Рекурентни съотношения

а.) Полиноми

1. Полином на x от степен n:

$f(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n$,

където $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

2. Степен на полином (на x) — най-високата степен, с която x участва в полинома:

$\deg(f) = n$

<u>Примери:</u> 1) $f(x) = -5x^2 + 1$, $\deg(f) = 2$

2) $f(x) = Ax + B$, $A \neq 0$, $\deg(f) = 1$

3) $f(x) = 5$, $\deg(f) = 0$

3. <u>a</u> е корен на полинома $f(x)$, ако $f(a) = 0$.

Еквивалентно, <u>a</u> е корен на $f(x)$, ако съществува полином $g(x)$, т.ч. $f(x) = (x-a) \cdot g(x)$.

<u>Примери:</u> 1) $f(x) = -5x^2 + 1$ има 2 корена: $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{-1}{\sqrt{5}}$

2) $f(x) = Ax + B$, $A \neq 0$ има 1 корен $-\frac{B}{A}$

3) $f(x) = 5$ няма корени.

Изобщо, ако $\deg(f) = n$, то f има най-много n корена над $\mathbb{C}$.

4. <u>a</u> е k-кратен корен на $f(x)$, ако същ. полином $g(x)$, т.ч. <u>a</u> не е корен на g, т.е. $g(a) \neq 0$ и $f(x) = (x-a)^k g(x)$

Примери: 1) 1 е 2-кратен корен на $f(x) = x^2 - 2x + 1$, защото $f(x) = (x-1)^2 \cdot 1 = (x-1)^2$.

2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$ има ~~ео~~ 1-кратен корен -1 и 2-кратен корен 2.

б.) Хомогенни рекурентни съотношения

1. Обща постановка на задачата: Нека $C_1, C_2, \dots, C_k$ са фиксирани константи.

Намерете всички редици $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ т.ч. за всяко n е в сила, че:

$$[*] \quad a_{n+k} = C_1 \cdot a_{n+k-1} + C_2 \cdot a_{n+k-2} + \dots + C_k \cdot a_n.$$

2. При конкретни $C_1, \dots, C_k$ има безброй много редици $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, които удовлетворяват зависимостта [*]. Общият вид на тези редици се намира следвайки следния алгоритъм:

① Намираме характеристичния полином на [*]:

$$f(x) = x^k - C_1 \cdot x^{k-1} - C_2 \cdot x^{k-2} - \dots - C_k$$

(f се получава от [*] като прехвърлим всичко от лявата страна, навсякъде заменим a_i с x^i, след което разделим на най-ниската степен на x, която се среща).

② Намираме корените с техните кратности на f (това е единственият нетривиален момент в целия алгоритъм).

Нека различните корените на f са:

x_1 с кратност m_1,
x_2 с кратност m_2,
...
x_s с кратност m_s.

Тогава $s \leq k$ и $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = k$

Нищо не пречи и някои от корените да не са реални.

③ Тогава е в сила, че: редицата $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворява зависимостта [*], точно тогава, когато съществуват полиноми $g_1(n), \ldots, g_s(n)$, такива, че: $\deg(g_1) \leq m_1 - 1$, $\deg(g_2) \leq m_2 - 1$, ..., $\deg(g_s) \leq m_s - 1$ и за всяко n имаме:

$$a_n = g_1(n) \cdot x_1^n + g_2(n) \cdot x_2^n + \ldots + g_s(n) \cdot x_s^n.$$

- забележете, че полиномите $g_1, \ldots, g_s$ са точно колкото различните корени (в това число и комплексните) на характеристичния полином на [*].
- ако ~~deg(gᵢ)~~ $m_i = 1$, т.е. x_i е ~~ед~~ 1-кратен корен, то $\deg(g_i) \leq 1-1 = 0$, т.е. g_i е константа, т.е. има $A \in \mathbb{C}$, т.ч. $g_i(n) = A$, $\forall n$;

подобно, ако $m_i = 2$, то $\deg(g_i) \leq 2-1 = 1$, т.е. g_i е най-много линейна ф-я. Така има $A, B \in \mathbb{C}$ т.ч.

