1 Производна

1.1 Дефиниции

- Мотивация
- Дефиниция

Нека f е дефинирана в околност $(a-\delta,\, a+\delta)$ на точката a. Казваме, че f има производна в точката a (f е диференцируема в точката a), ако съществува крайната граница

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- Означения: $f'(a)$, $\dfrac{df}{dx}(a)$
- Необходимо условие

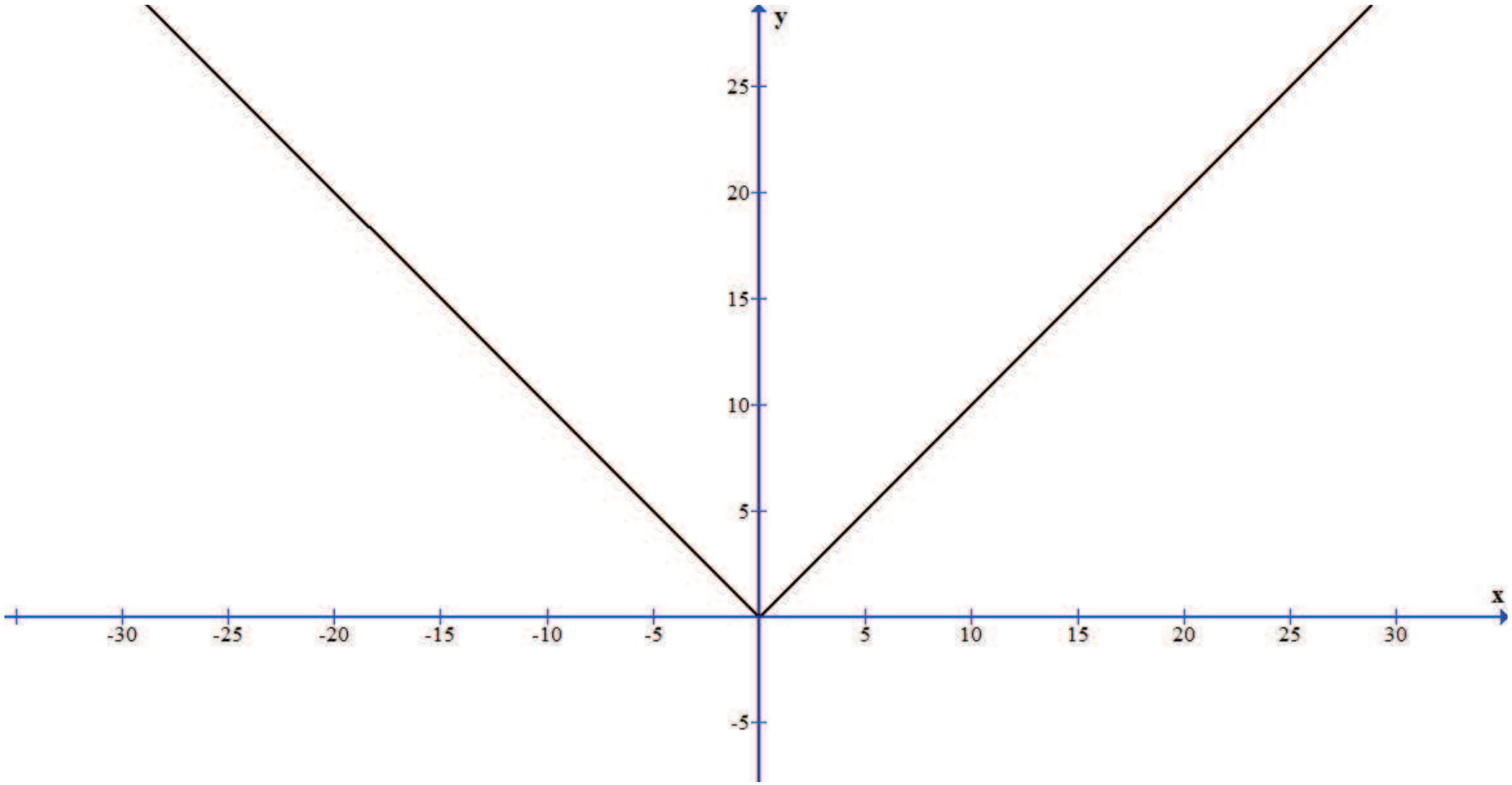
Ако f е диференцируема в точката a, то f е непрекъсната в a

Доказателство:

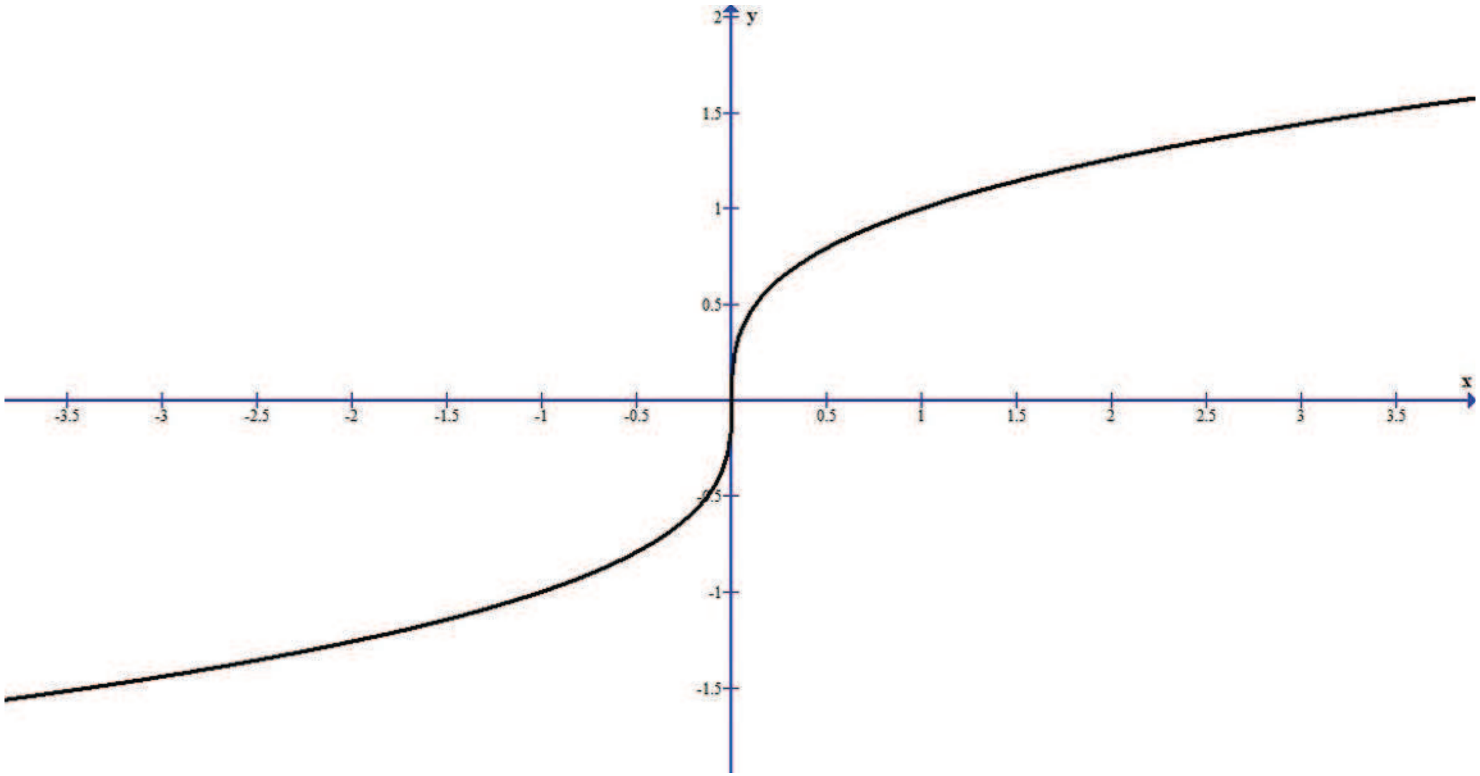
$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)+\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=f(a)+\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.\,\lim_{x\to a}(x-a)=f(a)\,.$$

