4. Релации. Релации на еквивалентност

Дефиниция

Нека $A_1, \dots, A_n$ са произволни множества. Всяко подмножество R на $A_1 \times \cdots \times A_n$ се нарича n-местна релация над $A_1 \times \cdots \times A_n$. Ако $A_1 = \cdots = A_n = A$ и $R \subseteq A^n$, то R се нарича n-местна релация над(в) A.

В тази лекция ще се занимаваме основно с n-местна релация в A, когато $n = 2$. Такива релации ще наричаме двуместни или бинарни или просто релации.

Дефиниция

Нека $A_1, \ldots, A_n$ са произволни множества. Всяко подмножество R на $A_1 \times \cdots \times A_n$ се нарича n-местна релация над $A_1 \times \cdots \times A_n$. Ако $A_1 = \cdots = A_n = A$ и $R \subseteq A^n$, то R се нарича n-местна релация над(в) A.

В тази лекция ще се занимаваме основно с n-местна релация в A, когато $n = 2$. Такива релации ще наричаме двуместни или бинарни или просто релации.

Дефиниция

Нека $A_1, \ldots, A_n$ са произволни множества. Всяко подмножество R на $A_1 \times \cdots \times A_n$ се нарича n-местна релация над $A_1 \times \cdots \times A_n$. Ако $A_1 = \cdots = A_n = A$ и $R \subseteq A^n$, то R се нарича n-местна релация над(в) A.

В тази лекция ще се занимаваме основно с n-местна релация в A, когато $n = 2$. Такива релации ще наричаме двуместни или бинарни или просто релации.

Дефиниция

Нека $A_1, \ldots, A_n$ са произволни множества. Всяко подмножество R на $A_1 \times \cdots \times A_n$ се нарича n-местна релация над $A_1 \times \cdots \times A_n$. Ако $A_1 = \cdots = A_n = A$ и $R \subseteq A^n$, то R се нарича n-местна релация над(в) A.

В тази лекция ще се занимаваме основно с n-местна релация в A, когато $n = 2$. Такива релации ще наричаме двуместни или бинарни или просто релации.

Дефиниция

Нека $A_1, \ldots, A_n$ са произволни множества. Всяко подмножество R на $A_1 \times \cdots \times A_n$ се нарича n-местна релация над $A_1 \times \cdots \times A_n$. Ако $A_1 = \cdots = A_n = A$ и $R \subseteq A^n$, то R се нарича n-местна релация над(в) A.

В тази лекция ще се занимаваме основно с n-местна релация в A, когато $n = 2$. Такива релации ще наричаме двуместни или бинарни или просто релации.

Когато R е бинарна релация в A и $(x, y) \in R$ ще използваме и означението xRy и ще казваме още, че x е в релация R с y.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е рефлексивна релация в A точно тогава, когато за всяко $x \in A$ е изпълнено $(x, x) \in R$ (или иначе записано, xRx).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е симетрична релация в A точно тогава, когато за всички $x, y \in A$, ако $(x, y) \in R$, то е изпълнено и $(y, x) \in R$(или, $xRy \Rightarrow yRx$).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е транзитивна релация в A точно тогава, когато за всички $x, y, z \in A$, ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то е изпълнено и $(x, z) \in R$ (или, $xRy \& yRz \Rightarrow xRz$).

Когато R е бинарна релация в A и $(x, y) \in R$ ще използваме и означението xRy и ще казваме още, че x е в релация R с y.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е рефлексивна релация в A точно тогава, когато за всяко $x \in A$ е изпълнено $(x, x) \in R$ (или иначе записано, xRx).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е симетрична релация в A точно тогава, когато за всички $x, y \in A$, ако $(x, y) \in R$, то е изпълнено и $(y, x) \in R$(или, $xRy \Rightarrow yRx$).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е транзитивна релация в A точно тогава, когато за всички $x, y, z \in A$, ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то е изпълнено и $(x, z) \in R$ (или, $xRy \& yRz \Rightarrow xRz$).

Когато R е бинарна релация в A и $(x, y) \in R$ ще използваме и означението xRy и ще казваме още, че x е в релация R с y.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е рефлексивна релация в A точно тогава, когато за всяко $x \in A$ е изпълнено $(x, x) \in R$ (или иначе записано, xRx).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е симетрична релация в A точно тогава, когато за всички $x, y \in A$, ако $(x, y) \in R$, то е изпълнено и $(y, x) \in R$(или, $xRy \Rightarrow yRx$).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е транзитивна релация в A точно тогава, когато за всички $x, y, z \in A$, ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то е изпълнено и $(x, z) \in R$ (или, $xRy \& yRz \Rightarrow xRz$).

