Задача 1. (6-та задача, 06.11) Докажете, че интегралът $\int_0^\infty \sin\left(\frac{x^4+x^3}{x^2+5}\right)\mathrm{dx}$ е сходящ.

Решение. Както може да се предположи от предишната задача в темата, ще се наложи да използваме критерия на Абел-Дирихле. Да го припомним: Нека f, g са непрекъснати функции дефинирани в $[a, +\infty)$, $F(r) = \int_a^r f(x)\mathrm{dx}$ е ограничена функция (съществува $M > 0$, така че $|F(r)| \leq M$, за всяко $r \in [a, +\infty)$), а g е монотонно намаляваща и $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Тогава $\int_a^\infty f(x)g(x)\mathrm{dx}$ е сходящ.

Сега да се върнем към задачата. Трябва да представим подинтегралната функция като произведение на две други функции със свойствата от критерия, така че да можем да го приложим. Ще представим едната от функциите като производна на ограничена функция, така че тривиално да бъде изпълнено условието "$F(r) = \int_a^r f(x)\mathrm{dx}$ е ограничена функция". Тук имаме синус, които си е хубава ограничена функция и ние искаме да имаме представяне като **производна** на ограничена функция. Затова да вземем една функция, от чията производна излиза конкретния синус. Производната на косинус е синус, така че

$$\left(\cos\left(\frac{x^4+x^3}{x^2+5}\right)\right)' = -\frac{2x^5+x^4+20x^3+15x^2}{(5+x^2)^2}\sin\left(\frac{x^4+x^3}{x^2+5}\right)$$

За краткост означаваме частното на двата полинома горе с $h(x)$. Сега да вземем началния интеграл със знак "минус"(това е неудобна техническа подробност, свързана с точна формулировка на критерия, иска се едната функция да е монотонно намаляваща, което би било същото, ако е монотонно растяща заради умножаване с -1. Един интеграл е сходящ, точно когато е сходящ този с противоположен знак на подинтегралната функция). И така от горното равенство $\frac{1}{h(x)}\left(\cos\left(\frac{x^4+x^3}{x^2+5}\right)\right)' = -\sin\left(\frac{x^4+x^3}{x^2+5}\right)$, откъдето

$$\int_0^\infty -\sin\left(\frac{x^4+x^3}{x^2+5}\right)\mathrm{dx} = \int_0^\infty \frac{1}{h(x)}\left(\cos\left(\frac{x^4+x^3}{x^2+5}\right)\right)'\mathrm{dx}$$

Сега нека $f(x) = \left(\cos\left(\frac{x^4+x^3}{x^2+5}\right)\right)'$ и $g(x) = \frac{1}{h(x)}$. Твърдим, че тези f и g изпълняват точно условията на критерия за функциите означени със същите букви. Действително

$$F(r) = \int_0^r f(x)\mathrm{dx} = \int_0^r \left(\cos\left(\frac{x^4+x^3}{x^2+5}\right)\right)'\mathrm{dx} = \cos\left(\frac{r^4+r^3}{r^2+5}\right) - 1$$

което е тривиално от теоремата на Нютон-Лайбниц (именно това беше мотивацията ни да започнем тези преобразувания) и значи е $F(r)$ е ограничена, понеже косинусът е ограничена. $g(x) = \frac{1}{h(x)}$ е частно на два полинома, като този в числителя е със степен строго по-малка (4) от степента на този в знаменателя (5). Така $g(x)$ клони към 0 и по същите съображения (и това че е частно на полиноми, които приемат положителни стойности в $[0, \infty)$) е намаляваща (всъщност може да не е намаляваща в началото на разглеждания интервал, но със сигурност "отнякъде нататък" е намаляваща, което ни е достатъчно, понеже ни интересува какво става към безкрайност) Значи са налице условията на критерия на Абел-Дирихле и така сходимостта на

интеграла следва от него.
Коментар. Решението можеше да започне директно с умножаване и делене на $h(x)$ (и да се продължи нататък, като се "забележи че $-h(x)\sin\left(\frac{x^4+x^3}{x^2+5}\right) = \left(\cos\left(\frac{x^4+x^3}{x^2+5}\right)\right)'$), но на пръв поглед въобще не би било очевидно откъде идва то. Така ми се струва по-естествено и обосновано.

Задача 2. (6-та задача, б), 06.12) Да се пресметне границата

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{dt}$$

Решение. Ако директно приложим Лопитал, ще стигнем $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, която граница не съществува и нищо не можем да кажем. Ако в горната граница функцията беше умножена с x например, то всичко е ясно, понеже имаме клоняща към 0 по ограничена. Ще се опитаме да го добавим изкуствено. Ще приложим по части като внесем подинтегралната функция под диференциала. Това не може да стане директно, понеже тази функция няма хубав неопределен интеграл. Тя обаче може да се получи като производна на $\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)$, разбира се, ще излезе и нещо друго - $\frac{2}{t^3}$. Затова още в началото ще умножим и ще разделим на него. И така, разглеждаме засега само интеграла -

$$\int_0^x \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{dt} = \int_0^x \frac{t^3}{2}\cdot\frac{2}{t^3}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{dt} = \int_0^x \frac{t^3}{2}\mathrm{d}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right) =$$
$$= \frac{t^3}{2}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\Big|_0^x - \int_0^x \frac{3t^2}{2}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{dt} = \frac{x^3}{2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - \int_0^x \frac{3t^2}{2}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{dt}$$

където предпоследното равенство се получава от интегриране по части. Сега се връщаме към границата.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{dt} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - \int_0^x \frac{3t^2}{2}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{dt}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{3t^2}{2}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{dt}$$

Първото събираемо в последния израз е 0 (клоняща към 0 по ограничена). За второто събираемо прилагаме Лопитал. Наистина, интегралът няма особеност в 0, понеже подинтегралната функция клони към 0 там (по същите съображения както по-горе). Така, ако $F(x) = \int_0^x \frac{3t^2}{2}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{dt}$, то $F(x)$ клони към 0, при $x \to 0$ (понеже границите на интеграла се приближават една към друга, а интегралът всъщност е собствен, както отбелязахме порано (действително, това е съществено, ако беше несобствен не може да се твърди в общия случай, че при приближаване на границите, интегралът клони към 0 (или дори е краен). Пример - $\int_0^x \frac{1}{t}\mathrm{dt}$, $x \to 0$)). Следователно имаме право да приложим Лопитал и го правим -

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \frac{3t^2}{2}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{dt} = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Окончателно границата е 0.