1 Общи свойства

1.1 Функция

Числова функция: подмножество на равнината $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$, за което от $(x, y) \in \Gamma_f$ и $(x, u) \in \Gamma_f$ следва $y = u$. Образно казано, всяка вертикална права пресича Γ_f в най-много една точка.

Неформално казано, функцията е „правило“, по което на някои числа се съпоставя най-много едно число

Означение: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Дефиниционна област: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Gamma_f\}$

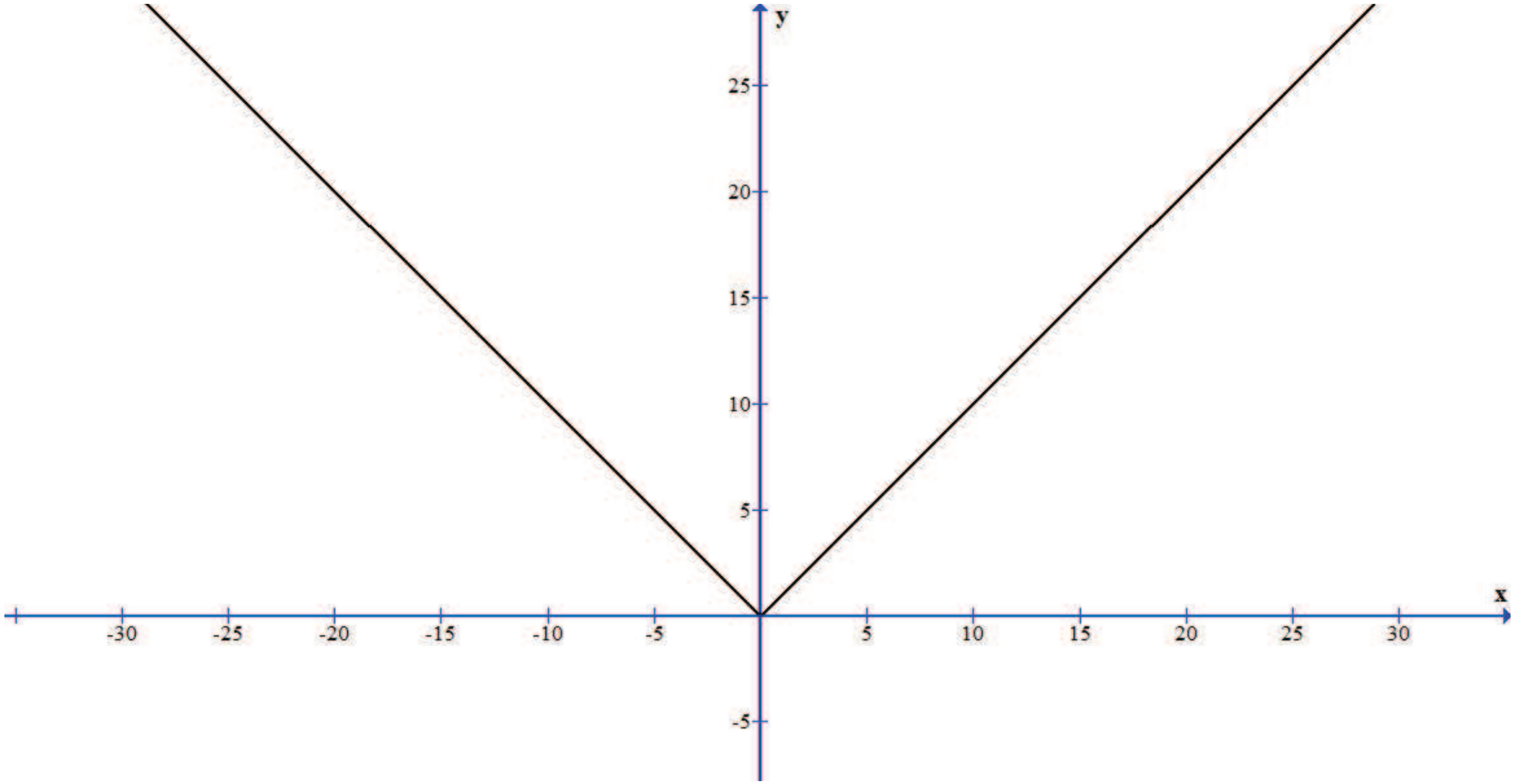
Област на стойностите: $R_f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : (x, y) \in \Gamma_f\}$

Примери:

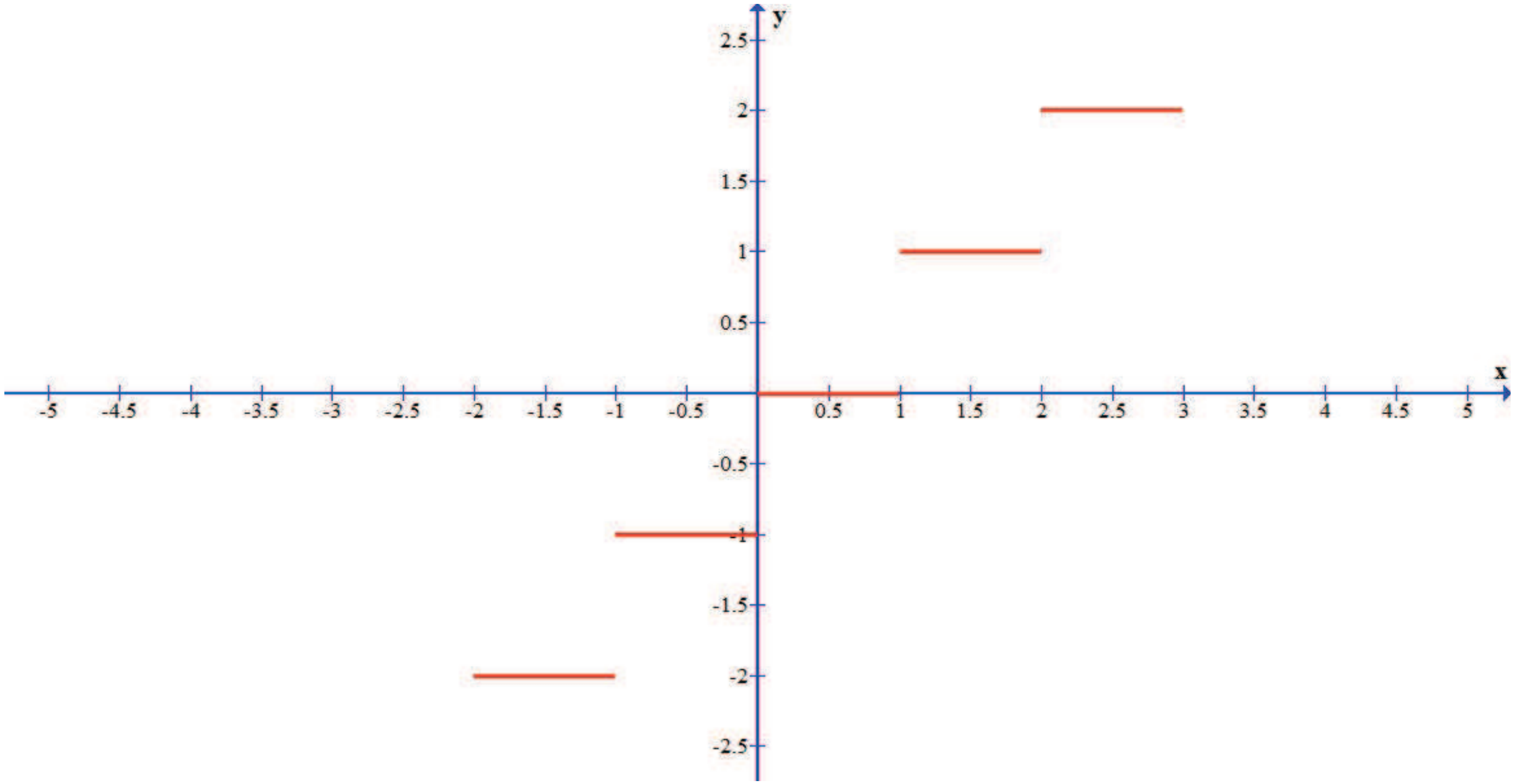
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{за} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

- $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{за} \quad x \in A \\ 0 & \text{за} \quad x \notin A \end{cases}$

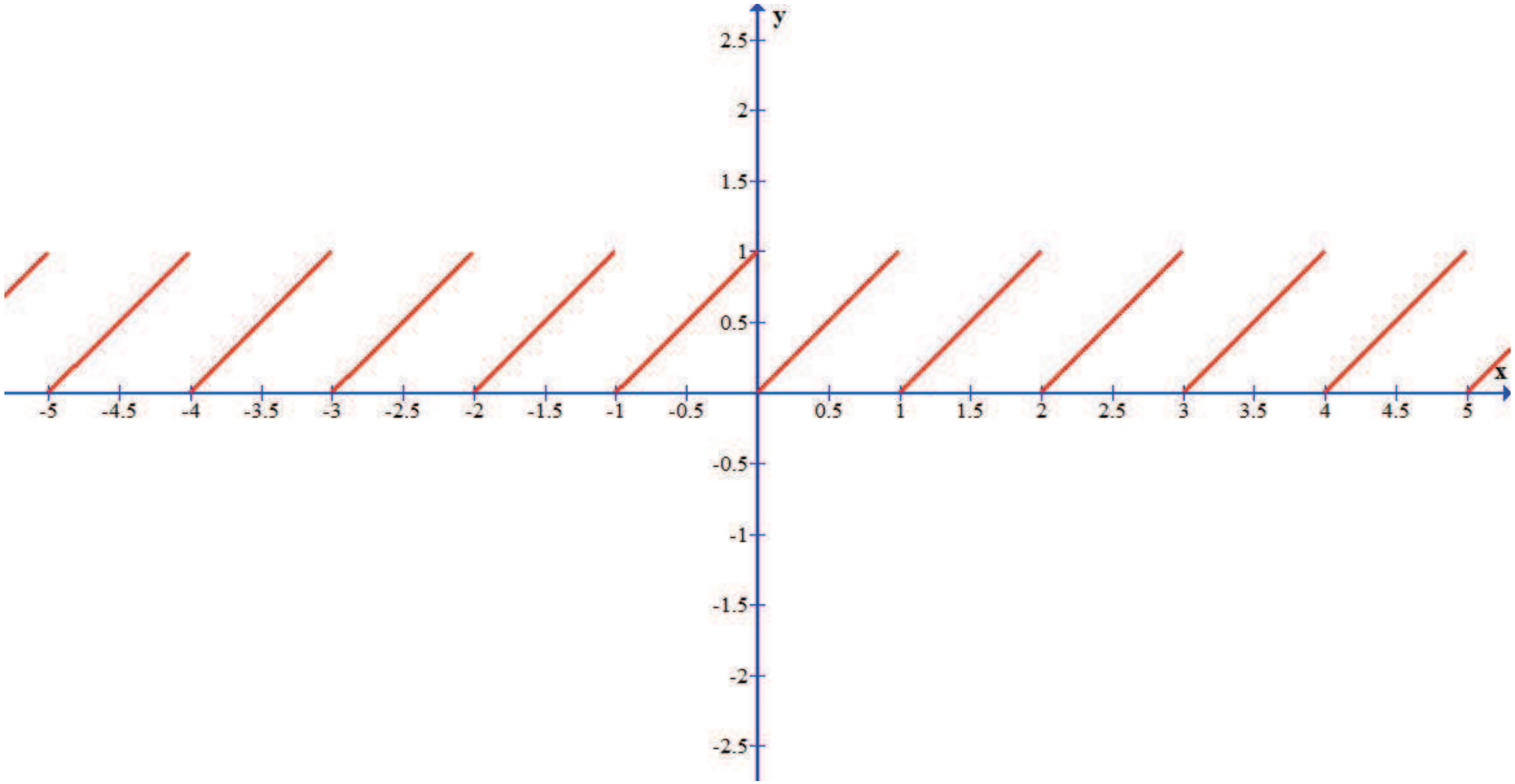
- Абсолютна стойност $\quad |x| = \max(x, -x)$



- Цяла част $\quad [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \,:\, n \leq x\}$



- Дробна част $\{x\} = x - [x]$



1.2 Композиция на функции (съставна, „сложна“ функция)

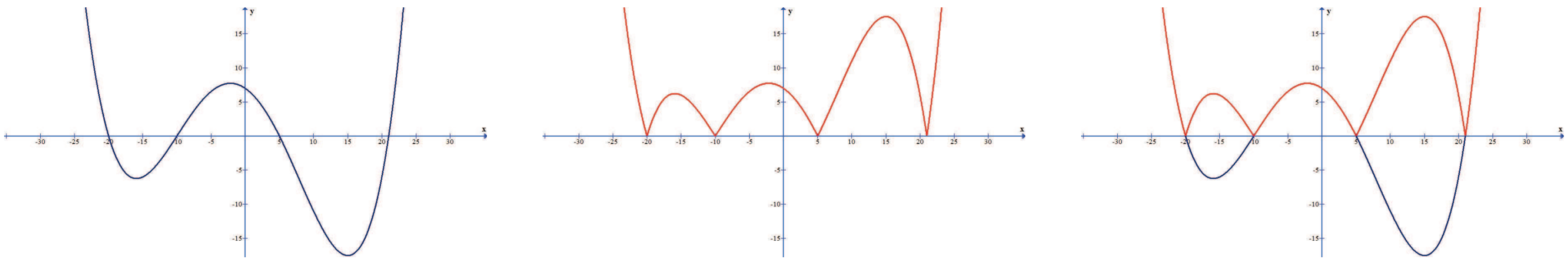
За дадени функции f и g дефинираме композицията им чрез $g \circ f\,(x) = g\,(f\,(x))$.

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \,:\, f\,(x) \in D_g\}$

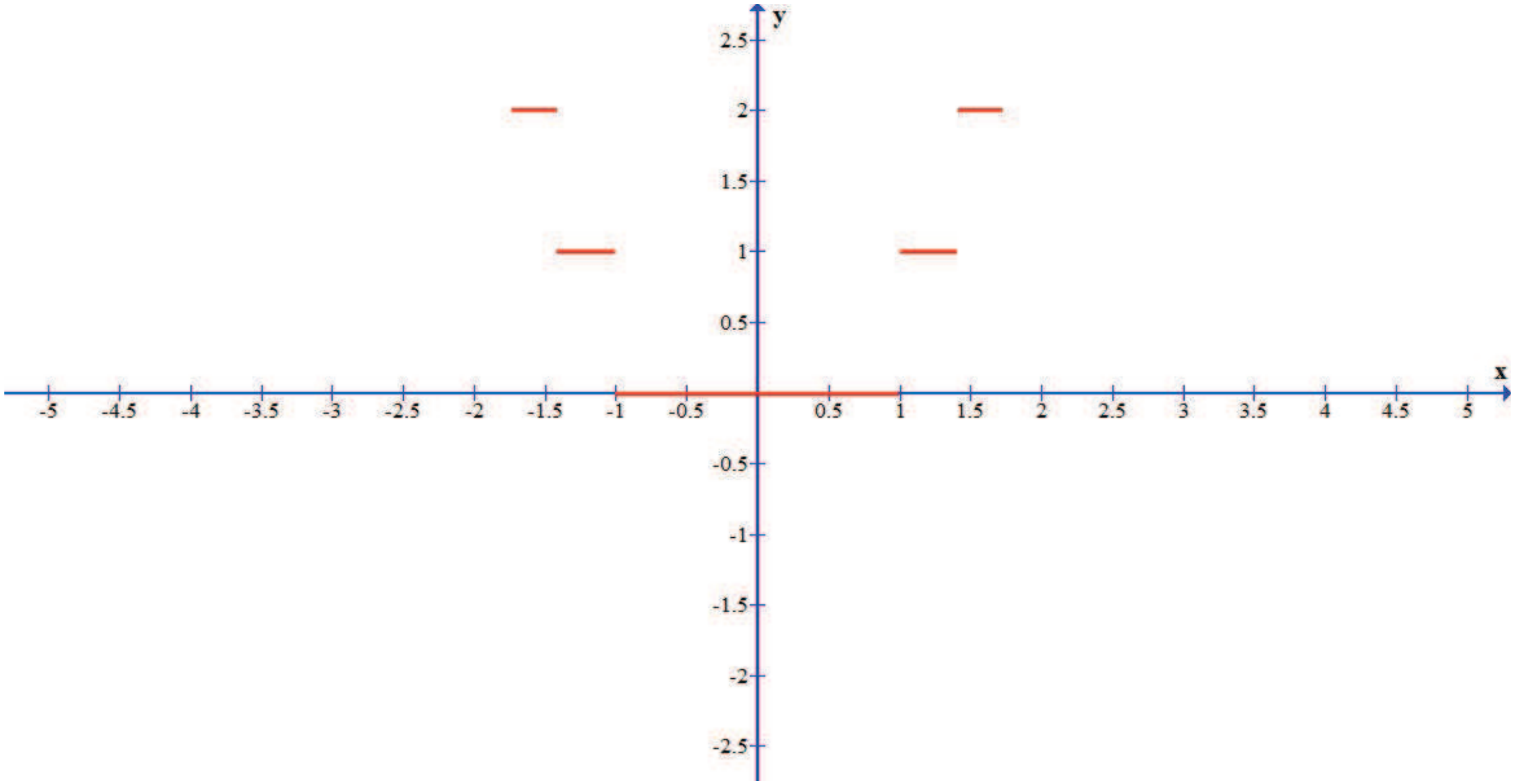
Композицията е асоциативна, но не е (най-често) комутативна операция.

Примери:

