Затвореност на автоматните езици относно регулярните операции $(\cup, \circ, *)$, сечение и допълнение.

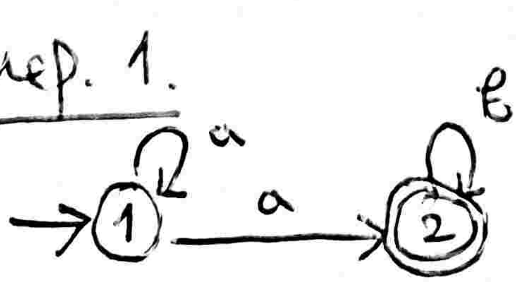
Нека $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, I', F', \Delta')$ и $\mathcal{A}'' = (Q'', \Sigma, I'', F'', \Delta'')$ са КА като $Q' \cap Q'' = \emptyset$ (т.е. нямат общи съст.).

1) <u>Обединение.</u> КА $\mathcal{A}_\cup = (Q' \cup Q'', \Sigma, I' \cup I'', F' \cup F'', \Delta' \cup \Delta'')$ има език равен на обединението на езиците на $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$: $L(\mathcal{A}_\cup) = L(\mathcal{A}') \cup L(\mathcal{A}'')$.

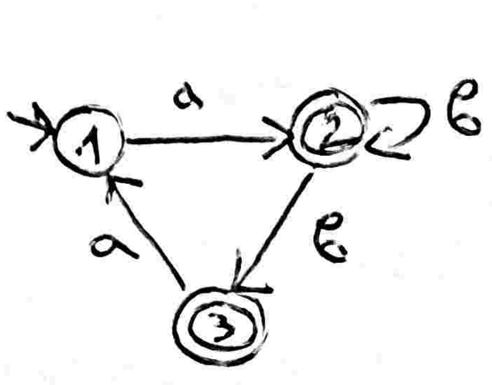
Наистина, всеки успешен път в $\mathcal{A}_\cup$ е такъв в ~~точно~~ един от КА $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$. Обратно, всеки успешен път в който и да е от $\mathcal{A}'$ или $\mathcal{A}''$ е успешен и в $\mathcal{A}_\cup$.

<u>Пример. 1.</u>

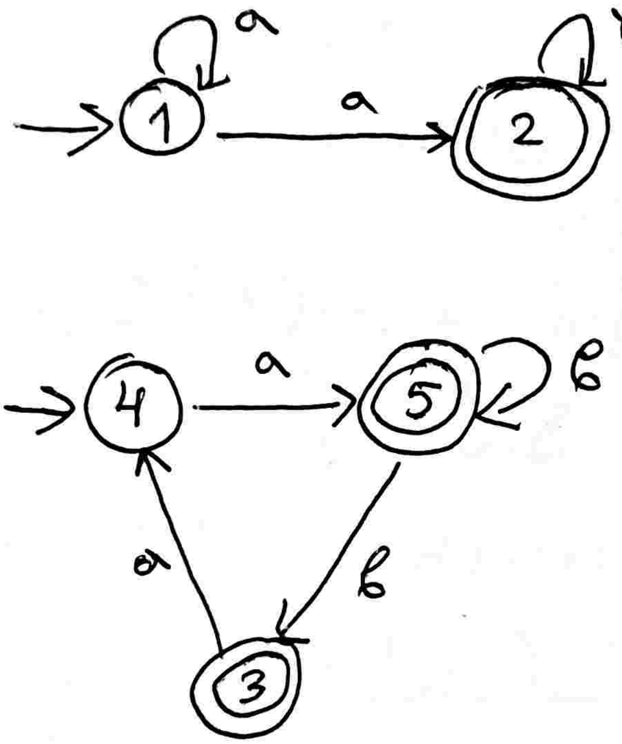
$\mathcal{A}'$:



$\mathcal{A}''$:



Понеже $Q' \cap Q'' \neq \emptyset$, преименуваме състоянията на $\mathcal{A}''$ – това по никакъв начин няма да промени думите, които разпознава: $1 \to 4$, $2 \to 5$;
Така автомат с език $L(\mathcal{A}') \cup L(\mathcal{A}'')$ е:



- обединението на детерминирани автомати не е детерминиран КА.

2) Сечение. КА $\mathcal{A}_\cap$ с език $L(\mathcal{A}_\cap) = L(\mathcal{A}') \cap L(\mathcal{A}'')$ е

$$\mathcal{A}_\cap = (Q' \times Q'', \Sigma, I' \times I'', F' \times F'', \Delta),$$

където:

$$\Delta = \{((q', q''), a, (p', p'')) \mid (q', a, p') \in \Delta' \ \& \ (q'', a, p'') \in \Delta''\}$$

Така, всяко състояние на $\mathcal{A}_\cap$ има две компоненти: първата е състояние на $\mathcal{A}'$, а втората — съст. на $\mathcal{A}''$.

