Консултация за изпит по Дискретни Структури 1

Цветан Ангелов

Февруари 2017

Съдържание

Част I

Първо контролно

Глава 1

Предговор

Първото контролно по Дискретни Структури 1 включва в себе си задачи от:

- Индукция;
- Множества;
- Релации;
- Рекурентни зависимости.

В тази част от документа ще разгледаме основни понятия, методи за решаване и примерни задачи, свързани с всеки един от тези типове. Имайте в предвид, че документа по никакъв начин не изчерпва темата, но мисля че е добър начин за опресняване на знанията и подготовка за контролното или писмения изпит.

Глава 2

Индукция

Общи сведения Математическата индукция е метод за доказателство, който се състои от два основни етапа:

1. **Определяне на база** - основен случай, за който това, което доказваме е вярно;

2. **Индукционна стъпка** - определяне на **индукционно предположение** и **индукционно заключение**.

Когато решаваме задача използвайки индукция трябва да минем и през двата етапа като първо съобразим коя ще е подходящата база. Понякога може да са необходими и повече от два базови случая. Ако избраният базов случай не е очевидно изпълнен (тоест не следва от формална дефиниция) истинността му следва да бъде показана.

Индукционната стъпка е основната част от доказателството. При нея се прави предположени, на базата на което се извършва доказателство и се стига до заключение.

Индукцията стои в основата на доказателствата на много теореми не само в дискретната математика, но и в анализа, алгебрата, числените методи и т.н. Много от задачите за доказване в курса по Дискретни Структури също се решават с индукция. По тази причина я разглеждаме в този документ.

Задачи Ще покажем идеята на индукцията чрез няколко примерни задачи:

Задача 1. Докажете, че $\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}$, където $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Ще го докажем с индукция относно N.
За база ще изберем $N = 1$. Нека проверим:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1$$

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

Нека твърдението е вярно за K. Да го докажем за $K + 1$, тоест да докажем, че $\sum_{i=1}^{K+1} i = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$.

$$\sum_{i=1}^{K+1} i = \sum_{i=1}^{K} i + (K+1) = \frac{K(K+1)}{2} + K + 1 =$$

$$= \frac{K(K+1)}{2} + \frac{2(K+1)}{2} = \frac{(K+2)(K+1)}{2}$$

И така задачата е решена.

Задача 2. Докажете, че $3^N > N^2$, където $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Ще го докажем с индукция относно N.
Този път ще вземем четири базови случаи - за $N = 1, 2, 3$. Нека проверим и трите случая:

1. $3^1 > 1^2 \Leftrightarrow 3 > 1$ - очевидно;
2. $3^2 > 2^2 \Leftrightarrow 9 > 4$ - очевидно;
3. $3^3 > 3^2 \Leftrightarrow 27 > 9$ - очевидно.

Нека твърдението е вярно за K, $K > 2$. Да го докажем за $K + 1$, тоест да докажем, че $3^{K+1} > (K+1)^2$.
От индукционното предположение имаме:

$$3^K > K^2$$

Умножаваме двете страни по 3:

$$3 \times 3^K > 3 \times K^2$$

Тъй като $K > 2$ можем да запишем следните неравенства:

$$K^2 > 2 \times K, K^2 > 1$$

Комбинираме двете неравенства:

$$2 \times K^2 > 2 \times K + 1$$

Добавяме K^2 към двете страни:

$$3 \times K^2 > K^2 + 2 \times K + 1 = (K+1)^2$$

Сега заместваме в полученото по - нагоре неравенство:

$$3 \times 3^K = 3^{K+1} > (K+1)^2$$

И така задачата е решена.

Задача 3. (от упражнение при Антон Зиновиев) Гогошинестите числа се дефинират индуктивно:

- 5 е гогошинесто число;
- 8 е гогошинесто число;
- Ако n и m са гогошинести, то $n \times m^2$ също е гогошинесто число.

Докажете, че ако k е гогошинесто, то k + 1 се дели на 3 без остатък.

Ще го докажем с индукция относно дефиницията на гогошинесто число.

- $5 + 1 = 6$ се дели на 3 без остатък - очевидно;
- $8 + 1 = 9$ се дели на 3 без остатък - очевидно;
- Трябва да докажем, че ако n + 1 и m + 1 се делят на три без остатък, то $n \times m^2 + 1$ се дели на 3 без остатък.

Да допуснем, че n + 1 и m + 1 се делят на три без остатък. Тогава можем да ги запишем като $n + 1 = 3k$ и $m + 1 = 3p$. Така получаваме:

$$n \times m^2 + 1 = (3k-1)(3p-1)^2 + 1 = (3k-1)(9p^2 - 6p + 1) + 1 =$$

$$= 27p^2k - 18pk + 3k - 9p^2 + 6p - 1 + 1 = 3(9p^2k - 6pk + k - 3p^2 + 2p)$$

Полученото очевидно се дели на три.
И така задачата е решена.

Задача 4. (от контролно - 02.12.2011 г.) Нека P е свойство (за естествено число n), дефинирано чрез:

$$P(n) \iff 2^n < n! - 3^n$$

Ако трябва да се докаже, че $\forall n \geq 8[P(n)]$ по метода на математическата индукция:

1. формулирайте как би изглеждала базата на тази индукция;
2. формулирайте какво е твърдението, което трябва да се провери при индукционната стъпка.

Забележка: Символът P **не трябва** да присъства в окончателния ви отговор. Доказателството на съответните твърдения **не се изискват**.

За базата взимаме $n = 8$. Трябва да покажем, че $2^8 < 8! - 3^8$.
За индукционна стъпка: Допускаме, че за някое $k \geq 8$ имаме $2^k < k! - 3^k$. Трябва да покажем, че $2^{k+1} < (k+1)! - 3^{k+1}$.

Задача 5. (от контролно - 06.12.2012 г.) Нека P е свойство (за естествено число n), дефинирано чрез:

$$P(n) \iff \text{за всеки многоъгълник с } n \geq 3 \text{ върха,}$$

$$\text{сумата от ъглите му е } (n-2) \times 180^\circ$$

Ако трябва да се докаже по метода на математическата индукция:

1. формулирайте как би изглеждала базата на тази индукция;
2. формулирайте какво е твърдението, което трябва да се провери при индукционната стъпка.

Забележка: Символът P **не трябва** да присъства в окончателния ви отговор. Доказателството на съответните твърдения **не се изискват**.

За базата взимаме $n = 3$. Всеки триъгълник има сума от ъглите 180°.
За индукционна стъпка: Допускаме, че $\forall k$-ъгълник има сума от ъглите $(k-2) \times 180^\circ$. Трябва да покажем, че $\forall (k+1)$-ъгълник има сума от ъглите $(k-1) \times 180^\circ$.

Задача 6. (от поправка - септември 2015 г.) Нека $\{a_n\}$ е редица, за която $a_0 = 1$ и $a_{n+1} = (n+1)a_n + (-1)^{n+1}$. Да се докаже, че:

$$a_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}, \forall n \in \mathbb{N}$$

За база ще вземем $n = 0$. По условие знаем, че $a_0 = 1$. Да проверим твърдението:

$$0! \sum_{i=0}^{0} \frac{(-1)^0}{0!} = 0! \frac{(-1)^0}{0!} = 1$$

Преминаваме към индукционната стъпка:
Допускаме че твърдението е изпълнено за някое $k \in \mathbb{N}$. Ще го докажем за $k+1$. Тоест трябва да докажем, че:

$$a_{k+1} = (k+1)! \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(-1)^i}{i!}$$

По условие ни е дадена формула, по която да изчислим стойността на елемент от редицата чрез предходния:

$$a_{k+1} = (k+1)a_k + (-1)^{k+1} =$$

$$= (k+1) \left[k! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} \right] + (-1)^{k+1} =$$

$$= (k+1)! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} + (-1)^{k+1}$$

Умножаваме дясната страна на сбора по $\frac{(k+1)!}{(k+1)!}$ и изваждаме общия множител. Получаваме:

$$(k+1)! \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \right] = (k+1)! \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(-1)^i}{i!}$$

С което задачата е доказана.

Глава 3

Множества

Общи сведения Да започнем като изясним основните понятия свързани с множествата. Първо да погледнем няколко примерни множества, с които да изясним и какво е брой елементи в множество ($\emptyset$ е празното множество):

- $\{1, 2\}$ - множество от два елемента;
- $\{1, 2, 2\}$ - множество от два елемента;
- $\emptyset$ - множество без елементи;
- $\{\emptyset\}$ - множество от един елемент.

Сега да дефинираме и основните операции върху множествата:

- Обединение: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$
- Сечение: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$
- Разлика: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$
- Декартово произведение: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}$
- Подмножество: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$
- Равенство: $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
- Множество от подмножества: $2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$

Задачи Да разгледаме няколко задачи свързани с множествата:

Задача 1. (от контролно - 06.02.2012 г.) Дадени са множествата $A = \{2, 3\}$ и $B = \{0, 2, 3, 4\}$. Вярно ли е, че $A \subseteq B$? Вярно ли е, че ако $A \subseteq B$, то $B \setminus A = \emptyset$? Пресметнете:

а) $A \cup B$;

б) $A \cap B$;

в) $A \setminus B$;

г) $B \setminus A$;

д) $A \times (B \setminus A)$;

Първо да отговорим на първия въпрос - дали $A \subseteq B$. Тоест трябва да отговорим на въпроса - Дали всеки елемент от множеството A е също елемент и на множеството B? Това очевидно е вярно. A има два елемента - 2 и 3, и двата присъстват и в B.

Ще оставим втория въпрос за по - късно и ще преминем към пресмятанията:

а) $A \cup B = \{0, 2, 3, 4\}$ - елементите, които са в поне едно от двете множества. Обърнете внимание, че, когато едно множество A е подмножество на друго множество B, тяхното обединение е множеството B;

б) $A \cap B = \{2, 3\}$ - елементите, които са и в двете множества. Обърнете внимание, че, когато едно множество A е подмножество на друго множество B, тяхното сечение е множеството A;

в) $A \setminus B = \emptyset$ - елементите, които са в A, но не са в B. Обърнете внимание, че, когато едно множество A е подмножество на друго множество B, тяхната разлика A без B е празното множество;

г) $B \setminus A = \{0, 4\}$ - елементите, които са в B, но не са в A;

д) $A \times (B \setminus A) = \{(2, 0), (2, 4), (3, 0), (3, 4)\}$ - използваме полученото в г).

Сега можем да отговорим и на втория въпрос от задачата. Подточка г) е директен пример за неистинността на твърдението.

Задача 2. (от поправка - септември 2015 г.) Дадени са множествата $A = \{\emptyset, 3, 7\}$ и $B = \{2, 3, 7, 7\}$. Пресметнете:

а) $(A \setminus B) \times (A \cup B)$;

б) $(A \times (A \cup B)) \setminus (B \times (A \cap B))$.

