Лекция 5: Граници на функции

1 Еквивалентност на дефинициите за граница на функция във формата на Коши и във формата на Хайне

Да напомним дефинициите за граница на функция, които дадохме в края на миналата лекция:

Дефиниция 1.1. *Граница на функция (във формата на Коши)*

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ и нека $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на D. Казваме, че функцията f има граница $L \in \mathbb{R}$, когато аргументът клони към x_0 (и пишем $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$), ако за всяка околност U на L съществува околност V на x_0 такава, че за всяко $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$ е в сила $f(x) \in U$.

Можем да формулираме тази дефиниция по еквивалентен начин: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всички $x \in D \setminus \{x_0\}$, за които $|x - x_0| < \delta$, е в сила $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Дефиниция 1.2. *Граница на функция (във формата на Хайне)*

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ и нека $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на D. Казваме, че функцията f има граница $L \in \mathbb{R}$, когато аргументът клони към x_0, ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}$ от стойности на аргумента, която клони към x_0, съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ клони към L.

$$\left(\forall\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\},\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 :\ f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L \right)$$

Твърдение 1.3. *Дефинициите за граница на функция във формата на Коши и във формата на Хайне са еквивалентни.*

Доказателство.

$$1) \lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ в смисъл на Коши} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ в смисъл на Хайне.}$$

Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна редица с $x_n \in D$, $x_n \neq x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Избираме произволно $\varepsilon > 0$ и разглеждаме околност $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ на L. От дефиницията на Коши:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0 : f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Тъй като $\delta > 0$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \delta$. Ако $n \geq n_0$, имаме $x_n \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}$ и следователно $f(x_n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. С това доказахме, че $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

$$2) \lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ в смисъл на Хайне} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ в смисъл на Коши.}$$

Искаме да докажем, че

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D, x \neq x_0, \; |x - x_0| < \delta : |f(x) - L| < \varepsilon$$

Допускаме противното, т.е.

$$\neg \left(\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D, x \neq x_0, \; |x - x_0| < \delta : |f(x) - L| < \varepsilon \right) \equiv$$
$$\equiv \exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x_\delta \in D, x_\delta \neq x_0, \; |x_\delta - x_0| < \delta : |f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon_0$$

В отрицанието означаваме ε с ε_0, за да подчертаем, че то ще бъде фиксирано до края на доказателството. Също така написахме x_δ, за да си дадем по-ясно сметка, че съответната точка зависи от избора на δ. Използваме това, като последователно даваме на δ стойности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$:

$$\begin{cases} \delta = 1 \Rightarrow \exists x_1 \in D, \, x_1 \neq x_0, \, |x_1 - x_0| < 1 : |f(x_1) - L| \geq \varepsilon_0 \\ \delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x_2 \in D, \, x_2 \neq x_0, \, |x_1 - x_0| < \frac{1}{2} : |f(x_2) - L| \geq \varepsilon_0 \\ \ldots \\ \delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists x_n \in D, \, x_n \neq x_0, \, |x_n - x_0| < \frac{1}{n} : |f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0 \\ \ldots \end{cases}$$

Построихме редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}$ с $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ (защото $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$). Следователно по дефиницията на $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L$ във формата на Хайне е в сила $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L$, което е в очевидно противоречие с $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0 > 0$ за всяко естествено n (по построение). $\square$

2 Основни свойства на граници на функции

Да отбележим, че еквивалентността на двете дефиниции за граница ни дава възможност да избираме по-подходящия инструмент в зависимост от проблема, който решаваме.

Твърдение 2.1. *Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ и нека $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на D. Нека $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L$ и $L > c$ ($L < c$). Тогава съществува околност V на x_0 такава, че $f(x) > c$ ($f(x) < c$) за всяко $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$.*

За да докажем това твърдение, е достатъчно да приложим дефиницията за граница на функция във формата на Коши за околността $U = (c, +\infty)$ ($U = (-\infty, c)$) на границата L.

Да направим и следната важна забележка: границата на функция е "локално понятие" в смисъл, че ако две функции съвпадат в някаква околност на точката, към която клони аргументът, то едната притежава граница точно тогава, когато притежава граница и другата, и при това стойностите на границата са равни. По-неформално казано, съществуването и стойността на границата зависят само от стойностите на функцията в околност на точката, към която клони аргументът.