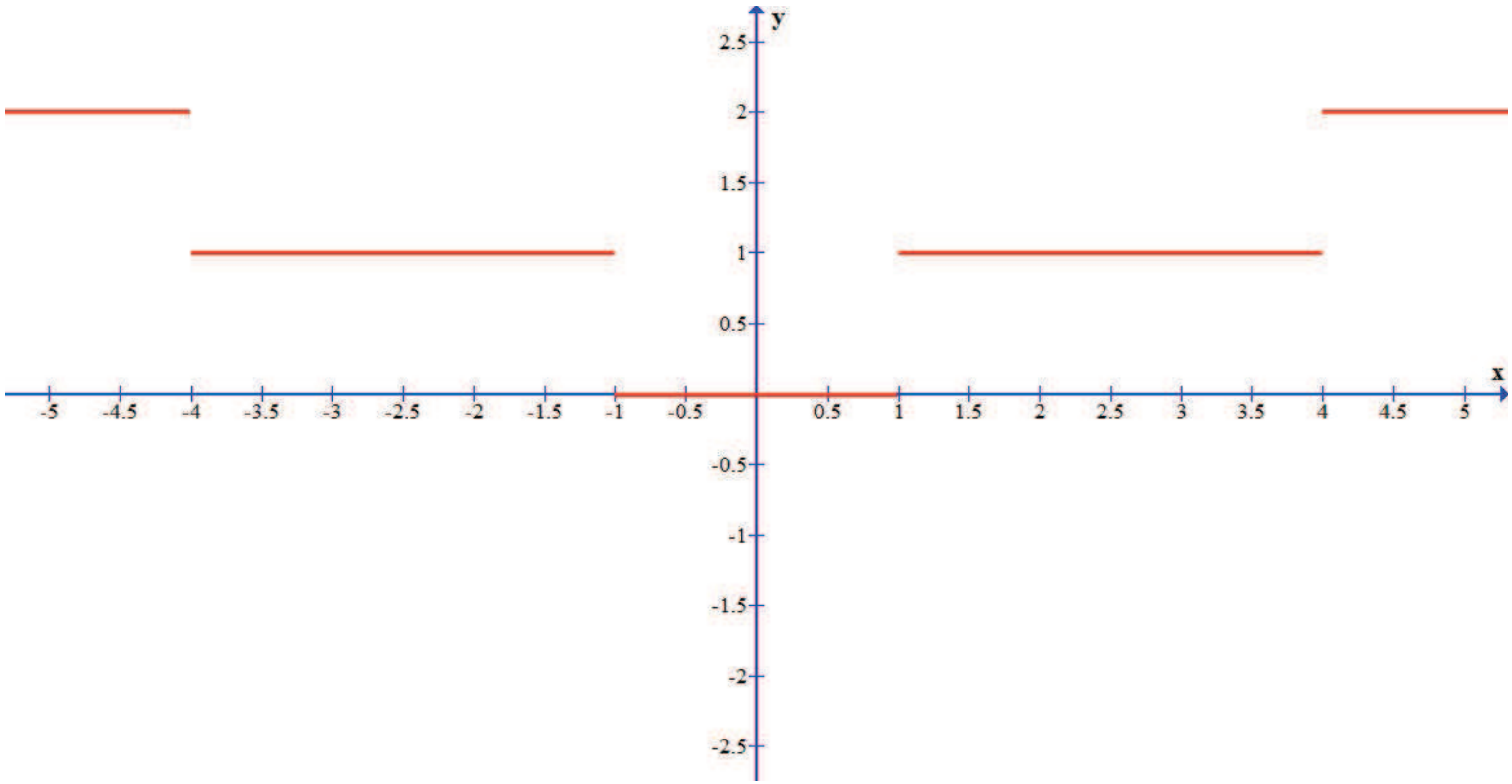
- $f(x)$ и $|f(x)|$



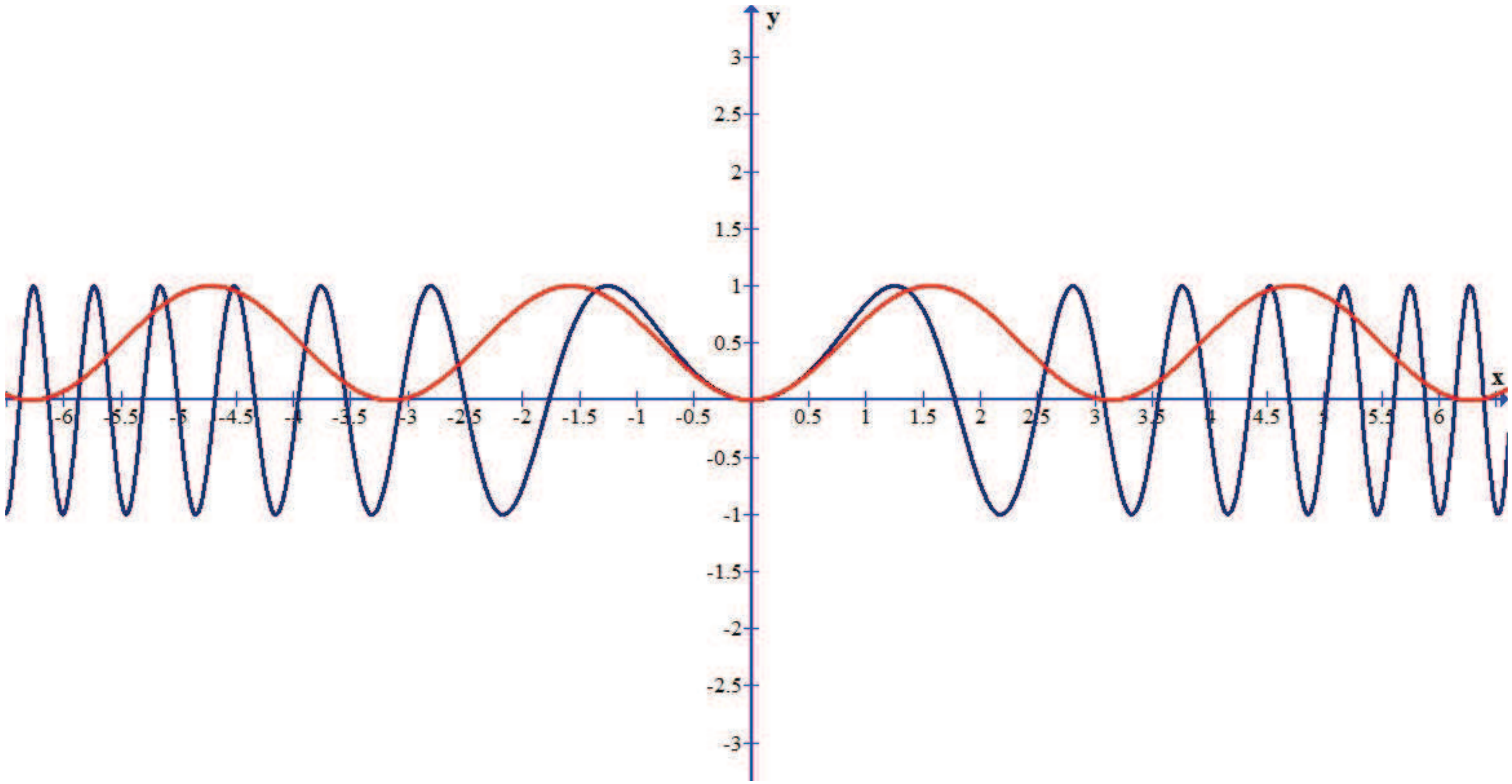
- $[f(x)]$



- $[f(x)]$



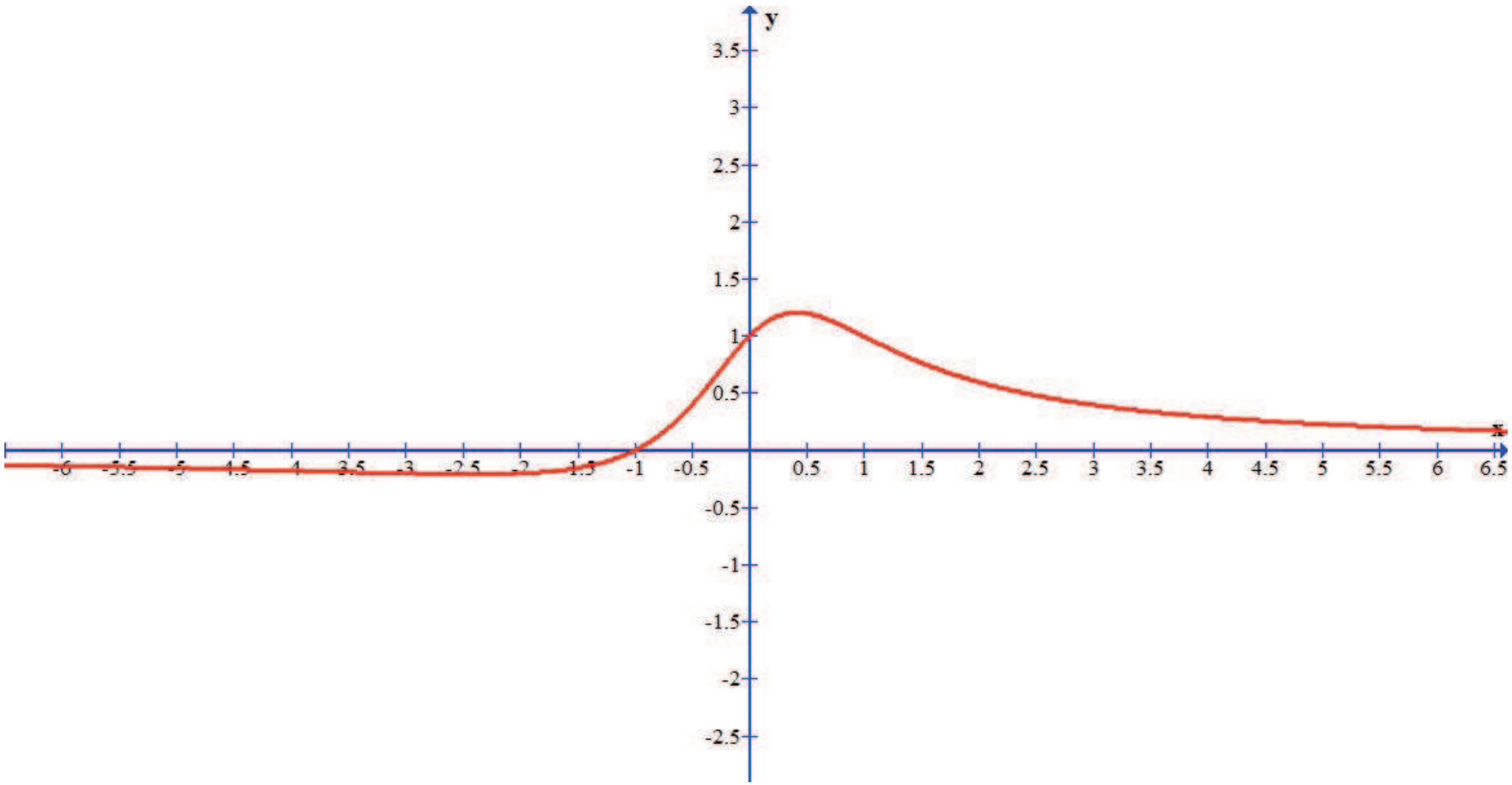
- $\sin^2 x \neq \sin x^2$



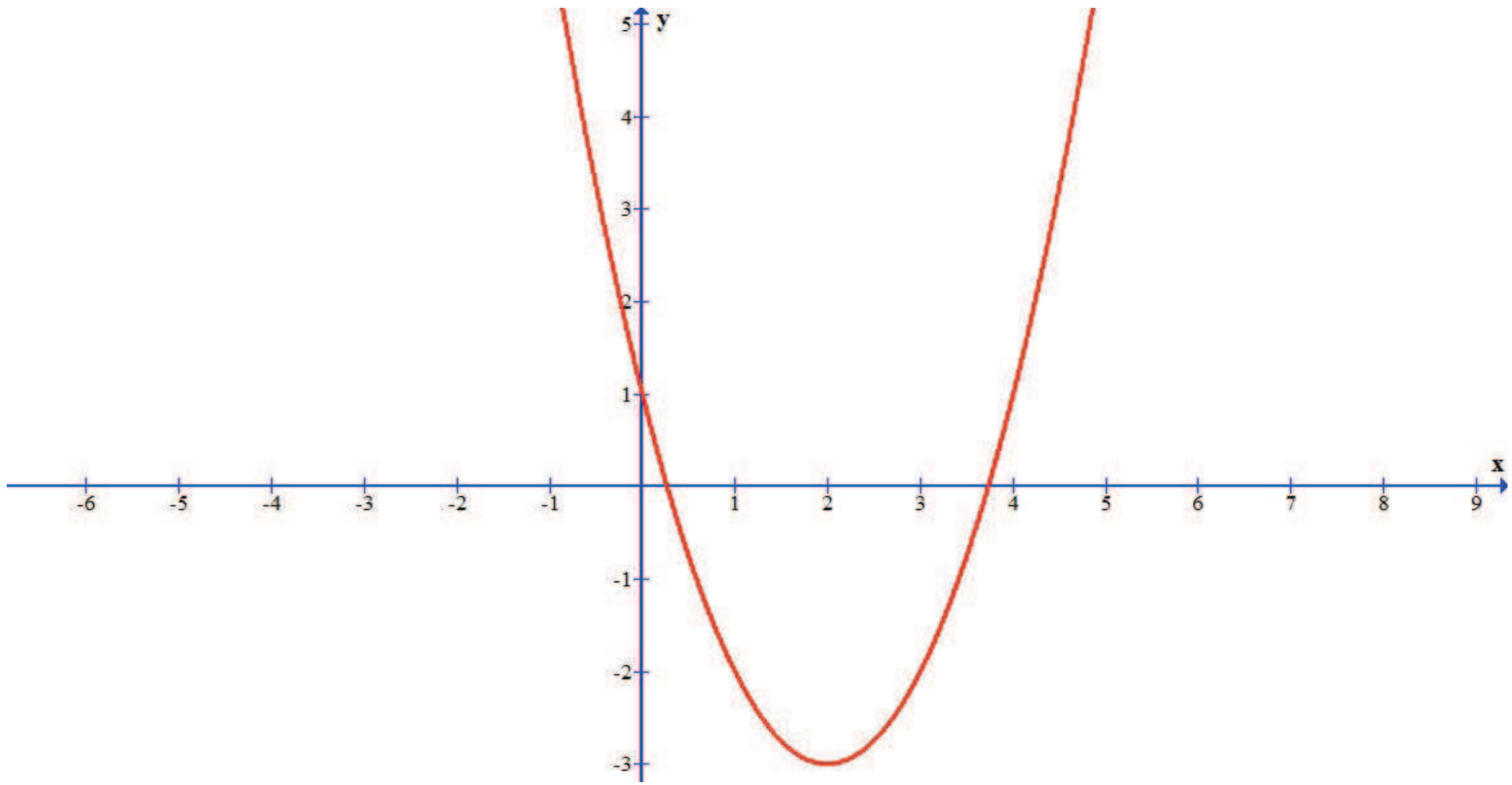
1.3 Ограничени (неограничени) в множество $A \subset D_f$

- ограничена отгоре: $f(x) \leq c$ за всяко $x \in A$
- неограничена отгоре: за всяко c има $x \in A$ с $f(x) > c$
- ограничена отдолу: $f(x) \geq c$ за всяко $x \in A$
- $|f(x)| \leq c$ за всяко $x \in A$
- неограничена е еквивалентно на неограничена отгоре ИЛИ неограничена отдолу
- сума (разлика) и произведение на ограничени е ограничена
  $|f(x)| \leq C_f\,,\ |g(x)| \leq C_g \quad \Rightarrow \quad |f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq C_f\,+\,C_g$
  $|f(x)| \leq C_f\,,\ |g(x)| \leq C_g \quad \Rightarrow \quad |f(x)g(x)| \leq |f(x)|\,.\,|g(x)| \leq C_f\,.\,C_g$
- ако f е ограничена в A и f е ограничена в B, то f е ограничена в $A \cup B$

Пример $\quad \dfrac{x+1}{x^2+1}$ е ограничена (отгоре и отдолу) в $\mathbb{R}$



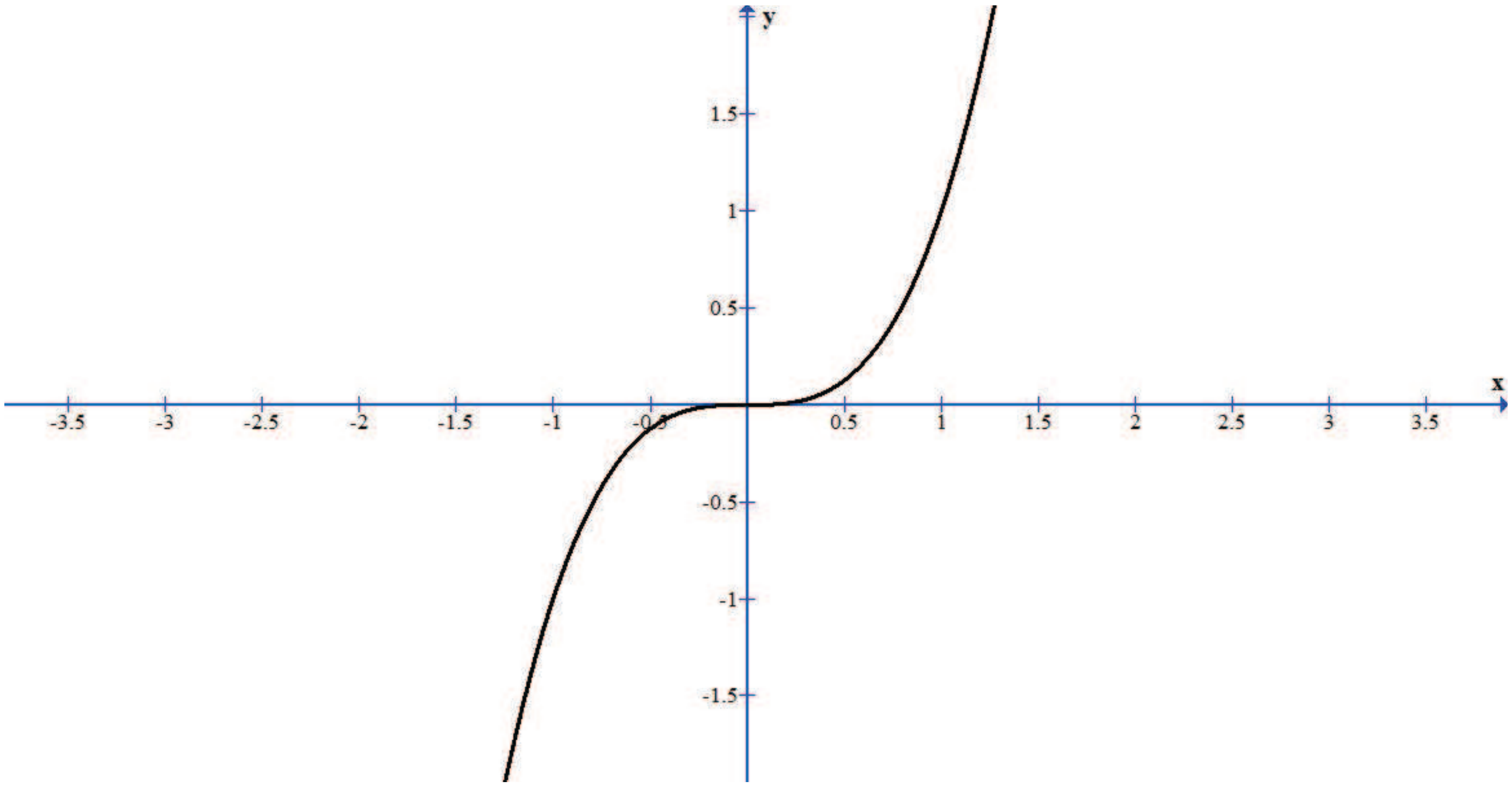
Пример $x^2 - 4x + 1$ е ограничена отдолу в $\mathbb{R}$



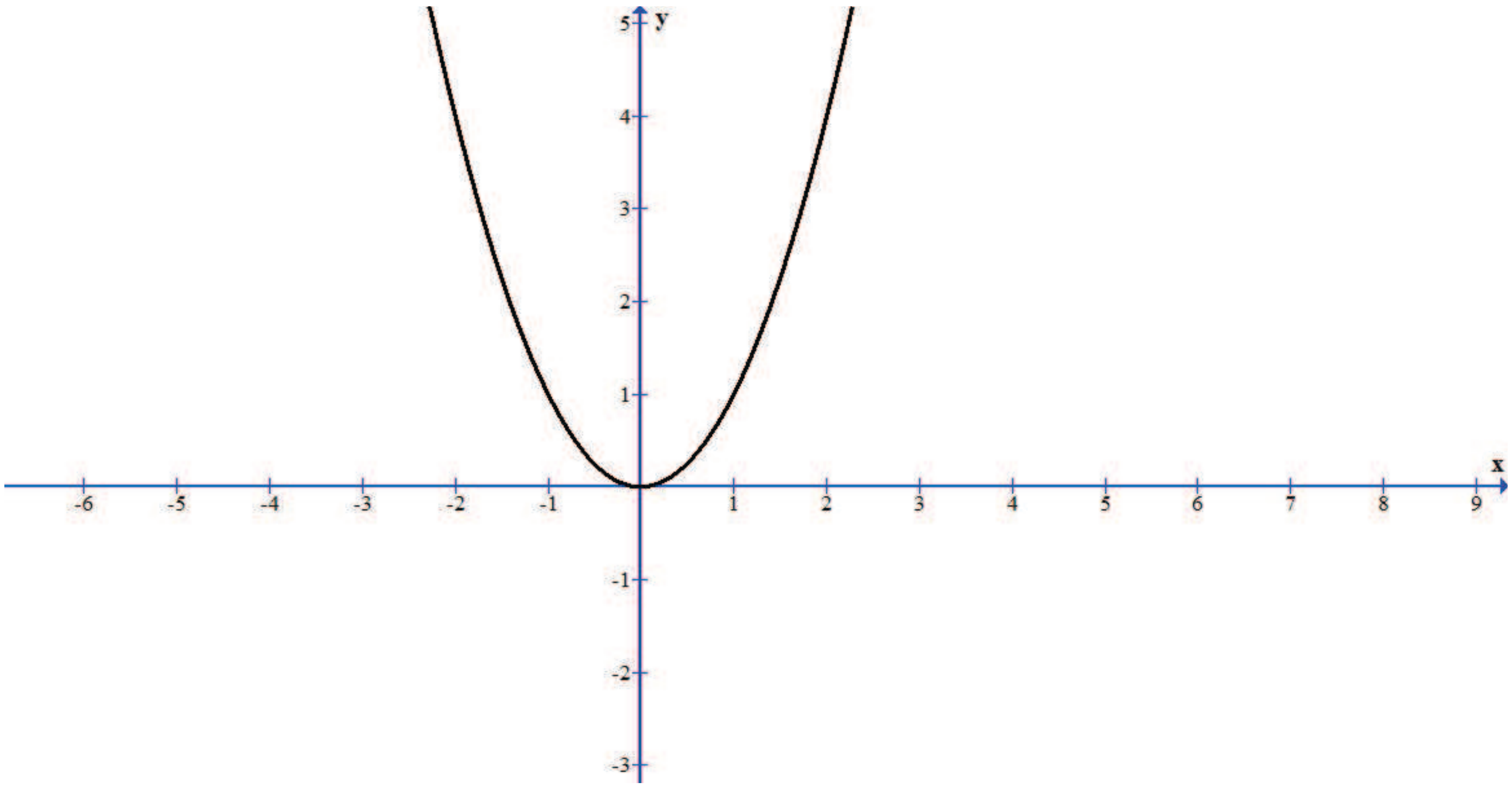
1.4 Монотонни в множество $A \subset D_f$

- растяща $f(x) \leq f(y)$ за всеки $x \leq y$, $x \in A$, $y \in A$
- строго растяща $f(x) < f(y)$ за всеки $x < y$, $x \in A$, $y \in A$
- намаляваща $f(x) \geq f(y)$ за всеки $x \leq y$, $x \in A$, $y \in A$
- строго намаляваща $f(x) > f(y)$ за всеки $x < y$, $x \in A$, $y \in A$
- сума на растящи (намаляващи) е растяща (намаляваща)
- произведение на растящи (намаляващи) И НЕОТРИЦАТЕЛНИ е растяща (намаляваща)
- съставна функция от две растящи (намаляващи) е растяща
- съставна функция от растяща и намаляваща е намаляваща
- f е растяща (намаляваща) $\Leftrightarrow -f$ е намаляваща (растяща)

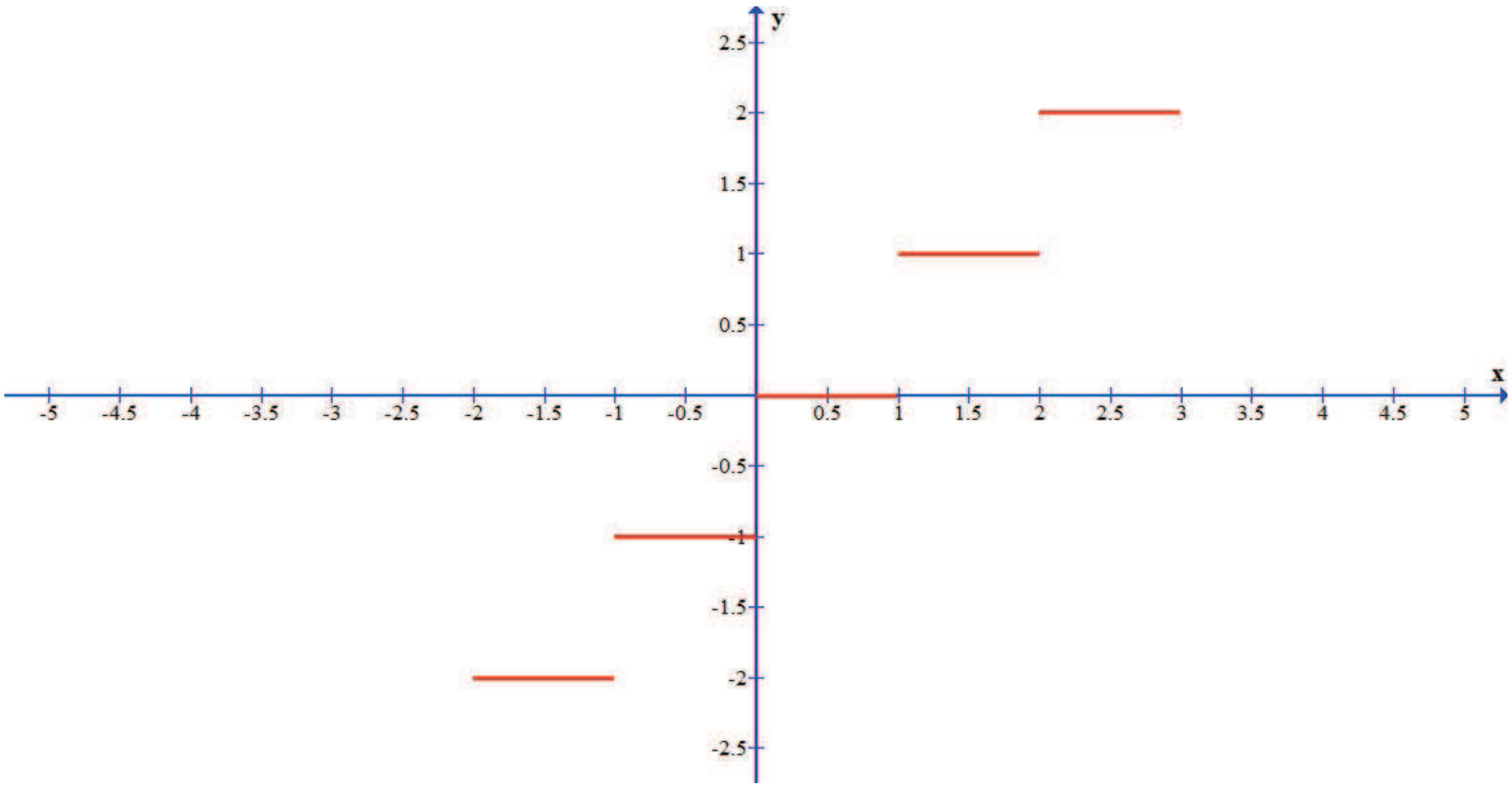
Пример 1 $\quad x^3$ строго расте в $\mathbb{R}$



