

СЪВМЕСТНО ИЗДАНИЕ

МЕЖДУ

МОСКОВСКИ ДЪРЖАВЕН УНИВЕРСИТЕТ

• М. В. ДОМОНОСОВ •

И СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ

• КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ •

НАПИСАНО ПО ЕДИННА ПРОГРАМА
ЗА ОБУЧЕНИЕТО НА СТУДЕНТИТЕ

ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

ЗА СПЕЦИАЛИСТОТЕ

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА

Владимир Александрович Илин
Виктор Антонович Садовничий
Благовест Христов Сендов

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

ПЪРВА ЧАСТ

Под редакцията на
академик А. Н. Тихонов

Второ преработено
издание

НАУКА И ИЗКУСТВО

1984

СОФИЯ

Книгата представлява учебник по математически анализ по съставяната между Московския и Софийския университети единна програма за първата година на обучението на специалностите „Математика“, „Механика“ и „Приложна математика“. В нея са включени теория на реалните числа, теория на границите, непрекъснатост на функции, диференциално и интегрално смятане на функции на една променлива и техните приложения, диференциално смятане на функции на повече променливи и теория на не-монотоните функции (като в екскурсии, така и в нормирани пространства).

Учебникът съдържа три ясно отделени нива на изложение: елементарно, основно и по-високо. Елементарното ниво съответствува на програмата за техническите вузове със задълбочено изучаване на математика; основното ниво отговаря на програмата за специалностите „Приложна математика“ и „Физика“ в университетите; по-високото ниво включва допълнителен материал, който обикновено се изучава в класно-математически факултети на университетите.

В преподавателски анализ са намерили голямо отражение поредната роли на числените методи и приложението на математически анализ за тяхното развитие.

©
ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ ИЛИН
ВИКТОР АНТОНОВИЧ КАДОНИЧИН
ВЛАДОВЕЦ ХРИСТОВ СЕНДОВ
1979, 1984

С/О ЮСАУТОР, СОФИЯ

Съдържание

Предговор към второто издание	13
Предговор към първото издание	14
Увод	17
1. Увод в математическия анализ	
2. Теория на реалните числа	
2.1. Множеството на числата, пределици с безкрайни десетични дробни и неточни предели	38
2.1.1. Свойства на рационалните числа 38. 2.1.2. Недостатъчност на рационалните числа за измерване на отсечки от числовата ос 40. 2.1.3. Наредба на множеството на безкрайните десетични дробни 43.	
2.2. Множества от реални числа, ограничени отгоре или отдолу. Съществуване на точни граници	48
2.2.1. Основни определения 48. 2.2.2. Съществуване на точни граници 50.	
2.3. Приближаване на реалните числа с рационални	52
2.4. Операции събиране и умножение на реални числа	54
2.4.1. Дефиниране на операциите. Точно описание на понятието реално число 54. 2.4.2. Съществуване и съществуване на сумата и произведението на реални числа 56.	
2.5. Свойства на реалните числа	58
2.5.1. Основни свойства на реалните числа 58. 2.5.2. Две важни статистични свойства 60. 2.5.3. Някои конкретни множества от реални числа 60.	
2.6. Допълнителни диверсии от теорията на реалните числа	62
2.6.1. Пълнота на множеството от реални числа 62. 2.6.2. Аксиоматично въвеждане на множеството на реалните числа 66. 2.6.3. Доказателство на теоремата за монотонност 66.	
2.7. Елементи на теорията на множествата	70
2.7.1. Множества и изобразимост на множества. Понятие за сепарабилност 70. 2.7.2. Наредба. Частична наредба. Лема на Цорн 74.	

3. Теория на границите

- 3.1. Редица. Граница на редица — 77
- 3.1.1. Редица. Аритметични операции с редици 77. 3.1.2. Ограничени, неограничени, безкрайно малки и безкрайно големи редици 78. 3.1.3. Основни свойства на безкрайно малките редици 81. 3.1.4. Сходни редици. Свойства 83
- 3.2. Монотонни редици — 89
- 3.2.1. Понятието монотонна редица 89. 3.2.2. Теорема за сходност на монотонна ограничена редица 90. 3.2.3. Лимитно ϵ 92. 3.2.4. Други примери на сходени, монотонни редици 94
- 3.3. Прецедни редици — 95
- 3.3.1. Точка на събиране. Горна и долна точка на събиране на редица 95. 3.3.2. Различаване на поизгодно точка на събиране 102. 3.3.3. Критерий на Коши за сходност на редица 104
- 3.4. Граница на функция — 108
- 3.4.1. Понятие за променлива величина и функция 108. 3.4.2. Граница на функция по Хайне и по Коши 111. 3.4.3. Критерий на Коши за съвпадение на граница на функция 117. 3.4.4. Аритметични действия с функции, имати граница 119. 3.4.5. Безкрайно малки и безкрайно големи функции 121
- 3.5. По-общо определение за граница на функция по Бозе — 123

4. Непрекъснатост на функция

- 4.1. Понятие за непрекъснатост на функция — 128
- 4.1.1. Определения за непрекъснатост на функция 128. 4.1.2. Аритметични операции с непрекъснати функции 132. 4.1.3. Сложна функция. Непрекъснатост 132
- 4.2. Свойства на монотонните функции — 133
- 4.2.1. Монотонни функции 133. 4.2.2. Понятието област на функция 134
- 4.3. Основни елементарни функции — 139
- 4.3.1. Показателна функция 139. 4.3.2. Логаритмична функция 145. 4.3.3. Степенни функции 146. 4.3.4. Тригонометрични функции 148. 4.3.5. Обратни тригонометрични функции 151. 4.3.6. Хиперболични функции 156
- 4.4. Две забележителни граници — 157
- 4.4.1. Първи забележителна граница 157. 4.4.2. Втора забележителна граница 158
- 4.5. Точки на прекъсване на функция и тяхната класификация — 161
- 4.5.1. Класификация на точките на прекъсване на функция 161. 4.5.2. За точките на прекъсване на монотонна функция 163
- 4.6. Локални и глобални свойства на непрекъснатите функции — 164
- 4.6.1. Локални свойства на непрекъснатите функции 165. 4.6.2. Глобални свойства на непрекъснатите функции 167. 4.6.3. Понятие за равномерна непрекъснатост на функция 173. 4.6.4. Модул на непрекъснатост на функция 177

- 4.7. Понятието компактност на множество — 179
- 4.7.1. Отворени и затворени множества 179. 4.7.2. Покрытие на множество със системи от отворени множества 180. 4.7.3. Понятието компактност на множество 182

- 4.8. Горна и долна функция на Бор — 183

5. Диференциално смятане

- 5.1. Понятие за производна — 186
- 5.1.1. Нараване на функция. Диференциална форма на условното за непрекъснатост 186. 5.1.2. Определения на производна 187. 5.1.3. Геометричен смисъл на производната 189
- 5.2. Понятие за диференцируемост на функция — 190
- 5.2.1. Определения за диференцируемост на функция 190. 5.2.2. Диференцируемост и непрекъснатост 192. 5.2.3. Понятие за диференциал на функция 192
- 5.3. Диференциране на сложна функция и обратна функция — 194
- 5.3.1. Диференциране на сложна функция 194. 5.3.2. Диференциране на обратна функция 196. 5.3.3. Независимост на формата на първия диференциал 197. 5.3.4. Приложение на диференциал за намиране на приближени формули 198
- 5.4. Диференциране на сума, разлика, произведение и частно на функции — 199
- 5.5. Производни на основните елементарни функции — 201
- 5.5.1. Производни на тригонометричните функции 202. 5.5.2. Производни на логаритмичните функции 203. 5.5.3. Производни на показателните и обратните тригонометрични функции 204. 5.5.4. Производни на степенните функции 206. 5.5.5. Таблицы за производните на основните елементарни функции 206. 5.5.6. Таблицы за диференциалите на основните елементарни функции 207. 5.5.7. Логаритмична производна. Производна на степенно-показателната функция 208
- 5.6. Производни и диференциали от по-висок ред — 209
- 5.6.1. Понятие за производна от n -ти ред 209. 5.6.2. n -ти производни на някои функции 210. 5.6.3. Формула на Лайбница за n -тата производна на произведение от две функции 212. 5.6.4. Диференциали от по-висок ред 214
- ### 6. Основни теореми за диференцируемите функции
- 6.1. Нараване (лимитиране) на функция в точка. Локален екстремум — 217
- 6.2. Теорема за анулиране на производната — 220
- 6.3. Формула за крайните нараствания (формула на Лагранж) — 221
- 6.4. Някои следствия от формулата на Лагранж — 222
- 6.4.1. Константност на функция, която има нулева производна в даден интервал 222. 6.4.2. Условни за монотонност на функция в интервал 223. 6.4.3. Липса на прекъсвания от първи род и отсривания представлява на производната 225. 6.4.4. Извеждане на някои неравенства 226

