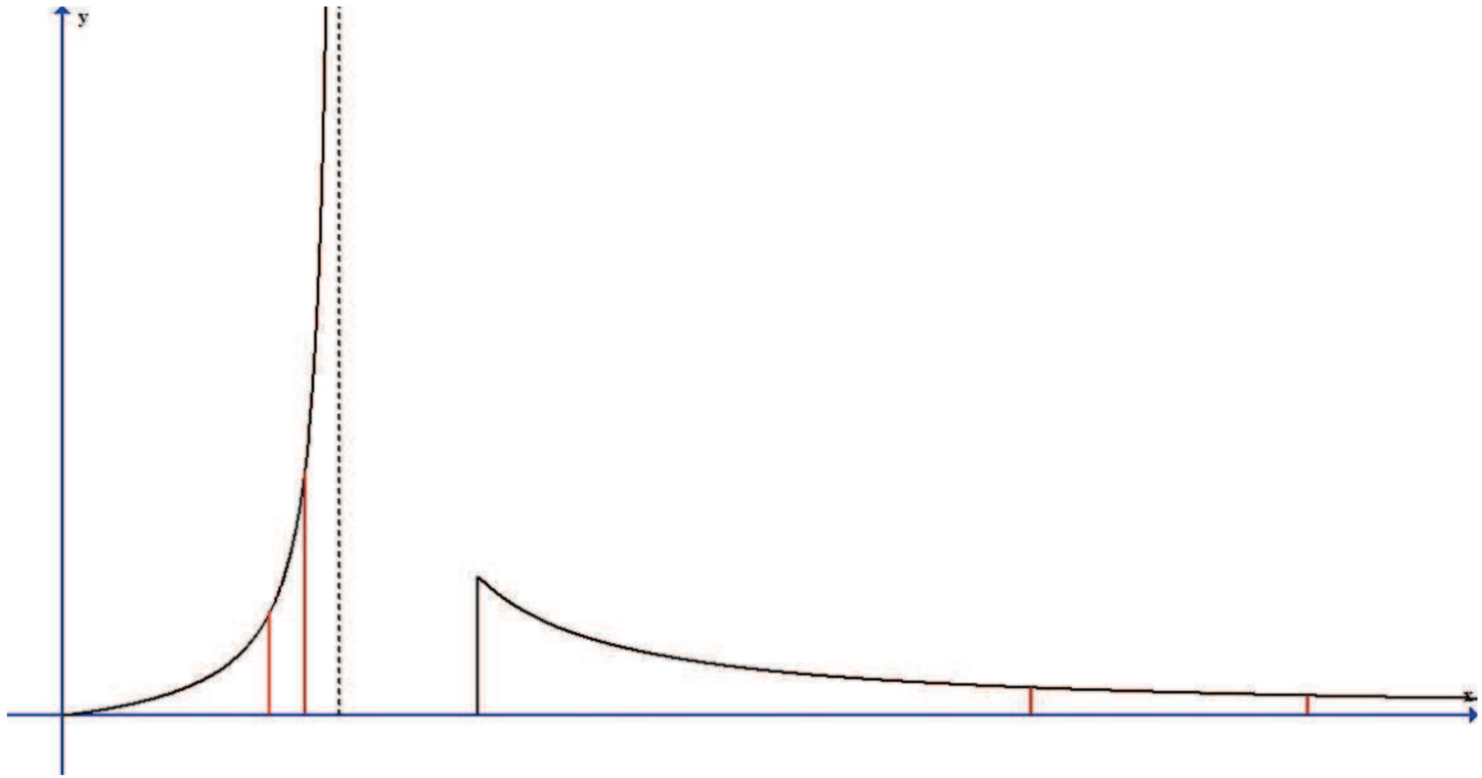
1 Несобствени интеграли - основни понятия

1.1 Дефиниция на сходящ интеграл

Лице на неограничена фигура



Дефиниция

- Нека $f(x)$ е интегруема в $[a, u]$ за всяко $a < u < b$ (b е число или $+\infty$)

1. $\int\limits_a^b f(x)dx$ се нарича **несобствен интеграл** (с особеност b)

