Лекция 12: Неопределен интеграл. Таблица на основните интеграли. Основни техники за интегриране

В трите лекции до края на курса ще се занимаем с някои техники, позволяващи да възстановим функция по нейната производна (с точност до константа). Разглежданията в повечето случаи ще бъдат по-скоро формални.

1 Неопределен интеграл

Дефиниция 1.1. *Примитивна за функция f*

Нека Δ е интервал и $f : \Delta \to \mathbb{R}$. Една функция $F : \Delta \to \mathbb{R}$ се нарича примитивна за f в Δ, ако F е диференцируема в Δ и $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in \Delta$.

Естествени са въпросите за съществуване и единственост на примитивна.

- Още не разполагаме с необходимите знания, за да отговорим на въпроса за съществуване. В началото на втория семестър ще докажем, че ако f е непрекъсната в интервала Δ, то f има примитивна в Δ. Засега ще приемем това на доверие.
- На въпроса за единственост на примитивната можем да отговорим веднага. Ако F е примитивна за дадена функция f в интервал Δ, то $F + C$ е също е примитивна за f в Δ за произволна константа C (очевидно $(F + C)' = F' + 0 = f$). От друга страна, ако F и G са две примитивни за f в интервала Δ, то:

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$$

От Принципа за константност тогава следва, че $F - G \equiv const$ в Δ, откъдето $F(x) = G(x) + C \; \forall\, x \in \Delta$. Получихме, че примитивната е единствена с точност до константа.

Дефиниция 1.2. *Неопределен интеграл на f*

Ако $f : \Delta \to \mathbb{R}$, където Δ е интервал, то под неопределен интеграл разбираме множеството от всички примитивни на f в Δ. Записваме:

$$\int f(x)\, dx$$

Забележка: Има съществена разлика между диференцирането и пресмятането на неопределен интеграл. Диференцирането на елементарни функции (без претенции за точност, това са крайни композиции на експоненти, степенни функции, логаритми, прави и обратни тригонометрични функции и аритметични действия) е алгоритмизирано докрай, при това производна на елементарна функция е елементарна функция. Интегрирането не е алгоритмизирано – например няма правило за интегриране на произведение. При това съществуват елементарни функции, чиито примитивни не са елементарни функции. Ето няколко прости примера:

$$\int e^{x^2} dx \quad , \quad \int \frac{dx}{\ln x} \quad , \quad \int \frac{\sin x}{x} dx$$

Съответните примитивни съществуват, могат да бъдат изучавани, но не могат да бъдат записани с формула.

2 Таблица на основните интеграли

Тук ще представим т.нар. основни интеграли, които обикновено се дават наготово в справочници и ръководства, откъдето се наричат още таблични интеграли. По същество това е таблицата с основните производни "наопаки".

$$1) \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$2) \int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$$

$$3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$4) \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$5) \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$6) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$7) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{cotg} x + C$$

$$8) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Доказателството се състои в диференциране на дясната част, за да се получи подинтегралната функция. Например за (2):

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right)' = \frac{(\alpha+1)\, x^\alpha}{\alpha+1} = x^\alpha$$

Да отбележим, че (2) съдържа в себе си

$$\int 1\,dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C\ .$$

Интегралът в (3) е $\int x^\alpha\,dx$ за $\alpha = -1$. Дясната страна, както и подинтегралната функция, са дефинирани в $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. В интервала $(-\infty, 0)$ имаме

$$(\ln|x|\ + C)' = (\ln(-x) + C)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}\ ,$$

а в интервала $(0, +\infty)$ имаме

$$(\ln|x|\ + C)' = (\ln x + C)' = \frac{1}{x}\ .$$

Относно (10):

$$\left(\ln|x + \sqrt{x^2+a}|\ \right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+a}}\,(2x)\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+a}}} \cdot \frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+a}}}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

Формулите са валидни в естествените дефиниционни области на подинтегралните функции.

3 Техники за интегриране

Ще разгледаме някои от най-често използваните правила за пресмятане на неопределени интеграли и ще ги допълним с примери.