1.2 Примери

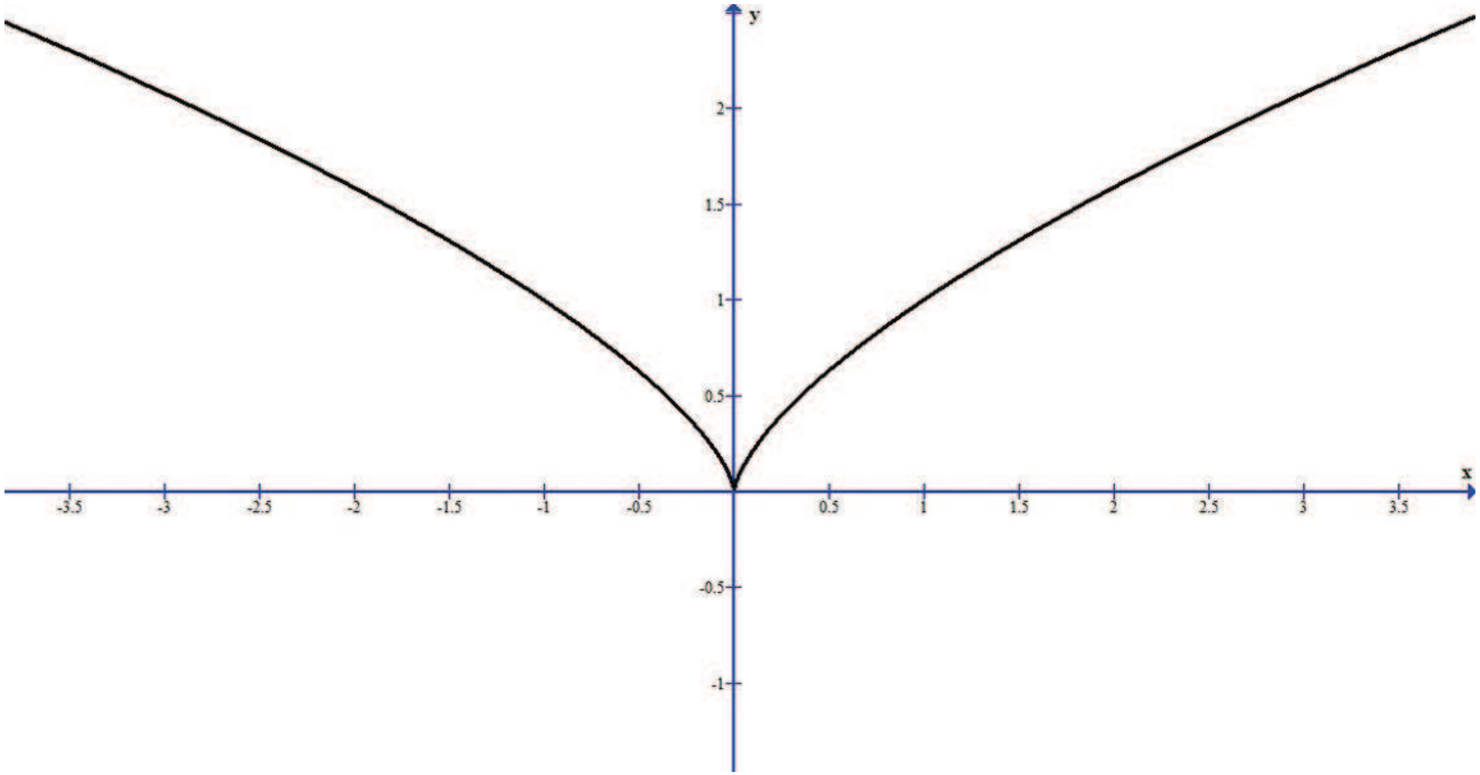
- $|x|$ няма производна в точката 0



- $\sqrt[3]{x}$ няма производна в точката 0



- $\sqrt[3]{x^2}$ няма производна в точката 0



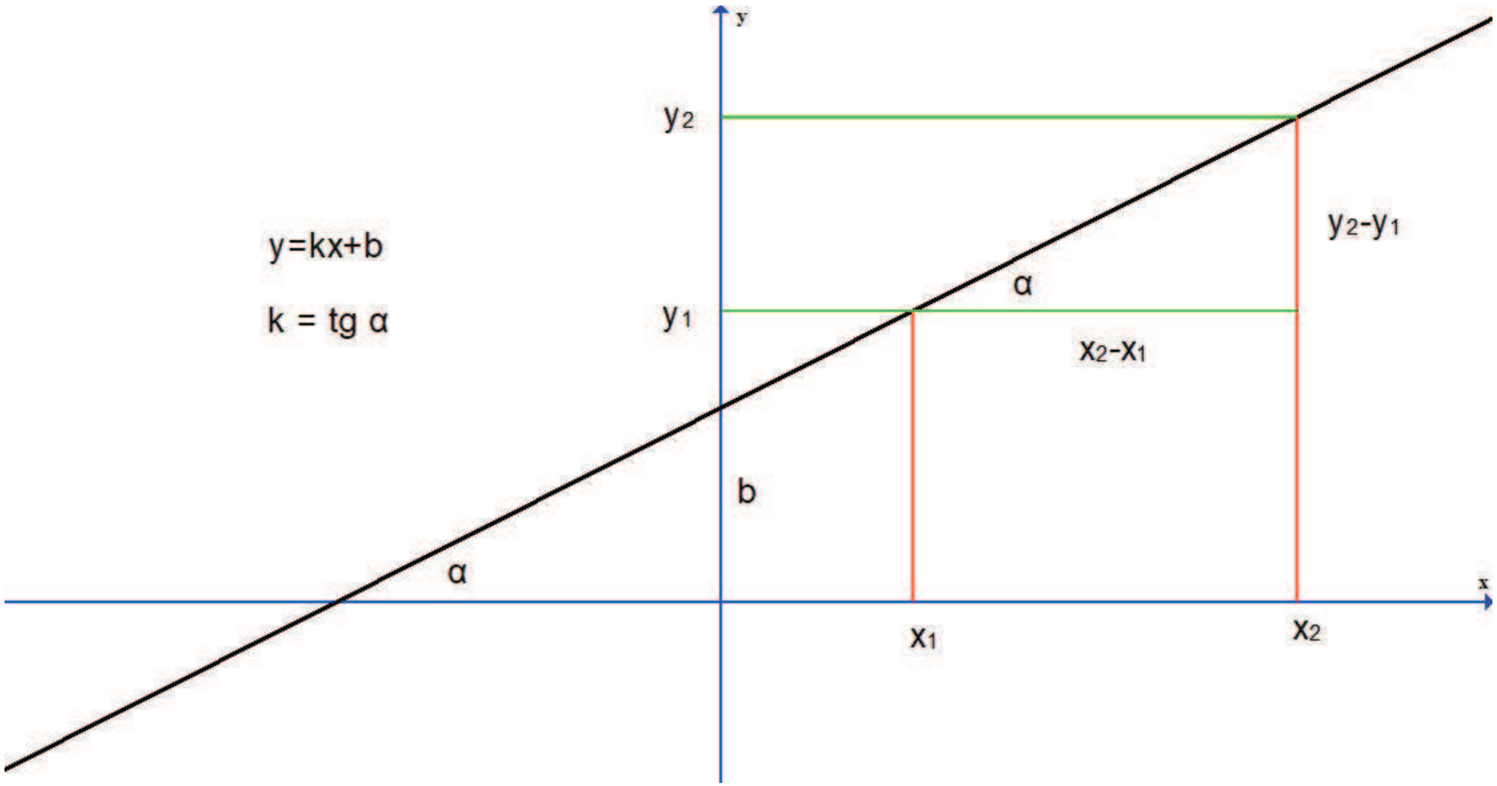
1.3 Геометричен смисъл

1.3.1 Уравнение на права

Нека права l минава през две различни точки $(x_1,\, y_1)$ и $(x_2,\, y_2)$.

