# 3 Теорема на Лайбниц и Нютон

## 3.1 Обобщена адитивност

Дефинираме

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ и } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Тогава $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ независимо от разположението на $a$, $b$ и $c$.

*Доказателство (случай $a < b < c$)*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \quad =$$

$$= \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad .$$

Оценка на интеграла:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\, dx\right| \leq |b-a| \sup_{u\in[0,1]} |f(a+u(b-a))| \ .$$

## 3.2 Построяване на примитивна

Нека $f$ е интегруема в $[a,\, b]$.

За $x \in [a,\, b]$ полагаме $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Тогава

1. $F(x)$ е непрекъсната в $[a,\, b]$.

*Доказателство:* За $x, y \in [a, b]$ означаваме $M(f, x, y) = \sup\limits_{u\in[0,1]} |f(x+u(y-x)|$ . Ясно е, че $M(f, x, y) \leq M(f, a, b) = M$ .

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt\right| \leq |x - x_0|\, M(f, x, x_0) \leq |x - x_0|\, M .$$

2. Теорема на Лайбниц и Нютон:

Ако $f$ е непрекъсната в $x_0 \in (a, b)$, то $F$ има производна в $x_0$ и $F'(x_0) = f(x_0)$.

*Доказателство:* Полагаме $g(x) = f(x) - f(x_0)$ . Тогава:

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(x_0)dt}{x - x_0}\right| = \frac{\left|\int\limits_{x_0}^{x} g(t)dt\right|}{|x - x_0|} \leq M(g, x, x_0) .$$

От друга страна, $\lim\limits_{x\to x_0} M(g, x, x_0) = 0$ .

3. Следствие:

Нека $f$ е непрекъсната в интервал $J$. Тогава $f$ има примитивна в $J$.

# 4 Пресмятане на определени интеграли

## 4.1 Формула на Лайбниц и Нютон

Нека $f$ е непрекъсната и ограничена в $(a, b)$, а $G$ е примитивна на $f$ в $(a, b)$. Тогава:

1. съществуват крайните граници
$\lim\limits_{x \to a+0} G(x) = G(a+0)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} G(x) = G(b-0)$ .

2. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx \;=\; G(b-0) - G(a+0)$ .

**Пример:** $$\int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

## 4.2 Смяна на променливите

Нека $f$ е непрекъсната в интервал $I$, а $\varphi$ има непрекъсната производна в $J$, като $\varphi(t) \in I$ за всяко $t \in J$.

Тогава $$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \text{ за всеки } \alpha \in J, \beta \in J\,.$$

*Доказателство:*

1. за $u \in J$ нека $F(u) = \int\limits_\alpha^u f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad \Longrightarrow \quad F'(u) = f(\varphi(u))\varphi'(u)$

2. за $u \in J$ нека $G(u) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(u)} f(x)dx \quad \Longrightarrow \quad G'(u) = f(\varphi(u))\varphi'(u)$

3. Следователно, $F'(u) = G'(u)$ за всяко $u \in J$ и $F(\alpha) = G(\alpha)$, което означава, че $F(\beta) = G(\beta)$ .

## Примери

1. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int\limits_0^1 \frac{t^2+1}{t^4+1} dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$ , смяна $x = \operatorname{arctg} t$ .

2. $$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = (\text{смяна } x = a \operatorname{tg} t) \ \frac{1}{a^3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2a^3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) \, dt = \frac{1}{8a^3} (\pi + 2) .$$

3. Нека $f$ е непрекъсната в $[0,\, 1]$. Тогава

- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$, смяна $x = \dfrac{\pi}{2} - t$.

