6. Линейни рекурентни отношения

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. (Реален) корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ се нарича всяко (реално) число α, такова, че $P(\alpha) = a_0.\alpha^n + a_1.\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.\alpha + a_n = 0$.

Забележка. Известно е, че ако едно число α е (реален) корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$, то
$P(x) = (x - \alpha).(b_0.x^{n-1} + b_1.x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}.x + b_{n-1})$.

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \dots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \dots, a_n$. (Реален) корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \dots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ се нарича всяко (реално) число α, такова, че $P(\alpha) = a_0.\alpha^n + a_1.\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}.\alpha + a_n = 0$.

Забележка. Известно е, че ако едно число α е (реален) корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \dots + a_{n-1}.x + a_n = 0$, то $P(x) = (x - \alpha).(b_0.x^{n-1} + b_1.x^{n-2} + \dots + b_{n-2}.x + b_{n-1})$.

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. (Реален) корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ се нарича всяко (реално) число α, такова, че $P(\alpha) = a_0.\alpha^n + a_1.\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.\alpha + a_n = 0$.

Забележка. Известно е, че ако едно число α е (реален) корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$, то

$$P(x) = (x - \alpha).(b_0.x^{n-1} + b_1.x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}.x + b_{n-1}).$$

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. (Реален) корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ се нарича всяко (реално) число α, такова, че $P(\alpha) = a_0.\alpha^n + a_1.\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.\alpha + a_n = 0$.

Забележка. Известно е, че ако едно число α е (реален) корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$, то

$$P(x) = (x-\alpha).(b_0.x^{n-1} + b_1.x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}.x + b_{n-1}).$$

Дефиниция

Нека е даден един полином
$P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. (Реален) корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ се нарича всяко (реално) число α, такова, че
$P(\alpha) = a_0.\alpha^n + a_1.\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.\alpha + a_n = 0$.

Забележка. Известно е, че ако едно число α е (реален) корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$, то

$$P(x) = (x - \alpha).(b_0.x^{n-1} + b_1.x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}.x + b_{n-1}).$$

Тук използувахме и ще използуваме и в следващи дефиниции и твърдения не само за реални корени, но и за комплексни.

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. k-кратен корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ за $k \leq n$, се нарича всяко число α, такова, че $P(x) = (x - \alpha)^k.Q(x)$, където $Q(x)$ е полином от степен $n - k$ такъв че, $Q(\alpha) \neq 0$.

Тук използувахме и ще използуваме и в следващи дефиниции и твърдения не само за реални корени, но и за комплексни.

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. k-кратен корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ за $k \leq n$, се нарича всяко число α, такова, че $P(x) = (x - \alpha)^k.Q(x)$, където $Q(x)$ е полином от степен $n - k$ такъв че, $Q(\alpha) \neq 0$.

Тук използувахме и ще използуваме и в следващи дефиниции и твърдения не само за реални корени, но и за комплексни.

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. k-кратен корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ за $k \leq n$, се нарича всяко число α, такова, че $P(x) = (x - \alpha)^k.Q(x)$, където $Q(x)$ е полином от степен $n - k$ такъв че, $Q(\alpha) \neq 0$.

Тук използувахме и ще използуваме и в следващи дефиниции и твърдения не само за реални корени, но и за комплексни.

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. k-кратен корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ за $k \leq n$, се нарича всяко число α, такова, че $P(x) = (x - \alpha)^k.Q(x)$, където $Q(x)$ е полином от степен $n - k$ такъв че, $Q(\alpha) \neq 0$.

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. Прост корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ се нарича всяко α, такова, че α е еднократен корен на $P(x) = a_0.\alpha^n + a_1.\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.\alpha + a_n = 0$.

Дефиниция

Хомогенно линейно рекурентно отношение (редица) се нарича $a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = 0$, (или още $a_{n+r} = c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n$), където $n = 0, 1, \ldots$ и $c_1, \ldots, c_r$ са дадени числа.

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. Прост корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ се нарича всяко α, такова, че α е еднократен корен на $P(x) = a_0.\alpha^n + a_1.\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.\alpha + a_n = 0$.

Дефиниция

Хомогенно линейно рекурентно отношение (редица) се нарича $a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = 0$, (или още $a_{n+r} = c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n$), където $n = 0, 1, \ldots$ и $c_1, \ldots, c_r$ са дадени числа.

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. Прост корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ се нарича всяко α, такова, че α е еднократен корен на $P(x) = a_0.\alpha^n + a_1.\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.\alpha + a_n = 0$.

Дефиниция

Хомогенно линейно рекурентно отношение (редица) се нарича $a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = 0$, (или още $a_{n+r} = c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n$), където $n = 0, 1, \ldots$ и $c_1, \ldots, c_r$ са дадени числа.

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. Прост корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ се нарича всяко α, такова, че α е еднократен корен на $P(x) = a_0.\alpha^n + a_1.\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.\alpha + a_n = 0$.