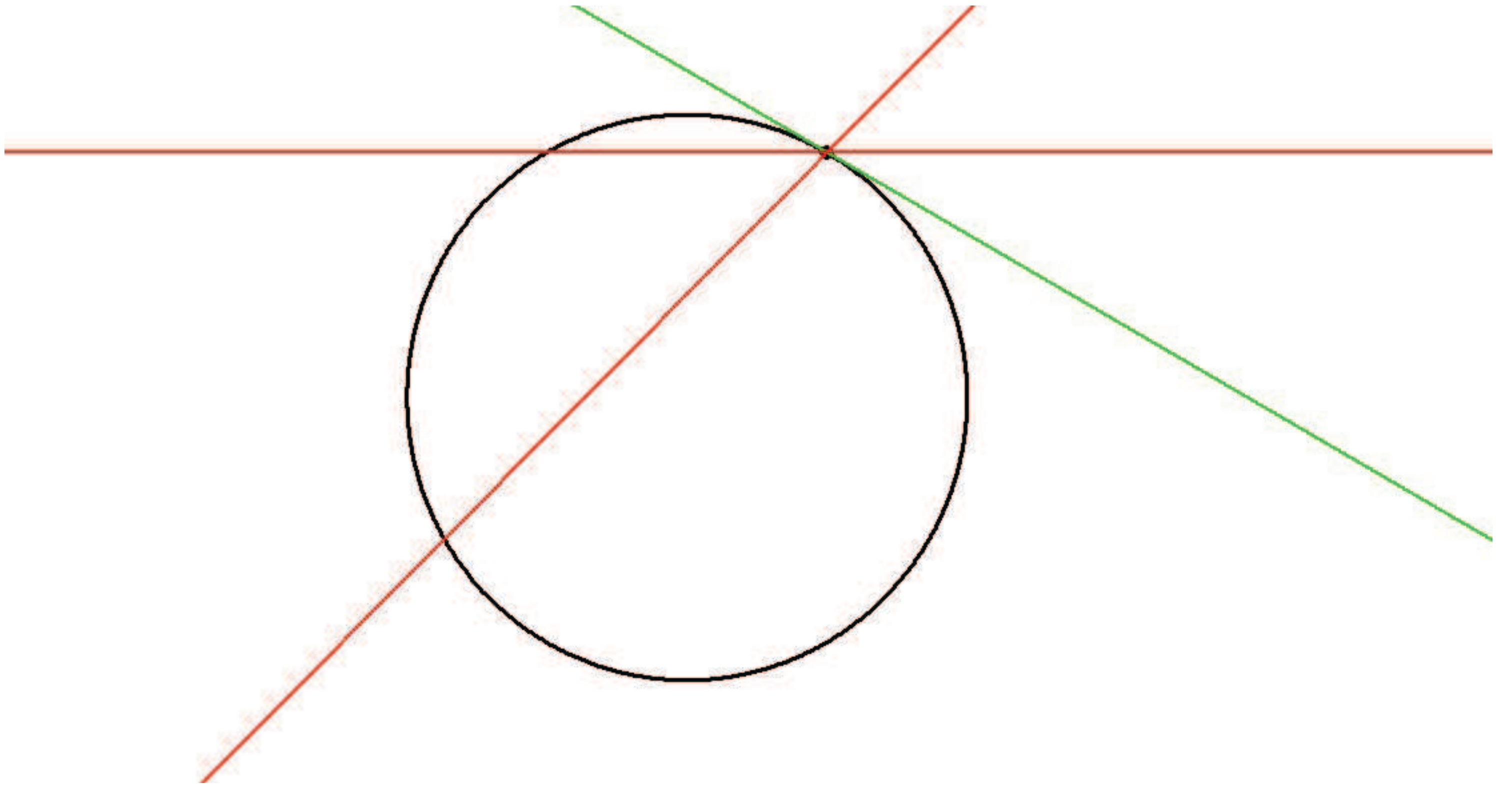
- Случай $x_1 = x_2$. Тогава правата l е вертикална с уравнение $x = x_1 = x_2$.
- Случай $x_1 \neq x_2$. Тогава правата l е с уравнение $y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) + y_1$.
- Уравнението на всяка невертикална права е $y = kx + b$,