Да започнем с а):
$C = A \setminus B = \{\emptyset\}$ - тъй като единственият елемент от A, който не е от B е празното множество.
$D = A \cup B = \{\emptyset, 2, 3, 7\}$ - това са елементите, които присъстват в поне едно от множествата.
$C \times D = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, 2), (\emptyset, 3), (\emptyset, 7)\}$

За б) ще използваме изчисленията от а):
$E = A \cap B = \{3, 7\}$ - елементите, присъстващи и в двете множества.
$F = A \times D =$
$= \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, 2), (\emptyset, 3), (\emptyset, 7), (3, \emptyset), (3, 2), (3, 3), (3, 7), (7, \emptyset), (7, 2), (7, 3), (7, 7)\}$
$G = B \times E = \{(2, 3), (2, 7), (3, 3), (3, 7), (7, 3), (7, 7)\}$
$F \setminus G = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, 2), (\emptyset, 3), (\emptyset, 7), (3, \emptyset), (3, 2), (7, \emptyset), (7, 2)\}$

Задача 3. (от контролно - 06.02.2012 г.) Докажете, че за произволни множества A и B, $A \times A \subseteq B \times B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Ще решим задачата в двете посоки:

Ще започнем с $\Rightarrow$):

$$\text{Нека } a \in A \text{ - произволно} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a, a) \in A \times A \subseteq B \times B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a, a) \in B \times B \Rightarrow a \in B$$

Тъй като показахме, че за произволен елемент от A този елемент е и от B, можем да заключим че $A \subseteq B$.

Сега за $\Leftarrow$):

$$\text{Нека } (a, b) \in A \times A \text{ - произволно} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in A \subseteq B \text{ и } b \in A \subseteq B \Rightarrow a \in B \text{ и } b \in B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a, b) \in B \times B$$

Тъй като показахме, че за произволна двойка елементи от A тази двойка е и от Декартовото произведение на B със себе си, можем да заключим че $A \times A \subseteq B \times B$.

Задача 4. (от контролно - 01.12.2014 г.) Докажете, че за произволни множества A, B, C, D е в сила, че

$$(A \cap B) \times (C \cup D) = ((A \times C) \cup (A \times D)) \cap ((B \times C) \cup (B \times D))$$

Да разгледаме първо лявата страна на равенството:

$$(A \cap B) \times (C \cup D) = \{(a, b) \mid a \in A \cap B \text{ и } b \in C \cup D\} =$$

$$= \{(a, b) \mid a \in A \text{ и } a \in B \text{ и } (b \in C \text{ или } b \in D)\}$$

Да разгледаме сега дясната страна на равенството:

$$((A \times C) \cup (A \times D)) \cap ((B \times C) \cup (B \times D)) =$$

$$= \{(a, b) \mid [(a, b) \in A \times C \text{ или } (a, b) \in A \times D]$$
$$\text{и } [(a, b) \in B \times C \text{ или } (a, b) \in B \times D]\} =$$
$$= \{(a, b) \mid [(a \in A \text{ и } b \in C) \text{ или } (a \in A \text{ и } b \in D)]$$
$$\text{и } [(a \in B \text{ и } b \in C) \text{ или } (a \in B \text{ и } b \in D)]\} =$$
$$= \{(a, b) \mid [a \in A \text{ и } (b \in C \text{ или } b \in D)] \text{ и } [a \in B \text{ и } (b \in C \text{ или } b \in D)]\} =$$
$$= \{(a, b) \mid a \in A \text{ и } a \in B \text{ и } (b \in C \text{ или } b \in D)\}$$

Така сведохме и двете страни до едни и същи условия, с което задачата е решена.

Задача 5. (от ??? - ??.??.???? г.) Намерете $(\{1, 2, 3, 1, 2, 3\} \setminus \{3\}) \times 2^{\{\emptyset, 5\}}$

Ще използваме тази лесна задача, за да покажем какво е 2^A.

$$A = \{1, 2, 3, 1, 2, 3\} \setminus \{3\} = \{1, 2\}$$

$$B = 2^{\{\emptyset, 5\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{5\}, \{\emptyset, 5\}\}$$

$$A \times B = \{(1, \emptyset), (1, \{\emptyset\}), (1, \{5\}), (1, \{\emptyset, 5\}), (2, \emptyset), (2, \{\emptyset\}), (2, \{5\}), (2, \{\emptyset, 5\})\}$$

Задача 6. (от ??? - ??.??.???? г.) Докажете, че за произволни множества A, B и C винаги е в сила, че:

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (C \cup (B \setminus C))$$

Задачата е подобна на **Задача 4.** Първо ще разгледаме лявата страна:

$$(A \setminus B) \setminus C = \{a \mid a \in A \setminus B \text{ и } a \notin C\} =$$

$$= \{a \mid a \in A \text{ и } a \notin B \text{ и } a \notin C\}$$

Да разгледаме сега дясната страна на равенството:

$$A \setminus (C \cup (B \setminus C)) = \{a \mid a \in A \text{ и } a \notin (C \cup (B \setminus C))\} =$$

$$= \{a \mid a \in A \text{ и } a \notin B \text{ и } a \notin C\}$$

Така сведохме и двете страни до едни и същи условия, с което задачата е решена. Но, може би, това в дясната страна не е много очевидно. За да го изясним трябва да обясним, какво означава $C \cup (B \setminus C)$. Първо като извършим разликата ще елиминираме от B тези елементи, които са също и в C. Но след като извършим обединението цялостта на B ще се възстанови и също така добавяме и останалите елементи на C. Така, ако искаме един елемент да не е в полученото множество, той трябва **да не е** нито в B, нито в C.

Задача 7. (от Писмен изпит - 05.02.2016 г.)

а) Докажете, че $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subseteq A$;

б) Напишете всички подмножества на множеството $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

Да започнем с а):
Първо за $\Rightarrow$: Нека $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

$$(A \cap B) \cup C = \{a \mid (a \in A \text{ и } a \in B) \text{ или } a \in C\}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{a \mid a \in A \text{ и } (a \in B \text{ или } a \in C)\} =$$
$$= \{a \mid (a \in A \text{ и } a \in B) \text{ или } (a \in A \text{ и } a \in C)\}$$

Условието от лявата страна на "или"е еднакво и в двете множества, тоест равенството в този случай е изпълнено винаги. Остава да разгледаме случая за елементите от C. За да имаме равенство трябва тези елементи да се препокриват с елементите, които отговарят на условието

$a \in A$ и $a \in C$). Тоест от присъствието на елемента в C трябва да следва присъствието му в A, което означава $C \subseteq A$.

Доказателството в обратната посока е аналогично. От това, че $C \subseteq A$, ще следва, че ако един елемент принадлежи на C, той също принадлежи и на A. Тоест имаме $a \in C \Rightarrow a \in A$ и $a \in C$ и като заместим в условията за $(A \cap B) \cup C$ ще получим неравенството.

Държа да отбележа, че това доказателство не е много формално и е базирано главно на наблюдения. За това ако на контролно прилагате подобно доказателство се постарайте да обясните всяко наблюдение.

Да преминем към б):
Да разделим подмножествата на база брой елементи:

- Нула елемента: $\emptyset$
- Един елемент: $\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}$
- Два елемента: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$
- Три елемента: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

Задача 8. (от поправка - септември 2013 г.) Докажете, че за произволни множества A и B от $A \subseteq B$ следва $A \times A \subseteq (A \cap B) \times B$.

Нека вземем произволен елемент:

$$(a, b) \in A \times A \Rightarrow a \in A \text{ и } b \in A \Rightarrow a \in A \text{ и } b \in A \subseteq B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in A \text{ и } b \in B \Rightarrow (a, b) \in A \times B$$

Тъй като от $A \subseteq B$ следва, че $A \cap B = A$, задачата е доказана.

Глава 4

Релации

Общи сведения Най - общо казано релацията е някакво съпоставяне на елементите от две или повече множества. Записваме релацията по някой от следните начини (примера е за бинарна релация):

- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$
- $(x, y) \in R \Leftrightarrow x < y$
- $xRy \Leftrightarrow x < y$

И трите записа означават едно и също. Релацията съдържа всички двойки реални числа, за които първото число от двойката е по - малко от второто.

Сега ще разгледаме едно много важно определение. Нека $R \subseteq A^2$.

- R е рефлексивна $\Leftrightarrow \forall x \in A(xRx)$;
- R е симетрична $\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A(xRy \Rightarrow yRx)$;
- R е транзитивна $\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A, \forall z \in A(xRy$ и $yRz \Rightarrow xRz)$;
- R е антисиметрична $\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in A(xRy$ и $yRx \Rightarrow x = y)$;
- R е релация на еквивалентност, ако R е рефлексивна, симетрична и транзитивна;
- R е частична наредба, ако R е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Други много важни понятия са „клас на еквивалентност“ и „индекс на еквивалентност“. Нека R е релация на еквивалентност в множеството A. Клас на еквивалентност относно R и съдържаща елемент $a \in A$ се означава с $[a]_R = \{b \mid bRa\}$. Индекс на еквивалентност (I_R) е броят на различните класове на еквивалентност за релацията R. Нека отбележим някои основни факта:

- Нека $[a_1]_R = \{a_1, a_2, a_3\}$. Тогава $[a_3]_R = [a_2]_R = [a_1]_R = \{a_1, a_2, a_3\}$;
- Сечението на всеки два различни класа на еквивалентност е празното множество;
- Обединението на всички класове на еквивалентност е самото множество A.

Задачи Да разгледаме няколко задачи свързани с релациите:

Задача 1. (от поправка - септември 2015 г.) Нека R е релация над $\mathbb{Z}$ и $aRb \Leftrightarrow a \leq b$ и $f(a) \leq f(b)$, където $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Да се провери дали R е частична наредба и релация на еквивалентност.

За да решим задачата трябва да проверим за рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност:

- Рефлексивност:

$$a \in \mathbb{Z}$$

$$aRa \Leftrightarrow a \leq a \text{ и } f(a) \leq f(a) \text{ - това очевидно е вярно}$$

$$\Rightarrow R \textbf{ е рефлексивна}$$

- Симетричност:

$$a, b \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Нека } aRb \Rightarrow a \leq b \text{ и } f(a) \leq f(b)$$

Трябва да проверим дали от това следва, че bRa, тоест $b \leq a$ и $f(b) \leq f(a)$. Ще покажем, че това не е така с контра пример:
Нека $a = 2, b = 4$. Очевидно $b \leq a$ не е вярно.

$$\Rightarrow R \textbf{ не е симетрична}$$

- Антисиметричност:

$$a, b \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Нека } aRb \text{ и } bRa \Rightarrow a \leq b \text{ и } f(a) \leq f(b) \text{ и } b \leq a \text{ и } f(b) \leq f(a)$$

Трябва да проверим дали от това следва, че $a = b$.

$$a \leq b \text{ и } b \leq a \Rightarrow a = b$$

$$\Rightarrow R \textbf{ е антисиметрична}$$

- Транзитивност:

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Нека } aRb \text{ и } bRc \Rightarrow a \leq b \text{ и } f(a) \leq f(b) \text{ и } b \leq c \text{ и } f(b) \leq f(c)$$

Трябва да проверим дали от това следва, че aRc, тоест дали $a \leq c$ и $f(a) \leq f(c)$

$$a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

$$f(a) \leq f(b) \leq f(c) \Rightarrow f(a) \leq f(c)$$

$$\Rightarrow R \textbf{ е транзитивна}$$

От полученото можем да определим, че релацията **е частична наредба** и **не е релация на еквивалентност**.

Задача 2. (от поправка - септември 2015 г.) Нека R е релация над двойка от естествени числа $M = \mathbb{N}^2$ и $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}(a = kc \text{ и } d = kb)$. Да се провери дали R е частична наредба и релация на еквивалентност.