6.5. Обобщение на формулата за крайните нараствания (формула на Коши) —	227
6.6. Разкриване на неопределеност (правило на Лопитал) —	228
6.6.1. Разкриване на неопределеност от вида $0/0$ 228. 6.6.2. Разкриване на неопределеност от вида ∞/∞ 232. 6.6.3. Разкриване на други видове неопределености 235.	
6.7. Формула на Тейлор —	235
6.8. Различни форми на остатъчен член. Формула на Маклорен —	239
6.8.1. Остатъчният член във формула на Лагранж, Коши и Пеано 239.	
6.8.2. Друго замяне на формулата на Тейлор 242. 6.8.3. Формула на Маклорен 242.	
6.9. Оценка на остатъчния член. Разлагане на някои елементарни функции —	243
6.9.1. Оценка на остатъчния член за произволна функция 243.	
6.9.2. Разлагане по формулата на Маклорен на някои елементарни функции 243.	
6.10. Примери за приложения на формулата на Маклорен —	246
6.10.1. Пресмятане на числото e по АСМ 246. 6.10.2. Докладността на ирационалността на числото e 247. 6.10.3. Пресмятане стойностите на тригонометричните функции 247. 6.10.4. Пресмятане стойностите на логаритмичните функции 248. 6.10.5. Пресмятане стойностите на обратните тригонометричните функции 250. 6.10.6. Асимптотична оценка на елементарните функции и пресмятане на граници 251.	
7. Изследване графика на функция и намиране на екстремални стойности —	
7.1. Специални точки —	254
7.1.1. Провеждане на монотонност на функция 254. 7.1.2. Намиране на стационарни точки 254. 7.1.3. Първо достатъчно условие за екстремум 255. 7.1.4. Второ достатъчно условие за екстремум 257. 7.1.5. Трето достатъчно условие за екстремум 259. 7.1.6. Екстремум на функция, която не е диференцируема в дадена точка 260. 7.1.7. Обща схема за намиране на екстремум 262.	
7.2. Импонидност на графика на функция —	263
7.3. Точки на инфлексия —	265
7.3.1. Ожесточение на инфлексията точка. Необходимо условие за инфлексия 265. 7.3.2. Първо достатъчно условие за инфлексия 268.	
7.3.3. Никон обобщение на първото достатъчно условие за инфлексия 268. 7.3.4. Второ достатъчно условие за инфлексия 269. 7.3.5. Трето достатъчно условие за инфлексия 270.	
7.4. Асимптоти на графика на функция —	271
7.5. Построяване на графика на функция —	273
7.6. Глобален максимум и глобален минимум на функция в съвкуп. Граничен (контурирен) екстремум —	276
7.6.1. Определяне на максималните и минималните стойности на функция, дефинирана в съвкупност 276. 7.6.2. Граничен (контурирен) екстремум 278. 7.6.3. Точерка на дъгата 279.	

Допълнение към глава 7. Алгоритъм за намиране на екстремални стойности на функции, използващи само стойностите на тази функция —

280

8. Примитивна функция и неопределен интеграл

8.1. Понятие за примитивна функция и неопределен интеграл —	283
8.1.1. Понятие за примитивна функция 283. 8.1.2. Неопределен интеграл 284. 8.1.3. Основни свойства на неопределения интеграл 285. 8.1.4. Таблица на основните неопределени интеграл 286.	
8.2. Основни методи за интегриране —	289
8.2.1. Интегриране чрез смяна на променливата (субституция) 289.	
8.2.2. Интегриране по части 292.	
8.3. Класове от функции, интегрируеми в елементарни функции —	295
8.3.1. Кратки сведения за комплексните числа 295. 8.3.2. Крайни сведения за корените (корените) на комплексните полиноми 299. 8.3.3. Разлагане на дифференциални полиноми с реални коефициенти на произведение от линейни и квадратни множители 302. 8.3.4. Разлагане на произведение на рационални дробни на суми от елементарни дробни 303. 8.3.5. Интегрируемост на рационалните дробни и елементарни функции 307. 8.3.6. Интегрируемост в елементарни функции на някои тригонометрични и ирационални функции 310. 8.3.7. Интегриране на дифференциален бинам 315.	
8.4. Единични интеграл —	317
9. Определен интеграл на Риман —	
9.1. Определение на интеграл. Интегрируемост —	319
9.2. Големия и малкия суми и техните свойства —	323
9.2.1. Определение на големия и малкия суми 322. 9.2.2. Основни свойства на големите и малките суми 324.	
9.3. Теорем за необходимост и достатъчни условия за интегрируемост на функции. Класове интегрируеми функции —	328
9.3.1. Необходими и достатъчни условия за интегрируемост 329. 9.3.2. Класове интегрируеми функции 330.	
9.4. Свойства на определен интеграл —	336
9.4.1. Свойства на интеграл 336. 9.4.2. Оценка за интегралите 339.	
9.5. Примитивна на непрекъснатата функция. Правила за интегриране на функции —	346
9.5.1. Примитивна 347. 9.5.2. Основни формули на интегралното смятане 349. 9.5.3. Важни правила за пресмятане на определени интеграл 350. 9.5.4. Остатъчният член на формулата на Тейлор в интегрална форма 351.	
9.6. Неравенства за суми и интеграл —	354
9.6.1. Неравенство на Юнг 354. 9.6.2. Неравенство на Холдер за суми 355. 9.6.3. Неравенство на Митковски за суми 356. 9.6.4. Неравенство на Холдер за интеграл 356. 9.6.5. Неравенство на Митковски за интеграл 357.	

9.7. Критерий на Лебег за интегрируемост на функция върху сегмент — 338

9.7.1. Множество с мярка нула и с жорданова мярка нула 338, 9.7.2. Описание на функция в точка. Изследване на множеството от точки на пресичане на функция 362, 9.7.3. Критерий за интегрируемост на функция 364.

9.8. Несобствени интеграл — 367

9.8.1. Понятие за несобствен интеграл от първи род 367, 9.8.2. Критерий на Коши за сходимост на несобствени интеграл от първи род. Достатъчни условия за сходимост 370, 9.8.3. Абсолютна и условна сходимост на несобствените интеграл 373, 9.8.4. Смена на променливите под знака на несобствен интеграл и формула за интегриране по части 375, 9.8.5. Несобствени интеграл от втори род 377.

9.9. Главна стойност на несобствен интеграл — 380

9.10. Интеграл на Стилате — 382

9.10.1. Дефиниция на интеграл на Стилате и условия за неговото съществуване 382, 9.10.2. Свойства на интеграла на Стилате 388.

10. Геометрични приложения на определенния интеграл

10.1. Дължина на дъга на крива — 389

10.1.1. Понятие за проста крива 389, 10.1.2. Понятие за параметризирана крива 390, 10.1.3. Дължина на дъга на крива. Понятие за ректифицируема крива 392, 10.1.4. Критерий за ректифицируемост на крива. Пресмятане дължината на дъга на крива 395, 10.1.5. Дефиниция на дъга 400.