Един преход е в $\mathcal{A}_\cap$, ако проекцията на първите компоненти на състоянията е преход в $\mathcal{A}'$, а проекцията на вторите компоненти на съст. е преход в $\mathcal{A}''$ като двете проекции имат един и същи етикет:

$$\underset{\text{в } \mathcal{A}_\cap}{(q', q'') \xrightarrow{a} (p', p'')} \iff \underset{\text{в } \mathcal{A}'}{q' \xrightarrow{a} p'} \text{ и } \underset{\text{в } \mathcal{A}''}{q'' \xrightarrow{a} p''}$$

Така $w = a_1 a_2 \dots a_n$ е етикет на успешен път в $\mathcal{A}_\cap$

$$(q'_0, q''_0) \xrightarrow{a_1} (q'_1, q''_1) \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} (q'_{n-1}, q''_{n-1}) \xrightarrow{a_n} (q'_n, q''_n)$$

тогава и само тогава, когато пътищата

$$q'_0 \xrightarrow{a_1} q'_1 \xrightarrow{a_2} q'_2 \dots q'_{n-1} \xrightarrow{a_n} q'_n \text{ и}$$

$$q''_0 \xrightarrow{a_1} q''_1 \xrightarrow{a_2} q''_2 \dots q''_{n-1} \xrightarrow{a_n} q''_n$$

са успешни съответно в $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$.

Така $L(\mathcal{A}_\cap) = L(\mathcal{A}') \cap L(\mathcal{A}'')$.

<u>Пример. 2.</u> (a) $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$ от Пример.1.

• начално със. на $\mathcal{A}_\cap$ (1, 1)

1. <u>преходи от (1, 1):</u> От $1 \xrightarrow[\mathcal{A}']{a} 1$,

$1 \xrightarrow[\mathcal{A}']{a} 2$ и $1 \xrightarrow[\mathcal{A}'']{a} 2$, то в $\mathcal{A}_\cap$

$$(1,1) \xrightarrow[A_\cap]{a} (1,2) \quad \text{и} \quad (1,1) \xrightarrow[A_\cap]{a} (2,2)$$

Понеже няма преходи от 1 с b в $\mathcal{A}'$, то няма преход от (1, 1) с b в $\mathcal{A}_\cap$.

2. <u>преходи от (1, 2):</u> В $\mathcal{A}''$ няма преход от 2 с <u>a</u>, след. в $\mathcal{A}_\cap$ няма преход от (1,2) с <u>a</u>. В $\mathcal{A}'$ няма преход от 1 с <u>b</u>, след. в $\mathcal{A}_\cap$ няма преход от (1,2) с <u>b</u>. Така от (1,2) няма изходящи преходи.

3. <u>преходи от (2,2):</u> От (2,2) няма преход с <u>a</u>, защото в $\mathcal{A}'$ няма преход от 2 с <u>a</u>. Обаче в $\mathcal{A}'$: $2 \xrightarrow{b} 2$ и

4)

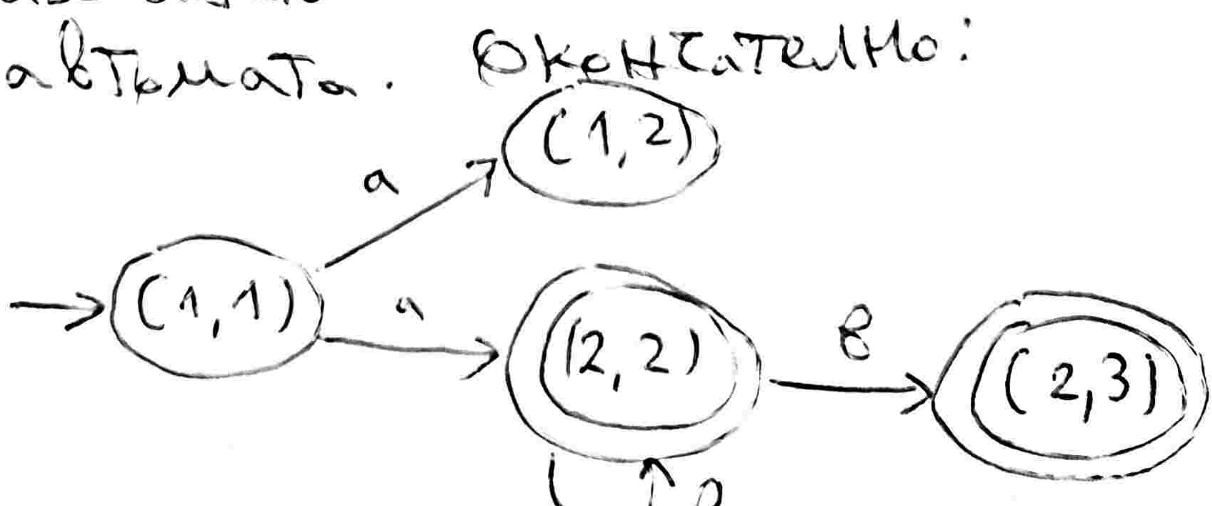
в A'': $2 \xrightarrow{b} 2$ и $2 \xrightarrow{b} 3$.

След. в $A_\cap$: $(2,2) \xrightarrow{b} (2,2)$ и $(2,2) \xrightarrow{b} (2,3)$.

3. преходи от $(2,3)$: Няма преходи с a, защото в A' няма преход от 2 с a; Няма преходи с b, защото в A'' няма преходи от 3 с b

• финални състояния: само тези, чиито компоненти са финални, съств. в A' и A'': $(2,2)$ и $(2,3)$.