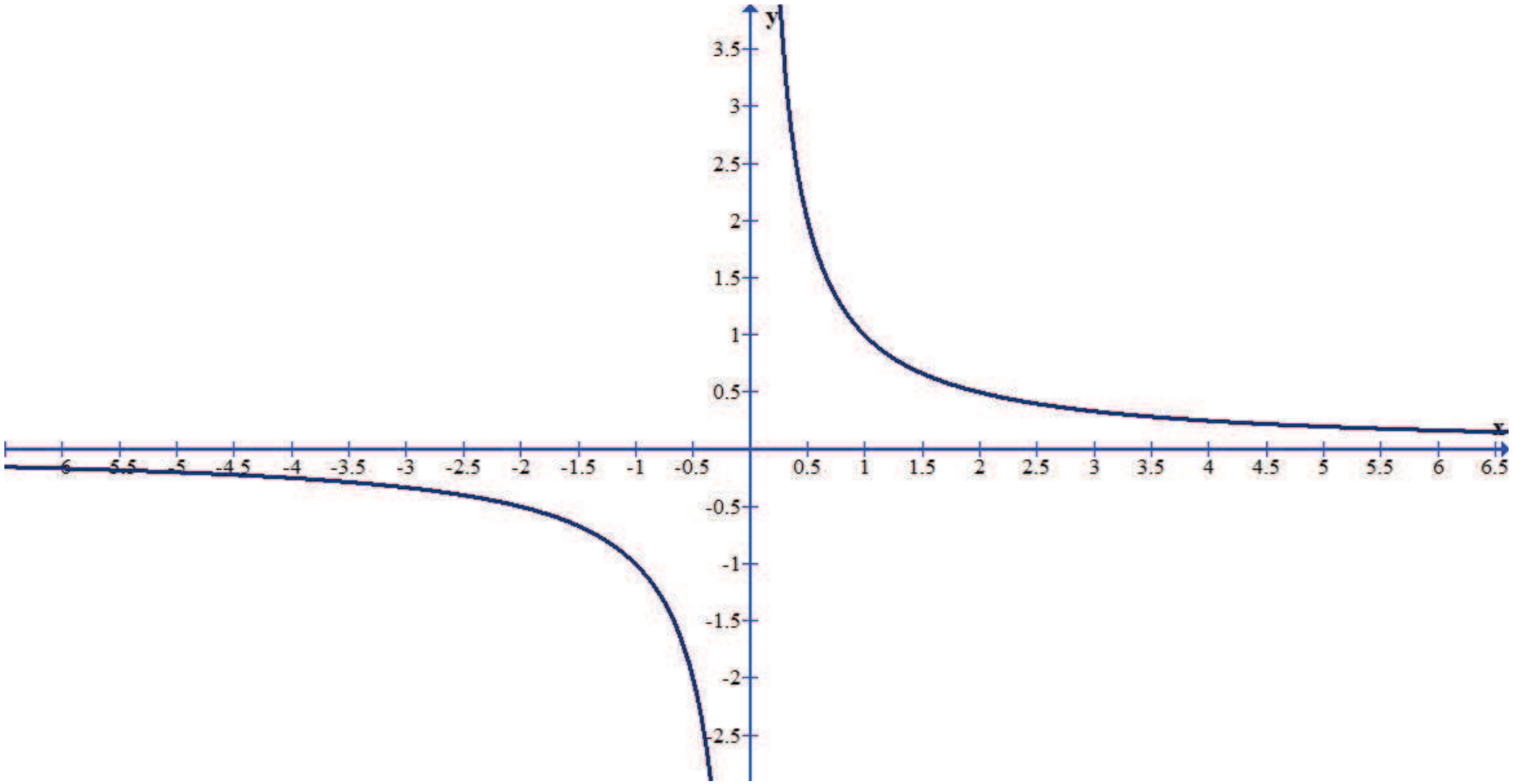
Пример 2 x^2 строго намалява в $(-\infty\,,\ 0]$ и строго расте в $[0\,,\ +\infty)$



Пример 3 $[x]$ расте в $\mathbb{R}$



Пример 4 $\quad \dfrac{1}{x}$ строго намалява в $(-\infty\,,\ 0)$ и строго намалява в $(0\,,\ +\infty)$, но не е намаляваща в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

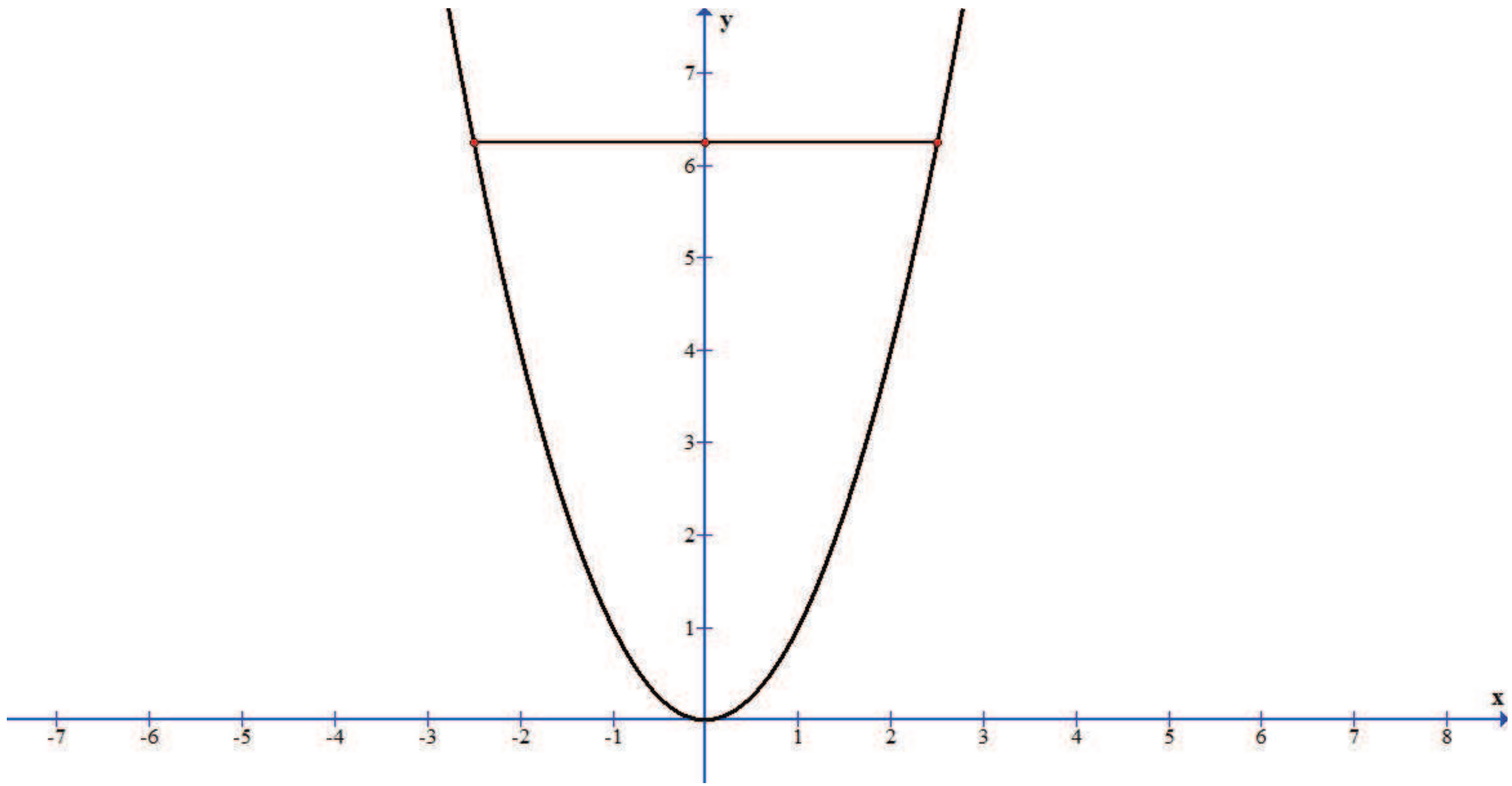


1.5 Четни, нечетни

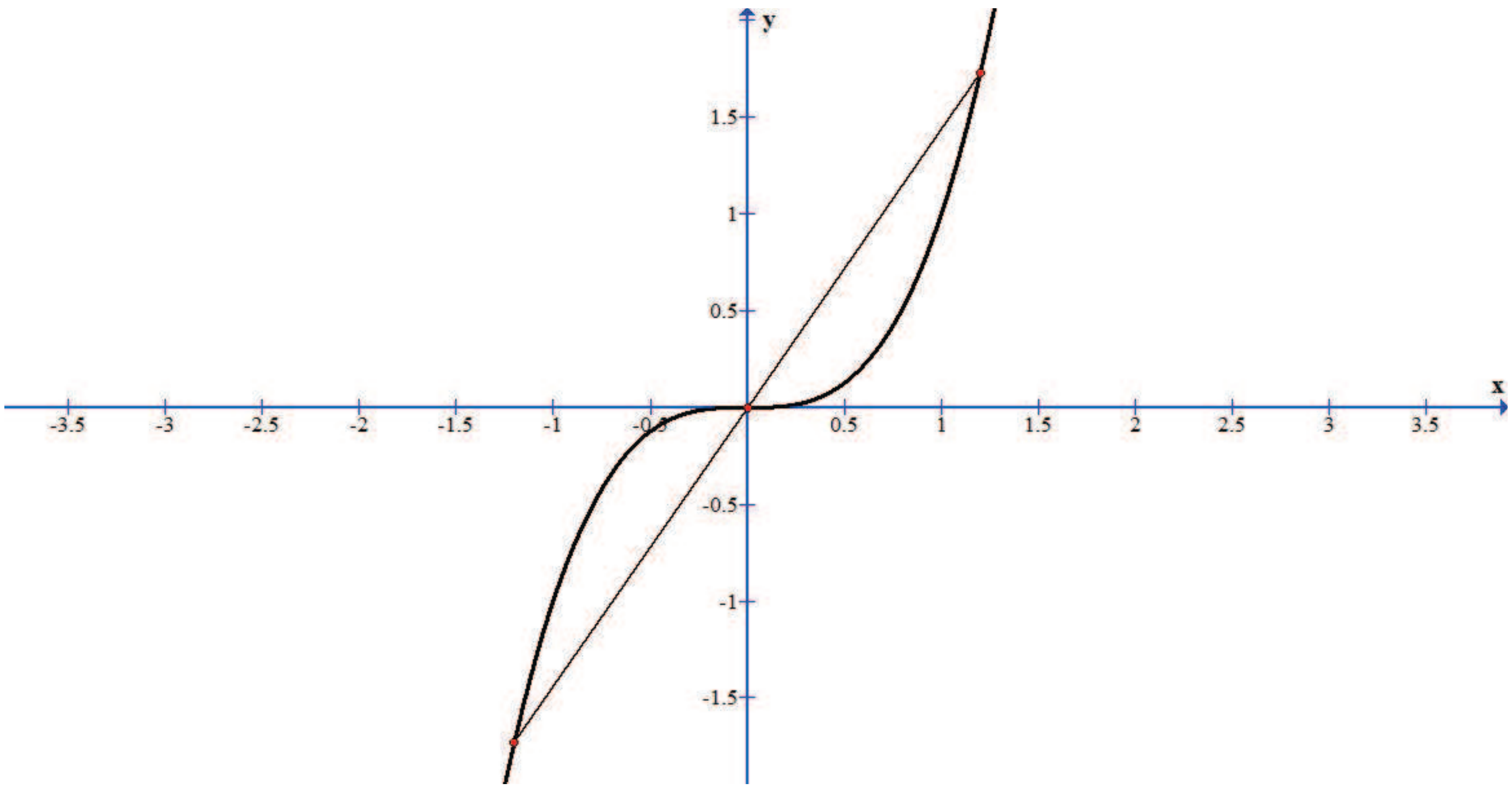
Само в симетрично относно 0 множество $A \subset D_f$

- симетрично относно 0 множество $A \subset D_f$
$\iff A = -A \iff \{x \in A \quad \iff \quad -x \in A\}$
- четна $f(-x) = f(x)$ за всяко $x \in A$
- нечетна $f(-x) = -f(x)$ за всяко $x \in A$
- сума (разлика) на четни (нечетни) е четна (нечетна)
- произведение на четни (нечетни) е четна
- произведение на четна и нечетна е нечетна
- съставна функция от две нечетни е нечетна
- съставна функция от четна и нечетна е четна
- за да бъде съставна функция четна е достатъчно вътрешната функция да е четна

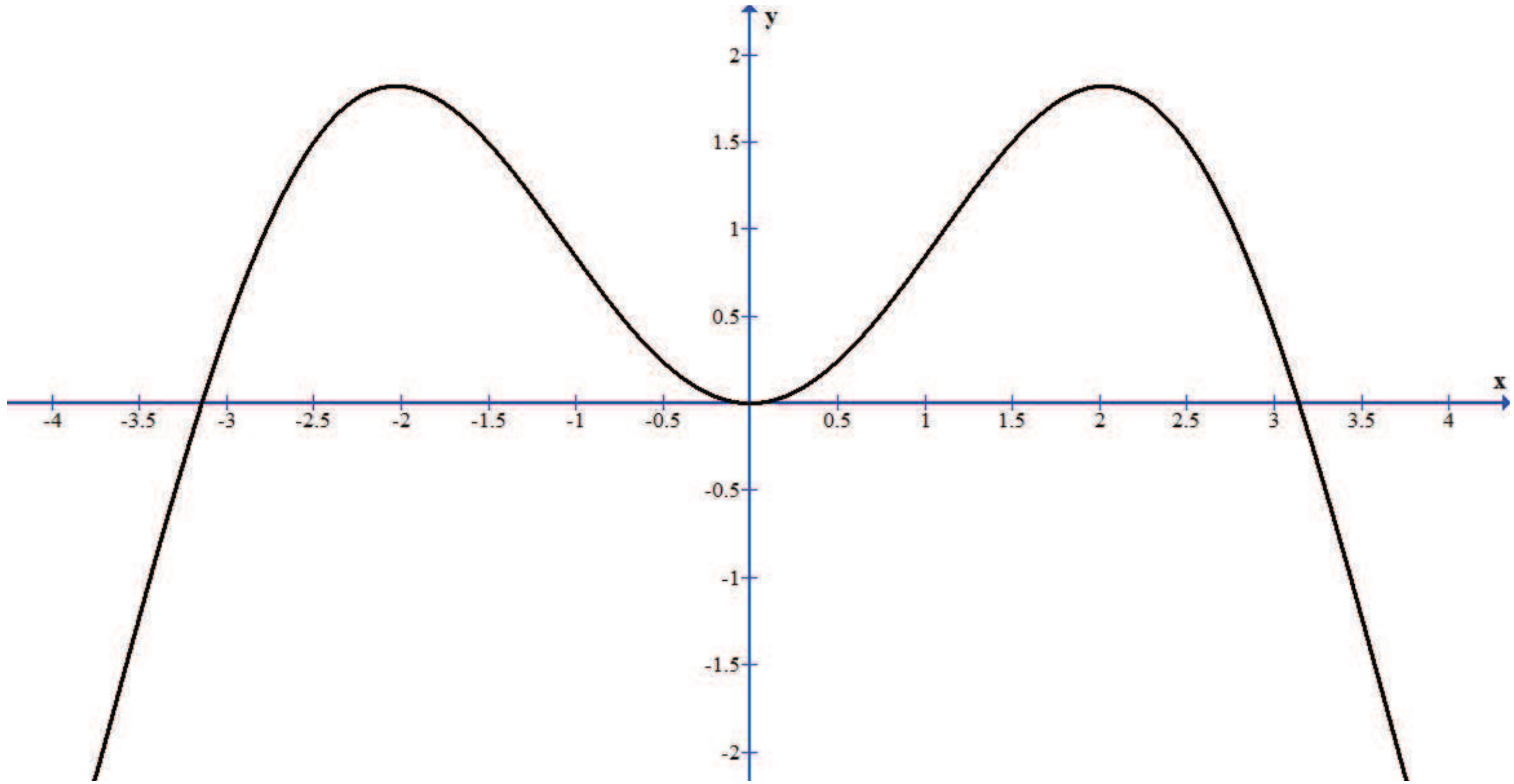
Пример 1 x^2 е четна в $\mathbb{R}$



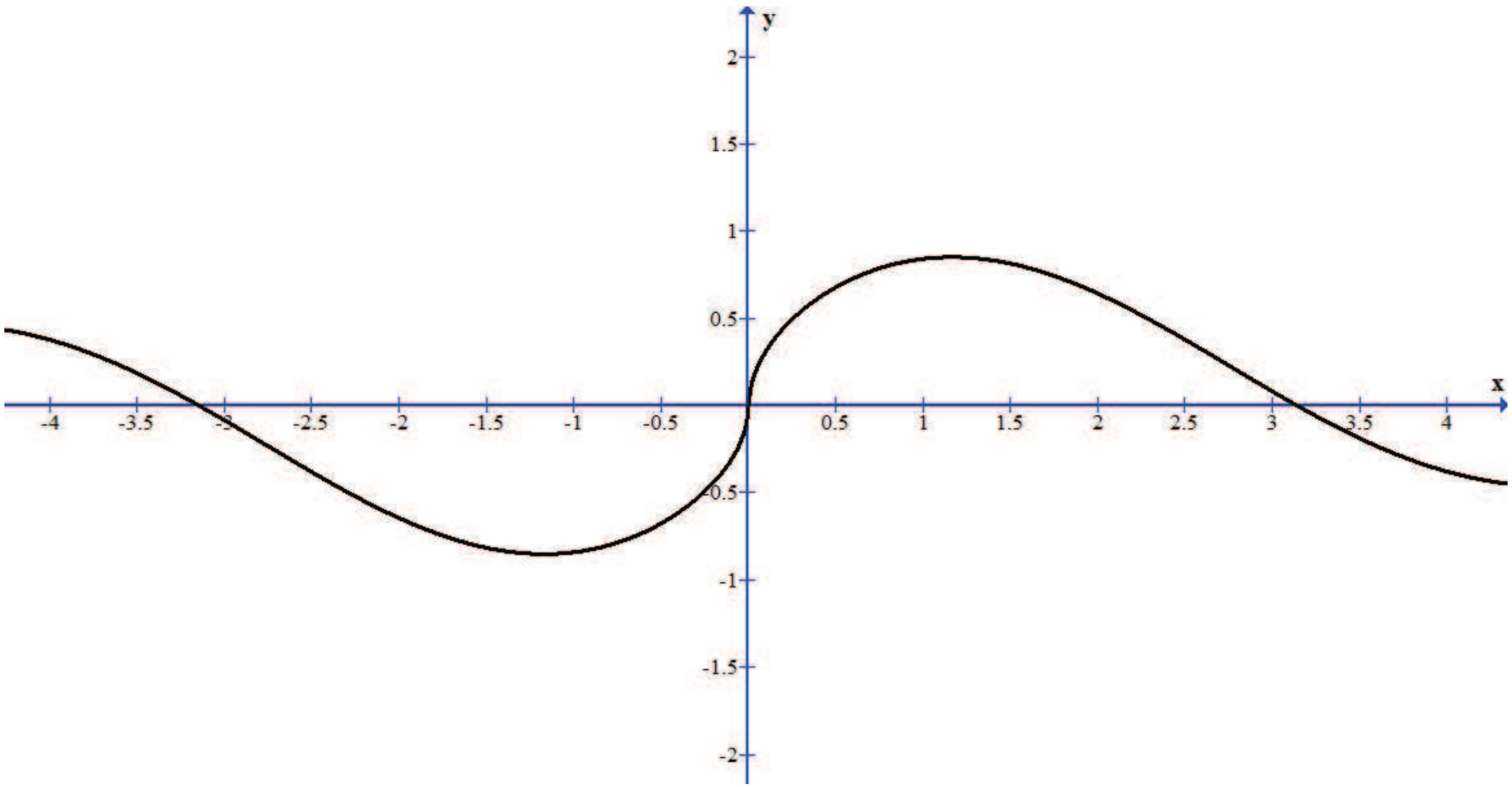
Пример 2 $\quad x^3$ е нечетна в $\mathbb{R}$