Когато R е бинарна релация в A и $(x, y) \in R$ ще използваме и означението xRy и ще казваме още, че x е в релация R с y.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е рефлексивна релация в A точно тогава, когато за всяко $x \in A$ е изпълнено $(x, x) \in R$ (или иначе записано, xRx).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е симетрична релация в A точно тогава, когато за всички $x, y \in A$, ако $(x, y) \in R$, то е изпълнено и $(y, x) \in R$(или, $xRy \Rightarrow yRx$).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е транзитивна релация в A точно тогава, когато за всички $x, y, z \in A$, ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то е изпълнено и $(x, z) \in R$ (или, $xRy \& yRz \Rightarrow xRz$).

Когато R е бинарна релация в A и $(x, y) \in R$ ще използуваме и означението xRy и ще казваме още, че x е в релация R с y.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е рефлексивна релация в A точно тогава, когато за всяко $x \in A$ е изпълнено $(x, x) \in R$ (или иначе записано, xRx).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е симетрична релация в A точно тогава, когато за всички $x, y \in A$, ако $(x, y) \in R$, то е изпълнено и $(y, x) \in R$(или, $xRy \Rightarrow yRx$).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е транзитивна релация в A точно тогава, когато за всички $x, y, z \in A$, ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то е изпълнено и $(x, z) \in R$ (или, $xRy \& yRz \Rightarrow xRz$).

Когато R е бинарна релация в A и $(x, y) \in R$ ще използваме и означението xRy и ще казваме още, че x е в релация R с y.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е рефлексивна релация в A точно тогава, когато за всяко $x \in A$ е изпълнено $(x, x) \in R$ (или иначе записано, xRx).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е симетрична релация в A точно тогава, когато за всички $x, y \in A$, ако $(x, y) \in R$, то е изпълнено и $(y, x) \in R$(или, $xRy \Rightarrow yRx$).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е транзитивна релация в A точно тогава, когато за всички $x, y, z \in A$, ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то е изпълнено и $(x, z) \in R$ (или, $xRy \& yRz \Rightarrow xRz$).

Когато R е бинарна релация в A и $(x, y) \in R$ ще използваме и означението xRy и ще казваме още, че x е в релация R с y.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е рефлексивна релация в A точно тогава, когато за всяко $x \in A$ е изпълнено $(x, x) \in R$ (или иначе записано, xRx).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е симетрична релация в A точно тогава, когато за всички $x, y \in A$, ако $(x, y) \in R$, то е изпълнено и $(y, x) \in R$(или, $xRy \Rightarrow yRx$).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е транзитивна релация в A точно тогава, когато за всички $x, y, z \in A$, ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, то е изпълнено и $(x, z) \in R$ (или, $xRy \& yRz \Rightarrow xRz$).

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е релация на еквивалентност в A точно тогава, когато R е едновременно рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Дефиниция

Нека R е релация на еквивалентност в A. Клас на еквивалентност на релацията R породен от елемента a се нарича множеството $\{b | b \in A \& bRa\}$ и се означава с $[a]_R$.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Казваме, че R е релация на еквивалентност в A точно тогава, когато R е едновременно рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Дефиниция

Нека R е релация на еквивалентност в A. Клас на еквивалентност на релацията R породен от елемента a се нарича множеството $\{b | b \in A \& bRa\}$ и се означава с $[a]_R$.

Твърдение

Нека R е релация на еквивалентност в A. Тогава за всеки два елемента $a, b \in A$, са изпълнени следните две свойства:

a) ако aRb, то $[a]_R = [b]_R$;

b) ако $a \not R b$, то $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Твърдение

Нека R е релация на еквивалентност в A. Тогава за всеки два елемента $a, b \in A$, са изпълнени следните две свойства:

а) ако aRb, то $[a]_R = [b]_R$;

b) ако a $\not R$b, то $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Твърдение

Нека R е релация на еквивалентност в A. Тогава за всеки два елемента $a, b \in A$, са изпълнени следните две свойства:

a) ако aRb, то $[a]_R = [b]_R$;

b) ако $a \not R b$, то $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Доказателство

а) Нека aRb. Нека $c \in [a]_R$, т.е. cRa. Тогава съгласно транзитивността cRb, т.е. $c \in [b]_R$. С това показахме, че $[a]_R \subseteq [b]_R$. Аналогично се показва и че $[b]_R \subseteq [a]_R$, откъдето $[a]_R = [b]_R$.

