Домашна работа № 1
на Петър Парушев с ФН 61620, група 1, СИ

Задача 1.

А)

arcsin $sin\frac{61620\pi}{7}$ = arcsin sin $8082\pi + \frac{6\pi}{7}$ = arcsin $sin\frac{6\pi}{7}$ = $\frac{6\pi}{7}$

Б)

arccos(cos$-\frac{61620\pi}{5}$) = arccos(cos -4324π) = arccos(cos 0) = 0

Задача 2.

А)

sin arctg $\frac{4}{3}$ - cos arccotg $\frac{12}{5}$

Чрез подходящи правоъгълни триъгълници намираме, че:

arctg $\frac{4}{3}$ = arcsin $\frac{4}{5}$

arccotg $\frac{12}{5}$ = acrcos $\frac{12}{13}$

sin arcsin $\frac{4}{5}$ **-** cos acrcos $\frac{12}{13}$ = $\frac{4}{5}$ **-** $\frac{12}{13}$ = **-** $\frac{8}{65}$

Б)

arccotg π + arccos(**-** $\frac{1}{2}$) - arctg(-π) = arccotg π + arctg(π) + $\frac{2\pi}{3}$ = $\frac{\pi}{2}$ + $\frac{2\pi}{3}$ = $\frac{7\pi}{6}$

В)

sin (2arctg $\sqrt{7}$) - cos (2arctg $\sqrt{15}$) =

= 2sin(arctg $\sqrt{7}$)cos(arctg $\sqrt{7}$) – (2cos^2(arctg $\sqrt{15}$) -1)

Чрез подходящи правоъгълни триъгълници намираме, че:

arctg$\sqrt{7}$ = arcsin $\frac{\sqrt{14}}{4}$ = arccos $\frac{\sqrt{2}}{4}$

arctg$\sqrt{15}$ = arccos $\frac{1}{4}$

2sin(arctg $\sqrt{7}$)cos(arctg $\sqrt{7}$) – (2cos^2(arctg $\sqrt{15}$) -1)=2$\frac{\sqrt{14}}{4}\frac{\sqrt{2}}{4}$ - 2$\frac{1}{16}$ +1 = $\frac{2\sqrt{7}-1+8}{8}$ = $\frac{2\sqrt{7}+7}{8}$

Задача 3.

arccos x = arctg x

1.При x ∈ [-1;0] няма решение понеже arccos x и arctg x са с рални знаци.

2.При x ∈ (0;1] cos(arccos x) =cos(arctg x)

Чертаем подходящ правоъгълен триъгълник. Получаваме:

arctg x= arccos $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

След преобразувания и решаване на биквадратно уравнение получаваме корени, от които само x= $\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ ∈ (0;1].

Задача 4.

arccos x < arcsin x

При x ∈ [-1;0] arccos x е положителна , а arcsin x е отрицателна и неравенството не е изпълнено.

При x ∈ (0;1]:

sin arccos x < sin arcsin x

sin arccos x < x

Чертаем подходящ правоъгълен триъгълник. Получаваме:

arccos x = arcsin $\sqrt{1-x^2}$

sin arcsin $\sqrt{1-x^2}$ < x

$\sqrt{1-x^2}$ < x

$1-x^2 < x^2$

$1-2x^2 < 0$

$(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)<0$

x ∈ $(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty) \cup (0;1] =(\frac{\sqrt{2}}{2};1]$.

Задача 6.

А)

$1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

За n=1 : $1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1$ твърдението е изпълнено.

Нека твърдението е изпълнено и за някое друго n. Ще проверим за n+1:

$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2}{4}(4n+4+n^2)=\frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4}$

По принципа на математическата индукция твърдението е изпълнено за всяко n≥1.

Б)

$1^5+2^5+...+n^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$

За n=1 : $1^5=\frac{1^2(1+1)^2(2+2-1)}{12}=1$ твърдението е изпълнено.