Твърдение 2.2. (*граници и аритметични действия*)
Нека $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ и нека x_0 е точка на сгъстяване на D. Предполагаме, че $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_f$ и $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_g$. Тогава са в сила следните свойства:

1. $\lim_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=L_f+L_g$*;*

2. $\lim_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right)=L_f\cdot L_g$*;*

3. Ако $L_g\neq 0$*, то* $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{L_f}{L_g}$*.*

Доказателство. Избираме произволна сходяща редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D\setminus\{x_0\}$ с $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$. Тогава от предположенията за границите на f и g, съгласно дефиницията на Хайне, имаме:

$$\begin{cases} f\left(x_n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}L_f\\ g\left(x_n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}L_g\end{cases}$$

Следователно можем да приложим известните ни свойства за числови редици:

$$\begin{cases} f\left(x_n\right)+g\left(x_n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}L_f+L_g\\ f\left(x_n\right)g\left(x_n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}L_f\cdot L_g\\ \frac{f(x_n)}{g(x_n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{L_f}{L_g},\ \text{ако }\ L_g\neq 0\end{cases}$$

По този начин получаваме съществуването и стойността на границите в твърдението отново по дефиницията във формата на Хайне. □

Разбира се, от горното твърдение веднага получаваме и правило за граница на разликата на две функции.

Дефиниция 2.3. *Композиция на функции*

Ако са дадени функциите $f:X\to Y$ и $g:Y\to Z$, то композиция на f и g е изображението $g\circ f:X\to Z$, зададено с $\left(g\circ f\right)\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)$ за всяко $x\in X$.

Твърдение 2.4. *Нека* $f:D\to D_1$, $g:D_1\to\mathbb{R}$; $D,D_1\subset\mathbb{R}$. *Нека* x_0 *е точка на сгъстяване на* D. *Ако*

$$\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=y_0,\ f\left(x\right)\neq y_0\ \text{при}\ x\neq x_0\ \text{и}\ \lim_{y\to y_0}g\left(y\right)=L,$$

то съществува $\lim_{x\to x_0}\left(g\circ f\right)\left(x\right)=L$.

Доказателство. Отново използваме дефиницията за граница на функция във формата на Хайне. По-точно, разглеждаме редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D\setminus\{x_0\}$ с $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$. Ползваме, че:

$$\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=y_0\Rightarrow f\left(x_n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}y_0$$

Означаваме $y_n:=f\left(x_n\right)$ за всяко $n\in\mathbb{N}$. Тогава знаем, че $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D_1$ и $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}y_0$. При това за произволно n имаме $y_n=f\left(x_n\right)\neq y_0$ от предположението. Повторно прилагане на Хайне дава:

$$\lim_{y\to y_0}g\left(y\right)=L\Rightarrow g\left(y_n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}L$$

Съществуването на границата е директно от $g\left(y_n\right)=g\left(f\left(x_n\right)\right)=\left(g\circ f\right)\left(x_n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}L$. □

Пример 2.5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x.\frac{\sin 5x}{5x}}{7x.\frac{\sin 7x}{7x}}=\frac{5}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 7x}{7x}}=\frac{5}{7}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}}=\frac{5}{7}\cdot\frac{\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}{\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}}=\frac{5}{7}$$

Ползваме, че $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. В този пример x е аргумент на $y=f(x)\coloneqq 5x$ и f на свой ред е аргумент за $g(y)\coloneqq\sin y$. Когато $x\to 0$, то $y\to 0$ със стойности, различни от нула. Аналогично в знаменателя, когато $x\to 0$, то $z=7x\to 0$ със стойности, различни от нула.

Твърдение 2.6. *(граници на функции и неравенства)*

Нека $f,g:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$, x_0 - точка на сгъстяване на D, $\lim_{x\to x_0}f(x)=L_1$ и $\lim_{x\to x_0}g(x)=L_2$. Тогава:

(а) Ако $f(x)\le g(x)$ за $x\in D$, то $L_1\le L_2$

(б) Ако $h:D\to\mathbb{R}$ е такава, че $f(x)\le h(x)\le g(x)$ за $x\in D$ и $L_1=L_2=L$, то $\lim_{x\to x_0}h(x)=L$

Доказателство. Отново най-удобна за доказателство е дефиницията на Хайне. Избираме произволна сходяща редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D\setminus\{x_0\}$ с $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$. Следователно:

$$\left.\begin{aligned}f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}L_1\\ g(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}L_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\underbrace{f(x_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}L_1}\le\underbrace{h(x_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}L_1=L_2}\le\underbrace{g(x_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}L_2}\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

□

3 Граници на функции, когато аргументът дивергира към безкрайност и функции, които дивергират към безкрайност

Сега разширяваме дефиницията за граница на функцията $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$ в две посоки: разрешаваме точката ξ, към която клони аргументът, освен реално число да може да бъде и някой от символите $+\infty$, $-\infty$, ∞. Аналогично, освен да клони към някакво реално число, функцията може да дивергира към $+\infty$, $-\infty$ или ∞.

