Примери: 0) Нека $R = \emptyset$. Тогава $R$ е релация над всяко мн-во $A$ (защото $\emptyset \subseteq A \times A$).

- рефлексивност: Ако $A = \emptyset$, то $\forall a (a \in A \Rightarrow (a,a) \in R)$, защото за всяко $a$, предпоставката $a \in A$ (т.е. $a \in \emptyset$) е лъжа, откъдето цялата импликация е истина; Следователно, $\emptyset$ е рефлексивна над $\emptyset$; Нека сега $A \neq \emptyset$. Нека $x \in A$ е свидетел за това. Тогава $x \in A$, но $(x,x) \notin R = \emptyset$. Така $\exists x (x \in A \& (x,x) \notin R)$. Следователно $\emptyset$ не е рефлексивна над $A \neq \emptyset$.

- симетричност: $\forall a \forall b ((a,b) \in \emptyset \Rightarrow (b,a) \in \emptyset)$ е изпълнено, защото за вс. $a$ и $b$, предпост. $(a,b) \in \emptyset$ е лъжа. След., $\emptyset$ е симетрична.

- антисиметричност: $\forall a \forall b ((a,b) \in \emptyset \& (b,a) \in \emptyset \Rightarrow a = b)$ е в сила, защото за вс. $a$ и $b$ предпоставката е лъжа. След., $\emptyset$ е антисиметрична.

- транзитивност: $\forall a \forall b \forall c ((a,b) \in \emptyset \& (b,c) \in \emptyset \Rightarrow$
$$\Rightarrow (a,c) \in \emptyset)$$

Отново е изпълнено, защото предпоставката е лъжа. Така $\emptyset$ е транзитивна релация.

1) $A = \mathbb{N}$, $R = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Тогава $R$ е над $A$, защото $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Това, че $R$ е Р.Е. над $A$ се проверява чрез следните:

- рефлексивност над A:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{a \in A}{a \in \mathbb{N}}}{(a,a) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}}{(a,a) \in R}$$

След., R е рефл. над A

- симетричност:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(a,b) \in R}{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}}{a,b \in \mathbb{N}}}{(b,a) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}}{(b,a) \in R}$$

След., R е симетрична

- транзитивност:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(a,b) \in R \ \& \ (b,c) \in R}{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \ \& \ (b,c) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}}{a,b,c \in \mathbb{N}}}{(a,c) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}}{(a,c) \in R}$$

След., R е транзитивна.
Окончателно, $R = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ е релация на еквивалентност над $A = \mathbb{N}$.

Упр. 1 Нека $A \neq \emptyset$. Докажете, че $R = A \times A$ е Р.Е. над $A$.

2) $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $R$ е релацията определена чрез

$a R b \leftrightharpoons a, b \in A \ \& \ a \cdot b > 0$

- рефлексивност над A:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{a \in A}{a \in \mathbb{R} \ \& \ a \neq 0}}{a \in A \ \& \ a \cdot a > 0}}{a R a}$$

Следователно, $R$ е рефлексивна над $A$

- симетричност:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{a R b}{a, b \in A \ \& \ ab > 0}}{a, b \in A \ \& \ ba > 0}}{b R a}$$

След., $R$ е симетрична.

- транзитивност:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a R b \ \& \ b R c}{a, b \in A \ \& \ ab > 0 \ \& \ b, c \in A \ \& \ bc > 0}}{a, b, c \in A \ \& \ a b^2 c > 0 \ \& \ b \neq 0}}{a, c \in A \ \& \ ac > 0}}{a R c}$$

Така $R$ е и транзитивна.

След., $R$ е Р.Е. над $A$.

3) $A = \mathbb{Z}$, $R$ е релацията определена чрез

$$aRb \leftrightharpoons a, b \in A \ \& \ a-b \text{ е четно}$$

- <u>рефлексивност над $A$</u>:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{a \in A}{a \in \mathbb{Z}}}{a-a=0}}{a-a \text{ е четно}}}{a \in A \ \& \ a-a \text{ е четно}}}{aRa}$$

След. $R$ е рефл. над $A$

- <u>симетричност</u>:

$aRb$

---

$a, b \in \mathbb{Z}$ & $a-b$ е четно

---

$a, b \in \mathbb{Z}$ & $\exists k (k \in \mathbb{Z} \ \& \ a-b = 2 \cdot k)$

---

$a, b \in \mathbb{Z}$ & $\exists k (k \in \mathbb{Z} \ \& \ b-a = 2 \cdot (-k))$

---

$a, b \in \mathbb{Z}$ & $\exists k (k \in \mathbb{Z} \ \& \ b-a = 2k)$

---

$a, b \in \mathbb{Z}$ & $b-a$ е четно

---

$bRa$

След., $R$ е симетрична.

• <u>Транзитивност</u>:

$$\begin{array}{c} aRb \ \& \ bRc \\ \hline a,b,c\in\mathbb{Z} \ \& \ a-b \text{ е четно } \& \ b-c \text{ е четно} \\ \hline a,b,c\in\mathbb{Z} \ \& \ (a-b)+(b-c) \text{ е четно} \\ \hline a,c\in\mathbb{Z} \ \& \ (a-c) \text{ е четно} \\ \hline aRc \end{array}$$

След. $R$ е транзитивна. Окончателно, $R$ е Р.Е. над $A$. Не е трудно да се забележи, че две цели числа $a$ и $b$ са в отношението $R$, точно тогава, когато са от еднаква четност.

<u>Упр.2</u> Нека $k \geq 2$. Определяме релацията $R_k$ над $\mathbb{Z}$ като:

$$a R_k b \leftrightharpoons a,b\in\mathbb{Z} \ \& \ a-b \text{ се дели на } k.$$

Док., че за всяко $k \geq 2$, $R_k$ е Р.Е. над $\mathbb{Z}$.

