Кратки бележки, свързани с матем. логика

Когато доказваме математически твърдения, ние искаме или не искаме използваме математическата логика. Да напомня, че съждение се нарича всяко изречение, за което може да се каже дали е вярно или не. В математиката ние се занимаваме както с прости съждения, така и по-сложни, а също и твърдения, които зависят от някакъв параметър (променлива). Твърденията с променлива се превръщат в конкретни съждения, когато заместим променливата с конкретни обекти от някакво допустимо множество. За това ще се спрем на някои полезни правила, принципи със съответните пояснения. В математиката се интересуваме от верността на съжденията (твърденията), а не от други характеристики – дължина, красота, изразителност и т.н.

Един от важните класове, с които се занимаваме, това са така наречените тавтологии (лог. закони), които са винаги верни. Пример за такава тавтология е следната: Нека p е произволно съждение. Тогава p или (не p) е тавтология. Защо? Защото то е винаги вярно. Най-често ние го установяваме с булевата ф-ция $p \vee (\neg p)$.

Тогава

p	$(\neg p)$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

. Следователно тавтологиите са такива твърдения, чиито съответни булеви ф-ции са $\bar{1}$.

Ще дадем примери на още „тавтологии". Да разгледаме следните булеви функции

1. $[p \wedge (p \to q)] \to q$
2. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
3. $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee q$
4. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \to q) \wedge (q \to p))$
5. $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
6. $p \leftrightarrow (\neg\neg p)$

Ще проверим само второто. Останалите можете да ги проверите сами с таблица.

②

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\neg q) \Rightarrow (\neg p)]$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1

Всъщност, ние доказахме с тази еквивалентност, която е „тавтология", защото $p \Rightarrow q$ като булева ф-ция съвпада с $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$.
Това ни показва, че е обосновано за доказателство на $p \Rightarrow q$, $[(\neg q) \Rightarrow (\neg p)]$ да използваме $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ $[p \Rightarrow q]$, т.е. можем да заместваме съждение от вида $P \Rightarrow Q$ с $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.

1. Първата булева функция показва, че е законно да докажем P и $P \Rightarrow Q$ за да сме сигурни, че е вярно Q
3. Ако искаме да докажем импликацията $P \Rightarrow Q$ P, Q – съждения е необходимо и достатъчно да докажем $(\neg P) \vee Q$.
4. За да докажем една еквивалентност $P \Leftrightarrow Q$ е достатъчно (и необходимо разбира се) да докажем двете импликации $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$.
6. Всяко твърдение P е еквивалентно на двойното отрицание $\neg\neg P$.

Ще отбележа, че по аналогичен начин се използват и така наречените закони на Де Морган.

5. На петото искам да отделя малко повече внимание. Най-напред да направим и на това проверка

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

т.е, двете булеви ф-ции $\neg(p \Rightarrow q)$ и $p \wedge (\neg q)$ имат равни стойности, т.е. те са еквивалентни. Защо обръщам внимание на

(3) Тази еквивалентност? Причината е, че тя се използва най-често, когато допускаме противното на твърдение, което е импликация на две съждения.

Ще продължа още малко за отрицанието на твърдения, но преди това ще се спра на кванторите. Аз не бързах да използвам кванторите, но се надявам, че постепенно сте започнали да ги срещате все по-често. Най-напред ще ги използвам във всички дефиниции, които съм давал досега