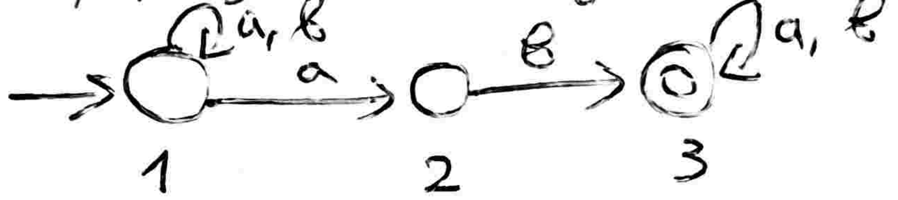
Всички останали състояния не могат да бъдат достигнати от началното състояние; т.е. не лежат на нито един успешен път; така премахването им не променя езика на автомата. Окончателно:

$A_\cap$: 

(б) Намерете автомат с език равен на $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ има инфикс ab и инфикс $ba \}$.

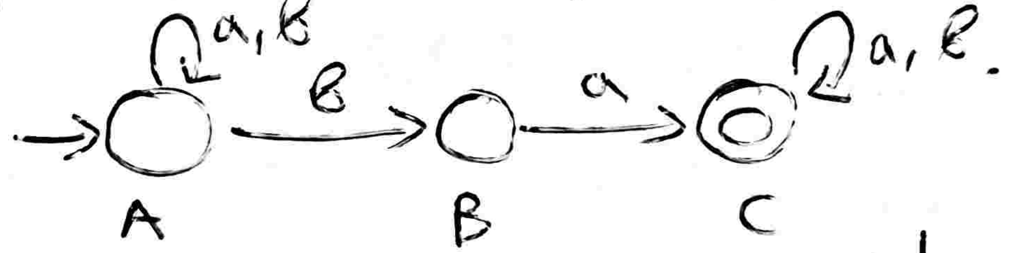
Имаме, че $L = \{ w \in \Sigma^* \mid w$ има инфикс $ab \} \cap \{ w \in \Sigma^* \mid w$ има инфикс $ba \} = L' \cap L''$.

Автомат, разпознаващ L' е

$\mathcal{A}'$: 

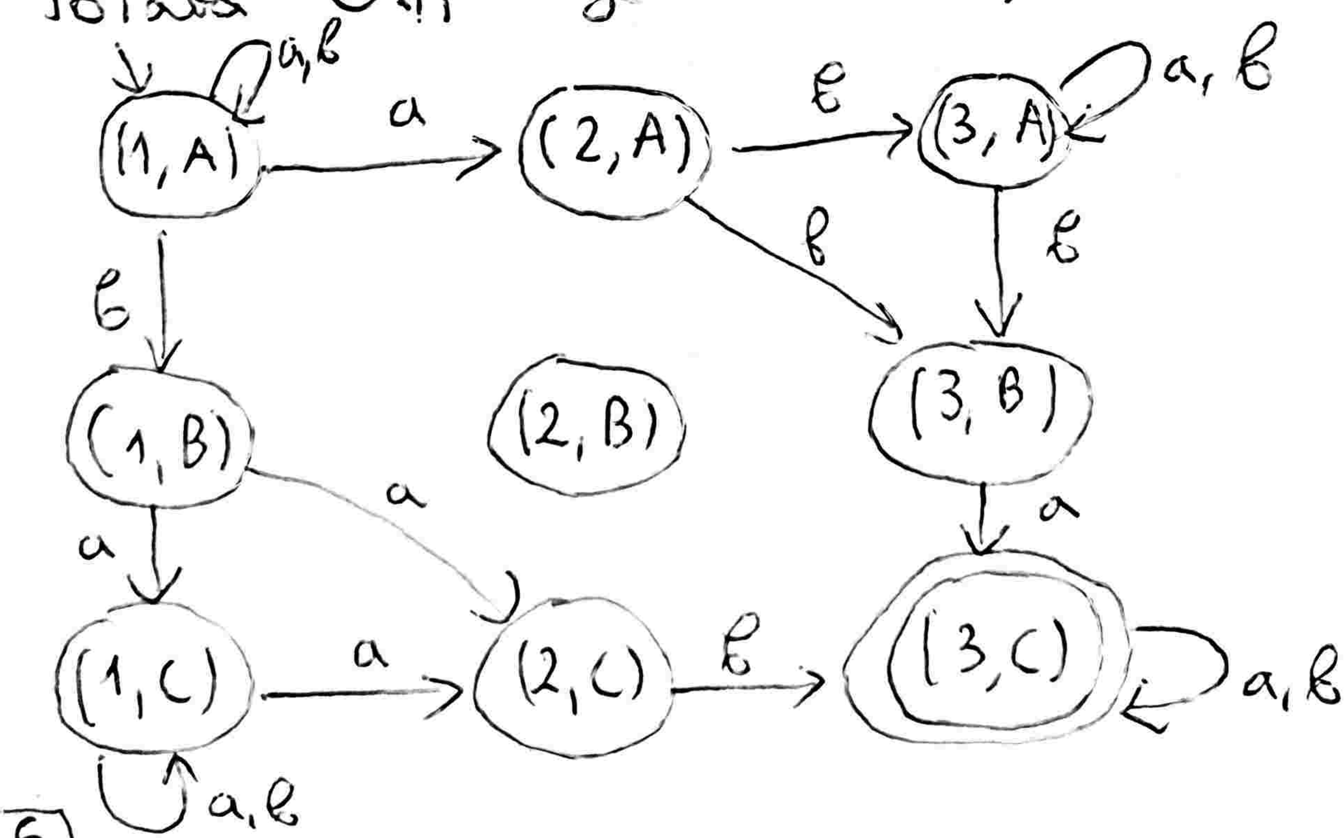
, а

такъв, разпознаващ L'' е

$\mathcal{A}''$: 

.