2. Несобственият интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ (с особеност b) се нарича **сходящ**, ако съществува **крайната** граница $\lim\limits_{u\to b,\, u<b} \int\limits_a^u f(x)dx$

3. в противен случай, несобственият интеграл се нарича **разходящ**

- Нека $f(x)$ е интегруема в $[u, b]$ за всяко $a < u < b$ (a е число или $-\infty$)

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ се нарича **несобствен интеграл** (с особеност a)

2. Несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (с особеност a) се нарича **сходящ**, ако съществува **крайната** граница $\displaystyle\lim_{u\to a,\, u>a} \int_u^b f(x)dx$

3. в противен случай, несобственият интеграл се нарича **разходящ**

Примери

1. Всеки определен интеграл може да се разглежда като сходящ несобствен интеграл.

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin x\, dx$ е разходящ.

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ е разходящ.

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ е сходящ тогава и само тогава, когато $p > 1$.

5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x}$ е разходящ.

6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^p}$ е сходящ тогава и само тогава, когато $p < 1$.

7. $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^p}$ е сходящ тогава и само тогава, когато $p < 1$.

1.2 Свойства

1. **Линейност**

Нека $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ са сходящи. Тогава $\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx$ е сходящ и

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx + \mu \int\limits_a^b g(x)dx$$

2. **Позитивност**

Нека $\int\limits_a^b f(x)dx$ е сходящ и $f(x) \geq 0$ за всяко $x \in [a,\, b)$. Тогава

$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$ и

3. $F(u) = \int\limits_a^u f(x)dx$ е растяща.

4. **Адитивност**

$\int\limits_a^b f(x)dx$ (с особеност в b) е сходящ тогава и само тогава, когато за всяко $c \in [a, b)$ интегралът $\int\limits_c^b f(x)dx$ е сходящ

Дефиниция: $\int\limits_a^b f(x)dx$ (с особености в a и b) е сходящ, ако за някое $c \in (a, b)$ (еквивалентно за всяко $c \in (a, b)$) $\int\limits_a^c f(x)dx$ е сходящ **И** $\int\limits_c^b f(x)dx$ е сходящ

Примери

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = 2$$

2. $$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ е разходящ за всяко } p \in \mathbb{R}\,.$$

3. $$\lim_{u\to+\infty} \int_{-u}^{u} \frac{xdx}{x^2+1} = 0 \text{ , но } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+1} \text{ е разходящ.}$$

2 Пресмятане на несобствени интеграли

2.1 Формула на Лайбниц и Нютон

Нека f е непрекъсната в $(a,\, b)$, а G е примитивна на f в $(a,\, b)$, за която съществуват границите $\lim\limits_{x \to a+0} G(x) = G(a+0)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} G(x) = G(b-0)$.

Тогава: $$\int\limits_a^b f(x)dx \;=\; G(b-0) - G(a+0).$$

Примери

1. $$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}} \;=\; \arcsin\,(2x-1)\Big|_0^1 \;=\; \pi$$

2. $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x\,\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} \;=\; \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

2.2 Смяна на променливите

Нека f е непрекъсната в $(a,\, b)$, а φ има непрекъсната производна в $(\alpha,\, \beta)$ (или $(\beta,\, \alpha)$), като

1. $\varphi\left(\alpha + u\left(\beta - \alpha\right)\right) \in (a,\, b)$ за всяко $u \in (0,\, 1)$
2. $\varphi'\left(\alpha + u\left(\beta - \alpha\right)\right) \neq 0$ за всяко $u \in (0,\, 1)$
3. $\lim\limits_{t \to \alpha} \varphi(t) = a$ и $\lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t) = b$.

