1 Сходящи редици

1.1 Редици

- Редица е всяка функция $\mathcal{A} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
- При изискването $D_{\mathcal{A}}$ да е безкрайно множество — „безкрайна числова редица“
- Обикновено се използва означението a_n вместо $\mathcal{A}(n)$

1.1.1 Примери

- аритметична прогресия — $a_n = a_0 + nd$
- геометрична прогресия — $a_n = a_0 q^n$
- $a_n = \dfrac{1}{n}$
- $a_n = \dfrac{2019n^3 + 1}{n^3 + 2019^3}$

- $a_n = n$, $a_n = -n^2 + 2019n$, $a_n = (-1)^n n^2 + n$
- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, обобщено $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
- $\mathbb{Q}$ — наредени по някакъв начин в редица
- рекурентно зададени
  - $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}$
  - $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}$
  - $a_0 = 2019$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 2019}{2a_n}$

1.2 Някои видове редици

- ограничени (неограничени)
- монотонни

- „за почти всички“, „от някъде нататък“
- сходящи
- клонящи към $+\infty$, клонящи към $-\infty$

1.2.1 Ограничени (неограничени) редици

- ограничена отгоре: $a_n \leq c$ за всяко $n \in \mathbb{N}$
- неограничена отгоре: за всяко c има $n \in \mathbb{N}$ с $a_n > c$
- ограничена отдолу: $a_n \geq c$ за всяко $n \in \mathbb{N}$
- неограничена отдолу: за всяко c има $n \in \mathbb{N}$ с $a_n < c$
- ограничена: $|a_n| \leq c$ за всяко $n \in \mathbb{N}$
- неограничена е еквивалентно на неограничена отгоре ИЛИ неограничена отдолу

1.2.2 Монотонни редици

- растяща $a_n \leq a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n < m \Rightarrow a_n \leq a_m$
- строго растяща $a_n < a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$

- намаляваща $a_n \geq a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n < m \Rightarrow a_n \geq a_m$
- строго намаляваща $a_n > a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$

1.3 Сходящи редици

1.3.1 Дефиниция

- Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича сходяща, ако

  съществува число l такова, че за всяко $\varepsilon > 0$ има число N такова, че за всяко $n \in \mathbb{N},\ n > N$ е изпълнено $|a_n - l| < \varepsilon$.

  l се нарича граница на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- Алтернатива

  - l се нарича граница на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако

    за всяко $\varepsilon > 0$ има число N такова, че за всяко $n \in \mathbb{N},\ n > N$ е изпълнено $|a_n - l| < \varepsilon$.

  - Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича сходяща, ако има граница

1.3.2 Отрицания

- l не е граница на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако

  има $\varepsilon_0 > 0$ такова, че за всяко число N има $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ и $|a_n - l| \geq \varepsilon_0$.

- Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е сходяща, ако

  за всяко число l има $\varepsilon_0 > 0$ такова, че за всяко число N има $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ и $|a_n - l| \geq \varepsilon_0$.

- Означение $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

- Пример $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

- Пример $(-1)^n$ не е сходяща.

1.4 Основни свойства на сходящите редици

- Премахване (добавяне) на краен брой членове не променя сходимостта (и границата).

- Границата е единствена; в равенства може да се извършва граничен преход.
- От сходимост следва ограниченост.
- Знаците на „почти всички“ членовете на сходяща редица, с ненулева граница, са едни и същи.

1.5 Аритметични действия със сходящи редици

Нека редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ са сходящи с граници, съответно, a и b. Тогава

- $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
- $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$
- $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
- ако $b \neq 0$, то $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

- Безкрайно малки редици

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \max(a_n,\, b_n) = \max(a,\, b)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \min(a_n,\, b_n) = \min(a,\, b)$

1.6 Сходимост и неравенства

- Граничен преход в неравенства

Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Ако $a_n \le b_n$ за $n \ge n_0$, то $a \le b$.

- Лема за междинната редица:

Нека $a_n \le b_n \le c_n$ за $n \ge n_0$. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$, то редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$.

- Пример:

Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n = 1$.

2 Редици, клонящи към безкрайност

2.1 Дефиниция

- Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към $+\infty$, ако за всяко C има число N такова, че за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ е изпълнено $a_n > C$.
- Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към $-\infty$, ако за всяко C има число N такова, че за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ е изпълнено $a_n < C$.
- Отрицания
- Означения $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$
- Безкрайно големи $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$
- Примери – геометрична прогресия; рационални

2.2 Неравенства

- Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $a_n > 0$ за $n \geq n_0$. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, то $a_n < 0$ за $n \geq n_0$.