  k – ъглов коефициент, b – отрез.


y
y2
y1
y=kx+b
k = tg α
α
y2-y1
x2-x1
b
α
x
x1
x2

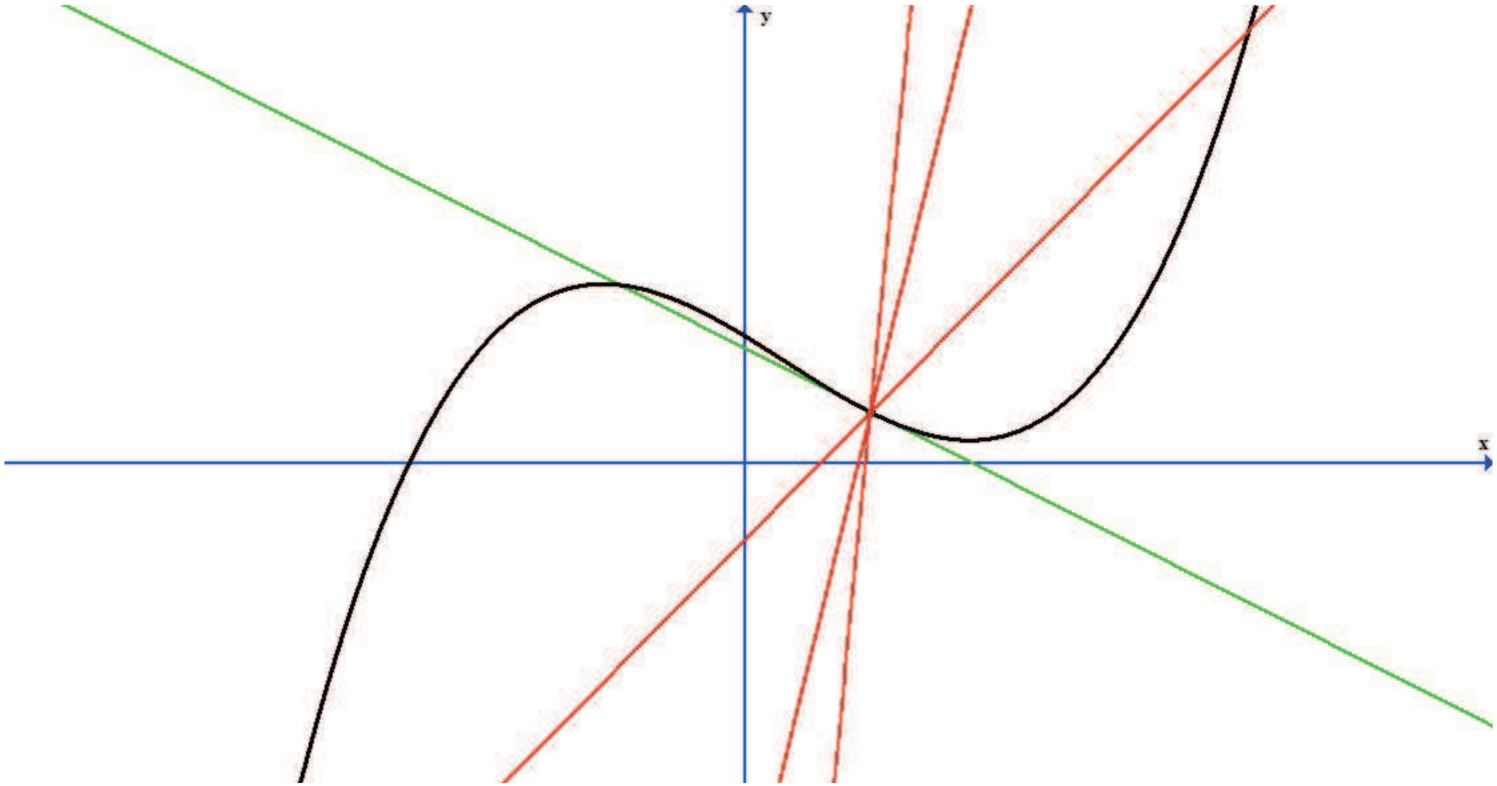
1.3.2 Допирателна към окръжност

Права, минаваща през дадена точка от окръжността и нямаща други общи точки с нея.



