Лекция 3: Редици от реални числа

1 Основни свойства на сходящите редици от реални числа

Припомняме свойствата на сходящите редици от реални числа, с които се занимахме в края на предишната лекция.

1. Прибавянето или задраскването на краен брой членове на редицата не влияе на сходимостта (и на границата).

2. Сходящите редици са ограничени, т.е. ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, то множеството $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ е ограничено.

3. Нека $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ и $a_n \leq b_n \; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогава $a \leq b$.

   Следствие 1.1. *Ако една редица е сходяща, то нейната граница е единствена.*

4. (Лема за двамата полицаи) Нека $a_n \leq c_n \leq b_n \; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ и $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

   Последната лема е изключително често употребявана, както постепенно ще се убедите. Веднага ще отбележим само следното

   Следствие 1.2. *Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, то $a_n.b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*

   Доказателство. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена $\Rightarrow \exists\, M > 0 \; \forall\, n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq M$. Ползваме, че $a_n.b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff |a_n.b_n - 0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Разглеждаме веригата от неравенства

   $$0 \leq |a_n.b_n| \leq |a_n|\,.|b_n| \leq M|a_n|$$

   Ако докажем, че $M|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (защото $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$) резултатът следва от лемата за двамата полицаи. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава от $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ следва $\left\{n : |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}\right\} = \{n : M|a_n| < \varepsilon\}$ - кофинитно, с което $M|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ е доказано. $\square$

   Пример 1.3. $\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

5. Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ и $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$, то $a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a + b$.

Доказателство. $|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a| + |b_n-b|$. Сега за произволно $\varepsilon>0$:

$$\begin{cases} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \Rightarrow \exists\, n_1\in\mathbb{N}\;\forall\, n\geq n_1 : |a_n-a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b \Rightarrow \exists\, n_2\in\mathbb{N}\;\forall\, n\geq n_2 : |b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Ако означим $n_0=\max\{n_1,n_2\}$, то

$$\forall\, n\geq n_0 : |(a_n+b_n)-(a+b)| \leq |a_n-a| + |b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Показахме, че $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\, n_0\in\mathbb{N}\;\forall\, n\geq n_0 : |(a_n+b_n)-(a+b)| < \varepsilon$. □

6. Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ и $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$, то $a_n.b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$.

Доказателство. Тъй като $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$, то $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена според свойство 2, и следователно съществува $M>0$ такова, че $|b_n| \leq M$ за всички $n\in\mathbb{N}$. Тогава:

$$\begin{aligned} 0 \leq |a_n.b_n-ab| &= |a_n.b_n-a.b_n+a.b_n-ab| = |(a_n-a)\,b_n+a\,(b_n-b)| \leq \\ &\leq |a_n-a|\,|b_n| + |a|\,|b_n-b| \leq M|a_n-a| + |a|\,|b_n-b|\,. \end{aligned}$$

Да фиксираме $\varepsilon>0$ произволно. От $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ получаваме, че $\exists\, n_1\in\mathbb{N}\;\forall\, n\geq n_1 :$ $|a_n-a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ и от $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ получаваме, че $\exists\, n_2\in\mathbb{N}\;\forall\, n\geq n_2 : |b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$. Тогава за всяко $n\geq n_0=\max\{n_1,n_2\}$ имаме

$$|a_n.b_n-ab| \leq M|a_n-a| + |a|\,|b_n-b| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+|a|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} < \varepsilon\,,$$

с което доказателството е завършено. Да отбележим, че разделихме на $|a|+1$, за да не разглеждаме отделно случая, когато $a=0$. □

Следствие 1.4. *Ако $c\in\mathbb{R}$ и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то $c.a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} ca$. (Забележете, че $\forall\, c\in\mathbb{R}$ редицата $\{c\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $c,c,c,\ldots,c,\ldots \xrightarrow[n\to\infty]{} c$).*

Следствие 1.5. *Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ и $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$, то $a_n-b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a-b$. (Следва неподредствено от **Следствие 1.4** и **Свойство 5**).*

7. Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ и $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$, където $b\neq 0$, то $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{b}$.

