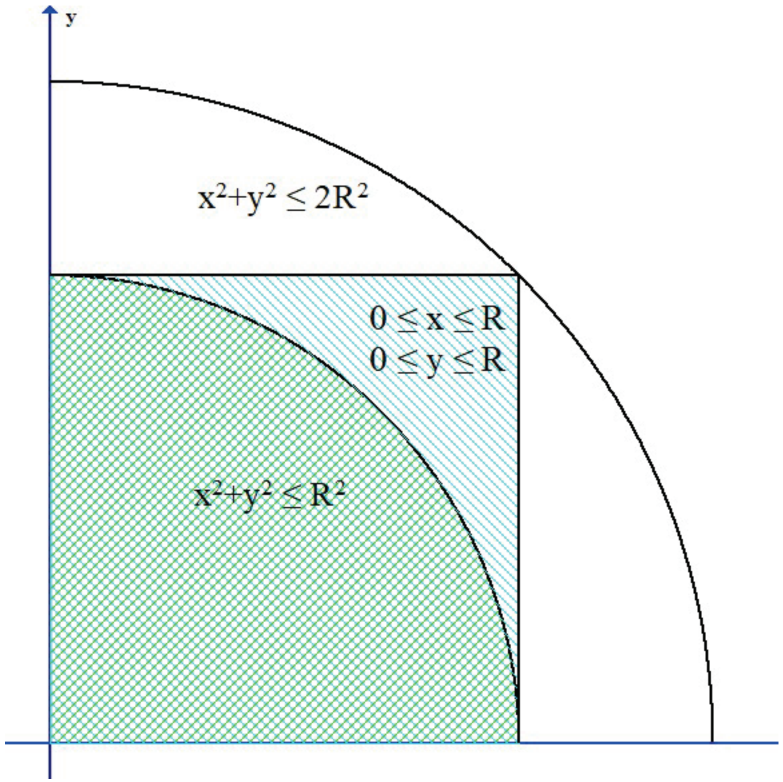
$$= 2\int\limits_0^{\pi}(1-\sin x)\,dx = 2(\pi-2)\ .$$

## 3. **Полярна смяна**

$$\begin{array}{lll} x = r\cos\varphi & r \geq 0 & r \geq 0 \\ y = r\sin\varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi & -\pi \leq \varphi \leq \pi \end{array}$$

$$J = r \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad x^2 - y^2 = r^2\cos 2\varphi \quad 2xy = r^2\sin 2\varphi$$

## 4. Пресмятане на $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$




- Чрез полярна смяна намираме

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2,\,0\le x,\,0\le y} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \iint\limits_{0\le r\le R,\,0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}} re^{-r^2}\,drd\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi.\int\limits_0^R re^{-r^2}\,dr = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$

- След граничен преход

$$\lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2,\, 0\le x,\, 0\le y} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\le 2R^2,\, 0\le x,\, 0\le y} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \frac{\pi}{4}$$

- От неравенството

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2,\, 0\le x,\, 0\le y} e^{-x^2-y^2}\, dxdy \le \iint\limits_{0\le x\le R,\, 0\le y\le R} e^{-x^2-y^2}\, dxdy \le \iint\limits_{x^2+y^2\le 2R^2,\, 0\le x,\, 0\le y} e^{-x^2-y^2}\, dxdy$$

- намираме

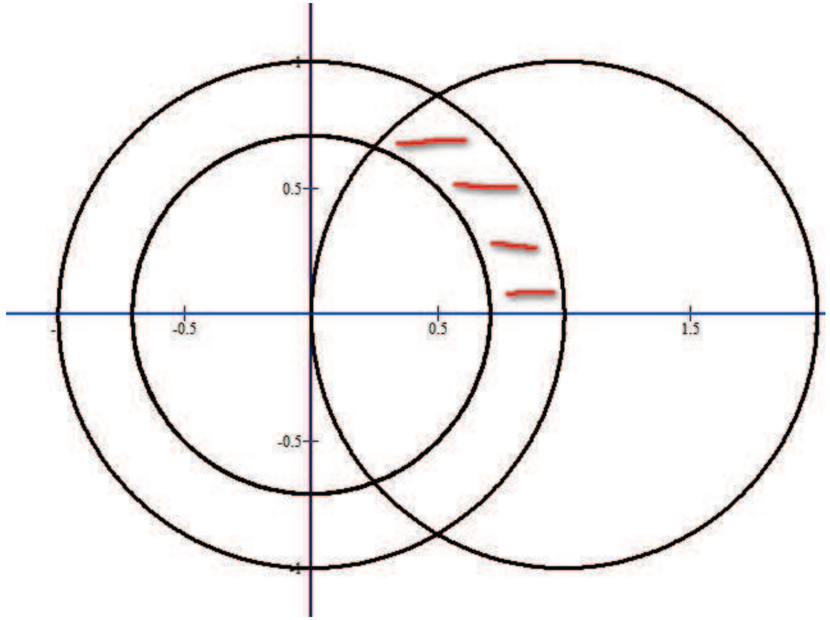
$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^R e^{-x^2}\, dx . \int\limits_0^R e^{-y^2}\, dy} = \sqrt{\lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{0\le x\le R,\, 0\le y\le R} e^{-x^2-y^2}\, dxdy} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

5. Да се пресметне двойният интеграл $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y\,\ln\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$ , където $D$ е частта от равнината, определена от неравенствата $\dfrac{1}{2} \le x^2+y^2 \le 1$ , $0 \le y$ и $x^2+y^2-2x \le 0$ .

