ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ 2
ТЕОРИЯ 2

КСГ

1. Контекстно-свободна граматика. КСГ наричаме следната наредена четворка $G = < V, \sum, R, S >$, където:
- V - азбука;
- $\sum \subseteq V$ - множество на терминалните символи. $V \setminus \sum$ - множество на нетерминалните символи;
- $R \subseteq (V \setminus \sum) \times V^*$ - крайно множество от правила;
- $S \in V \setminus \sum$ - начален символ.

2. Релацията $\Rightarrow_G$ за дадена контекстно-свободна граматика (КСГ) G.
Нека $G = < V, \sum, , R, S >$ е КСГ. За всеки две думи $u, v \in V^*$: $u \Rightarrow_G v$ (за една стъпка) $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\exists x, y \in V^*$ и $A \in V \setminus \sum$: $v = xv'y$, $u = xAy$ и правило $A \rightarrow_G v'$.

3. Кога една дума се приема от КСГ $\left(w \in L(G)\right)$. Казваме, че $w \in L(G)$ т.т.к. от началния символ S за краен брой стъпки се извежда w : $S \Rightarrow_G^* w$, където $\Rightarrow_G^*$ е рефлексивно и транзитивно затваряне на $\Rightarrow_G$. $\left(L(G) = \{w \,|\, S \Rightarrow_G^* w \text{ и } w \in \sum^* \}\right)$.

4. Граматика в нормална форма на Чомски. Казваме, че КСГ $G = < V, \sum, R, S >$ е в нормално форма на Чомски, ако $R \subseteq (V \setminus \sum) \times V^2$ $\left(G \textit{ не може да породи дума с дължина по малка от } 2\right)$.

5. Лемата за разрастването на граматични дървета. Нека $G = < V, \sum, R, S >$ е КСГ. За всяка дума $w \in L(G)$, т.ч. $|w| > \Phi(G)^{|V \setminus \Sigma|}$, съществуват думи u, v, x, y, z, такива че $w = u \cdot v \cdot x \cdot y \cdot z$, $v \cdot y \neq \epsilon$ и за всяко $i \in \mathbb{N}_0$: $u \cdot v^i \cdot x \cdot y^i \cdot z \in L(G)$.

СТЕКОВ АВТОМАТ

6. Стеков автомат. Стеков автомат наричаме следната наредена шесторка $M = < K, \sum, \Gamma, \Delta, s, F >$, където:
- K - крайно множество от състояния;
- $\sum$ - азбука от входните символи;
- Γ - азбука от стековите символи;
- $s \in K$ - начално състояние;
- $F \subseteq K$ - множество от финалните състояния;

- Δ - релация на преходите: крайно подмножество на
$\left(K \times \left(\sum \cup \{\epsilon\}\right) \times \Gamma^*\right) \times \left(K \times \Gamma^*\right)$.

7. $\vdash_M$ за стеков автомат M. Елементите на $K \times \sum * \times \Gamma *$ ще наричаме конфигурации на M, където $M = < K, \sum, \Gamma, \Delta, s, F >$. Нека (p, u, α) и (q, v, γ) са две конфигурации на M. Дефинираме релацията $\vdash_M$ по следния начин:
$(p, u, \alpha) \vdash (q, v, \gamma) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists\big((p, a, \beta), (q, \delta)\big) \in \Delta$, т.ч. $u = a \cdot v$, $\alpha = \beta \cdot \eta$, $\gamma = \delta \cdot \eta$, за някое $\eta \in \Gamma *$

8. Кога една дума се приема от стеков автомат. Казваме, че стековият автомат $M = < K, \sum, \Gamma, \Delta, s, F >$ приема думата w, ако е изпълнено
$(s, w, \epsilon) \vdash_M^* (f, \epsilon, \epsilon), f \in F$, $\vdash_M^*$ е рефлексивно и транзитивно затваряне на $\vdash_M$.

9. Прост стеков автомат. Казваме, че стековия автомат $M = < K, \sum, \Gamma, \Delta, s, F >$ е прост, ако за всяко правило $\big((q, a, \beta), (p, \gamma)\big) \in \Delta$, такова че $q \neq s$ е изпълнено, че $\beta \in \Gamma$ и $|\gamma| \leq 2$.