- Нека $a_n \leq b_n$ за $n \geq n_0$. Тогава: ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$; ако $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

2.3 Аритметични действия

2.3.1 Събиране

	$-\infty$	a	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	???
b	$-\infty$	a+b	$+\infty$
$+\infty$	???	$+\infty$	$+\infty$

- Ако $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $b_n \geq B$ за $n \geq n_0$, то $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$
- Ако $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ и $b_n \leq B$ за $n \geq n_0$, то $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$

2.3.2 Безкрайно малки и безкрайно големи

Безкрайно малки и безкрайно големи

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow a_n > 0$ за $n \geq n_0$ и $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow a_n < 0$ за $n \geq n_0$ и $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$
- Безкрайно голяма редица $\Leftrightarrow$ Реципрочната редица е безкрайно малка

2.3.3 Умножение

	$-\infty$	$a<0$	$a=0$	$a>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	???	$-\infty$	$-\infty$
$b<0$	$+\infty$				$-\infty$
$b=0$	???		a.b		???
$b>0$	$-\infty$				$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	???	$+\infty$	$+\infty$

- Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $b_n \geq B > 0$ за $n \geq n_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$

- Ако $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ и $b_n \geq B > 0$ за $n \geq n_0$, то $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$
- Ако $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $b_n \leq B < 0$ за $n \geq n_0$, то $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$
- Ако $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ и $b_n \leq B < 0$ за $n \geq n_0$, то $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$

3 Монотонни редици

3.1 Основна теорема

- Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща (от някъде нататък) и ограничена отгоре.

  Тогава $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща.

- Дуална форма

  Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща (от някъде нататък) и ограничена отдолу.

  Тогава $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща.

3.2 Следствия

- Следствие от доказателството

  – Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща (от някъде нататък) и ограничена отгоре.
  Тогава $a_k \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

  – Дуална форма
  Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща (от някъде нататък) и ограничена отдолу.
  Тогава $a_k \ge \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

- Монотонно поведение

  – Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща (от някъде нататък). Тогава или $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

  – Дуална форма
  Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща (от някъде нататък). Тогава или $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

3.3 Важни приложения

- За всяко $x \in \mathbb{R}$ редицата $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ е

  1) растяща (от някъде нататък); 2) ограничена отгоре; 3) сходяща.

  Полагаме $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

  Между другото, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$ за $k \in \mathbb{N}$

- При $q > 1$ е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{q^n} = 0$.

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q^n}{n!} = 0$.

- За всяко $x > 1$ редицата $b_0 = x^2$, $b_{n+1} = \dfrac{b_n^2 + x}{2b_n}$ е сходяща и за границата ѝ b е изпълнено $b^2 = x$.

4 Подредици. Точки на сгъстяване

4.1 Подредици

4.1.1 Дефиниция

- Казваме, че редицата $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ е подредица на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако съществува строго растяща редица $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ от естествени числа, за която $b_k = a_{n_k}$

- Примери:
  - $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$,
  - $\mathbb{Q}$ в редица по някакъв начин, $\mathbb{N}$ е подредица
  - изходната редица

4.1.2 Свойства

- Подредица на подредица е подредица
- Всяка подредица на ограничена редица е ограничена
- Всяка подредица на монотонна редица е монотонна

- Ако $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, то $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l$ за всяка подредица

Пример: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n = \sqrt[k]{e}$ за $k \in \mathbb{N}$

- Ако $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, то $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$ за всяка подредица
- Ако $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, то $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$ за всяка подредица
- „Обратните“ са тафталогия

4.1.3 Изчерпване с краен брой редици

- „Лоша“ редица може да бъде изчерпана с безкраен брой „хубави“ редици
- Ако са ограничени, то изходната е ограничена
- За монотонност – нищо не може да се твърди
- Ако са сходящи с една и съща граница (число, $+\infty$ или $-\infty$), то изходната има същото свойство
- Пример:

Ако $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$ (число, $+\infty$ или $-\infty$), то $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

4.2 Теорема на Болцано

Всяка ограничена редица има сходяща подредица.

Уточнение

Нека $x_n \in [a, b]$ (краен и затворен). Тогава редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ има сходяща подредица $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ и за нейната граница $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ е изпълнено $x_0 \in [a, b]$.

4.3 Точки на сгъстяване

4.3.1 Дефиниция

- a се нарича точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако

  за всяко $\varepsilon > 0$ и за всяко число N има $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ такова, че $|a_n - a| < \varepsilon$.

- Еквивалентно условие

  a е точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ тогава и само тогава, когато всяка околност на a съдържа безкрайно много членове на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

- Отрицание:

  a не е точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако съществуват $\varepsilon_0 > 0$ и число N_0 такива, че за всяко $n \in \mathbb{N},\ n > N_0$ е изпълнено $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$.