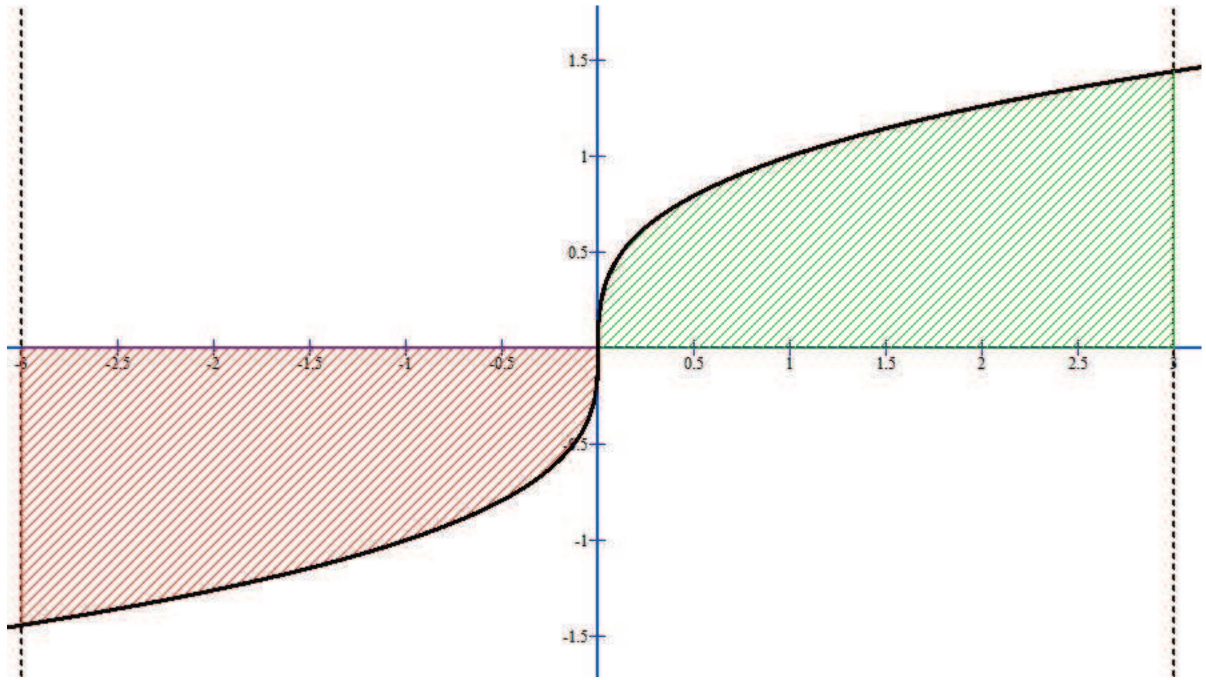
- $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$, смяна $x = \pi - t$.

4. Нека $f$ е непрекъсната в $[-a,\, a]$.

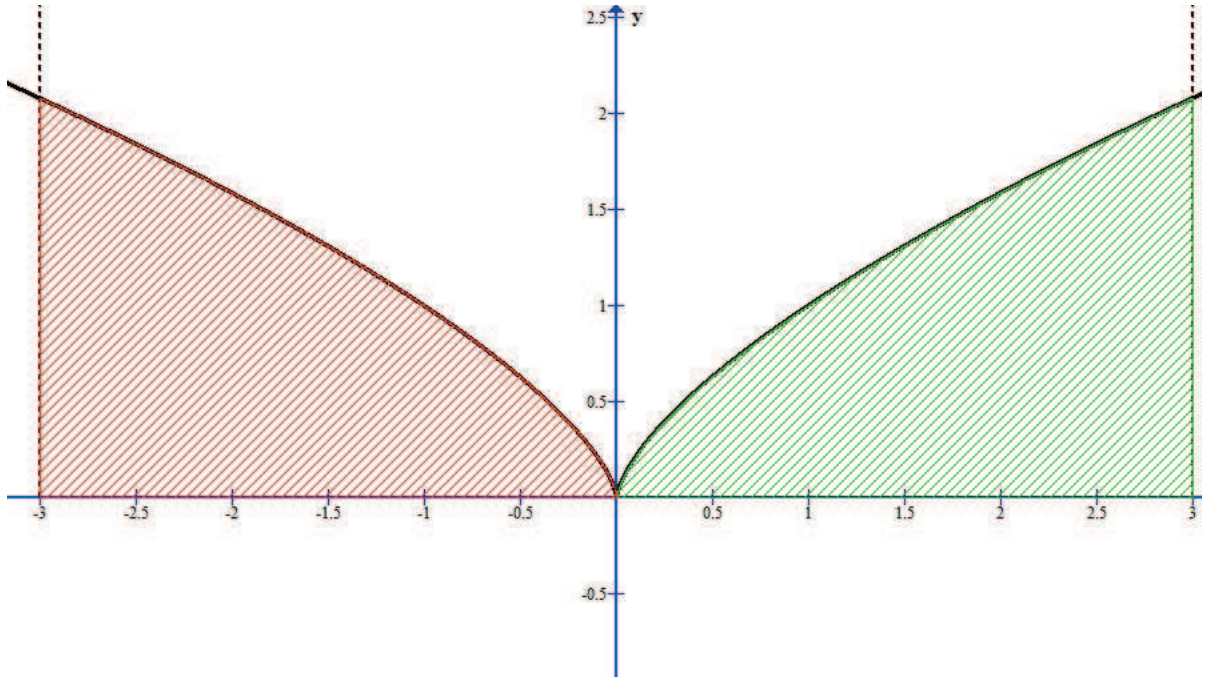
- Ако $f$ е нечетна, то $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$. Пример: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin x dx = 0$.