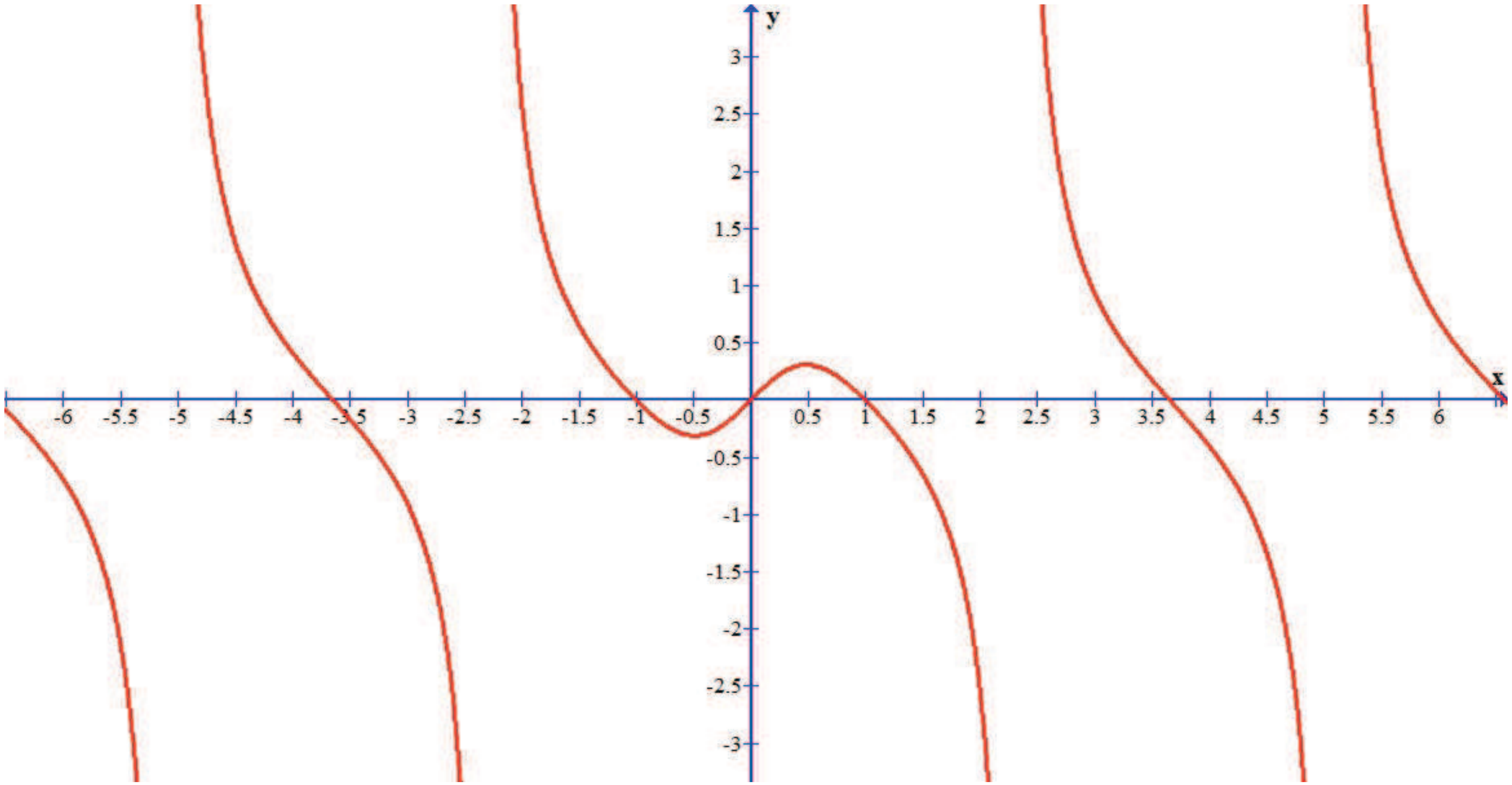
Пример 3 $x \sin x$ е четна в $\mathbb{R}$



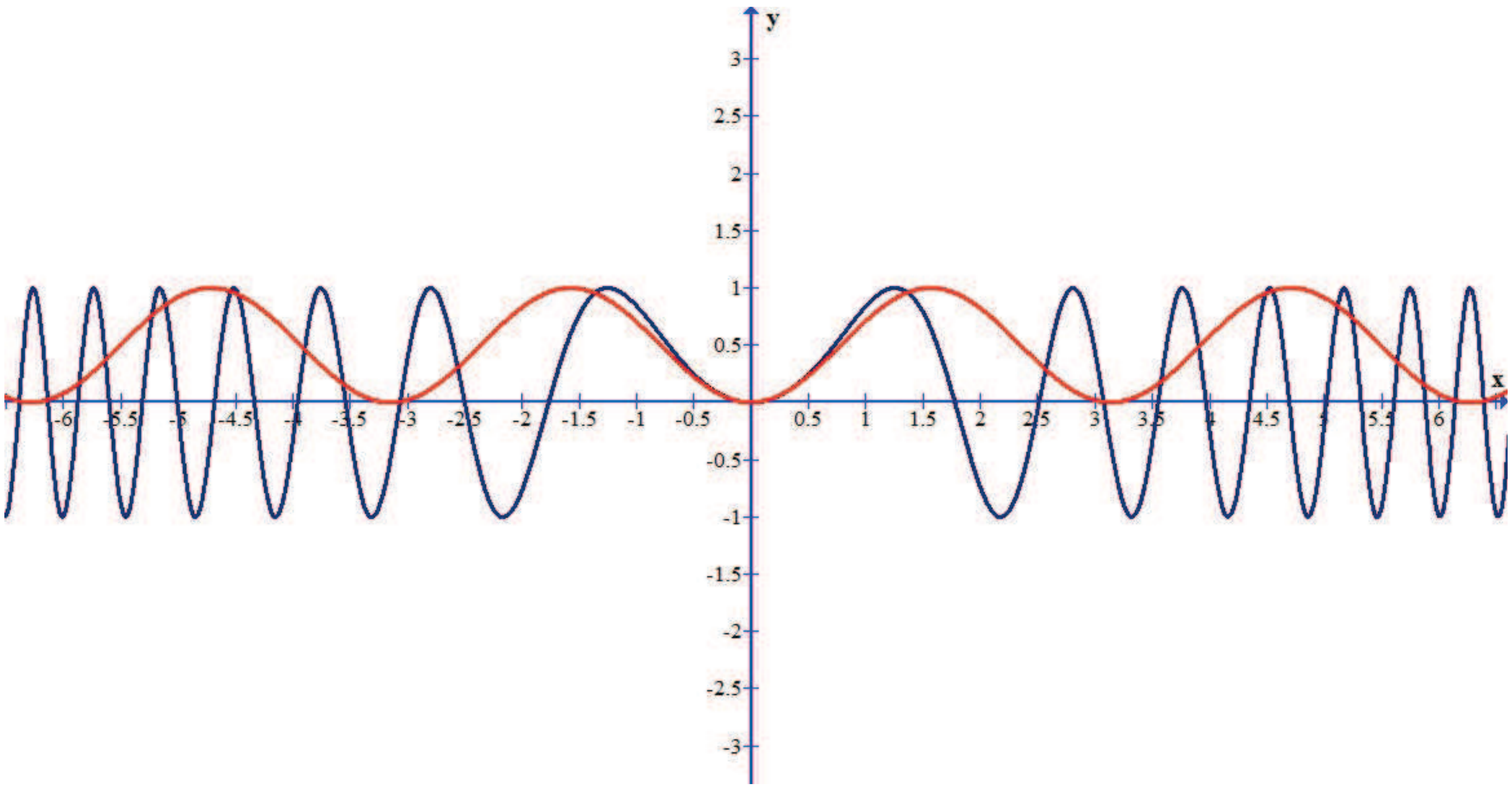
Пример 4 $\quad \dfrac{\sin x}{\sqrt{|x|}}$ е нечетна в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



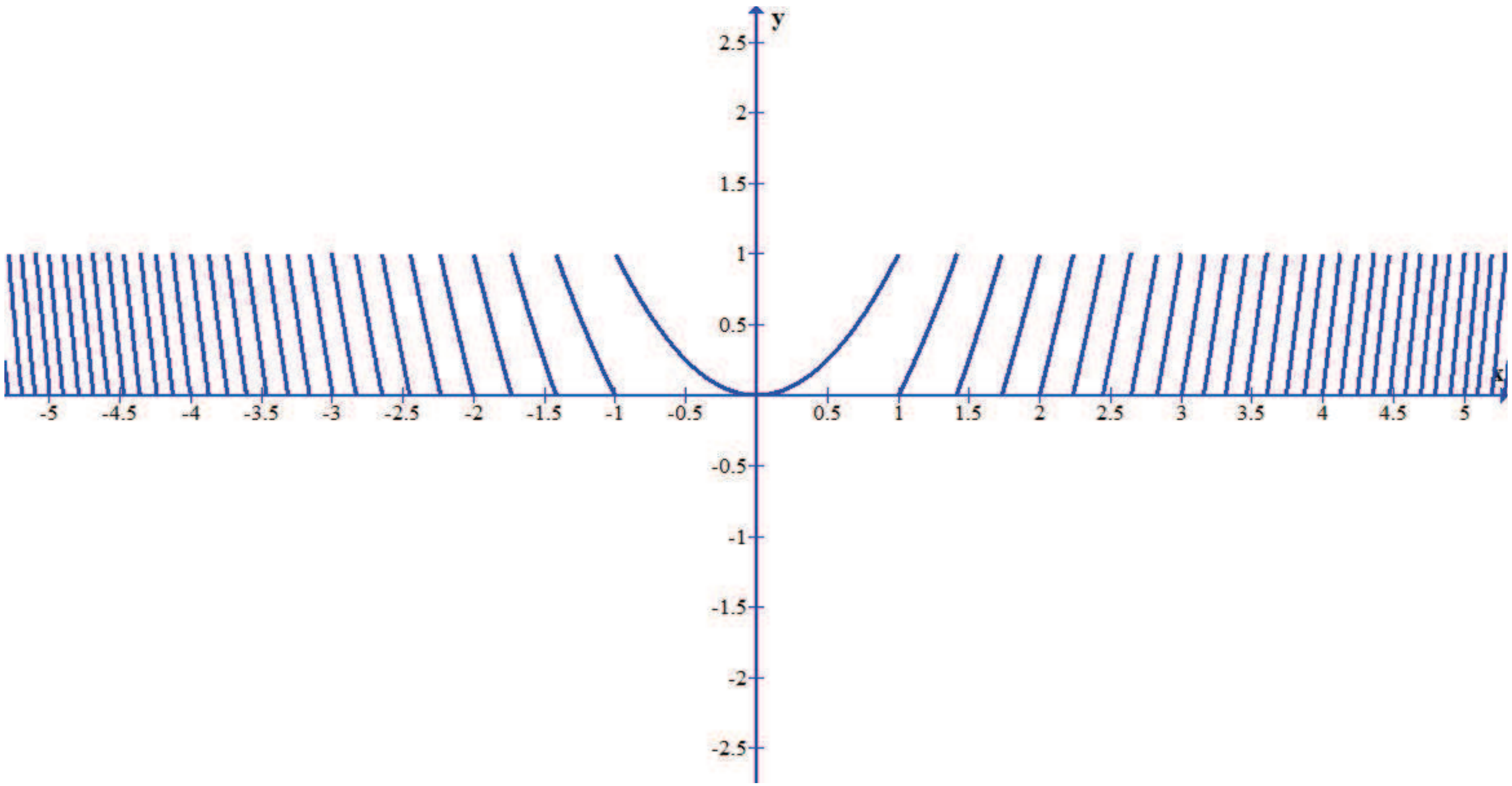
Пример 5 $\quad \operatorname{tg}\dfrac{x-x^3}{x^2+1}$ е нечетна



Пример 6 $\sin^2 x$ и $\sin x^2$ са четни в $\mathbb{R}$



Пример 7 $\{x^2\}$ е четна, въпреки че $\{x\}$ не е нито четна, нито нечетна

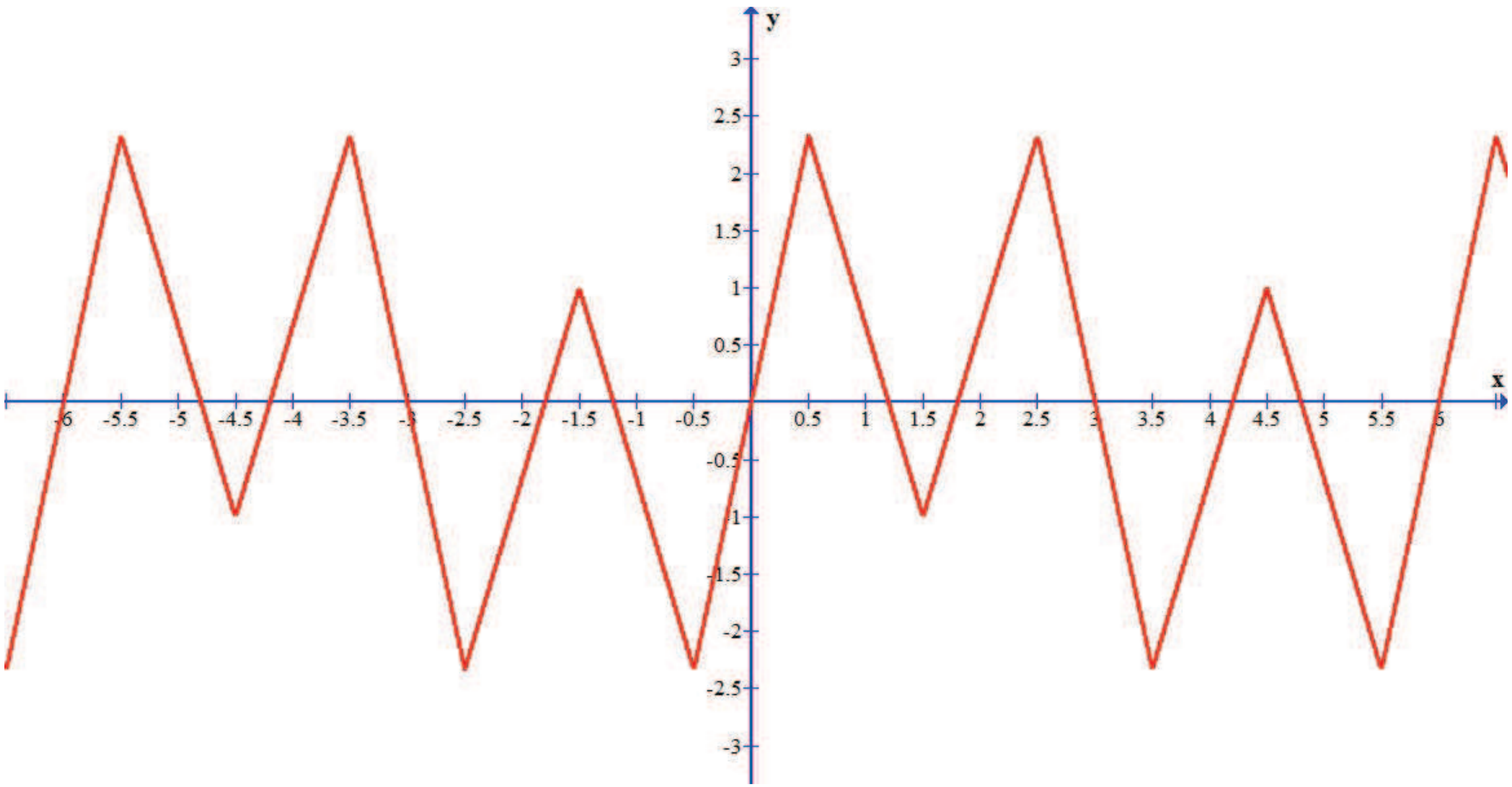


1.6 Периодични

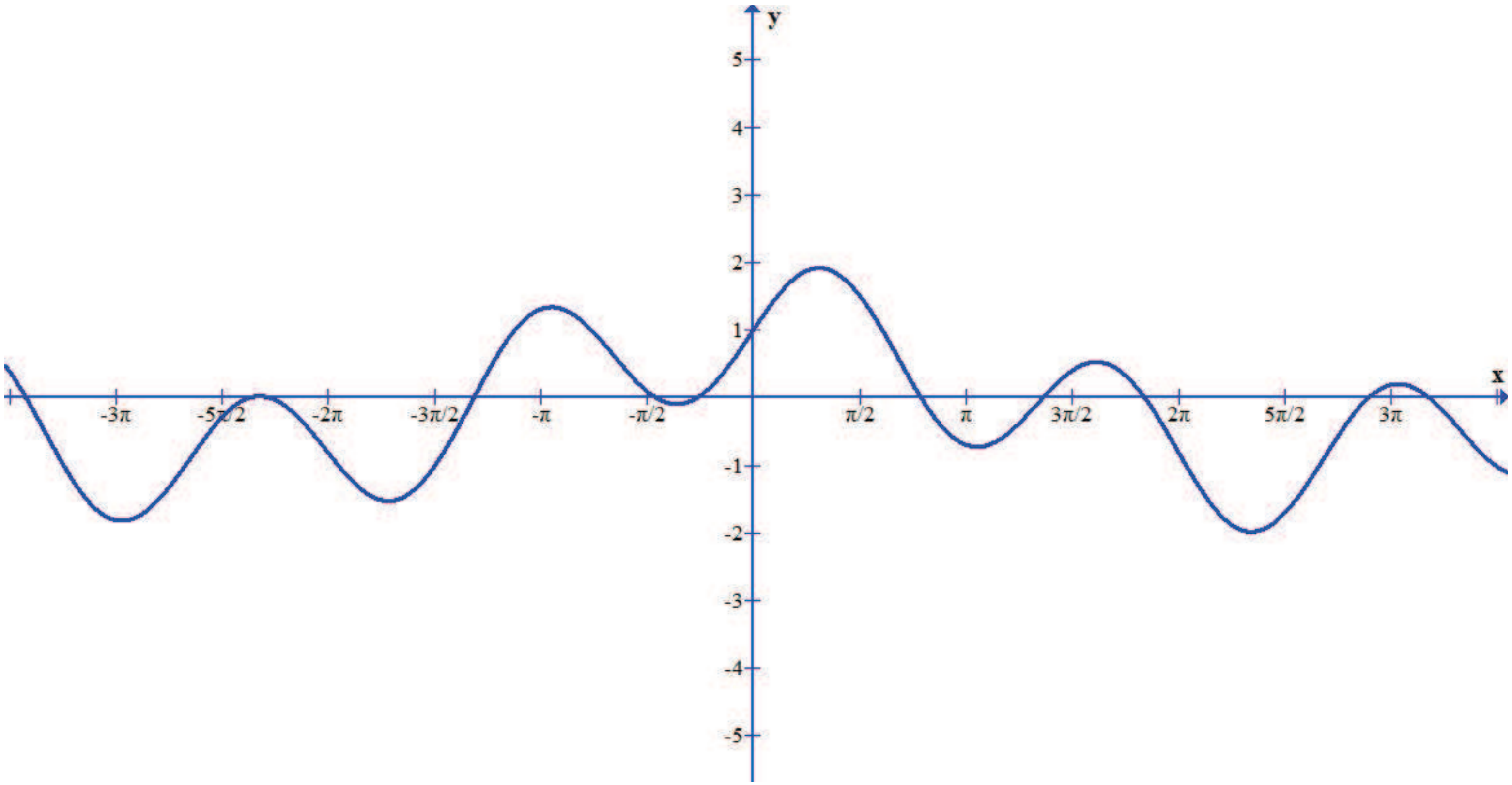
Само в „периодично“ множество $A \subset D_f$

- „периодично“ множество (с период $T > 0$) — $A = A + T$
  $\iff \{x \in A \iff x + T \in A\}$
- периодична с период $T > 0$ — $f(x) = f(x + T)$ за всяко $x \in A$
- сума (разлика), произведение на периодични ??? — отношението на периодите е рационално число
- за да бъде съставна функция периодична е достатъчно вътрешната функция да е периодична
- за да бъде съставна функция периодична е достатъчно външната функция да е периодична и вътрешната да е линейна

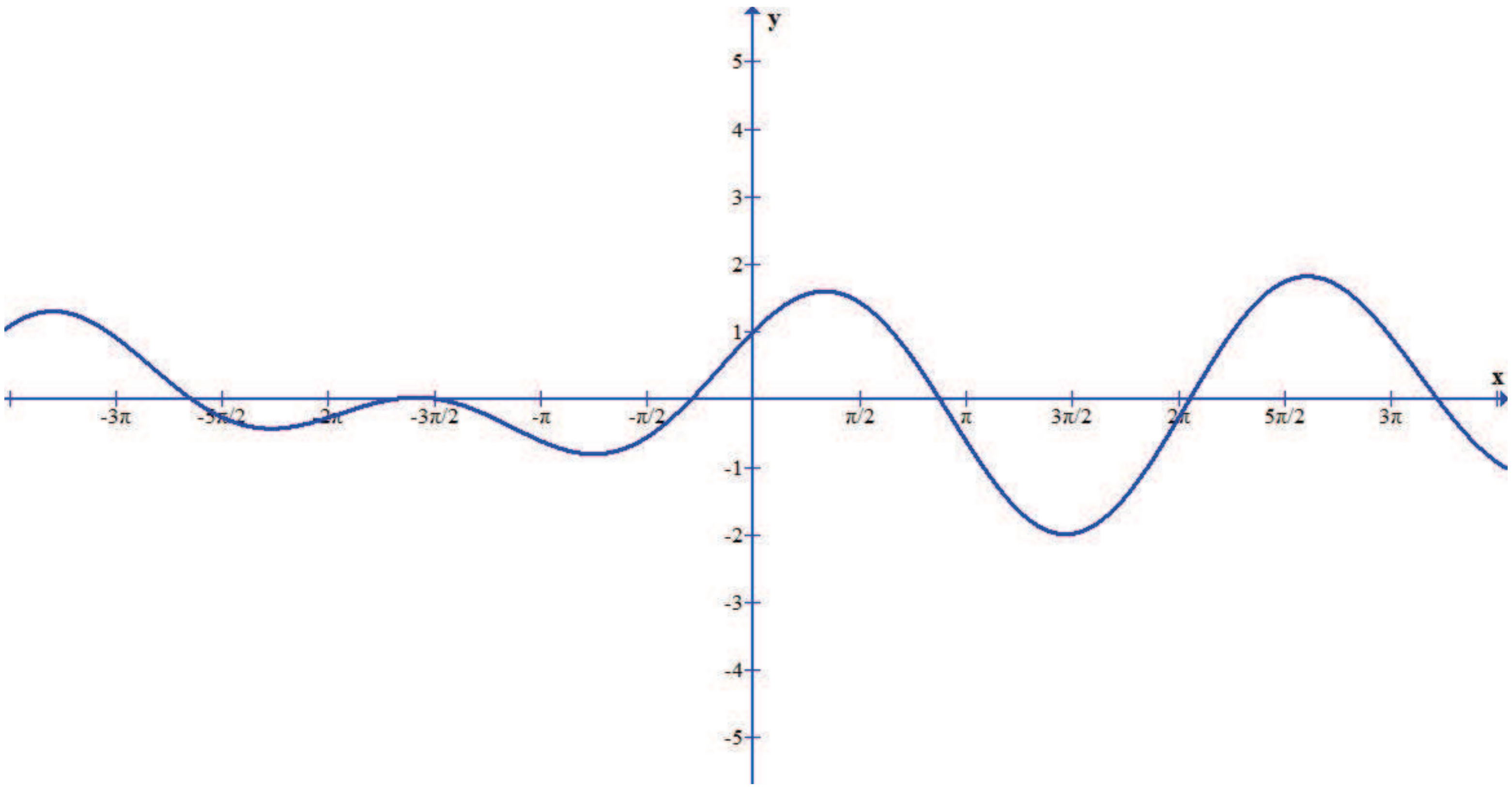
Пример 1 „трион“



Пример 2 $\sin\dfrac{3x}{2} + \cos\dfrac{2x}{5}$ е периодична, какъв е периодът?



