Домашна работа № 4

на Петър Парушев с ФН 61620, група 1, СИ

Задача 1.

А)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^5+2x+1}-\sqrt[5]{x^2+5x+1}}{\frac{\arcsin x \operatorname{arctg} x}{x.x}.x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{5x^4+2}{2\sqrt{x^5+2x+1}}-\frac{2x+5}{5\sqrt[5]{(x^2+5x+1)^4}}}{2x}=$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{5\sqrt[5]{(x^2+5x+1)^4}(5x^4+2)-2(2x+5)\sqrt{x^5+2x+1}}{2.5x\underbrace{\sqrt{x^5+2x+1}}_{1}\underbrace{\sqrt[5]{(x^2+5x+1)^4}}_{1}}=$$

$$\frac{1}{20}\lim_{x\to0}\frac{5.4(2x+5)(5x^4+2)}{5\sqrt[5]{(x^2+5x+1)}}+5\sqrt[5]{(x^2+5x+1)^4}(20x^3)-$$

$$2.2\sqrt{x^5+2x+1}-\frac{2(2x+5)(5x^4+2)}{2\sqrt{x^5+2x+1}}=\frac{1}{20}(4.5.2-4-5.2)=\frac{16}{20}=\frac{13}{10}$$

Б)

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{\arcsin^3 x}-\frac{\operatorname{arctg} x}{tg^{3x}}\right)\sim\frac{\sin x.tg^3x-\operatorname{arctg} x.\arcsin^3 x}{\arcsin^3 x.tg^3 x}\sim$$

$$\sim\frac{(x+\frac{x^3}{3})^3(x-\frac{x^3}{6})-(x+\frac{x^3}{6})(x-\frac{x^3}{3})}{x^6}\sim$$

$$\sim\frac{x^4(1+\frac{x^2}{3})^3(1-\frac{x^2}{6})-x^4(1+\frac{x^2}{6})(1-\frac{x^2}{3})}{x^6}\sim$$

$$\sim\frac{(1+\frac{x^2}{3})^3(1-\frac{x^2}{6})-x^4(1+\frac{x^2}{6})(1-\frac{x^2}{3})}{x^2}$$

Нека t= $\frac{x^2}{2}$. При x->0 и т->0.

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+2t)^3(1-t)-(1+t)(1-2t)}{6t}\sim\frac{-6t^4+t^3+9t^2+4t}{6t}\sim\frac{4}{6}\sim\frac{2}{3}$$

В)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}e^{x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

полагаме $\frac{1}{x}=t \Rightarrow x=\frac{1}{t}$, щом $x\to-\infty \Rightarrow t\to 0$, заместваме с t

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)=\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1+t-1}{2t}=\frac{1}{2}\ *$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

Г)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{1}{x}}-e^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln\,(\frac{1+x}{1-x})}-e^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^2(e^{\frac{\ln\,(\frac{1+x}{1-x})-2x}{x}}-1)}{x^2.\frac{\ln\,(\frac{1+x}{1-x})-2x}{x}.\frac{x}{\ln\,(\frac{1+x}{1-x})-2x}}=$$

$$e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln\,(\frac{1+x}{1-x})-2x}{x^3}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-x)}{(1+x)}.\frac{2}{(1-x)^2}-2}{3x^2}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{2-2+2x^2}{(1-x)^2 3x^2}=$$

$$e^2.\frac{2}{3}=e^2$$

Задача 2.

А)

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - 4x^2 + 5}{x^2}} e^{\frac{1}{x}}$$

ДМ: x$\neq$ 0 , при x=0 имаме вертикална асимптота.

За наклонените такива имаме:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} => \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^4-4x^2+5}{x^2}} e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^4-4x^2+5}{x^4}} e^{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(1 - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^4})} e^{\frac{1}{x}} = 1 = k$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x => \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{\frac{x^2-4+\frac{5}{x^2}}{x^2}} e^{\frac{1}{x}} - 1) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{1 - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^4}} e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

Полагаме $\frac{1}{x} = t => t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\sqrt{1 - 4t^2 + 5t^4} e^t - 1\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\left(\sqrt{1-4t^2+5t^4} e^t - 1\right)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \{\frac{-8t-20t^3}{2\sqrt{1-4t^2+5t^4}} e^t + \sqrt{1 - 4t^2 + 5t^4} e^t\} = 1 = l$$

От тук следва, че асимптота в +∞ $e\ y = x + 1$

Аналогично в -∞ $y = -(x + 1)$

Сега на тръгълника образуван от асимптотите е равно на 1, защото АО=1, а ВС=2, тръгълника е правоъгълен => $S = \frac{AO.BO}{2} = \frac{1.2}{2} = 1$

Г)

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^4-4x^2+5}{x^2}}e^{\frac{1}{x}}$$

$$f`(x)=\frac{\frac{(4x^3-8x)x^2-2x(x^4-4x^2+5)}{x^4}}{2\sqrt{\frac{x^4-4x^2+5}{x^2}}}e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{x^4-4x^2+5}{x^2}}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{(4x^3-8x)x^2-2x(x^4-4x^2+5)}{2x^4\sqrt{\frac{x^4-4x^2+5}{x^2}}}-\sqrt{\frac{x^4-4x^2+5}{x^2}}\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{(4x^5-8x^3-2x(4x^5-8x^3+10x)-\frac{(x^4-4x^2+5)}{x^2}\frac{2x^4}{x^2}}{2x^4\sqrt{\frac{x^4-4x^2+5}{x^2}}}\right)=$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{10x-2(x^4-4x^2+5)}{2x^4\sqrt{\frac{x^4-4x^2+5}{x^2}}}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x-x^4+4x^2-5)}{2x^4\sqrt{\frac{x^4-4x^2+5}{x^2}}}\right)$$

Полиномът $-x^4+4x^2+5x-5$ има 4 реални или имагинерни корена.

Б),В) и Д) ще намерим като сметнем втората производна. На местата където тя се анулира имаме инфлексни точки, а в зависимост от знаците ще определим изпъкналостта и ще разберем дали функцията е над или под наклонените асимптоти.