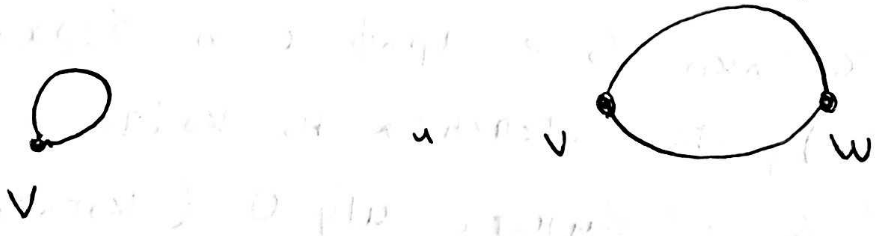
(Неориентирани) Графи

<u>Опр.</u> (Неориентиран) граф ще наричаме всяка наредена двойка $G = (V, E)$ от крайно мн-во V от върхове и крайно мн-во E от ребра между някои от върховете.

За нас ребро м/у върховете v_1 и v_2, $v_1 \neq v_2$ ще бъде мн-вото ~~$v_1 \neq v_2$~~ $\{v_1, v_2\}$. По този начин реброто е дву-елементно мн-во от върхове. Така реброто м/у v_1 и v_2 е същото като това м/у v_2 и v_1.

Понеже E е мн-во, то м/у два върха има най-много 1 ребро.

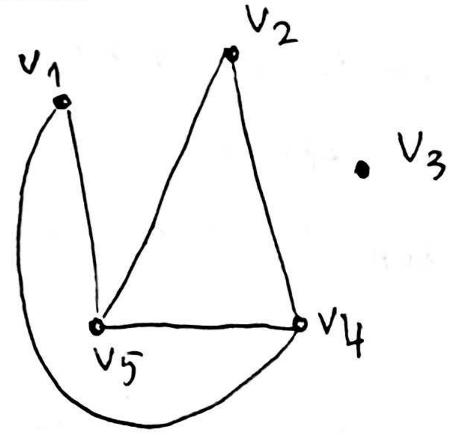
По този начин, в графите които разглеждаме няма ситуации от вида:



примка

две различни ребра м/у два върха

Пример 1. Графът G



G представя като $G = (V, E)$, където:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E = \{\{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$

Опр. Степен на върха v на G е броят на ребрата от E, в които участва v:

$$\deg(v) = \sum_{\substack{v \in e \\ \& e \in E}} 1$$

Пример 2. В горния граф G:

$\deg(v_1) = 2$, $\deg(v_2) = 2$, $\deg(v_3) = 0$

$\deg(v_4) = 3$, $\deg(v_5) = 3$.

Забележете, че ако G е граф с n върха (т.е. $|V| = n$), то степента на който и да е връх на G е винаги м/у 0 (когато от него не излизат никакви ребра) и $n-1$ (когато има ребра до всеки един от останалите върхове):

$$\forall v \in V \ (0 \leq \deg(v) \leq n-1).$$

Теорема. (Формула на Ойлер). Нека $G=(V,E)$ е граф.

Тогава: $$2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v).$$

// С други думи, сумата от степените на всички върхове на G е точно два пъти броят на ребрата на G.

Зад. 1. Докажете, че във всеки граф, броят на върховете от нечетна степен е четно число.

док.: Нека $G=(V,E)$ е произволен граф. Нека V_0 е мн-вото на върховете от четна степен, а V_1 – на върховете от нечетна. Така $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ и $V_0 \cup V_1 = V$. След. $|V| = |V_0| + |V_1|$. Освен това

$$2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) = \sum_{v\in V_0} \deg(v) + \sum_{v\in V_1} \deg(v).$$

$\sum_{v\in V_0} \deg(v)$ е сума от четни числа ($v\in V_0 \Rightarrow \deg(v)$ е четно) и след. е четно число; така $\sum_{v\in V_1} \deg(v) = 2|E| - \sum_{v\in V_0} \deg(v)$ също е четно; но $\sum_{v\in V_1} \deg(v)$ е сума само от нечетни числа ($v\in V_1 \Rightarrow \deg(v)$ е нет.) След. броят на събираемите в нея е четно число; този брой е точно $|V_1|$, т.е. броят на върховете от нечетна степен.

Зад.2. Нека $G=(V,E)$ е граф с поне 2 върха. Док, че в G има поне два върха от еднаква степен.

док.: Нека G е граф, за който $|V| \geq 2$ и да допуснем, че $\forall$ за всеки два различни върха $v \neq w$ на G имаме, че $deg(v) \neq deg(w)$.

Нека броят на върховете на G е n, $|V| = n \geq 2$. Тогава за вс. $v \in V$, $deg(v) \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (защото $0 \leq deg(v) \leq n-1$), т.е. има най-много n възможности за това. Понеже всеки връх е от различна степен, а върховете са точно n, то за вс. $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ същ. връх $v_i \in V$ от степен i.