За да решим задачата трябва да проверим за рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност:

- Рефлексивност:

$$(a, b) \in \mathbb{N}^2$$

$$(a, b)R(a, b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}(a = ka \text{ и } b = kb) \text{ - такова } k \text{ съществува: } k = 1$$

$$\Rightarrow R \textbf{ е рефлексивна}$$

- Симетричност:

$$(a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2$$

$$\text{Нека } (a, b)R(c, d) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}(a = kc \text{ и } d = kb)$$

Трябва да проверим дали от това следва, че $(c, d)R(a, b)$, тоест $\exists p \in \mathbb{N}(c = pa \text{ и } b = pd)$. Ще покажем, че това не е така с контра пример:
Тук може да се възползваме от ситуацията и да определим контра примера лесно. За да е изпълнено е необходимо $a = kc$ и $c = pa \Leftrightarrow a = kpa \Leftrightarrow a(1 - kp) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ или $p = k = 1 (p, k \in \mathbb{N})$. Тоест ако вземем пример, който не отговаря на тези условия, той ще е контра пример. Да видим:
Нека $a = 2, d = 4, k = 2 \Rightarrow c = 1, b = 2$. Трябва да намерим $p \in \mathbb{N}$, за което $1 = 2p, 2 = 4p \Rightarrow p = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. Което прави (2,2) и (1,4) валиден контра пример.

$$\Rightarrow R \textbf{ не е симетрична}$$

- Антисиметричност:

$$(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Нека } (a,b)R(c,d) \text{ и } (c,d)R(a,b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}(a = kc \text{ и } d = kb) \text{ и } \exists p \in \mathbb{N}(c = pa \text{ и } b = pd)$$

Трябва да проверим дали от това следва, че $(a,b) = (c,d)$.

$$a = kpa \Rightarrow a(1-kp) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } p = k = 1 (p,k \in \mathbb{N})$$

От това произлизат два случая:

1. $p = k = 1 \Rightarrow a = c, b = d \Rightarrow (a,b) = (c,d)$;
2. $a = 0 \Rightarrow c = 0 \times p \Rightarrow c = 0$
   Да видим за b и d:

$$d = dpk \Rightarrow d(1-pk) = 0 \Rightarrow d = 0 \text{ или } p = k = 1 (p,k \in \mathbb{N})$$

   Образуваме два под-случая:

   (а) $p = k = 1 \Rightarrow a = c, b = d \Rightarrow (a,b) = (c,d)$;

   (б) $d = 0 \Rightarrow b = 0 \times p \Rightarrow b = 0$
   И получаваме $a = c = 0, b = d = 0 \Rightarrow (a,b) = (c,d)$

И така получихме равенството на двойките във всеки един от тези случаи.

$\Rightarrow R$ **е антисиметрична**

- Транзитивност:

$$(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}^2$$

$$\text{Нека } (a,b)R(c,d) \text{ и } (c,d)R(e,f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}(a = kc \text{ и } d = kb) \text{ и } \exists p \in \mathbb{N}(c = pe \text{ и } f = pd)$$

Трябва да проверим дали от това следва, че $(a,b)R(e,f)$, тоест дали $\exists q \in \mathbb{N}(a = qe \text{ и } f = qb)$

$$a = kc = kpe$$

$$f = dp = bkp = kpb$$

Такова q съществува - $q = kp$

$\Rightarrow R$ **е транзитивна**

От полученото можем да определим, че релацията **е частична наредба** и **не е релация на еквивалентност**.

Задача 3. (от ??? - ??.??.???? г.) Нека R е релация над двойка от естествени числа $M = \mathbb{N}^2$ и $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a \geq c$ и $d \leq a+b$. Да се провери дали R е частична наредба и релация на еквивалентност.

За да решим задачата трябва да проверим за рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност:

- Рефлексивност:
$$(a,b) \in \mathbb{N}^2$$
$$(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow a \geq a \text{ и } b \leq a+b$$
Първото неравенство е очевидно и тъй като $a \in \mathbb{N}$, второто условие също е вярно.
$$\Rightarrow R \textbf{ е рефлексивна}$$

- Симетричност:
$$(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2$$
$$\text{Нека } (a,b)R(c,d) \Rightarrow a \geq c \text{ и } d \leq a+b$$
Трябва да проверим дали от това следва, че $(c,d)R(a,b)$, тоест $c \geq a$ и $b \leq c+d$. Ще покажем, че това не е така с контра пример: Нека $a = 2, b = c = d = 1$. Този пример валиден ли е? Да проверим: $2 \leq 1$ и $1 \leq 2+1$. Очевидно примера е валиден. Сега да видим дали е контра пример. Още първото условие ни дава това тъй като $c \not\geq a$.
$$\Rightarrow R \textbf{ не е симетрична}$$

- Антисиметричност:
$$(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}$$
$$\text{Нека } (a,b)R(c,d) \text{ и } (c,d)R(a,b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c \geq a \text{ и } d \leq a+b \text{ и } a \geq c \text{ и } b \leq d+c$$
Трябва да проверим дали от това следва, че $(a,b) = (c,d)$.
$$c \geq a \text{ и } a \geq c \Rightarrow a = c$$
Остава да проверим дали $d \leq a+b$ и $b \leq d+a \Rightarrow b = d$. Това не е така и ще го покажем с контра пример. Нека $a = b = c = 2$ и $d = 3$. Очевидно тези стойности удовлетворяват условията, но $b \neq d$.
$$\Rightarrow R \textbf{ не е антисиметрична}$$

- Транзитивност:

$$(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}^2$$

$$\text{Нека } (a,b)R(c,d) \text{ и } (c,d)R(e,f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \geq c \text{ и } d \leq a+b \text{ и } c \geq e \text{ и } f \leq c+d$$

Трябва да проверим дали от това следва, че $(a,b)R(e,f)$, тоест дали $a \geq e$ и $f \leq a+b$

$$a \geq c \text{ и } c \geq e \Rightarrow a \geq e$$

Остава само да покажем, че

$$d \leq a+b \text{ и } f \leq c+d \Rightarrow f \leq a+b$$

Това не е вярно и ще го покажем като конструираме контра пример. Той трябва да изпълнява следните условия:

$$f-c \leq d \leq a+b < f$$

Това гарантира, че примера ще изпълнява необходимите условия, но не и това което искаме да докажем. И така намираме следните стойности, които изпълняват условието:

$$a = 4$$

$$b = 0$$

$$c = 4$$

$$d = 1$$

$$f = 5$$

$$e = 3$$

$$\Rightarrow R \textbf{ не е транзитивна}$$

От полученото можем да определим, че релацията **не е частична наредба** и **не е релация на еквивалентност**.

Задача 4. (от поправка - септември 2015 г.) Нека $A = \{1, \{1, 2\}, 3, 4, 5\}$ и R е релацията:

$$\{(1, 1), (1, \{1, 2\}), (\{1, 2\}, 1), (\{1, 2\}, \{1, 2\}), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4),$$
$$(4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$$

Ако R е релация на еквивалентност:

а) Определете класа на еквивалентност на елемента 1 ($[1]_R$);

б) Да се намери индекса на R (I_R).

Класа на еквивалентност е множеството от всички елементи b, за които bR1. Това е множеството $\{1, \{1, 2\}\}$.
Нека сега намерим и другите класове на еквивалентност: $[3]_R = \{3, 4, 5\}$.
С което намерихме клас за всеки от елементите на A. Намерихме общо два класа, следователно индекса е 2.

Задача 5. (от ??? - ??.??.???? г.) Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и R е релацията:

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 5), (4, 1),$$
$$(4, 2), (4, 4), (5, 3), (5, 5)\}$$

Ако R е релация на еквивалентност:

а) Определете класа на еквивалентност на елемента 1 ($[1]_R$);

б) Да се намери индекса на R (I_R).

Класа на еквивалентност е множеството от всички елементи b, за които bR1. Това е множеството $\{1, 2, 4\}$.
Нека сега намерим и другите класове на еквивалентност: $[3]_R = \{3, 5\}$.
С което намерихме клас за всеки от елементите на A. Намерихме общо два класа, следователно индекса е 2.

Задача 6. (от ??? - ??.??.???? г.) Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ и R е релация на еквивалентност над A, определена чрез

$$nRm \iff n \text{ и } m \text{ имат еднакъв брой делители.}$$

Намерете индекса на R, както и класа на еквивалентност $[6]_R$.

Нека намерим всеки от класовете на еквивалентност. Това можем да постигнем като групираме елементите на A според броят делители:

- Един делител - $\{1\}$
- Два делителя - $\{2, 3, 5, 7\}$
- Три делителя - $\{4, 9\}$
- Четири делителя - $\{6, 8, 10\}$

Тоест имаме 4 различни класа на еквивалентност, което е индекса на релацията. Също така получихме $[6]_R = \{6, 8, 10\}$.

Глава 5

Рекурентни зависимости

Общи сведения Ще завършим материала от първото контролно с рекурентните зависимости. Нека припомним няколко понятия:

- **Нехомогенна рекурентна зависимост:** Това е зависимост, в чиято формула участва член, който не зависи от членовете на редицата. Въпросният член се нарича нехомогенна част. Пример:

  $$a_0 = 5$$

  $$a_{n+1} = a_n + 2$$

  В случая константата 2 е нехомогенната част. Явният вид на това уравнение е $a_n = 5 + 2n$.

- **Хомогенна рекурентна зависимост:** Тук всеки член е представен като линейна комбинация на предходните, т.е. няма независим член както при нехомогенните. Пример:

  $$a_0 = 5$$

  $$a_{n+1} = 2 \times a_n$$

  Явният вид на това уравнение е $a_n = 5 \times 2^n$.

- **Характеристично уравнение:** Ако имаме следната рекурсивна формула: $a_{n+1} = m \times a_n - n \times a_{n-1}$, където m и n са константи. Полагаме $a_n = C^n, C \neq 0$. Получаваме $C^{n+1} = m \times C^n - n \times C^{n-1}$. Сега нека разделим двете страни на C^{n-1}. Получаваме $C^2 - m \times C + n = 0$, което е характеристичното уравнение.

- **Общ вид на $\mathbf{a_n}$:** Общият вид зависи от броя корени на характеристичното уравнение и кратността на всеки един от тях. Ще го покажа с пример: Ако характеристичното уравнение има корени:
  - 2 и 3: $a_n = A \times 2^n + B \times 3^n$
  - 2 и 2: $a_n = A \times 2^n + B \times n \times 2^n$
  - 2, 2 и 3: $a_n = A \times 2^n + B \times n \times 2^n + C \times 3^n$
  - 2, 2, 2, 3, 3 и 5: $a_n = A \times 2^n + B \times n \times 2^n + C \times n^2 \times 2^n + D \times 3^n + E \times n \times 3^n + F \times 5^n$
- **Явен вид на $\mathbf{a_n}$:** Получава се след като се намерят неизвестните множители в общия вид.

Задачи Да разгледаме няколко задачи свързани с рекурентните зависимости:

Задача 1. (от контролно - 06.12.2012 г.) Дадена е рекурентна зависимост:

$$a_0 = 1, a_1 = 3$$

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$$

Определете характеристичното уравнение на редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Определете общия и явния вид на a_n.