Тогава $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx$ е сходящ $\quad\Leftrightarrow\quad \displaystyle\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ е сходящ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx \;=\; \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \;.$$

Примери

1. $$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

2. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

3. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx = 0$$

4. $$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^n}dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x\, dx = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

2.3 Интегриране по части

Нека всяка от функциите f и g има непрекъсната производна в (a, b). Ако са изпълнени три от следните четири твърдения

1. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$ е сходящ

2. $\displaystyle\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx$ е сходящ

3. съществува крайната граница $A = \lim\limits_{x\to a,\, x>a} f(x)g(x)$

4. съществува крайната граница $B = \lim\limits_{x\to b,\, x<b} f(x)g(x)$

то е вярно и четвъртото и $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx \;=\; B - A \;-\; \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx$

Примери

1. $$\int\limits_{0}^{1} x \ln x dx = -\frac{1}{4}$$

2. $$\int\limits_{0}^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

3. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \cdot \pi$$

3 Критерии за сходимост

3.1 Общ критерий на Коши

1. $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ е сходящ $\Leftrightarrow$ за всяко $\varepsilon > 0$ има B такова, че $\left|\displaystyle\int\limits_u^{v} f(x)dx\right| < \varepsilon$ за всеки $u,\, v \in (B,\, +\infty)$.

2. $\displaystyle\int\limits_a^{b} f(x)dx$ (с особеност в b) е сходящ $\Leftrightarrow$ за всяко $\varepsilon > 0$ има δ такова, че $\left|\displaystyle\int\limits_u^{v} f(x)dx\right| < \varepsilon$ за всеки $u,\, v \in (b-\delta,\, b)$.

3.2 Критерий за сравнение

1. Нека $0 \leq f(x) \leq g(x)$ за всяко $x \in (a,\, b)$. Тогава

- Ако $\int\limits_a^b g(x)dx$ е сходящ, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ е сходящ.

- Ако $\int\limits_a^b f(x)dx$ е разходящ, то $\int\limits_a^b g(x)dx$ е разходящ.

- Логически факт: $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$

2. Критерий за сравнение – гранична форма

Нека $0 < f(x)$ за всяко $x \in (a,\, b)$ и $\lim\limits_{x\to b,\, x<b} \dfrac{g(x)}{f(x)} = L \neq 0$ (число). Тогава

$$\int\limits_a^b g(x)dx \text{ е сходящ} \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)dx \text{ е сходящ.}$$

Примери

1. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ е сходящ $\quad\Leftrightarrow\quad \max(p,\, q) > 1$ и $\min(p,\, q) < 1.$