3.1 Линейност

Интеграл от сбор на функции е сбор от интегралите на функциите. Освен това, интеграл от константа по функция е константата по интеграл от функцията. Формално, за някакви функции f, g в интервал Δ и константа k:

$$\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

$$\int (kf(x))\ dx = k\int f(x)\ dx$$

Доказателство.

$$\left(\int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx\right)' = \left(\int f(x)\right)' + \left(\int g(x)\right)' = f(x) + g(x)$$

Аналогично

$$\left(k\int f(x)\ dx\right)' = k\left(\int f(x)\ dx\right)' = kf(x)$$

□

Забелязвате, че това по същество е "обръщане" на формулите за производна на сума на две функции и на произведение на функция с константа.

Пример 3.1. Използвайки линейността, веднага можем да интегрираме произволен полином:

$$\int \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right)\, dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Пример 3.2.

$$\int \left(5\sin x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{10}{x}\right) dx = \int 5\sin x\, dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int \frac{10}{x}\, dx =$$

$$= 5\int \sin x\, dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + 10\int \frac{1}{x}\, dx = 5\cos x - \arcsin x + 10\ln|x| + C$$

3.2 Внасяне под знака на диференциала

Това правило в някакъв смисъл е "обръщане" на правилото за диференциране на композиция $(G(f(x)))' = G'(f(x))f'(x)$. Разбира се, оттук следва, че

$$\int g\left(f\left(x\right)\right) . f'\left(x\right)\, dx = G\left(f\left(x\right)\right) + C\ , \quad \text{където} \quad g(y) = G'(y)\ .$$

Много е удобно да се използва важното означение

$$\mathrm{d}f\left(x\right) \coloneqq f'\left(x\right)\mathrm{d}x$$

Тогава горното правило на практика се прилага по следния начин:

$$\int g\left(f\left(x\right)\right) . f'\left(x\right)\, \mathrm{d}x = \int g\left(f\left(x\right)\right) \mathrm{d}f\left(x\right) = \int g\left(y\right)\, \mathrm{d}y = G\left(y\right) + C = G\left(f\left(x\right)\right) + C$$

Какво се случва? Забелязваме, че можем да интегрираме единия от множителите в подинтегралната функция и да представим останалата част като функция на една от примитивните. Тогава означаваме временно тази примитивна с нова буква, пресмятаме получения неопределен интеграл, и се връщаме към първоначалната променлива.

Пример 3.3. Започваме примерите с възможно най-проста ситуация.

$$\int (x-3)^{100}\, dx = \int (x-3)^{100}\, \mathrm{d}\left(x-3\right) = \frac{(x-3)^{101}}{101} + C$$

$$\int (2x-3)^{100}\, dx = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{100}\, \mathrm{d}\left(2x-3\right) = \frac{1}{2}\frac{(2x-3)^{101}}{101} + C = \frac{(2x-3)^{101}}{202} + C$$

Разбира се, това бяха полиноми. Бихме могли да ги развием с бинома на Нютон и тогава да интегрираме, но не би било приятно.

Пример 3.4. Както видяхте от първия пример, лесно и безопасно се постига "афинна подправка" на променливата:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b) \overset{y:=ax+b}{=} \frac{1}{a}\int f(y)\,dy = \frac{1}{a}F(y)+C = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

Разбира се, горната сметка върви при $a \neq 0$. По този начин се получават и (уж) по-общи формули от тези в таблицата, например:

$$\int a^x\,dx = \int e^{x\ln a}\,dx = \frac{1}{\ln a}\int e^{x\ln a}\,d(x\ln a) = \frac{1}{\ln a}e^{x\ln a}+C = \frac{a^x}{\ln a}+C \quad \text{за} \quad a>0,\ a\neq 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C \quad \text{за} \quad a>0$$

Пример 3.5.

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \int \frac{\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \int \frac{\cos 2x}{4}\,\mathrm{d}(2x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}+C$$

Пример 3.6.

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\mathrm{d}\left(x^2\right) = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

3.3 Интегриране по части

Това правило пък е "обръщане" на правилото за диференциране на произведение

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)\,g(x)+C = \int (f(x)\,g(x))'\,dx = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)\,g(x)+C = \int g(x)\,\mathrm{d}(f(x)) + \int f(x)\,\mathrm{d}(g(x))$$

Оттук получаваме правилото за интегриране по части (записано по два начина):

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}(g(x)) = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}(f(x))$$

Забелязваме, че след интегриране по части вместо първоначалните два множителя в подинтегралната функция се появява произведението на интеграла на единия множител и производната на другия множител. Ще се постараем да илюстрираме как това може да бъде експлоатирано.