МАШИНА НА ТЮРИНГ

10. Машина на Тюринг. МТ наричаме следната наредена петорка
$M = < K, \sum, \delta, s, H >$, където:
- K - крайно множество от състояния;
- $\sum$ - азбука, която съдържа символ за празна клетка $\sqcup$ и символ за ляв ограничител $\rhd$, но не съдържа $\leftarrow$ и $\rightarrow$;
- $s \in K$ - начално състояние;
- $H \in K$ - множество от стоп състояния;
- δ - функция на преходите: $(K \backslash H) \times \sum \rightarrow K \times (\sum \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})$, за която за всяко $q \in K \backslash H$:
- ако $\delta(q, \rhd) = (p, b)$, то $b = \rightarrow$;
- $\forall a \in \sum$, ако $\delta(q, a) = (p, b)$ то $b \neg \rhd$.

11. Кога една машина на Тюринг разпознава един език. Езикът L се разпознава от машина на Тюринг $M = < K, \sum, \delta, s, H >$ с $y, n \in H$, ако за всяка дума $w \in \sum o *$ (азбука с допълнителен символ) е изпълнено:
- ако $w \in L$, то M приема w $\big((s, \rhd \underline{\sqcup}w)$ *спира на приемаща конфигурация* (такава с y)$\big)$;
- ако $w \notin L$, то M отхвърля w $\big((s, \rhd \underline{\sqcup}w)$ *спира на отхвърляща конфигурация* (такава с n)$\big)$;

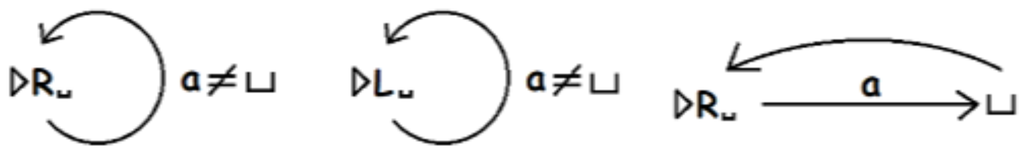
12. Какво и в какво преобразува простата машина на Тюринг $R_{\sqcup}$.
$\rhd\, w_1 \,\underline{\sqcup}\, w_2 \rightarrow_{R_{\sqcup}} \rhd\, w_1 \sqcup w_2 \,\underline{\sqcup}$, $w_2 \in (\sum \setminus\{ \rhd , \sqcup \})^*$ - обхожда (сканира) лентата надясно докато не намери символ за празната клетка.

13. Какво и в какво преобразува простата машина на Тюринг $L_{\sqcup}$.
$\rhd\, w_1 \sqcup w_2 \,\underline{\sqcup} \rightarrow_{L_{\sqcup}} \rhd\, w_1 \,\underline{\sqcup}\, w_2,\ w_2 \in (\sum \setminus\{ \rhd , \sqcup \})^*$
- обхожда (сканира) лентата наляво докато не намери символ за празната клетка.

14. Какво и в какво преобразува машината (*копи-машината*) C на Тюринг.
$\sqcup\, w \,\underline{\sqcup} \overset{\text{C}}{\rightarrow} \sqcup\, w \sqcup w \,\underline{\sqcup}$, $w_2 \in (\sum \setminus\{ \rhd , \sqcup \})^*$

15. Какво и в какво преобразува машината (*шифт-машината*) <img src="https://latex.codecogs.com/svg.latex?\Large&space;S\rightarrow"> на Тюринг.
$\sqcup\, w \,\underline{\sqcup} \overset{\text{S}}{\rightarrow} \sqcup \sqcup w \,\underline{\sqcup}$, $w_2 \in (\sum \setminus\{ \rhd , \sqcup \})^*$

16. Какво и в какво преобразува *delete* машината на Тюринг.
Заменя непразните символи от лентата с празни (изтриване).



17. Твърденията за разрешимите (рекурсивните) и полуразрешимите (рекурсивно номеруемите) езици:
- всеки разрешим език е полуразрешим;
- ако $\overline{L} = (\sum \setminus\{ \rhd , \sqcup \})^*$ е разрешим език, то и допълнението му $\overline{L} = (\sum \setminus\{ \rhd , \sqcup \})^*$ също е разрешим език;
- съществува полуразрешим език, който не е разрешим.

18. Кога една функция $f : \sum o * \nrightarrow \sum o *$ се изчислява с помощта на машина на Тюринг $M = < K, \sum, \delta, s, H >$, $\sum o \subseteq \sum \setminus\{ \rhd , \sqcup \}$.
 Тогава, когато за всяка дума $w \in \sum o *$ са изпълнени условията:
- $(s, \rhd \underline{\sqcup} w) \vdash_M^* (h, \rhd \underline{\sqcup} y)$, за $y \in \sum o * \Leftrightarrow f(w) = y$;
- $f(w)$ е определена $\Leftrightarrow M$ спира работа върху $(s, \rhd \underline{\sqcup} w)$, т.е. $M(w) = y$.

