1 Граница на функция

1.1 Дефиниции

1.1.1 Точка на сгъстяване на множество

- Дефиниция 1 (Хайне): a се нарича точка на сгъстяване на множеството $A \subset \mathbb{R}$, ако съществува редица $\{x_n\}_1^\infty$, за която 1) $x_n \in A$; 2) $x_n \neq a$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
- Дефиниция 2 (Коши): a се нарича точка на сгъстяване на множеството $A \subset \mathbb{R}$, ако за всяко $\delta > 0$ има $x \in A$, за което $0 < |x - a| < \delta$
- Двете дефиниции са еквивалентни
- Пример: точките на сгъстяване на дефиниционната област на функцията $\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}}$ са $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; 0 не е точка на сгъстяване, въпреки че в нея функцията е дефинирана.

1.1.2 Граница на функция — дефиниция 1 (Хайне)

Нека a е точка на сгъстяване за D_f.

- Казваме, че f има граница в a, ако за всяка редица $\{x_n\}_1^\infty$,
  за която 1) $x_n \in D_f$; 2) $x_n \neq a$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, редицата $\{f(x_n)\}_1^\infty$ е сходяща.

- Всички такива редици имат една и съща граница.
- Дефиниция 1 (Хайне) – уточнение

Казваме, че f има граница l в a, ако за всяка редица $\{x_n\}_1^\infty$, за която 1) $x_n \in D_f$; 2) $x_n \neq a$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = l$.

- Означение: $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

1.1.3 Примери

- $\chi_{\mathbb{Q}}$ няма граница в никоя точка
- $[x]$ няма граница в целите числа, а в нецелите има граница
- $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$

1.1.4 Граница на функция — дефиниция 2 (Коши)

Нека a е точка на сгъстяване за D_f.

- Казваме, че f има граница L в a, ако за всяко $\varepsilon > 0$ има $\delta > 0$ такова, че за всяко $x \in D_f$ с $0 < |x - a| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- Еквивалентност на двете дефиниции

1.2 Свойства на границите

1. Аритметични действия
2. Локална ограниченост
3. Локална постоянност на знака
4. Граничен преход в неравенства
5. Граница на съставна функция
   - Нека $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to b} g(x) = L$. Тогава $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = L$, където $\varphi(x) = g(f(x))$
   - Пример: $\lim\limits_{x \to 0} e^{\sin x} = 1$

- Граница на съставна функция – точна формулировка

  Нека: 1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ (a е точка на сгъстяване на D_f)

  2.1) b е точка на сгъстяване на D_g

  2.2) $\lim\limits_{x \to b} g(x) = L$ и, когато $b \in D_g$, е изпълнено $L = g(b)$

  3) a е точка на сгъстяване на $\{x \in D_f \ : \ f(x) \in D_g\}$

  Тогава $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = L$, където $\varphi(x) = g(f(x))$

1.3 Граници в безкрайност. Безкрайни граници.

1.3.1 Точка на сгъстяване на множество

- Дефиниция 1 (Хайне): a (число, $+\infty$ или $-\infty$) се нарича точка на сгъстяване на множеството $A \subset \mathbb{R}$, ако съществува редица $\{x_n\}_1^\infty$, за която

  1) $x_n \in A$; 2) $x_n \neq a$; 3) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

- Дефиниция 2 (Коши): a (число, $+\infty$ или $-\infty$) се нарича точка на сгъстяване на множеството $A \subset \mathbb{R}$, ако за всяка околност $\mathcal{U}$ на a е изпълнено $(A \setminus \{a\}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$

- Двете дефиниции са еквивалентни

1.3.2 Граница на функция

Нека a (число, $+\infty$ или $-\infty$) е точка на сгъстяване за D_f.

- Дефиниция 1 (Хайне)

  Казваме, че f има граница l (число, $+\infty$ или $-\infty$) в a, ако за всяка редица $\{x_n\}_1^\infty$, за която 1) $x_n \in D_f$; 2) $x_n \neq a$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

- Дефиниция 2 (Коши)

  Казваме, че f има граница L (число, $+\infty$ или $-\infty$) в a (число, $+\infty$ или $-\infty$), ако за всяка околност $\mathcal{V}$ на L има околност $\mathcal{U}$ на a такава, че за всяко $x \in (D_f \setminus \{a\}) \cap \mathcal{U}$ е изпълнено $f(x) \in \mathcal{V}$.