10.2. Лине на равнинна фигура — 402

10.2.1. Понятие за контур на множество и равнинна фигура 402, 10.2.2. Лине на равнинна фигура 403, 10.2.3. Лине на криволинейни трапец и криволинейен сектор 410.

10.3. Обем на тяло в пространството — 414

10.3.1. Обем на тяло 415, 10.3.2. Након класове намерени тела 416. Допълнение към глава 10. Пример за геометрична фигура, ограничена от неектифицируема крива 419.

11. Приближени методи за пресмятане корените на уравнения и определени интеграл

11.1. Приближени методи за пресмятане корените на уравнения — 425

11.1.1. Метод на „пилката“ (метод на разполовяването) 425, 11.1.2. Метод на итерациите 426, 11.1.3. Методи на хордите и допирателните 429.

11.2. Приближени методи за пресмятане на определени интеграл — 434

11.2.1. Уводни бележки 434, 11.2.2. Метод на правоъгълниците 437, 11.2.3. Метод на трапеците 438, 11.2.4. Метод на параболите 441.

12. Метрични, топологични, нормирани пространства

12.1. Метрични пространства — 445

12.1.1. Определение на метрично пространство 445, 12.1.2. Отворени и затворени множества 448, 12.1.3. Декаотно произведение на метрични пространства 450, 12.1.4. Навсякъде гъсти и съвършени множества 451, 12.1.5. Сходимост. Непрекъснати изображения 453, 12.1.6. Компактност 455, 12.1.7. Пазис на пространство 457.

12.2. Свойства на метричните пространства — 460

12.3. Топологични пространства. Отворени и затворени множества — 467

12.3.1. Определение на топологично пространство 467, 12.3.2. Отворени и затворени множества 469.

12.4. Свойства на топологичните пространства — 471

12.4.1. Аксиоми за отделимост 471, 12.4.2. Нормални и напълно регулярни (тихоновски) пространства. Дъги на Урисон 472, 12.4.3. Регулярни пространства с наброен базис. Теорема на Тихонов 473, 12.4.4. Компактни и нормални пространства 474.

12.5. Линейни нормирани пространства, линейни оператори — 475

12.5.1. Определение на линейно пространство 475, 12.5.2. Нормирани пространства. Базисни пространства 476, 12.5.3. Оператори и линейни нормирани пространства 478, 12.5.4. Пространство на операторите 480, 12.5.5. Норми на оператор 480, 12.5.6. Понятие за хансбертово пространство 482.

13. Функции на няколко променливи

13.1. Понятие за функция на m променливи — 486

13.1.1. Понятие за m -мерно координатно и m -мерно евклидово пространство 486, 13.1.2. Множество от точки в m -мерното евклидово пространство 487, 13.1.3. Понятие за функция на m променливи 491.

13.2. Графици на функции на m променливи — 493

13.2.1. Редици от точки в пространството E^m 493, 13.2.2. Свойства на ограничените редици от точки в E^m 496, 13.2.3. Граница на функция на m променливи 497, 13.2.4. Квадратно непрекъснати функции на m променливи 499, 13.2.5. Многократна граница 499.

13.3. Непрекъснатост на функция на m променливи — 501

13.3.1. Понятие за непрекъснатост на функция на m променливи 501, 13.3.2. Непрекъснатост на функции на m променливи по една от променливите 503, 13.3.3. Основни свойства на непрекъснатите функции на няколко променливи 505.

13.4. Производни и диференциали на функции на няколко променливи — 509

13.4.1. Частни производни на функции на няколко променливи 509, 13.4.2. Диференцируемост на функции на няколко променливи 510, 13.4.3. Геометричен смисъл на условното экстремизируемост на функция на две променливи 513, 13.4.4. Достатъчни условия за диференцируемост 515, 13.4.5. Диференциал на функция на няколко променливи 516, 13.4.6. Диференциране на сложна функция 517.

13.4.7. Инаричаност на формата на пазова диференциал	520.
13.4.8. Производна по посока. Градиент	522.
13.5. Частни производни и диференциали от по-висок ред	525
13.5.1. Частни производни от по-висок ред	525, 13.5.2. Диференциали от по-висок ред
531, 13.5.3. Формула на Тейлор с остатъчен член във форма на Ларанж и в интегрална форма	536, 13.5.4. Формула на Тейлор с остатъчен член във форма на Пеано
539.	
13.6. Доказан екстремум на функции на m променливи	543
13.6.1. Понятие за екстремум на функции на m променливи. Необходими условия за екстремум	543, 13.6.2. Достатъчни условия за доказан екстремум на функции на m променливи
545, 13.6.3. Случай на функции на две променливи	552.
13.7. Диференциално смятане в линейни нормирани пространства	554
13.7.1. Понятие за диференцируемост. Сила и слаба диференцируемост в линейни нормирани пространства	555, 13.7.2. Формула на Ларанж за крайните нараствания
558, 13.7.3. Възвръзка между сила и сила на диференцируемост	561, 13.7.4. Диференцируемост на функционални
562, 13.7.5. Производни от втори ред	563
13.8. Изследване на екстремуми на функционали в нормирани пространства	563
13.8.1. Необходимо условие за екстремум	564.
14. Невъвни функции	
14.1. Съществуване и диференцируемост на невяно зададена функция	569
14.1.1. Теорема за съществуване и диференцируемост на невяно функция	569, 14.1.2. Премагане на частните производни на функции, зададена межвно
574, 14.1.3. Особени точки на повърхнини и равнинна крива	576.
14.2. Невъвни функции, определени от система функционални уравнения	578
14.2.1. Теорема за решимост на система функционални уравнения	578, 14.2.2. Премагане на частните производни функции, невяно определени посредством система функционални уравнения
584, 14.2.3. Взаимно еднозначно изображение на две множества от m -мерното пространство	584.
14.3. Зависимост на функции	586
14.3.1. Понятие за зависимост на функции. Достатъчно условие за независимост	586, 14.3.2. Функционални матрици и тяхното приложение
588.	
14.4. Условен екстремум	592
14.4.1. Понятие за условен екстремум	592, 14.4.2. Метод на неопределени множители на Ларанж
596, 14.4.3. Достатъчни условия	597, 14.4.4. Кривина на равнинна крива. Епидолта и еволютата
599, 14.4.5. Саяна на променливите	603.
Азбучен указател	606

Предговор към второто издание

Второто издание на учебника не се различава много от първото издание. Съкратени са няколко параграфи, главно от третото издание. Установяват се някои доказателства и са направени редакции редакционни изменения. Отстранени са печатните грешки и забележки в първото издание.

В това издание са рационализирани означенията и е използван знакът \square за край на доказателството.

АВТОРИТЕ

Предговор

КЪМ ПЪРВОТО ИЗДАНИЕ

Днешният прорез в математиката до голяма степен е свързан с развитието на електронната изчислителна техника. Математическите методи за изследване проникват във всички области на човешката дейност. Всеяко това повишава интереса към математиката от страна на другите науки, използващи в разпачи етапи математическите знания, и поставя нови задачи пред самата математика.

Във връзка с това възниква необходимостта да се напише учебник по математически анализ, в който са взети пред вид тези закономерности.

Общоместното, че решаването на математическите задачи се реализира чрез автоматични сметачни машини (АСМ) с мощта на алгоритми, поставя повишен изисквания за точност в алгоритмичното ниво на изложение на математическите дисциплини. Разбира се, едно такво изложение трябва да се основава върху класическите концепции на математиката, без да ги замества. Тези общи принципи заедно със задачите за точно, ясно и достъпно изложение са заложи в преданиата на читателите книга. Тя е написана в съответствие със съгласувания между Московския и Софийския университет програма за преподаване на математически анализ първа част.