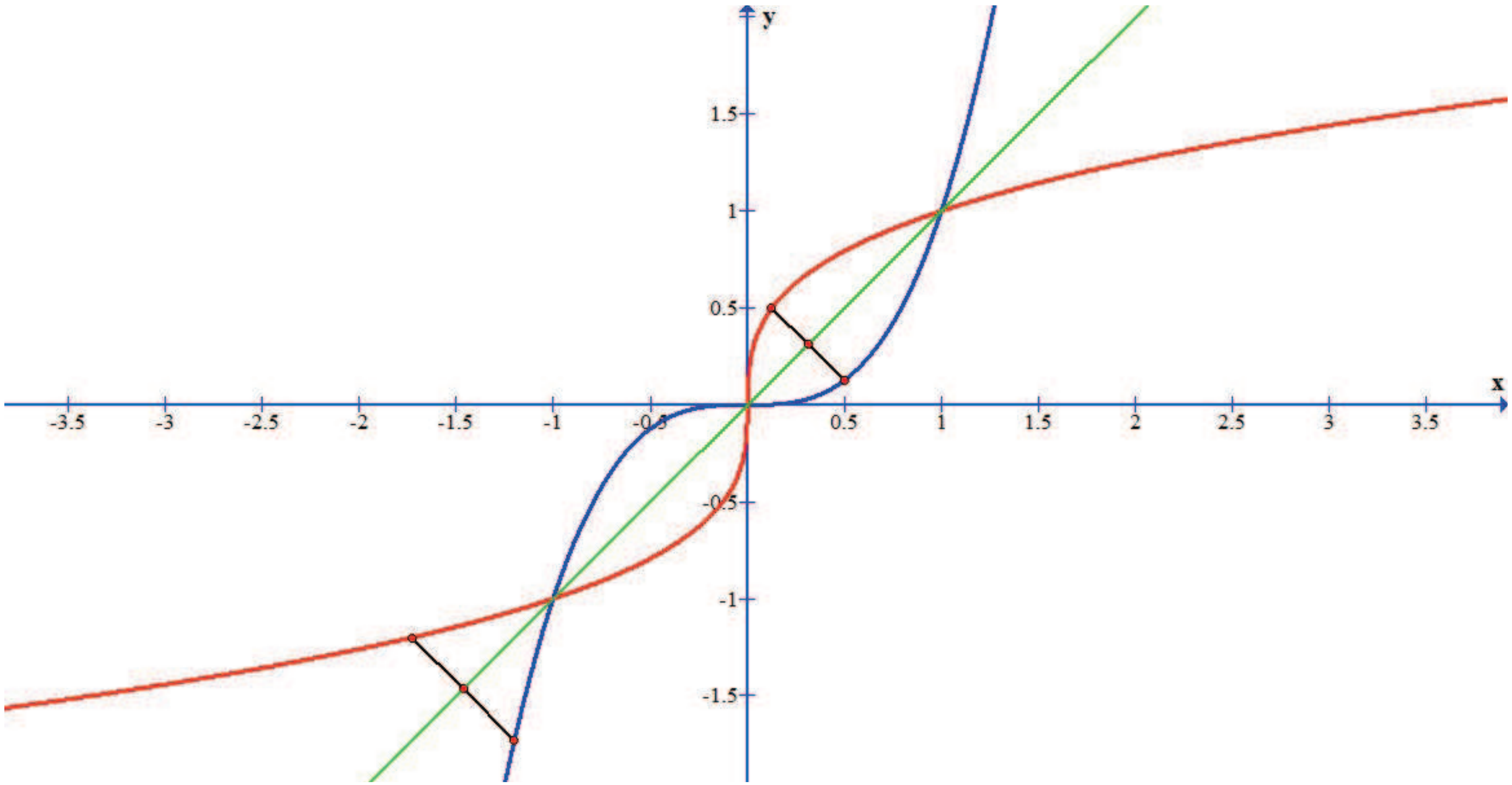
Пример 3 $\sin x + \sin \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ не е периодична



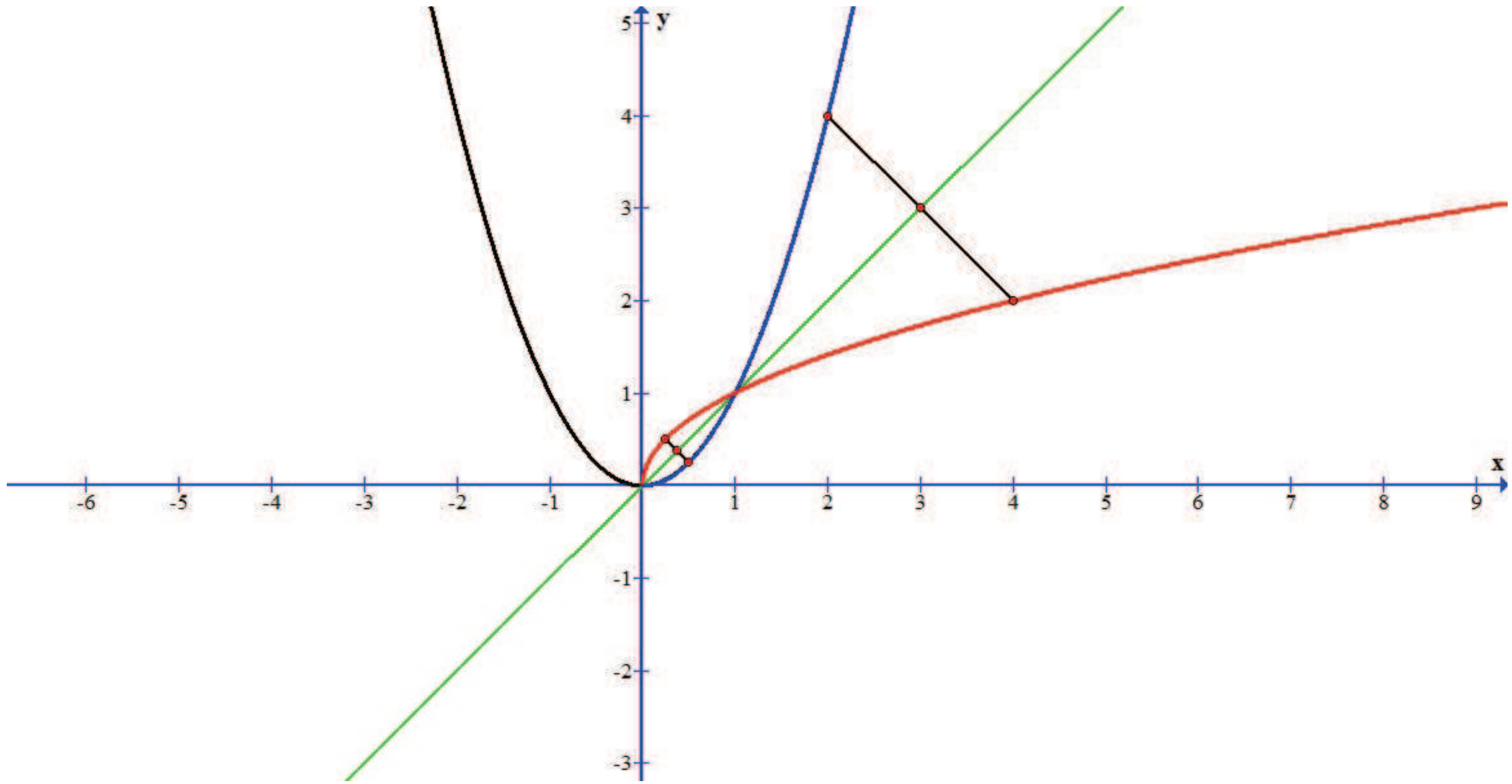
1.7 Обратими функци

- f е обратима в множество $A \subset D_f$, ако $f(x) \neq f(y)$ за всеки $x \neq y$, $x \in A$, $y \in A$
- основни равенства
  - $g(f(x)) = x$ за всяко $x \in D_f = R_g$
  - $f(g(x)) = x$ за всяко $x \in D_g = R_f$
- строго монотонна е обратима
- обратното не винаги е вярно $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{за} \quad x \in [0, 1) \\ -x + 4 & \text{за} \quad x \in [1, 2] \end{cases}$
- обратната на растяща (намаляваща) е растяща (намаляваща)
- обратната на нечетна е нечетна (а за четна???)
- графика на обратната функция — симетрична на графиката на функцията, на която е обратна, относно правата $y = x$

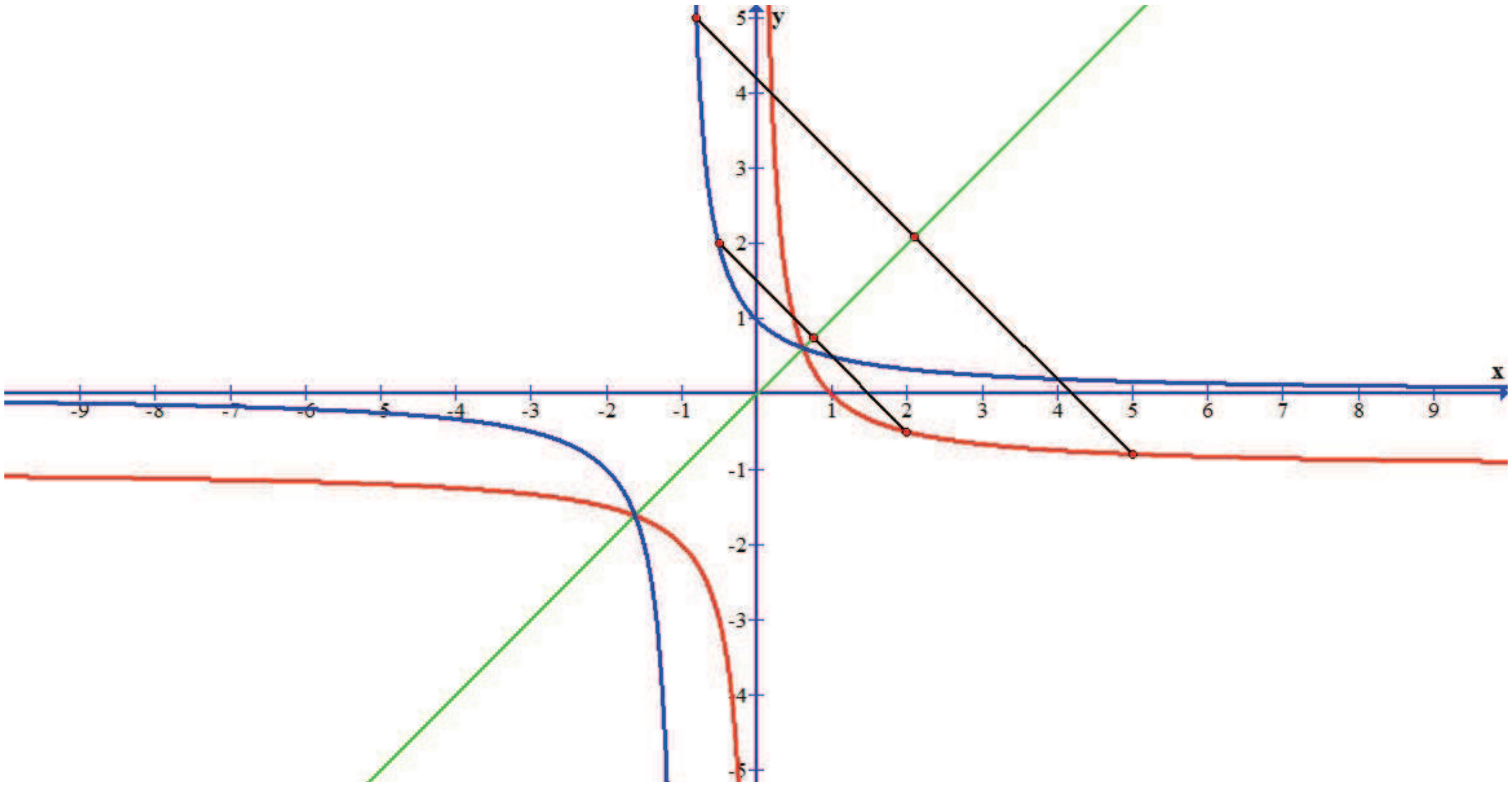
Пример 1 x^3 е обратима в $\mathbb{R}$



Пример 2 x^2 е обратима само в $[0\,,\ +\infty)$



Пример 3 $\dfrac{1-x}{x}$ е обратима — обратна $\dfrac{1}{1+x}$



2 Рационални функции

2.1 Полиноми

- Основни едночлени x^{2n} – „прилича“ на x^2, а x^{2n+1} – на x^3

- Многочлен (полином) $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, степен на полинома

- Теорема: Нека за полинома $P(x)$ от степен n съществува число b, за което $P(b) = 0$. Тогава съществува полином $Q(x)$ от степен $n-1$, за който $P(x) = (x-b)\,Q(x)$.

- Следствие: Полином $P(x)$ от степен n има най-много n различни нули.

- Принцип за сравняване на коефициентите: Нека $P(x)$ и $Q(x)$ са два полинома, от степен най-много n, за които $P(b_i) = Q(b_i)$ за $n+1$ различни числа $b_1,\ b_2,\ \ldots b_{n+1}$.

  Тогава $P(x) = Q(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ и коефициентите им пред равните степени са равни.

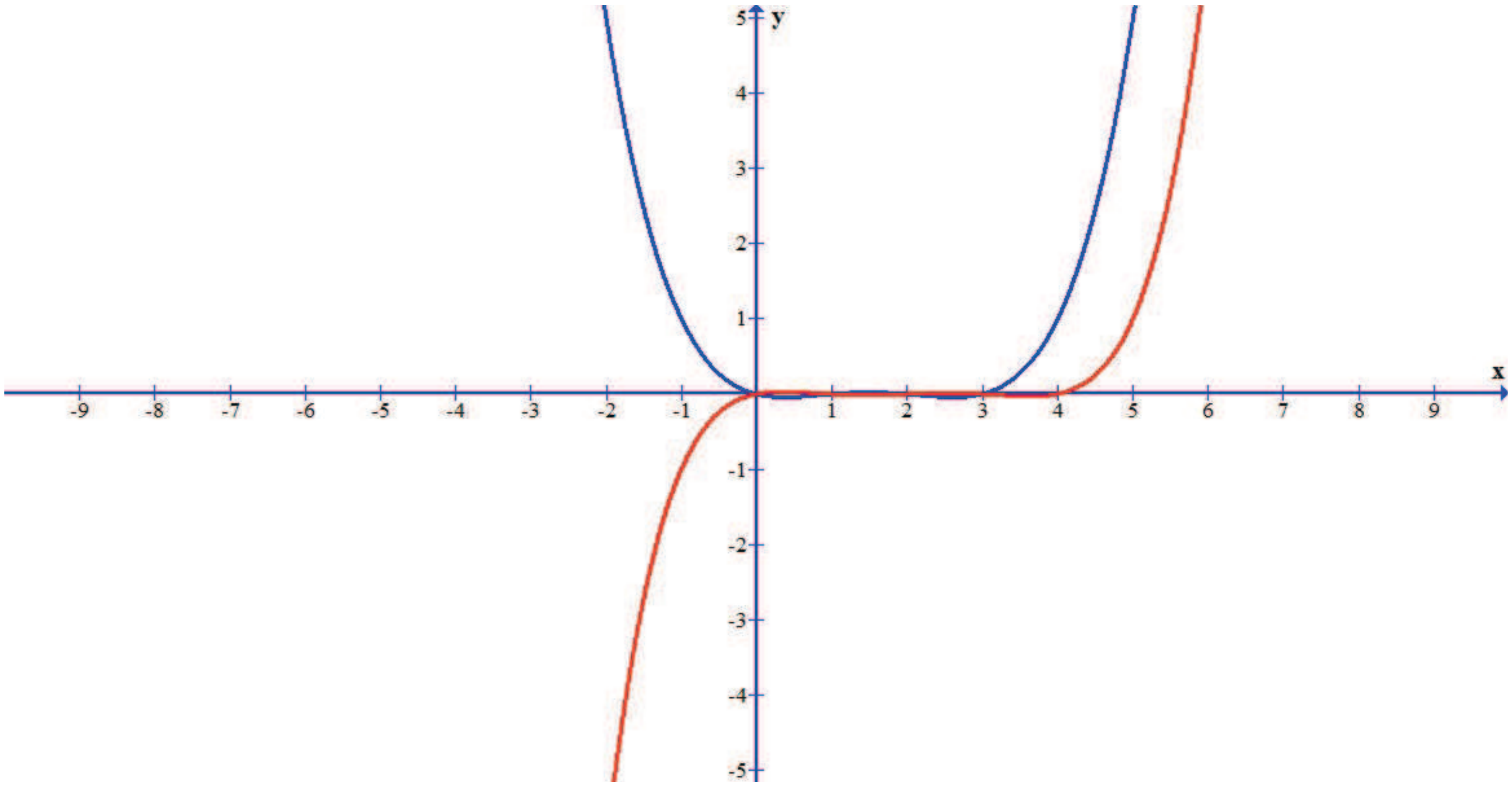
- Пример: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

- Дефиниция: $\binom{x}{k}$ е единствения полином от степен k, който в $0,\ 1,\ \dots k-1$ има стойност 0, а в k – стойност 1.

$$\binom{x}{k} = \frac{x\,(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}\ .$$

Примери: $\binom{-1}{k} = (-1)^k\ ,\ \ \binom{-2}{k} = (-1)^k\,(k+1)\ ,\ \ \binom{-\frac{1}{2}}{k} = \dfrac{(-1)^k\,(2k-1)!!}{(2k)!!}\ .$

Пример Графики на $\binom{x}{4}$ – синьо, $\binom{x}{5}$ – червено



2.2 Рационални функции

- Деление на полиноми: За всеки два полинома $P(x)$ (от степен n) и $Q(x)$ съществуват полиноми $R(x)$ (от степен най-много $n-1$) и $S(x)$, за които $Q(x) = P(x)S(x) + R(x)$.

- Рационална функция – частно на два полинома $R(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$.

- Всяка рационална функция е сума на полином и „правилна“ дроб.

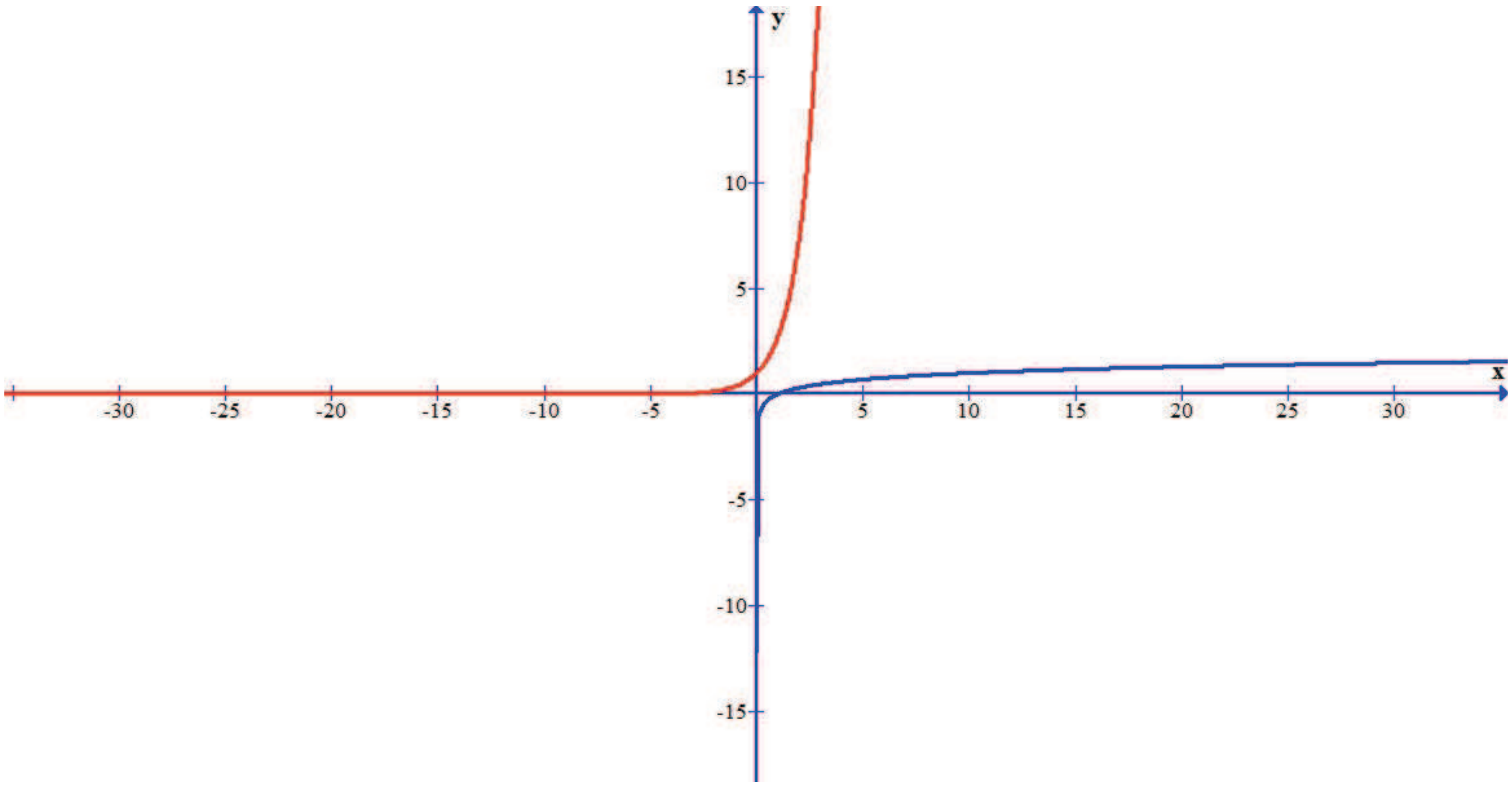
3 Експонента и натурален логаритъм

3.1 Експонента

- Дефиниция: $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$
- Мотивация
- Основно равенство: $e^{x+y} = e^x e^y$
- Свойства:
  - $e^x > 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$
  - $e^x \geq 1 + x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$
  - $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$ за всяко $x < 1$
  - e^x е строго растяща, следователно обратима.
  - за всяко $y > 0$ съществува $x \in \mathbb{R}$, за което $e^x = y$.

    Може да се покаже, че $x = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right)$.

Графика



3.2 Натурален логаритъм

Натурален логаритъм – обратната на експонентата
(единственото решение на уравнението $e^x = y$ за $y > 0$).

Свойства:

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ за всяко $x > 0$ и всяко $y > 0$
- $\ln(x+1) \leq x$ за всяко $x > -1$
- $\ln(x+1) \geq \dfrac{x}{x+1}$ за всяко $x > -1$
- $\ln x$ е строго растяща

3.3 Степен с положителна основа

Степен с положителна основа – $a^b = e^{b \ln a}$ за $a > 0$.