Пример 3.7.

$$\int xe^x\,dx = \int x\,\mathrm{d}(e^x) = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = (x-1)\,e^x + C$$

Пример 3.8.

$$\int x^2\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int x^2\cos 3x\,\mathrm{d}\,(3x) = \frac{1}{3}\int x^2\,d\,(\sin 3x) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2\sin 3x - \int \sin 3x\,\mathrm{d}\left(x^2\right)\right) = \frac{x^2\sin 3x}{3} - \frac{2}{3}\int x\sin 3x\,dx =$$

$$= \frac{x^2\sin 3x}{3} - \frac{2}{9}\int x\,d\,(-\cos 3x) = \frac{x^2\sin 3x}{3} + \frac{2}{9}\int x\,d\,(\cos 3x) =$$

$$= \frac{x^2\sin 3x}{3} + \frac{2}{9}\left(x\cos 3x - \int \cos 3x\,dx\right) = \frac{x^2\sin 3x}{3} + \frac{2x\cos 3x}{9} - \frac{2}{27}\int \cos 3x\,\mathrm{d}\,(3x) =$$

$$= \frac{x^2\sin 3x}{3} + \frac{2x\cos 3x}{9} - \frac{2\sin 3x}{27} + C$$

Пример 3.9.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,\mathrm{d}\,(\ln x) = x\ln x - \int \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = x\ln x - x + C$$

Пример 3.10.

$$\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}\left(x^3\right) = \frac{1}{3}\left(x^3\operatorname{arctg} x - \int x^3\,\mathrm{d}\,(\operatorname{arctg} x)\right) =$$

$$= \frac{x^3\operatorname{arctg} x}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{x^3\operatorname{arctg} x}{3} - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)\,dx =$$

$$= \frac{x^3\operatorname{arctg} x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{3}\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{x^3\operatorname{arctg} x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}\left(1+x^2\right)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^3\operatorname{arctg} x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{6} + C$$

Тук използвахме "деление на полиноми" – просто правило, с което ще свикнете на упражнения.

Пример 3.11.

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}\int \sin bx\,\mathrm{d}\,(e^{ax}) = \frac{1}{a}\left(e^{ax}\sin bx - \int e^{ax}\,\mathrm{d}\,(\sin bx)\right) =$$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a^2}\int \cos bx\,\mathrm{d}\,(e^{ax}) =$$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\cos bx - \int e^{ax}\,\mathrm{d}\,(\cos bx)\right) =$$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{be^{ax}\cos bx}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

Разбира се, горните сметки вървят при $a \neq 0$. Виждаме, че след два пъти интегриране по части се върнахме към първоначалния интеграл. Все пак усилията ни не са били напразни, защото всъщност получаваме уравнение за него. Ако означим първоначалния интеграл с I, имаме уравнението:

$$I = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{be^{ax}\cos bx}{a^2} - \frac{b^2}{a_2}I \Rightarrow \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{be^{ax}\cos bx}{a^2}$$

Следователно

$$I = \frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{be^{ax}\cos bx}{a^2}\right) + C = \frac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C$$

Лесно се проверява, че горната формула остава в сила при $a = 0$, $b \neq 0$.

В тази ситуация има малък проблем: обикновено самото пресмятане на неопределения интеграл доказва неговото съществуване. Тук имахме разсъждение "ако интегралът съществува, то неговата стойност трябва да е тази и тази". Имаме два начина за преодоляване на този проблем. Единият е да диференцираме получената формула и да се убедим, че това е решението на нашата задача. Другият е да се позовем на факта, че непрекъснатите функции имат примитивна (ще го докажем другия семестър, споменахме го в началото на тази лекция).

Предупреждение: ако внесете под диференциала това, което току-що е излязло от него, няма да получите уравнение, а тъждество, и само ще се въртите в кръг.

Обикновено е добра идея да внасяме под диференциала следните функции (и след това да интегрираме по части):

$$\int f\left(x\right) \boxed{\left\{\begin{array}{c} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{array}\right\}} dx \text{ - внасяме експонентата, синуса или косинуса под знака на диференциала}$$

$$\int \boxed{f\left(x\right)} \left\{\begin{array}{c} \ln x \\ \operatorname{arctg} x \\ \arcsin x \end{array}\right\} dx \text{ - внасяме } f \text{ под знака на диференциала}$$

Надеждата ни е, че в първия случай f ще се опрости след диференциране, а експонентата или тригонометричната функция остават със същата степен на сложност след интегриране. Във втория случай мотивацията е, че производните на логаритъма и обратните тригонометрични функции изглеждат по-добре от самите тях.

