

Александър Кръстев, ФН:61329, II – курс, СИ

Домашна работа №1

Зад.1:

а) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Решение:

1) При $n = 1$ равенството е изпълнено.

Нека равенството е изпълнено за $n = k$, $S_k = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$.

2) Ще докажем твърдението за $n = k + 1$:

$$S_{k+1} = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \Rightarrow S_k + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \Rightarrow (0 = 0) \Rightarrow \text{Твърдението е изпълнено.}$$

б) $1^5 + 2^5 + \dots + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$

Решение:

1) При $n = 1$ равенството е изпълнено.

2) Нека равенството е изпълнено за $n = k$,

$$S_k = 1^5 + 2^5 + \dots + k^5 = \frac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12}.$$

Ще докажем твърдението за $n = k + 1$:

$$S_{k+1} = 1^5 + 2^5 + \dots + k^5 + (k+1)^5 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2(2(k+1)^2+2(k+1)-1)}{12} \Rightarrow$$

$$S_k + (k+1)^5 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2(2(k+1)^2+2(k+1)-1)}{12} \Rightarrow \text{Твърдението е изпълнено.}$$

в) $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Решение:

1) При $n = 1$ равенството е изпълнено.

2) Нека равенството е изпълнено за $n = k$,

$$S_k = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}.$$

Ще докажем твърдението за $n = k + 1$:

$$S_{k+1} = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) =$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \Rightarrow S_k + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \Rightarrow$$

Твърдението е изпълнено.

Зад.2:

$$a) \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^n, n \geq 2$$

Решение: За $n = 2$ получаваме вярното неравенство $\frac{16}{3} < 6 < 16$. Нека за естественото n е изпълнено $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^n$. За да докажем, че

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} < \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} < 4^{n+1} \text{ разделяме на две неравенствата } \frac{4^{n+1}}{n+2} < \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \text{ и}$$

$$\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} < 4^{n+1}. \text{ Нека разгледаме първото от тях: } \frac{4^{n+1}}{n+2} - \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} =$$

$$\frac{4 \cdot 4^n}{n+2} - \frac{(2n+2)(2n+1)((2n)!) }{(n!)^2(n+1)^2} = \frac{4(n+1)}{n+2} \cdot \frac{4^n}{n+1} - \frac{2(2n+1)((2n)!) }{(n+1)(n!)^2}, \text{ но } \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{4(n+1)}{n+2} \cdot \frac{4^n}{n+1} - \frac{2(2n+1)((2n)!) }{(n+1)(n!)^2} < \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{4n+4}{n+2} - \frac{4n+2}{n+1} \right) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(-\frac{2n}{(n+1)(n+2)} \right) < 0,$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^{n+1}}{n+2} < \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}. \text{ Сега да разгледаме } \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} - 4^{n+1} = \frac{2(2n+1)((2n)!) }{(n+1)(n!)^2} - 4 \cdot \frac{4^n}{n+1} <$$

$$< \frac{(4n+2) \cdot 4^n}{n+1} - 4 \cdot \frac{4^n}{n+1} = 4^n \left(\frac{4n+2-4n-4}{n+1} \right) < 0 \Leftrightarrow \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} < 4^{n+1}. \text{ Следователно за всяко}$$

$$n \geq 2 \text{ е изпълнено, че } \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^n.$$

$$б) \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, n \geq 2$$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

$$\text{Решение: За } n = 2 \text{ имаме } \frac{1.3}{2.4} < \frac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow \left(\frac{3}{8}\right)^2 < \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 \Rightarrow 9.7 < 64.$$

Нека неравенството е изпълнено за n ще го докажем за $n+1$. Да разгледаме

$$\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} - \frac{1}{\sqrt{3n+4}} = \frac{(2n+1)(2n-1)!!}{(2n+2)(2n)!!} - \frac{1}{\sqrt{3n+4}} < \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3n+1}} - \frac{1}{\sqrt{3n+4}} =$$

$$\frac{(2n+1)(\sqrt{3n+4}) - (2n+2)(\sqrt{3n+1})}{(2n+2)\sqrt{(3n+1)(3n+4)}}. \text{ Да разгледаме знака на}$$

$$(2n+1)(\sqrt{3n+4}) - (2n+2)(\sqrt{3n+1}) \text{ за всяко } n \in \mathbb{N};$$

$$\text{твърдим, че } (2n+1)(\sqrt{3n+4}) < 2(n+1)(\sqrt{3n+1}) \uparrow 2 \Rightarrow$$

$$(2n+1)^2(3n+4) < 4(n+1)^2(3n+1) \Rightarrow$$

$$(4n^2 + 4n + 1)(3n + 4) < (4n^2 + 8n + 4)(3n + 1) \Rightarrow 19n < 18n \Rightarrow n < 0$$

Следователно $(2n + 1)(\sqrt{3n + 4}) - 2(n + 1)(\sqrt{3n + 1}) < 0$, с което твърдението е доказано.