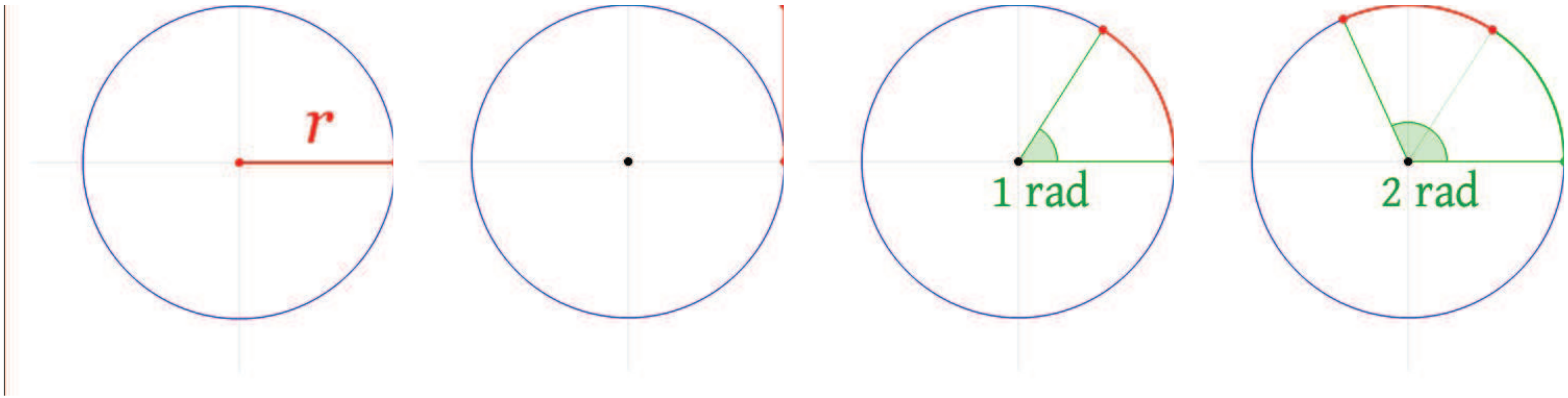
Свойства:

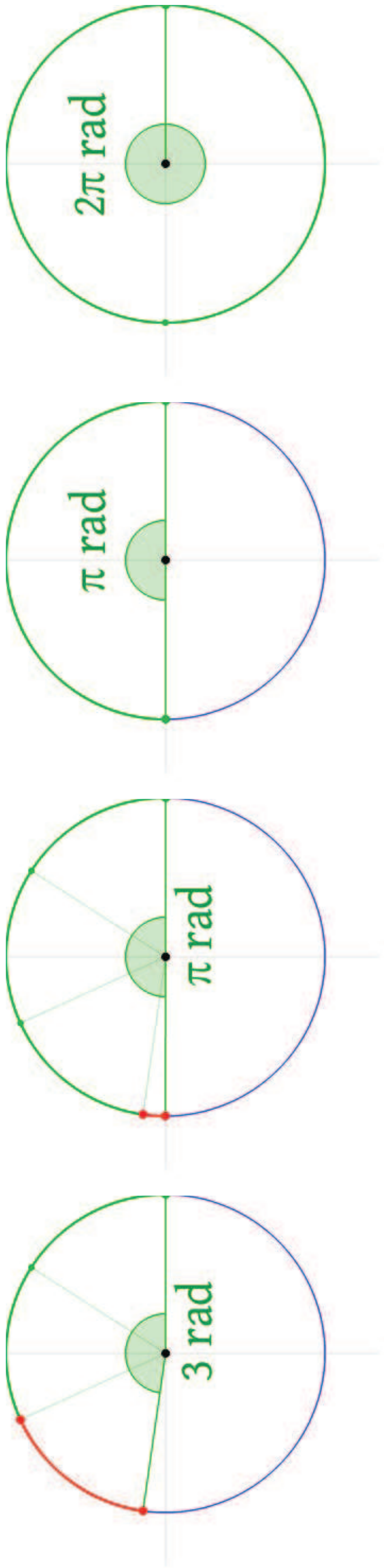
- $a^{b+c} = a^b a^c$
- $(ab)^c = a^c b^c$
- $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$
- a^x е обратима за $a \neq 1$.
- Логаритъм с положителна основа $a \neq 1$ – обратната на a^x.
- $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

4 Тригонометрични и обратни тригонометрични функции

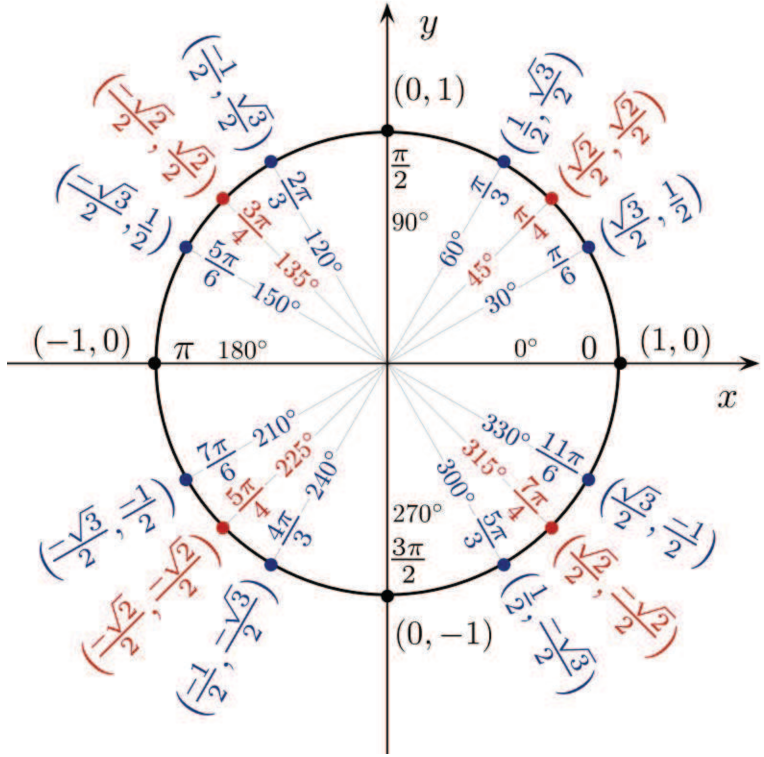
4.1 Тригонометрични функции

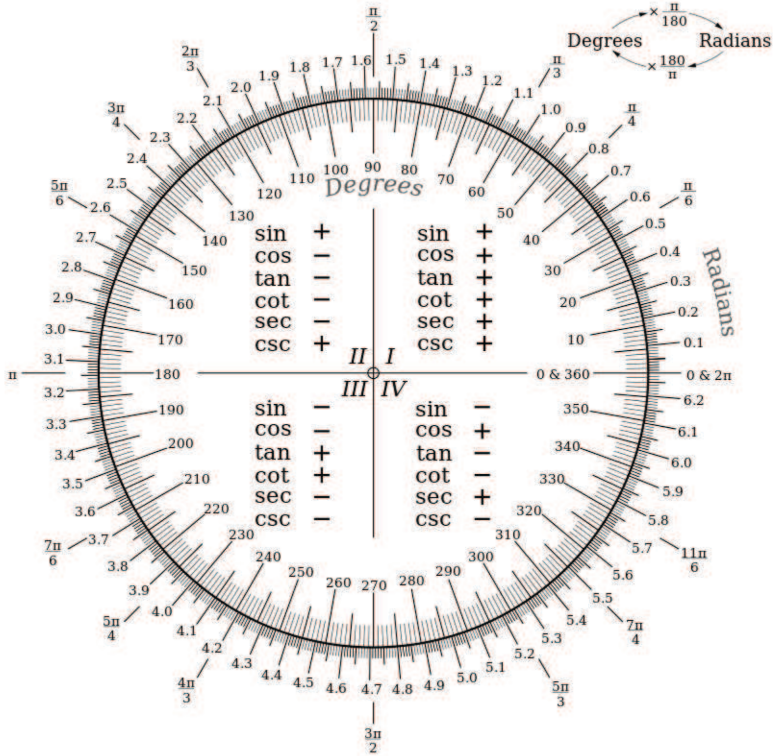
4.1.1 Радиан

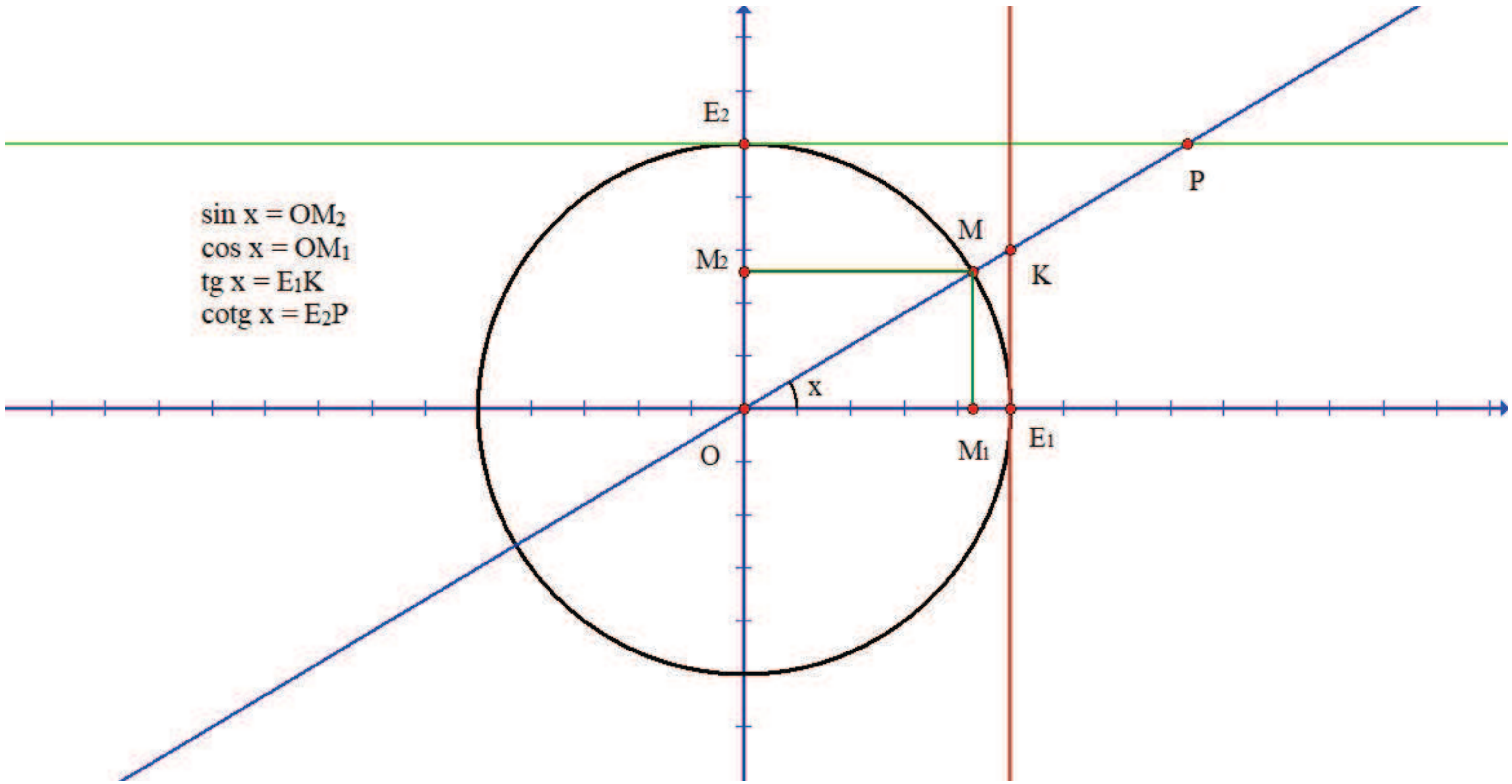



2π rad
π rad
π rad
3 rad

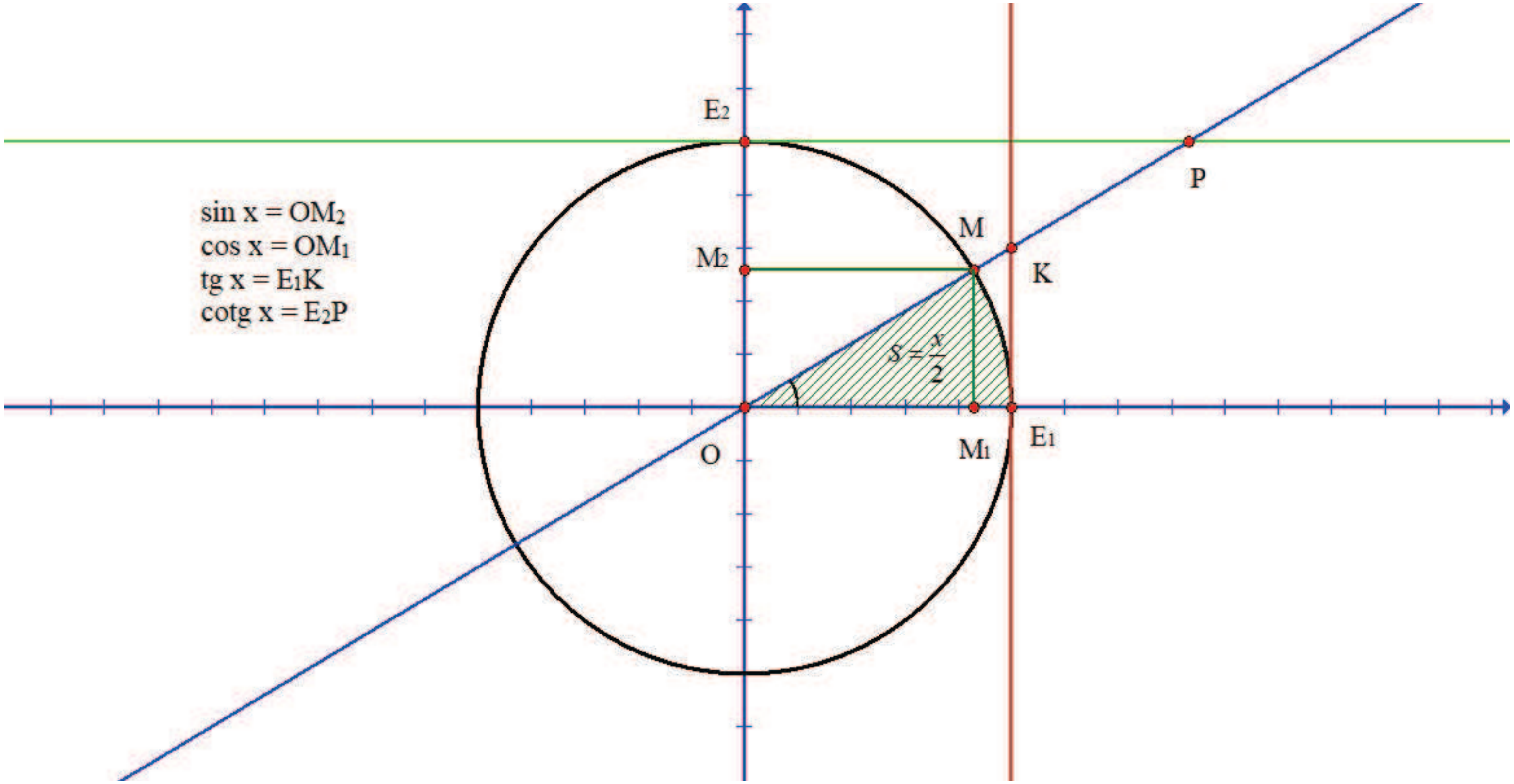
4.1.2 Тригонометрична окръжност






E2
P
sin x = OM2
cos x = OM1
tg x = E1K
cotg x = E2P
M
M2
K
x
O
M1
E1

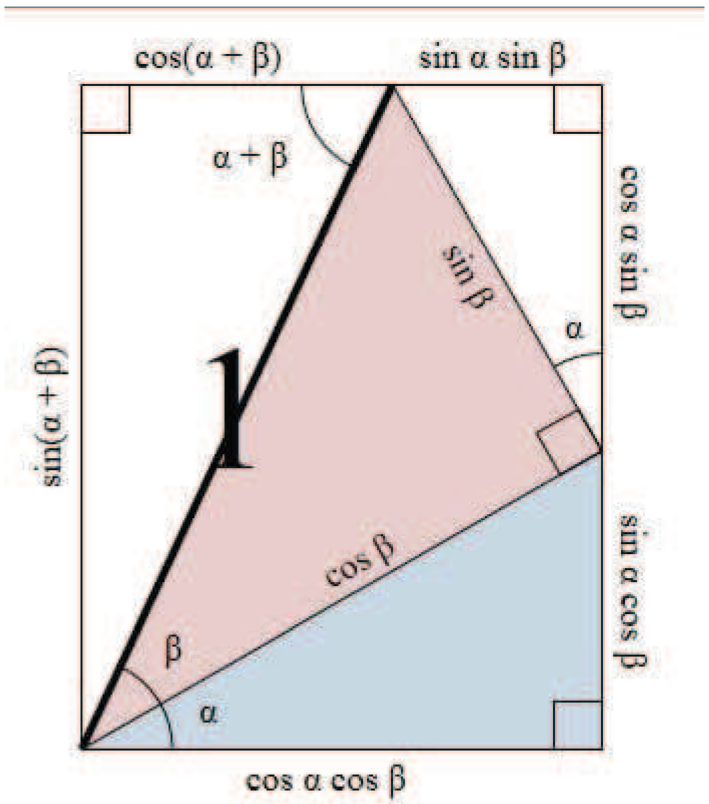
4.1.3 Аргументът като лице



4.1.4 Основни равенства

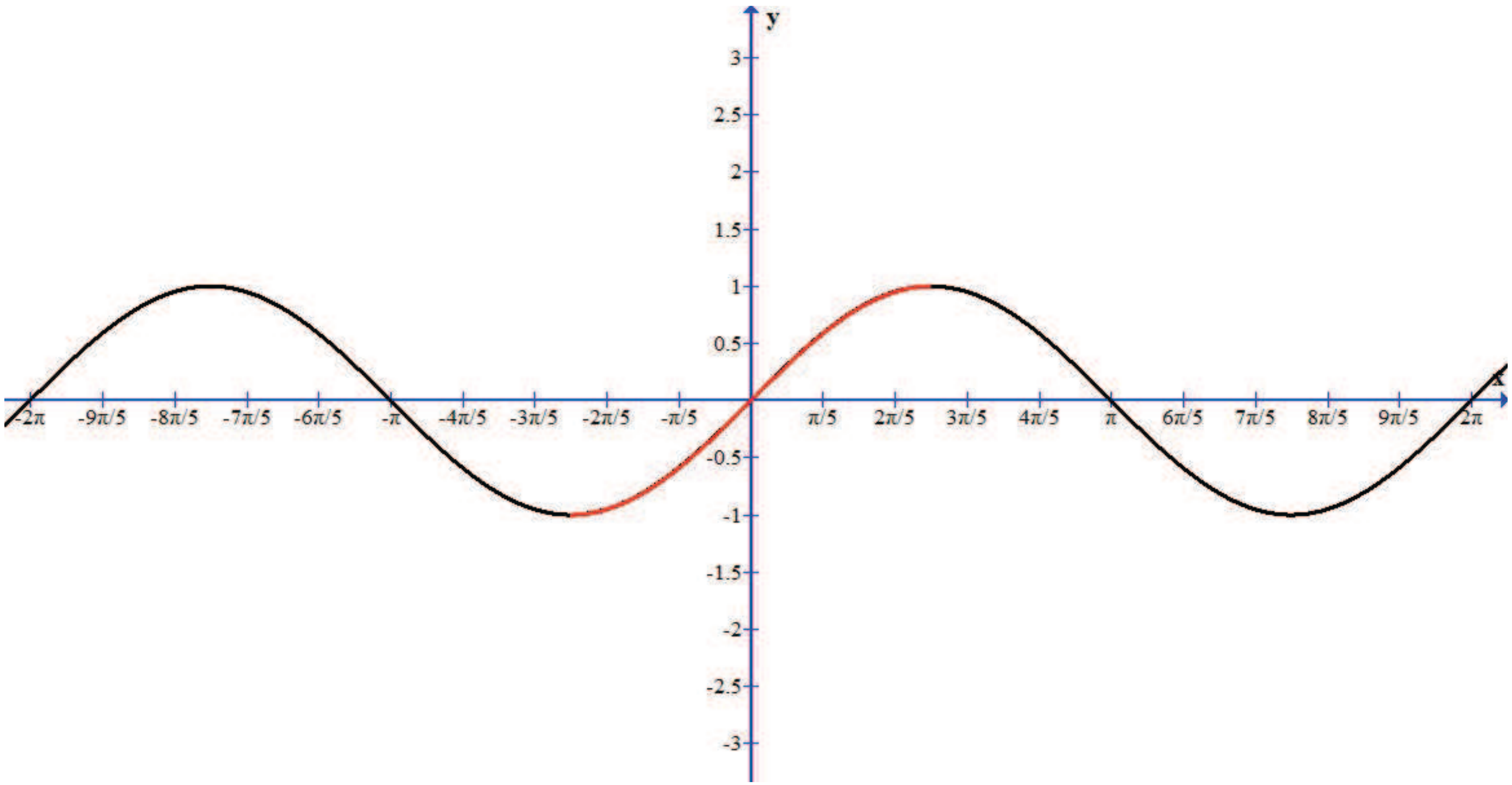
- $\sin 0 = 0\,,\ \cos 0 = 1\,,\ \sin\dfrac{\pi}{2} = 1\,,\ \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$
- $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$
- $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$
- $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$
- Питагорова теорема $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Доказателство на картина