В предавания учебник е отделено голямо внимание на въпросите за оптимизиране, които играят важна роля в математиката и нейните приложения. По-специално в него за първи път в учебната литература от този род е изложен в завършен вид алгоритъм за намиране както на вътрешен, така и на контурен екстремум на функции. В учебника е отделено значително място за изчаване на въпроса за изходната информация, която е достъпна при решаването на дадена задача. Така например за намиране екстремума на

функции на едни променлива авторите предлагат алгоритъм, основан само на информацията за стойностите на функцията в точките от дефиниционната ѝ област. Предлагаият алгоритъм не използва стойностите на производните на функцията в дефиниционната ѝ област и е приложим за намиране на екстремум на недиференцируеми функции. Този постановки е типична при решаване на задачи за оптимизиране на производствени процеси.

При избора на методи на изложение авторите са се ръководили от това, че подборът на алгоритма за решаване на дадена задача зависи от информацията, която може да бъде използвана при постановенето на тази задача. Така например при въвеждането на понятието определена интеграл на Риман авторите предлагат от концепции, основаващи се на използване стойностите на функцията в точки от сегмента. Този концепция е очевидно за предпоставяне в сравнение с въвеждането на определена интеграл на Риман с помощта на примитивна функция, тъй като тя отговаря на идеите на числените методи за пресмятане на определени интеграл чрез използване на АСМ.

В заключение искаме да изкажем увереност, че предавания книга ще способства за повишаване на математическата култура на читателите с различни изходни към обема на математическите знания.

АКАД. А. Н. ТИХОНОВ

УВОД

Тази книга е учебник по математически анализ, написана по съгласуваната между Московския и Софийския университети единна програма за първата година на обучение. Тя напълно обхваща материала за първата година на обучение, предвиден в програмата за студенти от университетите на СССР и НРБ по специалностите „Математика“, „Механика“ и „Приложна математика“.

Особено в книгата е, че тя съдържа три ясно отделими едно от друго нива на изложение: елементарно, основно и по-„више“, като за разбирането на материала от елементарното ниво не се изисква да се четے материалът от основното и повишеното ниво, а за разбиране на материала от основното ниво не се изисква да се четے материалът от повишеното ниво.

Елементарното ниво отговаря на програмите за техническите ВУЗ-ове в СССР с голямо изучаване на математически анализ; основното ниво на изложение отговаря на програмите за специалностите „Приложна математика“ и „Физика“ на университетите в СССР и България; материалът от повишеното ниво допълва материала от основното ниво с *тезиси*, които съвременно се изучават в механико-математическите факултети на университетите.

Текстът, отделен в книгата с две вертикални черти, се отнася към повишеното ниво на изложение; текстът, отделен с една вертикална черта — към основното ниво, а останалият текст е съдържащият се в елементарното ниво на изложение.

Книгата съдържа уводна глава, в която се илюстрира възникването на основните понятия в математическия анализ с цел да се улесни възприемането на следващия материал.

В нея е отразена нагледната страна на числените методи и

са поместени редица примери за приложение на апарата на математическия анализ при пресмятане стойностите на елементарни функции, интеграл, корени на уравнения и намиране на екстремални точки.

Днес в СССР и у нас има много учебници по математически анализ, сред които особено сподрукливи по наше мнение са учебниците, написани от Л. Д. Кудрявцев и С. М. Николски в СССР и от Я. Тагмлицки и НР България. Авторите на тази книга не съмнено са изпитали влиянието на тези прекрасни учебници. При написването на текста те са използвали и някои материали от книгата на В. А. Иглин и Е. Г. Позняк „Основни на математическия анализ“, а също така опита от преподаването в университетите.

Авторите изказват дълбока благодарност на главния редактор на тази книга акад. А. Н. Тихонов за многобройните ценни съвети и забележки.

С особена благодарност те отбелязват труда на В. М. Говоров и Г. Христов, който даде изключителни рамки на обикновеното редактиране.

Авторите са благодарни също за ценните забележки на Л. Д. Кудрявцев, И. И. Лышко, В. Л. Макарова, Д. Дойчинов и Т. Боянов.

1. УВОД

В математическия анализ

Ще започнем нашето изложение с изясняване на кръга от понятия и проблеми, които предстои да срещнем при изучаването на математическия анализ. При това веднага трябва да се уточним, че дадените в тази уводна глава формулировки често имат предимителен характер и изискват допълнително уточняване.

1. Да разгледаме най-простия вид движение — движението на материална точка по права линия, и да изясним какви математически понятия възникват при описването на такова движение. Да предположим, че материалната точка се движи по оста Ox , а x е времето, отчитано от даден начален момент. За характеризирание на това движение трябва да се знае правилото, по-средством което на всеки момент от време x се съпостави координатата y на движещата се точка. Такова правило се нарича закон на движение.

Като се абстрахираме от физическия смисъл на променливите x и y , изваме до понятието функция, което е вече известно от курса по математика в средните училища. Това е едно от най-важните понятия в цялата математика.

Ако по някакво правило на всяка стойност на една променлива x се съпостави определена стойност $f(x)$ на друга променлива y , казваме, че променливата y е функция на променливата x , и пишем $y=f(x)$ или $y=f(x)$.

При това променливата x се нарича **аргумент** или **независима променлива**, а променливата y — **функция** или **зависима променлива**.

Буквата f в записа $y=f(x)$ често се нарича **характеристика** на разглежданата функция, а стойността $f(x)$, отговаряща на дадена фиксирана стойност на x , се нарича **частна стойност** или **просто стойност на функцията в точката x** .

Ще отбележим веднага, че дадената формулировка на понятието функция се нуждае от уточняване, тъй като в нея нищо не се казва за това, от какво множество се вземат стойностите на независимата променлива x .

Множеството, от което се вземат стойностите на независимата променлива x , се нарича **обикновено дефиниционна област на функцията**. Задаването на дефиниционните области на функциите изисква разбиране на теорията на числовите множества и общата теория на множествата.*

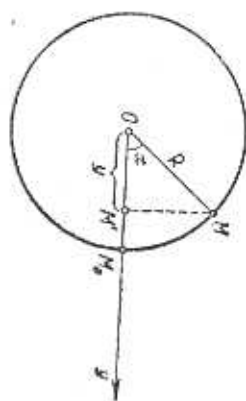
За означаване на аргумента, функцията и нейната характеристика могат да се използват различни букви. Така например записът $\alpha = \varphi(t)$ означава, че променливата α е функция на аргумента t , при това характеристиката на тази функция е означена с φ .

2. Често се налага да се разглежда такава функция $y = f(x)$, аргументът x на която е също функция $x = \varphi(t)$ на друга променлива t . В такъв случай се казва, че променливата y е **сложна функция** на аргумента t , а променливата x се нарича **междупозиция** на функциите. Такава сложна функция се нарича още **суперпозиция** на функциите f и φ и се означава с $y = f(\varphi(t))$.

Ще разгледаме един прост пример, илюстриращ използването на понятието сложна функция. Нека материалната точка M се върти равномерно по окръжност с радиус R с постоянна ъглова скорост ω . Ще намерим закона на движението на проекцията M' на точката M върху оста Oy , минаваща през центъра O на окръжността и лежаща в нейната равнина (фиг. 1.1). Естествено е да предположим, че в началния момент $t=0$ движението се точка M се намира в точката M_0 , която е пресечна точка на окръжността с оста Oy . Да означим с y координатата на проекцията M' на точката M върху оста Oy , а с x — въгъла $\angle M_0OM$, на който се завърта точката M за време t . Очевидно $y = R \cos x$, $x = \omega t$ и ще получим, че координатата y на проекцията M' е сложна функция на времето t от вида $y = R \cos x$, където $x = \omega t$. Тази сложна функция може да се запише във вида $y = R \cos \omega t$. Ще отбележим, че движението по закона $y = R \cos \omega t$ е прието да се нарича в механиката **хармонично трептене**.

