Контролно 2, Анализ 1, КН, 2 поток

25.01.2013 г.

Тема 1

Зад.1 Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{5/x^2}$

Решение: 1-ви начин: Логаритмуваме: $\lim\limits_{x\to0}\frac{5}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=5\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}\overset{\text{Лопитал}}{=}\dots$

$$=5\lim_{x\to0}\frac{(x\cos x-\sin x).x}{x^2.2x.\sin x}\overset{\text{Лоп.}}{=}\frac52\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\frac52\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2\sin x+x\cos x}\overset{\text{Лоп.}}{=}\frac52\lim_{x\to0}\frac{\overbrace{-\cos x}^{-1}}{\underbrace{2\cos x+\cos x}_{3}-\underbrace{x\sin x}_{0}}$$

$$=-\frac56\Rightarrow\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{5/x^2}=e^{-5/6}\qquad\square$$

2-ри начин: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{5/x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{5/x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x}\cdot\frac{5}{x^2}}=$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{\sin x-x}{x}\cdot\frac{5}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x}\cdot\frac{5}{x^2}}=e^{5\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}}\overset{\text{Лоп.}}{=}e^{5\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}}\overset{\text{Лоп.}}{=}e^{5\lim\limits_{x\to0}-\frac{\sin x}{6x}}=e^{-5/6}\qquad\square$$

Зад.2 Намерете $f^{(6)}(0)$, където $f(x)=(x+fn)\sqrt[3]{1-x}$, където fn е Вашият факултетен номер

Решение: $f(x)$ е k-кратно диференцируема $\forall k\in\mathbb{N}$. Тогава представянето ѝ във формула на Маклорен до $o(x^6)$ изглежда така: $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{6}a_kx^k+o(x^6)$, където $a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

От друга страна $f(x)=(x+fn)\left(1-\frac13x+\binom{1/3}{2}x^2-\binom{1/3}{3}x^3+\binom{1/3}{4}x^4-\binom{1/3}{5}x^5+\binom{1/3}{6}x^6+o(x^6)\right)$.

Приравнявайки коефициентите, за a_6 получаваме:

$$a_6=\frac{f^{(6)}(0)}{6!}=\binom{1/3}{6}fn-\binom{1/3}{5}\Rightarrow f^{(6)}(0)=6!\left[\binom{1/3}{6}fn-\binom{1/3}{5}\right]\qquad\square$$

Зад.3 Да се пресметне интегралът $\int\cos^2(\ln(x))dx$

Решение: $I=\int\cos^2(\ln x)dx=\int\frac{1+\cos(2\ln x)}{2}dx=\frac{x}{2}+\frac12J$; $J=\int\cos(2\ln x)dx=$

$$=x\cos(2\ln x)-\int x\,d\cos(2\ln x)=x\cos(2\ln x)+\int\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}\sin(2\ln x)dx=$$

$$=x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)-2\int x\,d\sin(2\ln x)=x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)-4\int\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\cos(2\ln x)dx=$$

$$=x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)-4J\Rightarrow5J=x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J=\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)}{5}+C\Rightarrow I=\frac{x}{2}+\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)}{10}+C\qquad\square$$

Зад.4 Да се пресметне интегралът $\int\frac{x^4-4x^3+5x^2+10x-10}{x^3-3x^2+3x+5}dx$

Решение: $I=\int\frac{x^4-4x^3+5x^2+10x-10}{x^3-3x^2+x+5}dx=\int\frac{(x+1)(x^2-4x+5)(x-1)+x^2+6x-5}{(x+1)(x^2-4x+5)}dx=\int(x-1)dx+\int\frac{x^2+6x-5}{(x+1)(x^2-4x+5)}dx=$

$=\frac{(x-1)^2}{2}+J$. Пресмятаме J: $\frac{x^2+6x-5}{(x+1)(x^2-4x+5)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+5}\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+6x-5=A(x^2-4x+5)+(Bx+C)(x+1)$. Последователно намираме:

$$\left.\begin{array}{l}x=-1:\ -10=10A\Rightarrow A=-1\\ x=0:\ -5=-5+C\Rightarrow C=0\\ x=1:\ 2=-2+2B\Rightarrow B=2\end{array}\right\}\Rightarrow J=-\ln|x+1|+\int\frac{2x-4+4}{(x-2)^2+1}dx=-\ln|x+1|+\int\frac{d((x-2)^2+1)}{(x-2)^2+1}+4\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1}dx=$$

$$=\ln\left|\frac{x^2-4x+5}{x+1}\right|+4\,\mathrm{arctg}(x-2)+C\Rightarrow I=\frac{(x-1)^2}{2}+\ln\left|\frac{x^2-4x+5}{x+1}\right|+4\,\mathrm{arctg}(x-2)+C\qquad\square$$