Дефиниция

Хомогенно линейно рекурентно отношение (редица) се нарича $a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = 0$, (или още $a_{n+r} = c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n$), където $n = 0, 1, \ldots$ и $c_1, \ldots, c_r$ са дадени числа.

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. Прост корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ се нарича всяко α, такова, че α е еднократен корен на $P(x) = a_0.\alpha^n + a_1.\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.\alpha + a_n = 0$.

Дефиниция

Хомогенно линейно рекурентно отношение (редица) се нарича $a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = 0$, (или още $a_{n+r} = c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n$), където $n = 0, 1, \ldots$ и $c_1, \ldots, c_r$ са дадени числа.

Дефиниция

Нека е даден един полином $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$ с реални коефициенти $a_0, \ldots, a_n$. Прост корен на уравнението $P(x) = a_0.x^n + a_1.x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n = 0$ се нарича всяко α, такова, че α е еднократен корен на $P(x) = a_0.\alpha^n + a_1.\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}.\alpha + a_n = 0$.

Дефиниция

Хомогенно линейно рекурентно отношение (редица) се нарича $a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = 0$, (или още $a_{n+r} = c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n$), където $n = 0, 1, \ldots$ и $c_1, \ldots, c_r$ са дадени числа.

Дефиниция

Линейно рекурентно отношение (редица) се нарича $a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = F(n)$, (или още $a_{n+r} = c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n + F(n)$), където $n = 0, 1, \ldots$ и $c_1, \ldots, c_r$ са дадени числа, а $F(n)$ е дадена функция.

Всяко рекурентно отношение определя една безкрайна редица.

Пример на линейно рекурентно отношение (редица) е така наречената редица на Фибоначи: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Дефиниция

Линейно рекурентно отношение (редица) се нарича $a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = F(n)$, (или още $a_{n+r} = c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n + F(n)$), където $n = 0, 1, \ldots$ и $c_1, \ldots, c_r$ са дадени числа, а $F(n)$ е дадена функция.

Всяко рекурентно отношение определя една безкрайна редица.

Пример на линейно рекурентно отношение (редица) е така наречената редица на Фибоначи: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Дефиниция

Линейно рекурентно отношение (редица) се нарича $a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = F(n)$, (или още $a_{n+r} = c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n + F(n)$), където $n = 0, 1, \ldots$ и $c_1, \ldots, c_r$ са дадени числа, а $F(n)$ е дадена функция.

Всяко рекурентно отношение определя една безкрайна редица.

Пример на линейно рекурентно отношение (редица) е така наречената редица на Фибоначи: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Дефиниция

Линейно рекурентно отношение (редица) се нарича $a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = F(n)$, (или още $a_{n+r} = c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n + F(n)$), където $n = 0, 1, \ldots$ и $c_1, \ldots, c_r$ са дадени числа, а $F(n)$ е дадена функция.

Всяко рекурентно отношение определя една безкрайна редица.

Пример на линейно рекурентно отношение (редица) е така наречената редица на Фибоначи: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Дефиниция

Линейно рекурентно отношение (редица) се нарича $a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = F(n)$, (или още $a_{n+r} = c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n + F(n)$), където $n = 0, 1, \ldots$ и $c_1, \ldots, c_r$ са дадени числа, а $F(n)$ е дадена функция.

Всяко рекурентно отношение определя една безкрайна редица.

Пример на линейно рекурентно отношение (редица) е така наречената редица на Фибоначи: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено рекурентното отношение

$$a_{n+2} + p.a_{n+1} + q.a_n = 0, \qquad (*)$$

където a_0, a_1 са дадени числа. Нека освен това α и β са различни корени на уравнението

$$x^2 + p.x + q = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответното на рекурентното отношение $(*)$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = a.\alpha^n + b.\beta^n \qquad (***),$$

$n = 0, 1, \ldots$ за някои числа a и b.

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено рекурентното отношение

$$a_{n+2} + p.a_{n+1} + q.a_n = 0, \qquad (*)$$

където a_0, a_1 са дадени числа. Нека освен това α и β са различни корени на уравнението

$$x^2 + p.x + q = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответното на рекурентното отношение $(*)$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = a.\alpha^n + b.\beta^n \qquad (***),$$

$n = 0, 1, \ldots$ за някои числа a и b.

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено рекурентното отношение

$$a_{n+2} + p.a_{n+1} + q.a_n = 0, \qquad (*)$$

където a_0, a_1 са дадени числа. Нека освен това α и β са различни корени на уравнението

$$x^2 + p.x + q = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответното на рекурентното отношение $(*)$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = a.\alpha^n + b.\beta^n \qquad (***),$$

$n = 0, 1, \ldots$ за някои числа a и b.

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено рекурентното отношение

$$a_{n+2} + p.a_{n+1} + q.a_n = 0, \qquad (*)$$

където a_0, a_1 са дадени числа. Нека освен това α и β са различни корени на уравнението

$$x^2 + p.x + q = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответното на рекурентното отношение $(*)$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = a.\alpha^n + b.\beta^n \qquad (***),$$

$n = 0, 1, \ldots$ за някои числа a и b.