3. Важна характеристика на движението на материална точка е нейната скорост във всеки момент от времето t (момента скорост). Ако материална точка се движи по оста Oy по закона $y = f(x)$, то като фиксираме произволен момент от време x и вземем някакво нарастване на времето Δx , можем да твърдим, че в

* В зависимост от характера на дефиниционната област на функцията и от множеството на стойностите и в различни раздели на анализа функциите се наричат още **изображения**, **оператори**, **функционали** и т. н. Едно изображение се нарича **взаимно еднозначно** или **1-1-значно**, ако при него всяко y съответства само на едно x . При взаимно еднозначните изображения съществуват **обратно изображения**, споставяйки на всяко y определено x (наимено това, което съответства на даденото y при изходното изображение).



Фиг. 1.1

момента x движещата се точка има координатата $f(x)$, а в момента $x + \Delta x$ — координатата $f(x + \Delta x)$.

По такъв начин числото $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ представлява пътът, изминат от движещата се точка за интервала време от x до $x + \Delta x$.

Оттук следва, че частното

$$(1.1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

наричано **диференциално частно**, представлява **средна скорост** на движещата се точка за интервала време от x до $x + \Delta x$.

Моментна скорост (или просто **скорост**) на движещата се точка се нарича **границата**, към която клони **средната скорост** (1.1), когато **интервалът от време Δx клони към нула**.

Ако се използва символът за граница, моментната скорост $v(x)$ в момента x се записва така:

$$(1.2) \quad v(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Физическото понятие за моментна скорост води до основното математическо понятие производна. Като се абстрахираме от механичния смисъл на разглежданата по-горе функция f , ще наречем **производна на произволна функция f в дадена фиксирана точка x границата в десетия степен на (1.2) (разбира се, при условие, че тази граница съществува)**.

За означаване на производната на функцията f в точката x се използва символът $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операцията намиране на производна се нарича **диференциране**

Горните разглеждания показват, че при дефиниране на производна на функция основна роля играе понятието граница на функции.

Предварителна представа за понятието граница на функция (а и за понятието производна) се дава в курса по математика в средното училище.

Строгото и последователно изучаване на понятието граница е възможно само на основата на строгото изградена теория на реалните числа. Така например без строгото изградена теория на реалните числа е невъзможно да се установи съществуването на следните две важни граници:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t}.$$

Когато възникнат, както ще видим по-нататък, при пресмятане производните на функциите $y = \sin x$ и $y = \log_a x$.

Горните разглеждания показват, че въпросът за съществуване и пресмятане на производни води до необходимостта от изграждане на строгата теория на реалните числа и на тази основа — теория на границите.

4. Ще пристъпим към намирането на производните на две конкретни елементарни функции $y = \sin x$ и $y = \log_a x$ и ще изясним какви математически проблеми възникват при това.

Най-напред ще намерим производната на функцията $y = \sin x$ и произволна фиксирана точка x . За тази функция диференциалното частно (1.1) има вида

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} \cdot \cos(x + \Delta x/2).$$

Така производната на функцията $y = \sin x$ в точката x е равна по определение на границата

$$(1.3) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} \cdot \cos(x + \Delta x/2) \right\}$$

(при условие, че тя съществува).

Може да се очаква, че

$$(1.4) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \Delta x/2) = \cos x.$$

Ще отбележим обаче, че не за всяка функция f е изпълнено равенството

$$(1.5) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x/2) = f(x).$$

Функцията f , за която е изпълнено равенството (1.5), се нарича непрекъсната (в точката x). Понятието непрекъснатост на

функция е едно от най-важните математически понятия и ще бъде основно изучено в този курс по математически анализ. В частност ще бъде доказано, че функцията $y = \cos x$ е непрекъсната във всяка точка x , т. е. във всяка точка x е изпълнено равенството (1.4).

За пресмятането на границата (1.3) не е достатъчно да се докаже само верността на (1.4). Необходимо е още да се пресметне и границата

$$(1.6) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \quad (t = \Delta x/2).$$

По-нататък ще докажем, че границата (1.6), наричана *перва забележителна граница*, съществува и е равна на единица.

Само след като установим непрекъснатостта на функцията $y = \cos x$ (т. е. равенство (1.4)) и пресметнем изразта забележителна граница (1.6), можем да твърдим, че границата (1.3) съществува и е равна на $\cos x$ или че производната на функцията $y = \sin x$ съществува и е равна на $\cos x$.

Ще минем сега към пресмятане на производната на функцията $y = \log_a x$, считайки, че $0 < a \neq 1$, като ще фиксираме произволна точка $x > 0$. За тази функция диференциалното частно (1.1) е

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

($\Delta x \neq 0$ и се избира така, че $x + \Delta x > 0$). Производната на функцията $y = \log_a x$ във всяка точка $x > 0$ е равна по определение на границата

$$(1.7) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

(при условие, че тази граница съществува). Да преобразуваме дробта (1.7) чрез следните операции: 1) заместваме разликата от логаритми с логаритъм на частно; 2) умножаваме и разделимте на една и съща величина $x > 0$; 3) въвеждаме множителя, стоящ пред логаритъма, под знака на логаритъма, с което той става степенни показател. В резултат за границата (1.7) получаваме

$$(1.8) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \right\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \right\} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{x/\Delta x} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \log_a (1 + t)^{1/t} \right\} \\ (t = \Delta x/x \rightarrow 0).$$

Да разгледаме отделно границата на израз $(1+t)^{1/t}$ при $t \rightarrow 0$:

$$(1.9) \quad \lim_{t \rightarrow 0} [(1+t)^{1/t}].$$

Тази граница се нарича **отвора забележителна граница**. В този курс ще бъде доказано, че тази граница съществува и че тя е равна на ирационалното число e , което с точност до петнадесети знак след десетичната запетая е

$$e = 2,718281828459045 \dots$$

Освен това ще бъде доказана непрекъснатостта на функцията $y = \log_a x$ във всяка точка $x > 0$ и по-специално в точката $x = e$. Но тогава от съществуването на граница (1.9), равна на e , следва, че

$$\lim_{t \rightarrow 0} \log_a [(1+t)^{1/t}] = \log_a e.$$

Последното равенство и равенството (1.8) ни позволяват да твърдим, че границата на (1.7) е

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

След като бъде пресметната втората забележителна граница и установена непрекъснатостта на функцията $y = \log_a x$ в точката e , ще можем да твърдим, че логаритмичната функция има производна и

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \text{ при } 0 < a \neq 1, x > 0.$$

5. В математиката освен разглежданите две функции $y = \sin x$ и $y = \log_a x$ се изучават още и следните функции: $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = x^\alpha$ (α — реално число), $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$), $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. Тези функции е прието да се наричат **основни елементарни функции**.

Забележително е, че при пресмятането на производните на основните елементарни функции не възникват никакви други трудности освен тези, които срещаме при пресмятането на производните на функциите $y = \sin x$ и $y = \log_a x$. За пресмятане на производните на основните елементарни функции са необходими само аритметичните свойства на операциите границен преход, двете забележителни граници и непрекъснатостта на всяка от тези функции.

Таблицата на производните на всички основни елементарни функции е следната:

$$1^\circ. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0, \alpha \text{ — реално число}).$$

$$2^\circ. (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \quad (0 < a \neq 1, x > 0),$$

$$\text{при } a = e \text{ имаме } (\log_e x)' = \frac{1}{x}.$$

$$3^\circ. (a^x)' = a^x \log_a a \quad (0 < a \neq 1),$$

$$\text{при } a = e \text{ имаме } (e^x)' = e^x.$$

$$4^\circ. (\sin x)' = \cos x.$$

$$5^\circ. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$6^\circ. (\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x \quad (x \neq \pi/2 + n\pi, \text{ където } n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$7^\circ. (\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x \quad (x \neq n\pi, \text{ където } n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$8^\circ. (\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2} \quad (|x| < 1).$$

$$9^\circ. (\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2} \quad (|x| < 1).$$

$$10^\circ. (\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2).$$

$$11^\circ. (\operatorname{arcctg} x)' = -1/(1+x^2).$$

Обобщава на горната таблица едната задача на тази част от математическия анализ, която се нарича **диференциално съотношение**.

