Принципи на изброителната комбинаторика

<u>Принцип на Дирихле.</u> Нека X и Y са две крайни множества и $|X| = n$, $|Y| = m$ и $n > m$. Тогава за всяка функция $f: X \to Y$ съществуват два елемента a, b, $a \neq b$ такива, че $f(a) = f(b)$.
Еквивалентен на този принцип е и
<u>Принцип на чекмеджетата.</u> Нека X е множество от предмети, Y е множество от чекмеджета, $|X| = n$ и $|Y| = m$ (X и Y са крайни). Тогава ако поставим по произволен начин предметите в чекмеджетата ще има поне едно чекмедже с повече от 1 предмет.
В началото на курса ние споменахме още един принцип, който има отношение към изброителната комбинаторика.
<u>Принцип на биекцията.</u> Нека A и B са крайни множества, $|A| = n$ и $|B| = m$. Тогава $m = n$ т.т.к. съществува биекция $f: A \to B$.
<u>Принцип на събирането.</u> Нека A и B са крайни множества, $A \cap B = \emptyset$, $|A| = n$ и $|B| = m$. Тогава $|A \cup B| = m + n$.
Обобщение на принципа за събирането е
<u>Принцип на разбиването.</u> Нека $\{A_1, \ldots, A_n\}$ е разбиване на крайното множество A. Тогава

$$|A| = |A_1| + \cdots + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Дотук принципите бяха очевидни.
За следващите ще имаме нужда от аргументация (доказателство).
<u>Принцип на декартовото произведение.</u> Нека A и B са крайни множества, $|A| = n$, $|B| = m$. Тогава $|A \times B| = |A| \cdot |B| = n \cdot m$.
Д-во. Ако $|A| = 0$, то $A = \emptyset$ и $A \times B = \emptyset$ и $0 = |A| \cdot |B| = |A \times B|$
Ако $n \neq 0$ и $m \neq 0$, то нека $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и
$A_{a_i} = \{a_i\} \times B$, $i = 1, \ldots, n$. Тогава същ. $f_i : A_{a_i} \to B$
f_i - биекция, $f(a_i, b) = b$, $i = 1, \ldots, n$, т.е. $|A_{a_i}| = |B|$.

ПИК – 2

От друга страна $A\times B=\{a_1,\dots,a_n\}\times B=\{a_1\}\times B\cup\{a_2\}\times B\cup\dots\cup\{a_n\}\times B=A_{a_1}\cup\dots\cup A_{a_n}$, като $A_{a_i}\cap A_{a_j}=\varnothing$, ако $i\neq j$. Следователно, $\{A_{a_1},\dots,A_{a_n}\}$ е разбиване на $A\times B$. Откъдето $|A\times B|=|A_{a_1}|+\dots+|A_{a_n}|=\underbrace{m+\dots+m}_{n \text{ пъти}}=n.m=|A|.|B|$, което трябваше да докажем.

<u>Принцип на изваждането.</u> Нека $A', A''\subseteq A$, $A'=A\setminus A''$. Тогава $|A'|=|A|-|A''|$.

Д-во: $\{A', A''\}$ е разбиване на A, откъдето $|A'|+|A''|=|A|$. Следователно, $|A'|=|A|-|A''|$.

<u>Следствие1.</u> Нека $A_1,\dots,A_n$ са крайни множества. Тогава $|A_1\times\dots\times A_n|=|A_1|.|A_2|\dots|A_n|$.

Това е обобщение на принципа за умножението и можем да го докажем с индукция относно броя на множествата.

<u>Следствие 2.</u> Нека A е крайно множество. Тогава $|A^n|=|A|^n$.

Д-во: $A^n=\underbrace{A\times\dots\times A}_{n \text{ пъти}}$. Тогава $|A^n|=|A\times\dots\times A|=\underbrace{|A|\dots|A|}_{n \text{ пъти}}=|A|^n$.

<u>Следствие 3.</u> $|J_2|^n=2^n=|J_2{}^n|$, където $J_2=\{0,1\}$.

Д-вото е очевидно.

<u>Следствие 4.</u> Нека A е крайно множество и $\mathcal{P}(A)=2^A$ е множеството от подмножествата на A. Тогава $|\mathcal{P}(A)|=|2^A|=2^{|A|}$.

Д-во. Ще установим биекция м/у $\mathcal{P}(A)$ и J_2^n, където $n=|A|$. На всяко $B\subseteq A$, съпоставяме вектор от J_2^n по следния начин: Нека $A=\{a_1,\dots,a_n\}$. Вектора $(i_1,\dots,i_n)$, който се нарича <u>характеристичен за B</u> се определя така

$$i_s=\begin{cases}1, & \text{ако } a_s\in B,\\ 0, & \text{ако } a_s\notin B,\end{cases}\quad i=1,\dots,n.$$

Както и при характеристичните ф-ции на подмн. на N се доказва, че има взаимно еднозначно съотв. м/у J_2^n и $\mathcal{P}(A)$. Следователно, $|\mathcal{P}(A)|=|J_2^n|=|J_2|^{A}=2^{|A|}$.

<u>Принцип на делението.</u> Нека A е крайно множество и A' е получено от A с повтаряне на всеки елемент m пъти $(m\neq 0)$. Тогава $|A|=\dfrac{|A'|}{m}$