Дефиниция 3.1. *Граница на функция (във формата на Коши)*

Нека $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$ и нека $\xi\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$ е точка на сгъстяване на D. Казваме, че функцията f има граница (дивергира към, ако става въпрос за безкраен символ) $\eta\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$, когато аргументът клони към ξ (и пишем $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$), ако за всяка околност U на η съществува околност V на ξ такава, че за всяко $x\in V\cap D$, $x\neq\xi$ е в сила $f(x)\in U$.

Дефиниция 3.2. *Граница на функция (във формата на Хайне)*

Нека $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$ и нека $\xi\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$ е точка на сгъстяване на D. Казваме, че функцията f има граница (дивергира към, ако става въпрос за безкраен символ) $\eta\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$, когато аргументът клони към ξ, ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D\setminus\{\xi\}$ от стойности на аргумента, която клони към ξ, съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ клони към η.

$$\left(\forall\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D\setminus\{\xi\},\ x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\xi:\ f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\eta\right)$$

Първият въпрос, който е редно да си зададем, е какво означава “$\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ е точка на сгъстяване на D”. Дефиницията е същата, както когато ξ е реално число: Във всяка околност на безкрайния символ ($+\infty$, $-\infty$ или ∞) има точка от D (тук има опростяване, тъй като няма как елемент на D да съвпада с $+\infty$, $-\infty$ или ∞) или, еквивалентно, съществува редица от елементи на D, дивергираща към безкрайния символ.

И в тази по-обща ситуация резултатът за еквивалентност на дефиницията във формата на Коши и на дефиницията във формата на Хайне остава верен, като необходимите промени в доказателството, доколкото ги има, са тривиални.

Забележете, че сега всъщност сме дали не една, а 16 дефиниции (4 по 4). Във всеки отделен случай съответната дефиниция във формата на Коши може (и трябва) да бъде преформулирана, като се използва видът на базовите околности на ξ и η.

Пример 3.3. Нека формулираме дефиницията (във формата на Коши) на $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, където $L \in \mathbb{R}$, по по-конкретен начин: за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $M \in \mathbb{R}$ такова, че за всички $x \in D$, за които $x < M$, е в сила $|f(x) - L| < \varepsilon$.

4 Необходимо и достатъчно условие на Коши за съществуване на граница на функция

Както при редици, важно е да имаме условие за съществуване на граница на функция, което зависи само от стойностите на функцията, но не и от евентуалната граница. Следващата теорема дава такова условие, което е аналогично на съответния резултат при редици.

Теорема 4.1. *(Необходимо и достатъчно условие на Коши за съществуване на граница на функция) Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, x_0 - точка на сгъстяване на D. Твърдим, че:*

$$\exists\, L \in \mathbb{R} : \lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff$$
$$\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x', x'' \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Доказателство. Доказателството провеждаме в две посоки.

($\Rightarrow$) $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Rightarrow$ НДУ Коши.
Избираме $\varepsilon > 0$. Тогава:

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} : |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Така намерената δ-околност на x_0 може да бъде използвана за условието на Коши. Наистина, нека $x', x'' \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}$ са произволни. Тогава

$$\left.\begin{array}{l} |f(x') - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x'') - L| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| = |f(x') + L - L - f(x'')| \leq |f(x') - L| + |f(x'') - L|$$

Разбира се, имаме $|f(x') - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|f(x'') - L| < \frac{\varepsilon}{2}$, следователно $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) НДУ Коши $\Rightarrow \exists\, L \in \mathbb{R} : \lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Нека да разгледаме произволна редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}$ с $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Ще покажем, че съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална. Наистина, нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x', x'' \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

От $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ следва, че $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \delta$. Следователно знаем, че за всяко $n \geq n_0$ е в сила $x_n \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}$. Ако m и n са произволни естествени числа, по-големи или равни на n_0, имаме:

$$x_m, x_n \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$$

Това доказва, че редицата $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална.