Доказателство. Първо да се убедим, че редицата от частните е добре дефинирана за почти всички индекси. Наистина, ако $b>0$, то $(0,+\infty)$ е околност на b и тогава множеството $\{n\in\mathbb{N} : b_n>0\}$ е кофинитно. Ако $b<0$, то $(-\infty,0)$ е околност на b и съответно $\{n\in\mathbb{N} : b_n<0\}$ е кофинитно. При всички положения $\{n\in\mathbb{N} : b_n\neq 0\}$ е кофинитно. Оценяваме:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n.b-a.b_n}{b_n.b}\right| = \left|\frac{a_n.b-ab+ab-a.b_n}{b_n.b}\right| = \\ &= \left|\frac{(a_n-a)\,b+a\,(b-b_n)}{b_n.b}\right| \leq \frac{|a_n-a|}{|b_n|}+\frac{|a|}{|b_n|\,|b|}|b_n-b|\,. \end{aligned}$$

Сега по подобен начин като в началото забелязваме, че ако $b > 0$, то $(|b|/2, +\infty)$ е околност на b и тогава множеството $\{n \in \mathbb{N} : b_n > |b|/2\}$ е кофинитно. Ако $b < 0$, то $(-\infty, -|b|/2)$ е околност на b и съответно $\{n \in \mathbb{N} : b_n < -|b|/2\}$ е кофинитно. И в двата случая можем да запишем, че съществува $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че за всички $n \geq n_0$ е изпълнено $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Следователно, използвайки горната оценка, имаме

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a|}{|b_n|\,|b|}|b_n - b| \leq \frac{2}{|b|}|a_n - a| + \frac{2|a|}{|b|^2}\,|b_n - b| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Получихме, че дясната страна клони към нула, като следствие от свойство 5 и Следствие 1.4. □

Проверили сме, че $c, c, c, \dots, c, \dots \xrightarrow[n\to\infty]{} c$ за всяко $c \in \mathbb{R}$, както и че $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Оттук с помощта на току-що доказаните свойства лесно се пресмятат граници например на частно на два полинома на n, ако степента на числителя не надминава степента на знаменателя. Примери сте виждали достатъчно както в училище, така и на упражнения. Ето един по-интересен пример:

Пример 1.6. Да разгледаме редицата, която се задава с правилото:

$$a_n = \underbrace{\frac{n}{n^2+1}}_{\text{най-голямо събираемо}} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \underbrace{\frac{n}{n^2+n}}_{\text{най-малко събираемо}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i}$$

Ясно е, че a_n се ограничава отдолу от най-малкото събираемо, събрано със себе си n пъти; също така a_n се ограничава отгоре от най-голямото събираемо, събрано със себе си n пъти. Следователно:

$$\begin{aligned} n.\frac{n}{n^2+n} &\leq a_n \leq n.\frac{n}{n^2+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} &\leq a_n \leq \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1}. \end{aligned}$$

Виждаме, че като изнесем най-голямата обща степен пред скоби и съкратим (в случая n^2), получаваме редици, които клонят към 1 - това може лесно да се установи с горепреведените свойства. От лемата за двамата полицаи можем да заключим, че $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

2 Редици, които дивергират към безкрайност

Добре е да отделим един клас разходящи редици, чието поведение е "определено" в някакъв смисъл. Това са редиците, които дивергират към безкрайност.

Дефиниция 2.1. *Околност на $+\infty$*

$U \subset \mathbb{R}$ се нарича околност на $+\infty$, ако съществува $M \in \mathbb{R}$ такова, че $(M, +\infty) \subset U$.

Дефиниция 2.2. *Околност на* $-\infty$

$U \subset \mathbb{R}$ се нарича околност на $-\infty$, ако съществува $M \in \mathbb{R}$ такова, че $(-\infty, M) \subset U$.

