Кристияна Атанасова, II курс, I гр., ф.н. 61311

Домашна работа 2

1зад. $f(x) = x^2 + 4x$

$g(x) = x^2 - 8x$

$f(x) = x_0^2 + 4x_0 + (2x_0+4)(x-x_0) = x_0^2 + \cancel{4x_0} + 2xx_0 - 2x_0^2 + 4x - \cancel{4x_0}$

$g(x) = x_1^2 - 8x_1 + (2x_1 - 8)(x - x_1) = x_1^2 - \cancel{8x_1} + 2xx_1 - 2x_1^2 - 8x + \cancel{8x_1}$

$$\begin{cases} f(x) = -x_0^2 + x(2x_0+4) \\ g(x) = -x_1^2 + x(2x_1 - 8) \end{cases}$$

$2x_0 + 4 = 2x_1 - 8$

$x_0 = -x_1$: $\quad -2x_1 + 4 = 2x_1 - 8$

$-4x_1 = -12$

$x_1 = 3 \Rightarrow x_0 = -3$

Допирателната, която търсим е $y = -2x - 9$

$f(x) \cap g(x) = (0,0)$

$$S = \int_{-3}^{0} (x^2 + 4x + 2x + 9)dx + \int_{0}^{3} (x^2 - 8x + 2x + 9)dx = \int_{-3}^{0} (x^2 + 6x + 9)dx + \int_{0}^{3} (x^2 - 6x + 9)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{0} + 6\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{0} + 9x\Big|_{-3}^{0}\right) + \left(\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{3} - 6\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{3} + 9x\Big|_{0}^{3}\right) =$$

$$= (9 + \cancel{27} - \cancel{27}) + (9 - \cancel{27} + \cancel{27}) = 18$$

2зад. $f(x) = |x(x-1)|$

$g(x) = kx$

$g(x) = kx$ минава през т. $(0,0)$, същото се отнася и за $f(x) = |x(x-1)| \Rightarrow$ това е 1 от общите точки.

От графиката на $g(x) = kx$ можем да направим извод, че другите пресечни точки са съответно в интервалите $(0,1)$ и $(1,\infty)$. Наклонът на правата изисква $k>0$

Откриваме пресечните точки:

$\underline{(0,1)}$: $\quad x(x-1) < 0 \Rightarrow |x(x-1)| = x - x^2 \Rightarrow kx = x - x^2$

$x^2 - x(1-k) = 0$

$x(x - 1 + k) = 0 \quad \Rightarrow x = 0, \; x = 1-k$

Получаваме пресечна точка в $(0,0)$.

$x = 1-k$

$x > 0 \Rightarrow k \in (0,1)$

$$S_1 = \int_0^{1-k} (x - x^2 - kx)dx = \int_0^{1-k} (-x^2 + x(1-x))\,dx = \frac{1}{6}(1-k)^3$$

$\underline{(1,\infty)}$: $\quad kx = x^2 - x$

$x^2 - x(1+k) = 0 \Rightarrow x(x - 1 - k) = 0$

$x = 0, \; x = 1+k$

Единственият корен в интервала, в който е дефинирана ф-ята $x = 1+k$.

Фигурата, заградена от двете ф-ции в интервала $(1-k, +\infty)$ се разделя на 2 фигури - едната е заградена м/у двете графики в интервала $[1-k, 1]$, а другата - в интервала $[1, 1+k]$.