1.3.3 Примери

- $\sin x$ няма граница в $+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

1.3.4 Свойства

- Еквивалентност на двете дефиниции
- Аритметични действия
- Постоянност на знака
- Ограниченост
- Граница на съставна функция

  Нека $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to b} g(x) = L$. Тогава $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = L$, където $\varphi(x) = g(f(x))$

1.4 Лява и дясна граница, основни граници.

1.4.1 Лява и дясна граница

Нека f е дефинирана в „пробита“ околност $(a-\delta_0,\, a+\delta_0) \setminus \{a\}$

- Дефиниция 1 (Хайне)

Казваме, че f има лява граница l (число, $+\infty$ или $-\infty$) в a, ако за всяка редица $\{x_n\}_1^\infty$, за която $a - \delta_0 < x_n < a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Казваме, че f има дясна граница l (число, $+\infty$ или $-\infty$) в a, ако за всяка редица $\{x_n\}_1^\infty$, за която $a - \delta_0 < x_n < a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

- Означение: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a, x<a} f(x)$; $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a, x>a} f(x)$

- Дефиниция 2 (Коши)

Казваме, че f има лява граница L (число, $+\infty$ или $-\infty$) в a, ако за всяка околност $\mathcal{V}$ на L има $0 < \delta < \delta_0$ такова, че за всяко $a - \delta < x < a$ е изпълнено $f(x) \in \mathcal{V}$.

Казваме, че f има дясна граница L (число, $+\infty$ или $-\infty$) в a, ако за всяка околност $\mathcal{V}$ на L има $0 < \delta < \delta_0$ такова, че за всяко $a < x < a + \delta$ е изпълнено $f(x) \in \mathcal{V}$.

- Пример: $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x} = \pi$

- f има граница в a тогава и само тогава, когато $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$

1.4.2 Граница на монотонна функция

- Нека f е дефинирана и монотонна в $(a,\ b)$ (a – число или $-\infty$, b – число или $+\infty$). Тогава съществуват границите
$$\lim_{x\to a+0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to b-0} f(x)$$
(крайни или безкрайни)

- Пример: f е намаляваща в $(a,\ b)$, ограничена отгоре и неограничена отдолу. Тогава
$$\lim_{x\to a+0} f(x) = l \quad \text{и} \quad \lim_{x\to b-0} f(x) = -\infty$$

