ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ 2
ТЕОРИЯ 1

1. Регулярен израз α. Регулярен израз над азбуката $\sum$ е стринг над азбуката $\sum \cup \{\emptyset, \cdot , \cup , * \}$, който може да се дефинира индуктивно както следва:

- $\emptyset$ и всеки елемент от $\sum$ е регулярен израз;
- Ако α и β са регулярни изрази, то и $\alpha\,.\,\beta$, $\alpha \cup \beta$ и α^* са реулярни изрази;
- Нищо друго не е регулярен израз, освен ако не следва от първите две условия.

2. Регулярен език $L(\alpha)$ за регулярен израз α. L е функцията, която описва връзката между регулярен израз и езика, който той задава. L е дефинирана индуктивно както следва:
- $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(a) = \{a\}$, за всяко $a \in \sum$ (дори и за $a = \epsilon$);
- Ако α и β са регулярни изрази, то
$L(\alpha \cdot \beta) = L(\alpha) \cdot L(\beta)$, $L(\alpha \cup \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$, $L(\alpha^*) = \big(L(\alpha)\big)^*$.

3. Рефлексивно и транзитивно затваряне на бинарна релация. Нека релацията $R \subseteq A^2$ задава ориентиран граф над множеството от върхове A. Рефлексивно и транзитивно затваряне на R е релацията:
$R^* = \{(a, b) : a, b \in A$ *и съществува път от* a *до* b *в* $R\}$.
Индуктивна дефиниция на R^*:
- за $\forall a \in A$, $(a, a) \in R^*$;
- ако $(a, b) \in R$, то $(a, b) \in R^*$;
- ако $(a, b) \in R^*$ и $(b, c) \in R^*$, то $(a, c) \in R^*$.

4. Затваряне на множество $B \subseteq A$ относно релация $B \subseteq A^2$. Нека A е непразно множество и нека $R \subseteq A^2$ е бинарна релация в A. Тогава подмножеството B на A $(B \subseteq A)$ е затворено относно R, ако $b_2 \in B$, всеки път когато $b_1 \in B$ и $(b_1, b_2) \in R$.

5. Краен детерминиран автомат. Краен детерминиран автомат е наредената петорка $M = (K, \sum, \delta, s, F)$, където K е крайно множество от състояния, $\sum$ е крайна азбука, δ:$K \times \sum \rightarrow K$ е функция на преходите, $s \in K$ е началното състояние, $F \subseteq K$ е множеството от заключителни състояния.

6. Краен недетерминиран автомат. Краен недетерминиран автомат е наредената петорка $M = (K, \sum, \Delta, s, F)$, където K е крайно множество от състояния, $\sum$ е крайна азбука, $\Delta \subseteq K \times (\sum \cup \{\epsilon\}) \times K$ е релация на преходите, $s \in K$ е началното състояние, $F \subseteq K$ е множеството от заключителни състояния.

7. $\vdash_M$ за краен детерминиран автомат. За краен детерминиран автомат $M = (K, \sum, \delta, s, F)$, релацията $\vdash_M$ дефинираме по следния начин: $(q, w) \vdash_M (q', w') \Leftrightarrow w = aw'$ и $\delta(q, a) = q', a \in \sum;\ q, q' \in K;\ w, w'$ - думи от $\sum^*$.

8. $\vdash_M$ за краен недетерминиран автомат M. За краен недетерминиран автомат $M = (K, \sum, \Delta, s, F)$, релацията $\vdash_M$ дефинираме по следния начин: $(q, w) \vdash_M (q', w') \Leftrightarrow \exists u \in \sum \cup \{\epsilon\}$ такова, че $w = uw'$ и $(q, u, q') \in \Delta$. $q, q' \in K;\ w, w'$ - думи от $\sum^*$.

9. $L(M)$ за краен детерминиран (недетерминиран) автомат M. За крайния детерминиран (недетерминиран) автомат $M = (K, \sum, \Delta, s, F)$, езика $L(M)$ дефинираме по следния начин: $L(M) = \{w \,|\, w \in \sum^*$ *и* $(s, w) \vdash_M^* (q, \epsilon), q \in F\}$, където $\vdash_M^*$ е рефлексивно и транзитивно затваряне на релацията $\vdash_M^*$.

