Контролно 1, Анализ 1, КН, 2 поток

30.11.2012 г.

Тема 2

Зад.1 Да се пресметне границата $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right)$, за $n\in\mathbb{N}$

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3(n^2+\sqrt{n^4+1}-2n^2)}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+n\sqrt{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3(n^4+1-n^4)}{\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}+n\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{n^4+1}+n^2\right)}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot n^2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{1+1/n^4}}+\sqrt{2}\right)n\left(\sqrt{1+1/n^4}+1\right)n^2}=\dfrac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}).2}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ □

Зад.2. Да се намери производната на функцията: $f(x)=(2x+e^{3x})^{\sin x^2}$

Решение: Логаритмуваме: $\ln f(x)=\sin x^2\ln(2x+e^{3x})$. Диференцираме:

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2x\cos x^2\ln(2x+e^{3x})+\sin x^2\dfrac{2+3e^{3x}}{2x+e^{3x}} \Rightarrow f'(x)=(2x+e^{3x})^{\sin x^2}\left(2x\cos x^2\ln(2x+e^{3x})+\sin x^2\dfrac{2+3e^{3x}}{2x+e^{3x}}\right)$ □

Зад.3 Да се пресметне границата $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$

Решение: За $u(x)=(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$, пресмятаме $\lim\limits_{x\to 0}\ln(u(x))=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x\ln(\operatorname{ctg}x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(\operatorname{ctg}x))'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}\overset{\text{Лоп.}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{-\cos x(\sin x)^{-2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{0}{1}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}u(x)=e^0=1$ □

Зад.4 Да се изследва и начертае графиката на функцията $f(x)=\dfrac{(x-5)^3}{(x-7)^2}$

Решение: $D=(-\infty,7)\cup(7,+\infty)$ – дефин. област на $f(x)$; $f(5)=f'(5)=f''(5)=0$; $\lim\limits_{x\to 7}f(x)=+\infty$, т.е. $x=7$ е вертикална асимптота. Още $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+\dots}{(x-7)^2}=-1 \Rightarrow y=x-1$ е наклонена асимптота на $f(x)$

$f'(x)=\dfrac{3(x-5)^2(x-7)^2-2(x-5)^3(x-7)}{(x-7)^4}=\dfrac{(x-5)^2(3x-21-2x+10)}{(x-7)^3}=\dfrac{(x-5)^2(x-11)}{(x-7)^2}$

$f''(x)=\dfrac{(2(x-5)(x-11)+(x-5)^2)(x-7)^3-3(x-7)^2(x-5)^2(x-11)}{(x-7)^6}=\dfrac{(x-5)((2x-22+x-5)(x-7)-3(x-5)(x-11))}{(x-7)^4}=$

$=\dfrac{3(x-5)(x^2-16x+63-x^2+16x-55)}{(x-7)^4}=\dfrac{24(x-5)}{(x-7)^4}$

От така намерените $f'(x)$ и $f''(x)$, виждаме, че $f(x)$ има единствен екстремум в т. $x=11$, който е локален минимум ($f'(11)=0$, $f''(11)>0$): $f(11)=\frac{27}{2}=13{,}5$. $f'(x)>0$ за $x\in(-\infty,7)\cup(11,+\infty)$, където $f(x)$ е растяща и $f'(x)<0$ за $x\in(7,11)$, където $f(x)$ е намаляваща. В т. $x=5$, абсцисната ос е допирателна към $f(x)$.

За $f''(x)$ имаме $f''(5)=0$ ($x=5$ е единствен корен на $f''(x)=0$), като $f''(x)\geq 0$ за $x\geq 5$ и $f''(x)\leq 0$, за $x\leq 5$, т.е. $x=5$ е единствена инфлексна точка, като за $x\in(-\infty,5)$, $f(x)$ е вдлъбната ($f''(x)<0$) и при $x\to-\infty$, клони към наклонената асимптота отдолу. При $x\in(5,7)\cup(7,+\infty)$ $f(x)$ е изпъкнала и при $x\to+\infty$ $f(x)$ клони към наклонената асимптота отгоре.