- Ако $f$ е четна, то $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx$. Пример: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(1+|x|)dx = 2\int_0^{1} \ln(1+x)dx$.

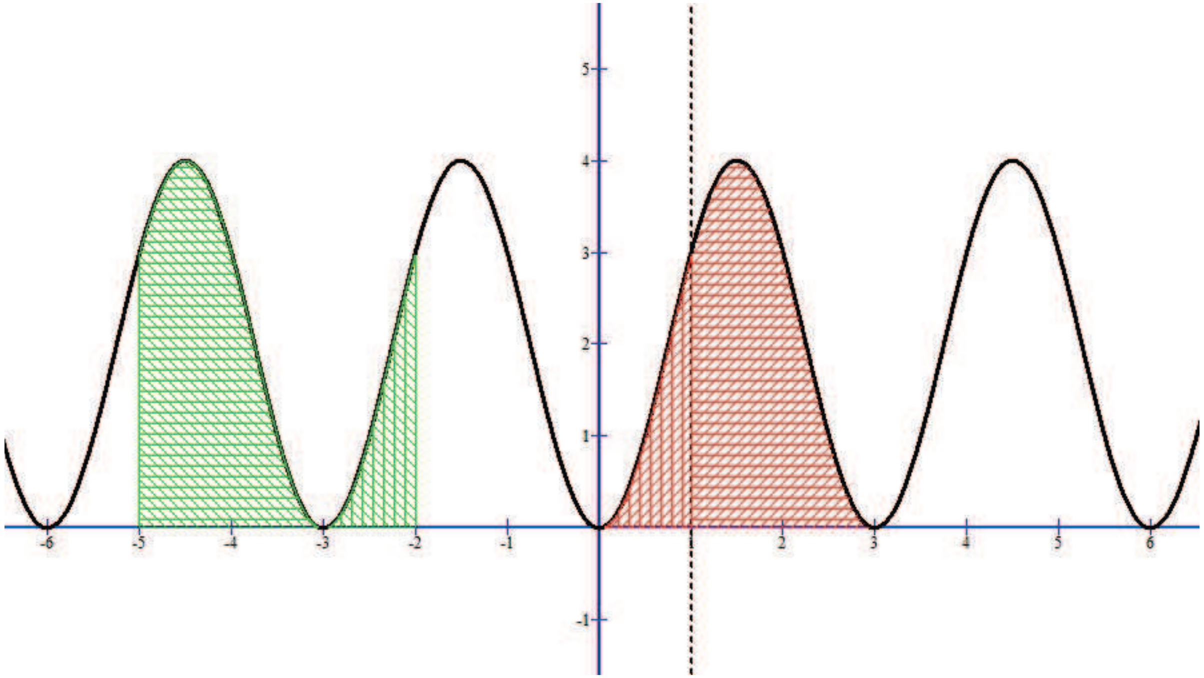
$$-\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$



$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$$



5. Нека $f$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$ и периодична с период $T$. Тогава $\displaystyle\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$ .



**Пример:**

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4 \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 8 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 8 \int\limits_0^1 \frac{t^2+1}{t^4+1} dt = 2\sqrt{2}\,\pi\ .$$

## 4.3 Интегриране по части

Нека всяка от функциите $f$ и $g$ е непрекъсната в $[a,\, b]$ и има непрекъсната и ограничена производна в $(a,\, b)$ . Тогава

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx \ = \ f(b)g(b) - f(a)g(a) \ - \ \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx$$

*Доказателство:*

1. $f(x)g'(x)$ и $f'(x)g(x)$ са интегруеми в $[a,\, b]$.