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено рекурентното отношение

$$a_{n+2} + p.a_{n+1} + q.a_n = 0, \qquad (*)$$

където a_0, a_1 са дадени числа. Нека освен това α и β са различни корени на уравнението

$$x^2 + p.x + q = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответното на рекурентното отношение $(*)$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = a.\alpha^n + b.\beta^n \qquad (***),$$

$n = 0, 1, \ldots$ за някои числа a и b.

Доказателство.

В доказателството отново ще стане ясно как определяме числата a и b. Равенството (∗) е в сила за всички естествени числа n и в частност за n = 0, 1. След заместване с конкретните стойности получаваме системата получаваме
$a_0 = a.1 + b.1$
$a_1 = a.\alpha + b.\beta.$
Решавайки системата относно неизвестните параметри a и b. Получаваме:

$$b = \frac{a_1 - a_0.\alpha}{\beta - \alpha}, \quad a = \frac{a_0.\beta - a_1}{\beta - \alpha}.$$

Доказателство.

В доказателството отново ще стане ясно как определяме числата a и b. Равенството $(*)$ е в сила за всички естествени числа n и в частност за $n = 0, 1$. След заместване с конкретните стойности получаваме системата получаваме

$a_0 = a.1 + b.1$

$a_1 = a.\alpha + b.\beta$.

Решавайки системата относно неизвестните параметри a и b. Получаваме:

$$b = \frac{a_1 - a_0.\alpha}{\beta - \alpha}, \quad a = \frac{a_0.\beta - a_1}{\beta - \alpha}.$$

Доказателство.

В доказателството отново ще стане ясно как определяме числата a и b. Равенството (∗) е в сила за всички естествени числа n и в частност за $n = 0, 1$. След заместване с конкретните стойности получаваме системата получаваме

$a_0 = a.1 + b.1$

$a_1 = a.\alpha + b.\beta$.

Решавайки системата относно неизвестните параметри a и b. Получаваме:

$$b = \frac{a_1 - a_0.\alpha}{\beta - \alpha}, \quad a = \frac{a_0.\beta - a_1}{\beta - \alpha}.$$

Доказателство.

В доказателството отново ще стане ясно как определяме числата a и b. Равенството $(*)$ е в сила за всички естествени числа n и в частност за $n = 0, 1$. След заместване с конкретните стойности получаваме системата получаваме
$a_0 = a.1 + b.1$
$a_1 = a.\alpha + b.\beta$.
Решавайки системата относно неизвестните параметри a и b. Получаваме:

$$b = \frac{a_1 - a_0.\alpha}{\beta - \alpha}, \quad a = \frac{a_0.\beta - a_1}{\beta - \alpha}.$$

Доказателство.

В доказателството отново ще стане ясно как определяме числата a и b. Равенството $(*)$ е в сила за всички естествени числа n и в частност за $n = 0, 1$. След заместване с конкретните стойности получаваме системата получаваме
$a_0 = a.1 + b.1$
$a_1 = a.\alpha + b.\beta$.
Решавайки системата относно неизвестните параметри a и b. Получаваме:

$$b = \frac{a_1 - a_0.\alpha}{\beta - \alpha}, \quad a = \frac{a_0.\beta - a_1}{\beta - \alpha}.$$

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}$ и $a_{n-2} = a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}$. Освен това α и β са корени на уравнението $(**)$, т.е. $\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$ и $\beta^2 + p.\beta + q = 0$, откъдето $\alpha^2 = -p.\alpha - q$ и $\beta^2 = -p.\beta - q$.
От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.(a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}) - q.(a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}) =$
$a.\alpha^{n-2}.(-p.\alpha - q) + b.\beta^{n-2}(-p.\beta - q) =$
$a.\alpha^{n-2}.\alpha^2 + b.\beta^{n-2}.\beta^2 = a.\alpha^n + b.\beta^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че $a_{n-1} = a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}$ и $a_{n-2} = a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}$. Освен това α и β са корени на уравнението $(**)$, т.е. $\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$ и $\beta^2 + p.\beta + q = 0$, откъдето $\alpha^2 = -p.\alpha - q$ и $\beta^2 = -p.\beta - q$. От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.(a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}) - q.(a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}) =$
$a.\alpha^{n-2}.(-p.\alpha - q) + b.\beta^{n-2}(-p.\beta - q) =$
$a.\alpha^{n-2}.\alpha^2 + b.\beta^{n-2}.\beta^2 = a.\alpha^n + b.\beta^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n - 1$ и $n - 2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че $a_{n-1} = a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}$ и $a_{n-2} = a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}$. Освен това α и β са корени на уравнението $(**)$, т.е. $\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$ и $\beta^2 + p.\beta + q = 0$, откъдето $\alpha^2 = -p.\alpha - q$ и $\beta^2 = -p.\beta - q$. От друга страна от рекурентното отношение имаме