3.4 Някои приложения на интегрирането по части

(A) Пресмятане на интеграли от вида

$$I_n := \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$$

Параметърът n е естествено число и $a > 0$. Ще получим рекурсивна формула (ще изразим I_n чрез I_{n-1}), но първо ще разгледаме случаите $n = 1$ и $n = 2$. В случая $n = 1$ интегралът е "почти табличен":

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Да пресметнем интеграла за $n = 2$:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2}\, dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{x^2 + a^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2}\, dx - \int \frac{x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2}\, dx\right) = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} - \frac{1}{2a^2} \int \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^2}\, \mathrm{d}\left(x^2 + a^2\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right) - \frac{1}{2a^2} \int x\, \mathrm{d}\left(-\frac{1}{x^2 + a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2a^2}\left(-\frac{x}{x^2 + a^2} - \int \left(-\frac{1}{x^2 + a^2}\right) dx\right) =$$

$$= \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2a^2\left(x^2 + a^2\right)} - \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} =$$

$$= \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2a^2\left(x^2 + a^2\right)} - \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right) + C = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)}{2a^3} + \frac{x}{2a^2\left(x^2 + a^2\right)} + C$$

Идеята при свеждането на пресмятането на I_2 към пресмятането на I_1 може да се използва за извеждането на рекурсивна формула за произволно $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^n}\, dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n-1}}\, dx - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^n}\, dx =$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2} \int \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n}\, \mathrm{d}\left(x^2 + a^2\right) = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2} \int x\, \mathrm{d}\left(\frac{\left(x^2 + a^2\right)^{-n+1}}{-n + 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \int x\, \mathrm{d}\left(\frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\left(\frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^{n-1}} - \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2 + a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)} I_{n-1}$$

Окончателно получаваме рекурентната връзка:

$$I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$I_n = \frac{2n - 3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2 + a^2\right)^{n-1}}$$

Методът, използван по-горе, може да бъде използван при намаляване на степента в знаменателя за интегралите

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^{n+\frac{1}{2}}} \ , \quad \int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \ , \quad a \neq 0$$

Самостоятелно изведете рекурентни формули за тях. Съобразете, че при $n = 0$ интегралите са таблични или "почти таблични".

(Б) Пресмятане на интеграли от вида:

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx \ , \quad \text{където} \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z} \ .$$

Методът за тяхното пресмятане е в някакъв смисъл адаптация на метода от (А) към тригонометрични функции. Ще изведем рекурентни връзки, ще разгледаме "базовите" случаи и ще посочим някои опростявания.

I. Намаляване на степен на тригонометрична функция от числителя с две.

Нека $m \in \{2, 3, \dots\}$, $n \in \mathbb{Z}$ и $m + n \neq 0$. Тогава можем да изразим $I_{m,n}$ чрез $I_{m-2,n}$. Първо, при $n \neq -1$ имаме:

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x = -\int \sin^{m-1} x \cos^n x \, \mathrm{d}\,(\cos x) = -\frac{1}{n+1} \int \sin^{m-1} x \, \mathrm{d}\left(\cos^{n+1} x\right) =$$

$$= -\frac{1}{n+1}\left(\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x - \int \cos^{n+1} x \, \mathrm{d}\left(\sin^{m-1} x\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{n+1} x \sin^{m-2} x \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{n+2} x \sin^{m-2} x \, \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n} x (1-\sin^2 x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n} - \frac{m-1}{n+1} I_{m,n}$$

Следователно, след решаване на уравнението относно $I_{m,n}$, получаваме

$$I_{n,m} = -\frac{1}{m+n}\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$$

Нека сега $n = -1$:

$$I_{m,-1} = \int \frac{\sin^m x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^{m-2} x (1-\cos^2 x)}{\cos x} \, \mathrm{d}x = I_{m-2,-1} - \int \sin^{m-2} x \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= I_{m-2,-1} - \int \sin^{m-2} x \ \mathrm{d}(\sin x) = I_{m-2,-1} - \frac{1}{m-1}\sin^{m-2} x$$

Проверете, че току-що изведената връзка е частен случай на предишната формула при $n = -1$.

