Упражнения, Гмула

Опр. Наредена двойка на x и y ще наричаме мн-вото

$$(x,y) \leftrightharpoons \{\{x\},\{x,y\}\}.$$

Примери. $(1,2)=\{\{1\},\{1,2\}\}$, $(2,1)=\{\{2\},\{1,2\}\}$.

Така $(1,2)\neq(2,1)$.

$$(1,1)=\{\{1\},\{1,1\}\}=\{\{1\},\{1\}\}=\{\{1\}\}.$$

Тв. $(x_1,y_1)=(x_2,y_2) \iff x_1=x_2 \ \& \ y_1=y_2$

док. ($\Leftarrow$) Нека $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$. Тогава $\{x_1\}=\{x_2\}$ и $\{x_1,y_1\}=\{x_2,y_2\}$ (защото имат еднакви елементи). Така $\{\{x_1\},\{x_1,y_1\}\}=\{\{x_2\},\{x_2,y_2\}\}$, откъдето

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2).$$

($\Rightarrow$) Нека $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$. Разглеждаме два случая:

- $x_1=y_1$. Тогава $\{x_1\}=\{x_1,y_1\}$ и, следов., $(x_1,y_1)=\{\{x_1\}\}$. Понеже $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)=\{\{x_2\},\{x_2,y_2\}\}$, то трябва $\{x_1\}=\{x_2\}=\{x_2,y_2\}$. Така получаваме, че $y_1=x_1=x_2=y_2$. В частност, $x_1=x_2$ & $y_1=y_2$.

- $x_1\neq y_1$. Тогава $\{x_1\}\neq\{x_1,y_1\}$ (иначе $y_1=x_1$). Понеже $\{x_1\}\in(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$, то

$\{x_1\} = \{x_2\}$ или $\{x_1\} = \{x_2, y_2\}$. Ако предположим, че е изпълнено второто, то $x_1 = x_2 = y_2$, откъдето $(x_2, y_2) = \{\{x_2\}\} = \{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\}$. Така $x_1 = y_1 = x_2$, което не е вярно. Следователно, $\{x_1\} = \{x_2\}$, като при това $x_2 \neq y_2$ (иначе $x_2 = y_2 = x_1 = y_1$).

Така $\underline{x_1 = x_2}$ и $\{x_2\} \neq \{x_2, y_2\}$.

Понеже $\{x_1, y_1\} \in (x_2, y_2)$ и $\{x_1, y_1\} \neq \{x_1\} = \{x_2\}$, то $\{x_1, y_1\} = \{x_2, y_2\}$. Следователно, $y_2 = x_1$ или $y_2 = y_1$. Но ако $y_2 = x_1$, то понеже $x_1 = x_2$ ще имаме, че $y_2 = x_2$, което не е вярно. Така $\underline{y_2 = y_1}$.

$\underline{\text{Зад. 1}}$. Нека $x \in A$ и $y \in B$. Док., че $(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

$\underline{\text{док.}}$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in A \;\&\; y \in B}{\{x\} \subseteq A \;\&\; \{y\} \subseteq B}}{\{x\} \subseteq A \;\&\; \{x\} \cup \{y\} \subseteq A \cup B}}{\{x\} \subseteq A \cup B \;\&\; \{x, y\} \subseteq A \cup B}}{\{x\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \;\&\; \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)}}{\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)}}{(x, y) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)}}{(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)).}$$

Декартови произведения

<u>Опр.</u> <u>Декартово произведение</u> на мн-вата A и B наричаме мн-вото на всички наредени двойки с първа компонента в A и втора – в B:

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \ \& \ y \in B \}.$$

<u>Примери.</u> 0) $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 7, 10\}$.

$$A \times B = \{ (0,2), (0,7), (0,10), \\ (1,2), (1,7), (1,10) \}$$

$$B \times A = \{ (2,0), (2,1), \\ (7,0), (7,1), \\ (10,0), (10,1) \}$$

Забележете, че $A \times B \neq B \times A$, но $|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B|$.

1) $A = \{0, 1\}$, $B = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$A \times B = \{ (0,0), (0,1), (0,2), \dots, (0,n), \dots, \\ (1,0), (1,1), (1,2), \dots, (1,n), \dots \}$$

$$B \times A = \{ (0,0), (0,1), \\ (1,0), (1,1), \\ (2,0), (2,1), \\ \vdots \\ (n,0), (n,1), \\ \vdots \\ \}$$

Отново $A \times B \neq B \times A$.

2). Намерете $A \times \emptyset$.