19. Кога една машина на Тюринг изчислява една функция $F : \mathbb{N}^k \nrightarrow \mathbb{N}$ на k променливи. Нека $F : \mathbb{N}^k \nrightarrow \mathbb{N}$. Казваме, че машината на Тюринг $M = < K, \sum, \delta, s, H >$ изчислява функцията F точно тогава, когато са изпълнени следните условия:

- $![F](n_1, \ldots, n_k)$ *е дефинирана* $\Leftrightarrow M(1^{n_1} \sqcup \ldots \sqcup 1^{n_k}) \searrow$ спира работа: $(s, \rhd \underline{\sqcup} 1^{n_1} \sqcup \ldots \sqcup 1^{n_k}) \vdash_M^* (h, \rhd \underline{\sqcup} 1^{f(n_1,\ldots,n_k)})$;
- ако $F(n_1, \ldots, n_k) = m$, то $M(1^{n_1} \sqcup \ldots \sqcup 1^{n_k}) = 1^m$.

20. Теоремата за неразрешимите проблеми на машина на Тюринг свързани с:
а) празната дума;
б) съществуването на вход;
в) стоп-проблема;
г) всеки вход;
д) две машини на Тюринг;
е) регулярните езици;
- Следните проблеми на машината на Тюринг M са неразрешими:
- дали M спира върху празната дума;
- дали M спира върху поне един вход $\big($т.е. дали $\exists w : M(w) \searrow \big)$;
- дали M спира при вход w, $M \searrow$;
- дали M спира за всяки вход $\big($т.е. дали $M(w) \searrow$ за всяко $w\big)$;
- дали за дадени машини на Тюринг M_1 и M_2, M_1 и M_2 спират върху един и същ вход;
- дали $L(M)$ е регулярен език.

ФОРМАЛИЗИРАНЕ НА ОПЕРАЦИИТЕ

21. Операцията минимизация. Нека $f : \mathbb{N}^{n+1} \nrightarrow \mathbb{N}$. Казваме, че $g : \mathbb{N}^n \nrightarrow \mathbb{N}$ се получава от f с помощта на операцията минимизация (μ-операция), ако за произволни $x_1, \ldots . x_n, y$ е изпълнена еквивалентността:
$g(x_1, \ldots, x_n) = y \Leftrightarrow f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \; \& \; \forall z < y : f(x_1, \ldots, x_n, z)$ е *дефинирана и* $f(x_1, \ldots, x_n, z) > 0$.

22. Операцията примитивна рекурсия. Нека $f : \mathbb{N} \nrightarrow \mathbb{N}$ и $g : \mathbb{N}^3 \nrightarrow \mathbb{N}$. Казваме, че $h : \mathbb{N}^2 \nrightarrow \mathbb{N}$ се определя с помощта на операцията примитивна рекурсия от f и g, ако за $\forall x, y \in \mathbb{N}$ е в сила:

$$\begin{cases} h(x,0) = f(x) \\ h(x, y+1) = g(x, y, h(x, y)) \end{cases}.$$

23. Примитивно рекурсивна функция. Индуктивна дефиниция:
а) всички изходни ПРФ $\big(\{O, S, I_i^n\}\big)$ са ПРФ;
б) ако $f, g_1, \ldots, g_n$ са ПРФ, то и функцията h, която се получава от тях с помощта на операцията суперпозиция, също е ПРФ;
в) ако f и g са ПРФ, то и функцията h, която се получава от f и g с помощта на операцията примитивна рекурсия, също е ПРФ.

24. Частично рекурсивна функция. Индуктивна дефиниция:

а) всички изходни ПРФ $\left(\{O, S, I_i^n\}\right)$ са ЧРФ;

б) ако $f, g_1, \ldots, g_n$ са ЧРФ, то и функцията h, която се получава от тях с помощта на операцията суперпозиция, също е ЧРФ;

в) ако f и g са ЧРФ, то и функцията h, която се получава от f и g с помощта на операцията примитивна рекурсия, също е ЧРФ.

г) ако f е ЧРФ, то и g, която се получава от f с μ-операция (минимизация), също е ЧРФ.