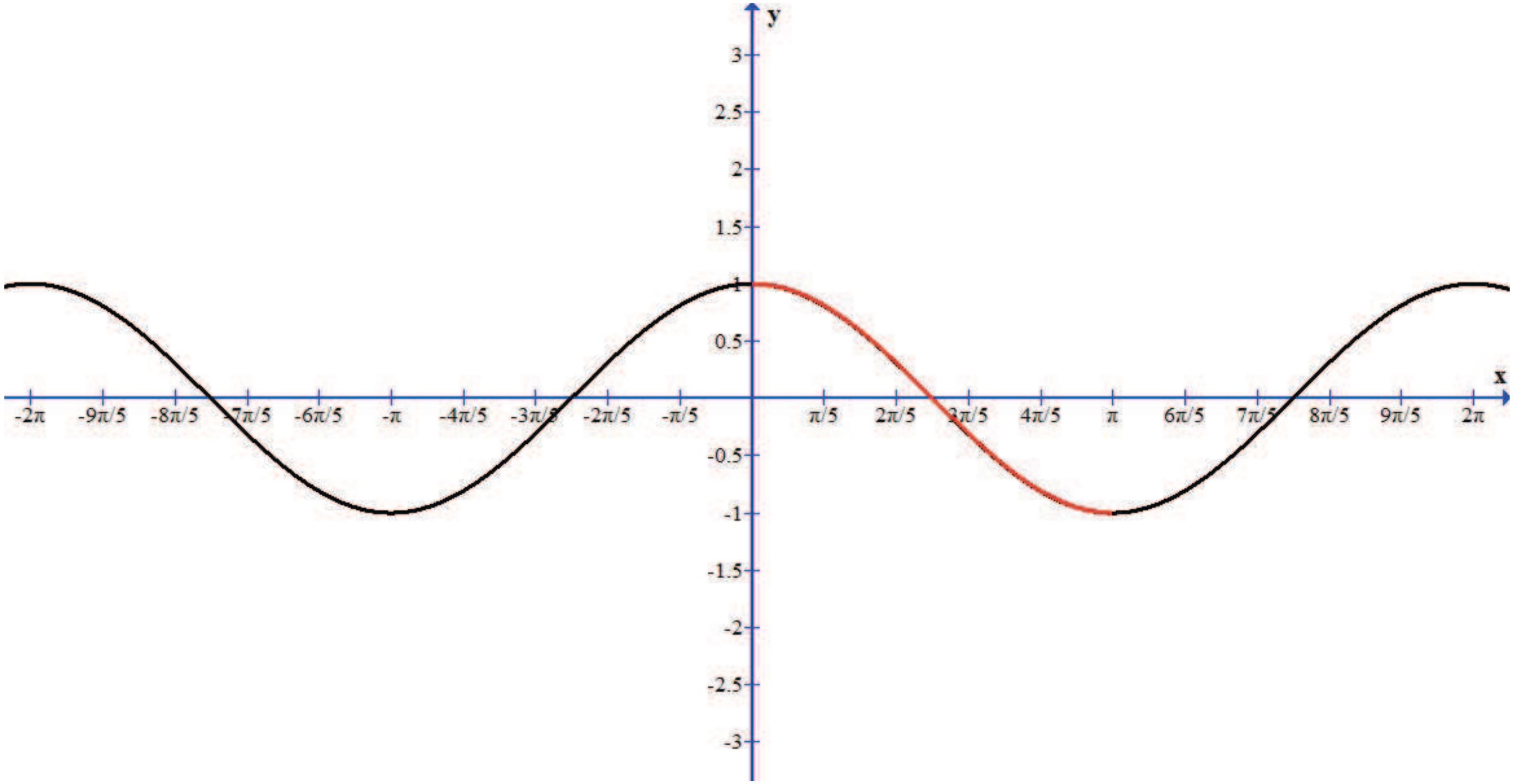
$\sin x$

– периодична с период 2π , нечетна, обратима в $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (строго растяща)



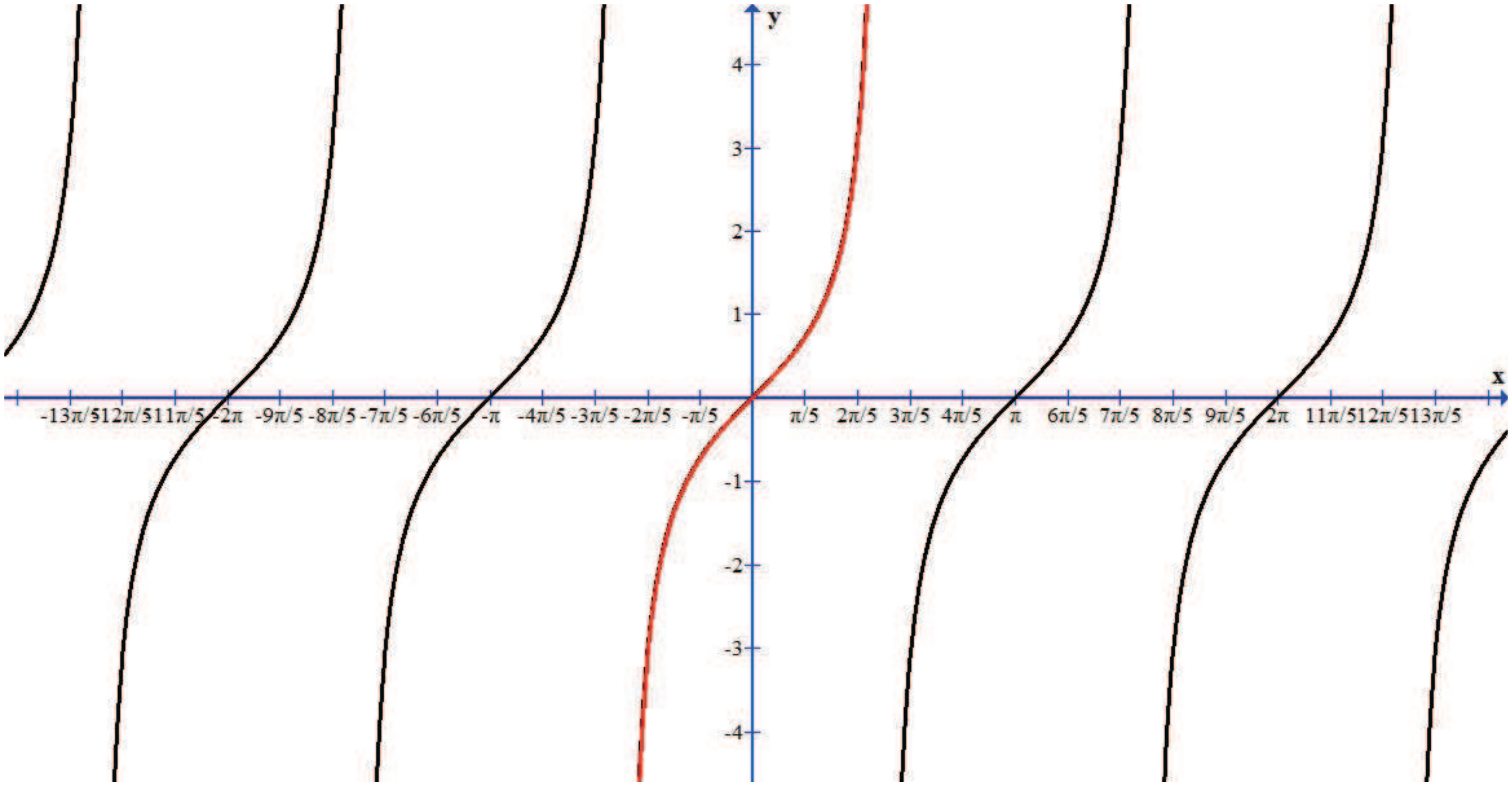
$\cos x$

– периодична с период 2π , четна, обратима в $[0\,,\,\pi]$ (строго намаляваща)



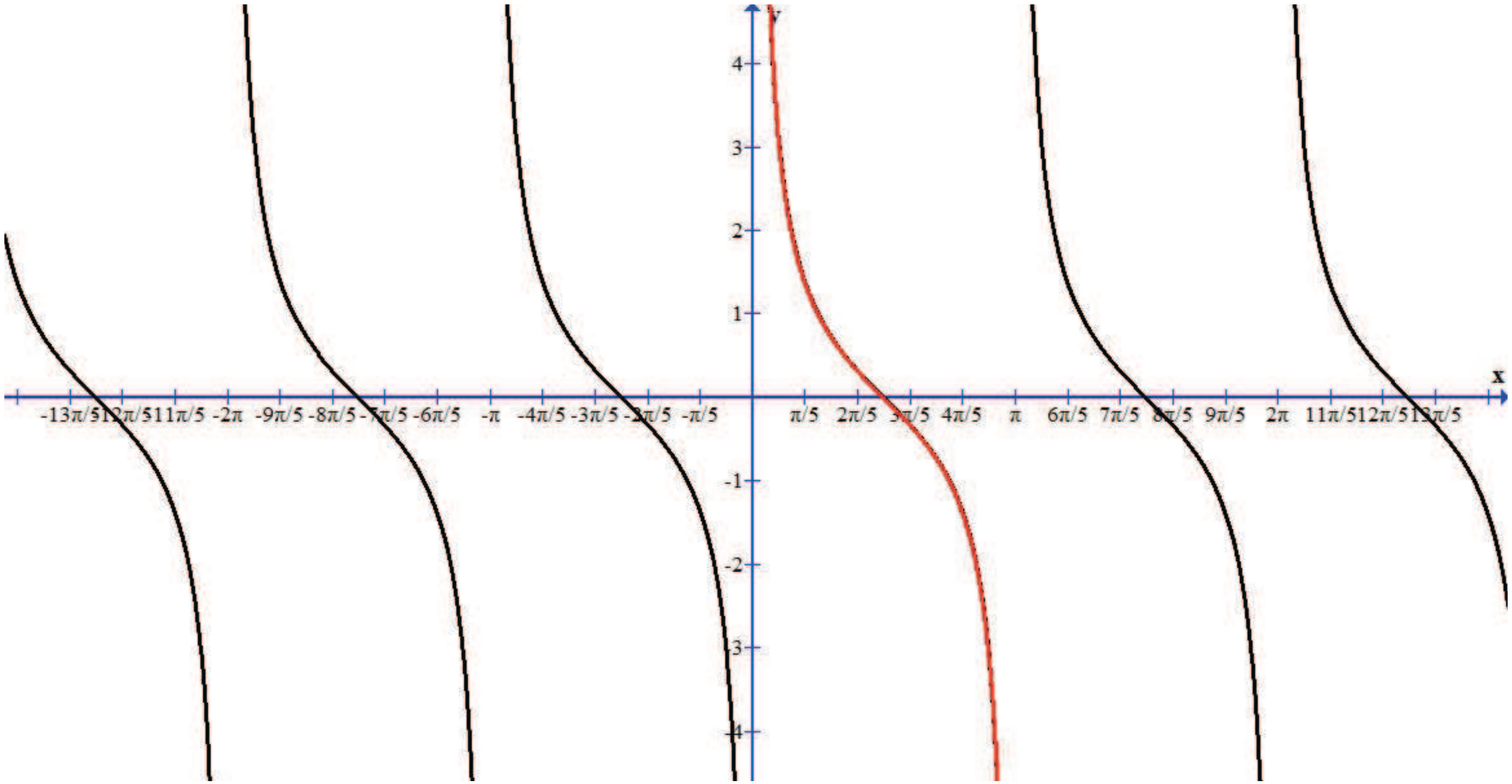
$\operatorname{tg} x$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ – периодична с период π , нечетна, обратима в $\left(-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ (строго растяща)



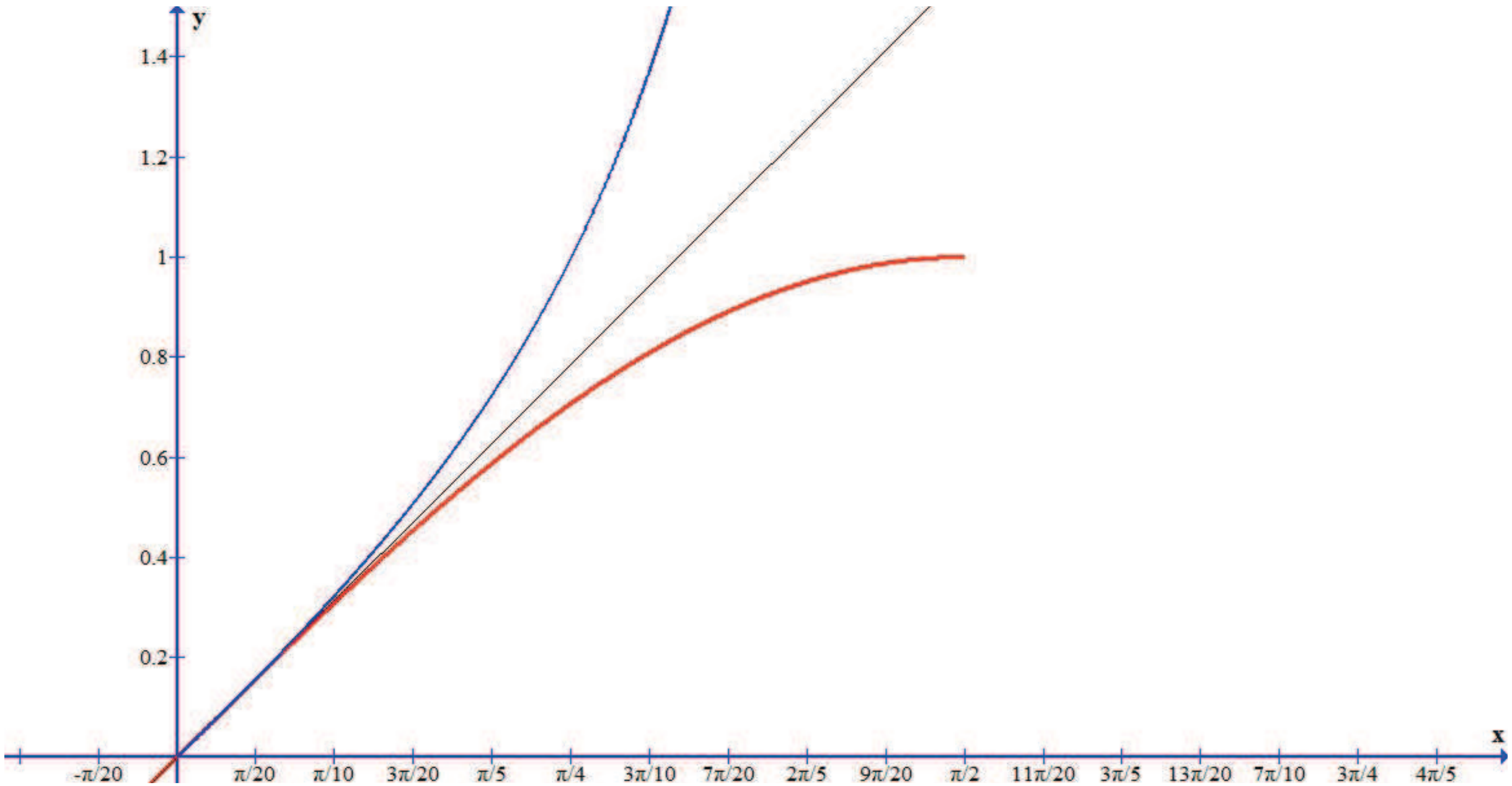
$\operatorname{ctg} x$

$\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ – периодична с период π , нечетна, обратима в $(0\,,\,\pi)$ (строго намаляваща)

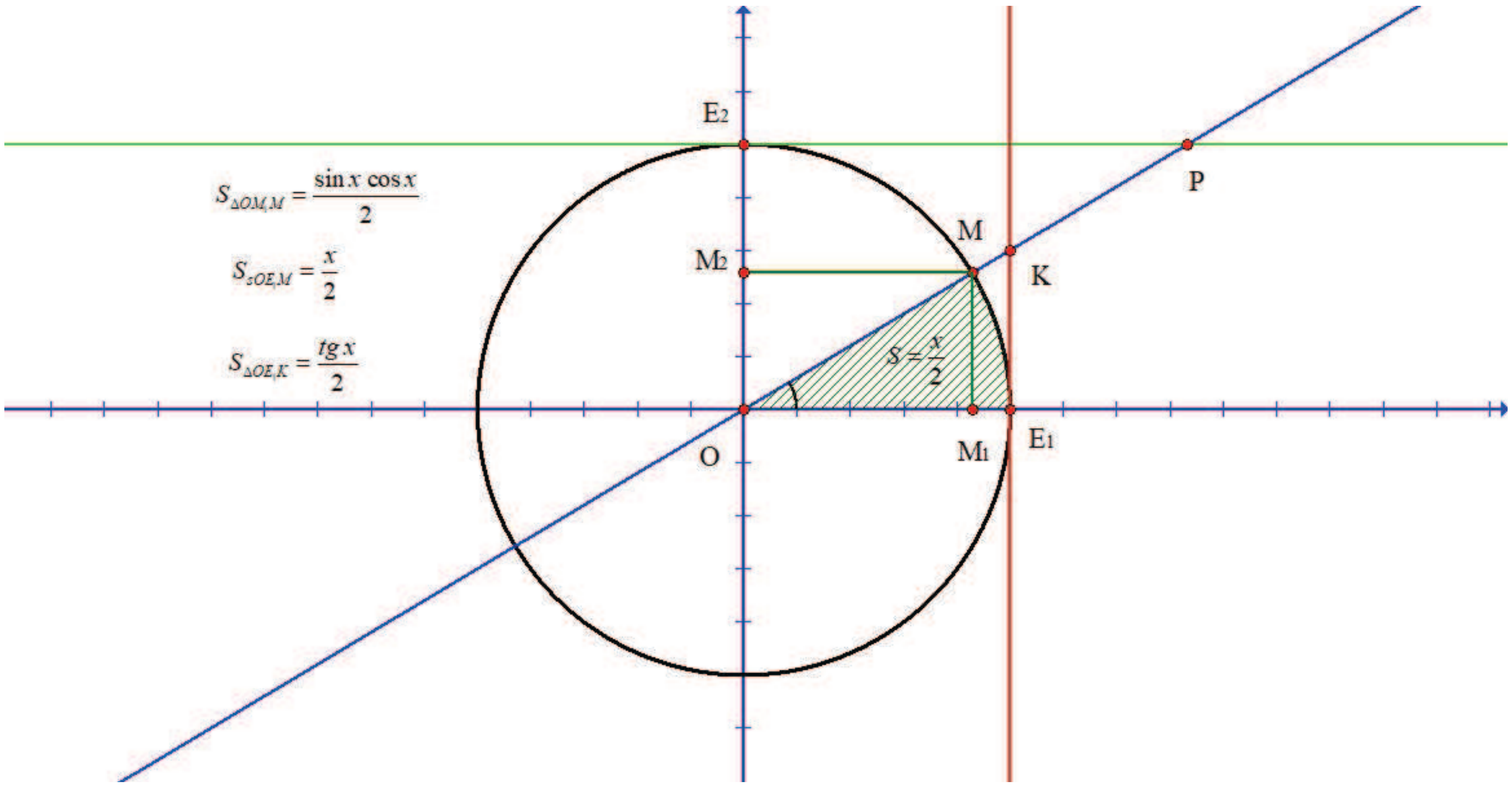


Основно неравенство

$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ – за всяко $x \in \left(0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right)$



Обосновка



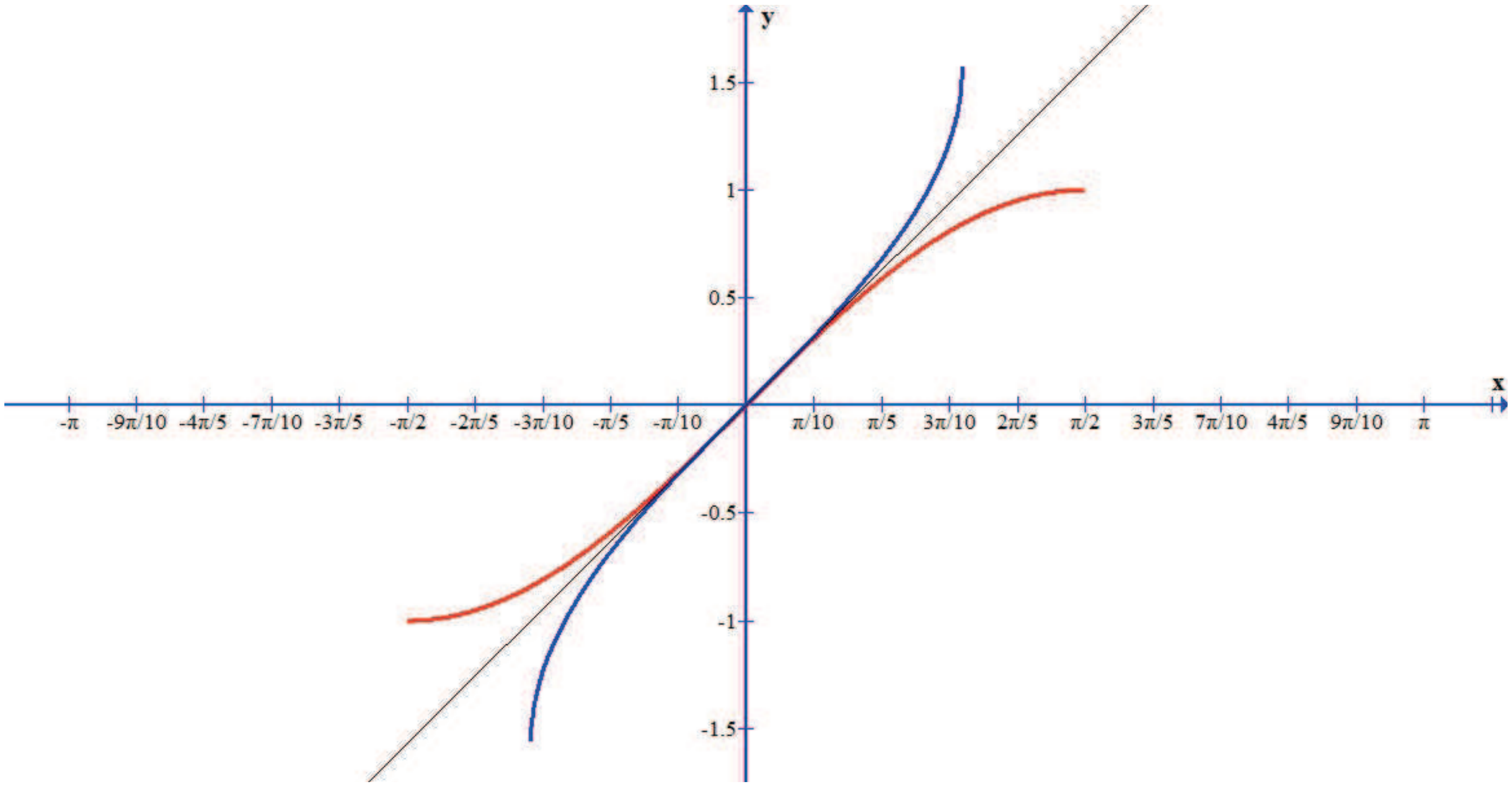
$S_{\Delta OM_1M} = \frac{\sin x \cos x}{2}$
$S_{\triangleleft OE_1M} = \frac{x}{2}$
$S_{\Delta OE_1K} = \frac{tg\,x}{2}$
$S = \frac{x}{2}$
E2
M2
M
K
P
O
M1
E1

