Задача 36.

Нека G е ацикличен граф с $2n+2$ върха. Нека броят на върховете от степен 3 е n, а този на върховете от степен 1 е $n+2$. Докажете, че графът G е свързан.

Док-во:

След като по условие G е ацикличен, то G може да се разбие на k компоненти на свързаност, които също ще са ациклични, но за разлика от G за тях може да кажем, че са свързани със сигурност (от разбиването). Следователно тези D_k компоненти на свързаност ще са дървета. За всяка компонента на свързаност D_k ще имаме $|E_D| = |V_D| - 1$. Тоест $|E| = \sum^{k} |E_D| = \sum^{k} (|V_D - 1|) = |V| - k = 2n + 2 - k$. (Task 29) Сега, от формулата на Ойлер имаме, че

$$2|E| = \sum_{u \in V} deg(u) = n.3 + (n+2).1 = 4n + 2.$$

От тук следва, че $2(2n+2-k) = 4n+2$ или $k = 1$, което искахме да докажем, тъй като k е броя на компонентите на свързаност.

github.com/andy489