4.3.2 Примери

- Редицата $(-1)^n$ има две точки на сгъстяване -1 и 1.
- Редицата $((-1)^n + 1)\, n$ има единствена точка на сгъстяване – 0.
- Редицата $(-1)^n n$ няма точки на сгъстяване.
- По-общо: безкрайно големите редици нямат точки на сгъстяване
- Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има (единствена) точка на сгъстяване – a.

4.3.3 Необходимо и достатъчно условие

a е точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ тогава и само тогава, когато съществува сходяща подредица $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, за която $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

- Теорема на Болцано

  Всяка ограничена редица има поне една точка на сгъстяване.

- Уточнение

  Всяка ограничена редица има най-малка и най-голяма точка на сгъстяване.

- Означение $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

4.4 Теорема на Болцано – план на доказателство

- $a = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n \quad \Leftrightarrow$ за всяко $\varepsilon > 0$ са изпълнени:

  1. за всяко число N има $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ такова, че $a - \varepsilon < a_n$;
  2. има число N_0 такова, че за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n > N_0$ е изпълнено $a_n < a + \varepsilon$.

- редицата $b_m = \sup\{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots\}$ намалява и е ограничена отдолу

- $\lim\limits_{m\to\infty} b_m = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

4.5 Необходимо и достатъчно условие за сходимост на редица

Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща тогава и само тогава, когато

1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена

И

2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има единствена точка на сгъстяване.

4.6 Условие на Коши

4.6.1 Дефиниция

- Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича фундаментална, ако за всяко $\varepsilon > 0$ има число N такова, че за всеки две $n \in \mathbb{N},\ n > N$, $m \in \mathbb{N},\ m > N$ е изпълнено $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

- Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е фундаментална, ако съществува $\varepsilon_0 > 0$ такова, че за всяко N има две $n \in \mathbb{N},\ n > N$, $m \in \mathbb{N},\ m > N$, за които $|a_n - a_m| \geq \varepsilon_0$.

- Примери

  – Редицата $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ е фундаментална

  – Редицата $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ не е фундаментална

4.6.2 Необходимо и достатъчно условие за сходимост

Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща тогава и само тогава, когато е фундаментална.

4.6.3 Доказателство в „трудната“ посока

Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална. Тогава тя е ограничена. Наистина, има N такова, че за всяко $n \in \mathbb{N},\ n > N$ и всяко $m \in \mathbb{N},\ m > N$ е изпълнено $|a_n - a_m| < 1$. Ако $m_0 > N$, то за всяко $n \geq m_0$ имаме $-1 + a_{m_0} < a_n < 1 + a_{m_0}$. Следователно, една долна граница е $\min\{-1 + a_{m_0},\ a_1,\ \dots a_{m_0}\}$, а горна — $\max\{1 + a_{m_0},\ a_1,\ \dots a_{m_0}\}$.

Да допуснем, че $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има две точки на сгъстяване $b < c$. За $\varepsilon = \dfrac{c-b}{4} > 0$ има число N такова, че за всеки две $n \in \mathbb{N},\ n > N$, $m \in \mathbb{N},\ m > N$ е изпълнено $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Има и $n_1 > N$, за което $|a_{n_1} - b| < \varepsilon$, и $n_1 > N$, за което $|a_{n_2} - c| < \varepsilon$.

Неравенството на триъгълника ни води до противоречие:

$4\varepsilon = c - b \leq |a_{n_1} - b| + |a_{n_1} - a_{n_2}| + |a_{n_2} - c| < 3\varepsilon$

4.7 Сходимост на средните

- Теорема на Щолц:

Нека $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго растяща редица, за която $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Ако $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L$ (число, $+\infty$ или $-\infty$), то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$.

- Пример:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = 2 .$$

- Средно аритметично

Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (число, $+\infty$ или $-\infty$), то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = L$

- Идея за доказателство: (L — число)

Можем да предполагаме $L=0$.

За $\varepsilon>0$ има n_0 такова, че за всяко $n \ge n_0$ е изпълнено $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Има и $n_1 > n_0$ такова, че за всяко $n \ge n_1$ е изпълнено $\dfrac{1}{n}\left|\sum\limits_{k=1}^{n_0} a_k\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. За $n_1 > n_0$ имаме

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

- Средно геометрично Нека $a_n > 0$. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (число или $+\infty$),

  то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = L$

- Следствие: Нека $a_n > 0$

  Ако $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ (число или $+\infty$), то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

- Пример:

  $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}} = 4$.