$$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$$
$$-p.(a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}) - q.(a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}) =$$
$$a.\alpha^{n-2}.(-p.\alpha - q) + b.\beta^{n-2}(-p.\beta - q) =$$
$$a.\alpha^{n-2}.\alpha^2 + b.\beta^{n-2}.\beta^2 = a.\alpha^n + b.\beta^n,$$ което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n - 1$ и $n - 2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}$ и $a_{n-2} = a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}$. Освен това α и β са корени на уравнението $(**)$, т.е. $\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$ и $\beta^2 + p.\beta + q = 0$, откъдето $\alpha^2 = -p.\alpha - q$ и $\beta^2 = -p.\beta - q$.
От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.(a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}) - q.(a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}) =$
$a.\alpha^{n-2}.(-p.\alpha - q) + b.\beta^{n-2}(-p.\beta - q) =$
$a.\alpha^{n-2}.\alpha^2 + b.\beta^{n-2}.\beta^2 = a.\alpha^n + b.\beta^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}$ и $a_{n-2} = a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}$. Освен това α и β са корени на уравнението $(**)$, т.е. $\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$ и $\beta^2 + p.\beta + q = 0$, откъдето $\alpha^2 = -p.\alpha - q$ и $\beta^2 = -p.\beta - q$.
От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.(a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}) - q.(a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}) =$
$a.\alpha^{n-2}.(-p.\alpha - q) + b.\beta^{n-2}(-p.\beta - q) =$
$a.\alpha^{n-2}.\alpha^2 + b.\beta^{n-2}.\beta^2 = a.\alpha^n + b.\beta^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n - 1$ и $n - 2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}$ и $a_{n-2} = a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}$. Освен това α и β са корени на уравнението $(**)$, т.е. $\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$ и $\beta^2 + p.\beta + q = 0$, откъдето $\alpha^2 = -p.\alpha - q$ и $\beta^2 = -p.\beta - q$.

От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.(a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}) - q.(a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}) =$
$a.\alpha^{n-2}.(-p.\alpha - q) + b.\beta^{n-2}(-p.\beta - q) =$
$a.\alpha^{n-2}.\alpha^2 + b.\beta^{n-2}.\beta^2 = a.\alpha^n + b.\beta^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \dots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(* * *)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n - 1$ и $n - 2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}$ и $a_{n-2} = a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}$. Освен това α и β са корени на уравнението $(**)$, т.е. $\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$ и $\beta^2 + p.\beta + q = 0$, откъдето $\alpha^2 = -p.\alpha - q$ и $\beta^2 = -p.\beta - q$.
От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.(a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}) - q.(a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}) =$
$a.\alpha^{n-2}.(-p.\alpha - q) + b.\beta^{n-2}(-p.\beta - q) =$
$a.\alpha^{n-2}.\alpha^2 + b.\beta^{n-2}.\beta^2 = a.\alpha^n + b.\beta^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}$ и $a_{n-2} = a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}$. Освен това α и β са корени на уравнението $(**)$, т.е. $\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$ и $\beta^2 + p.\beta + q = 0$, откъдето $\alpha^2 = -p.\alpha - q$ и $\beta^2 = -p.\beta - q$.
От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.(a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}) - q.(a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}) =$
$a.\alpha^{n-2}.(-p.\alpha - q) + b.\beta^{n-2}(-p.\beta - q) =$
$a.\alpha^{n-2}.\alpha^2 + b.\beta^{n-2}.\beta^2 = a.\alpha^n + b.\beta^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}$ и $a_{n-2} = a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}$. Освен това α и β са корени на уравнението $(**)$, т.е. $\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$ и $\beta^2 + p.\beta + q = 0$, откъдето $\alpha^2 = -p.\alpha - q$ и $\beta^2 = -p.\beta - q$.
От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.(a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}) - q.(a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}) =$
$a.\alpha^{n-2}.(-p.\alpha - q) + b.\beta^{n-2}(-p.\beta - q) =$
$a.\alpha^{n-2}.\alpha^2 + b.\beta^{n-2}.\beta^2 = a.\alpha^n + b.\beta^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}$ и $a_{n-2} = a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}$. Освен това α и β са корени на уравнението $(**)$, т.е. $\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$ и $\beta^2 + p.\beta + q = 0$, откъдето $\alpha^2 = -p.\alpha - q$ и $\beta^2 = -p.\beta - q$.
От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.(a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}) - q.(a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}) =$
$a.\alpha^{n-2}.(-p.\alpha - q) + b.\beta^{n-2}(-p.\beta - q) =$
$a.\alpha^{n-2}.\alpha^2 + b.\beta^{n-2}.\beta^2 = a.\alpha^n + b.\beta^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, ...$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n - 1$ и $n - 2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}$ и $a_{n-2} = a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}$. Освен това α и β са корени на уравнението $(**)$, т.е. $\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$ и $\beta^2 + p.\beta + q = 0$, откъдето $\alpha^2 = -p.\alpha - q$ и $\beta^2 = -p.\beta - q$.
От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.(a.\alpha^{n-1} + b.\beta^{n-1}) - q.(a.\alpha^{n-2} + b.\beta^{n-2}) =$
$a.\alpha^{n-2}.(-p.\alpha - q) + b.\beta^{n-2}(-p.\beta - q) =$
$a.\alpha^{n-2}.\alpha^2 + b.\beta^{n-2}.\beta^2 = a.\alpha^n + b.\beta^n$, което доказва твърдението.