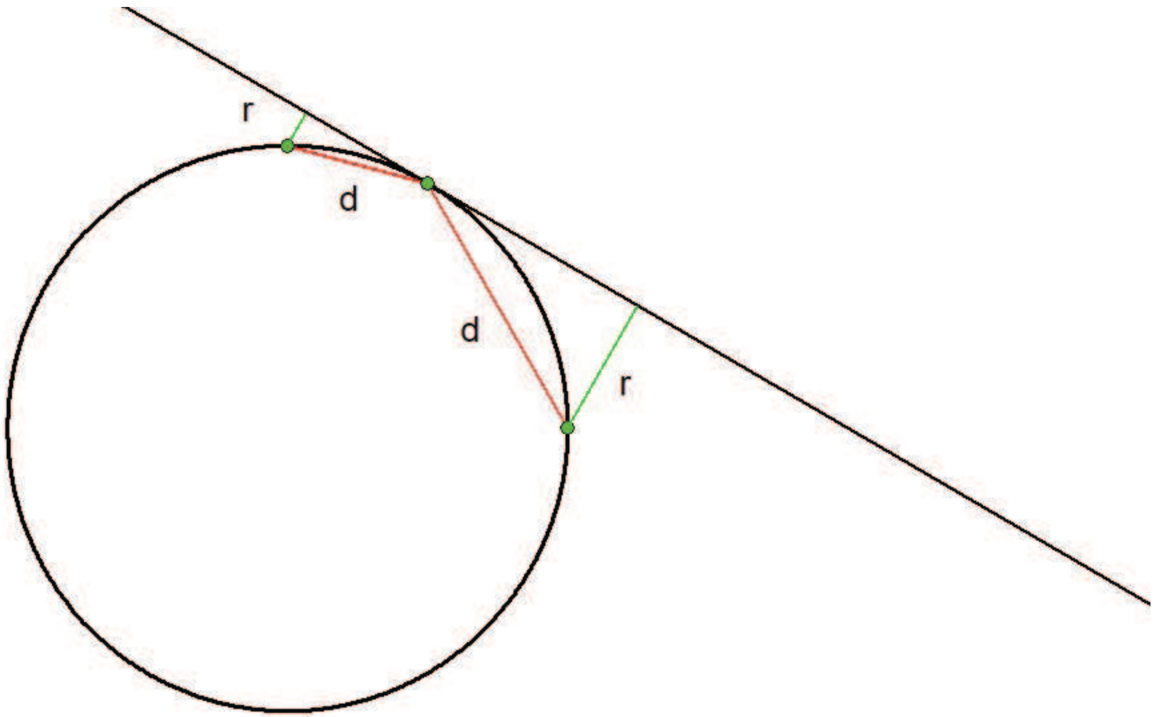
Не върши работа за функции

Две от червените прави, минава през дадена точка от графиката и нямат други общи точки с нея. Реалната допирателна е зелената права.