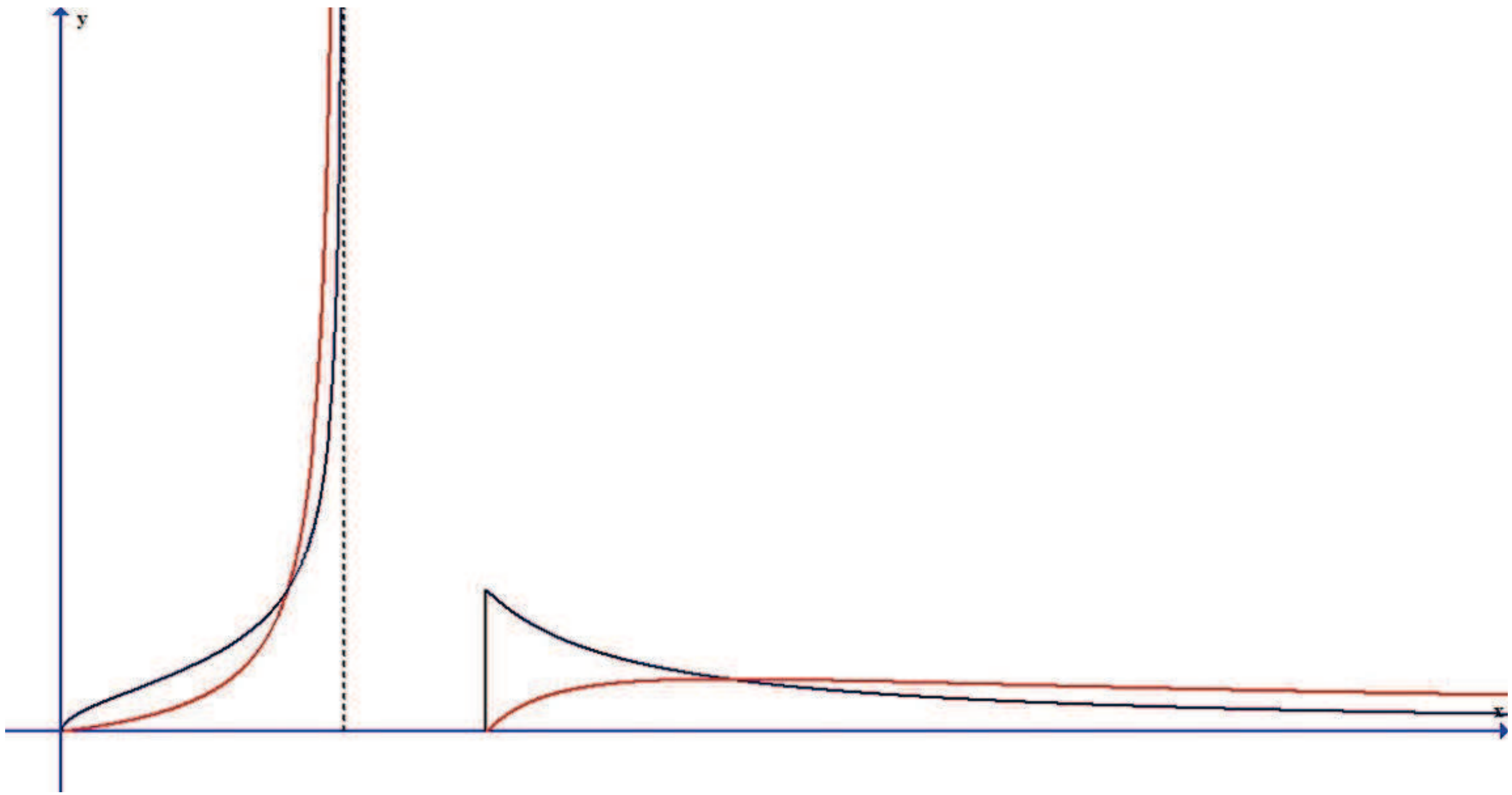
2. $\displaystyle\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\,x-1} e^{\,-t} dt$ е сходящ за всяко $x > 0$.

3. $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ е сходящ $\quad\Leftrightarrow\quad p > 1$ или $p = 1,\ q > 1$.

4. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^p\, |\ln x|^q}$ е сходящ $\quad\Leftrightarrow\quad p < 1$ или $p = 1,\ q > 1$.

Странно — на двете места $q > 1$?!

Обяснение — по-бързо клонене към 0 ; по-бавно клонене към $+\infty$



3.3 Критерий на Абел - Дирихле

1. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в $[a, u]$ за всяко $a < u$ и

- $f(x)$ е монотонна и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
- функцията $\int\limits_a^u g(x)dx$ е ограничена.

Тогава $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ е сходящ.

2. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в $[a, u]$ за всяко $a < u$ и

- $f(x)$ е монотонна и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ (число);
- интегралът $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ е сходящ.

Тогава $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ е сходящ.

3. Аналогични твърдения са верни, когато $+\infty$ заменим с число b, както и когато особената точка е долната граница.

Примери

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ е сходящ.

2. монотонността е съществена

- $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[4]{x^3} + \sin x} dx$ е сходящ.

- $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} dx$ е разходящ.

3.4 Абсолютно сходящи интеграли

Свойства, които не се запазват

1. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ е сходящ, но $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ е разходящ.

2. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ е сходящ, но $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ е разходящ.

Абсолютна и условна сходимост

1. Несобственият интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ (с особеност b) се нарича **абсолютно сходящ**, ако интегралът $\int\limits_a^b |f(x)|\, dx$ е сходящ.

 - Ако $\int\limits_a^b f(x)dx$ е абсолютно сходящ, то той е сходящ.
 - Обратното не е вярно.

2. Несобственият интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ (с особеност b) се нарича **условно сходящ**, ако е сходящ, но не абсолютно сходящ.

- Ако $f(x)$ не си мени знака в околност на b, то сходимост и абсолютна сходимост съвпадат.

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ е абсолютно сходящ.

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx$ е условно сходящ.