Традиционната задача на класическото диференциално съотношение е пресмятането на производната на всяка функция f , която се получава от изброените по-горе основни елементарни функции чрез краен брой суперпозиции и краен брой аритметични действия (събиране, умножение, изваждане и деление). Такава функция f е прието да се нарича **елементарна функция**.

И така **елементарна функция** се нарича всяка функция, която е получена от основните елементарни функции чрез краен брой суперпозиции и четирите аритметични действия.

Пример за елементарна функция е функцията

$$f(x) = 5 \arctg (x+1) + 2x.$$

За пресмятане производната на произволна елементарна функция са необходими освен таблицата за производните на основните елементарни функции още правилата: 1) правилото за диференциране на сложна функция; 2) правилото за диференциране на сума, разлика, произведение и частно на функции.

Правилото за диференциране на сложна функция $y = f(u)$, където $u = \varphi(x)$, има следния вид: ако функцията $u = \varphi(x)$ има производна в дадена точка x_0 а функцията $y = f(u)$ има производна в съответната точка $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложната функция $y = f(\varphi(x))$ има производна в точката x_0 и тази производна y' е

$$(1.10) \quad y' = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0).$$

т. е. y' е равна на производното на производната на функцията $y = f(u)$ в точката $u_0 = \varphi(x_0)$ и производната на функцията $u = \varphi(x)$ в точката x_0 .

Удобно е и едно друго записване на формулата (1.10), при което индексите долгу показват по коя променлива се диференцира:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Верността на формулата за производна на сложна функция (1.10) лесно може да се подкрепи с интуитивни съображения, но строгото ѝ извръждане не е лесно и ще бъде дадено в следващото изложение.

Много по-просто е да се установят правилата за диференциране на сума, разлика, произведение и частно на две функции и те са:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

(в последната формула се изисква $v(x)$ да не е нула в разглежданата точка x).

Важни задачи на диференциалното смятане са обосноваването на таблицата за производните на основните елементарни функции и на правилата за диференциране на сложна функция, на сума, разлика, произведение и частно на функции, а също така и за производни на обратна функция. Това ще ни позволи да пресметаме производната на всяка елементарна функция f .

Оказва се, че производната на всяка елементарна функция е също елементарна функция, т. е. операцията диференциране не извежда връх от класа на елементарните функции. Това обстоятелство оправдава въвеждането на класа от елементарни функции като традиционен обект на класическия анализ.

6. Да се върнем към разглежданата механична задача за движение на материална точка по права линия — оста Ox , но този път ще предположим, че за всеки момент от време x е дадена моментната скорост $f(x)$ на движението се точка и трябва да се намери законът на движение на тази точка.

Тъй като моментната скорост $f(x)$ е производна на функцията $y = F(x)$, определяща закона на движение, то задачата се свежда до това по дадена функция f да се намери такава функция F , чиято производна F' е равна на f . Като изоставим механичния смисъл на функциите f и F , идваме до математическия понятият **примитивна функция и неопределен интеграл**.

Примитивна функция на функцията f се нарича всяка функция F , производната F' на която е равна на f .

Ще отбележим, че ако функцията F е примитивна на функцията f , то и функцията $F + C$, където C е произволна константа, е също примитивна на функцията f (тъй като производната на константа е равна на нула).

По-трудно се установява обратното твърдение: Всеки две примитивни на една и съща функция f в интервала (a, b) се различават само със събрисаемо константа. Доказателството на това твърдение е по-сложно и ще бъде проведено в следващото изложение.

Въз основа на горното твърдение можем да констатираме следното: Ако функцията F е някоя примитивна на функцията f , то всяка примитивна на функцията f има вида $F + C$, където C е константа.

Съединяемостта от всички примитивни на дадена функция f се нарича неопределен интеграл от тази функция и се означава със символа

$$\int f(x) dx.$$

Следователно, ако F е една от примитивните на функцията f то неопределеният интеграл от функцията f може да се представи в следния вид:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

където C е произволна константа.

Да се върнем към поставената задача за отпедение на закон за движение на материална точка по оста Ox , ако е известна моментната скорост $f(x)$ в тази точка. Сета можем да твърдим, че търсеният закон за движение се определя от функцията $y = F(x) + C$, където F е кой да е примитивна на функцията f , а C е константа.

Както виждаме, по моментната скорост законът за движение се определя неопределено: с точност до дадена константа C . За отпедение на константата C трябва да се наложат допълнителни условия, например задаване на координатата y_0 на движението се точка в даден момент от времето x_0 . Като използваме това условие, ще получим $y_0 = F(x_0) + C$, откъдето $C = y_0 - F(x_0)$, така че окончателно търсеният закон на движението е

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0).$$

7. Ще разгледаме въпроса за намиране на примитивни функции и неопределени интеграл на някои елементарни функции. Тъй като

Функцията $f(x) = \cos x$ е производна на $F(x) = \sin x$, то $F'(x) = \sin x$ е една от примитивните на функцията $f(x) = \cos x$ и затова всяка примитивна на $f(x) = \cos x$ има вида $\sin x + C$, където C е константа, т. е.

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

Тези разсъждения имат общ характер.

Всяка формула на диференциалното смятане $F'(x) = f(x)$, която показва, че функцията f е производна на функцията F , поражда еквивалентна формула на интегралното смятане $\int f(x) \, dx = F(x) + C$, т. е. неопределеният интеграл от функцията f е равен на $F + C$, където C е произволна константа.

Така от таблицата за производните на основните елементарни функции се получава следната таблица на важни неопределени интегрални:

$$1^\circ. \int x^\alpha \, dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$2^\circ. \int \frac{dx}{x} = \log_e x + C \quad (x > 0).$$

$$3^\circ. \int a^x \, dx = a^x / \log_e a + C \quad (0 < a \neq 1).$$

По-специално при $a = e$ имаме $\int e^x \, dx = e^x + C$.

$$4^\circ. \int \sin x \, dx = -\cos x + C.$$

$$5^\circ. \int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

$$6^\circ. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad (x \neq \pi/2 + n\pi, \text{ където } n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$7^\circ. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq n\pi, \text{ където } n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$8^\circ. \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctg} \sin x + C \quad (|x| < 1).$$

$$9^\circ. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

Горната таблица ще бъде допълнена по-нататък с две важни правила за интегриране (интегриране чрез смяна на променливите, т. е. субституция, и интегриране по части).

Така се получава апарат за смятане в тази част на математическия анализ, които се нарича **интегрално смятане**.

Трябва да отбележим, че за пресмятане на много важни неопределени интегрални този апарат е недостатъчен. Например той е недостатъчен за пресмятане на неопределения интеграл

$$(1.11) \quad \int e^{-x^2} dx,$$

който играе важна роля в теорията на вероятностите и нейните приложения.

Интегралът (1.11) е пример на интеграл от елементарна функция, който не е елементарна функция, така че за разлика от диференцирането *операциите интегриране не запознават класа на елементарните функции*. Това обстоятелство показва условността на понятието елементарна функция като традиционен обект на класическия анализ.

8. Отново ще предположим, че функцията f представлява моментната скорост на движение се материална точка по оста Ox . Нека да пресметнем пътя, изминат от тази точка за интервала време от $x=a$ до $x=b$. За простота при разсъжденията ще предположим, че скоростта f е неотрицателна във всеки момент от времето x .