И тъй, за произволна редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}$ с $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална, а следователно и сходяща. Длъжни сме обаче да проверим, че границата на $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ не зависи от редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, а само от f и x_0.

Нека аргументът се приближава към x_0 по два различни начина:

$$\begin{cases} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\},\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \text{ е фундаментална} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L' \\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\},\ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \Rightarrow \{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty} \text{ е фундаментална} \Rightarrow f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L'' \end{cases}$$

Ще докажем, че $L' = L''$. По този начин ще се убедим, че границата е една и съща независимо от начина, по който се приближаваме към x_0. За тази цел разглеждаме "смесената" редица от $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$$

Тя отговаря на всички условия, при които сме доказали току-що, че съответната редица от функционални стойности е сходяща:

$$f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots, f(x_n), f(y_n), \ldots \xrightarrow[n\to\infty]{} L$$

Тъй като всяка подредица на сходяща редица има същата граница, оттук получаваме, че $L' = L$ и $L'' = L$. С това доказателството е завършено. □

Пример 4.2. Да си спомним един от примерите, които разгледахме преди да въведем понятието за граница на функция, и да докажем строго, че $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не съществува. Нека $k \in \mathbb{N}$ е произволно. Тогава

$$\left.\begin{aligned} x_k' &= \tfrac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{2}} \Rightarrow f(x_k') = -1 \\ x_k'' &= \tfrac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \Rightarrow f(x_k'') = 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad |f(x_k') - f(x_k'')| = 2$$

Тъй като в произволна околност на нулата има точки от вида x_k', x_k'' за достатъчно големи $k \in \mathbb{N}$, горните пресмятания водят до противоречие с необходимото и достатъчно условие на Коши за съществуване на граница на функция, ако сме избрали $\varepsilon = 2$.

5 Лява и дясна граница на функция

Един от другите примери, които разгледахме преди да въведем понятието за граница на функция, беше функцията "цяла част". В този пример границата не съществуваше, когато аргументът клони към цяло число, защото имаше значение дали се приближава към цялото число отляво или отдясно. Това е достатъчно прост случай на несъществуване на граница, който заслужава да бъде разгледан отделно.

Дефиниция 5.1. *рестрикция*

Нека $f : X \longrightarrow Y$ е произволно изображение и нека A е подмножество на дефиниционната му област X. Тогава рестрикция (или ограничение) на f върху A (означение $f|_A$) наричаме изображението $f|_A : A \longrightarrow Y$, дефинирано с $f|_A(x) = f(x)$ за $x \in A$ (тоест просто стесняваме дефиниционната област на f).

Дефиниция 5.2. *Лява и дясна граница на функция*

Нека $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Лява граница на f, когато аргументът клони към x_0 (означение $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ или $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x)$) наричаме $\lim_{x\to x_0}\left(f|_{D\cap(-\infty,x_0)}\right)(x)$ (и в смисъл на съществуване).

Това означава, че x_0 е точка на сгъстяване на $D \cap (-\infty, x_0)$ и $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ точно когато

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0) : |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ако използваме еквивалентната дефиниция във формата на Хайне, получаваме

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \forall\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \cap (-\infty, x_0),\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 :\ f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$$

Аналогично се дефинира и дясна граница на функция:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) := \lim_{x\to x_0}\left(f|_{D\cap(x_0,+\infty)}\right)(x)$$

Това означава, че x_0 е точка на сгъстяване на $D \cap (x_0, +\infty)$ и $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ точно когато

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D \cap (x_0, x_0 + \delta) : |f(x) - L| < \varepsilon$$

Твърдение 5.3. *Нека $f : D \to \mathbb{R}$ и $D \equiv \left(x_0 - \overline{\delta}, x_0 + \overline{\delta}\right) \setminus \{x_0\}$ за някое $\overline{\delta} > 0$ (такова D се нарича още пробита околност на x_0). Твърдим, че $\lim_{x\to x_0} f(x)$ съществува точно тогава, когато съществуват $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ и $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ и те са равни.*

Доказателство. Правата посока е очевидна - наистина, ако съществува самата граница $\lim_{x\to x_0} f(x)$, то рестрикцията върху лява или дясна околност на x_0 няма да я промени, т.е. лявата или дясната граница ще съществуват и ще бъдат равни на първоначалната граница L (а следователно и ще бъдат равни помежду си).