Ще покажем, че $A \times \emptyset = \emptyset$. За целта да допуснем противното, т.е. $A \times \emptyset \neq \emptyset$. Следователно, $A \times \emptyset$ има поне един елемент u. Но ако $u \in A \times \emptyset$, то съществуват $x \in A$ и $y \in \emptyset$, за които $u = (x, y)$. В частност, има $y \in \emptyset$, което е противоречие. Следователно, $A \times \emptyset = \emptyset$.

Подобно може да се покаже, че $\emptyset \times A = \emptyset$ за всяко мн-во A.

3) Намерете $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset) \times A)$, където

$$A = (\{\emptyset, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\}) \cap (\{2, 3, 4\} \setminus \{\emptyset, 2, 3\})$$

Имаме, че $A = \{\emptyset\} \cap \{4\} = \emptyset$. Така $\mathcal{P}(\emptyset) \times A = \mathcal{P}(\emptyset) \times \emptyset = \emptyset$. След. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset) \times A) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

4) Намерете: $\mathcal{P}(\{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\}) \times \mathcal{P}(\emptyset)$.

Имаме, че $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$;

$\{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\} = \{(\emptyset, \{\emptyset\})\}$; за удобство полагаме $a = (\emptyset, \{\emptyset\})$. Така $\mathcal{P}(\{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\}) = \mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$. Оттук получаваме:

$\mathcal{P}(\{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\}) \times \mathcal{P}(\emptyset) =$

$\{\emptyset, \{a\}\} \times \{\emptyset\} = \{(\emptyset, \emptyset), (\{a\}, \emptyset)\} =$

$= \{(\emptyset, \emptyset), (\{(\emptyset, \{\emptyset\})\}, \emptyset)\}.$

5) Намерете $\mathcal{P}(\{4, \emptyset\}) \times (\{1,2,2,1,3,3\} \setminus \{2\})$

Имаме, че: $\{1,2,2,1,3,3\} \setminus \{2\} = \{1,3\}$;

$\mathcal{P}(\{4,\emptyset\}) = \{\emptyset, \{4\}, \{\emptyset\}, \{4,\emptyset\}\}.$

Така $\mathcal{P}(\{4,\emptyset\}) \times \{1,3\} = \{(\emptyset, 1), (\emptyset, 3),$
$(\{4\}, 1), (\{4\}, 3),$
$(\{\emptyset\}, 1), (\{\emptyset\}, 3),$
$(\{4,\emptyset\}, 1), (\{4,\emptyset\}, 3)\}.$

6) Нека $A \subseteq A_1$ и $B \subseteq B_1$. Тогава $A \times B \subseteq A_1 \times B_1$

Наистина, нека $u \in A \times B$. Така има $a \in A$ и $b \in B$,

за които $u = (a, b)$. Но $a \in A_1$ и $b \in B_1$,

откъдето $u \in A_1 \times B_1$.

7) Нека $A \subseteq B$. Док., че $A \times (A \cup B) \subseteq (A \cap B) \times B$.

док. Нека $A \subseteq B$. Тогава $A \cup B = B$ и $A \cap B = A$.

След. $A \times (A \cup B) = A \times B \subseteq A \times B = (A \cap B) \times B$.

8) Док., че $A \times (B \cap C) \subseteq (A \cup C) \times B$

док. Понеже $B \cap C \subseteq B$ и $A \subseteq A \cup C$, то по 6)

$A \times (B \cap C) \subseteq (A \cup C) \times B.$

Зад. Док., че за всеки три мн-ва A, B и C е в сила:

1) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$;

2) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$;

3) $A\times(B\setminus C) = (A\times B)\setminus(A\times C)$.

док. на 1). Нека A, B и C са произволни.

($\subseteq$) Нека $u \in A\times(B\cap C)$. След. съществуват $a\in A$ и $b\in B\cap C$, т.ч. $u=(a,b)$. Понеже $B\cap C\subseteq B$, то $b\in B$ и така $u=(a,b)\in A\times B$. Подобно, $b\in C$, откъдето $u\in A\times C$. Следователно, $u\in(A\times B)\cap(A\times C)$.

($\supseteq$) Нека $u\in(A\times B)\cap(A\times C)$. Следователно, $u\in A\times B$ и $u\in A\times C$. Така, съществуват $a\in A$, $b\in B$, за които $u=(a,b)$ и съществуват $a'\in A$ и $c\in C$, за които $u=(a',c)$. Тогава $(a,b)=u=(a',c)$, откъдето $a=a'\in A$ и $b=c\in B\cap C$. Така $u=(a,b)\in A\times(B\cap C)$.

Упр. Докажете 2) и 3).