За да намерим характеристичното уравнение извършваме полагане $a_n = x^n, x \neq 0$. Получаваме:

$$x^{n+2} - 6x^{n+1} + 9x^n = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

Характеристичното уравнение има двоен корен равен на 3. Следователно общия вид изглежда по следния начин:

$$a_n = A \times 3^n + B \times n \times 3^n$$

Сега, за да намерим явния вид ще използваме общия вид на първите два елемента от редицата:

$$\left| \begin{array}{l} a_0 = A \times 3^0 + B \times 0 \times 3^0 \\ a_1 = A \times 3^1 + B \times 1 \times 3^1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} A = 1 \\ 3A + 3B = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow A = 1, B = 0$$

И така получаваме $a_n = 3^n$.

Задача 2. (от контролно - 01.12.2014 г.) Дадена е рекурентна зависимост:

$$a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 18$$

$$a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1} + 4a_{n-2}$$

Намерете редица $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, която удовлетворява горните зависимост и начални условия.

За да намерим характеристичното уравнение извършваме полагане $a_n = x^n, x \neq 0$. Получаваме:

$$x^{n+1} - 6x^n + 9x^{n-1} - 4x^{n-2} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$$

Прилагаме Схема на Хорнер:

	1	-6	9	-4
1	1	-5	4	0
1	1	-4	0	
4	1	0		

Характеристичното уравнение има двоен корен равен на 1 и единичен корен равен на 4. Следователно общия вид изглежда по следния начин:

$$a_n = A \times 1^n + B \times n \times 1^n + C \times 4^n$$

Сега, за да намерим явния вид ще използваме общия вид на първите три елемента от редицата:

$$\left| \begin{array}{l} a_0 = A \times 1^0 + B \times 0 \times 1^0 + C \times 4^0 \\ a_1 = A \times 1^1 + B \times 1 \times 1^1 + C \times 4^1 \\ a_2 = A \times 1^2 + B \times 2 \times 1^2 + C \times 4^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} A + C = 1 \\ A + B + 4C = 5 \\ A + 2B + 16C = 18 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 0, B = 1, C = 1$$

И така получаваме $a_n = n \times 1^n + 4^n = n + 4^n$.

Задача 3. (от ??? - ??.??.???? г.) Дадена е рекурентна зависимост:

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 6^n$$

Намерете редица $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, която удовлетворява горните зависимост и начални условия.

Първо ще трябва да намерим хомогенна зависимост, еквивалентна на дадената: Първо да заместим в зависимостта с n и n - 1:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 6^n \text{ и } a_{n+1} - 5a_n + 6a_{n-1} = 6^{n-1}$$

Умножаваме второто по 6 и получаваме:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 6^n \text{ и } 6a_{n+1} - 30a_n + 36a_{n-1} = 6^n$$

От първото изваждаме второто и получаваме:

$$a_{n+2} - 11a_{n+1} + 36a_n - 36a_{n-1} = 0$$

За да намерим характеристичното уравнение извършваме полагане $a_n = x^n, x \neq 0$. Получаваме:

$$x^{n+2} - 11x^{n+1} + 36x^n - 36x^{n-1} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$$

Прилагаме Схема на Хорнер:

	1	-11	36	-36
2	1	-9	18	0
3	1	-6	0	
6	1	0		

Характеристичното уравнение има три единични корена - 2, 3 и 6. Следователно общия вид изглежда по следния начин:

$$a_n = A \times 2^n + B \times 3^n + C \times 6^n$$

Имаме само първите два члена от редицата, но ще ни трябват три. Нека пресметнем третия:

$$a_2 = 5a_1 - 6a_0 + 6^0 = 5 + 1 = 6$$

Сега, за да намерим явния вид ще използваме общия вид на първите три елемента от редицата:

$$\left| \begin{array}{l} a_0 = A \times 2^0 + B \times 3^0 + C \times 6^0 \\ a_1 = A \times 2^1 + B \times 3^1 + C \times 6^1 \\ a_2 = A \times 2^2 + B \times 3^2 + C \times 6^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} A + B + C = 0 \\ 2A + 3B + 6C = 1 \\ 4A + 9B + 36C = 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = -\frac{3}{4}, B = \frac{2}{3}, C = \frac{1}{12}$$

И така получаваме $a_n = -\frac{3}{4} \times 2^n + \frac{2}{3} \times 3^n + \frac{1}{12} \times 6^n$.

Задача 4. (от Писмен изпит - 05.02.2016 г.) Дадена е рекурентна зависимост:

$$a_0 = 0$$

$$a_{n+1} = -7a_n + n$$

Намерете редица $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, която удовлетворява горните зависимост и начални условия.

Първо ще трябва да намерим хомогенна зависимост, еквивалентна на дадената: Първо да заместим в зависимостта с n и n - 1:

$$a_{n+1} + 7a_n = n \text{ и } a_n + 7a_{n-1} = n - 1$$

От първото изваждаме второто и в резултата заместваме с n и n - 1:

$$a_{n+1} + 6a_n - 7a_{n-1} = 1 \text{ и } a_n + 6a_{n-1} - 7a_{n-2} = 1$$

От първото изваждаме второто и получаваме:

$$a_{n+1} + 5a_n - 13a_{n-1} + 7a_{n-2} = 0$$

За да намерим характеристичното уравнение извършваме полагане $a_n = x^n, x \neq 0$. Получаваме:

$$x^{n+1} + 5x^n - 13x^{n-1} + 7x^{n-2} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 - 13x + 7 = 0$$

Прилагаме Схема на Хорнер:

	1	5	-13	7
1	1	6	-7	0
1	1	7	0	
-7	1	0		

Характеристичното уравнение има двоен корен равен на 1 и единичен корен равен на -7. Следователно общия вид изглежда по следния начин:

$$a_n = A \times 1^n + B \times n \times 1^n + C \times (-7)^n$$

Имаме само първият член от редицата, но ще ни трябват три. Нека пресметнем втория и третия:

$$a_1 = -7a_0 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$a_2 = -7a_1 + 1 = -7 + 1 = -6$$

Сега, за да намерим явния вид ще използваме общия вид на първите три елемента от редицата:

$$\left| \begin{array}{l} a_0 = A \times 1^0 + B \times 0 \times 1^0 + C \times (-7)^0 \\ a_1 = A \times 1^1 + B \times 1 \times 1^1 + C \times (-7)^1 \\ a_2 = A \times 1^2 + B \times 2 \times 1^2 + C \times (-7)^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} A + C = 0 \\ A + B - 7C = 1 \\ A + 2B + 49C = -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{8}, B = 0, C = -\frac{1}{8}$$

И така получаваме $a_n = \frac{1}{8} \times 1^n - \frac{1}{8} \times (-7)^n = \frac{1-(-7)^n}{8}$.

Задача 5. (от контролно - 02.12.2011 г.) Дадена е рекурентна зависимост:

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + 2 \times 3^n$$

Намерете хомогенна рекурентна зависимост, еквивалентна на дадената.

Забележка: В действителност задачата включва и намирането на характеристично уравнение и явен вид, но, тъй като това става по един и същ начин във всички задачи, ще разгледаме само тази част която не е напълно универсална.

Първо да заместим в зависимостта с n и n - 1:

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 2 \times 3^n \text{ и } a_{n+1} - 6a_n + 9a_{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$$

Умножаваме второто уравнение по 3 и получаваме:

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 2 \times 3^n \text{ и } 3a_{n+1} - 18a_n + 27a_{n-1} = 2 \times 3^n$$

От първото изваждаме второто и получаваме:

$$a_{n+2} - 9a_{n+1} + 27a_n - 27a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} = 9a_{n+1} - 27a_n + 27a_{n-1}$$

Задача 6. (от контролно - 02.12.2011 г.) Дадена е рекурентна зависимост:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + n \times 3^n$$

Намерете хомогенна рекурентна зависимост, еквивалентна на дадената.

Първо да заместим в зависимостта с n и n - 1:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = n \times 3^n \text{ и } a_{n+1} - 5a_n + 6a_{n-1} = (n-1) \times 3^{n-1}$$

Умножаваме второто уравнение по 3 и получаваме:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = n \times 3^n \text{ и } 3a_{n+1} - 15a_n + 18a_{n-1} = (n-1) \times 3^n$$

От първото изваждаме второто и получаваме:

$$a_{n+2} - 8a_{n+1} + 21a_n - 18a_{n-1} = 3^n$$

Да заместим в зависимостта с n и n - 1:

$$a_{n+2} - 8a_{n+1} + 21a_n - 18a_{n-1} = 3^n \text{ и } a_{n+1} - 8a_n + 21a_{n-1} - 18a_{n-2} = 3^{n-1}$$

Умножаваме второто уравнение по 3 и получаваме:

$$a_{n+2} - 8a_{n+1} + 21a_n - 18a_{n-1} = 3^n \text{ и } 3a_{n+1} - 24a_n + 63a_{n-1} - 54a_{n-2} = 3^n$$

От първото изваждаме второто и получаваме:

$$a_{n+2} - 11a_{n+1} + 45a_n - 81a_{n-1} + 54a_{n-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} = 11a_{n+1} - 45a_n + 81a_{n-1} - 54a_{n-2}$$

Част II

Второ контролно

Глава 1

Предговор

Второто контролно по Дискретни Структури 1 включва в себе си задачи от:

- Графи;
- Дървета;
- Комбинаторика;
- Булеви функции.

В тази част от документа ще разгледаме основни понятия, методи за решаване и примерни задачи, свързани с всеки един от тези типове. Имайте в предвид, че документа по никакъв начин не изчерпва темата, но мисля че е добър начин за опресняване на знанията и подготовка за контролното или писмения изпит.

Глава 2

Графи и дървета

Общи сведения Ще започнем материала за второто контролно със задачите свързани с графи и дървета. Да започнем като изясним някои понятия. Ще бележим граф G по следния начин: $G = (V, E)$, където V е множество от върхове, а E е множество от двойки върхове от V, наречени ребра. Нека разделим графите на два вида:

- Ориентиран граф - Граф, в който от съществуването на ребро $A \to B$ **не следва**, че съществува $B \to A$;
- Неориентиран граф - Граф, в който от съществуването на ребро $A \to B$ **следва**, че съществува $B \to A$.

Друга важна дефиниция е **претеглен граф** - Граф, на който за всяко ребро е зададено число, наречено **тегло на реброто**.

Въвеждаме понятието **„Степен на връх“** - броят на излизащите ребра от даден връх. Бележим с $deg(v)$, където $v \in V$. Като имаме това в предвид можем да формулираме следната теорема:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

На понятието степен се базира и дефиницията за **регулярен граф** - Граф, на който всички върхове имат една и съща степен.

Други важни дефиниции са тези свързани с Ойлеровите и Хамилтоновите графи:

- Ойлеров път - Път, в който всяко ребро участва точно веднъж;
- Ойлеров цикъл - Ойлеров път, който има за начало и край един и същи връх;

- Хамилтонов път - Път, в който всеки връх участва точно веднъж;
- Хамилтонов цикъл - Хамилтонов път, в който само първият и последният връх съвпадат;

Нека споменем и **теоремата на Ойлер**: Един граф има ойлеров цикъл $\Leftrightarrow$ всеки негов връх има четна степен.

Сега да преминем към дефинициите свързани с дървета:

- Дърво - Свързан а-цикличен граф;
- Броят на ребрата в едно дърво е с 1 по - малък от броя върхове;
- Покриващо дърво на граф G - подграф на G, който е дърво и включва всички върхове на G;
- Минимално покриващо дърво на граф G: Покриващо дърво с възможно най - малък сбор от теглата на ребрата, участващи в дървото.