б) Нека $a \not R b$. Да допуснем, че $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, т.е. съществува $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Тогава $c \in [a]_R$ и $c \in [b]_R$, откъдето cRa и cRb. От симетричността на R имаме още aRc, а оттук и aRb. Това води до противоречие, което доказва б).

Доказателство

а) Нека aRb. Нека $c \in [a]_R$, т.е. cRa. Тогава съгласно транзитивността cRb, т.е. $c \in [b]_R$. С това показахме, че $[a]_R \subseteq [b]_R$. Аналогично се показва и че $[b]_R \subseteq [a]_R$, откъдето $[a]_R = [b]_R$.

б) Нека $a \not R b$. Да допуснем, че $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, т.е. съществува $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Тогава $c \in [a]_R$ и $c \in [b]_R$, откъдето cRa и cRb. От симетричността на R имаме още aRc, а оттук и aRb. Това води до противоречие, което доказва б).

Доказателство

а) Нека aRb. Нека $c \in [a]_R$, т.е. cRa. Тогава съгласно транзитивността cRb, т.е. $c \in [b]_R$. С това показахме, че $[a]_R \subseteq [b]_R$. Аналогично се показва и че $[b]_R \subseteq [a]_R$, откъдето $[a]_R = [b]_R$.

б) Нека $a \not R b$. Да допуснем, че $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, т.е. съществува $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Тогава $c \in [a]_R$ и $c \in [b]_R$, откъдето cRa и cRb. От симетричността на R имаме още aRc, а оттук и aRb. Това води до противоречие, което доказва б).

Доказателство

а) Нека aRb. Нека $c \in [a]_R$, т.е. cRa. Тогава съгласно транзитивността cRb, т.е. $c \in [b]_R$. С това показахме, че $[a]_R \subseteq [b]_R$. Аналогично се показва и че $[b]_R \subseteq [a]_R$, откъдето $[a]_R = [b]_R$.

б) Нека $a \not R b$. Да допуснем, че $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, т.е. съществува $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Тогава $c \in [a]_R$ и $c \in [b]_R$, откъдето cRa и cRb. От симетричността на R имаме още aRc, а оттук и aRb. Това води до противоречие, което доказва б).

Доказателство

а) Нека aRb. Нека $c \in [a]_R$, т.е. cRa. Тогава съгласно транзитивността cRb, т.е. $c \in [b]_R$. С това показахме, че $[a]_R \subseteq [b]_R$. Аналогично се показва и че $[b]_R \subseteq [a]_R$, откъдето $[a]_R = [b]_R$.

б) Нека $a \not R b$. Да допуснем, че $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, т.е. съществува $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Тогава $c \in [a]_R$ и $c \in [b]_R$, откъдето cRa и cRb. От симетричността на R имаме още aRc, а оттук и aRb. Това води до противоречие, което доказва б).

Доказателство

а) Нека aRb. Нека $c \in [a]_R$, т.е. cRa. Тогава съгласно транзитивността cRb, т.е. $c \in [b]_R$. С това показахме, че $[a]_R \subseteq [b]_R$. Аналогично се показва и че $[b]_R \subseteq [a]_R$, откъдето $[a]_R = [b]_R$.

б) Нека $a \not R b$. Да допуснем, че $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, т.е. съществува $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Тогава $c \in [a]_R$ и $c \in [b]_R$, откъдето cRa и cRb. От симетричността на R имаме още aRc, а оттук и aRb. Това води до противоречие, което доказва б).

Доказателство

а) Нека aRb. Нека $c \in [a]_R$, т.е. cRa. Тогава съгласно транзитивността cRb, т.е. $c \in [b]_R$. С това показахме, че $[a]_R \subseteq [b]_R$. Аналогично се показва и че $[b]_R \subseteq [a]_R$, откъдето $[a]_R = [b]_R$.

б) Нека $a \not R b$. Да допуснем, че $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, т.е. съществува $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Тогава $c \in [a]_R$ и $c \in [b]_R$, откъдето cRa и cRb. От симетричността на R имаме още aRc, а оттук и aRb. Това води до противоречие, което доказва б).

Доказателство

а) Нека aRb. Нека $c \in [a]_R$, т.е. cRa. Тогава съгласно транзитивността cRb, т.е. $c \in [b]_R$. С това показахме, че $[a]_R \subseteq [b]_R$. Аналогично се показва и че $[b]_R \subseteq [a]_R$, откъдето $[a]_R = [b]_R$.