4.2 Обратни тригонометрични функции

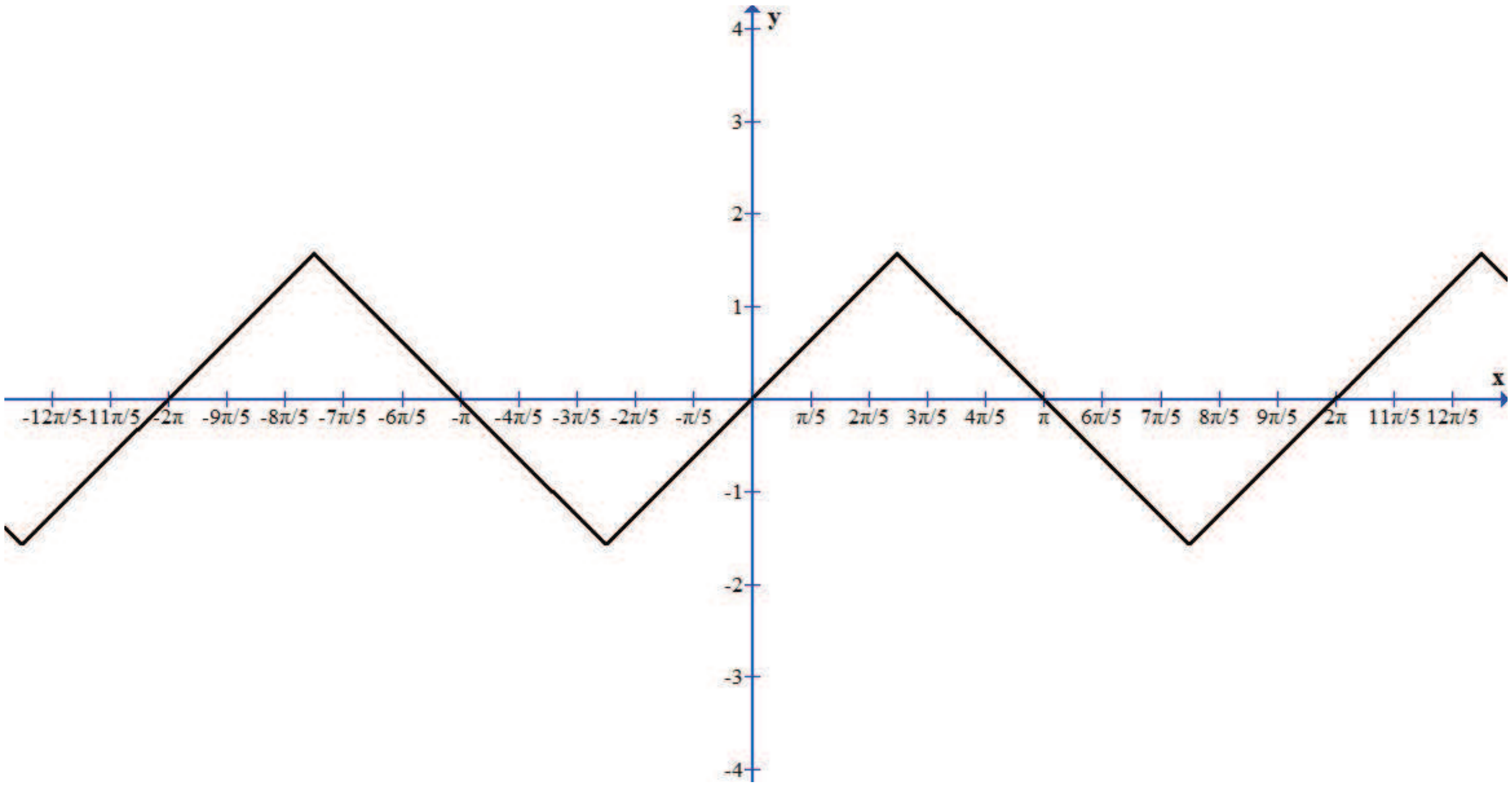
$\arcsin x$

– дефинирана в $[-1\,,\,1]$, стойности $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, строго растяща, нечетна

$\sin(\arcsin x) = x$ за $x \in [-1\,,\,1]\,,\qquad \arcsin(\sin x) = x$ за $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

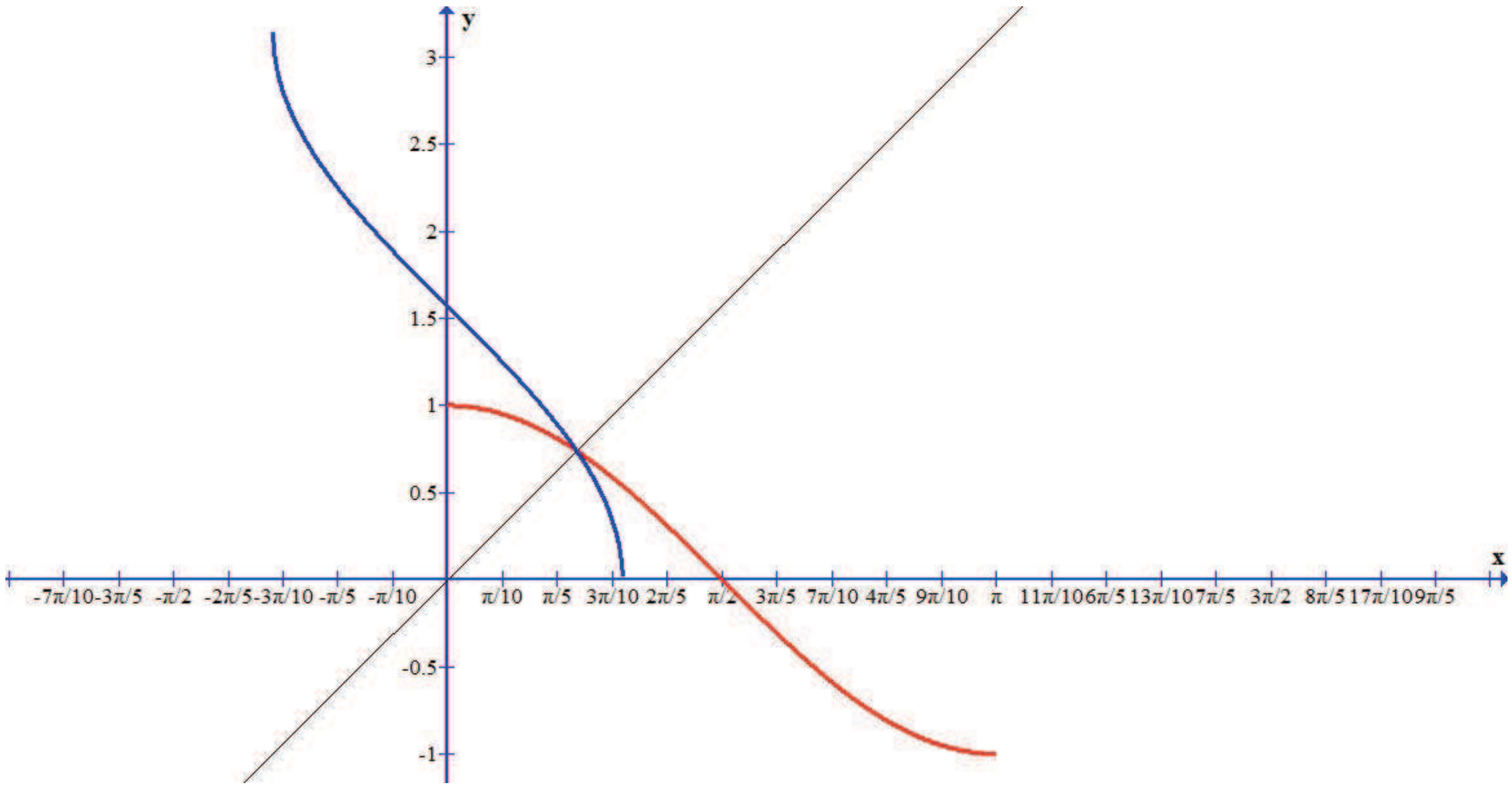


Построяване на графиката на функцията $\arcsin(\sin x)$ – дефинирана навсякъде, периодична с период 2π, в $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ съвпада с x, а в $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ – с $\pi - x$.



$\arccos x$

– дефинирана в $[-1\,,\,1]$, стойности $[0\,,\,\pi]$, строго намаляваща,
$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $\cos(\arccos x) = x$ за $x \in [-1\,,\,1]$,
$\arccos(\cos x) = x$ за $x \in [0\,,\,\pi]$

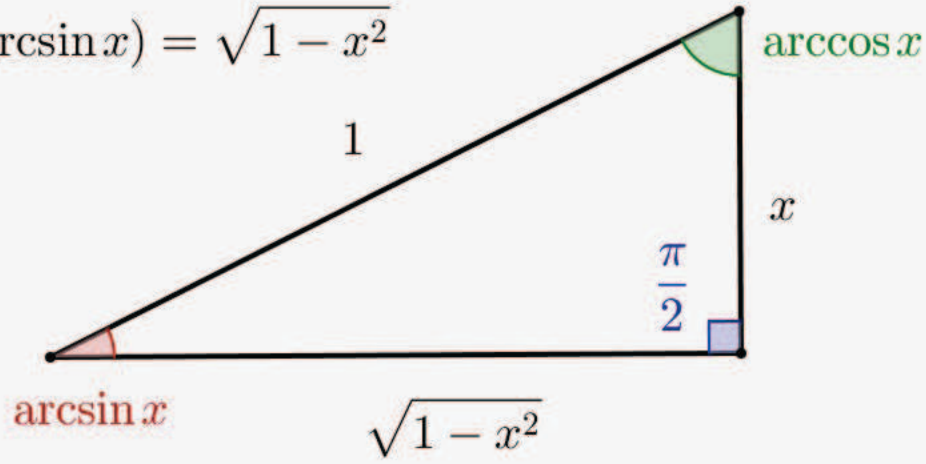


Връзки

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$$

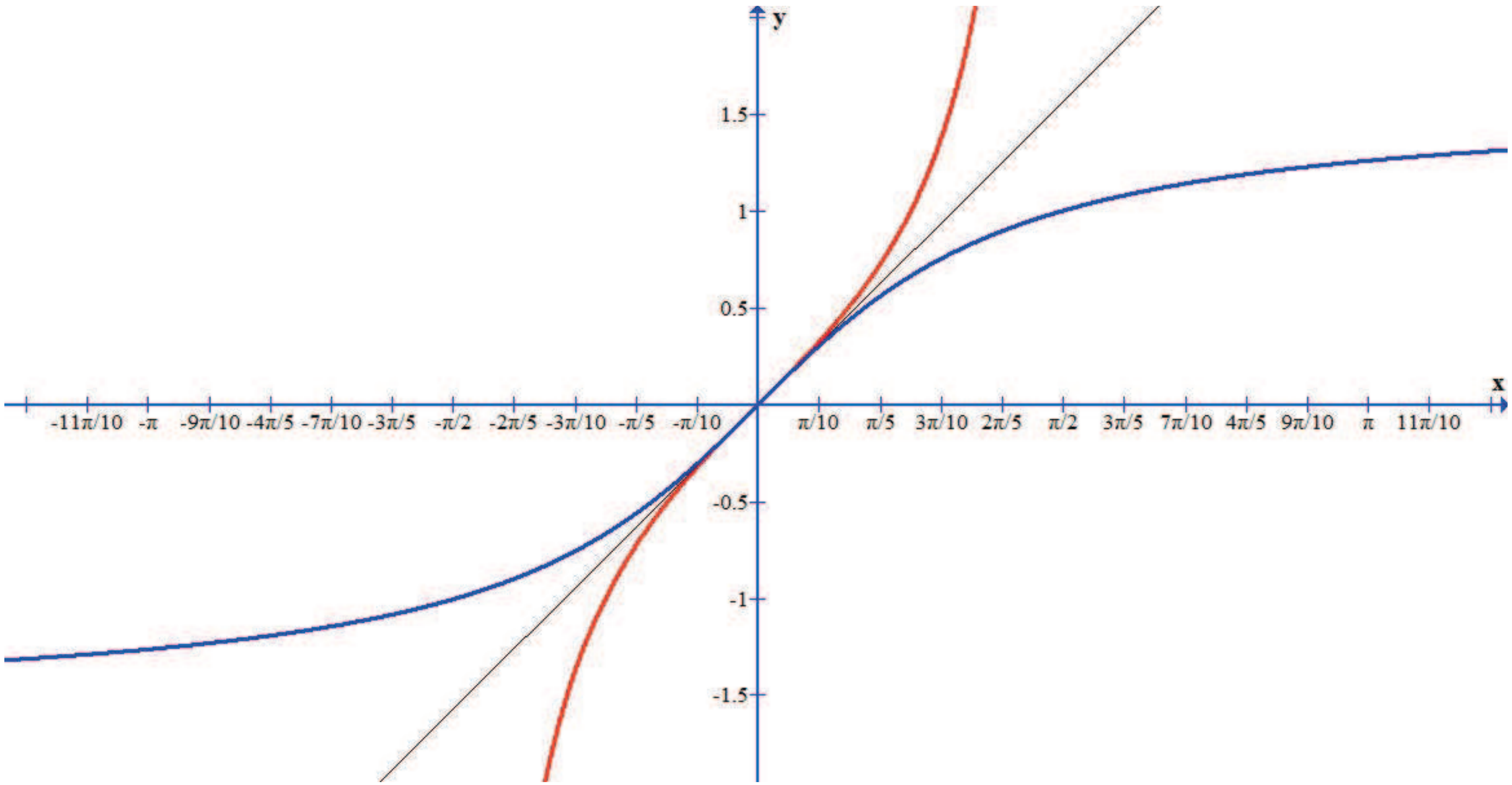
$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$



$\operatorname{arctg} x$

– дефинирана в $\mathbb{R}$, стойности $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, строго растяща, нечетна

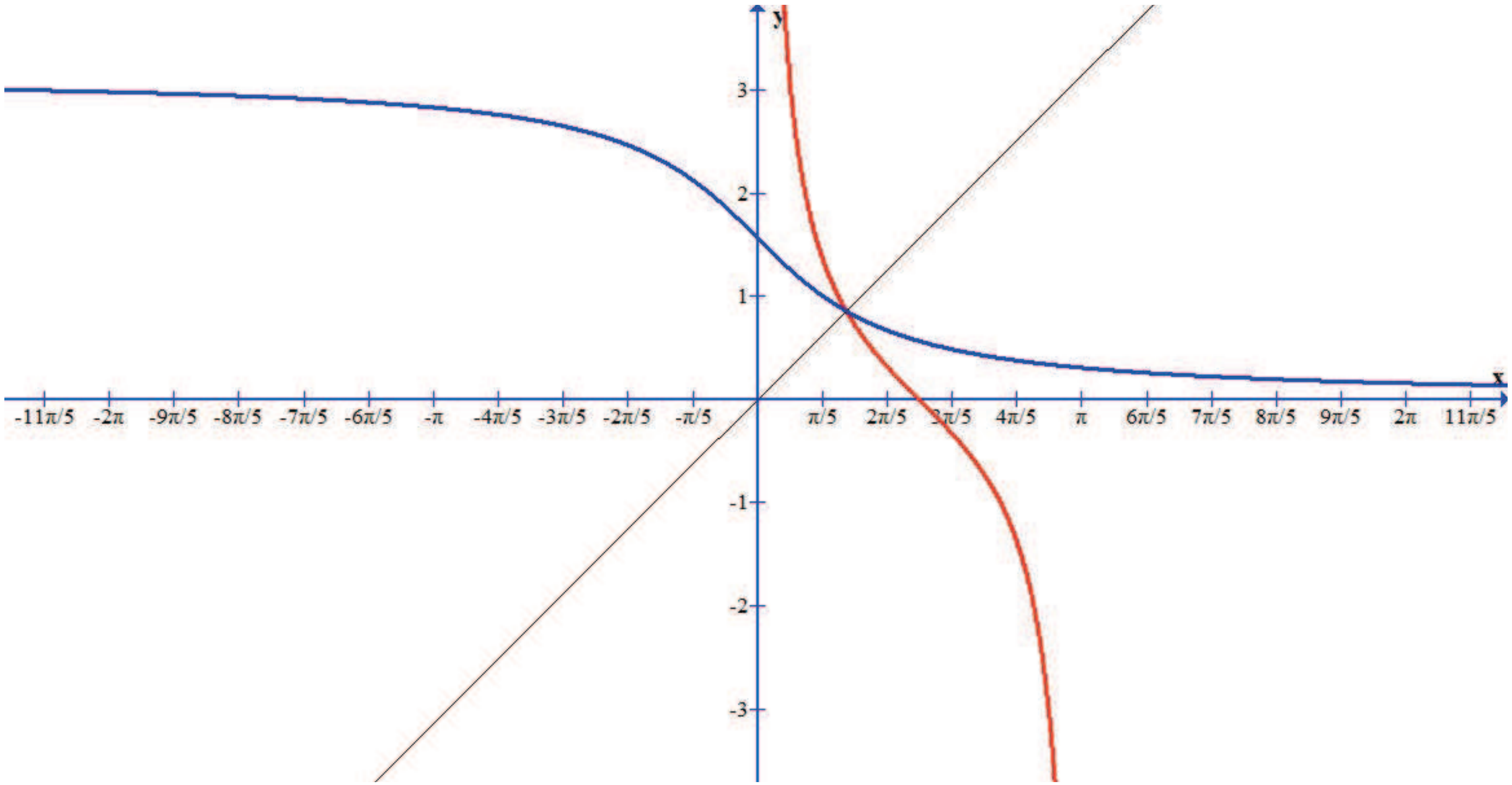
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ за $x \in \mathbb{R}$, $\quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ за $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$



$\operatorname{arcctg} x$

– дефинирана в $\mathbb{R}$, стойности $(0\,,\,\pi)$, строго намаляваща, $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

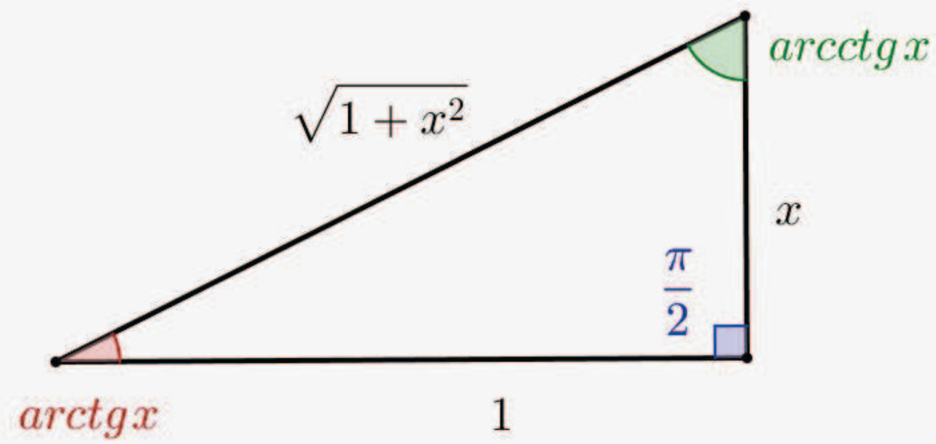
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ за $x \in \mathbb{R}$, $\quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ за $x \in (0\,,\,\pi)$



Връзки

$$arctg\,x + arcctg\,x = \frac{\pi}{2}$$

$$tg(arcctg\,x) = \frac{1}{x} \qquad cotg(arctg\,x) = \frac{1}{x}$$



$$sin(arctg\,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad cos(arctg\,x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

4.3 Доказателства и задачи

Две важни тъждества:

- $\sin(2\operatorname{arctg} x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ за $x \in \mathbb{R}$

  Доказателство: $\sin(2\operatorname{arctg} x) = 2\sin(\operatorname{arctg} x)\cos(\operatorname{arctg} x) = 2 \cdot \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{2x}{1+x^2}$

- $\cos(2\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ за $x \in \mathbb{R}$

  Доказателство: $\cos(2\operatorname{arctg} x) = \cos^2(\operatorname{arctg} x) - \sin^2(\operatorname{arctg} x) =$

  $= \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

Някои от твърденията, цитирани преди:

- $\arcsin(\sin x) = \pi - x$ за $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Доказателство: $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \alpha = (\pi - x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
$\beta = \arcsin(\sin x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. $\sin\alpha = \sin x = \sin\beta \ \Rightarrow \ \alpha = \beta$.

- $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

  Доказателство: $\arccos x \in [0, \pi] \ \Rightarrow \ \alpha = (\pi - \arccos x) \in [0, \pi]$, $\beta = \arccos(-x) \in [0, \pi]$.
  $\cos\alpha = -\cos x = \cos\beta \ \Rightarrow \ \alpha = \beta$.

- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ за $x \in [-1, 1]$

  Доказателство: $\arccos x \in [0, \pi] \ \Rightarrow \ \alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
  $\beta = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. $\sin\alpha = \cos\arccos x = x = \sin\beta \ \Rightarrow \ \alpha = \beta$.

- $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ за $x \in [-1, 1]$

  Доказателство: $\arccos x \in [0, \pi] \ \Rightarrow \ \sin(\arccos x) \geq 0$.
  $\sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2 \ \Rightarrow \ \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

- $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{x}$ за $x \neq 0$

  Доказателство: $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)} = \dfrac{1}{x}$.

- $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ за $x \in \mathbb{R}$

  Доказателство: $\operatorname{arctg} x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos(\operatorname{arctg} x) > 0$.

  $$\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\sin^2(\operatorname{arctg} x) + \cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) + 1} = \frac{1}{x^2+1}$$

  $$\Rightarrow \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} .$$

Задачи

- Да се пресметне: $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$.

  Решение: $0 < \operatorname{arctg} 2 < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \operatorname{arctg} 3 < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 < \pi$.

$$\cos(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3) = \cos(\operatorname{arctg} 2) \,.\, \cos(\operatorname{arctg} 3) - \sin(\operatorname{arctg} 2) \sin(\operatorname{arctg} 3) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \frac{3\pi}{4} \,.$$

- Да се докаже, че $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$ за $xy < 1$.

Решение: $-\pi < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \pi$, $\cos(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) =$

$$= \cos(\operatorname{arctg} x) \,.\, \cos(\operatorname{arctg} y) - \sin(\operatorname{arctg} x) \sin(\operatorname{arctg} y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) . \qquad \beta = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) ,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg}\,(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}\,(\operatorname{arctg} y)}{1 - \operatorname{tg}\,(\operatorname{arctg} x) . \operatorname{tg}\,(\operatorname{arctg} y)} = \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{tg} \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta \,.$$