$g_i(n) = An + B$ за вс. n.

3. Примери: Намерете всички редици $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, които удовлетворяват рекурентната зависимост:

Зад. 1. [1] $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Решение: Характеристичният полином на зависимостта [1] е $f(x) = x^2 - x - 1$. Корените на f са

$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ с кратност $m_1 = 1$ и

$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ с кратност $m_2 = 1$.

Така една редица $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворява [1], точно тогава, когато съществуват полиноми g_1 и g_2 т.ч. $\deg(g_1) \leq m_1 - 1 = 0$ и $\deg(g_2) \leq m_2 - 1 = 0$ и за вс. n, $a_n = g_1(n)x_1^n + g_2(n)x_2^n$.

Тъй като $\deg(g_1) = \deg(g_2) = 0$, то те са константи. Следователно, редицата $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворява [1], точно тогава, когато съществуват $A, B \in \mathbb{C}$, т.ч. за вс. n,

$$a_n = A\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Зад. 2 [2] $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 4a_n$

Решение: Характеристичният полином на [2] е $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ с корени:

$x_1 = -1$ с кратност $m_1 = 1$ и

$x_2 = 2$ с кратност $m_2 = 2$.

Тогава редицата $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворява [2] точно тогава, когато същ. полиноми g_1 и g_2 т.ч. $\deg(g_1) \le m_1 - 1 = 0$ (~~т.е. g~~ и $\deg(g_2) \le m_2 - 1 = 1$ и за вс. n, $a_n = g_1(n) x_1^n + g_2(n) x_2^n$.

Така $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворява [2] точно тогава, когато съществуват $A, B, C \in \mathbb{C}$ т.ч. за вс. n,

$$a_n = A \cdot (-1)^n + (Bn + C) \cdot 2^n$$

---

4. Единствена редица при фиксирани начални условия.

Нека $C_1, \dots, C_k$ и $B_0, \dots, B_{k-1}$ са фиксирани. Тогава съществува единствена редица $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, която удовлетворява зависимостта

[*] $a_{n+k} = C_1 \cdot a_{n+k-1} + C_2 \cdot a_{n+k-2} + \dots + C_k \cdot a_n$

и началните условия: $a_0 = B_0, a_1 = B_1, \dots, a_{k-1} = B_{k-1}$.

5. <u>Примери:</u> Намерете редицата $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, която удовлетворява съответната зависимост и начални условия:

<u>Зад. 3.</u> [3] $a_{n+2} = -a_n$ като $a_0 = 1, a_1 = -2$

<u>Решение:</u> Характ. полином на [3] е $f(x) = x^2 + 1$ с корени $x_1 = i$ с кратност $m_1 = 1$ и $x_2 = -i$ с кратност $m_2 = 1$.

Следователно, всяка редица $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, която удовлетворява [3] трябва да бъде такава, ч за вс. n, $a_n = A\cdot(i)^n + B\cdot(-i)^n$

полиномът пред x_1 е от степен $m_1-1=0$, т.е. константа

полиномът пред x_2 също е от степен $m_2-1=0$

Така, търсената от нас редица е от вида $\{A\cdot(i)^n + B(-i)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ за подходящи $A, B\in\mathbb{C}$.

Но
$$\begin{cases} a_0 = 1 = A\cdot(i)^0 + B(-i)^0 = A+B \\ a_1 = -2 = A\cdot(i)^1 + B(-i)^1 = A\cdot i - B\cdot i \end{cases}$$

От тази система намираме конкретните A и B, определящи търсената от нас редица:
$$A = \frac{1+2i}{2}, \quad B = \frac{1-2i}{2}.$$

Така търсената редица е $\left\{\frac{1+2i}{2}\cdot(i)^n + \frac{1-2i}{2}\cdot(-i)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

__Зад. 4__ [4] $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$

$a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1$

__Решение:__ [4] има хар. полином $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ с корен $x_1 = 1$ с кратност $m_1 = 3$.