б) Нека $a \not R b$. Да допуснем, че $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, т.е. съществува $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Тогава $c \in [a]_R$ и $c \in [b]_R$, откъдето cRa и cRb. От симетричността на R имаме още aRc, а оттук и aRb. Това води до противоречие, което доказва б).

Доказателство

а) Нека aRb. Нека $c \in [a]_R$, т.е. cRa. Тогава съгласно транзитивността cRb, т.е. $c \in [b]_R$. С това показахме, че $[a]_R \subseteq [b]_R$. Аналогично се показва и че $[b]_R \subseteq [a]_R$, откъдето $[a]_R = [b]_R$.

б) Нека $a \not{R} b$. Да допуснем, че $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, т.е. съществува $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Тогава $c \in [a]_R$ и $c \in [b]_R$, откъдето cRa и cRb. От симетричността на R имаме още aRc, а оттук и aRb. Това води до противоречие, което доказва б).

Доказателство

а) Нека aRb. Нека $c \in [a]_R$, т.е. cRa. Тогава съгласно транзитивността cRb, т.е. $c \in [b]_R$. С това показахме, че $[a]_R \subseteq [b]_R$. Аналогично се показва и че $[b]_R \subseteq [a]_R$, откъдето $[a]_R = [b]_R$.

б) Нека $a \not R b$. Да допуснем, че $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, т.е. съществува $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Тогава $c \in [a]_R$ и $c \in [b]_R$, откъдето cRa и cRb. От симетричността на R имаме още aRc, а оттук и aRb. Това води до противоречие, което доказва б).

Твърдение

а) Нека $\{A_i | i \in I\}$ е разбиване на непразното множество A. Тогава съществува релация на еквивалентност R, фамилията от всички класове на еквивалентност на която съвпада с фамилията $\{A_i | i \in I\}$;

б) Нека R е релация на еквивалентност в A. Тогава фамилията от различните класове на еквивалентност е разбиване на A.

Твърдение

а) Нека $\{A_i | i \in I\}$ е разбиване на непразното множество А. Тогава съществува релация на еквивалентност R, фамилията от всички класове на еквивалентност на която съвпада с фамилията $\{A_i | i \in I\}$;

б) Нека R е релация на еквивалентност в А. Тогава фамилията от различните класове на еквивалентност е разбиване на А.

Твърдение

а) Нека $\{A_i | i \in I\}$ е разбиване на непразното множество A. Тогава съществува релация на еквивалентност R, фамилията от всички класове на еквивалентност на която съвпада с фамилията $\{A_i | i \in I\}$;

б) Нека R е релация на еквивалентност в A. Тогава фамилията от различните класове на еквивалентност е разбиване на A.

Твърдение

а) Нека $\{A_i | i \in I\}$ е разбиване на непразното множество A. Тогава съществува релация на еквивалентност R, фамилията от всички класове на еквивалентност на която съвпада с фамилията $\{A_i | i \in I\}$;

б) Нека R е релация на еквивалентност в A. Тогава фамилията от различните класове на еквивалентност е разбиване на A.

Доказателство

.

а) Дефинираме следната релация R: $xRy \iff$ съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$. Ще проверим, че R е релация на еквивалентност. Рефлексивността и симетричността са очевидни. Да проверим транзитивността. Нека xRy и yRz. Тогава съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$ и съществува $j \in I$, такова че $y \in A_j$ и $z \in A_j$. Тогава $i = j$ и твърдението е доказано.

б) Следва непосредствено от горното твърдение.

Доказателство

.

а) Дефинираме следната релация R: $xRy \iff$ съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$. Ще проверим, че R е релация на еквивалентност. Рефлексивността и симетричността са очевидни. Да проверим транзитивността. Нека xRy и yRz. Тогава съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$ и съществува $j \in I$, такова че $y \in A_j$ и $z \in A_j$. Тогава $i = j$ и твърдението е доказано.

б) Следва непосредствено от горното твърдение.

Доказателство

.

а) Дефинираме следната релация R: $xRy \iff$ съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$. Ще проверим, че R е релация на еквивалентност. Рефлексивността и симетричността са очевидни. Да проверим транзитивността. Нека xRy и yRz. Тогава съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$ и съществува $j \in I$, такова че $y \in A_j$ и $z \in A_j$. Тогава $i = j$ и твърдението е доказано.

б) Следва непосредствено от горното твърдение.

Доказателство

.

а) Дефинираме следната релация R: $xRy \iff$ съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$. Ще проверим, че R е релация на еквивалентност. Рефлексивността и симетричността са очевидни. Да проверим транзитивността. Нека xRy и yRz. Тогава съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$ и съществува $j \in I$, такова че $y \in A_j$ и $z \in A_j$. Тогава $i = j$ и твърдението е доказано.