1.4.3 Първа основна граница

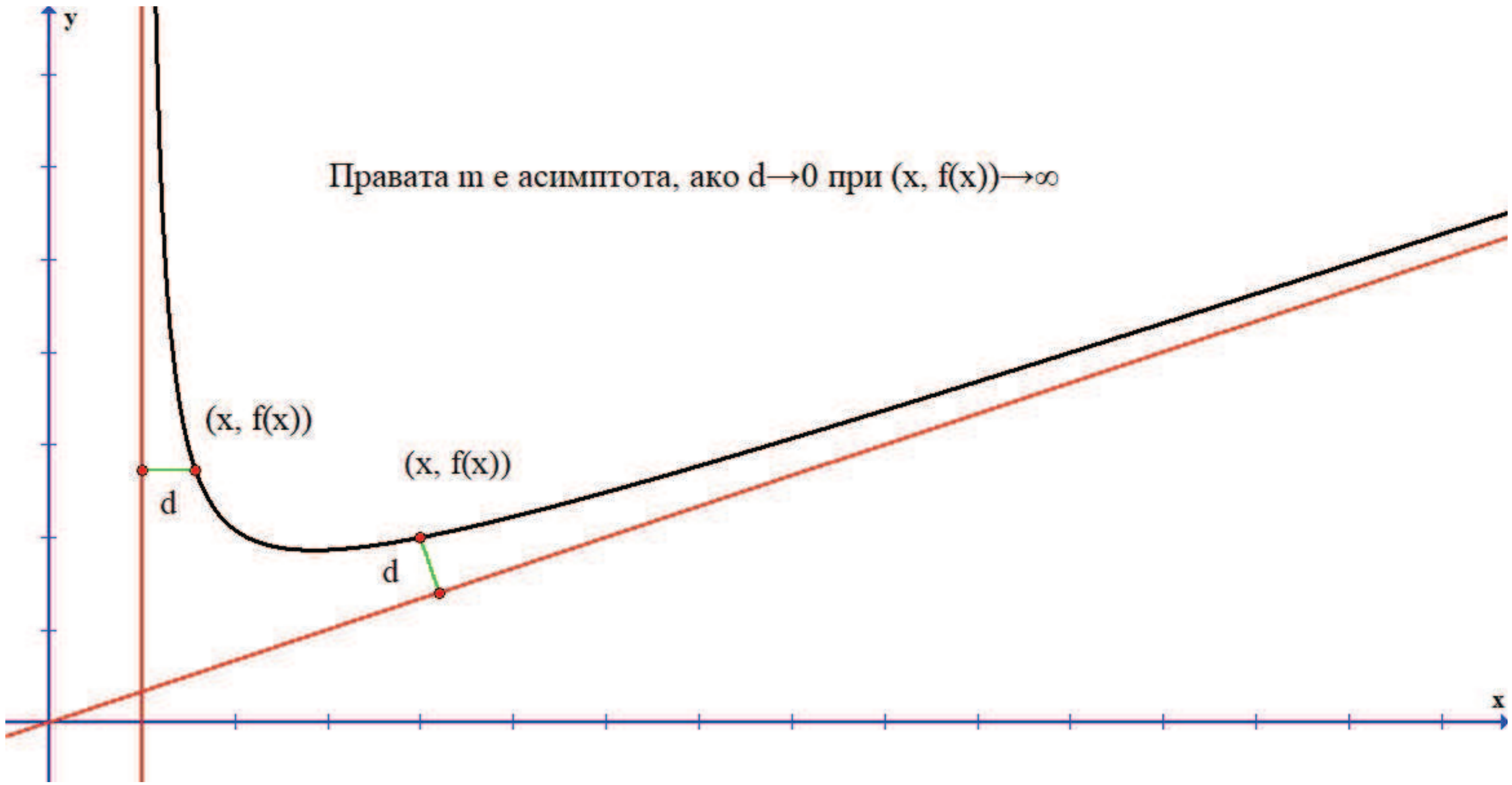
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

1.4.4 Втора основна граница

- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
- $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
- $$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Пример: $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \frac{1}{2}$$