Алгоритми Контролното изисква познаване на три алгоритъма (Ще използваме граф $G(V, E)$ за обясненията на алгоритмите):

- Алгоритъм на Прим (минимално покриващо дърво):
  1. Избираме произволен връх $v \in V$. Така получаваме подграф $G'(V' = \{v\}, E' = \emptyset)$;
  2. Намираме най - лекото ребро $(u, w) \in E, u \in V', w \in V \setminus V'$. Добавяме w към V' и (u, w) към E';
  3. Ако $V' \neq V$, премини към 2;
  4. G' е минимално покриващо дърво на графа G.
- Алгоритъм на Крускал (минимално покриващо дърво):
  1. Първоначално имаме $G'(V' = \emptyset, E' = \emptyset)$;
  2. Намираме най - лекото ребро $(u, w) \in E$, такова че ако бъде добавено към G' няма да се получи цикъл;
     - Ако има такова ребро, добавяме u и w към V' и (u, w) към E'. Премини към 2;
     - Ако няма такова ребро, премини към 3;
  3. G' е минимално покриващо дърво на графа G.

- Алгоритъм на Дийкстра (минимален път от връх до всички останали):

  За целта правим едно разширение на понятието тегло на ребро. Ще казваме, че всъщност има ребра между всеки два върха, но тези, които не са в E имат тегло ∞. Ще бележим теглото на ребро между два върха $u, w \in V$ с $c(u, w)$. Нека върха, от който започваме пътищата е $v \in V$. С $dist[j]$ ще бележим текущия най - кратък път от v до $j \in V$. С $part[j]$ ще бележим предшественика на $j \in V$ в текущия най - кратък път от v до j.

  1. Първоначално имаме $U_0 = \{v\}, part[v] = -1, \forall j \in V(dist[j] = c(v, j)), dist[0] = 0, l = 0;$
  2. Намираме такова $j \in V \setminus U_l$, че $dist[j]$ е минимално. $U_{l+1} = U_l \cup \{j\}, l = l + 1.$

  $$\forall k \in V \setminus U_l(dist[k] > dist[j] + c(j, k) \Rightarrow$$

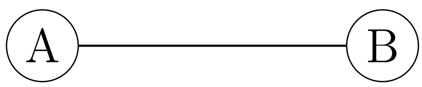
  $$\Rightarrow dist[k] = dist[j] + c(j, k) \text{ и } part[k] = j)$$

  3. Ако $U_l \neq V$, премини към 2;
  4. $dist[]$ съдържа дължините на най - кратките пътища от v до всеки от върховете на G.

Задачи Да разгледаме няколко задачи свързани с графи и дървета:

Задача 1. (от контролно - 13.01.2017 г.) Нека G е дърво с поне два върха. Докажете, че в G има два върха от първа степен, между които има път.

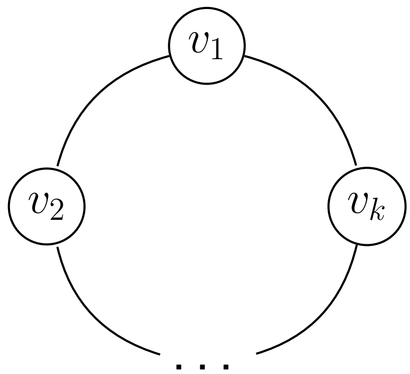
Първо да припомним, че дърво означава свързан ацикличен граф. Тоест в него между всеки два върха има път. От това следва, че ако намерим два върха в дървото от първа степен, съществуването на път между тях ще следва директно от това, че са от дървото. А какво всъщност означава един връх да е от първа степен? Това означава, че има само едно ребро между този връх и някой друг от дървото. А това отговаря точно на дефиницията на **листо**. За да докажем съществуването на две листа ще подходим индуктивно. Базовият случай изглежда така:



Очевидно тук имаме две листа.
Нека сме доказали твърдението за дърво G с k върха. Ще го докажем за дърво G' с $k+1$ върха. За целта ще добавим нов връх w към G като наследник на някакъв връх от дървото v. Ако v е листо, то престава да бъде листо, но новодобавеният връх w става листо. Така броят листа се запазва и твърдението е доказано в този случай. Ако v не е листо, никое от листата не губи статута си на такова и в същото време новодобавеният връх w става листо. Така броят листа нараства с 1 и твърдението е доказано и в този случай.

Задача 2. (от ??? - ??.??.???? г.) Даден е свързан граф G с 2016 върха и 1 цикъл. Колко ребра има графът?

Нека единственият цикъл на графа изглежда по следния начин:



Тогава да разгледаме графът G', който се получава от G като се премахне реброто между v_1 и v_2. Това нарушава цикъла и така G' е ацикличен. Сега нека разгледаме дали G' е свързан. Нека вземем два произволни върха w_1 и w_2. В G те са свързани с път:

$$w_1 — w'_1 — w'_2 — \ldots — w'_k — w_2$$

Сега въпроса е дали този път съдържа реброто $v_1 — v_2$. Ако не го го съдържа w_1 и w_2 са свързани и в G'. Ако обаче го съдържа ще трябва да намерим друг пат от v_1 до v_2. Такъв очевидно съществува и той е:

$$v_1 — v_k — v_{k-1} — \ldots — v_3 — v_2$$

Следователно и в този случай w_1 и w_2 са свързани и в G'. От това следва че G' е свързан ацикличен граф, тоест дърво. Това дърво има 2016 върха, тоест 2015 ребра. И тъй като получихме G' като премахнахме едно ребро от G, ребрата в G са $2015 + 1 = 2016$.

Задача 3. (от упражнение при Антон Зиновиев - 24.11.2015 г.) Докажете, че във всеки граф има четен брой върхове с нечетна степен.

Да си припомним, че $\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$, тоест сборът от степените на всички върхове е четно число. Нека разделим множеството от върховете на графа (V) на две подмножества:

$$V' = \{v \in V \mid deg(v) \text{ е четно число}\}$$

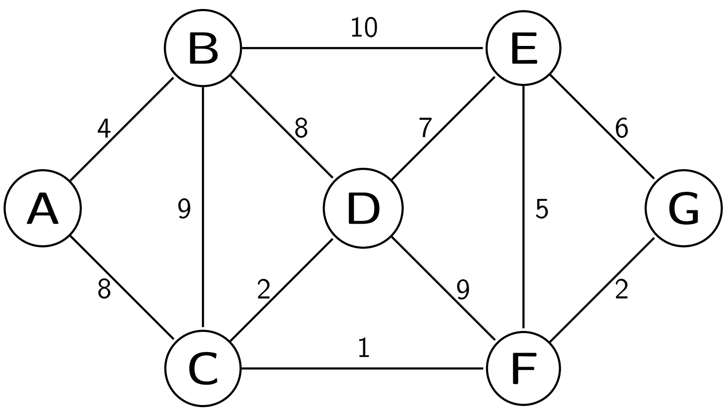
$$V'' = \{v \in V \mid deg(v) \text{ е нечетно число}\}$$

Тогава имаме:

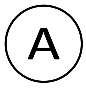
$$\sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{v \in V'} deg(v) + \sum_{v \in V''} deg(v) = 2|E|$$

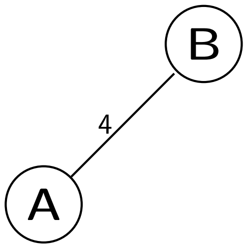
Но тъй като второто събираемо е сума от четни числа, то е винаги четно. Знаем, че четно + нечетно = нечетно и четно + четно = четно. От това следва че и първото събираемо трябва да е четно. Но то е сума от единствено нечетни числа. Знаем, че нечетно + нечетно = четно, тоест, за да се получи четно число като резултат от сумата на нечетни, трябва да можем да групираме събираемите по двойки. Така ще сведем сумата от нечетни до сума от четни и така четността на сбора ще е очевидна. За да извършим това групиране трябва да имаме четен брой събираеми, тоест броят върхове от нечетна степен е четно число.

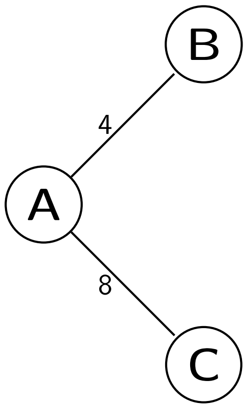
Задача 4. (от контролно - 13.01.2017 г.) Използвайте алгоритъма на Прим, за да намерите минимално покриващо дърво за графа:

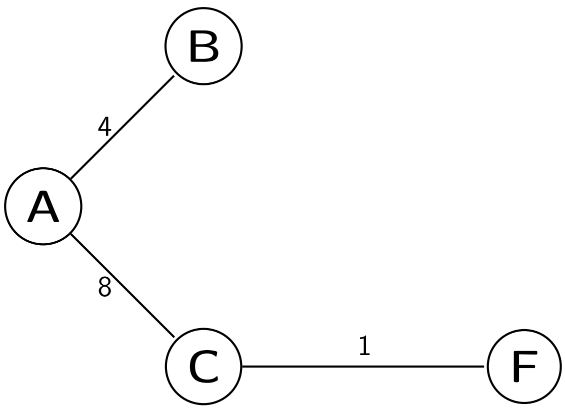


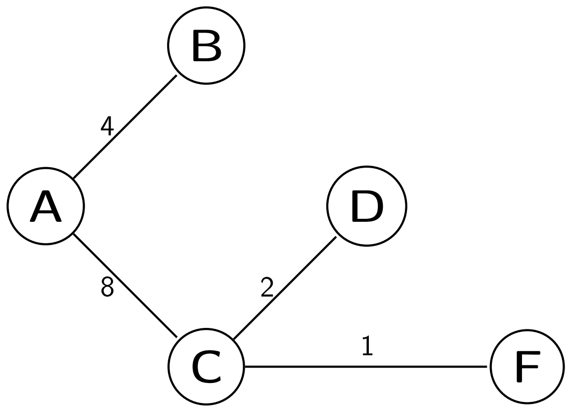
Ще покажа стъпките като последователност от дървета, всяко от които отговаря на съответната стъпка.