$$S_2 = \int_{1-k}^{1}(kx - x + x^2)\,dx + \int_{1}^{1+k}(kx - x^2 + x)\,dx = \int_{1-k}^{1}(x(k-1)+x^2)\,dx + \int_{1}^{1+k}(x(k+1)-x^2)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{6}(1-k)^3 + \frac{1}{6}(1+k)^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left[(1-\cancel{3k}+3k^2-\cancel{k^3}) + (1+\cancel{3k}+3k^2+\cancel{k^3})\right] =$$

$$= -\frac{\cancel{1}}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{6}} + \frac{\cancel{6}k^2}{\cancel{6}} = k^2$$

$$S_1 = S_2$$

$$\frac{1}{6}(1-k)^3 = k^2$$

$$k = \sqrt[3]{2} - 1$$

3зад. $x = \sin t,\ y = \sin 2t,\ 0 \le t \le \pi$

$y = \sin 2t$ е с период π и пресича $x = \sin t$ в инт. $(0, \frac{\pi}{2})$

$$\sin t = \sin 2t$$

$$\sin t - \sin 2t = 0$$

$$2\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(-\frac{t}{2}\right) = 0$$

Решенията $t = k\pi$ е извън интервала ни $\Rightarrow$ Тогава:

$\Rightarrow \cos\left(\frac{3t}{2}\right) = 0$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3t}{2}\right) = 0$

$\frac{3t}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\frac{3t}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$t = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $t = -\frac{\pi}{3}$

За нас е важно само решението $t = \frac{\pi}{3}$.

$$S = \int_0^{\pi/3}(\sin 2t - \sin t)\,dt + \int_{\pi/3}^{\pi}(\sin t - \sin 2t)\,dt =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cos 2t + \cos t\right)\Big|_0^{\pi/3} + \left(\frac{1}{2}\cos 2t - \cos t\right)\Big|_{\pi/3}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\cos 0 + \cos\frac{\pi}{3} - \cos 0 + \frac{1}{2}\cos 2\pi - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\pi + \cos\frac{\pi}{3} =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cancel{1}}{2} - \frac{1}{\cancel{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) + \cancel{1} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

4зад. $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \le \sqrt{a}$

Графиката на ф-ята има равни лица в 4те квадранта, за това ще разгледаме лицето в само един от тях - напр. Iви квадрант.

$$\sqrt{y} + \sqrt{x} \le \sqrt{a}$$

$$y = a - 2\sqrt{ax} + x$$

$$S \le 4\int_0^a (a - 2\sqrt{ax} + x)\,dx = 4\int_0^a a\,dx - 4\int_0^a 2\sqrt{ax}\,dx + 4\int_0^a x\,dx =$$

$$= 4ax\Big|_0^a - \frac{16\,a^{1/2}x^{3/2}}{3}\Big|_0^a + 2x^2\Big|_0^a = 4a^2 - \frac{16}{3}a^2 + 2a^2 = \frac{2}{3}a^2$$

$$S \le \frac{2}{3}a^2$$

5зад. $(x^2+y^2)^2 = 4xy$

$x = r\cos\alpha$

$y = r\sin\alpha$

$r^4 = 2r^2\sin 2\alpha$

$r^2 = 2\sin 2\alpha$

Когато α се мени от 0 до $\frac{\pi}{2}$ разглежданата крива ще
е симетрична относно правата $y=x$, r се мени от 0 до $\sqrt{2}$.
Ур-то на окръжността представено в полярни координати
е $r=1$. За да намерим пресечната точка ще заместим $r=1$ в ур-то на кривата $\alpha=\frac{\pi}{12}$. $\frac{\pi}{12}$ е м/у 0 и $\frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow$ от 0 до $\frac{\pi}{12}$ радиусът на кривата е < от радиусът на окръжността, а от $\frac{\pi}{12}$ до $\frac{\pi}{4}$ радиусът е > от радиусът на окръжността. Ще пресметнем лицата на двете фигури и ще ги умножим с 2, за да получим лицата на фигурите, а не само тези под правата $x=y$.

$$S = \int_0^{\pi/12} 2\sin 2\alpha\, d\alpha + \int_{\pi/12}^{\pi/4} d\alpha = -\cos 2\alpha \Big|_0^{\pi/12} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$S_2 = \int_{\pi/12}^{\pi/4} 2\sin 2\alpha\, d\alpha - \int_{\pi/12}^{\pi/4} 1\, d\alpha = -\cos 2\alpha \Big|_{\pi/12}^{\pi/4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$