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено рекурентното отношение

$$a_{n+2} + p.a_{n+1} + q.a_n = 0, \qquad (*)$$

където a_0, a_1 са дадени числа. Нека освен това α, $\alpha \neq 0$, е двоен (двукратен) корен на уравнението

$$x^2 + p.x + q = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответно на рекурентното отношение $(*)$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = (a + b.n).\alpha^n, \qquad (***)$$

$n = 0, 1, \ldots$ за някои числа a и b.

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено рекурентното отношение

$$a_{n+2} + p.a_{n+1} + q.a_n = 0, \qquad (*)$$

където a_0, a_1 са дадени числа. Нека освен това α, $\alpha \neq 0$, е двоен (двукратен) корен на уравнението

$$x^2 + p.x + q = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответно на рекурентното отношение $(*)$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = (a + b.n).\alpha^n, \qquad (***)$$

$n = 0, 1, \ldots$ за някои числа a и b.

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено рекурентното отношение

$$a_{n+2} + p.a_{n+1} + q.a_n = 0, \qquad (*)$$

където a_0, a_1 са дадени числа. Нека освен това α, $\alpha \neq 0$, е двоен (двукратен) корен на уравнението

$$x^2 + p.x + q = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответно на рекурентното отношение $(*)$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = (a + b.n).\alpha^n, \qquad (***)$$

$n = 0, 1, \ldots$ за някои числа a и b.

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено рекурентното отношение

$$a_{n+2} + p.a_{n+1} + q.a_n = 0, \qquad (*)$$

където a_0, a_1 са дадени числа. Нека освен това α, $\alpha \neq 0$, е двоен (двукратен) корен на уравнението

$$x^2 + p.x + q = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответно на рекурентното отношение $(*)$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = (a + b.n).\alpha^n, \qquad (***)$$

$n = 0, 1, \ldots$ за някои числа a и b.

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено рекурентното отношение

$$a_{n+2} + p.a_{n+1} + q.a_n = 0, \qquad (*)$$

където a_0, a_1 са дадени числа. Нека освен това α, $\alpha \neq 0$, е двоен (двукратен) корен на уравнението

$$x^2 + p.x + q = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответно на рекурентното отношение $(*)$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = (a + b.n).\alpha^n, \qquad (***)$$

$n = 0, 1, \ldots$ за някои числа a и b.

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено рекурентното отношение

$$a_{n+2} + p.a_{n+1} + q.a_n = 0, \qquad (*)$$

където a_0, a_1 са дадени числа. Нека освен това α, $\alpha \neq 0$, е двоен (двукратен) корен на уравнението

$$x^2 + p.x + q = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответно на рекурентното отношение $(*)$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = (a + b.n).\alpha^n, \qquad (***)$$

$n = 0, 1, \ldots$ за някои числа a и b.

Доказателство.

Тъй като всичко казано в теоремата важи и за коплексни числа няма да уточняваме какви са числата и корените. В доказателството ще стане ясно как определяме числата a и b. Равенството (∗) е в сила за всички естествени числа n и в частност за $n = 0, 1$. След заместване с конкретните стойности получаваме системата

$a_0 = (a + b.0).1 = a$

$a_1 = (a + b.1).\alpha = (a + b).\alpha.$

Решавайки системата относно неизвестните параметри a и b, получаваме:

$$a = a_0, \quad b = \frac{a_1 - a_0.\alpha}{\alpha}.$$

Доказателство.

Тъй като всичко казано в теоремата важи и за коплексни числа няма да уточняваме какви са числата и корените. В доказателството ще стане ясно как определяме числата a и b. Равенството $(*)$ е в сила за всички естествени числа n и в частност за $n = 0, 1$. След заместване с конкретните стойности получаваме системата

$a_0 = (a + b.0).1 = a$

$a_1 = (a + b.1).\alpha = (a + b).\alpha$.

Решавайки системата относно неизвестните параметри a и b, получаваме:

$$a = a_0, \quad b = \frac{a_1 - a_0.\alpha}{\alpha}.$$

Доказателство.

Тъй като всичко казано в теоремата важи и за коплексни числа няма да уточняваме какви са числата и корените. В доказателството ще стане ясно как определяме числата a и b. Равенството $(*)$ е в сила за всички естествени числа n и в частност за $n = 0, 1$. След заместване с конкретните стойности получаваме системата

$a_0 = (a + b.0).1 = a$

$a_1 = (a + b.1).\alpha = (a + b).\alpha.$

Решавайки системата относно неизвестните параметри a и b, получаваме:

$$a = a_0, \quad b = \frac{a_1 - a_0.\alpha}{\alpha}.$$

Доказателство.