Следователно вс. редица $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяваща [4] има вида $a_n = g_1(n)\cdot x_1^n$, за подходящ полином g_1 с $\deg(g_1) \le m_1 - 1 = 2$.

Така $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворява [4] точно когато същ. $A, B, C \in \mathbb{C}$ т.ч. за вс. n,

$$a_n = (An^2 + Bn + C).1^n$$

(Това е общият вид на полиномите от степен ≤ 2)

За търсената от нас редица знаем още, че:

$$\begin{cases} a_0 = 0 = (A.0^2 + B.0 + C).1^0 = C \\ a_1 = 0 = (A.1^2 + B.1 + C).1^1 = A + B + C \\ a_2 = 1 = (A.2^2 + B.2 + C).1^2 = 4A + 2B + C \end{cases}$$

Откъдето намираме, че търсената от нас редица $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ се определя от: $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 0$

Така търсената редица е $\{\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\}_{n\in\mathbb{N}}$

в. Нехомогенни зависимости.

1. <u>Обща постановка на задачата:</u> Нека $C_1, \dots, C_k$ са фиксирани константи, а F е функция на n; $B_0, \dots, B_{k-1}$ — фикс. конст.

Намерете ~~всички~~ редицата $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, т.ч. за вс. n е в сила, че:

[#] $a_{n+k} = C_1 \cdot a_{n+k-1} + C_2 \cdot a_{n+k-2} + \dots + C_k \cdot a_n + F(n)$

и $a_0 = B_0$, $a_1 = B_1, \dots, a_{k-1} = B_{k-1}$.

В общия случай, не може да се реши.
Ние ще се занимаем със специалния случай, когато F е от вида:

$$[\$] \quad F(n) = g_1(n) \cdot y_1^n + g_2(n) \cdot y_2^n + \ldots + g_r(n) \cdot y_r^n,$$

където $g_1, \ldots, g_r$ са полиноми (на n), $y_1, \ldots, y_r \in \mathbb{C}$.

2. Ако F е от вида [$], то всяка редица $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, която удовлетворява нехомогенната зависимост [#], трябва да удовлетворява хомогенна зависимост, чийто характеристичен полином има за корени:

- корените на хомогенната част на зависимостта [#], т.е. на:

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \ldots + c_k a_n$$

(т.е. на частта без $F(n)$).
със съответните им кратности

- y_1 с кратност $\deg(g_1)+1$

  y_2 с кратност $\deg(g_2)+1$

  ...

  y_r с кратност $\deg(g_r)+1$

3. Оттук намираме общия вид на редиците удовлетворяващи [#], след което с помощта

на началните условия $a_0 = B_0, \dots, a_{k-1} = B_{k-1}$

намираме търсената редица $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

3. <u>Примери.</u>

<u>Зад. 5.</u> Намерете редицата $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, която удовлетворява зависимостта:

$$[\#] \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + n^2 + 5.2^n$$

и началните условия: $a_0 = 0$, $a_1 = 0$.

<u>Решение:</u> В нашият случай $F(n) = n^2 + 5.2^n =$
$= n^2 . 1^n + 5.2^n$ (т.е. $g_1(n) = n^2$, $y_1 = 1$,
$g_2(n) = 5$, $y_2 = 2$). Хомогенната част на $[\#]$
е $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, за чийто характеристичен полином в <u>Зад. 1</u> намерихме, че има корени $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ с кратности

$m_1 = m_2 = 1$.

Всяка редица, удовлетворяваща $[\#]$, ще удовл. хомогенна зависимост, чийто хар. полином има корени:

- $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ с кратност $m_1 = 1$
- $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ с кратност $m_2 = 1$
- $y_1 = 1$ с кр. $m_3 = 2+1 = 3$
- $y_2 = 2$ с кр. $m_4 = 0+1 = 1$

Търсената от нас $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ също удовлетворява тази хомог. зависимост, следователно същ. ~~A, B, C, D, E,~~ A_1, A_2, B, C, D, E, т.ч. за вс. n,

$$[\uparrow] \quad a_n = A_1 \cdot x_1^n + A_2 \cdot x_2^n + (Bn^2 + Cn + D) \cdot y_1^n + E \cdot y_2^n$$

$$= A_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (Bn^2 + Cn + D) + E \cdot 2^n$$

Тук имаме 6 неизвестни, затова са нужни 6 уравнения, от които да ги намерим.

