Решетки. Булеви алгебри

Сега ще разгледаме нови дискретни структури, които както ще видим са един нов поглед на стари известни такива. Да започнем с една дефиниция.

Д. Алгебра се нарича структурата $\mathcal{A} = \langle A; f_1, \dots, f_k \rangle$, където A е непразно множество, а $f_1, \dots, f_k$ са функции (операции) $f_i: A^{n_i} \to A$, $i = 1, \dots, k$.

Д. Решетка се нарича алгебра $\mathcal{A} = \langle A; \vee, \wedge \rangle$ с две бинарни операции, които удовлетворяват следните свойства:
а) асоциативност; б) комутативност; в) идемпотентност, т.е. $x \vee x = x$ и $x \wedge x = x$ за всички $x \in A$;
г) поглъщане, т.е. $x \vee (x \wedge y) = x$ и $x \wedge (x \vee y) = x$ за пр. $x, y \in A$.

Пример на решетка е $\langle J_2; \vee, \wedge \rangle$, където $J_2 = \{0, 1\}$, а $\vee$ и $\wedge$ са съответно дизюнкция и конюнкция.

За да посочим по-общ клас от решетки нека разгледаме едно частично наредено множество $\langle A, \leq \rangle$. Нека $B \subseteq A$. Елементът $s \in A$ се нарича горна граница на B, ако за всяко $b \in B$ е изпълнено, че $b \leq s$. Елементът i се нарича долна граница за B, ако за всяко $b \in B$ е изпълнено $i \leq b$.

Една горна граница s' на B се нарича точна горна граница на B (супремум на B) и се означава със $\sup B$ т.т.к. за всяка горна граница s за B е изпълнено, че $s' \leq s$.
Очевидно е, че този супремум е единствен. Ако допуснем, че s', s'' са два супремума за B, то $s' \leq s''$ и $s'' \leq s'$. Откъдето, $s' = s''$. За това ние можем да въведем озн. $\sup B$.
Една долна граница i' на B се нарича точна долна граница на B (инфимум на B) и се означава с $\inf B$ т.т.к. за всяка долна граница i на B е изп., че $i' \leq i$.
Ясно е, че всяко едноелементно множество $\{a\}$ за $a \in A$ има и инфимум и супремум и $\inf\{a\} = a = \sup\{a\}$.

Теорема. Нека $\langle A, \leq \rangle$ е ч.н.м. в което всяко двуелементно множество има както супремум така и инфимум. Тогава $\langle A; \vee, \wedge \rangle$ е решетка, където $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$.

Д-во. Очевидно е, че $\vee$ и $\wedge$ са комутативни. Идемпотент-

(РБА-2) ността също е ясна, защото $\sup\{a,a\} = a \vee a = \sup\{a\} = a$ и $\inf\{a,a\} = \inf\{a\} = a \wedge a = a$.

Асоциативност: Нека $a, b, c \in A$. Ще покажем, че $a \vee (b \vee c) = \sup\{a,b,c\} = (a \vee b) \vee c$. Първо да означим $d = b \vee c$ и $e = a \vee d$, а $f = \sup\{a,b,c\}$. Тогава $b \leq d$, $c \leq d$ и $a \leq e$, $d \leq e$, откъдето $a \leq e$, $b \leq e$, $c \leq e$, т.е. e е горна граница на $\{a,b,c\}$. Следователно $f \leq e$. От това, че f е горна граница на $\{a,b,c\}$ следва, че f е горна гр. на $\{c,b\}$, т.е. $d \leq f$ и $a \leq f$, т.е. $e \leq f$. Следователно, $f = e$. С това доказахме, че $a \vee (b \vee c) = \sup\{a,b,c\}$. Аналогично се получава, че $(a \vee b) \vee c = \sup\{a,b,c\}$.

Доказателството, че $a \wedge (b \wedge c) = \inf\{a,b,c\} = (a \wedge b) \wedge c$ също е аналогично.

Поглъщане: Да покажем, че $a \vee (b \wedge a) = a$ и $a \wedge (b \vee a) = a$. Наистина, $\inf\{a,b\} = a \wedge b \leq a \leq a \vee b = \sup\{a,b\}$. Следователно, $a \vee (b \wedge a) = \sup\{a, b \wedge a\} = a$ и $a \wedge (b \vee a) = \inf\{a, b \vee a\} = a$. Така доказахме, че $\langle A; \vee, \wedge \rangle$ е решетка.

Теорема. Нека $\langle A; \vee, \wedge \rangle$ е решетка. Тогава в тази решетка може да се определи $\leq$, такава че $\langle A; \leq \rangle$ да бъде ч.н.м. като всяко двуелементно множество има sup и inf.

Д-во. Определяме $\leq$ както следва $a \leq b \overset{def}{\Leftrightarrow} a \vee b = b$ (или $a \leq b \overset{def}{\Leftrightarrow} a \wedge b = a$). Да проверим, че тази релация $\leq$ е релация на частична наредба. Наистина 1) $a \vee a = a$ (от идемпот.) Откъдето $a \leq a$. 2) Нека $a \leq b$ и $b \leq a$, т.е. $a \vee b = b$ и $b \vee a = a$. От ком. на $\vee$ имаме, че $a = b \vee a = a \vee b = b$, т.е. $\leq$ е антисиметрична. 3) Нека $a \leq b$ и $b \leq c$, т.е. $a \vee b = b$ и $b \vee c = c$. Тогава $a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$, т.е. $\leq$ е транзитивна. Така получихме, че $\leq$ е частична наредба в A.

