ДИС

Въпроси от изпити

Довършете дефиницията: Числото a се нарича граница на редицата $\{a_n\}_1^\infty$, ако за всяко число $\varepsilon > 0$ съществува $N \in \mathbb{N}$, такова че за всяко $n \in \mathbb{N}, n > N$ е изпълнено $|a_n - a| < \varepsilon$

Довършете дефиницията: Числото l се нарича точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_1^\infty$, ако в околност на l има безкрайно много членове на редицата.

Довършете дефиницията: Казваме, че редицата $\{a_n\}_1^\infty$ клони към $+\infty$ ако за всяко C съществува $N \in \mathbb{N}$, такова че за всяко $n \in \mathbb{N}, n > N$ е изпълнено $a_n > C$.

Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Докажете, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ съществува N_ε, такова че за всяко $n > N_\varepsilon$ е изпълнено $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \Leftrightarrow \forall C$ съществува N_C, такова че за всяко $n > N_C$ е изпълнено $b_n < C \Leftrightarrow$

При $\varepsilon < -a \Leftrightarrow a_n < 0$ и $n > \max(N_\varepsilon, N_C)$ получаваме $a_n b_n > C a_n$

$a_n > a - \varepsilon \Rightarrow a_n b_n > C(a - \varepsilon)$. Нека $D = C(a-\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon = a - \dfrac{D}{C}$

$\Rightarrow$ За произволно D можем да изберем ε, C такива че $\varepsilon < -a$. Тогава ако $n > \max(N_\varepsilon, N_C) \Rightarrow a_n b_n > D$

$\Rightarrow$ За произволно D съществува $N = \max(N_\varepsilon, N_C)$, такова че $a_n b_n > D \Rightarrow \{a_n b_n\}_1^\infty \to +\infty$

Докажете, че числото 0 НЕ Е граница на редицата

$$\left\{\left(\left(\frac{n+2}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right)^n\right\}_{n=1}^\infty$$

Намерете всички точки на сгъстяване на тази редица

$$\left(\frac{n+2}{n}\right)^n \to e^2, \quad \left(\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right)^n = \begin{cases} -1 & n = 8k+7 \\ 0 & n = 8k+1; 8k+5 \\ 1 & n = 8k+3 \\ \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n & n = 8k; 8k+2; 8k+4; 8k+6 \end{cases}$$

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \to 0 \Rightarrow$ Очевидно редицата има точки на сгъстяване $\pm e^2, 0 \Rightarrow$ няма граница

Формулирайте и докажете теоремата за граница на произведение на две сходящи редици.

Нека $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow$ За $\varepsilon_1 > 0$ съществува $N : \forall n > N$ е изпълнено

$|a_n - a| \leq \varepsilon_1, |b_n - b| \leq \varepsilon_1$. Да разгледаме $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n + a_n b - a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)|$

Тогава $|a_n b_n - ab| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \leq |a_n|\varepsilon_1 + |b|\varepsilon_1$

$\{a_n\}_1^n$ има граница, следователно е сходяща и ограничена $\Rightarrow \exists A : |a_n| < |A|$

$\Rightarrow |a_n b_n - ab| \leq (|A| + |b|)\,\varepsilon_1$. Нека $\varepsilon = (|A| + |b|)\,\varepsilon_1$. Тогава за всяка положителна стойност на ε съществува ε_1 и съответния индекс N, за който е изпълнено $|a_n b_n - ab| \leq \varepsilon \Rightarrow$ доказано

Формулирайте и докажете теоремата за граница на частно на две сходящи редици.
Аналогично с добавяне и изваждане на $\frac{a_n}{b}$

Формулирайте теоремата на Вайерщрас за непрекъсната функция.
Нека f е непрекъсната във всяка точка на крайния и затворен интервал $[a; b]$. Тогава f е ограничена и съществуват $x_{min}, x_{max} \in [a; b]$, такива че за всяко $x \in [a; b]$ е изпълнено $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$.