Да разгледаме обратната посока. Нека съществуват $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$. Избираме произволно $\varepsilon > 0$. Тогава

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \exists \delta_1 > 0\, \forall x \in D \cap (x_0 - \delta_1, x_0) : |f(x) - L| < \varepsilon \\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \Rightarrow \exists \delta_2 > 0\, \forall x \in D \cap (x_0, x_0 + \delta_2) : |f(x) - L| < \varepsilon \end{cases}$$

Полагаме $\delta := \min\left\{\delta_1, \delta_2, \overline{\delta}\right\}$. Тогава за всяко $x \in D$, $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ имаме

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ако } x > x_0, \text{ то } x \in (x_0, x_0 + \delta) \subset (x_0, x_0 + \delta_2) \cap D \\ \text{Ако } x < x_0, \text{ то } x \in (x_0 - \delta, x_0) \subset (x_0 - \delta_1, x_0) \cap D\end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

□

Пример 5.4. За кои стойности на реалния параметър c функцията

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \ x < 1 \\ c - x, \ x \geq 1 \end{cases}$$

има граница, когато аргументът клони към едно?

Лесно се вижда, че:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(x^2 - 1\right) = \lim_{x \to 1^-} (x - 1)(x + 1) = 0$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (c - x) = c - 1$$

За да съществува $\lim_{x \to 1} f(x)$ е необходимо (и достатъчно) да съществуват и да са равни лявата и дясната граница в точката 1, т.е. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$. Следователно $c - 1 = 0$ или $c = 1$.

6 Две основни граници

Дотук са ни известни едва няколко основни граници:

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0 \qquad \lim_{x \to x_0} c = c \text{ (константа)} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

За да разширим нашия запас от представителни примери, ще напомним кратко какво знаете за повдигането на степен от училище.

И така, нека $a > 0$ и n е естествено число. Означавали сте $a^n := \underbrace{a.a.\cdots.a}_{n}$. В такъв случай са в сила законите

1. $a^{m+n} = a^m a^n$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$

за всички m, $n \in \mathbb{N}$. След това сте разширили "повдигането на степен" така, че вече степенният показател да може да бъде цяло число, и горните закони да остават в сила за всички m, $n \in \mathbb{Z}$. Единственият начин да бъде постигнато това е да се дефинира $a^0 := 1$ (от $a^n = a^{n+0} = a^n a^0$) и $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ (от $a^{-n} a^n = a^{n-n} = a^0 = 1$). Второто разширение, което сте направили в училище, е било да позволите степенният показател да бъде рационално число, и горните закони да останат в сила за всички m, $n \in \mathbb{Q}$. Постигнали сте това, като за $a > 0$ сте дефинирали $a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$, където $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ (от $a^m = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$). Единственото друго свойство на повдигането на степен, което ще ни е необходимо, е $a^x < a^y$ винаги, когато $a > 1$ и x и y са рационални числа с $x < y$.

И тъй, засега приемаме, че от училище ви е известно значението на y^x, където $y > 0$ и $x \in \mathbb{Q}$. Прието е степента, разглеждана като функция $f(x) = a^x$ на степенния показател при фиксирана основа $a > 0$, да се нарича експонента, а степента, разглеждана като функция $g(x) = x^a$ на основата при фиксиран степенен показател, да се нарича степенна функция.

Обръщаме се към доказателството на границите

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1 \ (a > 0) \qquad\qquad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

1. Първо ще се занимаем със случая, когато $a > 1$ и x клони към нула със стойности, по-големи от нула.

   Да разгледаме редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ с общ член $b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$. За нея е в сила, че

   $$a^{\frac{1}{n}} = b_n + 1,$$
   $$a = (b_n + 1)^n \overset{\text{Нютон}}{=} 1 + \binom{n}{1} b_n + \binom{n}{2} b_n^2 + \cdots \binom{n}{n} b_n^n$$

   Очевидно е в сила неравенството $a > 1 + n.b_n$, а оттам и $b_n < \frac{a-1}{n}$. Прилагаме лемата за двамата полицаи към неравенствата:

   $$\underbrace{0}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0} < b_n < \underbrace{\frac{a-1}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0} \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

   Сега нека $\varepsilon > 0$ е произволно. От $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ следва $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$. Тогава за всяко $x \in \mathbb{Q} \cap \left(0, \frac{1}{n_0}\right)$ е в сила:

   $$0 < x < \frac{1}{n_0}$$
   $$\Rightarrow \ 1 < a^x < a^{\frac{1}{n_0}} \ \Rightarrow \ 0 < a^x - 1 < a^{\frac{1}{n_0}} - 1 < \varepsilon \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow \ |a^x - 1| < \varepsilon \ \forall x \in \mathbb{Q} \cap \left(0, \frac{1}{n_0}\right)$$