Тогава $\mathcal{A}_\cap$ ще има език $L' \cap L''$:



като състоянието $(2, B)$ е недостижимо от началното и може да бъде премахнато.

Упражнение. Постройте автомат, който разпознава $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a$ е нечетно и $|w|_b$ е четно$\}$

Св-во. Ако $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$ са детерминирани, то $\mathcal{A}_\cap$ също е детерминиран.

---

3. допълнение. Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е език над Σ, който се разпознава от КА $\mathcal{A}$. Тогава $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ също е автоматен език, т.е. има КА $\mathcal{B}$, т.ч. $L(\mathcal{B}) = \overline{L}$.

Действително, нека $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ е тотален краен детерминиран автомат с език $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A}) = L$. $\mathcal{A}'$ може да се намери ефективно по $\mathcal{A}$:

ако $\mathcal{A}$ е недетерминиран, то A_d (от алгоритъма за детерминизация) е тотален КДА с $L(\mathcal{A}_d) = L(\mathcal{A})$; ако пък $\mathcal{A}$ е КДА, който не е тотален, то той се тотализира с добавянето на ново състояние, което хваща всички недефинирани преходи в $\mathcal{A}$.

Тогава КА $\mathcal{B} = (Q, \Sigma, q_0, Q \setminus F, \delta)$ (само сме сменили финалността на състоянията в $\mathcal{A}'$) има език $L(\mathcal{B}) = \overline{L}$.

Наистина, понеже $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}$ са тотални и детерминирани за вс. дума $w = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^*$ има точно един път през тях, общ и за $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}$.
Нека $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \ldots \xrightarrow{a_n} q_n$ е пътят през $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}$. Тогава: $w \in L(\mathcal{B})$ $\iff$ $q_n \in Q \setminus F \iff w \notin L(\mathcal{A}') \iff w \in \overline{L}$.

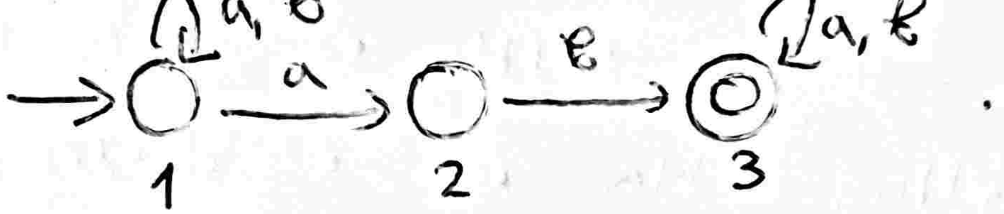
Пример 3. Намерете КДА с език

$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid ab$ не е инфикс на $w\}$.

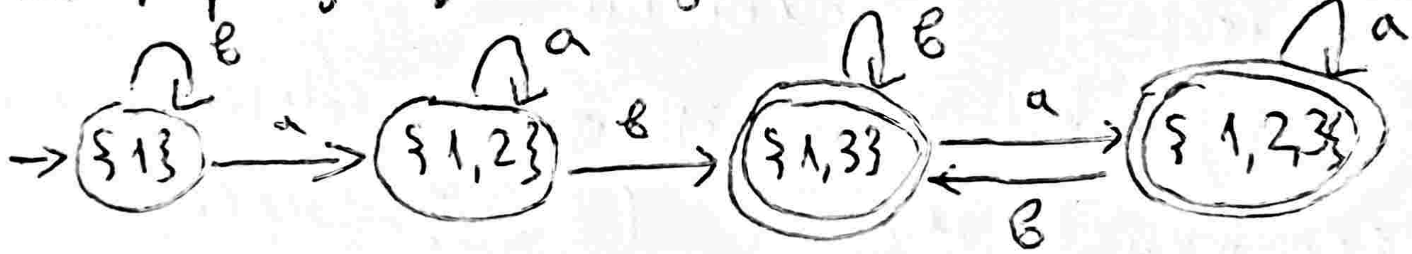
Нека $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid ab$ е инфикс на $w\}$.

Тогава $L = \{a,b\}^* \setminus L_1 = \overline{L_1}$.

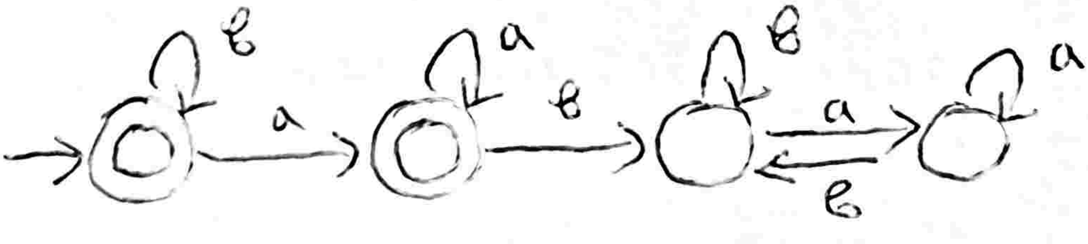
L_1 се разпознава от КА:

$\mathcal{A}$: 

КДА, разпознаващ L_1 е $\mathcal{A}_d$:



който е и тотален. След. L се разпознава от:

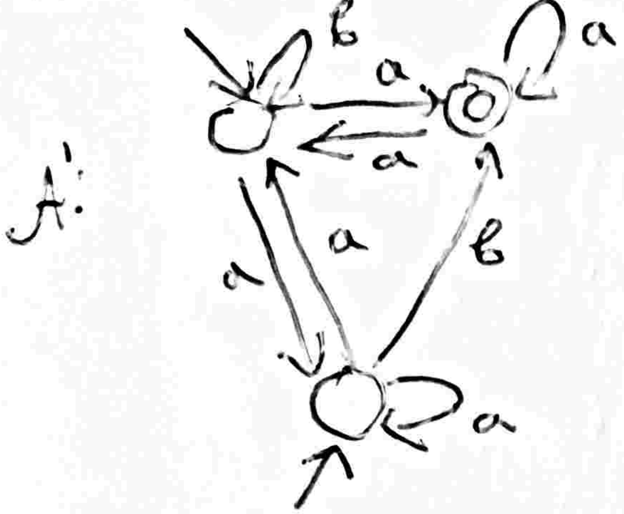


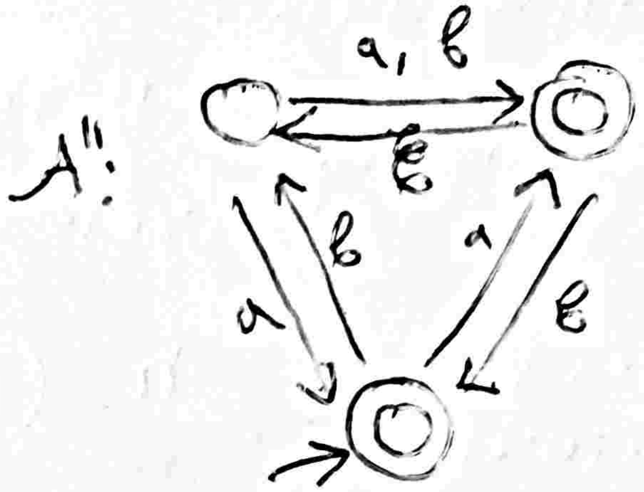
4) Конкатенация. КА $\mathcal{A}$ с език равен на $L(\mathcal{A}') \cdot L(\mathcal{A}'')$ има:

- състояния: $Q' \cup Q''$

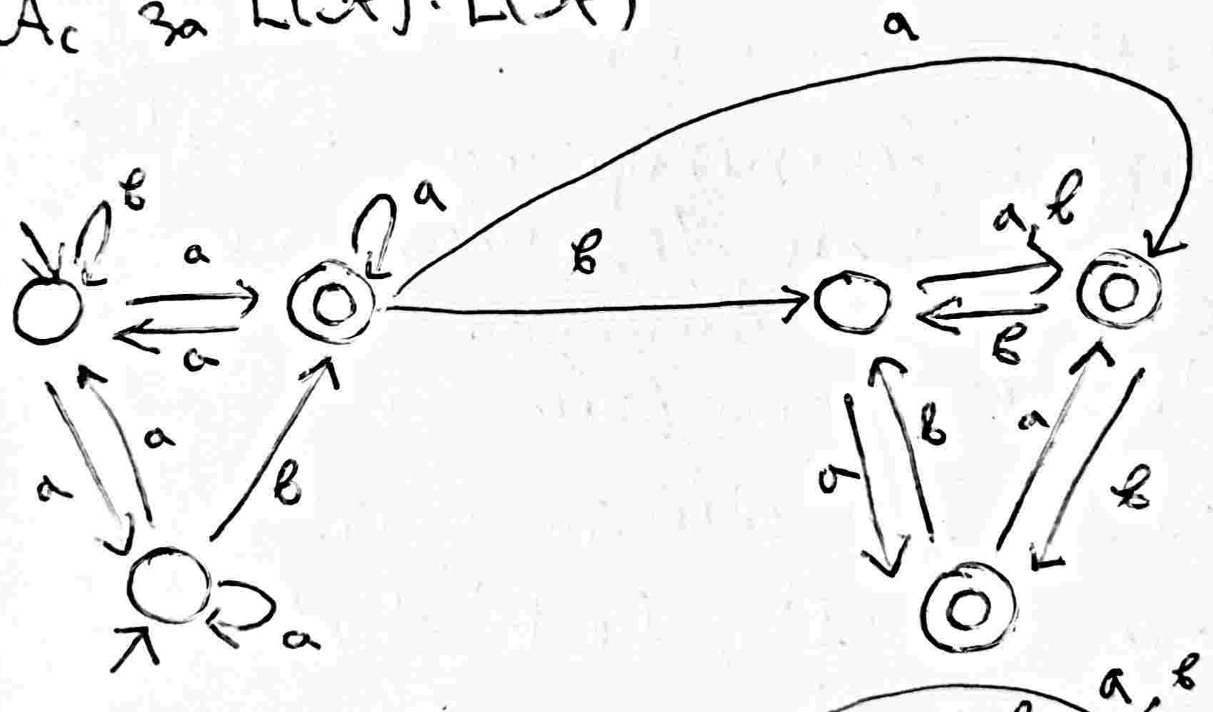
- начални състояния: началните състояния I' на $\mathcal{A}'$;
- финални състояния: финалните състояния F'' на $\mathcal{A}''$; финалните състояния F' на $\mathcal{A}'$ са финални в $\mathcal{A}_c$ тогава и само тогава, когато поне едно от ~~...~~ началните състояния на $\mathcal{A}''$ е било и финално; т.е. когато $I'' \cap F'' \neq \emptyset$.
- преходи: преходите в $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$ остават; ~~...~~ всяко едно от финалните състояние на $\mathcal{A}'$ (независимо дали е финално в $\mathcal{A}_c$) се добавят преходите на всяко едно от началните състояния на $\mathcal{A}''$; т.е. ако $f \in F'$, $i \in I''$ и в $\mathcal{A}''$ има преход $i \xrightarrow{a} q$, то в $\mathcal{A}_c$ се добавя прехода $f \xrightarrow{a} q$.