Довършете дефиницията: Казваме, че функцията $f(x)$ клони към $+\infty$ когато x клони към $+\infty$, ако:
(Коши) За всяко $A \in \mathbb{R}$ съществува $B \in \mathbb{R}$, такова че за всяко $x > B$ е изпълнено $f(x) > A$
(Хайне) За всяка редица $\{x_n\}_1^\infty \to +\infty$ е изпълнено $\{f(x_n)\}_1^\infty \to +\infty$

Докажете, че двете са еквивалентни
Коши → Хайне
Нека $f(x) \to \infty$ при $x \to +\infty$ и $\{x_n\}_1^\infty \to +\infty$. От условието на Коши следва, че за всяко $A \in \mathbb{R}$ съществува $B \in \mathbb{R}$, такова че за всяко $x > B$ е изпълнено $f(x) > A$. Понеже $\{x_n\}_1^\infty \to +\infty \Rightarrow \exists N : \forall n > N \quad x_n > B$. Да разгледаме редицата $\{f(x_n)\}_1^\infty$. При $n > N$ ще имаме $x_n > B \Rightarrow$ от условието на Коши $\Rightarrow f(x_n) > A \Rightarrow$ доказахме, че за произволна редица $\{x_n\}_1^\infty \to +\infty$ редицата от функционални стойности $\{f(x_n)\}_1^\infty$ също клони към безкрайност, т.е. условието на Хайне.

Хайне → Коши
Нека $f(x) \to \infty$ при $x \to +\infty$, т.е. за всяка редица $\{x_n\}_1^\infty \to +\infty$ е вярно $\{f(x_n)\}_1^\infty \to +\infty \Rightarrow$ за всяко $A \exists N_f : \forall n_1 > N_f \quad f(x_{n_1}) > A$. Нека $B = x_{n_1}$. Тогава $\{x_n\}_1^\infty \to +\infty \Rightarrow \exists N_x : \forall n_2 > N_x \quad x_{n_2} > B \Rightarrow$ за всяко A съществува B такова че $x > B \Rightarrow f(x) > A$, т.е. условието на Коши.
ИЛИ (по-кратко и май по-вярно)
Да допуснем, че условието на Коши не е изпълнено, т.е. съществува $A : \forall B (x > B \Rightarrow f(x) < A)$. Тогава за всяка редица $\{x_n\}_1^\infty \to \infty$ съществува $N_0 (n > N_0 \Rightarrow x_n > B)$. Но тогава в редицата $\{f(x_n)\}_1^\infty$ ще е вярно $n > N_0 \Rightarrow f(x_n) < A \Rightarrow$ редицата $\{f(x_n)\}_1^\infty$ не клони към $\infty \Rightarrow$ противоречие с условието.

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_1$ и $\lim_{x\to+\infty} = L_2$, като $L_1 < L_2$. Докажете, че

а) $f(x)$ е ограничена в $\mathbb{R}$
От теоремата на Вайерщрас за непрекъсната функция $\Rightarrow$ функцията е ограничена във всеки краен и затворен интервал. Понеже границите в $\pm\infty$ са числа $\Rightarrow$ функцията е ограничена в $\mathbb{R}$

б) За всяко $L_1 < u < L_2$ съществува $x \in \mathbb{R}$, за което $f(x) = u$
Нека $\varepsilon : L_1 + \varepsilon < u < L_2 - \varepsilon \Rightarrow \exists A_1, A_2$ такива че
1) при $x \leq A_1 \quad L_1 - \varepsilon \leq f(x) \leq L_1 + \varepsilon$
2) при $x \geq A_2 \quad L_2 - \varepsilon \leq f(x) \leq L_2 + \varepsilon$
$\Rightarrow f(A_1) \leq L_1 + \varepsilon < u, \quad f(A_2) \geq L_2 - \varepsilon > u \Rightarrow f(A_1) < u < f(A_2)$
$\Rightarrow \exists x \in [A_1; A_2] : f(x) = u$ по теоремата за междинните стойности

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[0, +\infty]$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ и $f(0) > L$. Докажете, че

а) $f(x)$ е ограничена в $[0, +\infty]$
От теоремата на Вайерщрас следва, че функцията е ограничена във всеки краен и затворен интервал $[0; a], a > 0$. Понеже границата в $+\infty$ е число, функцията е ограничена в $[0, +\infty]$.
б) $f(x)$ има най-голяма стойност в $[0, +\infty]$
Пак от Вайерщрас + граница.