Нека $a, b \in A$, а c е горна граница на $\{a,b\}$, т.е. $a \leq c$ и $b \leq c$, откъдето $a \vee c = c$ и $b \vee c = c$. Следователно, $c = (a \vee c) \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$. Откъдето $a \vee b \leq c$. Следователно, $a \vee b = \sup\{a,b\}$. Аналогично се проверява, че $a \wedge b = \inf\{a,b\}$.

(РБА-3) Сега ще разгледаме два примера на горните теореми.

Пример 1. Нека A е произволно непразно множество и P(A) – множеството от всичките подмн. на A. Да разгледаме $\langle P(A); \subseteq \rangle$ където $\subseteq$ е релацията в P(A) на „подмножество". Тогава ако с $\cup$ означим sup отн. $\subseteq$ на произволна фамилия на подмножества на A, а с $\cap$ означим inf на произволна фамилия от подмн. на A, то $\langle A; \cup, \cap \rangle$ е решетка като се оказва, че $\cup$ е обичайното обединение на множества, а $\cap$ е обичайното сечение на множества.

Пример 2. Нека A е произволно множество (непразно) и P(A) е отново множеството на всички подмножества на A и да разгледаме $\langle P(A); \cup, \cap \rangle$ – решетката от подмн. на A заедно с обединение – $\cup$ и сечение – $\cap$. Тогава по естествен начин можем да въведем наредба $\subseteq$, която се оказва релацията „... е подмн. на ...".

Горните два примера показват как са свързани естествено едновременно P(A) като решетка и като ч.н.м.

Искам да обърна внимание на горните доказателства на теоремите. Ние обикновено доказвахме едното, а другото оставяхме като аналогично. Всъщност, нещата са доста по-специфични. Тук отново е в сила така наречения принцип за двойнственост. Преди да го формулираме, нека дадем следната дефиниция:

Д. Казваме, че a е по-голямо от b в ч.н.м. $\langle A, \leq \rangle$, $a, b \in A$ т.т.к. $b \leq a$ и пишем $a \geq b$. Този запис и дефиниция са обичайни за реалните числа, но в общия случай се нуждае от уточнение.

Принцип за двойнственост. Ако в твърдение, което за краткост ще означим с π, което се отнася за решетка $\langle A; \wedge, \vee \rangle$ заменим $\vee$ с $\wedge$ и обратно ще получим двойнствено твърдение π^*, верността на което съвпада

(РБА-4) с верността на П. Да отбележа, че ако в твърдението участвува $\leq$, то него го заменяме с $\geq$.

Д. Нека $(M; \vee, \wedge)$ е решетка. Ако съществува $\sup M$, то този супремум се нарича единица на решетката, а ако същ. $\inf M$, то той се нарича 0 на решетката и единицата се означава с $\tilde{1}$, а нулата с $\tilde{0}$.

Ясно е, че $a = a \vee \tilde{0} = a \wedge \tilde{1}$ за всеки ел. $a \in M$.

Д. Една решетка $(M; \vee, \wedge)$ се нарича дистрибутивна, ако за произволни $a, b, c \in M$ е изпълнено $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

В една дистрибутивна решетка $(M; \vee; \wedge)$ е изпълнен, съгласно принципа за двойнственост и другия дистрибутивен закон $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Д. Нека $(M; \vee, \wedge)$ е решетка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $a \in M$. Казваме, че елементът x е допълнение на a, ако $x \wedge a = \tilde{0}$ и $x \vee a = \tilde{1}$.

Твърдение. В една дистрибутивна решетка $(M; \vee; \wedge)$ с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ всеки елемент $a \in M$ има **най-много 1** допълнение.

Д-во. Нека допуснем, че $b_1, b_2 \in M$ са две допълнения на $a \in M$. Тогава $b_1 = b_1 \wedge \tilde{1} = b_1 \wedge (a \vee b_2) = (b_1 \wedge a) \vee (b_1 \wedge b_2) = \tilde{0} \vee (b_1 \wedge b_2) = b_1 \wedge b_2$. Аналогично получаваме, че $b_2 = b_1 \wedge b_2$. Следователно, $b_1 = b_2$.

Обикновенно, допълнението на a в дистрибутивната решетка $(M; \vee, \wedge)$ (ако съществува) се означава с $\bar{a}$.

Д. Една дистрибутивна решетка $(M; \vee, \wedge)$ с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, такава, че всеки елемент има допълнение се нарича булева алгебра.

Пример 1. Нека A е произволно непразно множество. Тогава $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$ е булева алгебра.

Първо знаем, че тя е дистрибутивна. Освен това $\emptyset$ е нула, а цялото A е единица, а за всяко $B \subseteq A$ $\bar{B} = A \setminus B$ е допълнение на B.

Пример 2. $(J_2; \vee, \wedge)$ е булева алгебра.