Нека твърдението е изпълнено и за някое друго n. Ще докажем за n+1 следното тъждество:

$1^5+2^5+...+n^5+(n+1)^5 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)^2(n+2)^2(2(n+1)^2+2(n+1)-1)}{12}$

$\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}+(n+1)^5 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)^2(n+2)^2(2n^2+6n+3)}{12}$

$\frac{(n+1)^2}{12}(n^2(2n^2+2n-1)+12(n+1)^3) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)^2(n+2)^2(2n^2+6n+3)}{12}$

$n^2(2n^2+2n-1)+12(n+1)^3 \stackrel{?}{=} (n+2)^2(2n^2+6n+3)$

$2n^4+2n^3-n^2+12(n^3+3n^2+3n+1) \stackrel{?}{=} (n^2+4n+4)(2n^2+6n+3)$

$2n^4+2n^3-n^2+12n^3+36n^2+36n+12 \stackrel{?}{=} 2n^4+8n^3+8n^2+6n^3+24n^2+24n+3n^2+12n+12$

След съкращаване получаваме равенство. По принципа на математическата индукция твърдението е изпълнено за всяко n≥1.

В)

$1.2.3.4.5 + 2.3.4.5.6 + .. + n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{6}$

За n=1 : $1.2.3.4.5=\frac{1.2.3.4.5.6}{6}$ е вярно и твърдението е изпълнено.

Нека твърдението е изпълнено и за някое друго n. Ще проверим за n+1:

1.2.3.4.5 + 2.3.4.5.6 + .. + n(n+1) (n+2) (n+3) (n+4)+ (n+1) (n+2) (n+3) (n+4)(n+5)=

$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{6}$ + (n+1) (n+2) (n+3) (n+4)(n+5)=

= (n+1) (n+2) (n+3) (n+4)(n+5)($\frac{n}{6} + 1$)=

= (n+1) (n+2) (n+3) (n+4)(n+5)($\frac{n+6)}{6}$)=

$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{6}$

По принципа на математическата индукция твърдението е изпълнено за всяко n≥1.

Задача 7.

А)

$\frac{1}{n+1} < \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

За n=2 : $\frac{1}{2+1} < \frac{1.3}{2.4} < \frac{1}{\sqrt{6+1}}$; $\frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{7}}$ твърдението е изпълнено.

Нека M = $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ е вярно.

Нека M е изпълнено и за някое друго n. Ще проверим за n+1:

$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}{2.4.6\ldots.(2n)(2n+2)} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$; Делим на индукционното предположение.

$\frac{(2n+1)}{(2n+2)} < \frac{\frac{1}{\sqrt{3n+4}}}{\frac{1}{\sqrt{3n+1}}}$

$\frac{(2n+1)}{(2n+2)} < \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}}$

Решаваме и получаваме:

-n < 0

По принципа на математическата индукция твърдението M е изпълнено за всяко n≥2.

Нека N= $\frac{1}{n+1} < \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)}$ е вярно.

Нека N е изпълнено и за някое друго n. Ще проверим за n+1:

$\frac{1}{\mathrm{n}+2} < \frac{1.3.5\ldots(2\mathrm{n}-1)(2n+1)}{2.4.6\ldots.(2n)(2\mathrm{n}+2)}$; Делим на индукционното предположение.

$\frac{(2n+1)}{(2\mathrm{n}+2)} > \frac{\frac{1}{\mathrm{n}+2}}{\frac{1}{\mathrm{n}+1}}$

Решаваме и получаваме:

n > 0

По принципа на математическата индукция твърдението N е изпълнено за всяко n≥2.

Б)

$$(1+\frac{1}{\mathrm{n}+1})^{n+2} < (1+\frac{1}{\mathrm{n}})^{n+1}$$

$$(\frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1})^{n+2} < (\frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}})^{n+1}$$

$$\frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1}(\frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1})^{n+1} < (\frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}})^{n+1}$$

$$\frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1}(\frac{\frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1}}{\frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}}})^{n+1} < 1$$

$$\frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1}(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2})^{n+1} < 1$$

$\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$ <1 => $\frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1}(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2})^{n+1} < \frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1}\,\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

Ще проверим дали е вярно:

$$\frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1}\,\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1$$