Тъй като всичко казано в теоремата важи и за коплексни числа няма да уточняваме какви са числата и корените. В доказателството ще стане ясно как определяме числата a и b. Равенството $(*)$ е в сила за всички естествени числа n и в частност за $n = 0, 1$. След заместване с конкретните стойности получаваме системата

$a_0 = (a + b.0).1 = a$

$a_1 = (a + b.1).\alpha = (a + b).\alpha.$

Решавайки системата относно неизвестните параметри a и b, получаваме:

$$a = a_0, \quad b = \frac{a_1 - a_0.\alpha}{\alpha}.$$

Доказателство.

Тъй като всичко казано в теоремата важи и за коплексни числа няма да уточняваме какви са числата и корените. В доказателството ще стане ясно как определяме числата a и b. Равенството (∗) е в сила за всички естествени числа n и в частност за $n = 0, 1$. След заместване с конкретните стойности получаваме системата

$a_0 = (a + b.0).1 = a$

$a_1 = (a + b.1).\alpha = (a + b).\alpha$.

Решавайки системата относно неизвестните параметри a и b, получаваме:

$$a = a_0, \quad b = \frac{a_1 - a_0.\alpha}{\alpha}.$$

Доказателство.

Тъй като всичко казано в теоремата важи и за коплексни числа няма да уточняваме какви са числата и корените. В доказателството ще стане ясно как определяме числата a и b. Равенството $(*)$ е в сила за всички естествени числа n и в частност за $n = 0, 1$. След заместване с конкретните стойности получаваме системата

$a_0 = (a + b.0).1 = a$

$a_1 = (a + b.1).\alpha = (a + b).\alpha.$

Решавайки системата относно неизвестните параметри a и b, получаваме:

$$a = a_0, \quad b = \frac{a_1 - a_0.\alpha}{\alpha}.$$

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = (a + b.(n-1)).\alpha^{n-1}$ и $a_{n-2} = (a + b.(n-2)).\alpha^{n-2}$.
Освен това α е корен на уравнението $(**)$, т.е.
$\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$, откъдето $q = \alpha^2$ и $p = -2.\alpha$. От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - q.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$
$2.\alpha.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - \alpha^2.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$
$\alpha^n[2.(a + b.(n-1)) - (a + b.(n-2)] = (a + b.n).\alpha^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(* * *)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че $a_{n-1} = (a + b.(n-1)).\alpha^{n-1}$ и $a_{n-2} = (a + b.(n-2)).\alpha^{n-2}$. Освен това α е корен на уравнението $(**)$, т.е. $\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$, откъдето $q = \alpha^2$ и $p = -2.\alpha$. От друга страна от рекурентното отношение имаме

$$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$$
$$-p.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - q.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$$
$$2.\alpha.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - \alpha^2.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$$
$$\alpha^n[2.(a + b.(n-1)) - (a + b.(n-2)] = (a + b.n).\alpha^n,$$ което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = (a + b.(n-1)).\alpha^{n-1}$ и $a_{n-2} = (a + b.(n-2)).\alpha^{n-2}$.
Освен това α е корен на уравнението $(**)$, т.е.
$\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$, откъдето $q = \alpha^2$ и $p = -2.\alpha$. От друга страна от рекурентното отношение имаме

$$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$$
$$-p.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - q.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$$
$$2.\alpha.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - \alpha^2.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$$
$$\alpha^n[2.(a + b.(n-1)) - (a + b.(n-2)] = (a + b.n).\alpha^n,$$ което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = (a + b.(n-1)).\alpha^{n-1}$ и $a_{n-2} = (a + b.(n-2)).\alpha^{n-2}$.
Освен това α е корен на уравнението $(**)$, т.е.
$\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$, откъдето $q = \alpha^2$ и $p = -2.\alpha$. От друга страна от рекурентното отношение имаме

$$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$$
$$-p.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - q.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$$
$$2.\alpha.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - \alpha^2.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$$
$$\alpha^n[2.(a + b.(n-1)) - (a + b.(n-2)] = (a + b.n).\alpha^n,$$