*Решение:* Извършваме полярна смяна. За праобраза на $D$ имаме

$$D^* = \left\{ \frac{1}{2} \le r^2 \le 1\,;\ 0 \le \sin\varphi\,;\ r^2 \le 2r\cos\varphi\,;\ 0 \le r\,;\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}$$ или

$$D^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \le r \le 1\,;\ 0 \le \sin\varphi\,;\ r \le 2\cos\varphi\,;\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}$$




Понеже $0 \le \sin\varphi$, то $\varphi \in [0, \pi]$. В този интервал косинусът намалява, откъдето

$$D^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \le r \le 1\,;\; 0 \le \varphi \le \arccos\frac{r}{2} \right\}.$$ Следователно,

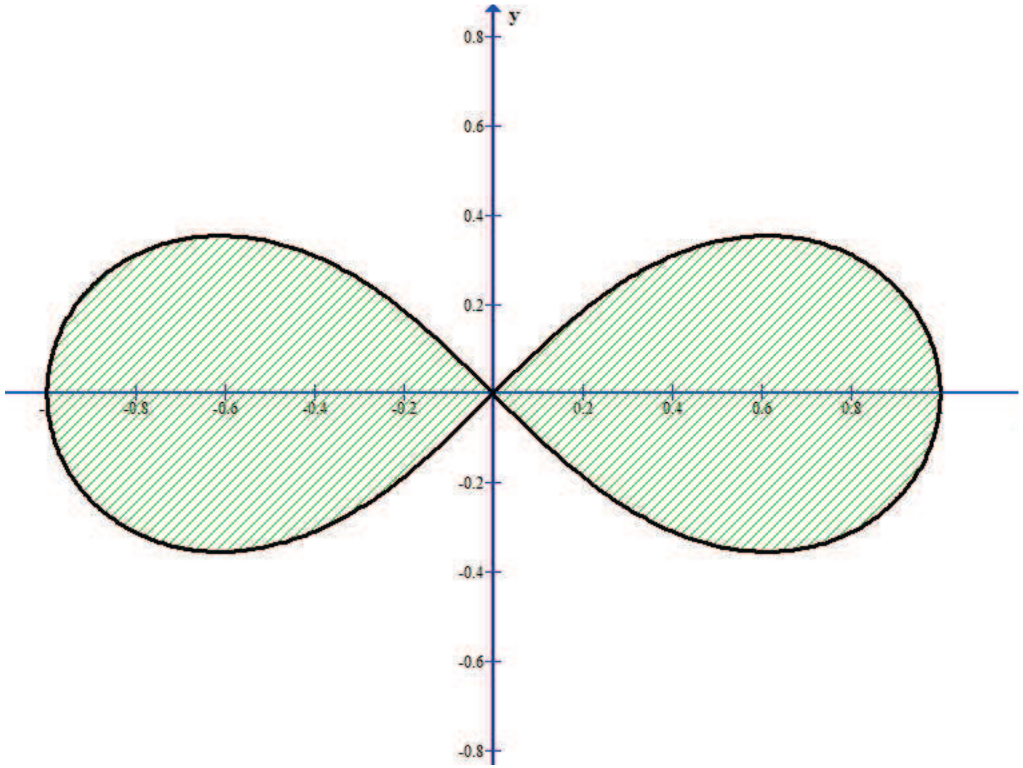
$$\iint\limits_D \frac{y\,\ln\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \iint\limits_{D^*} \frac{r\sin\varphi\,\ln\,r^2}{\sqrt{r^2}}\,r\,drd\varphi = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left( \int\limits_0^{\arccos\frac{r}{2}} 2r\,\ln r\,\sin\varphi\,d\varphi \right) dr =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} 2r\,\ln r\,\left(1-\frac{r}{2}\right) dr = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \ln r\,d\left(r^2-\frac{r^3}{3}\right) = \ldots\ldots$$

6. Намерете лицето на фигурата, зададена с неравенството $x^4 + y^4 \le x^2 - y^2$.