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $\mathbb{R}$ и $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Докажете, че $f(x)$ има най-малка стойност в $\mathbb{R}$.
Вайерщрас + граница.

Довършете дефиницията: Функцията $f(x)$ се нарича диференцируема в точката a, ако е дефинирана в *околност на a* и *съществува*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Намерете всички точки, в които функцията $g(x) = \sqrt[3]{x}|\sin x|$ НЯМА производна.

Очевидно функцията е дефинирана навсякъде. Възможни точки, където няма производна, са $0, k\pi$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}\sin x}{x} = 0.1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt[3]{x}\sin x}{x} = -0.1 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow \text{ има производна в } 0$$

$$\lim_{x\to k\pi^+} \frac{f(x) - f(k\pi)}{x - k\pi} = \lim_{x\to k\pi^+} \frac{\sqrt[3]{x}|\sin(x)|}{x - k\pi} = \lim_{x\to k\pi^+} \frac{\sqrt[3]{x}|\sin(x - k\pi)|}{x - k\pi} = \pm\sqrt[3]{k\pi}$$

$$\lim_{x\to k\pi^-} \frac{f(x) - f(k\pi)}{x - k\pi} = \lim_{x\to k\pi^-} \frac{\sqrt[3]{x}|\sin(x)|}{x - k\pi} = \lim_{x\to k\pi^-} \frac{\sqrt[3]{x}|\sin(x - k\pi)|}{x - k\pi} = \mp\sqrt[3]{k\pi}$$

Знаците на $\sin(x - k\pi)$ се различават защото при дясната граница $x > k\pi \Rightarrow x - k\pi > 0$, а при лявата $x < k\pi \Rightarrow x - k\pi < 0$. Щом лявата и дясната граница не съвпадат при $k\pi$, там няма производна.

Намерете всички точки, в които функцията $g(x) = |\sin x^2|$ НЯМА производна.

Намерете всички точки, в които функцията $g(x) = \sqrt[4]{|x|}|\sin x|$ НЯМА производна.

Намерете всички точки, в които функцията $g(x) = |\sin x^3|$ НЯМА производна.

Аналогично.

Докажете, че функцията

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{x} & x > 0 \\ \dfrac{\ln(1 + \sin x^2) - 3x + 8}{32} & x \le 0 \end{cases}$$ има производна в точката $a = 0$ и пресметнете $f'(0)$

Докажете, че $f'(x)$ е непрекъсната в $(-1, +\infty)$

Формулирайте теоремата на Лагранж (за крайните нараствания).
Нека f е дефинирана в $[a, b]$ и f има производна в (a, b). Тогава има точка $c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Формулирайте теоремата на Рол.
Нека f е дефинирана в $[a, b]$, f има производна в (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогава има точка $a < c < b : f'(c) = 0$.

Нека функцията $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има производна във всяка точка. Докажете, че функцията е намаляваща в $\mathbb{R}$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \le 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$

Излиза от $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Формулирайте теоремата на Лайбниц-Нютон.

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и $x \in [a, b]$. Нека $F(x) = \displaystyle\int\limits_a^x f(t)dt$. Тогава $F(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$

и $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in (a, b)$.

Формулирайте и докажете теоремата за смяна на променливите при определените интеграли.

Нека $f(x)$ е непрекъсната в Δ, $\varphi(t)$ има непрекъсната производна в $[\alpha, \beta]$, като е изпълнено $\alpha \leq t \leq \beta \Rightarrow \varphi(t) \in \Delta$. Нека положим $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$ и $[a, b] \subseteq \Delta$. Тогава е изпълнено

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказателство: Нека $F(x)$ е произволна примитивна на $f(x)$ в Δ и нека $G(t) = F(\varphi(t))$. Тогава

$$G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(b) - F(a)$$

Формулирайте и докажете теоремата интегриране по части при определените интеграли.
Нека f, g имат непрекъсната производна в $[a, b]$. Тогава е изпълнено:

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b g(x)f'(x)dx$$

Доказателство: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \Leftrightarrow f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)$

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b g(x)f'(x)dx$$