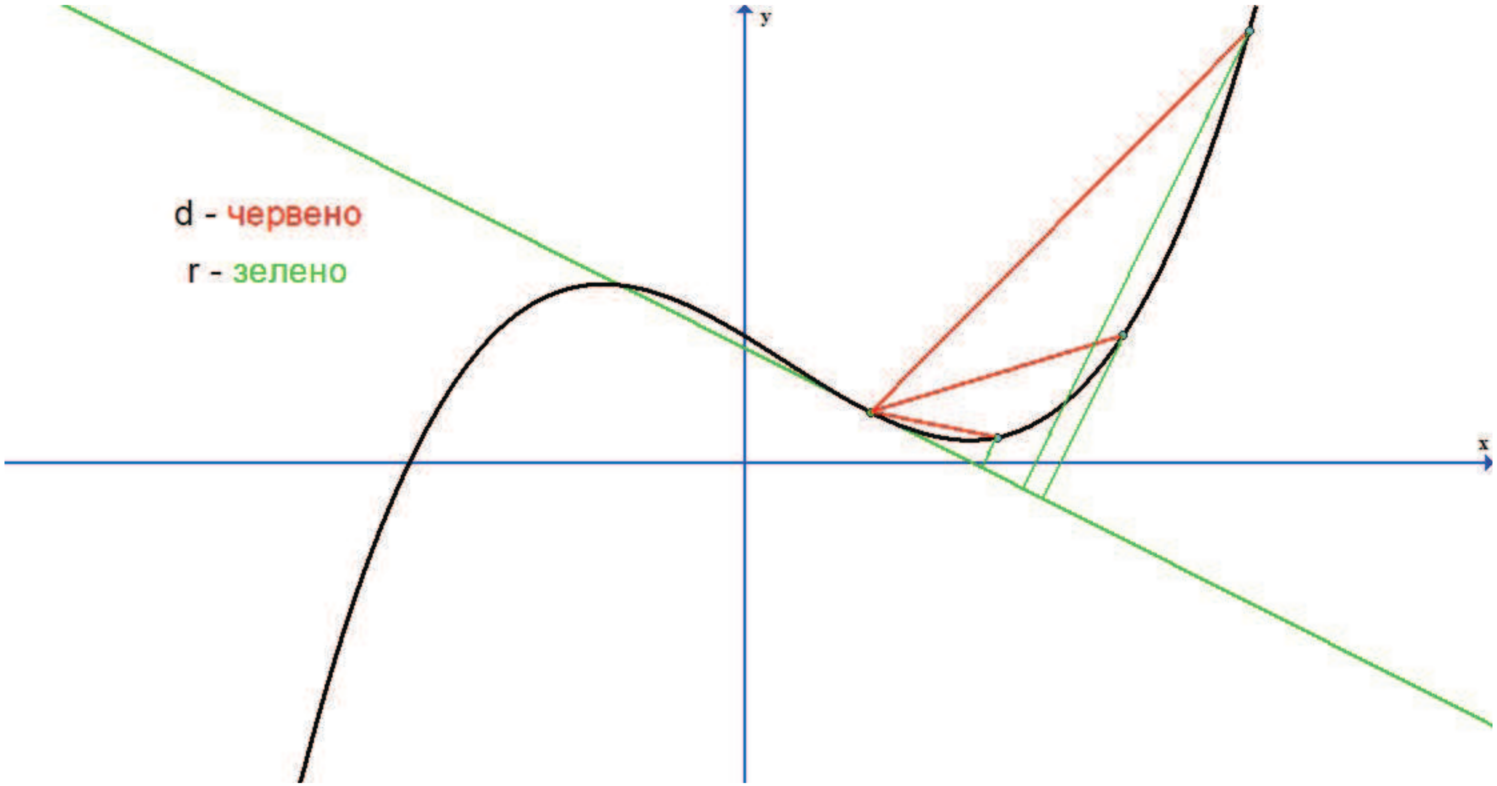
Допирателна към окръжност - свойство

$$\lim_{d \to 0} \frac{r}{d} = 0$$



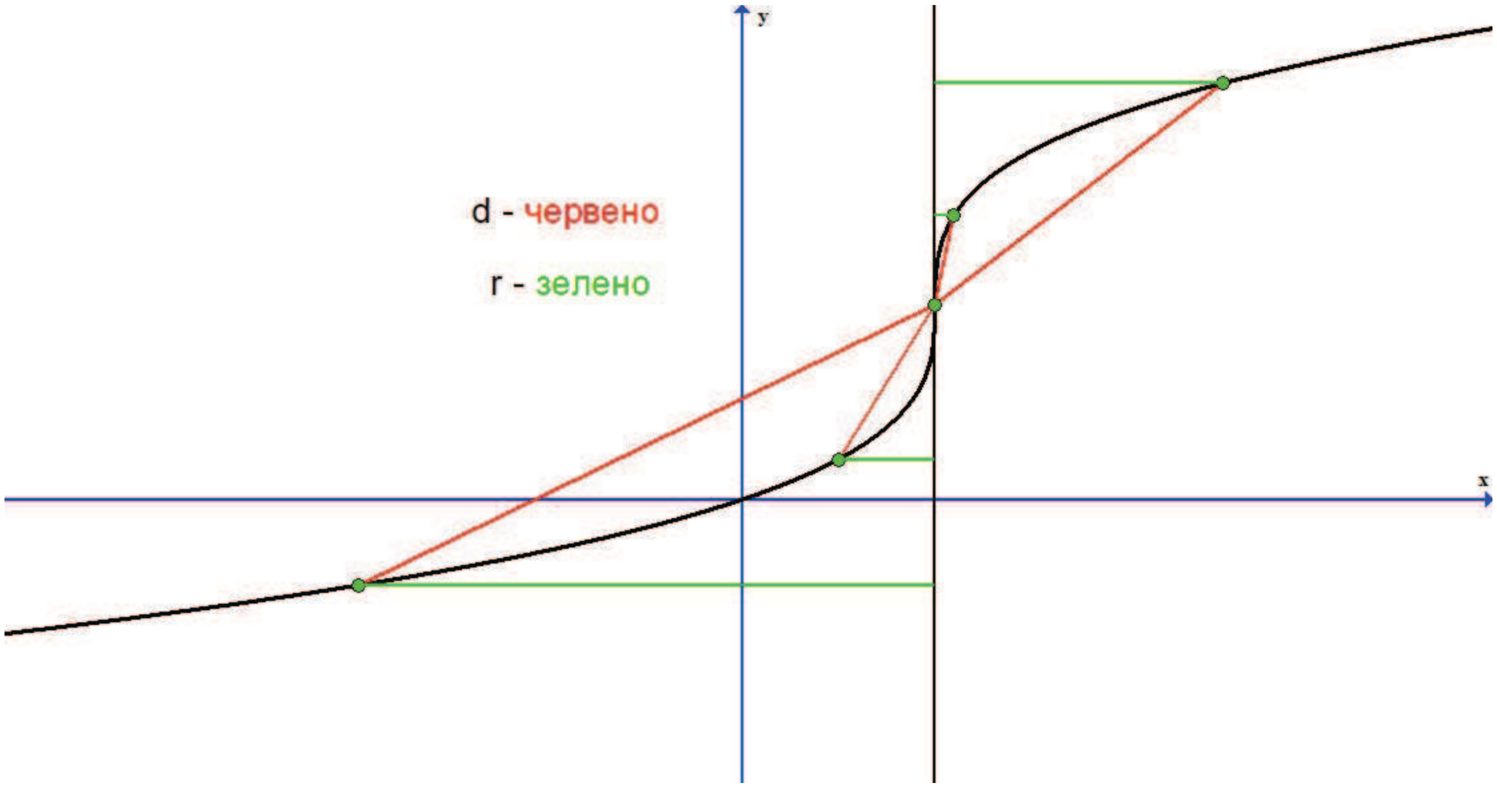
1.3.3 Допирателна към графика на функция

$$\lim_{d \to 0} \frac{r}{d} = 0$$

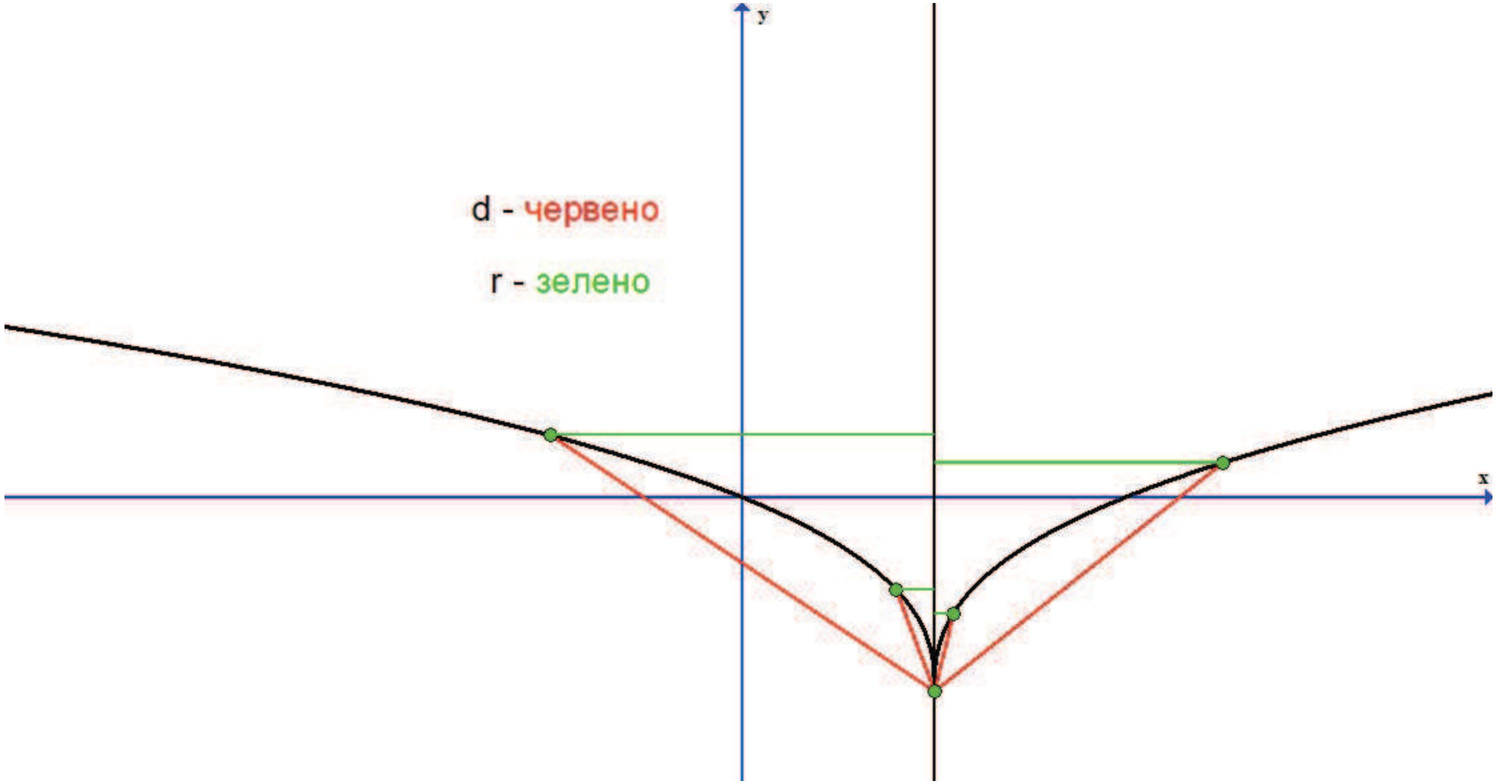


Вертикални допирателни

$$\lim_{d\to 0}\frac{r}{d} = 0$$



$$\lim_{d \to 0} \frac{r}{d} = 0$$



1.3.4 Необходимо и достатъчно условие

Нека a е вътрешна за D_f.