   С това сме проверили, че $\lim_{x \to 0^+} a^x = 1$ в случая на $a > 1$. Да пресметнем лявата граница:

   $$\lim_{x \to 0^-} a^x \overset{y:=-x}{=} \lim_{y \to 0^+} a^{-y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{a^y} = \frac{1}{1} = 1$$

   Тъй като лявата граница и дясната граница съществуват и са равни, оттук получихме, че $\lim_{x \to 0} a^x = 1$, ако $a > 1$.

   Ако имаме $0 < a < 1$, то:

   $$\lim_{x \to 0} a^x = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} \overset{y:=-x}{=} \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{a}\right)^y = 1$$

   Случаят $a = 1$ е тривиален, с което сме доказали, че $\lim_{x \to 0} a^x = 1$ за всяко $a > 0$.

   Като следствие получаваме:

   $$\lim_{x \to x_0} a^x = \lim_{x \to x_0} a^{x_0}.a^{x - x_0} \overset{y:=x-x_0}{=} a^{x_0} \lim_{y \to 0} a^y = a^{x_0}.1 = a^{x_0}$$

2. Ще докажем, че $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. В зависимост от това дали x клони към нула с положителни или отрицателни стойности, разглеждаме следните случаи:

- x клони към нула отдясно. Нека $x\in(0,1)$. Тогава можем да намерим $n\in\mathbb{N}$ такова, че:
$$\frac{1}{n+1}\le x\le\frac{1}{n}\Rightarrow n+1\ge\frac{1}{x}\ge n$$
Разглеждаме две редици $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, с които двустранно ще оценим функцията $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ в избрания интервал $\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$:
$$(1+x)^{\frac{1}{x}}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=:a_n$$
$$(1+x)^{\frac{1}{x}}\ge\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{x}}\ge\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=:b_n$$
Сега:
$$\begin{cases}\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=e.1=e\\ \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}=e.\frac{1}{1+0}=e.1=e\end{cases}$$
Нека $\varepsilon>0$ е произволно. От $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}e$ и $b_n\xrightarrow[n\to\infty]{}e$ следва, че $\exists\, n_0\in\mathbb{N}\;\forall\, n\ge n_0:$ $a_n\in(e-\varepsilon,e+\varepsilon)\,,b_n\in(e-\varepsilon,e+\varepsilon)$. Тогава за всяко x с $0<x<\frac{1}{n_0}$ съществува $n\ge n_0$, за което:
$$\frac{1}{n+1}\le x\le\frac{1}{n}\Rightarrow b_n\le(1+x)^{\frac{1}{x}}\le a_n\text{ за някое }n\ge n_0$$
Да заключим:
$$e-\varepsilon<b_n\le(1+x)^{\frac{1}{x}}\le a_n<e+\varepsilon\Rightarrow(1+x)^{\frac{1}{x}}\in(e-\varepsilon,e+\varepsilon)\;\;\forall x\in\mathbb{Q}\cap\left(0,\frac{1}{n_0}\right)$$
Следователно $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

- x клони към нула отляво. Ще сведем този случай към предишния, като започнем с полагане $y:=-x$:
$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}\overset{y:=-x}{=}\lim_{y\to 0^+}(1-y)^{-\frac{1}{y}}\text{ (Когато }x\xrightarrow[x<0]{}0\text{, тогава }y\xrightarrow[y>0]{}0\text{)},$$
$$\lim_{y\to 0^+}(1-y)^{-\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{(1-y)^{\frac{1}{y}}}=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0^+}\left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}$$
Извършваме ново полагане $z:=\frac{y}{y-1}$ (самостоятелно проверете, че в такъв случай $y=\frac{z}{z+1}$):
$$\lim_{y\to 0^+}\left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}=\lim_{z\to 0^+}(1+z)^{\frac{z+1}{z}}\text{ (Когато }y\xrightarrow[y>0]{}0\text{, тогава }z\xrightarrow[z>0]{}0\text{)},$$
$$\lim_{z\to 0^+}(1+z)^{\frac{z+1}{z}}=\lim_{z\to 0^+}(1+z)^{1+\frac{1}{z}}=\lim_{z\to 0^+}(1+z)\,(1+z)^{\frac{1}{z}}=1.e=e$$