Ще казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *дивергира* към $+\infty$ (и ще пишем $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$), ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е почти изцяло във всяка околност на $+\infty$. Аналогично, казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *дивергира* към $-\infty$ ($a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$), ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е почти изцяло във всяка околност на $-\infty$. Формално, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, ако:

$$\begin{aligned}
&\forall U \text{ - околност на } +\infty : \{n \in \mathbb{N} : a_n \in U\} \text{ е кофинитно } \iff \\
&\iff \forall M \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : a_n \in (M, +\infty)\} \text{ е кофинитно } \iff \\
&\iff \forall M \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : a_n > M.
\end{aligned}$$

Аналогично, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, ако:

$$\begin{aligned}
&\forall U \text{ - околност на } -\infty : \{n \in \mathbb{N} : a_n \in U\} \text{ е кофинитно } \iff \\
&\iff \forall M \in \mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : a_n \in (-\infty, M)\} \text{ е кофинитно } \iff \\
&\iff \forall M \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : a_n < M.
\end{aligned}$$

Дефиниция 2.3. *Околност на* ∞

$U \subset \mathbb{R}$ се нарича околност на ∞, ако съществува $M > 0$ такова, че $U \supset [(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)]$.

Отново редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ дивергира към ∞ ($a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$), ако:

$$\begin{aligned}
a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty &\iff \forall U \text{ - околност на } \infty : \{n \in \mathbb{N} : a_n \notin U\} \text{ е крайно } \iff \\
&\iff \forall M \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : |a_n| > M.
\end{aligned}$$

Спомнете си геометричната интерпретация на тези дефиниции от лекцията.

Твърдение 2.4. *Нека* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

1. *Ако* $a_n > 0\, \forall n \in \mathbb{N}$, *то* $[a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \iff \frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0]$.
2. *Ако* $a_n < 0\, \forall n \in \mathbb{N}$, *то* $[a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \iff \frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0]$.
3. *Ако* $a_n \neq 0\, \forall n \in \mathbb{N}$, *то* $[a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \iff \frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0]$.

Доказателство. Ще докажем само третата част, като другите се разглеждат съвсем аналогично. Доказателството се извършва в двете посоки:

($\Rightarrow$) Имаме $a_n \neq 0\, \forall n \in \mathbb{N}$ и $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Искаме $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : \left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$. Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$ и търсим да покажем, че $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ за всички достатъчно големи индекси. Тъй като $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ и $\left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$ е околност на ∞, съществува $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че за всяко $n \geq n_0$ е в сила $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Желаното неравенство следва директно.

($\Leftarrow$) Сега имаме $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и искаме да проверим, че $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Разглеждаме произволно $M > 0$. Тогава $\frac{1}{M} > 0$ и $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ влече съществуването на $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че за всички $n \geq n_0$ е в сила $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{M}$. Това е еквивалентно на $|a_n| > M\; \forall n \geq n_0$ - точно дефиницията на $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. $\square$

Пример 2.5. С помощта на току-що доказаното твърдение лесно се вижда например, че:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^5 - n^2 - 3}{n^4 + n + 1} = \infty, \text{ тъй като за реципрочното е в сила:}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + n + 1}{3n^5 - n^2 - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}}{3 - \frac{1}{n^3} - \frac{3}{n^5}} = 0.$$

3 Монотонни редици

Сега се съсредоточаваме върху един друг клас редици, за който много от разглежданията се опростяват значително.

Дефиниция 3.1. *Растяща редица. Намаляваща редица*
Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е редица от реални числа. Ако $a_{n+1} \geq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$, редицата се нарича растяща. Редицата се нарича намаляваща, ако $a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Монотонна редица е тази, която е намаляваща или растяща. Ако неравенствата са строги, говорим за строго растяща или строго намаляваща редица.

Забележете, че една редица е едновременно растяща и намаляваща точно тогава, когато е стационарна.

Важно е да осъзнаете, че следващото просто твърдение зависи от принципа за непрекъснатост (всъщност му е еквивалентно):

Твърдение 3.2. *Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е редица от реални числа. Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща и ограничена отгоре, то тя е сходяща. Аналогично, ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща и ограничена отдолу, то тя е сходяща.*

Доказателство. Ще докажем само първата част на твърдението, като за втората се разсъждава по съвсем сходен начин. И така, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща, т.е. $a_{n+1} \geq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Тъй като редицата е ограничена отгоре, то от принципа за непрекъснатост следва, че съществува супремум на множеството $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, да го означим с L. За произволно $\varepsilon > 0$:

$$L - \varepsilon < L = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \exists \, n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > L - \varepsilon$$