1. Деф. Казваме, че $A \subseteq B$ т.т.к. $\forall a (a \in A \Rightarrow a \in B)$.
2. Деф. Казваме, че $A = B$ т.т.к. $\forall a (a \in A \Leftrightarrow a \in B)$
3. Д. $x \in \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ т.т.к. $\exists i (0 \le i \le n \land x \in A_i)$
4. Д. $x \in \bigcap_{i=0}^{n} A_i$ т.т.к. $\forall i (0 \le i \le n \Rightarrow x \in A_i)$
5. Нека $f: A \to B$. Казваме, че f е инективно т.т.к. $\forall a \forall b (a, b \in A \land a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$ т.т.к. $\forall a \forall b (a, b \in A$ и $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$
6. Нека $f: A \to B$. Казваме, че f е сюрективно т.т.к $\forall b (b \in B \Rightarrow \exists a (f(a) = b))$ т.т.к. $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$
7. Нека $\langle A, \le \rangle$ е ч.н.м. Казваме, че a е най-голям елемент в $\langle A, \le \rangle$ т.т.к. $a \in A$ и $\forall b (b \in A \Rightarrow b \le a)$ т.т.к. $a \in A$ и $(\forall b \in A)(b \le a)$.
8. Нека $\langle A, \le \rangle$ е ч.н.м. Казваме, че a е максимален елемент в $\langle A, \le \rangle$ т.т.к. $a \in A$ и $\forall b (b \in A$ и $a \le b \Rightarrow a = b)$ т.т.к. $a \in A$ и $\neg \exists b (a < b)$
9. Нека $\langle A, \le \rangle$ е ч.н.м. и $B \subseteq A$. Казваме, че B е верига в ч.н.м. $\langle A, \le \rangle$ т.т.к. $\forall a \forall b (a \in A \land b \in A \Rightarrow a, b$ са сравними отн. $\le)$
10. Нека $\langle A, B \rangle$ е ч.н.м. и $B \subseteq A$. Казваме, че B е антиверига в $\langle A, \le \rangle$ т.т.к. $\forall a \forall b (a \in A \land b \in A \land a \neq b \Rightarrow a$ и b са несравними отн. $\le)$
11. Нека $\langle A, \le \rangle$ е ч.н.м. и $S \subseteq A$. Казваме, че S е максимална антиверига т.т.к. са изпълнени следните две условия: а) S е антиверига; б) За всяко S' (S' е антиверига $\Rightarrow$

④ $|S'| \le |S|$)

12. Нека $\langle A, \le \rangle$ е ч.н.м. и $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ е фамилия от вериги. Казваме, че $\mathcal{C}$ е минимално верижно разбиване т.т.к.

а) $\mathcal{C}$ е разбиване на A; и

б) $\forall \mathcal{C}'$ ($\mathcal{C}'$ е верижно разбиване $\Rightarrow |\mathcal{C}| \le |\mathcal{C}'|$).

Сега ще се спрем на отрицание на твърдения, които имат квантори. Да вземем един пример на дефиниция на граница на редица.

Д. Казваме, че l е граница на редицата $a_0, a_1, \dots$ $\stackrel{def}{\iff}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N}\ \forall n \ge \nu$ е изп. $|a_n - l| < \varepsilon$ $\iff \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \nu (\nu \in \mathbb{N} \wedge \forall n (n \ge \nu \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon)))$

Сега да видим какво е отрицанието:

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n \ne l$ (l не е граница на $a_0, a_1, \dots$) $\iff$

$\neg \forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \nu (\nu \in \mathbb{N} \wedge \forall n (n \ge \nu \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon))) \iff$

$\exists \varepsilon (\neg (\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \nu (\nu \in \mathbb{N} \wedge \forall n (n \ge \nu \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon)))) \iff$

$\exists \varepsilon (\varepsilon > 0 \wedge \neg \exists \nu (\nu \in \mathbb{N} \wedge \forall n (n \ge \nu \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon))) \iff$

$\exists \varepsilon (\varepsilon > 0 \wedge \forall \nu \neg (\nu \in \mathbb{N} \wedge \forall n (n \ge \nu \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon))) \iff$

$\exists \varepsilon (\varepsilon > 0 \wedge \forall \nu (\nu \notin \mathbb{N} \vee \neg \forall n (n \ge \nu \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon))) \iff$

$\exists \varepsilon (\varepsilon > 0 \wedge \forall \nu (\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \neg \forall n (n \ge \nu \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon))) \iff$

$\exists \varepsilon (\varepsilon > 0 \wedge \forall \nu (\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists n\ \neg (n \ge \nu \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon))) \iff$

$\exists \varepsilon (\varepsilon > 0 \wedge \forall \nu (\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists n (n \ge \nu \wedge |a_n - l| \ge \varepsilon))) \iff$

$\exists \varepsilon > 0\ \forall \nu \in \mathbb{N}\ \exists n \ge \nu (|a_n - l| \ge \varepsilon)$

Както ви е известно такива отрицания са необходими когато доказваме например, че $l = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ с допускане на противното.