1..Редицата $\{a_n\}_1^\infty$ се нарича сходяща ако съществува число l такова,че за всяко ε >0 и n>l имаме неравенството | a_n -a|< ε ,където $\{a_n\}_1^\infty$ клони към a.

2.Числото a се нарича граница на редицата $\{a_n\}_1^\infty$, ако за всяко произволно малко положително число ε >0 ,може да се намери такова число N(ε),че всички членове на a_n на редицата с номера n> N(ε) да попаднат в интервала (a- ε ; a+ ε) тоест да е изпълнено

| a_n -a|< ε за всички n> N(ε).

3.Редицата $\{a_n\}_1^\infty$ се нарича сходяща,ако съществува число l такова,че за всяко ε >0 и n>l имаме неравенството | a_n - a |< ε ,където $\{a_n\}_1^\infty$ клони към a .

4.Казваме,че редицата $\{a_n\}_1^\infty$ клони към $+\infty$ ($-\infty$) ,ако за всяко число C > 0 (C < 0),съществува такова l,че при l > n е изпълнено неравенството a_n > C (a_n < C).

5.Казваме ,че числото a е точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_1^\infty$, ако във всяка околност на a се съдържат безброй много членове на редицата.

6.Казваме,че функцията $f(x): R \to R$ клони към + ∞ (- ∞) когато x клони към + ∞ (- ∞),ако Коши:

... за всяко А>0(<0) съществува Б>0(<0) такива,че от x>Б(<Б) следва ,че f(x)>A (<A).

Хайне:

... за всяка редица (x_n) , такава ,че $\lim\limits_{x \to +-\infty} x_n = +-\infty$ следва,че $\lim\limits_{x \to +-\infty} f(x_n) = +-\infty$

7. Хайне:

Казваме,че фунцията f:D $\to$R клони към числото A(има гр. A) при $x \to x_0$,ако за всяка редица $\{x_n\} \to x_0$, $x_n \in D, x_n \neq x_0$ имаме $f(x_n) \to A$.

Коши:

Казваме,че числото A е граница на функцията f:D $\to$R при $x \to x_0$, ако за всяко ε > 0 съществува такова δ > 0 ,че щом 0 < | $x - x_0$ |< δ и $x \in D$ имаме |f(x) – A| < ε .

8. Хайне:

Казваме,че функцията f:D $\to$R клони към числото A при $x \to +\infty (x \to -\infty)$,ако за всяка редица от точки на D$\{x_n\} \to +\infty$ ($\{x_n\} \to -\infty$) имаме $\{f(x_n)\} \to A$.

Коши:

Казваме,че числото A е граница на функцията f:D $\to$R при $x \to +\infty (x \to -\infty)$,ако за всяко ε > 0 може да се намери такова число B,че щом $x \in D$ и x > B (x < B) да имаме |f(x) – A|< ε .

9.Казваме, че функцията f(x) : R->R клони към $+\infty$, когато x клони към $+\infty$, ако:

Хайне:

Числото x се нарича граница на функцията f при x->$+\infty$ ако за всяка безкрайно голяма редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$ всички членове, на която са положителни,съответната редица от стойности на функцията {f(x_n)} клони към числото b

Коши:

Числото x се нарича граница на функцията f при x->$+\infty$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число ∂,че за всички стойности на аргумента x,удовлетворяващи условието x>∂ да е изпълнено неравенството

10. Вайерщрас:

Ако $f(x)$ е непрекъсната и дефинирана над интервала $[a,b]$то нейните точни горна и долна граници в интервала $[a,b]$ съществуват и освен това се достигат в интервала.

11.Функцията f(x) се нарича диференцируема в точката a, ако е дефинирана в околност на точката a и ако съществува граница на диференчното частно при x->a.

По определение: f`(a)= $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

12.Лагранж:

Формулирайте и докажете теоремата на Лагранж : Нека функцията f непрекъсната в затворения интервал [a,b] и диференцируема в отворения интервал (a,b). Тогава съществува ε принадлежащо на (a,b), такова че f(b) – f(a) = f ’ (ε).(b - a)

Доказателство:

Да отбележим, че при f (a) = f (b) получаваме теоремата на Рол, която е

частен случай на теоремата на Лагранж.

Разглеждаме функцията g (x) = f (x) – k.x, където k = $\frac{(f\ (b)\ -f\ (a))}{(b\ -a)}$, в такъв случай g (a) = g (b); действително

g (a) = g (b)⇔f (a) – k.a = f (b) – k.b⇔f (b) – f (a) = k (b – a), което очевидно е изпълнено;

освен това g (x) е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал

[a, b] и g (x) е диференцируема в отворения интервал (a, b); налице са

условията в теоремата на Рол от където следва,че съществува $\varepsilon \in$ (a, b), такова че

g’(ε) = 0 -> f’(ε) – k = 0 -> f (b) – f (a) = f’(ε).(b – a).