Използвахме, че няма горни граници за редицата, по-малки от L. Нека $n \geq n_0$. Тогава:

$$L - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq L < L + \varepsilon$$

Второто неравенство идва от факта, че редицата е растяща, а третото – от това, че L е горна граница за редицата. Следователно $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ за всяко $n \geq n_0$. Тъй като $\varepsilon > 0$ беше произволно, получихме, че $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$. Интуитивно е ясно, че ако всеки следващ член на редицата е по-голям от предходния, при това тя е ограничена отгоре, то именно точната горна граница е граница и за редицата. С доказателството ние формализирахме тази интуиция. □

Пример 3.3. Геометрична прогресия
За $q \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ разглеждаме редицата $q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots$. Съществуват следните възможности:

- $0 \leq q < 1$. Тогава $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

  Действително, при тези стойности на q редицата е намаляваща (даже строго) и е ограничена отдолу (например от нулата – всички членове на редицата са неотрицателни). От горното твърдение получаваме, че тя е сходяща. За да намерим стойността на границата L, разглеждаме

$$\begin{cases} q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots \xrightarrow[n\to\infty]{} L \\ q, q, q, \dots, q, \dots \xrightarrow[n\to\infty]{} q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad q^2, q^3, q^4, \dots, q^{n+1}, \dots \xrightarrow[n\to\infty]{} L.q$$

  Умножихме редиците и използвахме свойство 6. Но последната редица всъщност е геометричната прогресия, чийто първи член е задраскан. Използваме свойство 1 и Следствие 1.1 (единственост на границата), за да заключим, че $L = L.q$, т.е. $L(q-1) = 0$. Тъй като $q < 1$, получаваме $L = 0$.

- $-1 < q \leq 0$. Този случай можем да сведем до горния като забележим, че $|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $|q| \in [0, 1)$.

  Така установяваме, че за $|q| < 1$ е в сила $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

- $q = 1$. Ясно е, че тогава $q^n = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$ и $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

- $q = -1$. Получаваме редицата $-1, 1, -1, 1, \dots$, която е разходяща.

- $q > 1$. В този случай $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Наистина, $\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, тъй като $0 < \frac{1}{q} < 1$ и сведохме до първия случай, използвайки Твърдение 2.4, (1).

- $q < -1$. В този случай $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Можем да представим q^n като $(-1)^n . |q|^n$ и да вземем реципрочното: $\frac{1}{q^n} = (-1)^n . \left(\frac{1}{|q|}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ като произведение на ограничена редица с редица, клоняща към нула (Следствие 1.2). Сега използваме Твърдение 2.4, (3).

Пример 3.4. Разглеждаме за $|q| < 1$:

$$a_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i \Longrightarrow a_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-q} \; .$$

Пример 3.5. Нека $a_n = n^m.q^n$ за $m \in \mathbb{N}$ и $0 < q < 1$. Ще покажем, че $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^m.q^{n+1}}{n^m.q^n} = q\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m \xrightarrow[n\to\infty]{} q < 1$$

Да изберем $r = \frac{1+q}{2}$. Така $0 < q < r < 1$ и $(0, r)$ е околност на q. Следователно съществува

$n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че:

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < r \ \forall n \geq n_0 \ \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} & < r \\ \dfrac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} & < r \\ \dots \\ \dfrac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+(k-1)}} & < r \end{cases}$$

Ако сега умножим левите и десните страни на горните $k \in \mathbb{N}$ (k е произволно естествено число) неравенства, с помощта на лемата за двамата полицаи и знанията ни за геометричната прогресия получаваме:

$$\frac{\cancel{a_{n_0+1}}}{a_{n_0}} . \frac{\cancel{a_{n_0+2}}}{\cancel{a_{n_0+1}}} . \cdots . \frac{a_{n_0+k}}{\cancel{a_{n_0+(k-1)}}} < r^k \Rightarrow \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}} < r^k$$

$$\underbrace{0}_{\xrightarrow[k\to\infty]{}0} < a_{n_0+k} < \underbrace{a_{n_0}.r^k}_{\xrightarrow[k\to\infty]{}0} \Rightarrow a_{n_0+k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Остава да забележим, че последната редица е $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, от която са задраскани първите n_0 члена.