Но тогава v_0 не участва в нито едно ребро на G, а v_{n-1} е директно свързан с всеки друг връх (останалите върхове са точно $n-1$). В частност има ребро м/у v_{n-1} и v_0. Противоречие. След. има поне 2 върха, участващи в еднакъв брой ребра.

Опр. Път в неориентирания граф $G=(V,E)$ наричаме последователност от върхове на G: $v_1, v_2, \ldots, v_n$

Такава, че:

- $\forall i,\ v_i \in V$
- $\forall i,\ \{v_i, v_{i+1}\} \in E$
- ~~в път~~ няма повтарящи се ребра

$(\text{т.е. } \forall i \neq j\ (\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\})$.

- единствените два върха, които могат да съвпадат в редицата са първият и последния, т.е. v_1 и v_n. В този случай ще пътят $v_1, \dots, v_n$ ще наричаме цикъл.

<u>Пример.3</u> Нека G е графът от Пример.1.

Път: v_1, v_5, v_2, v_4, v_1 (това е и цикъл)

Път: v_2, v_5, v_4, v_1

Път: v_5, v_4

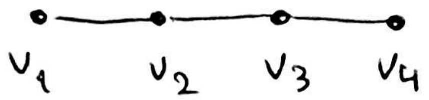
Не е път: $v_1, v_5, v_2, v_4, v_5, v_1$ (v_5 се среща 2 пъти)

v_2, v_4, v_3, v_1, v_5 ($\{v_4, v_3\}$ не е ребро).

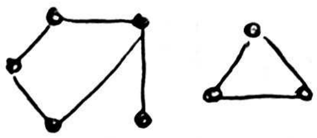
v_1, v_4, v_1 ($\{v_1, v_4\}$ се повтаря 2 пъти)

<u>Опр.</u> Казваме, че G е <u>свързан</u> граф, ако м/у всеки два негови различни върха има път.

<u>Примери. 4.</u> G от <u>Пример 1</u> не е свързан: v_3 не се свързва чрез път с никой от останалите върхове.

2) 

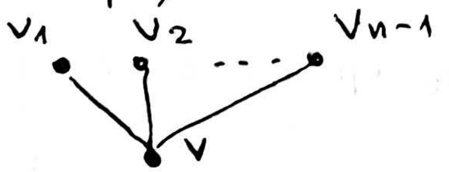
свързан

3) 

не е свързан

<u>Зад. 3.</u> Нека G е граф с n върха и повече от $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ~~върха~~ ребра. Док., че G е свързан.

<u>док.:</u> Ако G има връх от степен $n-1$, то той ще бъде свързан, понеже м/у този връх и всеки един от останалите ще има ребро. Така всеки два върха на G ще бъдат свързани чрез път, в който има най-много 2 ребра:



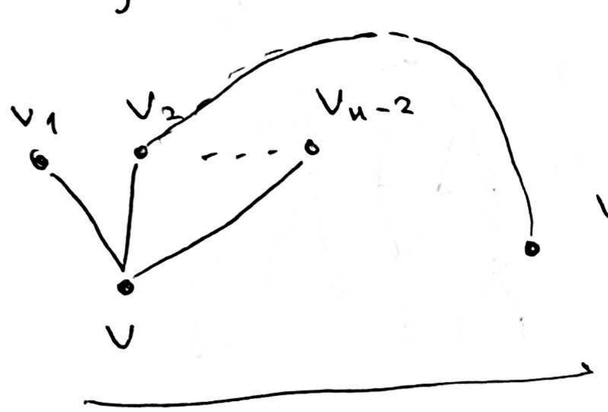
Нека сега G е граф, в който няма връх от степен $n-1$. Тогава в G задължително да има връх от степен $n-2$. Наистина, да допуснем противното. Така всеки връх в G е от степен $\leq n-3$. Тогава

$$(n-1)(n-2) < 2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \leq n(n-3), \text{ т.е.}$$

$$n^2-3n+2 < n^2-3n.$$ Противоречие.

Нека v е връх от степен $n-2$. Нека има ребра м/у v и $v_1, \dots, v_{n-2}$. Нека w е ~~връх~~ върхът, м/у който и v няма ребро. Така $w \neq v, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$. Тогава трябва да има ребро м/у w и поне един от върховете $v_1, \dots, v_{n-2}$ (откъдето G ще бъде свързан).

Наистина, да допуснем, че w не е свързан с нито един от върховете $v_1, \dots, v_{n-2}$ чрез ребро. Понеже няма ребро м/у w и v, то $\deg(w) = 0$ и вс. връх от $v_1, \dots, v_{n-2}$



има степен най-много $n-2$ (не е свързан чрез ребро поне с w и със себе си).

Така:

$$(n-1)(n-2) < 2|E| = \sum_{u \in V} \deg(u) = \deg(v) + \sum_{i=1}^{n-2} \deg(v_i) + \deg(w)$$

$$\leq n-2 + (n-2)(n-2) + 0 = (n-1)(n-2),$$ т.е.

$$(n-1)(n-2) < (n-1)(n-2)$$ — Противоречие.