б) Следва непосредствено от горното твърдение.

.

а) Дефинираме следната релация R: $xRy \iff$ съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$. Ще проверим, че R е релация на еквивалентност. Рефлексивността и симетричността са очевидни. Да проверим транзитивността. Нека xRy и yRz. Тогава съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$ и съществува $j \in I$, такова че $y \in A_j$ и $z \in A_j$. Тогава $i = j$ и твърдението е доказано.

б) Следва непосредствено от горното твърдение.

Доказателство

.

а) Дефинираме следната релация R: $xRy \iff$ съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$. Ще проверим, че R е релация на еквивалентност. Рефлексивността и симетричността са очевидни. Да проверим транзитивността. Нека xRy и yRz. Тогава съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$ и съществува $j \in I$, такова че $y \in A_j$ и $z \in A_j$. Тогава $i = j$ и твърдението е доказано.

б) Следва непосредствено от горното твърдение.

.

а) Дефинираме следната релация R: $xRy \iff$ съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$. Ще проверим, че R е релация на еквивалентност. Рефлексивността и симетричността са очевидни. Да проверим транзитивността. Нека xRy и yRz. Тогава съществува $i \in I$, такова че $x \in A_i$ и $y \in A_i$ и съществува $j \in I$, такова че $y \in A_j$ и $z \in A_j$. Тогава $i = j$ и твърдението е доказано.

б) Следва непосредствено от горното твърдение.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. **Рефлексивно и транзитивно затваряне** R^* на релацията е R се определя индуктивно както следва:

а) Ако $x \in A$, то $(x, x) \in R^*$;

б) Ако $(x, y) \in R$, то $(x, y) \in R^*$;

в) Ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R^*$, то и $(x, z) \in R^*$.

Твърдение

Нека R е произволна релация в A. Тогава рефлексивното и транзитивно затваряне R^* на релацията R е рефлексивна и транзитивна релация.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Рефлексивно и транзитивно затваряне R^* на релацията е R се определя индуктивно както следва:

а) Ако $x \in A$, то $(x, x) \in R^*$;

б) Ако $(x, y) \in R$, то $(x, y) \in R^*$;

в) Ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R^*$, то и $(x, z) \in R^*$.

Твърдение

Нека R е произволна релация в A. Тогава рефлексивното и транзитивно затваряне R^* на релацията R е рефлексивна и транзитивна релация.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Рефлексивно и транзитивно затваряне R^* на релацията е R се определя индуктивно както следва:

а) Ако $x \in A$, то $(x, x) \in R^*$;

б) Ако $(x, y) \in R$, то $(x, y) \in R^*$;

в) Ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R^*$, то и $(x, z) \in R^*$.

Твърдение

Нека R е произволна релация в A. Тогава рефлексивното и транзитивно затваряне R^* на релацията R е рефлексивна и транзитивна релация.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Рефлексивно и транзитивно затваряне R^* на релацията е R се определя индуктивно както следва:

а) Ако $x \in A$, то $(x, x) \in R^*$;

б) Ако $(x, y) \in R$, то $(x, y) \in R^*$;

в) Ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R^*$, то и $(x, z) \in R^*$.

Твърдение

Нека R е произволна релация в A. Тогава рефлексивното и транзитивно затваряне R^* на релацията R е рефлексивна и транзитивна релация.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Рефлексивно и транзитивно затваряне R^* на релацията е R се определя индуктивно както следва:

а) Ако $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$, то $(\mathrm{x}, \mathrm{x}) \in \mathrm{R}^*$;

б) Ако $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{R}$, то $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{R}^*$;

в) Ако $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{R}$ и $(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \in \mathrm{R}^*$, то и $(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \in \mathrm{R}^*$.

Твърдение

Нека R е произволна релация в A. Тогава рефлексивното и транзитивно затваряне R^* на релацията R е рефлексивна и транзитивна релация.

Дефиниция

Нека R е бинарна релация в A. Рефлексивно и транзитивно затваряне R^* на релацията е R се определя индуктивно както следва:

а) Ако $x \in A$, то $(x, x) \in R^*$;

б) Ако $(x, y) \in R$, то $(x, y) \in R^*$;

в) Ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R^*$, то и $(x, z) \in R^*$.

Твърдение

Нека R е произволна релация в A. Тогава рефлексивното и транзитивно затваряне R^* на релацията R е рефлексивна и транзитивна релация.