Пример. 4.

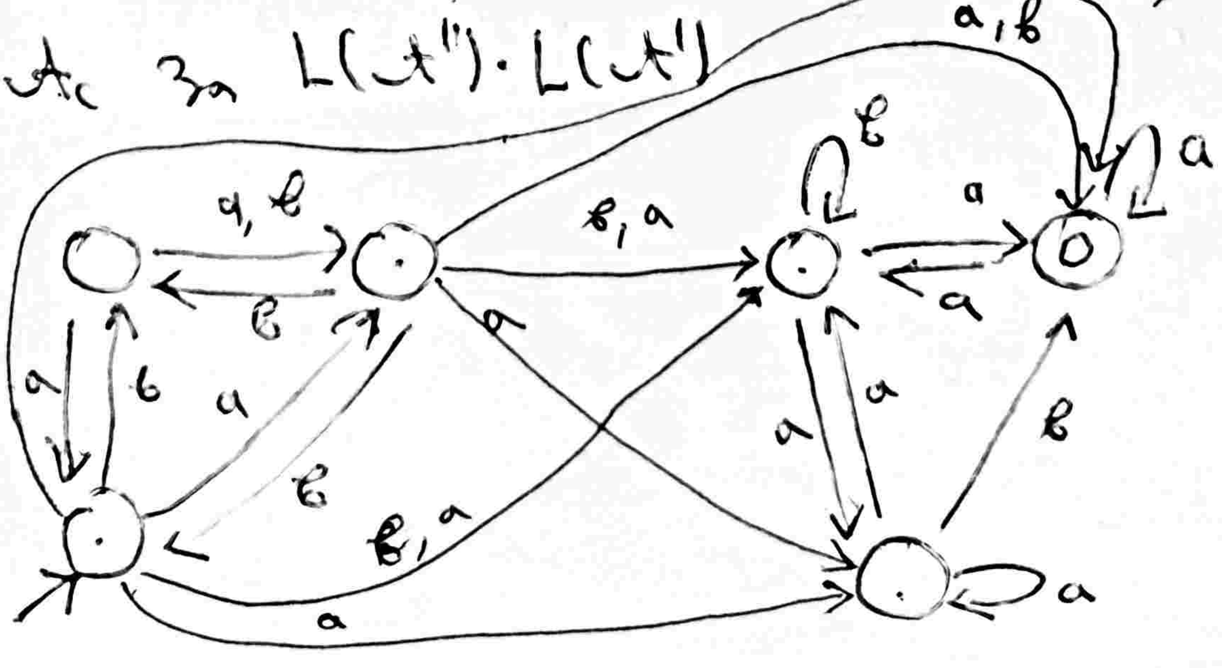




• A_c за $L(A') \cdot L(A'')$



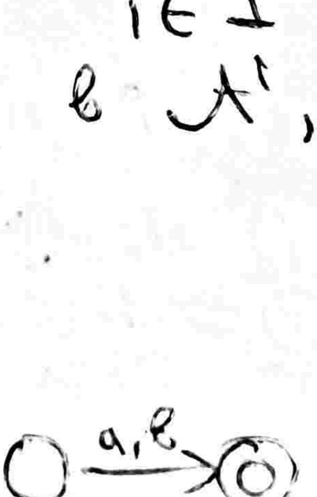
• A_c за $L(A'') \cdot L(A')$



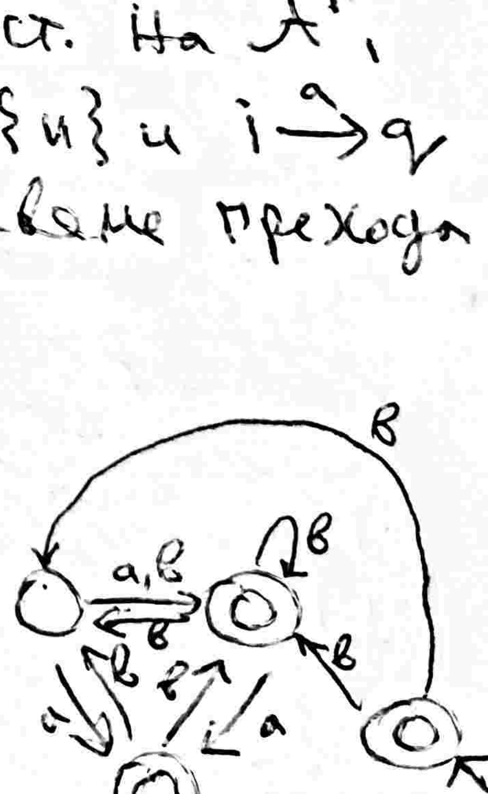
5) Итерация. КА $\mathcal{A}_*$ с език равен на $L(\mathcal{A}')^*$ има:

- състояния: $Q' \cup \{n\}$, $n \notin Q'$ ново състояние
- начални състояния: n (новодобавеното съст.)
- финални състояния: $F' \cup \{n\}$
- преходи: всички преходи в $\mathcal{A}'$; към вс. състояния, които са финални в $\mathcal{A}'_*$ (т.е. от $F' \cup \{n\}$) добавяме изходящите преходи на началните съст. на $\mathcal{A}'$, т.е. ако $i \in I'$, $f \in F' \cup \{n\}$ и $i \xrightarrow{a} q$ е преход в $\mathcal{A}'$, то добавяме прехода $f \xrightarrow{a} q$.