От зависимостта [#] и началните условия $a_0 = a_1 = 0$ намираме, че:

$$a_2 = a_1 + a_0 + F(0) = 0 + 0 + 0^2 + 5.1 = 5$$

$$a_3 = a_2 + a_1 + F(1) = 5 + 0 + 1^2 + 5.2^1 = 16$$

$$a_4 = a_3 + a_2 + F(2) = 16 + 5 + 2^2 + 5.2^2 = 45$$

$$a_5 = a_4 + a_3 + F(3) = 45 + 16 + 3^2 + 5.2^3 = 120$$

Сега от изразяването $[\uparrow]$ съставяме система от 6 уравнения с 6 неизвестни, откъдето намираме A_1, A_2, B, C, D, E, които определят търсената редица $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Зад. 6. Намерете редицата $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяваща
[6] $a_{n+1} = 2a_n + (n+1).2^n + 3^{n+1}$
и началните условия $a_0 = 0$.

степен 1 — степен 0

Решение. При нас $F(n) = (n+1).2^n + 3.3^n$,
което добавя корени 2 с кратност $1+1=2$
и 3 с кратност $0+1=1$.
От хомогенната част $a_{n+1} = 2a_n$ имаме
характеристичен корен 2 с кратност 1
($f(x) = x-2$ е хар. полином на $a_{n+1} = 2a_n$).
Така, всяка редица, удовлетворяваща [6],
удовлетворява хомогенна зависимост, чийто
хар. полином има корени:

- $x_1 = 2$ с кратност $m_1 = 1+2 = 3$

като корен от хом. част — от добавката $F(n)$

- $x_2 = 3$ с кратност 1 (само от $F(n)$)

Следователно, за търсената от нас редица $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,
същ. A, B, C, D т.ч. за вс. n,

$$a_n = (An^2+Bn+C).2^n + D.3^n$$

полиномът пред 2^n е от степен кратността на 2 без 1, т.е. от 2-ра

полиномът пред 3^n е от степен кратността на 3 без 1, т.е. от 0-ва, т.е. е конст.

От началните условия намираме:

$$a_1 = 2a_0 + F(0) = 0 + 1\cdot 2^0 + 3^1 = 4$$

$$a_2 = 2\cdot a_1 + F(1) = 8 + 2\cdot 2^1 + 3^2 = 21$$

$$a_3 = 2\cdot a_2 + F(2) = 42 + (2+1)\cdot 2^2 + 3^3 =$$
$$= 42 + 12 + 27 = 81$$

Тогава:

$$\left| \begin{array}{l} a_0 = 0 = (A\cdot 0^2 + B\cdot 0 + C)2^0 + D\cdot 3^0 = C + D \\ a_1 = 4 = (A\cdot 1^2 + B\cdot 1 + C)2^1 + D\cdot 3^1 = 2A + 2B + 2C + 3D \\ a_2 = 21 = (A\cdot 2^2 + B\cdot 2 + C)\cdot 2^2 + D\cdot 3^2 = 16A + 8B + 4C + 9D \\ a_3 = 81 = (A\cdot 3^2 + B\cdot 3 + C)\cdot 2^3 + D\cdot 3^3 = 72A + 24B + 8C + 27D \end{array} \right.$$

откъдето намираме $A = \frac{1}{4} = B$, $C = -3$, $D = 3$.

Следователно, търсената редица е:

$$\left\{ \left(\frac{n^2}{4} + \frac{n}{4} - 3\right)\cdot 2^n + 3^{n+1} \right\}_{n\in\mathbb{N}} .$$