---

## Класове на еквивалентност

<u>Опр.</u> Нека $A \neq \emptyset$ и $R$ е релация на еквивалентност над $A$. Нека $a \in A$. Клас на еквивалентност на $a$ по $R$ ще наричаме множеството от всички ~~ел~~ $R$-еквивалентни на $a$ елементи на $A$:

$$[a]_R = \{b \mid b \in A \ \& \ aRb\} =$$
$$= \{b \mid b \in A \ \& \ bRa\}$$

Последното равенство е в сила, защото всяка Р.Е. е симетрична.

Свойства: 1) За вс. $a \in A$, $a \in [a]_R$.

В частност, за вс. $a \in A$, $[a]_R \neq \emptyset$.

2) За вс. $a \in A$, $[a]_R \in \mathcal{P}(A)$

// Забележете, че $[a]_R \subseteq A$

3) За всеки две $a, b \in A$ е в сила, че:

- $aRb \iff [a]_R = [b]_R$
- $\neg aRb \iff [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

4) (Следствие от 3)). За всеки две $a, b \in A$ е в сила точно едно от двете:

$$[a]_R = [b]_R \quad \text{или} \quad [a]_R \cap [b]_R = \emptyset.$$

Т.е. всеки два класа на еквивалентност (по една и съща релация) или съвпадат напълно, или нямат общи елементи.

~~Фактормно~~ Опр. Фактор-множество на $A$ по $R$ ще наричаме мн-вото от всички класове на еквивалентност по $R$:

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}.$$

Забележете, че ако $A$ е крайно, то $|A/R| \leq |A|$.

Примери: 1) $A = \mathbb{N}$, $R = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$[0]_R = \{b \mid b \in \mathbb{N} \ \& \ bR0\} = \{b \mid b \in \mathbb{N} \ \& \ (b,0) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$

$= \{b \mid b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$

Нека $a \in A = \mathbb{N}$ е произволно. Тогава $a \in [0]_R$ и $a \in [a]_R$. След. $a \in [0]_R \cap [a]_R$, откъдето $[0]_R \cap [a]_R \neq \emptyset$. Следов., $[a]_R = [0]_R = \mathbb{N}$. Тогава всички класове на екв. по $R$ са равни и така

$A/R = \{[a]_R \mid a \in \mathbb{N}\} = \{[0]_R\} = \{\mathbb{N}\}$

$|A/R| = 1$

Упр. 3. Ако $A \neq \emptyset$ и $R = A \times A$, то $A/R = \{A\}$.

2) $A = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $R$ е определена чрез

$aRb \leftrightharpoons a, b \in A \ \& \ ab > 0$

Тогава: $[1]_R = \{b \mid b \in A \ \& \ 1Rb\} =$

$= \{b \mid b \in A \ \& \ 1.b > 0\} = \{b \mid b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \ \& \ b > 0\} =$

$= \{b \mid b \in \mathbb{R} \ \& \ b > 0\} = (0, +\infty)$ = мн-вото на положит. реални числа

Нека $a \in \mathbb{R}$ и $a > 0$. Тогава $a \in [1]_R$ и $a \in [a]_R$. След. $[a]_R \cap [1]_R \neq \emptyset$, откъдето $[a]_R = [1]_R = (0, +\infty)$

$$[-1]_R = \{ b \mid b \in A \ \& \ (-1) R b \} =$$
$$= \{ b \mid b \in A \ \& \ -1 . b > 0 \} =$$
$$= \{ b \mid b \in A \ \& \ b < 0 \} =$$
$$= \{ b \mid b \in \mathbb{R} \ \& \ b < 0 \} = (-\infty, 0)$$

Подобно на по-горе, за вс. $a < 0$, $a \in \mathbb{R}$ имаме, че $[a]_R = [-1]_R = (-\infty, 0)$

След., $A / R = \{ [a]_R \mid a \in A \} =$
$$= \{ [1]_R, [-1]_R \} = \{ (0, +\infty), (-\infty, 0) \}$$

$$|A / R| = 2$$

3) $A = \mathbb{Z}$, $R$ е определена чрез
$$a R b \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{Z} \ \& \ a - b \text{ е четно}$$

$$[0]_R = \{ b \mid b \in \mathbb{Z} \ \& \ b R 0 \} = \{ b \mid b \in \mathbb{Z} \ \& \ b - 0 \text{ е четно} \}$$
$$= \{ b \mid b \in \mathbb{Z} \ \& \ b \text{ е четно} \} = \{ 2n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

Както в по-горния пример за всяко четно цяло число $a$, $[a]_R = [0]_R$.

$[1]_R = \{ b \mid b \in \mathbb{Z} \ \& \ bR1 \} = \{ b \mid b \in \mathbb{Z} \ \& \ b-1$ е четно $\}$

$= \{ b \mid b \in \mathbb{Z} \ \&$ $b$ е нечетно $\} = \{ 2n+1 \mid n \in \mathbb{Z} \}$.

За всяко нечетно $a$ – цяло число, $[a]_R = [1]_R$

Следователно, има само 2 различни класа на еквивалентност по $R$: $\{ 2n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ и $\{ 2n+1 \mid n \in \mathbb{Z} \}$. Така:

$$A/R = \{ [0]_R, [1]_R \} =$$
$$= \{ \{ 2n \mid n \in \mathbb{Z} \}, \{ 2n+1 \mid n \in \mathbb{Z} \} \}$$

и $|A/R| = 2$.

Упр. 4. Док, че за $k \geq 2$, за релацията $R_k$ от упр. 2, $|\mathbb{Z}/R_k| = k$.