Пример.5.



$\mathcal{A}_*$:



Пример 6. Намерете КА с език, равен на този на регулярния израз: $(a(ab)^*b)^*$.

(1) 

за a

(2) 

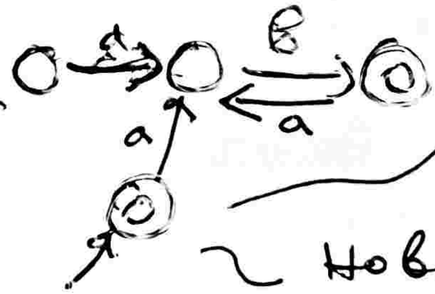
за в

(3) за ав: 

това не е вече финално, защото началното на десния авт. не е финално

това състояние е недостижимо от началното и може да се махне.

ав: 

(4) $(ab)^*$: 

всички финални „симулират" преходите на старото начално.

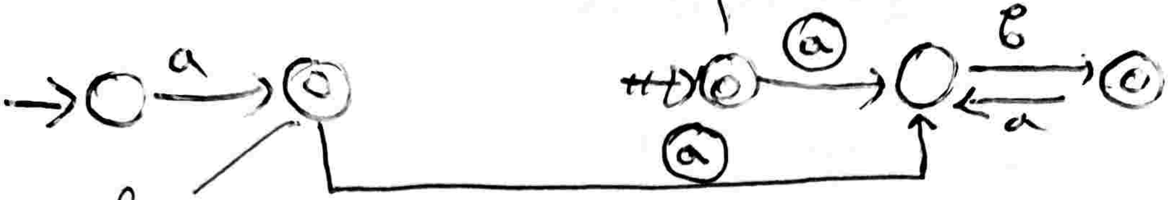
старото начално е недостижимо от новото начално и може да се премахне.

ново начално съст., което е и финално

$(ab)^*$:

(5) a(ab)*:

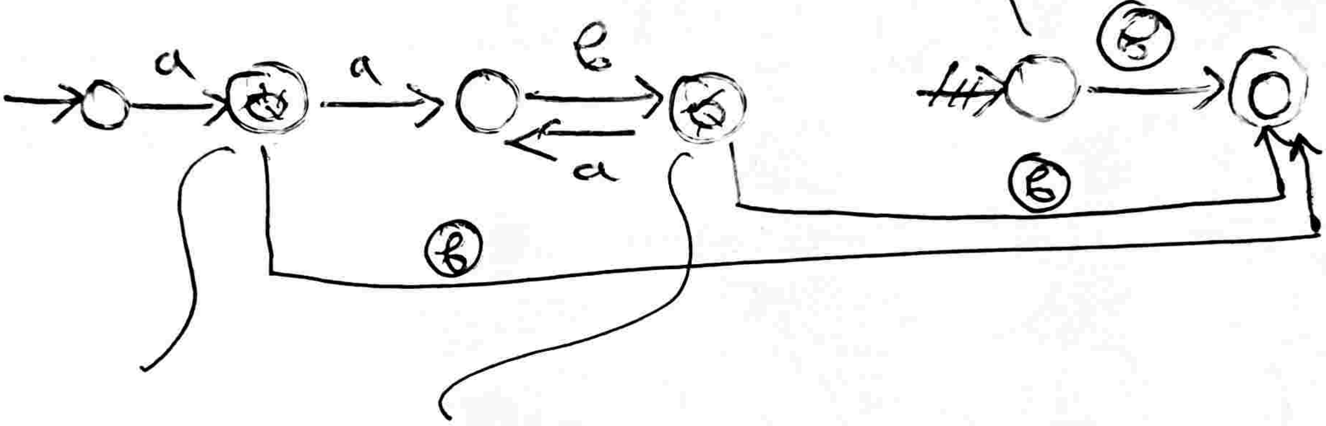
Недостижимо



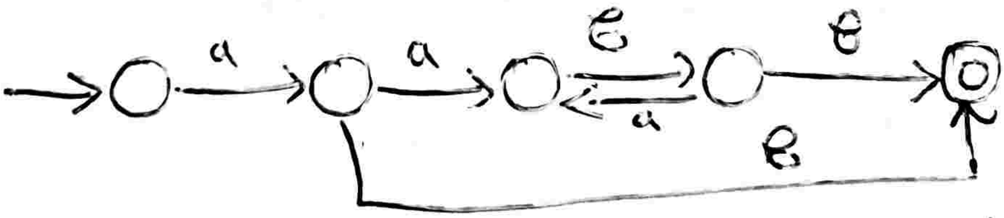
остава финално, защото началното на десния авт. е финално.

(6) a(ab)*b

Недостижимо в новия авт.