10. Кога една дума се разпознава (приема) от даден краен детерминиран автомат M. Казваме, че $w \in \sum^*$ се разпознава (приема) от автомата $M = (K, \sum, \delta, s, F) \Leftrightarrow (s, w) \vdash_M^* (f, \epsilon)$, където $w \in \sum^*, f \in F$.

11. Релация на еквивалентност $\approx_L$ за даден език L. Нека $L \subseteq \sum^*$ е език и $x, y \in \sum^*$. Казваме, че x и y са еквивалентни спрямо L и бележим $x \approx_L y$, ако за всяка дума $z \in \sum^*$ е изпълнено $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$. Лесно се проверява, че $\approx_L$ е релация на еквивалентност.

12. $E(q)$ за краен недетерминиран автомат. За всяко състояние $q \in K$ нека $E(q)$ е множеството от всички състояния на M, които могат да се достигнат от q без да се четат каквито и да е букви: $E(q) = \{p \in K : (q, \epsilon) \vdash_M^* (p, \epsilon)\}$.

13. Фоормулирайте лемата за разрастването за регулярни езици. *За всеки* регулярен език L, *съществува* естествено число $n \geq 1$ зависещо само от L такова, че *за всяка* дума $w \in L$ с дължина не по-малка от n : $|w| \geq n$, *съществуват* думи x, y, z за които $x \cdot y \cdot z = w,\ y \neq \epsilon$ *и* $|x \cdot y| \leq n$ такива, че *за всяко* $i \in \mathbb{N} : x \cdot y^i \cdot z \in L$.

14. Формулирайте теоремата и следствието на Майхил-Нероуд за регулярни езици. Нека $L \subset \sum^*$ е регулярен език. Тогава съществува краен детерминиран автомат M, който разпознава L с точно толкова състояния, колкото са класовете на еквивалентност относно релацията $\approx_L$. *Следствие:* езикът L е регулярен $\Leftrightarrow$ (т.с.т.к.) индексът на релацията $\approx_L$ е краен.

15. Каква е сложността на изучените алгоритми за:
- Построяване на съответен регулярен израз по краен автомат - *експоненциална* $\sigma(3^{|k|})$;
- Детерминизация на недетерминиран автомат - *експоненциална* $\sigma(2^{|k|}|k|^2|\sum||\Delta||k|^3)$;
- Проверка дали два крайни недетерминирани автомата са еквивалентни или не - *експоненциална*;
- Проверка дали $L(\alpha_1) = L(\alpha_2)$ по дадени два регулярни израза α_1 и α_2 - *експоненциална*;
- Минимизация на краен детерминиран автомат - *полиномиална* $\sigma(|k|^3|\sum|)$;
- Съответен краен недетерминиран автомат по регулярен израз - *полиномиална* $\sigma(2|\alpha|+1)$;
- Проверка дали два кайни детерминирани автомата са еквивалентни или не - *полиномиална*.

Регулярни операции ($\cup$, $\cdot$, $*$) над езици, разпознавани от *НДКА*

Нека A_1, A_2 са *НДКА* (недетерминирани крайни автомати):

1. Автомат $A_\cup$ с език равен на $L(A_1) \cup L(A_2)$.

1) състояния: състоянията на A_1 и A_2 и ново състояние q;

2) начално състояние: q;

3) финални състояния: финалните състояния на A_1 и A_2 се запазват. q е финално тогава и само тогава, когато поне едно от началните състояния на A_1 и A_2 е било финално;

4) преходи: преходите в A_1 и A_2 остават. q повтаря преходите на началните състояния на A_1 и A_2.

2. Автомат $A\cdot$ с език равен на $L(A_1) \cdot L(A_2)$.

1) състояния: състоянията на A_1 и A_2 ;

2) начално състояние: начално състояние на левия автомат A_1;

3) финални състояния: финалните състояния на десния автомат A_2. Добавяме финалните състояния на A_1 тогава и само тогава, когато началното състояние на десния автомат A_2 е било финално;

4) преходи: преходите в A_1 и A_2 остават. Всяко финлно състояние на левия автомат A_1 повтаря преходите на началното състояние на десния автомат A_2.

3. Автомат $A*$ с език равен на $(L(A_1))^*$.

1) състояния: състоянията на A_1 и ново състояние q;

2) начално състояние: q;

3) финални състояния: финалните състояния на A_1 и q;

4) преходи: преходите в A_1. Всички финлни състояния на $A*$ повтарят преходите на началното състояние на A_1.