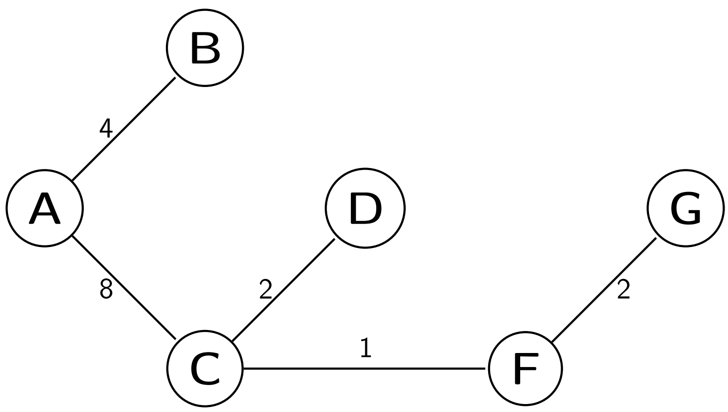

A

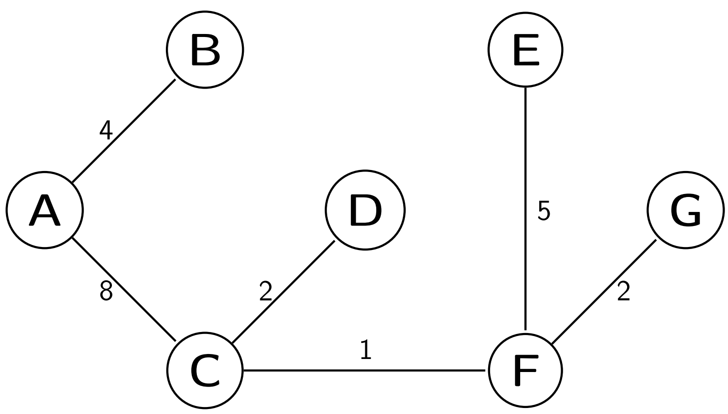

B
4
A


B
4
A
8
C


B
4
A
8
C
1
F





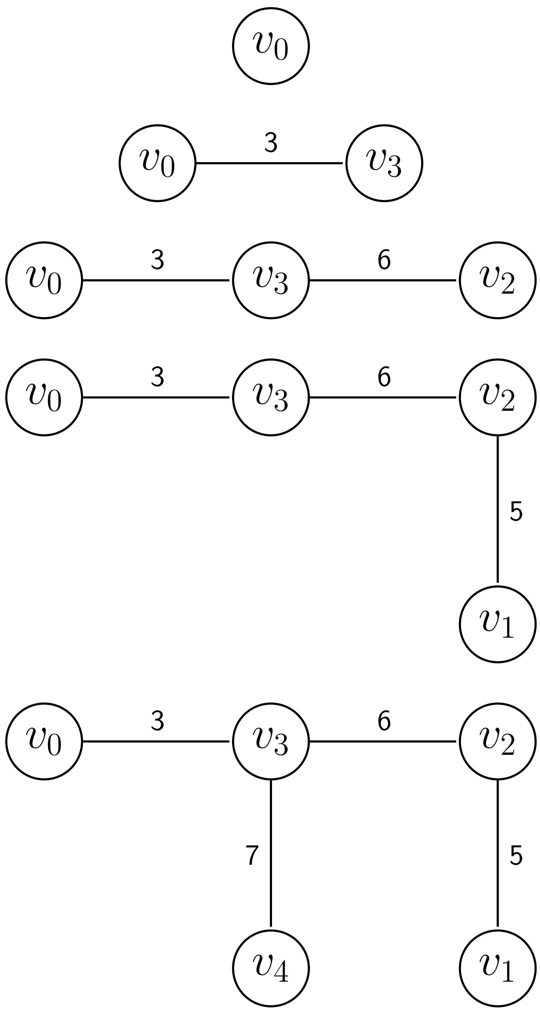


Задача 5. (от контролно - 13.01.2017 г.) Използвайте алгоритъма на Прим, за да намерите минимално покриващо дърво за графа с

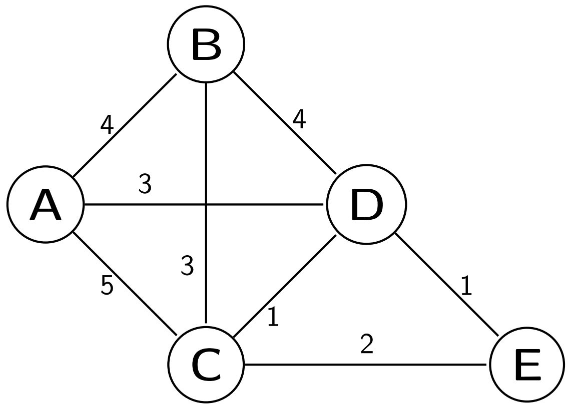
матрица на съседство:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
- & - & 8 & 3 & - \\
- & - & 5 & 8 & 9 \\
8 & 5 & - & 6 & - \\
3 & 8 & 6 & - & 7 \\
- & 9 & - & 7 & -
\end{pmatrix}
\end{array}$$

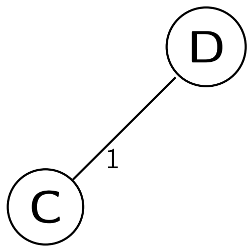
Ще покажа стъпките като последователност от дървета, всяко от които отговаря на съответната стъпка.

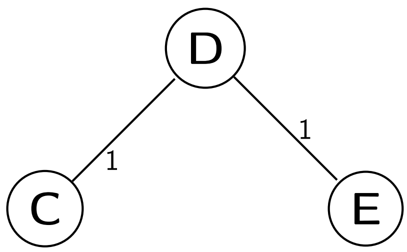


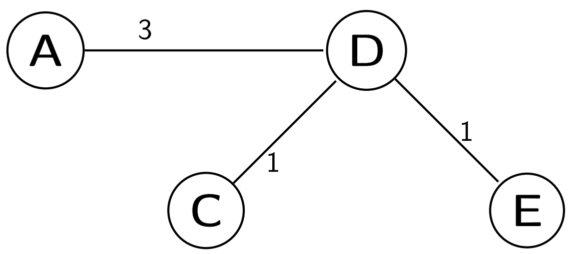
Задача 6. (от ??? - ??.??.???? г.) Използвайте алгоритъма на Крускал, за да намерите минимално покриващо дърво за графа:

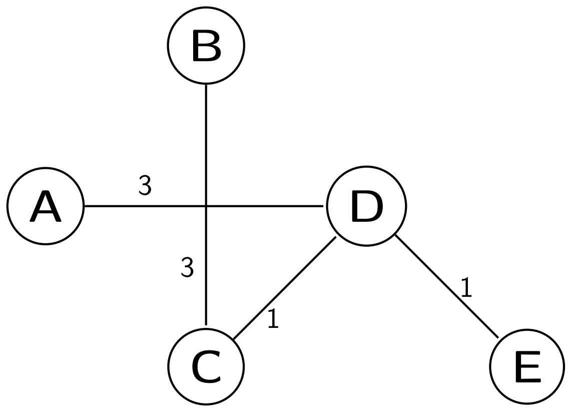


Ще покажа стъпките като последователност от дървета, всяко от които отговаря на съответната стъпка.





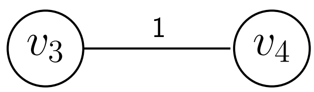


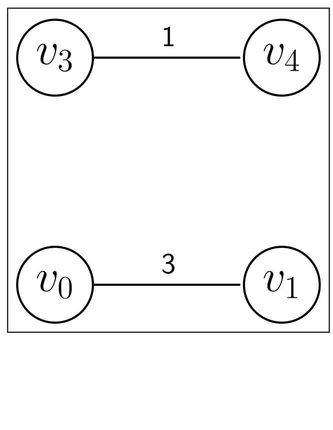


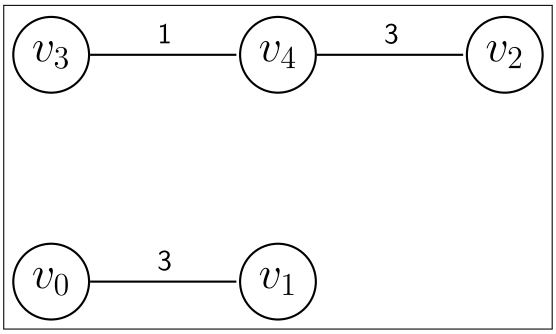
Задача 7. (от контролно - 13.01.2017 г.) Използвайте алгоритъма на Крускал, за да намерите минимално покриващо дърво за графа с матрица на съседство:

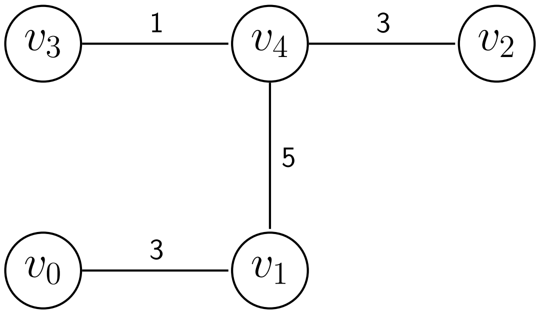
$$
\begin{array}{c}
\\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
- & 3 & 8 & - & 7 \\
3 & - & - & 6 & 5 \\
8 & - & - & 4 & 3 \\
- & 6 & 4 & - & 1 \\
7 & 5 & 3 & 1 & -
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Ще покажа стъпките като последователност от дървета, всяко от които отговаря на съответната стъпка.

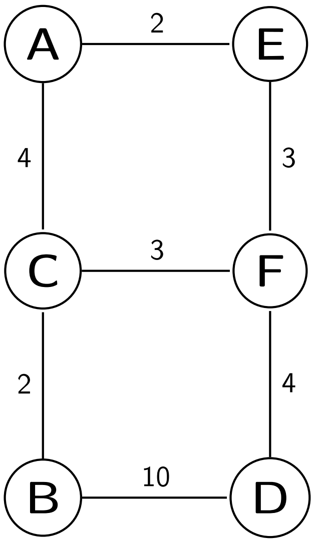








Задача 8. (от ??? - ??.??.???? г.) Намерете най - краткият път от върха A до всички останали като използвате алгоритъма на Дийкстра за следният граф:



Използваме таблица, за да решим задачата.

A	B	C	D	E	F
-1 0	-1 ∞	-1 ∞	-1 ∞	-1 ∞	-1 ∞
	-1 ∞	A 4	-1 ∞	A 2	-1 ∞
	-1 ∞	A 4	-1 ∞		E 5
	C 6		-1 ∞		E 5
	C 6		F 9		
			F 9		

Така получаваме пътищата:

A—–E с дължина 2

A—–C с дължина 4

A—–E—–F с дължина 5

A—–C—–B с дължина 6

A—–E—–F—–D с дължина 9

Задача 9. (от контролно - 20.01.2012 г.) Намерете най - краткият път от върха v_0 до всички останали като използвате алгоритъма на Дийкстра за следният граф зададен с матрица на съседство:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\
\begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
- & 2 & - & - & - & 3 \\
2 & - & 5 & - & 2 & - \\
- & 5 & - & 2 & 1 & - \\
- & - & 2 & - & 4 & - \\
- & 2 & 1 & 4 & - & 5 \\
3 & - & - & - & 5 & -
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Използваме таблица, за да решим задачата.