което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = (a + b.(n-1)).\alpha^{n-1}$ и $a_{n-2} = (a + b.(n-2)).\alpha^{n-2}$.
Освен това α е корен на уравнението $(**)$, т.е.
$\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$, откъдето $q = \alpha^2$ и $p = -2.\alpha$. От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - q.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$
$2.\alpha.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - \alpha^2.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$
$\alpha^n[2.(a + b.(n-1)) - (a + b.(n-2)] = (a + b.n).\alpha^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \dots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = (a + b.(n-1)).\alpha^{n-1}$ и $a_{n-2} = (a + b.(n-2)).\alpha^{n-2}$.
Освен това α е корен на уравнението $(**)$, т.е.
$\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$, откъдето $q = \alpha^2$ и $p = -2.\alpha$. От друга страна от рекурентното отношение имаме
$$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$$
$$-p.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - q.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$$
$$2.\alpha.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - \alpha^2.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$$
$$\alpha^n[2.(a + b.(n-1)) - (a + b.(n-2)] = (a + b.n).\alpha^n,$$ което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \dots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = (a + b.(n-1)).\alpha^{n-1}$ и $a_{n-2} = (a + b.(n-2)).\alpha^{n-2}$.
Освен това α е корен на уравнението $(**)$, т.е.
$\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$, откъдето $q = \alpha^2$ и $p = -2.\alpha$. От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - q.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$
$2.\alpha.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - \alpha^2.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$
$\alpha^n[2.(a + b.(n-1)) - (a + b.(n-2)] = (a + b.n).\alpha^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = (a + b.(n-1)).\alpha^{n-1}$ и $a_{n-2} = (a + b.(n-2)).\alpha^{n-2}$.
Освен това α е корен на уравнението $(**)$, т.е.
$\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$, откъдето $q = \alpha^2$ и $p = -2.\alpha$. От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - q.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$
$2.\alpha.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - \alpha^2.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$
$\alpha^n[2.(a + b.(n-1)) - (a + b.(n-2)] = (a + b.n).\alpha^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n - 1$ и $n - 2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = (a + b.(n-1)).\alpha^{n-1}$ и $a_{n-2} = (a + b.(n-2)).\alpha^{n-2}$.
Освен това α е корен на уравнението $(**)$, т.е.
$\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$, откъдето $q = \alpha^2$ и $p = -2.\alpha$. От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - q.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$
$2.\alpha.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - \alpha^2.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$
$\alpha^n[2.(a + b.(n-1)) - (a + b.(n-2)] = (a + b.n).\alpha^n$, което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n - 1$ и $n - 2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = (a + b.(n - 1)).\alpha^{n-1}$ и $a_{n-2} = (a + b.(n - 2)).\alpha^{n-2}$.
Освен това α е корен на уравнението $(**)$, т.е.
$\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$, откъдето $q = \alpha^2$ и $p = -2.\alpha$. От друга страна от рекурентното отношение имаме

$$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$$
$$- p.[a + b.(n - 1)]\alpha^{n-1} - q.[a + b.(n - 2)].\alpha^{n-2} =$$
$$2.\alpha.[a + b.(n - 1)]\alpha^{n-1} - \alpha^2.[a + b.(n - 2)].\alpha^{n-2} =$$
$$\alpha^n[2.(a + b.(n - 1)) - (a + b.(n - 2)] = (a + b.n).\alpha^n,$$ което доказва твърдението.

За останалите $n = 2, 3, \ldots$ твърдението ще докажем с пълна индукция относно n. Допускаме, че равенството $(***)$ е вярно за всички $k < n$. Ще го докажем и за n. Наистина, равенството е вярно за $n-1$ и $n-2$ съгласно индукционното предположение, откъдето получаваме, че
$a_{n-1} = (a + b.(n-1)).\alpha^{n-1}$ и $a_{n-2} = (a + b.(n-2)).\alpha^{n-2}$.
Освен това α е корен на уравнението $(**)$, т.е.
$\alpha^2 + p.\alpha + q = 0$, откъдето $q = \alpha^2$ и $p = -2.\alpha$. От друга страна от рекурентното отношение имаме
$a_n = -p.a_{n-1} - q.a_{n-2} =$
$-p.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - q.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$
$2.\alpha.[a + b.(n-1)]\alpha^{n-1} - \alpha^2.[a + b.(n-2)].\alpha^{n-2} =$
$\alpha^n[2.(a + b.(n-1)) - (a + b.(n-2)] = (a + b.n).\alpha^n$, което доказва твърдението.

Горните твърдения могат да се обобщят както следва:

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено хомогенно рекурентното отношение

$$a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = 0, \qquad (*)$$

където $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ са дадени числа. Нека освен това $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, са корени на уравнението

$$x^r + c_1.x^{r-1} + c_2.x^{r-2} + \cdots + c_r = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответно на рекурентното отношение $(*)$ с кратност $k_1, k_2, \ldots, k_s$ съответно, където $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = r$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = (a_{1,0} + a_{1,1}.n \cdots + a_{1,k_1-1}.n^{k_1-1}).\alpha_1^n + \ldots$$

$$+(a_{s,0} + a_{s,1}.n \cdots + a_{s,k_s-1}.n^{k_s-1}).\alpha_s^n, \qquad (***)$$

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \dots$ е определена от дадено хомогенно рекурентното отношение

$$a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = 0, \qquad (*)$$

където $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ са дадени числа. Нека освен това $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, са корени на уравнението

$$x^r + c_1.x^{r-1} + c_2.x^{r-2} + \cdots + c_r = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответно на рекурентното отношение $(*)$ с кратност $k_1, k_2, \dots, k_s$ съответно, където $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = r$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = (a_{1,0} + a_{1,1}.n \cdots + a_{1,k_1-1}.n^{k_1-1}).\alpha_1^n + \dots$$

$$+(a_{s,0} + a_{s,1}.n \cdots + a_{s,k_s-1}.n^{k_s-1}).\alpha_s^n, \qquad (***)$$

