# Стилияна Василева, ФН-61297, II – курс, СИ

# Домашна работа №1

Зад.1:

а) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Решение:

1) При $n = 1$ равенството е изпълнено.

Нека равенството е изпълнено за $n = k$, $S_k = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$.

2) Ще докажем твърдението за $n = k + 1$:

$S_{k+1} = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} => S_k + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ $=> (0 = 0) =>$ Твърдението е изпълнено.

б) $1^5 + 2^5 + \ldots + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$

Решение:

1) При $n = 1$ равенството е изпълнено.
2) Нека равенството е изпълнено за $n = k$,

$S_k = 1^5 + 2^5 + \ldots + k^5 = \frac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12}$.

Ще докажем твърдението за $n = k + 1$:

$S_{k+1} = 1^5 + 2^5 + \ldots + k^5 + (k+1)^5 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2(2(k+1)^2+2(k+1)-1)}{12} =>$

$S_k + (k+1)^5 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2(2(k+1)^2+2(k+1)-1)}{12} =>$ Твърдението е изпълнено.

в) $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Решение:

1) При $n = 1$ равенството е изпълнено.
2) Нека равенството е изпълнено за $n = k$,

$S_k = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$. Ще докажем твърдението за $n = k + 1$:

$S_{k+1} = 1.2.3 \ + \ 2.3.4 \ + \ 3.4.5 + \ldots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) \ =$

$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} => \ S_k \ + \ (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} =>$

Твърдението е изпълнено.

Зад.2:

а) $\frac{4^n}{n+1} < \ \frac{(2n)!}{(n!)^2} < \ 4^n \ , \ n \ \geq \ 2$

Решение: За $n \ = \ 2$ получаваме вярното неравенство $\frac{16}{3} \ < \ 6 \ < \ 16$. Нека за естественото $n$ е изпълнено $\frac{4^n}{n+1} < \ \frac{(2n)!}{(n!)^2} < \ 4^n$. За да докажем, че

$\frac{4^{n+1}}{n+2} < \ \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} < 4^{n+1}$ разделяме на две неравенствата $\frac{4^{n+1}}{n+2} < \ \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}$ и $\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} < 4^{n+1}$. Нека разгледаме първото от тях: $\frac{4^{n+1}}{n+2} - \ \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} =$
$\frac{4.4^n}{n+2} - \ \frac{(2n+2)(2n+1)\left((2n)!\right)}{(n!)^2(n+1)^2} = \ \frac{4(n+1)}{n+2} . \frac{4^n}{n+1} - \ \frac{2(2n+1)((2n)!)}{(n+1)(n!)^2}$, но $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ =>

$\frac{4(n+1)}{n+2} . \frac{4^n}{n+1} - \ \frac{2(2n+1)\left((2n)!\right)}{(n+1)(n!)^2} < \ \frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{4n+4}{n+2} - \frac{4n+2}{n+1}\right) = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(-\frac{2n}{(n+1)(n+2)}\right) < 0$ ,

<=> $\frac{4^{n+1}}{n+2} < \ \frac{\left(2(n+1)\right)!}{\left((n+1)!\right)^2}$. Сега да разгледаме $\frac{\left(2(n+1)\right)!}{\left((n+1)!\right)^2} - 4^{n+1} = \frac{2(2n+1)\left((2n)!\right)}{(n+1)(n!)^2} - 4.4^n \ <$

< $\frac{(4n+2).4^n}{n+1} - 4.4^n = 4^n\left(\frac{4n+2-4n-4}{n+1}\right) < 0$ <=> $\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} < 4^{n+1}$. Следователно за всяко $n \ \geq \ 2$ е изпълнено, че $\frac{4^n}{n+1} < \ \frac{(2n)!}{(n!)^2} < \ 4^n$.

б) $\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6.....2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ , $n \geq 2$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \ \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Решение: За $n \ = \ 2$ имаме $\frac{1.3}{2.4} < \frac{1}{\sqrt{7}}$ => $(\frac{3}{8})^2 \ < (\frac{1}{\sqrt{7}})^2$ => $9.7 \ < \ 64$.

Нека неравенството е изпълнено за $n$ ще го докажем за $n+1$. Да разгледаме $\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} - \frac{1}{\sqrt{3n+4}} = \frac{(2n+1)(2n-1)!!}{(2n+2)(2n)!!} - \frac{1}{\sqrt{3n+4}} < \ \frac{2n+1}{2n+2} . \frac{1}{\sqrt{3n+1}} - \frac{1}{\sqrt{3n+4}} =$
$\frac{(2n+1)\left(\sqrt{3n+4}\right)-(2n+2)\left(\sqrt{3n+1}\right)}{(2n+2)\sqrt{(3n+1)(3n+4)}}$. Да разгледаме знака на

$(2n+1)\left(\sqrt{3n+4}\right) - (2n+2)(\sqrt{3n+1})$ за всяко $n \ \in \boldsymbol{N}$;

твърдим, че $(2n+1)\left(\sqrt{3n+4}\right) < 2(n+1)\left(\sqrt{3n+1}\right) \uparrow 2 =>$

$(2n+1)^2(3n+4) < 4(n+1)^2(3n+1) =>$

$$(4n^2 + 4n + 1)(3n+4) < (4n^2 + 8n + 4)(3n+1) \Rightarrow 19n < 18n \Rightarrow n < 0$$

Следователно $(2n+1)\left(\sqrt{3n+4}\right) - 2(n+1)\left(\sqrt{3n+1}\right) < 0$, с което твърдението е доказано.