Далин Далчев Фн: 0МI0600041.
Софтуерно инженерство, I курс, I група

Изпит част 3

(6) Функцията $f(x)$ се нарича диференцируема в точката a, ако е дефинирана в околност на $\underline{a}$ и съществува $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ □

(8) Th. на Лагранж за крайните нараствания
Нека f (функцията) е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцуеруема в (a, b) =>
=> $\exists$ точка $\varepsilon \in (a, b)$ -> отворена интервал
$f(b) - f(a) = f'(\varepsilon)(b-a)$

__Док-во.__ Разглеждаме функцията $g(x) = f(x) - kx$
$\underline{k}$ е такава, че $g(a) = f(a) - ka = f(b) - kb = g(b)$
т.е. $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $g(x)$ удовлетворява условията на Th. на Рол => $\exists \, \varepsilon \in (a, b)$, такава, че
$g'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - k = 0$. => $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\varepsilon)$ □

(7) Нека $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има h' в $\underline{a} \in \mathbb{R}$, $h(a)=0$

Док., че $H(x)=|h(x)|$ има H' в $\underline{a} \Leftrightarrow h'(a)=0$

<u>Дело</u> $H(x)$ има производна $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{H(x)-H(a)}{x-a}$

$$\underbrace{l_1=\lim_{x\to a^-}\frac{H(x)-H(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{H(x)-H(a)}{x-a}=l_2}_{\text{лявата и дясната съвпадат.}}$$

$$l_1=\lim_{x\to a^-}\frac{|h(x)|-\underbrace{|h(a)|}_{=0}}{x-a}=\cancel{\lim H(x)-H(a)}\ \lim_{x\to a^-}\frac{|h(x)|}{x-a}\le 0,\ x<a$$

$$l_2=\lim_{x\to a^+}\frac{|h(x)|-\overbrace{|h(a)|}^{=0}}{x-a}=\lim\frac{|h(x)|}{x-a}\ge 0,\ x>0$$

$$l_1=l_2=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{|h(x)|-|h(a)|}{x-a}=0 \Rightarrow h'(a)=0$$

=2=