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \dots$ е определена от дадено хомогенно рекурентното отношение

$$a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \dots + c_r.a_n = 0, \qquad (*)$$

където $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ са дадени числа. Нека освен това $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, са корени на уравнението

$$x^r + c_1.x^{r-1} + c_2.x^{r-2} + \dots + c_r = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответно на рекурентното отношение $(*)$ с кратност $k_1, k_2, \dots, k_s$ съответно, където $k_1 + k_2 + \dots + k_s = r$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = (a_{1,0} + a_{1,1}.n \dots + a_{1,k_1-1}.n^{k_1-1}).\alpha_1^n + \dots$$

$$+(a_{s,0} + a_{s,1}.n \dots + a_{s,k_s-1}.n^{k_s-1}).\alpha_s^n, \qquad (***)$$

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \dots$ е определена от дадено хомогенно рекурентното отношение

$$a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \dots + c_r.a_n = 0, \qquad (*)$$

където $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ са дадени числа. Нека освен това $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, са корени на уравнението

$$x^r + c_1.x^{r-1} + c_2.x^{r-2} + \dots + c_r = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответно на рекурентното отношение $(*)$ с кратност $k_1, k_2, \dots, k_s$ съответно, където $k_1 + k_2 + \dots + k_s = r$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = (a_{1,0} + a_{1,1}.n \cdots + a_{1,k_1-1}.n^{k_1-1}).\alpha_1^n + \dots$$

$$+(a_{s,0} + a_{s,1}.n \cdots + a_{s,k_s-1}.n^{k_s-1}).\alpha_s^n, \qquad (***)$$

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \dots$ е определена от дадено хомогенно рекурентното отношение

$$a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \dots + c_r.a_n = 0, \qquad (*)$$

където $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ са дадени числа. Нека освен това $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, са корени на уравнението

$$x^r + c_1.x^{r-1} + c_2.x^{r-2} + \dots + c_r = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответно на рекурентното отношение $(*)$ с кратност $k_1, k_2, \dots, k_s$ съответно, където $k_1 + k_2 + \dots + k_s = r$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = (a_{1,0} + a_{1,1}.n \dots + a_{1,k_1-1}.n^{k_1-1}).\alpha_1^n + \dots$$

$$+(a_{s,0} + a_{s,1}.n \dots + a_{s,k_s-1}.n^{k_s-1}).\alpha_s^n, \qquad (***)$$

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено хомогенно рекурентното отношение

$$a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = 0, \qquad (*)$$

където $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ са дадени числа. Нека освен това $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, са корени на уравнението

$$x^r + c_1.x^{r-1} + c_2.x^{r-2} + \cdots + c_r = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответно на рекурентното отношение $(*)$ с кратност $k_1, k_2, \ldots, k_s$ съответно, където $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = r$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = (a_{1,0} + a_{1,1}.n \cdots + a_{1,k_1-1}.n^{k_1-1}).\alpha_1^n + \ldots$$

$$+(a_{s,0} + a_{s,1}.n \cdots + a_{s,k_s-1}.n^{k_s-1}).\alpha_s^n, \qquad (***)$$

Твърдение

Нека редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е определена от дадено хомогенно рекурентното отношение

$$a_{n+r} + c_1.a_{n+r-1} + c_2.a_{n+r-2} + \cdots + c_r.a_n = 0, \qquad (*)$$

където $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ са дадени числа. Нека освен това $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, са корени на уравнението

$$x^r + c_1.x^{r-1} + c_2.x^{r-2} + \cdots + c_r = 0 \qquad (**)$$

(наречено характеристично уравнение), съответно на рекурентното отношение $(*)$ с кратност $k_1, k_2, \ldots, k_s$ съответно, където $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = r$. Тогава общият член на редицата a_n има вида

$$a_n = (a_{1,0} + a_{1,1}.n \cdots + a_{1,k_1-1}.n^{k_1-1}).\alpha_1^n + \ldots$$

$$+(a_{s,0} + a_{s,1}.n \cdots + a_{s,k_s-1}.n^{k_s-1}).\alpha_s^n, \qquad (***)$$

Дотук ние изяснихме как се намира общия член на редица определена с хомогенно линейно рекурентно отношение.

Когато отношението не е хомогенно можем да намерим общия член на редицата, само когато дясната част F(n) има специален вид, т.е. $F(n) = P(n).q^n$ или е крайна линейна комбинация на такива функции.

Дотук ние изяснихме как се намира общия член на редица определена с хомогенно линейно рекурентно отношение. Когато отношението не е хомогенно можем да намерим общия член на редицата, само когато дясната част F(n) има специален вид, т.е. $F(n) = P(n).q^n$ или е крайна линейна комбинация на такива функции.

Дотук ние изяснихме как се намира общия член на редица определена с хомогенно линейно рекурентно отношение. Когато отношението не е хомогенно можем да намерим общия член на редицата, само когато дясната част F(n) има специален вид, т.е. $F(n) = P(n).q^n$ или е крайна линейна комбинация на такива функции.