Контролно 2, Анализ 1, КН, 2 поток
25.01.2013 г.

Тема 2

Зад. 1 Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{3/x^2}$;

Решение: 1-ви начин: Намираме $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{3/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{3/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{(\cos x-1)3}{x^2}}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{(\cos x-1).3}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)3}{x^2}}\overset{\text{лоп.}}{=}e^{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}}=e^{-3/2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{3/x^2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{3/x^2}}=e^{3/2}$ $\square$

2-ри начин: Логаритмуваме:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)=-3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\overset{\text{лоп.}}{=}-3\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x.2x}=-3.\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{3/x^2}=e^{3/2}$ $\square$

Зад. 2 Намерете $f^{(6)}(0)$, където $f(x)=(x+f_n)\sqrt[5]{1-x}$, където f_n е Вашият факултетен номер

Решение: $f(x)$ е k-кратно диференцируема ф-ия $\forall k\in\mathbb{N}$. Тогава представянето ѝ във формула на Маклорен до $o(x^6)$ има вида $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{6}a_kx^k+o(x^6)$, където $a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

От друга страна $f(x)=(x+f_n)\left(1-\frac{1}{5}x+\binom{1/5}{2}x^2-\binom{1/5}{3}x^3+\binom{1/5}{4}x^4-\binom{1/5}{5}x^5+\binom{1/5}{6}x^6+o(x^6)\right)$.

Приравнявайки коефициентите, за a_6 получаваме:

$a_6=\frac{f^{(6)}(0)}{6!}=\binom{1/5}{6}f_n-\binom{1/5}{5}\Rightarrow f^{(6)}(0)=6!\left[\binom{1/5}{6}f_n-\binom{1/5}{5}\right]$ $\square$

Зад. 3 Да се пресметне интегралът $\int\sin^2(\ln x)dx$

Решение: $I=\int\sin^2(\ln x)dx=\int\frac{1-\cos(2\ln x)}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}J$; $J=\int\cos(2\ln x)dx=$
$=x\cos(2\ln x)-\int xd\cos(2\ln x)=x\cos(2\ln x)+\int\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}\sin(2\ln x)dx=x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)-2\int xd\sin(2\ln x)=$
$=x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)-4\int\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\cos(2\ln x)dx=x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)-4J\Rightarrow$
$5J=x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)+C\Rightarrow J=\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)}{5}+C\Rightarrow$
$\Rightarrow I=\frac{x}{2}-\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)}{10}+C$ $\square$

Зад. 4 Да се пресметне интегралът $\int\frac{2x^4-2x^3-x^2+2}{2x^3-4x^2+3x-1}dx$

Решение: $I=\int\frac{2x^4-2x^3-x^2+2}{2x^3-4x^2+3x-1}dx=\int\frac{(x-1)(2x^2-2x+1)(x+1)-2x+3}{(x-1)(2x^2-2x+1)}dx=\int(x+1)dx+\int\frac{-2x+3}{(x-1)(2x^2-2x+1)}dx=$
$=\frac{(x+1)^2}{2}+J$. За да пресметнем J, намираме A, B и C в равенството:

$\frac{-2x+3}{(x-1)(2x^2-2x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{2x^2-2x+1}\Rightarrow A(2x^2-2x+1)+(Bx+C)(x-1)=-2x+3$

$$\left.\begin{array}{l}x=1:\ 1.A=1\Rightarrow A=1\\ x=0:\ 1-C=3\Rightarrow C=-2\\ x=-1:\ 5+(-2).(-B-2)=5\Rightarrow B=-2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow J=\ln|x-1|-\int\frac{2x+2}{2x^2-2x+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x-1)^2-\frac{1}{2}\int\frac{4x-2+6}{2x^2-2x+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x-1)^2-\frac{1}{2}\int\frac{d(2x^2-2x+1)}{2x^2-2x+1}-3\int\frac{d(2x-1)}{(2x-1)^2+1}=$
$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)^2}{\underbrace{2x^2-2x+1}_{>0}}-3\operatorname{arctg}(2x-1)+C\Rightarrow I=\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)^2}{2x^2-2x+1}-3\operatorname{arctg}(2x-1)+C$ $\square$