4 Неперовото число e

Неперовото число е изключително важно в цялата математика. Мотивацията на това заявление ще се обогатява и развива в продължение на цялото ви следване във ФМИ.

Ще въведем това число като границата на редицата с общ член $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Тази редица или нейни варианти се появяват по естествен начин в много модели, например при сложна лихва или при изучаване на популационната динамика. Само като идея, сложната лихва (анатоцизъм) се изчислява при фиксиран лихвен процент r и първоначална инвестиция A при период на олихвяване n по следния начин:

$$A \Longrightarrow A\left(1+\frac{r}{n}\right)^n.$$

Така например, ако $A\left(1+r\right)$ е сумата при годишно олихвяване, получената сума при олихвяване всеки месец, като изчисляваме и лихва върху лихвите, ще бъде $A\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}$. Нереалистично, но получената сума при олихвяване всеки ден, като изчисляваме и лихва върху лихвите, ще бъде $A\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365}$.

Ще имаме нужда от следната формула, която е доказана по индукция от колегите:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

за произволни $n \in \mathbb{N}$ и $a, b \in \mathbb{R}$. Тази формула се нарича Нютонов бином. Да припомним дефиницията на биномните коефициенти

$$\binom{n}{0} = 1, \ \binom{n}{k} = \frac{n\left(n-1\right)\cdots\left(n-k+1\right)}{k!}$$

Важно е да запомните именно тази дефиниция, защото нея ще използваме многократно и в случая, когато n е реално число (не непременно естествено). В частния случай, когато n е естествено, биномните коефициенти имат комбинаторна интерпретация (броят на всички възможни k-елементни подмножества на дадено n-елементно множество) и могат да се пресмятат чрез $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Сега да разгледаме редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ с общ член $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. От биномната формула на Нютон имаме, че:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Следователно можем да запишем и a_{n+1} като:

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \\ + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}_{>0} \end{aligned}$$

Да забележим, че за естествени n имаме $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$ и по-общото $1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}$ за всяко $1 \le i \le n$. Следователно, всяко от първите $n+1$ събираеми в развитието на a_{n+1} е по-голямо от съответното събираемо в развитието на a_n, като в развитието на a_{n+1} има едно положително събираемо в повече. Получихме, че $a_{n+1} > a_n$ за всички $n \in \mathbb{N}$ и следователно редицата е строго растяща.

Да разгледаме редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ с общ член $b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}$. Нейният общ член е по-голям от общия член на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, защото всяка дроб от развитието на a_n от вида $\frac{1}{i!}$ се умножава по коефициент, по-малък от единица. Следователно

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \end{array}\right\} a_n < b_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Освен това е в сила $k! = 1.2.3 \cdots k \ge 1.2.2 \cdots 2 = 2^{k-1}$, откъдето

$$b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$
$$= 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\text{геометрична прогресия}} = 1 + \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3.$$

Доказахме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго растяща и ограничена отгоре, следователно от Твърдение 3.2 следва, че тя има граница.

Дефиниция 4.1. *Числото e (Неперово число)*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е важна, но от изчислителна гледна точка (когато искаме да пресмятаме числената стойност на неперовото число) не е много удобна, защото тя клони сравнително бавно към e. Много по-удобно в такива случаи е да се използва редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, защото тя също клони към неперовото число, при това доста по-бързо. Тъй като редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е важна сама по себе си, ще докажем, че $e = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Да си припомним, че

$$a_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Да фиксираме две произволни естествени числа m и n с $m < n$. Тогава от горното развитие можем да изпуснем $n-m$ от последните членове и да получим неравенството

$$a_n > 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

Тъй като в горното неравенство $n > m$ може да бъде произволно голямо, да фиксираме m и да направим граничен преход по n. Тъй като събираемите отдясно са фиксиран брой (както и множителите в съответните произведения), границата при $n \longrightarrow \infty$ на дясната част е $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!} = b_m$. Разбира се, границата на лявата част на неравенството е неперовото число. Следователно получихме, че $e \geq b_m$ за всяко $m \in \mathbb{N}$. Тогава имаме

$$a_n \leq b_n \leq e \;\forall\, n \in \mathbb{N}$$

и, прилагайки лемата за двамата полицаи, получаваме

$$e = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$