1.5 Асимптоти

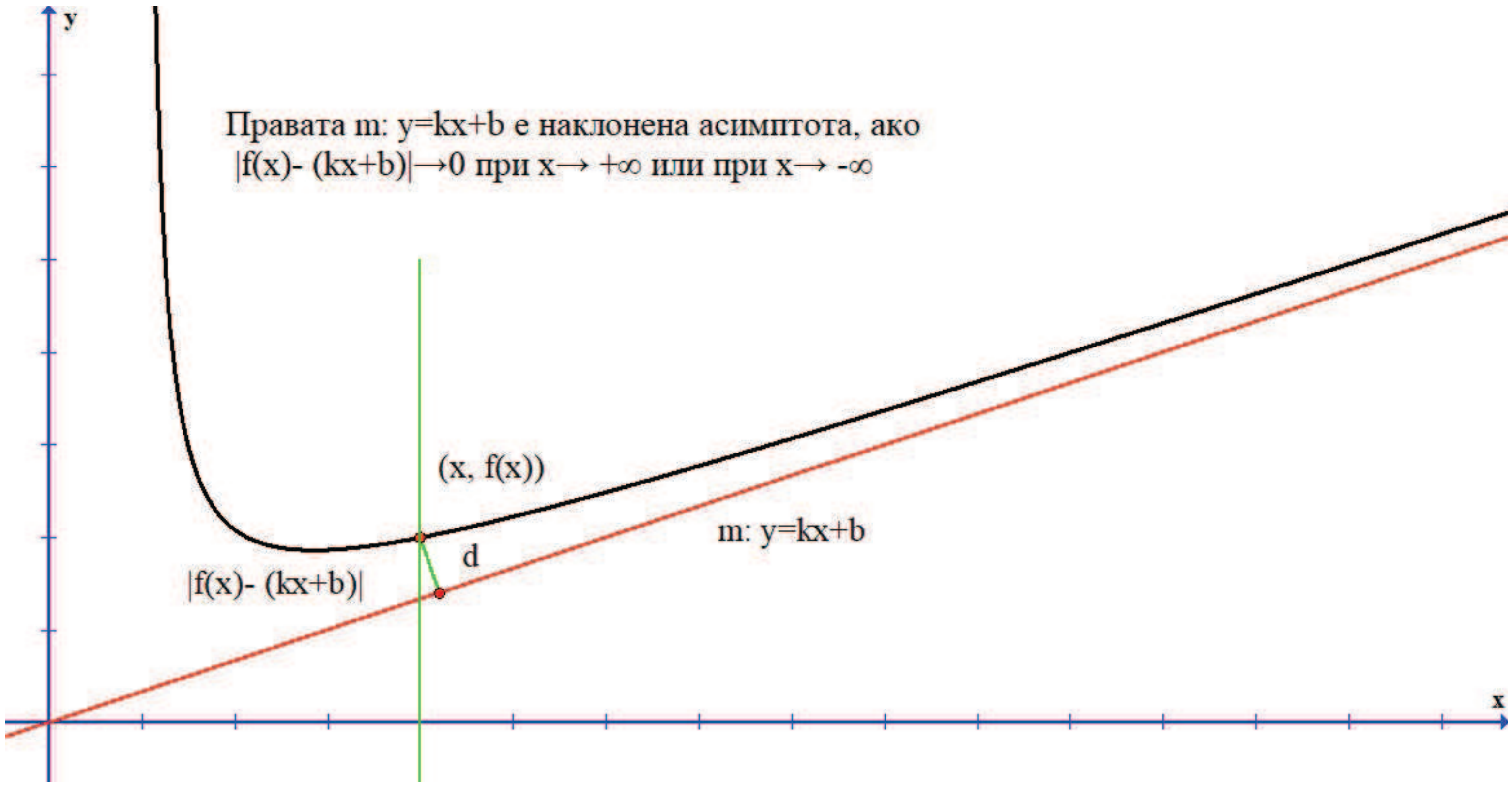


1.5.1 Вертикални асимптоти

Правата $x = x_0$ е вертикална асимптота, ако е изпълнено поне едно от следните

- $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty$

1.5.2 Наклонени асимптоти



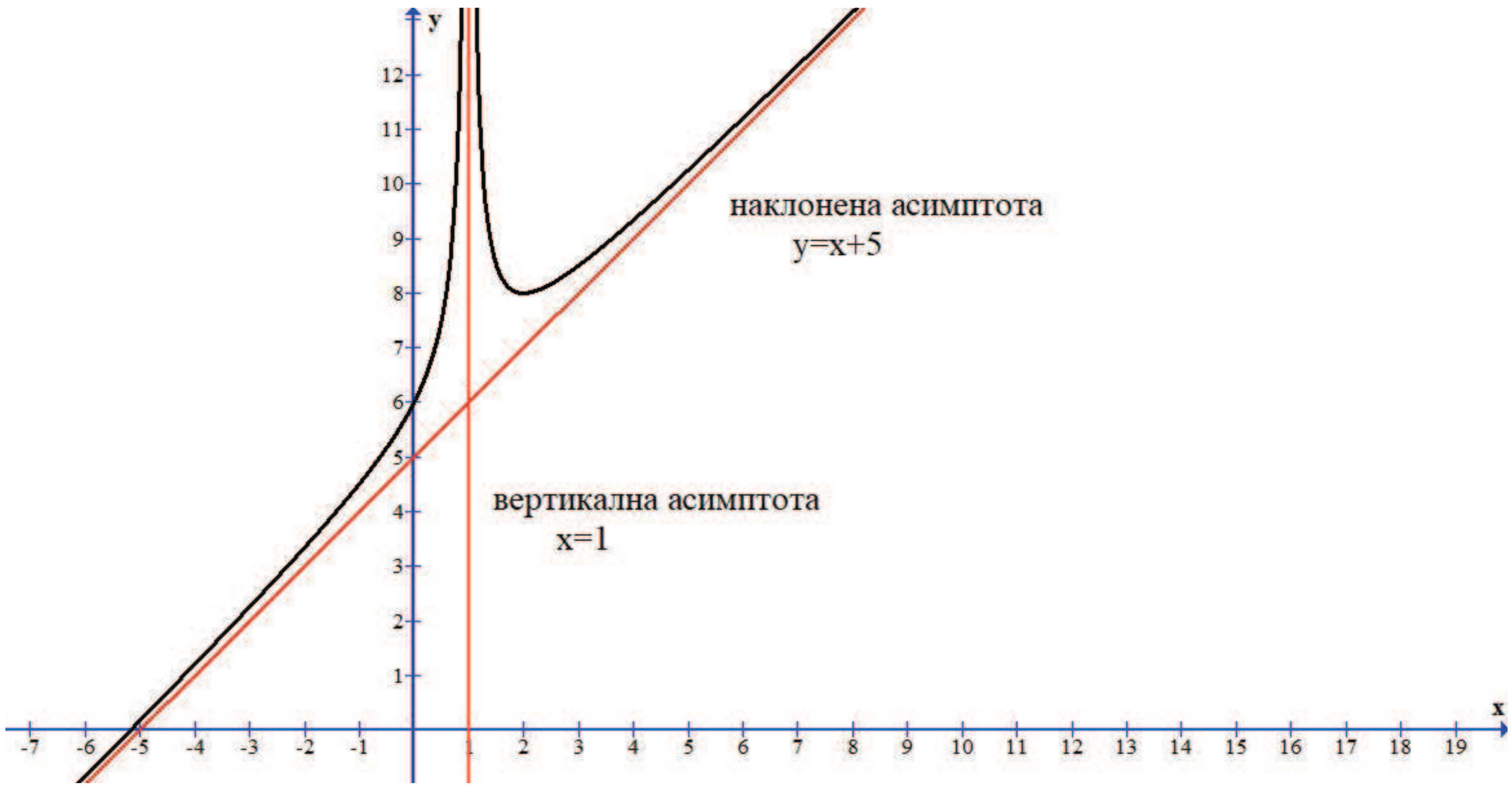
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$$

