Задача 29.

Нека $G(V, E)$ е граф без цикли и с n на брой върха и k компоненти на свързаност. Намерете $|E|$.

Решение:

Нека $G_i(V_i, E_i),\ i = \overline{1,k}$ са компонентите на свързаност на G. Тогава са в сила следните твърдения:

- $\bigcup_{i=1}^{k} V_i = V$;
- $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = E$;
- $i \neq j \Rightarrow V_i \cap V_j = E_i \cap E_j = \emptyset$.

Следователно броя на върховете $|V| = |V_1| + |V_2| + \cdots + |V_k| = \sum_{i=1}^{k} |V_i|$ и броя на ребрата $|E| = |E_1| + E_2| + \cdots + |E_k| = \sum_{i=1}^{k} |E_i|$ (всеки връх и всяко ребро участва в точно една компонента на свързаност). Всяка компонента на свързаност е свързан граф. В G няма цикли, следователно във всяка негова компонента на свързаност няма цикли. Тогава за $\forall i\ i = \overline{1,k}$ имаме: G_i е дърво $\Rightarrow |E_i| = |V_i| - 1$. Така

$$|E| = |E_1| + |E_2| + \cdots + |E_k| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| = \sum_{i=1}^{k} (|V_i| - 1) = \sum_{i=1}^{k} |V_i| - \sum_{i=1}^{k} 1 = |V| - k = n - k$$

github.com/andy489