2. за $u \in [a,\, b]$ нека $F(u) = \int\limits_a^u f(x)g'(x)dx \Longrightarrow F'(u) = f(u)g'(u)$ за $u \in (a,\, b)$

3. за $u \in [a,\, b]$ нека $G(u) = f(u)g(u) - f(a)g(a) - \int\limits_a^u f'(x)g(x)dx \Longrightarrow$

$G'(u) = f'(u)g(u) + f(u)g'(u) - f'(u)g(u)$ за $u \in (a,\, b)$

4. следователно, $F'(u) = G'(u)$ за всяко $u \in (a,\, b)$ и $F(a) = G(a) \Longrightarrow F(b) = G(b)$

**Примери:**

1. $\int\limits_0^1 x^n\,(1-x)^m\,dx = \dfrac{n!.m!}{(n+m+1)!}\,.$

2. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}\ ; \qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\ .$$

Следствие: $$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}\ .$$

3. $$(-1)^n \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x dx \ = \ \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ .$$

Следствие: $$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\ .$$

4. $$2\,(-1)^n \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1} x dx \ = \ \ln 2 \ - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\ .$$

Следствие: $\ln 2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

## 4.4 Втора теорема за средните стойности

Нека $f$ е монотонна в $[a,\, b]$ , а $g$ е интегруема в $[a,\, b]$ . Тогава съществува $c \in [a,\, b]$ , за което:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \;=\; f(a)\int\limits_a^c g(x)dx \,+\, f(b)\int\limits_c^b g(x)dx$$

*Доказателство в частен случай:*

Нека $f$ е монотонна и непрекъсната в $[a,\, b]$ , има непрекъсната и ограничена производна в $(a,\, b)$ , а $g$ е непрекъсната в $[a,\, b]$ .

Можем да предполагаме, че $f$ е растяща, т.е. $f'(x) \geq 0$ . Полагаме $G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$ . Формулата за интегриране по части дава:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \;=\; \int\limits_a^b f(x)dG(x) \;=\; f(x)G(x)\Big|_a^b \;-\int\limits_a^b f'(x)G(x)dx\ .$$

Съгласно първата теорема за средните стойност съществува $c \in [a,\, b]$, за което:

$$\int\limits_a^b f'(x)G(x)dx \;=\; G(c)\int\limits_a^b f'(x)dx \;=\; G(c)\left(f(b) - f(a)\right)\ .$$

Тогава:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \;=\; f(b)G(b){-}f(a)G(a) - G(c)\left(f(b)-f(a)\right) \;=\; f(a)\left(G(c)-G(a)\right) + f(b)\left(G(b)-G(c)\right)\ .$$

# 5 Приложения на определените интеграли

## 5.1 Лице на криволинеен трапец

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\ ,\ T = \{a \le x \le b\,,\ g(x) \le y \le f(x)\}\ ,\ f \text{ и } g \text{ са непрекъснати в } [a,\, b] \text{ и}$$

$$f(x) \ge g(x) \text{ за } x \in [a,\, b]$$

Примери:

1. $T = \left\{1 \le x \le 2\sqrt{2}\,,\ 0 \le y \le \ln x\right\}$

2. Лицето на фигурата, ограничена от кривите $y = x \operatorname{arctg}(x+2)$ и $y = \dfrac{\pi}{4} x$ е:

3. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \le a^{\frac{2}{3}}\,,\ a > 0$

4. сектор

## 5.2 Лице на криволинеен сектор

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi \ , \ \alpha \leq \beta \ , \ 0 \leq r \leq r(\varphi)$$

Примери:

1. $\left(x^2 + y^2\right)^2 \leq 2xy$

2. $x^4 + y^4 \leq x^2 + y^2$

## 5.3 Дължина на дъга

1. гладка крива $\quad l = \int\limits_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt \quad$ пример $\quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ a > 0$

2. част от графика на функция $\quad l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ ,

   $f$ е непрекъсната в $[a, b]$, има непрекъсната и ограничена производна в $(a, b)$

   пример $\quad y = \ln x,\ 1 \le x \le 2\sqrt{2}$

3. полярни координати $\quad l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$

## 5.4 Обем на ротационно тяло

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx \ , \ f \ \text{ е непрекъсната в } [a,\, b] \ \text{ и } f(x) \geq 0 \text{ за } x \in [a,\, b]$$

## 5.5 Повърхнина на ротационно тяло

$$S = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \ , \ f \ \text{ е непрекъсната в } [a,\, b]\,,$$

$$\text{има непрекъсната и ограничена производна в } (a,\, b)\,.$$

пример    кръгов тор