тогава и само тогава, когато

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$$

1.5.3 Пример

$$f(x)=x+5+\frac{1}{|x-1|}$$


y
x
наклонена асимптота
y=x+5
вертикална асимптота
x=1
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

1.5.4 Символът o малко

1.5.5 Дефиниция

Нека $f(x)$ е дефинирана в околност $(a-\delta\,,\ a+\delta)$ (евентуално без a) на точката a и $f(x)$ е безкрайно малка в точката a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Казваме, че $g(x) = o\,(f(x))$ (по-точно $g(x) \in o\,(f(x))$), ако $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.

1.5.6 Основно свойство

Ако $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = L \neq 0$, то $o\,(g(x)) = o\,(f(x))$.

1.5.7 Скали за сравняване

- Основна: $|x-a|^p\ ,\ p>0$
- $p>q \ \Rightarrow\ |x-a|^p = o\,(|x-a|^q)$
- Допълнителна: $|x-a|^p\,|\ln|x-a||^q\ ,\ p>0$

- В $+\infty$: $x^p\,,\ x^p\,(\ln x)^q\ ,\ p<0$
- $f(x)=o\,(1)\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=0$

1.5.8 Аритметични действия

- Събиране: $o\,((x-a)^p)+o\,((x-a)^q)=o\left((x-a)^{\min(p,\,q)}\right)$
- Умножаване с константа: $b\neq 0\ \Rightarrow\ o\,(b(x-a)^p)=o\,((x-a)^p)$
- Умножение: $o\,((x-a)^p)\,.o\,((x-a)^q)=o\left((x-a)^{p+q}\right)$

  $(x-a)^p.o\,((x-a)^q)=o\left((x-a)^{p+q}\right)$
- Деление: $p\leq q\ \Rightarrow\ \dfrac{o\,((x-a)^q)}{(x-a)^p}=o\left((x-a)^{q-p}\right)$

1.5.9 Примери

- $\sin x=x+o\,(x)\ ,\quad \cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$

- $e^x = 1 + x + o(x)$, $\quad \ln(1+x) = x + o(x)$
- $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$, $\quad \sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)$
- $\sqrt[k]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{k} + o(x)$, $\quad \sqrt[k]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{(k-1)\,x^2}{2k^2} + o\left(x^2\right)$
- $(\cos x)^{\sin x} = 1 - \dfrac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)$