*Решение:*

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy = 4 \iint\limits_{D\cap\{x\ge 0\}\cap\{y\ge 0\}} dxdy = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\varphi d\varphi}{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi} = \ldots\;\ldots$$




## 4.3 Пресмятане на обем

### 4.3.1 Криволинеен цилиндър

$$T = \left\{ (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,\, y) \in D\,,\; \varphi\,(x,\, y) \leq z \leq \psi\,(x,\, y) \right\}$$

### 4.3.2 Обем на криволинеен цилиндър

$$V(T) = \iint\limits_{D} (\psi(x, y) - \varphi(x, y))\,dxdy$$

### 4.3.3 Примери

1. Да се намери обемът на тялото, зададено с неравенствата

$0 \le z \le xy\,,\ x + y + z \le 1\,,\ 0 \le x$ и $0 \le y$ .

*Решение:* Представяме тялото като криволинеен цилиндър

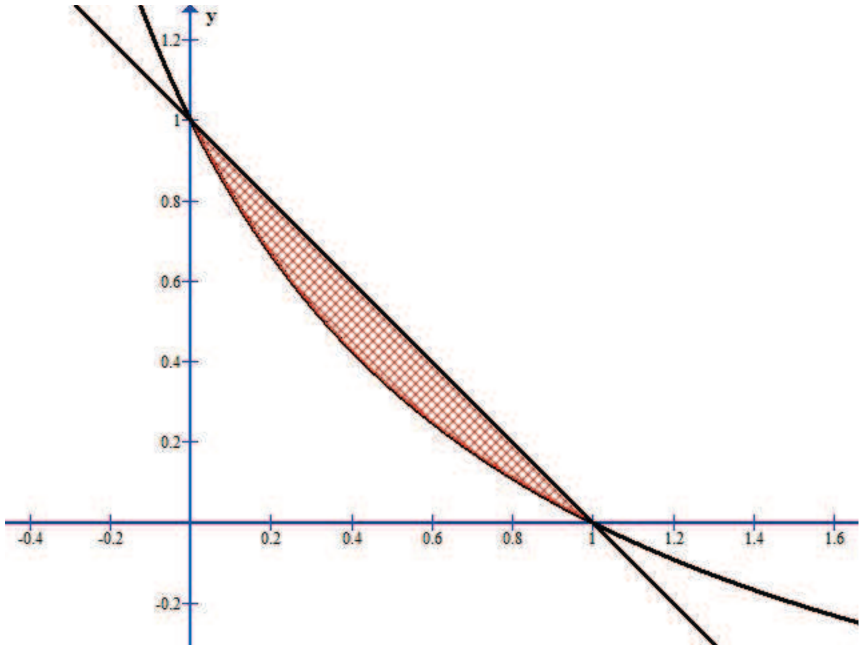
$T = \{(x, y) \in D\,,\ 0 \le z \le \min(xy\,,\ 1 - x - y)\}$, където $D = \{0 \le x,\ 0 \le y,\ x + y \le 1\}$ .

При $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$ имаме $\min(xy\,,\ 1 - x - y) = \begin{cases} xy & \text{при} \quad y \le \dfrac{1-x}{1+x} \\ 1 - x - y & \text{при} \quad y \ge \dfrac{1-x}{1+x} \end{cases}$ .

Следователно, $T = T_1 \cup T_2$

$$T_1 = \left\{0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le \frac{1-x}{1+x}\,,\ 0 \le z \le xy\right\}$$

$$T_2 = \left\{ 0 \le x \le 1 \ , \ \le \frac{1-x}{1+x} \le y \le 1-x \ , \ 0 \le z \le 1-x-y \right\}$$




$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) = \int\limits_0^1 \left( \int\limits_0^{\frac{1-x}{1+x}} xy dy \right) dx + \int\limits_0^1 \left( \int\limits_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1-x-y) dy \right) dx \ = \ \ldots \ \ldots$$

2. Да се намери обемът на тялото, зададено с неравенството
$\left(x^2+y^2+z^2+8\right)^2 \le 36\left(x^2+y^2\right)$ .

*Решение:* Ще намерим обема $V_0$ на частта от тялото в I-ви октант (т.е. $x \ge 0$, $y \ge 0$ и $z \ge 0$). Търсеният обем $V$ е $8V_0$. Даденото неравенство, предвид $z \ge 0$, е еквивалетно на системата

$$\left|\begin{array}{c} 0 \le 6\sqrt{x^2+y^2}-\left(x^2+y^2\right)-8 \\ 0 \le z \le \sqrt{6\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)-8} \end{array}\right. .$$

Следователно, $V_0 = \iint\limits_K \sqrt{6\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)-8}\,dxdy$ , където частта от равнината $K$ е зададена с неравенствата $x \ge 0$, $y \ge 0$ и $0 \le 6\sqrt{x^2+y^2}-\left(x^2+y^2\right)-8$ .

След полярна смяна $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ , намираме

$V_0 = \iint\limits_{K^*} r\sqrt{6r-r^2-8}\,drd\varphi$ , където $K^*$ е правоъгълникът $2 \le r \le 4$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ ,

откъдето $V_0 = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_2^4 r\sqrt{6r-r^2-8}\,dr$ .

След смяна $r = t + 3$ , получаваме

$$V_0 = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} (t+3)\sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{3\pi^2}{4} \, .$$