Задача 9.

Нека $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}\backslash\{0\}$. Нека R е релация над A, определена чрез:

$xRy \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{Q})[x = py \ \vee \ xy = p]$, такова p ще наричаме свидетел за това, че x е в релация с y. Покажете, че R е релация на еквивалентност над A.

Док-во:

а) Рефлексивност. Нека $a \in A$. Тогава $1 \in \mathbb{Q}$ и
$x = 1.x \Rightarrow (\exists 1 \in \mathbb{Q})[\underbrace{x = 1.x}_{true} \vee \ x \,.\, x = 1]$, т.е. 1 е свидетел, че xRx.

б) Симетричност. Нека xRy и $p \in Q$ е свидетел за това, т.е. $x = py$ или $xy = p$. Ще намерим свидетел за yRx.
Ако $x = py$, то $y = \dfrac{1}{p}x$ (ако $p = 0$, то $x = 0 \in A$). Но $\dfrac{1}{p} \in \mathbb{Q}$ и така $q = \dfrac{1}{p}$ е свидетел за yRx, защото $y = qx \Rightarrow (y = qx \ \vee \ yx = q)$ е истина.

в) Транзитивност. Нека xRy, yRx и $p, q \in \mathbb{Q}$ са свидетели за тези релации съответно.
За да бъде R транзитивна трябва да е изпълнено:

$\forall x \forall y \forall z (xRy \ \& \ yRz \Rightarrow xRz)$, т.е. $(x = py \ \vee \ xy = p)$ и $(y = qz \ \vee \ yz = q)$

Следователно имаме четири възможности за случването на xRy и yRz и при всяка една от тях трябва да проверим дали $\exists$ свидетел за xRz, т.е. ще търсим такова $s \in \mathbb{Q}$, че $(x = sz \ \vee \ xz = s)$, $s \in \mathbb{Q}$

(1) $x = py$ и $y = qz \ \Rightarrow \ x = py = p(qz) = (pq)z \Rightarrow s = pq \in Q$;

(2) $x = py$ и $yz = q \Rightarrow x\,.\,y\,.\,z = p\,.\,y\,.\,q \Rightarrow xz = pq = s \in \mathbb{Q} \Rightarrow s = pq$;

(3) $xy = p$ и $y = qz \ \Rightarrow \ xyzq = y\,.\,p \Rightarrow xz = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$, $s = \dfrac{p}{q}$ е свидетел за xRz.

(4) $xy = p$ и $yz = q \ \Rightarrow y = \dfrac{q}{z}$, $xy = p \Leftrightarrow x\,.\dfrac{q}{z} = p \Rightarrow x = \dfrac{p}{q}z$, $q \neq 0 \Rightarrow = \dfrac{p}{q}$ е свидетел.

Следователно релацията е транзитивна, но ние доказахме също, че е и рефлексивна и симетрична, от където следва че R е релация на еквивалентсност.