За решаване на поставената задача ще разделим интервала от време $[a, b]$ на малки подинтервали, ограничени от моментите $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Естествено е да считаме, че във всеки такъв малък подинтервал от x_{k-1} до x_k ($k=1, 2, \dots, n$) скоростта f се изменя малко (което е изяснено, когато f е непрекъсната), така че можем да приемем във всеки подинтервал $[x_{k-1}, x_k]$ за константа състояност $f(\xi_k)$, където ξ_k е някой момент от време в интервала $[x_{k-1}, x_k]$.

Следователно пътя $S[x_{k-1}, x_k]$, изминат от движещата се точка за подинтервала време от x_{k-1} до x_k , можем да считаме приблизително равен на произведението $f(\xi_k)$ и дължината $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ на подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$, т. е.

$$S[x_{k-1}, x_k] \approx f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Тогаваш пътят $S[a, b]$, изминат от материалната точка за целия интервал време от $x=a$ до $x=b$, е приблизително равен на сумата

$$(1.12) \quad S[a, b] \approx f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n,$$

сумата в дясната страна на (1.12) се нарича **интегрална сума** или още **риманова сума**.

Естествено е да очакваме, че точната стойност на пътя $S[a, b]$, можем да получим, като прелинем в интегралната сума (1.12) към

граница, оставяйки най-голямата дължина Δx_k да клони към нула (при това, разбира се, броят n на подинтервалите ще расте неограничено). Като означим с d най-голямото от числата $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ и използваме означението за граница, ще получим, че

$$(1.13) \quad S[a, b] = \lim_{d \rightarrow 0} \{f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n\}.$$

Разбира се, необходимо е да се уточни какво разбираме под граница на интегралната сума в (1.13). Този път операционният преход е в нова, по-сложна форма, отколзото при обикновената граница на функцията $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Точното определение и изучаване на свойствата на граница от вида (1.13) е дадено в този курс. Тук ще отбележим само, че границата в дясната страна на (1.13) се нарича **определен интеграл** от функцията $f(x)$ в граници от a до b и се означава със символа

$$(1.14) \quad \int_a^b f(x) dx.$$

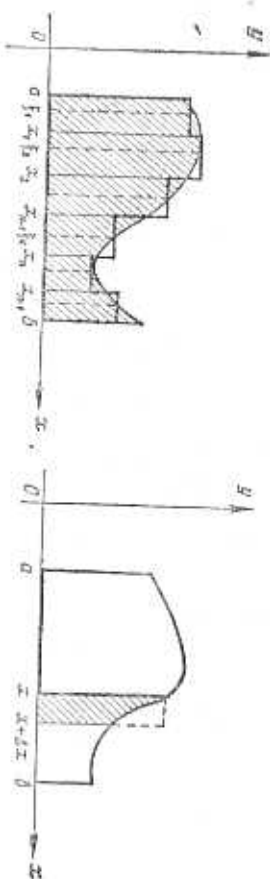
И така определен интеграл (1.14) е точно равен на пътя за интервала време от $x=a$ до $x=b$.

Заедно с това е очевидно, че интегралната сума в дясната страна на (1.12) геометрично представлява сумата от лицата на правоъгълниците с основни Δx_k и височини $f(\xi_k)$. С други думи, интегралната сума в (1.12) е равна на лицето на стъпаловидната фигура, оцветена на фиг. 1.2 с пълна линия. Естествено е да се очаква, че ако дължината d на най-голямото от числата Δx_k клони към нула, лицето на посочената стъпаловидна фигура ще клони към лицето на криволинейната фигура, лежаща под графиката на функцията f в интервала $a \leq x \leq b$ (на фиг. 1.2 тя е заштрихована). Тази криволинейна фигура е прието да се нарича **криволинейен трапец**.

По такъв начин **определеният интеграл** (1.14) е равен на **лицето на стъпаловидната криволинейна трапец**.

Разбира се, дадените нагледни разсъждения се нуждаят от уточнения. По-специално в системния курс по анализ подлежи на уточняване и самото понятие лице на криволинейен трапец и въобще лице на равнинна фигура.

И така горните разсъждения показват, че с понятието определен интеграл (1.14) са свързани две основни задачи: физическата задача за пресмятане дължина на път и геометричната задача за пресмятане лице на криволинейен трапец.



Фиг. 1.2

9. Сега ще се върнем на въпроса за връзката на определения интеграл (1.14) с въведени по-рано неопределен интеграл (или с примитивната), а също така и върху начините за пресмятане на определените интеграл.

Да означим с F определения интеграл от функцията f в граници от a до x , където a е някоя фиксирана стойност на аргумента, а x е променливата стойност. С други думи, полагаме*

$$(1.15) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

От геометрична гледна точка този интеграл, както посвехихме по-горе, е равен на лицето на трапеца, лежащ под графиката на функцията f в интервала $[a, x]$. На фиг. 1.3 този криволинейен трапец е ограден с пълна линия.

Чрез нагледни геометрични съображения, ще се убедим в това, че въведената от нас функция (1.15) е една от примитивните на функцията f , т. е. че $F'(x) = f(x)$.

Нека Δx е достатъчно малко нарастване на аргумента x . Очевидно разликата $F(x + \Delta x) - F(x)$ представлява лицето на "тесния" криволинейен трапец, заштрихован на фиг. 1.3. От друга страна, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната във всяка точка x , т. е. ако стойностите на тази функция се менят малко при малки изменения на аргумента, то лицето на "тесния" криволинейен трапец ще се отличава малко от лицето $f(x) \Delta x$ на правоъгълника с основа Δx и височина $f(x)$.

Оттук следва, че при малко Δx диференциалното частно

$$(1.16) \quad \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

* Променилата под знака на определения интеграл означаваме с t , за да не се смесва с горната граница на интегриране x .

малко ще се различава от височината $f(x)$ на посочения правоъгълник, т. е. при $\Delta x \rightarrow 0$ границата на диференчното частно (1.16) трябва да бъде равна на $f(x)$. Заедно с това по определение тази граница е равна на производната $F'(x)$.

И така ние се убедихме, че $F'(x) = f(x)$, т. е. функцията (1.15) е една от примитивните на функцията f . Но тогава всяка примитивна на функцията f е равна на

$$(1.17) \quad \Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + C,$$

където C е константа.

Направените разсъждения имат предварителен характер, но при наличие на развит апарат на математически анализ може леко да се прецизират и строго да се докаже, че за всяка непрекъсната функция f съществува примитивна и тя се определя с равенството (1.17).

Равенството (1.17) на свой ред позволява да се установи връзката между определения интеграл $\int_a^b f(x) dx$ и всяка примитивна

$\Phi(x)$ на функцията $f(x)$. За намиране на тази връзка ще вземем в равенството (1.17) за горна граница на интегрирането x отначало числото b , а после числото a . Така ще получим

$$(1.18) \quad \Phi(b) = \int_a^b f(t) dt + C = \int_a^b f(x) dx + C,$$

$$(1.19) \quad \Phi(a) = \int_a^a f(t) dt + C = C$$

$$(1.19) \quad \text{интегралът } \int_a^a f(t) dt \text{ е очевидно равен на нула.}$$

Изваждаме от равенството (1.18) равенството (1.19) и получаваме знаменитата *формула на Нютон — Лайбниц*

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

свещаща въпроса за пресмятане на определения интеграл $\int_a^b f(x) dx$

до пресмятане на разликата от стойностите на произволна примитивна Φ на функцията f в точките b и a .

Обобщаването на формулата на Нютон — Лайбниц е една от важните задачи на математическия анализ.

10. Ще отбележим обаче, че точни аналитични изрази на примитивните функции могат да се получат само за тесен клас функции. Затова формулата на Нютон — Лайбниц не решава изцяло въпроса за пресмятане на определени интеграли.