13.Рол:

Нека функцията f(x) е непрекъсната в затворения интервал [a,b].Диференцируема е

В отворения интервал (a,b).В краищата на интервала [a,b] функцията y=f(x) получава еднакви стойности: f(a)=f(b) . Тогава съществува точка ε ,вътрешна за интервала [a,b] : $\varepsilon \in$ (a,b), за която f(ε)=0.

Доказателство:

Нека функцията y=f(x) не е константна функция в интервала [a,b]. Тогава от теоремата за непрекъснати функции в затворен интервал следва,че съществува такава стойност $\varepsilon \in$ (a,b) за която функцията y=f(x) получава максималната си стойност.За ε можем да приложим теоремата на Ферма от която следва,че f`(ε)=0.

14.Формулирайте и докажете правилото за смяна на променливите за неопределени интеграли:

<u>Правило:</u>

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в отворения интервал Δ_x, а $\varphi(t)$ е непрекъснато диференцируема в отворения интервал Δ_t, при

което $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$. Тогава, ако $\int f(x)dx = F(x) + C$
,то $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$.

Доказателство:

Да положим $\Phi(t) = F(\varphi(t))$. Съгласно верижното правило за диференциране на съставни функции имаме $\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, понеже по определение $F'(x) = f(x)$. Това показва, че $\Phi(t)$ е една примитивна за функцията $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, откъдето следва верността на формулата $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$.

15.Формулирайте и докажете правилото за интегриране по части за неопределени интеграли.

Правило:

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат непрекъснати производни в отворения интервал Δ.
Тогава $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$, $x \in \Delta$.

Доказателство:

Съгласно формулата за диференциране на произведени $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x)$,

следователно
$\int f(x)g'(x)dx = \int [f(x)g(x)]' dx - \int f'(x)g(x)dx$,
$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$,
понеже
$\int [f(x)g(x)]' dx = f(x)g(x) + C$.

16.Ферма
Ако функцията f има локален екстремум в точката x_0 и е диференцируема в x_0,то f `(x_0)=0

17.Докажете,че двете дефиниции(условия хайне коши) са еквивалентни.

1)Ще покажем,че от определението на Хайне следва определението на Коши.
Допускаме противното,т.е. че за някоя функция $f:D\to R$ числото А е граница при $x\to x_0$ смисъл на Хайне,но условието в определението на Коши не е изпълнено тогава съществува такова число $\varepsilon_0>0$,че за всяко число $\delta>0$ съществува точка $x\in D$, удовлетворяваща 0<$|x-x_0|<\delta$ и |f(x)-A|>= 30. Даваме на δ последователно стойности 1/n,n=1,2... и получаваме съответно точки $x_n\in D$ такива,че 0<$|x_n-x_0|$<1/n и $|f(x_n)$-A|>=ε_0. Разглеждаме редицата $\{x_n\}$.Очевидно $\{x_n\}$ клони към x0,понеже $|x_n-x_0|$<1/n за всяко n.От друга страна редицата $\{f(x_n)\}$ не клони към А понеже $|f(x_n)$-A|>=ε_0 за всяко n.
Това противоречи на предположението,че $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ по определението на Хайне.Полученето противоречие показва,че ако фунцията f има граница А ,съгласно определението на Хайне,то тя има същата граница и според определението на Коши.

2)Обратно,нека предположим,че$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ по определението на Коши.Взимаме произволна редица $\{x_n\}\to x_0$, $x\neq x_0$, $x_n\in D$. Фиксираме число ε>0 и избираме δ>0 такаче щом $x_n\in D$ и 0<$|x-x_0||<\delta$ да имаме |f(x)-A|<=ε .Тъй като $\{x_n\}\to x_0$, то съществува такова число v,че при n>v е изпълнено |
$x_n-x_0|<\delta$, а следователно и $|f(x_n)$-A|<ε .С това проверихме,че { $f(x_n)$ }->A показва,че от определението на Коши следва определението на Хайне.

18.Кантор

Ако фунцията f е непрекъсната в крайния затворен интервал [a.b],то тя е равномерно непрекъсната в него.

19.Лема за двамата полицай

Нека f(x)<=g(x)<=h(x) за всяко x от общата дефинизионна област D на функциите f,g и h.Ako $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = C$,то границата $\lim_{x \to x_0} g(x)$ съществува и равна на C.