Правата $y = kx + b$ е допирателна към графиката f на тогава и само тогава, когато f има производна в a и $f'(a) = k$.

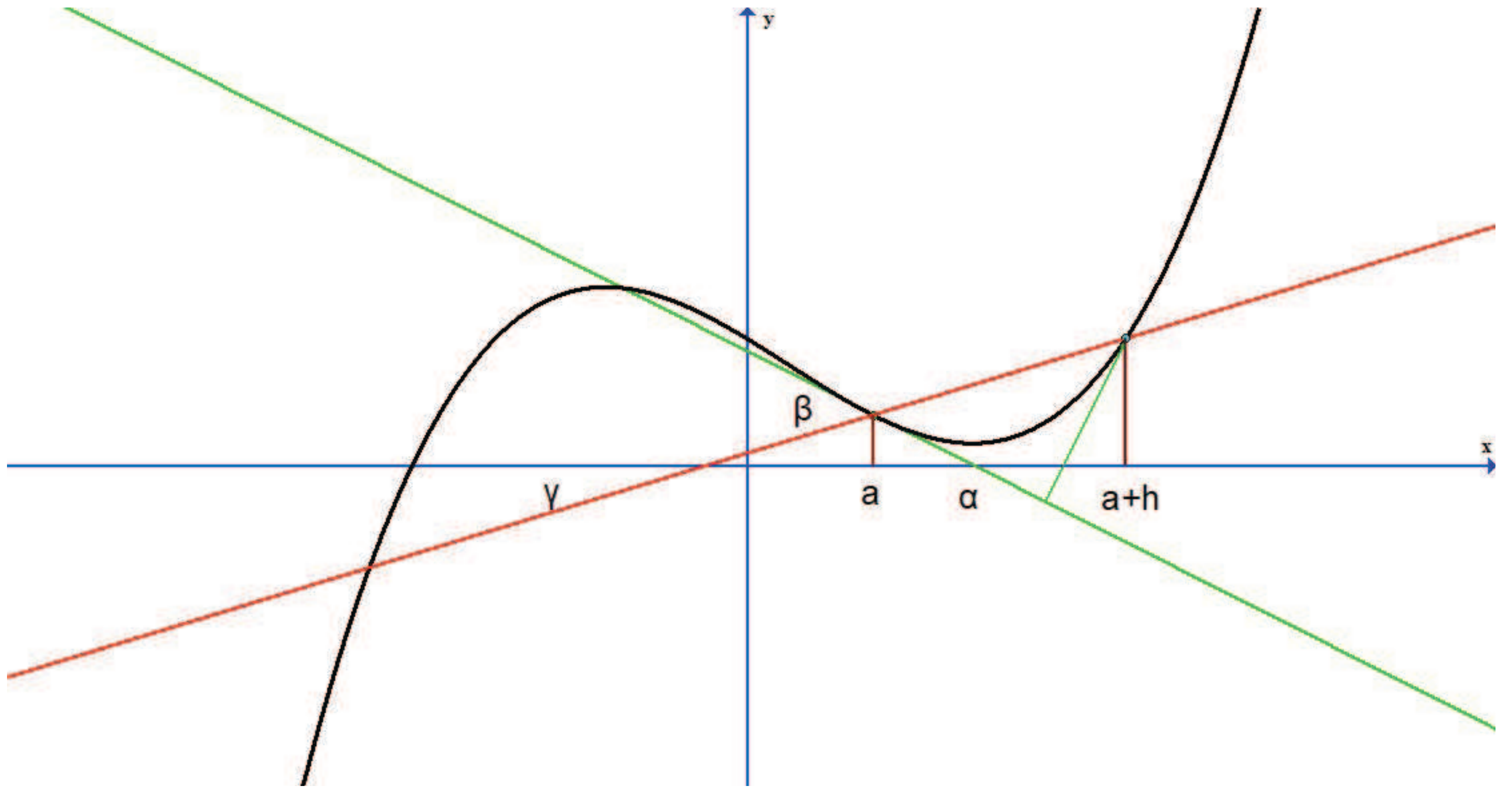


Схема на доказателството

- $\dfrac{r}{d} = \sin\beta \;\Rightarrow\; \lim\limits_{d\to 0}\dfrac{r}{d} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{d\to 0}\beta = 0$
- При $0 < \beta < \pi - \alpha$ имаме $\gamma = \beta + \alpha$. Следователно $\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{r}{d} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{d\to 0}\gamma = \alpha$
- $\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{r}{d} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{d\to 0}\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha$
- $\lim\limits_{d\to 0}\dfrac{r}{d} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{d\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = k$
- $\dfrac{h}{d} = \cos\gamma \;\Rightarrow\; d\to 0 \;\Leftrightarrow h\to 0$

1.4 Действия с производни

1.4.1 Аритметични действия

Нека f и g имат производна в точката a.