Съвсем аналогично при $n \in \{2, 3, \dots\}$, $m \in \mathbb{Z}$ и $m + n \neq 0$ можем да получим рекурентната връзка

$$I_{m,n} = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

II. Намаляване на степен на тригонометрична функция от знаменателя с две.

Нека $m \in \{2, 3, \dots\}$ и $n \in \mathbb{Z}$. Тогава можем да изразим $I_{-m,-n}$ чрез $I_{-m+2,-n}$:

$$I_{-m,-n} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x \cos^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^m x \cos^n x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{1}{\sin^{m-2} x \cos^n x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\cos x}{\sin^m x \cos^n x}\,\mathrm{d}(\sin x) =$$

$$= I_{-m+2,-n} + \int \frac{1}{\cos^{n-1} x}\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin^{-m+1} x}{-m+1}\right) = I_{-m+2,-n} - \frac{1}{m-1} \int \frac{1}{\cos^{n-1} x}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin^{m-1} x}\right) =$$

$$= I_{-m+2,-n} - \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} - \int \frac{1}{\sin^{m-1} x}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos^{n-1} x}\right)\right) =$$

$$= I_{-m+2,-n} - \frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{-(n-1)}{m-1} \int \frac{-\sin x}{\sin^{m-1} x \cos^n x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= I_{-m+2,-n} - \frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{n-1}{m-1} I_{-m+2,-n} =$$

$$= \frac{m+n-2}{m-1} I_{-m+2,-n} - \frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}$$

Аналогично при $n \in \{2, 3, \dots\}$, $m \in \mathbb{Z}$ получаваме

$$I_{-m,-n} = \frac{m+n-2}{n-1} I_{-m,-n+2} + \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}$$

III. Пресмятане на базовите интеграли, тоест на интегралите $I_{m,n}$ за $m, n \in \{-1, 0, 1\}$.

Повечето от тези интеграли са таблични или съвсем лесни. Тук ще пресметнем само три от тях:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C$$

IV. Опростяване: едновременно намаляване на степента в числителя и в знаменателя с две.

Нека $m \in \{2, 3, \dots\}$ и $n \in \{2, 3, \dots\}$. Тогава можем да изразим $I_{m,-n}$ чрез $I_{m-2,-n+2}$:

$$I_{m,-n} = \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} \mathrm{d}\, x = -\int \frac{\sin^{m-1} x}{\cos^n x}\, \mathrm{d}(\cos x) = \frac{1}{n-1} \int \sin^{m-1} x \, \mathrm{d} \left(\frac{1}{\cos^{n-1} x} \right) =$$

$$= \frac{1}{n-1} \left(\frac{\sin^{m-1} x}{\cos^{n-1} x} - \int \frac{1}{\cos^{n-1} x}\, \mathrm{d} \left(\sin^{m-1} x \right) \right) =$$

$$= \frac{\sin^{m-1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\sin^{m-2} x \cos x}{\cos^{n-1} x}\, \mathrm{d}x = \frac{\sin^{m-1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\, I_{m-2,-n+2}$$

$$\text{Аналогично } \; I_{-m,n} = -\frac{\cos^{n-1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}\, I_{-m+2,n-2}\ .$$

V. Опростяване при нечетна степен в числителя.

Ако $m \geq 0$ е нечетно (или $n \geq 0$ е нечетно), можем да внесем един синус по диференциала (един косинус под диференциала) и да представим подинтегралната функция като функция на $\cos x$ $(\sin x)$. Ще дадем само един пример:

$$\int \sin^5 x \cos^{16} x \, dx = -\int \sin^4 x \cos^{16} x \, \mathrm{d} \left(\cos x \right) = -\int \left(1 - \cos^2 x \right)^2 \cos^{16} x \, \mathrm{d} \left(\cos x \right)$$

Полагаме $y \coloneqq \cos x$ и пресмятаме:

$$-\int \left(1 - y^2 \right)^2 y^{16} \, dy = -\int \left(1 - 2y^2 + y^4 \right) y^{16} \, dy = -\int \left(y^{16} - 2y^{18} + y^{20} \right) \, dy =$$

$$= -\frac{y^{17}}{17} + 2\frac{y^{19}}{19} - \frac{y^{21}}{21} + C$$

Следователно

$$\int \sin^5 x \cos^{16} x \, dx = -\frac{1}{17} \cos^{17} x + \frac{2}{19} \cos^{19} x - \frac{1}{21} \cos^{21} x + C$$