Така има ребро м/у w и поне един от $v_1, \dots, v_{n-2}$

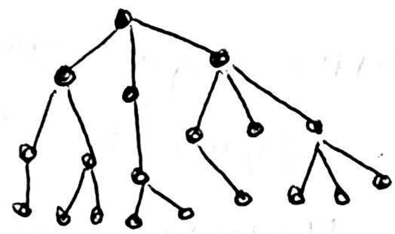
След. G е свързан.

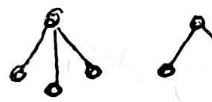
Дървета

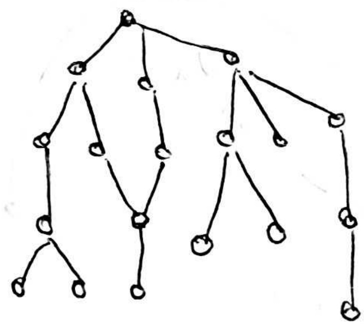
<u>Опр.</u> Казваме, че графът G е <u>дърво</u>, ако между всеки две негови върха има единствен път.

В частност, всяко дърво е свързан граф.

<u>Примери:</u> 1) дървета: а)  б) 

в)  г) 

2) Не дървета: а)  б) 

в)  г) 

<u>Теорема.</u> (Характеризация на дърветата). Нека $G=(V,E)$ е граф. Следните са еквивалентни:

1.) G е дърво;

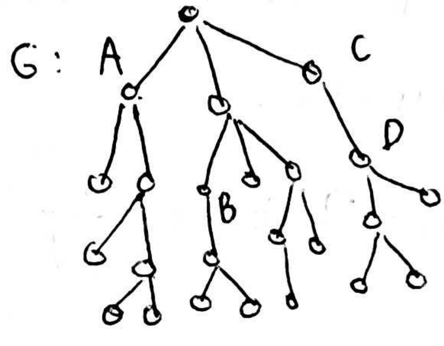
2.) G е свързан граф без цикли;

3.) G е ацикличен и добавянето на каквото и да е ребро м/у негови върхове го превръща в цикличен;

4) G е свързан и премахването на което и да е ребро м/у негови върхове го превръща в несвързан;

5) G е свързан и $|E| = |V| - 1$

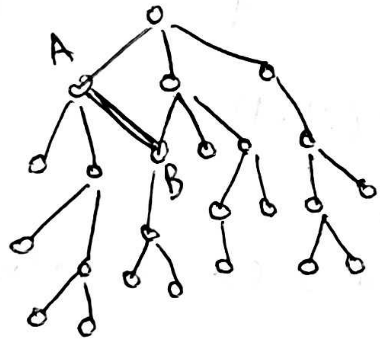
<u>Примери:</u> За 3). G:



добавяме реброто AB $\longrightarrow$

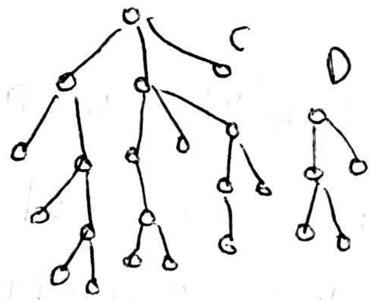
дърво

G:



Не е дърво — има цикъл

За 4) от G махаме реброто CD



Не е дърво, защото не е свързан (няма път м/у C и D).

<u>Зад. 4.</u> Нека $G=(V,E)$ е свързан ацикличен граф с N върха, в който всеки връх е от степен 1 или 4. Док., че $N+1$ се дели на 3 и намерете броя на върховете от степен 1.

док.: Да означим с x броя на върховете от степен 1. Тогава броят на върховете от степен 4 е $N-x$. Понеже G е свързан граф без цикли, то G е дърво. Следователно $|E| = |V| - 1 = N-1$. Сега от формулата на Ойлер имаме:

$$2(N-1) = 2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \underbrace{x \cdot 1}_{\substack{x \text{ върха} \\ \text{от степен} \\ 1}} + \underbrace{(N-x) \cdot 4}_{\substack{N-x \\ \text{върха} \\ \text{от степен } 4}}$$

Оттук намираме: $x = \frac{2(N+1)}{3}$.

Но $x \in \mathbb{N}$ и понеже 2 и 3 са взаимно прости, то $3 \mid (N+1)$.

Зад.5. Нека $G = (V, E)$ е свързан граф с $2n$ върха, като n от тях имат степен поне 3. Док., че в G има цикъл.

док.: Да допуснем, че в G няма цикъл. Понеже G е свързан, то G е дърво. След. $|E| = |V| - 1 = 2n-1$. Така, по формулата на Ойлер: $2(2n-1) = 2|E| =$

$$= \sum_{v \in V} \deg(v) \geq \underbrace{n \cdot 3}_{\substack{n \text{ от върховете} \\ \text{има степен } \geq 3}} + \underbrace{n \cdot 1}_{\substack{G \text{ е свързан, следователно} \\ \text{всеки от останалите } n \text{ върха} \\ \text{участва в поне 1 ребро}}} = 4n$$ — Противоречие.