Тогава функциите $f+g$, $f-g$, Cf, $f.g$, $\dfrac{f}{g}$ $(g(a)\neq 0)$, имат производна в a, като:

- $$\frac{d(f\pm g)}{dx}(a)=\frac{df}{dx}(a)\pm\frac{dg}{dx}(a)$$
- $$\frac{d(C\,f)}{dx}(a)=C\,\frac{df}{dx}(a)$$
- $$\frac{d(f.g)}{dx}(a)=\frac{df}{dx}(a).g(a)+f(a).\frac{dg}{dx}(a)$$
- $$\frac{d\left(\dfrac{f}{g}\right)}{dx}(a)=\frac{\dfrac{df}{dx}(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot\dfrac{dg}{dx}(a)}{g^2(a)}$$

1.4.2 Производна на съставна функция

- Еквивалентна дефиниция на диференцируемост:

Казваме, че f е диференцируема в точката a, ако съществува число A, за което

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{h} = 0$$

- f е диференцируема в точката a тогава и само тогава, когато съществува число A, за което за всяко $\varepsilon > 0$ има $\delta > 0$ такова, че от $|x-a| < \delta$ следва

$|f(x)-f(a)-A(x-a)| \leq \varepsilon\,|x-a|$

- Просто следствие:

ако f е диференцируема в точката a, то има $C > 0$ такова, че $|f(x)-f(a)| \leq C\,|x-a|$ в околност на a.

Теорема Нека f има производна в точката a и g има производна в точката $f(a)$. Тогава съставната функция $H(x) = g(f(x))$ има производна в a, като $H'(a) = g'(f(a)).f'(a)$

Доказателство: нека $\varepsilon_1 > 0$.

1. понеже f е непрекъсната в точката a, то H е дефинирана в $(a-\delta_1,\, a+\delta_1)$.

2. има $C > 0$ и $\delta_2 > 0$ такива, че $|f(x) - f(a)| \leq C\,|x - a|$ в $(a - \delta_2,\ a + \delta_2)$.

3. има $\eta > 0$ такова, че $|g(y) - g\,(f(a)) - g'(f(a))(y - f(a))| \leq \varepsilon_1\,|y - f(a)|$ в $(f(a) - \eta,\ f(a) + \eta)$.

4. има $\delta_3 > 0$ такова, че $|f(x) - f(a)| < \eta$ в $(a - \delta_3,\ a + \delta_3)$.

5. има $\delta_4 > 0$ такова, че $|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| \leq \varepsilon_1\,|x - a|$ в $(a - \delta_4,\ a + \delta_4)$.

6. полагаме $\delta = \min(\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \delta_4)$, тогава в $(a - \delta,\ a + \delta)$ имаме

$$|g(f(x)) - g(f(a)) - g'(f(a)).f'(a)(x - a)| \leq$$
$$\leq |g(f(x)) - g(f(a)) - g'(f(a))(f(x) - f(a))| + |g'(f(a))|\,.\,|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| \leq$$
$$\leq \varepsilon_1\,|f(x) - f(a)| + |g'(f(a))|\,.\varepsilon_1.\,|x - a| \leq \varepsilon_1\,(C + |g'(f(a))|)\,.\,|x - a|$$

7. остава да изберем $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{C + |g'(f(a))|}$ за дадено $\varepsilon > 0$.

1.4.3 Производна на обратна функция

Теорема Нека f е непрекъсната и обратима в околност $(a - \delta,\ a + \delta)$ на точката a и има производна в точката a, за която $f\,'(a) \neq 0$.

Ако g е обратната на f, то g има производна в $b = f(a)$, като $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Доказателство:

1. g е непрекъсната в околност $(b - \varepsilon,\, b + \varepsilon)$

2. $\lim\limits_{y \to b} g(y) = g(b)$; $x = g(y) \;\Rightarrow\; y \to b \;\Leftrightarrow\; x \to a$

3. $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} = \dfrac{1}{\lim\limits_{y \to b} \dfrac{y - b}{g(y) - g(b)}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \dfrac{1}{f'(a)}$

1.5 Основни производни, производни от по-висок ред

1.5.1 Таблица на производните

1. $(C)' = 0$

2. $(x^a)' = a\, x^{a-1}$

   - $a \in \mathbb{N}$ или $-a \in \mathbb{N}$
   - $\dfrac{1}{a} \in \mathbb{N}$, при $a \in \mathbb{Q}$ дефиниционната област е $x > 0$

3. $(e^x)' = e^x \,, \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

- $(a^x)' = a^x \ln a \,, \quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $(x^a)' = \left(e^{a \ln x}\right)' = e^{a \ln x} \cdot \dfrac{a}{x} = a\, x^{a-1}$
- $\left((f(x))^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x) \ln f(x)}\right)' = \ldots\ldots$

4. $(\sin x)' = \cos x \,, \quad (\cos x)' = -\sin x$

5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \,, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,, \quad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \,, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

8.

- $\left(\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

- $\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\left(\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$

1.5.2 Колко “хубава“ е производната?

Нека f има производна в отворен интервал J

- $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ — f' е прекъсната в 0.
- ако $f'(a)f'(b) < 0$ за $a < b \in J$, то има $c \in (a, b)$, за което $f'(c) = 0$
- $f(x) = x\,|x|$ — f' няма производна в 0.

1.5.3 Производни от по-висок ред

- Нека f има производна в отворен интервал J, $a \in J$

  Казваме, че f има втора производна в a, ако f' има производна в a.

Означение: $f''(a) = \dfrac{d^2 f}{dx^2}(a) = \dfrac{df'}{dx}(a)$

- Нека f има производна от ред k в отворен интервал J, $a \in J$

Казваме, че f има производна от ред $k+1$, ако $f^{(k)}$ има производна в a.

- Означение: $f^{(k+1)}(a) = \dfrac{d^{k+1} f}{dx^{k+1}}(a) = \dfrac{df^{(k)}}{dx}(a)$

Примери

1. $(e^x)^{(k)} = e^x$
2. $(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$
3. $(\cos x)^{(k)} = \cos\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$
4. $(x^a)^{(k)} = a\,(a-1)\ldots(a-k+1)\,x^{a-k} = k!\dbinom{a}{k}x^{a-k}$
5. ако $P(x)$ е полином от степен не по-висока от m, то $P^{(k)}(x) = 0$ за $k > m$

6. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(k)} = \dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$

7. $(\ln x)^{(k)} = \dfrac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!}{x^k}$

Аритметични действия

1. $(Cf(x))^{(k)} = Cf^{(k)}(x)$

2. $(f(x)+g(x))^{(k)} = f^{(k)}(x) + g^{(k)}(x)$

3. $(f(x)g(x))^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x)$

пример $\quad \dfrac{d^{2018}\left(x^{1009}e^x\right)}{dx^{2018}}(0) = \dfrac{2018!}{1009!}$

4. $(f(ax+b))^{(k)} = a^k.f^{(k)}(ax+b)$

пример $\quad \dfrac{d^{2018}\left(\frac{1}{4x^2-1}\right)}{dx^{2018}}(0) = -2^{2018}.2018!$