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
-1 / 0	-1 / ∞	-1 / ∞	-1 / ∞	-1 / ∞	-1 / ∞
	0 / 2	-1 / ∞	-1 / ∞	-1 / ∞	0 / 3
		1 / 7	-1 / ∞	1 / 4	0 / 3
		1 / 7	-1 / ∞	1 / 4	
		4 / 5	4 / 8		
			2 / 7		

Така получаваме пътищата:

v_0——v_1 с дължина 2

v_0——v_5 с дължина 3

v_0——v_1——v_4 с дължина 4

v_0——v_1——v_4——v_2 с дължина 5

v_0——v_1——v_4——v_2——v_3 с дължина 7

Глава 3

Комбинаторика

Общи сведения Преди да започнем да решаваме задачи от комбинаториката трябва да си припомним някои основни неща:

- Принципи на изброителната комбинаторика:
  - **Принцип на събирането:**

$$A, B \text{ - крайни множества}, |A| = m, |B| = n, A \cap B = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| = m + n$$

  - **Принцип на разбиването:**

$$A \text{ - крайно множество}, \{A_1, \ldots, A_n\} \text{ - разбиване на } A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

  - **Принцип на разликата:**

$$A \text{ - крайно множество}, A' \text{ и } A'' \subseteq A, A' = A \setminus A'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A'| = |A| - |A''|$$

  - **Принцип на умножението:**

$$A, B \text{ - крайни непразни множества}, |A| = m, |B| = n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A \times B| = |A| \times |B| = m \times n$$

– **Принцип на включването и изключването:**

$$A \text{ - крайно множество}, A_1, \ldots, A_n \subseteq A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\bar{A}_1{}^A \cap \bar{A}_2{}^A \cap \cdots \cap \bar{A}_n{}^A| = |A| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} |A_i \cap A_j| -$$

$$- \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3=1 \\ i_1<i_2<i_3}}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \cdots + (-1)^n \times |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

- Основни комбинаторни конфигурации ($|A| = n$):

  – Конфигурация от наредба и повторение ($\text{К}_{\text{Н,П}}(n, m)$) - всички наредени m-торки от елементи на A.

$$|\text{К}_{\text{Н,П}}(n, m)| = |A^m| = n^m$$

  – Конфигурация от наредба, без повторение ($\text{К}_{\text{Н}}(n, m)$) - всички наредени m-торки от елементи на A, такива, че няма повтарящи се.

$$|\text{К}_{\text{Н}}(n, m)| = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ - } \textbf{вариации}$$

$$|\text{К}_{\text{Н}}(n, n)| = n! \text{ - } \textbf{пермутации}$$

  – Конфигурация без наредба и без повторение ($\text{К}(n, m)$) - всички m-елементни подмножества на A.

$$|\text{К}(n, m)| = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ - } \textbf{комбинации}$$

  – Конфигурация без наредба и с повторение ($\text{К}_{\text{П}}(n, m)$) - всички ненаредени m-торки от елементи на A.

$$|\text{К}_{\text{П}}(n, m)| = \binom{m+n-1}{n-1}$$

Задачи Да разгледаме няколко задачи свързани с комбинаторика:

Задача 1. (от ??? - ??.??.???? г.) Намерете броят на решенията в $\mathbb{N}^5$ на уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$$

ако

а) Няма други условия;

Това е тривиалният случай. Няма да влизам в детайли как се извежда, а просто ще посоча формулата. Ако имаме:

$$\left| \begin{array}{c} x_1 + \cdots + x_n = k \\ x_i \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

то броят на решенията е $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} = \left(\binom{n}{k}\right)$. В конкретния случай имаме $\binom{21}{17}$.

б) $x_1 \geq 5$;

Ще го сведем до тривиалния случай.

$$x_1' = x_1 - 5 \geq 0, x_1' \in \mathbb{N}$$

$$x_1 = x_1' + 5$$

$$x_1' + 5 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$$

$$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$$

Броят решения е $\binom{16}{12}$.

в) $x_1 \geq 5$ и $x_2 \geq 3$;

Ще го сведем до тривиалния случай.

$$x_1' = x_1 - 5 \geq 0, x_2' = x_2 - 3$$

$$x_1', x_2' \in \mathbb{N}$$

$$x_1 = x_1' + 5, x_2 = x_2' + 3$$

$$x_1' + 5 + x_2' + 3 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$$

$$x_1' + x_2' + x_3 + x_4 + x_5 = 9$$

Броят решения е $\binom{13}{9}$.

г) $x_1 \leq 4$;

Тук следва да съобразим, че броят на решенията без ограничения е сбора от решенията при $x_1 \leq 4 + x_1 \geq 5$. Ние вече получихме бройката за по - голямо от 5 и за без ограничения. Броят решения е $\binom{21}{17} - \binom{16}{12}$.

д) $x_1 \leq 4, x_2 > 6$;

Първо до сега работихме само с условия включващи равенството. Нека направим така и тук.

$$x_2 > 6 \Leftrightarrow x_2 \geq 7$$

$$x_2' = x_2 - 7 \geq 0, x_2' \in \mathbb{N}$$
$$x_2 = x_2' + 7$$
$$x_1 + x_2' + 7 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$$
$$x_1 + x_2' + x_3 + x_4 + x_5 = 10$$

Сега да приложим и другото условие. Броят на решенията с $x_1 \leq 4 =$ Броят на решенията без ограничения - Броят на решенията с $x_1 \geq 5$. Броят решения е $\binom{14}{10} - \binom{9}{5}$.

е) $6 \leq x_1 \leq 10$;

$$x_1' = x_1 - 6 \geq 0, x_1' \in \mathbb{N}$$
$$x_1' \leq 4$$
$$x_1' + 6 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$$
$$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

Сега да приложим условието, което остана. Броят на решенията с $x_1 \leq 4 =$ Броят на решенията без ограничения - Броят на решенията с $x_1 \geq 5$. Броят решения е $\binom{15}{11} - \binom{10}{6}$.

ж) $x_1 \leq 3, x_2 \leq 5$.

Търсеният брой $=$ Броят на решенията без ограничения - (Броят на решенията с $x_1 \geq 4$ или $x_2 \geq 6$). Решенията с $x_1 \geq 4$ или $x_2 \geq 6$ $=$ (Решенията с $x_1 \geq 4$) $\cup$ (Решенията с $x_2 \geq 6$). И по метода на включването и изключването имаме

$$|(\text{Решенията с } x_1 \geq 4) \cup (\text{Решенията с } x_2 \geq 6)| =$$

$$= |(\text{Решенията с } x_1 \geq 4)| + |(\text{Решенията с } x_2 \geq 6)| -$$
$$-|(\text{Решенията с } x_1 \geq 4 \text{ и } x_2 \geq 6)| =$$
$$= \binom{17}{13} + \binom{15}{11} - \binom{11}{7}$$

Броят решения е $\binom{21}{17} - \binom{17}{14} - \binom{15}{11} + \binom{11}{7}$.

Задача 2. (от упражнение при Антон Зиновиев - 15.12.2015 г.) Намерете броят на решенията на

$$\left| \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 22 \\ x_1 > 3 \\ x_2 \geq 5 \\ x_3 < 6 \\ x_4 \leq 9 \end{array} \right.$$

Като начало да променим условията, които не включват равенството. Получаваме

$$\left| \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 22 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \geq 5 \\ x_3 \leq 5 \\ x_4 \leq 9 \end{array} \right.$$

Сега да разгледаме ограниченият с по - голямо или равно.

$$x_1' = x_1 - 4 \geq 0$$

$$x_2' = x_2 - 5 \geq 0$$

Също така за да компенсираме по - малкото в неравенството ще добавим допълнително събираемо y.

$$\left| \begin{array}{c} x_1' + x_2' + x_3 + x_4 + y = 13 \\ x_3 \leq 5 \\ x_4 \leq 9 \end{array} \right.$$

Сега ще приложим метода на включването и изключването (виж Задача 1. за по - детайлно обяснение). С модул на системата ще бележа броя решения.

$$\left| \left| \; x_1' + x_2' + x_3 + x_4 + y = 13 \; \right| \right. - \left| \left| \begin{array}{c} x_1' + x_2' + x_3 + x_4 + y = 13 \\ x_3 \geq 6 \end{array} \right. \right| -$$

$$-\left|\left|\begin{array}{c} x'_1 + x'_2 + x_3 + x_4 + y = 13 \\ x_4 \geq 10 \end{array}\right|\right| + \left|\left|\begin{array}{c} x'_1 + x'_2 + x_3 + x_4 + y = 13 \\ x_3 \geq 6 \\ x_4 \geq 10 \end{array}\right|\right| =$$

$$= \binom{17}{13} - \binom{11}{7} - \binom{7}{3} + 0$$

Задача 3. (от ??? - ??.??.???? г.) Нека $A = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$. Колко са:

а) подмножествата на A с 5 елемента - $\binom{8}{5}$;

б) 5-мерните вектора с координати от A - 8^5;

в) 5-мерните вектора с координати от A, които са два по два различни - $\frac{8!}{3!}$;

г) 5-мерните вектора с координати от A - $8^5 - \frac{8!}{3!}$.

Задача 4. (от ??? - ??.??.???? г.) Нека U е множество, $|U| = n$ и $X, Y \subseteq U$

а) По колко различни начина може да се избере X;

За всеки елемент от U има два варианта, или е в X или не е. Тоест получаваме 2^n.

б) Колко двойки (X, Y) има, такива, че $|X| = 1$ и $|Y| = 2$;

За избор на 1-елементно подмножество - $\binom{n}{1}$. За избор на 2-елементно подмножество - $\binom{n}{2}$. Следователно за двойките имаме $\binom{n}{1} \times \binom{n}{2}$

в) Колко двойки (X, Y) има, такива, че $|X| = k$ и $|Y| = l$;

За избор на k-елементно подмножество - $\binom{n}{k}$. За избор на l-елементно подмножество - $\binom{n}{l}$. Следователно за двойките имаме $\binom{n}{k} \times \binom{n}{l}$

г) Колко двойки (X, Y) има, такива, че $|X| \geq 1$;

Имаме само едно подмножество, което не изпълнява условието и то е празното множество. Тогава за X имаме $2^n - 1$ възможности. Тогава за двойките имаме $2^n(2^n - 1)$ възможности.

д) Колко двойки (X, Y) има, такива, че $|X| \geq k$ и $|Y| \leq l$;

$$|X| = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}$$

$$|Y| = \sum_{i=0}^{l} \binom{n}{i}$$

Тогава за двойките имаме $|X| \times |Y|$ възможности.

е) Колко двойки (X, Y) има, такива, че $X \cap Y = \emptyset$;

Нека $|X| = k$. Тогава има $\binom{n}{k}$ различни начина за избор на X. За всеки от тези варианти за X остават (n-k) на брой елемента от които да съставим Y. Тоест за двойките имаме $\binom{n}{k}2^{n-k}$. Сега това трябва да направим за всяко възможно k. И така получаваме

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{n-i}$$

Тук можем да направим едно наблюдение. Тъй като знаем, че

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Ако в тази формула заместим с $a = 2$ и $b = 1$ се получава нашия отговор. И така като краен отговор може да посочим 3^n.

Задача 5. (от ??? - ??.??.???? г.) Имаме множествата A, B и C. $|A| = 45, |B| = 45, |C| = 60, |A \cap B| = 25, |A \cap C| = 20, |A \cap B \cap C| = 5, |A \cup B \cup C| = 95$. Търсим $x = |B \cap C|$.

Прилагаме метода на включването и изключването:

$$95 = 150 - 45 - x + 5 \Rightarrow x = 15$$

Задача 6. (от ??? - ??.??.???? г.) Имаме множествата A, B и C. $|A| = 30, |C| = 70, |D| = 50, |A \cap B| = 10, |A \cap C| = 15, |A \cap D| = 20, |B \cap C| = 10, |B \cap D| = 5, |C \cap D| = 30, |A \cap B \cap C| = 15, |A \cap B \cap D| = 20, |A \cap C \cap D| = 5, |B \cap C \cap D| = 10, |A \cap B \cap C \cap D| = 5, |A \cup B \cup C \cup D| = 180$. Търсим $x = |B|$.

