

Задача 37.

Граф с общо n върха има 7 върха от степен $n-1$, 3 върха от степен $n-2$ и 13 върха от степен $n-3$. Всеки връх със степен по-малка от $n-3$ е с четна степен. Да се докаже, че графът има четен брой върхове.

Док-во:

(I) От формулата на Ойлер следва, че броят на върховете с нечетна степен е четно число (Task 26). Сега, да допуснем, че броят n на върховете на графа е нечетно число. Тогава $n-1$ и $n-3$ са четни, а $n-2$ е нечетно. Следователно единствените върхове от нечетна степен са тези със степен $n-2$. Техният брой, обаче е 3, което не е четно. Противоречие. Следователно n е четно.

(II) Втори подход: отново от формула на Ойлер:

$$2|E| = 7(n-1) + 3(n-2) + 13(n-3) - \text{четно}$$

$$2|E| = 23n - 52 + \text{even}, \text{ т.к. } \gcd(2,23) = 1, \text{ то } 2|n|.$$

github.com/andy489