Най-простият начин за приближено пресмятане на определен интеграл е т. нар. *метод на правоъгълниците*, при който интегралът се заменя с интегралната сума от дясната страна на (1.12), в която за точките ξ_k се вземат средите на съответните им интервали $[x_{k-1}, x_k]$, а те от своя страна са с еднаква дължина, т. е. числата $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ са равни помежду си.

В този курс ще бъде доказано, че при определени изисквания за функцията f грешката, която правим при заместване на ин-

теграла $\int_a^b f(x) dx$ с посочената специална интегрална сума, е от порядък n^{-2} , където n е броят на подинтервалите.

Методът на правоъгълниците (както и много други методи за приближено пресмятане на определени интеграли) е много удобен при използване на автоматични сметачни машини (АСМ). Това обстоятелство и равенството (1.17) правят този метод ефективно средство за намиране на примитивни и неопределени интеграли.

В таблица 1 привеждаме резултатите от пресмятането на калкулатор по метода на правоъгълниците на интеграла на Пюсон

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

за някои стойности на x . В първата колона на таблицата са стойностите на аргумента x на интеграла на Пюсон, във втората колона е посочен броят n на подинтервалите, а в третата колона — резултатите от пресмятаната.

От таблица 1 се вижда, че за пресмятане на интеграла на Пюсон с точност до 10^{-6} при $x=0.1$ е достатъчно да вземем $n=10$, при $x=0.5$ е достатъчно $n=40$, а при $x=1$ е достатъчно да вземем $n=60$.

ТАБЛИЦА 1

x	n	$\approx f(x)$	x	n	$\approx f(x)$
0.1	2	0.0398319	0.5	10	0.191480
0.1	5	0.0398284	0.5	20	0.191466
0.1	10	0.0398279	0.5	40	0.191463
0.1	20	0.0398278	0.5	50	0.191463
0.2	10	0.0792609	1	30	0.341355
0.2	20	0.0792599	1	60	0.341347
0.2	30	0.0792597	1	80	0.341346
0.2	40	0.0792597	1	100	0.341345

11. Наред с приближените методи за пресмятане на интеграл важна роля в съвременната математика играят и приближените методи за определяне на корените на различни уравнения. Да разгледаме уравнението

$$(1.20) \quad f(x) = 0.$$

В този курс ще бъде доказано, че при определени изисквания за функцията f коренът $x=c$ на уравнението (1.20) може да бъде намерен като граница на редица x_n ($n=1, 2, 3, \dots$), първият член на която се взема произволно в някаква достатъчно широк интервал, а останалите се получават по итерационната формула

$$(1.21) \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n).$$

Този метод за приближено пресмятане на корен на уравнението (1.20) се нарича **метод на Нютон** (или **метод на допирателните**).

Като конкретен пример ще разгледаме уравнението (1.20) с функцията $f(x)$ от вида $f(x) = x^k - a$, където a е положително реално число, а $k \geq 2$ — цяло положително число. За такава функция $f(x)$ положителен корен на уравнението (1.20) е $\sqrt[k]{a}$ (т. е. k -ти корен от положителното реално число a). Формулата (1.21), определяща последователните приближения по метода на Нютон, в този случай ще има вида

$$(1.22) \quad x_{n+1} = \frac{k-1}{k} x_n + \frac{a}{k x_n^{k-1}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(за да се убедим в това, достатъчно е да отчитем, че $f'(x) = kx^{k-1}$). Формулата (1.22) дава един ефективен и лесно реализуем на АСМ алгоритъм за пресмятане на k -ти корен от реално положително число a .

Ще приведем примери за пресметнати с АСМ корени по тази формула.

Всяко положително реално число a може да се представи (и то по единствен начин) във вида $a = 2^L x$, където L е цяло число, а x удовлетворява неравенствата $1/2 \leq x < 1$. Ще избираме всеки път за първо приближение x_1 числото $x_1 = 2^{L/M}$, където k е степента на извлечени корен, а символът $[L/k]$ означава цялата част на числото L/k .

Резултатите от пресмятанията са събрани в таблица 2, в първата колона на която стоят числата a , от които извлечаме корен, във втората колона е коренният показател, в третата колона са пресметнатите стойности на корените и в четвъртата колона е даден броят на направените итерации.

ТАБЛИЦА 2

a	k	$\sqrt[k]{a}$	n
2	2	1.414213181	4
3	2	1.732048942	5
4	2	1.909990046	5
5	2	1.48697853	5
2	5	1.245730400	5
3	5	1.319507599	6
4	5	1.071773529	5
2	10	1.16123199	6
3	10	1.148697853	6

12. Ще разгледахме постановката на най-важните задачи на математическия анализ, твърдяйки от най-простия механичен модел — движение на материална точка по права линия. Този модел е естествено ни доведе до необходимостта да построим диференциалното и интегралното смятане за функции $f(x)$ на една независима променлива x . При описването на по-сложни задачи е естествено да възникне понятието функция на няколко независими променливи x_1, x_2, \dots, x_m . Така например температурата и на нагрявано тяло е функция на четири независими променливи: трите координати x_1, x_2, x_3 на точка от това тяло и времето t . Тази функция е естествено да означим със символа $u = f(x_1, x_2, x_3, t)$.

За функция на няколко променливи се въвежда понятието производна по всяка от променливите (такава производна се нарича **частна производна** по дадената променлива).

Важна задача за по-нататъшното развитие на математическия анализ е поставянето на диференциално и интегрално смятане за функции на няколко променливи. В теорията на функциите на няколко променливи се изучава също така задачата за намиране на функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, която е решение на функционалното уравнение $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$. Тази задача може да се разглежда като обобщение на задачата за намиране на корен на уравнението (1.20).

Накратък математическият анализ, разбираем в най-широк смисъл, включва теорията на диференциалните уравнения (т. е. уравнения, съдържащи и производните на търсените функции).

През последните десетилетия широко развитите получиха теория, изхождащи от обобщено третиране на понятията функция, производна и решение на диференциално уравнение. Създаването на математически анализ е едно от най-великите постижения на човешкия ум. То даде възможност от разглеждането на отделни, разпокъсани физически и геометрични задачи (като падане на тяло под действието на силата на тежестта, пресмятане на лица на фигури и др.) да се премине към разглеждане на общи методи за решаване на големи класове от задачи. Развитието на математическия анализ от своя страна оказва огромно влияние за прогреса на науката и техниката.

Класическият математически анализ е много удобен математически модел за описание на различни явления, при които се допуска, че разполагаме с точни стойности за всички изходни величини и можем да намерим точните стойности на пресмятаните величини.* Ще отбележим, че опирайки се на този модел, обикновено можем да оценим грешката, възникваща вследствие на това, че изходните величини са зададени с някаква грешка, и всячки пресметания могат да се направят само с определена точност.** По такъв начин апаратът на математическия анализ може да бъде използван за поставяне на числени методи и оценки на грешките. Накратък нека систематизираме най-важните проблеми, възникнали в резултат от направените предварителни разглеждания.

1. Уточняване на понятията реално число, множество и функция.
2. Развиване на теорията на границите и свързаното с тази теория понятие непрекъснатост на функции.

* Специално ще подчертаем, че този модел обхваща широки класове задачи, различни по своя характер — от физиката, биологията, икономиката, социологията и другите науки.

** Може например да се разглеждат изображения, поставящи в съответствие на всяка стойност на аргумента x пълна интервал от стойности за y . Такива изображения в редица случаи представляват доста удобен математически апарат за отчитане на грешките от изходните данни и обработката на данните.

3. Построяване на апарата на диференциалното и интегралното смятане.

4. Построяване на теорията на определенния интеграл като граница на суми от специален вид.

5. Развиване на приближени методи за пресмятане на определени интеграл и приближени методи за решаване на уравнения.

6. Изясняване на някои геометрични понятия (като лице на равнинна фигура, дължина на дъга и др.).