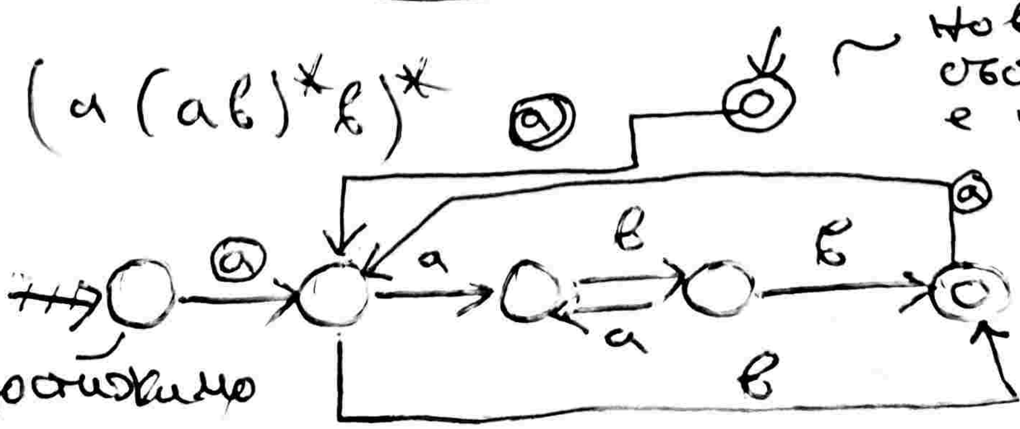


вече не са финални, защото началното състояние на десния автомат не е финално.

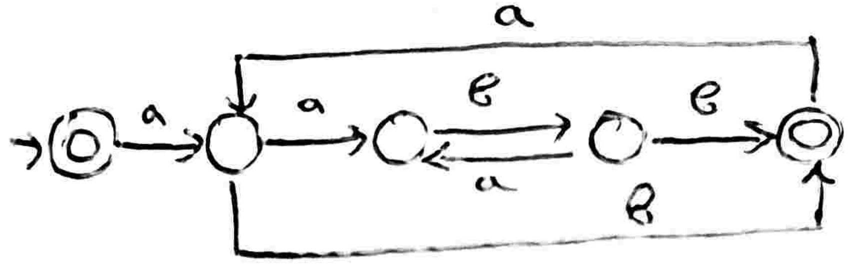


(7) (a(ab)*b)*

ново начално състояние, което е и финално;

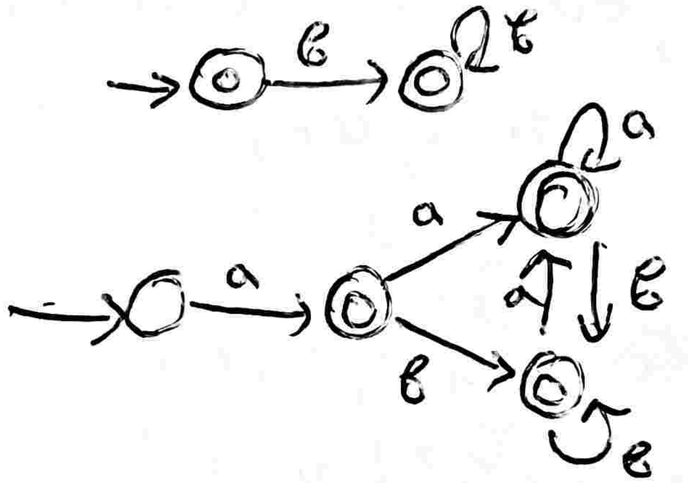


недостижимо в A_k.



Зад. за упражнение. Използвайки предишните конструкции, постройте КА с език, равен на този на рег. израз: $a(a\cup b)^* \cup b^*$

Отг.:



6) Частни.

Опр. Нека $L\subseteq\Sigma^*$ и $u\in\Sigma^*$. (Ляво) частно на L по u наричаме езика:

$$u^{-1}L = \{v\in\Sigma^* \mid uv\in L\}$$

Пример. 0. За вс. $u\in\Sigma^*$, $u^{-1}\emptyset=\emptyset$.

1. $a^{-1}\{w\in\{a,b\}^* \mid |w|_a \text{ е четно}\} =$
$= \{w\in\{a,b\}^* \mid |w|_a \text{ е нечетно}\}$

2. $\Sigma = \{a, b\}$, $L = \Sigma^* aba \Sigma^*$. Тогава:

$\varepsilon^{-1}L = L$, $a^{-1}L = \Sigma^* aba \Sigma^* \cup ba\Sigma^*$

$b^{-1}L = L$, $(ab)^{-1}L = \Sigma^* aba \Sigma^* \cup a\Sigma^*$

<u>Св-во</u>. Ако L се разпознава от автомат (т.е. L е регулярен), то за вс. <u>u</u>, езикът $u^{-1}L$ е регулярен.

Нещо повече, ако $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ е КДА, който е тотален, то $u^{-1}L$ се разпознава от КДА

$$\mathcal{A}_u = (Q, \Sigma, \delta^*(q_0, u), F, \delta).$$

Наистина, $u^{-1}L = \{v \in \Sigma^* \mid uv \in L\} =$

$= \{v \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, uv) \in F\} =$

$= \{v \in \Sigma^* \mid \delta^*(\delta^*(q_0, u), v) \in F\}$

$= L(\mathcal{A}_u)$.

$\delta^*(q_0, u)$ е единствено състояние на $\mathcal{A}$, до което се стига започвайки от q_0 и следвайки <u>u</u>: $q_0 \xrightarrow{u} \delta^*(q_0, u)$