Прилагаме метода на включването и изключването:

$$180 = 30 + x + 70 + 50 - 10 - 15 - 20 - 10 - 5 - 30 + 15 + 20 + 5 + 10 - 5 \Rightarrow x = 75$$

Глава 4

Булеви функции

Общи сведения Последното нещо от второто контролно са булевите функции. Както и в останалите глави първо ще припомним основните понятия. За да кажем какво е **булева функция** първо трябва да кажем какво е **дискретна функция**:

$$A \text{ - крайно множество } \Rightarrow f : A^k \to A \text{ - дискретна функция}$$

След като знаем това, под булева функция ще разбираме дискретна функция, за която $A = J_2 = \{0, 1\}$. Така дефинираме две важни множества:

$$F_2^n = \{f \mid f : J_2^n \to J_2\} \text{ - всички n-местни булеви функции}$$

$$F_2 = \{f \mid f : J_2^n \to J_2, n = 1, 2, \dots\} \text{ - всички булеви функции}$$

Нека да видим основните функции за едноместни булеви функции:

- Идентитет: $I_1^1(x) = x$
- Отрицание: $\bar{x} = |x - 1|$
- Константна нула: $0(x) = 0$
- Константна единица: $1(x) = 1$

Нека да видим основните функции за двуместни булеви функции:

- Проектиращи функции (генерализирана за n-местна): $I_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i, 1 \leq i \leq n$
- Събиране по модул 2: $x \oplus y = (x + y) \mod 2$
- Константна нула: $0(x, y) = 0$

- Константна единица: $1(x, y) = 1$
- Отрицание на някой от двата аргумента: Не съм запознат със специално означение за тези две функции
- Конюнкция: $x.y = x \times y$
- Дизюнкция: $x \vee y = \begin{cases} 0, & x = y = 0 \\ 1 \end{cases}$
- Еквиваленция: $x \leftrightarrow y = \begin{cases} 0, & x \neq y \\ 1, & x = y \end{cases}$
- Импликация: $x \to y = \begin{cases} 0, & x = 1, y = 0 \\ 1 \end{cases}$
- Достатъчност: $x \leftarrow y = \begin{cases} 0, & x = 0, y = 1 \\ 1 \end{cases}$
- Стрелка на Пийрс: $x \downarrow y = \begin{cases} 0 \\ 1, & x = y = 0 \end{cases}$
- Щрих на Шефер: $x \mid y = \begin{cases} 0, & x = y = 1 \\ 1 \end{cases}$

Да отбележим друг начин за задаване на булева функция:

$$f(x, y, z) = (f(0,0,0), f(0,0,1), f(0,1,0), f(0,1,1),$$

$$f(1,0,0), f(1,0,1), f(1,1,0), f(1,1,1))$$

Нека изясним и някой важни закони за опростяване на булеви изрази:

- **Закон за слепването:**

$$X.Y \vee X.\overline{Y} = X$$

$$(X \vee Y).(X \vee \overline{Y}) = X$$

- **Закон за двойното отрицание:**

$$\overline{\overline{X}} = X$$

- **Закон за поглъщането при конюнкция:**

$$X.1 = X$$

$$X.0 = 0$$

$$X.X = X$$

$$X.\overline{X} = 0$$

- **Закон за поглъщането при дизюнкция:**

$$X \vee 1 = 1$$

$$X \vee 0 = X$$

$$X \vee X = X$$

$$X \vee \overline{X} = 1$$

- **Закони за де Морган:**

$$\overline{X \vee Y} = \overline{X}.\overline{Y}$$

$$\overline{X.Y} = \overline{X} \vee \overline{Y}$$

$$X \leftrightarrow Y = (X \rightarrow Y).(Y \rightarrow X)$$

$$X \rightarrow Y = \overline{X} \vee Y$$

Сега да видим как да преобразуваме булева функция в **съвършена дизюнктивна и конюнктивна нормална форма**.

- **Съвършена дизюнктивна нормална форма (СДНФ)** - форма, която представлява дизюнкции от елементарни конюнкции.

  Съставяме таблицата на истинността на функцията. Съставяме СДНФ като за всеки ред с **1** в колоната на стойностите на функциите образуваме елементарна конюнкция и ги обединяваме с операцията дизюнкция. Всяка елементарна конюнкция съставяме като последователност от „множители“, които зависят от съответната клетка на текущия ред. Ако тя е **1 - взимаме самият аргумент**, отговарящ на колоната, ако е **0 - взимаме отрицанието на самият аргумент**, отговарящ на колоната.

- **Съвършена конюнктивна нормална форма (СКНФ)** - форма, която представлява конюнкции от елементарни дизюнкции.

  Съставяме таблицата на истинността на функцията. Съставяме СКНФ като за всеки ред с **0** в колоната на стойностите на функциите образуваме елементарна дизюнкция и ги обединяваме с операцията конюнкция. Всяка елементарна дизюнкция съставяме като последователност от „събираеми“, които зависят от съответната клетка на текущия ред. Ако тя е **0 - взимаме самият аргумент**, отговарящ на колоната, ако е **1 - взимаме отрицанието на самият аргумент**, отговарящ на колоната.

Много важна е и дефиницията на **полином на Жегалкин**: f е полином на Жегалкин ако има вида:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \dots \oplus a_nx_n \oplus a_{n+1}x_1x_2 \oplus \dots$$
$$\dots \oplus a_mx_{n-1}x_n \oplus \dots \oplus a_kx_1x_2 \dots x_n, a_i \in \{0, 1\}$$

След като знаем какво е полином на Жегалкин ще дадем и метод за намиране на полином на Жегалкин по зададена функция. За съжаление не знам какъв метод е разглеждан на упражнение за това ще приложа най - лесния според мен метод - **метод на триъгълник**:

1. Построяваме пълната таблица на истинността, подредена според стандартната наредба на булевите вектори;

2. Построяваме спомагателна триъгълна таблица с първа колона съответстваща с колоната за стойности на функцията в таблицата на истинността;

3. Клетката във всяка следваща колона се получава чрез сумиране по модул 2 на две клетки от предишната колона – стоящата същия ред и реда позиция по-долу;

4. Колоните на спомагателната таблица се номерират с двоични кодове в същия ред както редовете на таблицата на истинността. На всеки такъв код съответства съответства член от полинома в зависимост от позициите на единиците в кода (например, ако аргументите са a,b,c, имаме 111=abc, 101=ac, 000=1 и т.н.);

5. Гледаме клетките в първия ред. Ако клетка е единица, членът отговарящ на съответната колона участва в полинома.

Да дадем някои дефиниции, които ще ни помогнат след малко:

- Двоичната функция f **запазва** c (c=0,1) $\Leftrightarrow f(c,\dots,c)=c$
- Двоичната функция f е **линейна**, ако нейния полином на Жегалкин има вида:

$$f(x_1,\dots,x_n)=a_0\oplus a_1x_1\oplus\dots\oplus a_nx_n, a_i\in\{0,1\}$$

- **Двойнствената функция** на двоичната функция f ще означаваме с f^* и $f^*(x_1,\dots,x_n)=\overline{f(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})}$
- Казваме, че f е **самодвойнствена** $\Leftrightarrow f=f^*$
- f е **монотонна** $\Leftrightarrow \forall\alpha,\beta\in J_2^n(\alpha\leq\beta\Rightarrow f(\alpha)\leq f(\beta))$

Сега да определим петте основни класа:

- $T_0=\{f\mid f$ запазва $0\}$
- $T_1=\{f\mid f$ запазва $1\}$
- $L=\{f\mid f$ е линейна$\}$
- $S=\{f\mid f$ е самодвойнствена$\}$
- $M=\{f\mid f$ е монотонна$\}$

Нека покажем критерий за пълнота на множество. **Критерий на Пост:** Нека F е множество от двоични функции. Тогава F е пълно $\Leftrightarrow$ F не е подмножество на никой от класовете T_0,T_1,L,S,M.
Сега да видим начин да приложим критерия на Пост:

1. Създаваме таблица, която изглежда така:

	T_0	T_1	S	M	L
f_1					
f_2					
$\dots$					
f_n					

2. Тази таблица следва да бъде попълнена в зависимост от това дали съответната функция е от съответния клас (+ за да, - за не);

3. Множеството от функциите е пълно ако във всяка колона има поне един -.

Задачи Да разгледаме няколко задачи свързани с булеви функции:

Задача 1. (от контролно - 13.01.2017 г.) Нека $f(x,y) = \overline{(\overline{x} \to yx) \oplus (\overline{y} \leftrightarrow x)} \oplus 1$ и $g = (0,1,1,0,1,1,1,0)$.

а) Намерете полиномите на Жегалкин на f и g;

Първо да намерим таблицата на истинността за f и g:

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

x	y	z	g(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Тези данни са ни достатъчни за да намерим полиномите на Жегалкин.

1	y	x	xy
0	1	0	0
1	1	0	
0	1		
1			

Следователно $f = y$ е търсения полином за f.

1	z	y	yz	x	xz	xy	xyz
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	0		
0	1	1	1	0			
1	0	0	1				
1	0	1					
1	1						
0							

Следователно $g = x \oplus y \oplus z \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$ е търсения полином за g.

б) Определете в кои от класовете S и L принадлежат функциите f и g;

Линейността определяме от полинома на Жегалкин. От това следва $f \in L$ и $g \notin L$. Гледайки таблиците на истинността можем също да заключим, че $f \in S$ и $g \notin S$.

в) Намерете СКНФ на g.

По показаната в общите сведения процедура имаме

$$g(x, y, z) = (x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$$

Задача 2. (от контролно - 20.01.2012 г.) Дадена е булевата функция $f(x, y, z)$ с вектор-стълб (01011100).

а) Напишете СДНФ за функцията;

Първо да напишем таблицата на истинността:

x	y	z	g(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

По показаната в общите сведения процедура имаме

$$f(x,y,z) = \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\overline{z} \vee x\overline{y}z$$

б) Проверете в кои от класовете T_0, T_1, S, M принадлежи f;

От таблицата е очевидно, че функцията принадлежи единствено на T_0.

в) Намерете полинома на Жегалкин за *f*. От получения резултат определете дали е линейна.

1	z	y	yz	x	xz	xy	xyz
0	1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	
0	1	1	1	0	1		
1	0	0	1	1			
1	0	1	0				
1	1	1					
0	0						
0							

Следователно $f = x \oplus z \oplus xy \oplus xz$ е търсения полином за *f*. Което показва, че функцията не е линейна.

Задача 3. (от контролно - 28.01.2013 г.) Дадена е булевата функция $f(x,y,z)$ с вектор-стълб (10011100).

а) Напишете СКНФ за функцията;

Първо да напишем таблицата на истинността:

x	y	z	g(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

По показаната в общите сведения процедура имаме

$$f(x,y,z) = (x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$$

б) Проверете в кои от класовете T_0, T_1, S, M принадлежи f;

От таблицата е очевидно, че функцията принадлежи единствено на T_0.

в) Намерете полинома на Жегалкин за *f*. От получения резултат определете дали е линейна.

1	z	y	yz	x	xz	xy	xyz
1	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	
0	1	1	1	0	1		
1	0	0	1	1			
1	0	1	0				
1	1	1					
0	0						
0							

Следователно $f = 1 \oplus y \oplus z \oplus xz$ е търсения полином за *f*. Което показва, че функцията не е линейна.

Задача 4. (теорема на Бул) Проверете дали множеството $\{., \vee, \neg\}$ е пълно.

	T_0	T_1	S	M	L
.	+	+	-	+	-
$\vee$	+	+	-	+	-
$\neg$	-	-	+	-	+

От това следва, че множеството е пълно.

Задача 5. Проверете дали множеството $\{\leftrightarrow, \vee, 0\}$ е пълно.

	T_0	T_1	S	M	L
$\leftrightarrow$	-	+	-	-	+
$\vee$	+	+	-	+	-
0	+	-	-	+	+

От това следва, че множеството е пълно.

Забележка: За задачите 4 и 5 може да намерите повече информация в общите сведения.