Задача 11. (1.5 т.) 02.12.2018 г.

Определете кои от своиствата рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност притежава релацията R в $\mathbb{N} \times P(\mathbb{N})$, определена чрез: $(a, A)R(b, B) \Leftrightarrow a$ дели b или $B \subseteq A$. *R е релация между естествено число и множеството от естествени числа.*

Решение:

1) *Рефлексивност.*
Нека имаме наредена двойка (a, A). Трябва да проверим дали $(a, A)R(a, A) \Leftrightarrow a$ дели a или $A \subseteq A$, което очевидно е изпълнено, тъй като $a \mid a$ и $A \subseteq A$, за $\forall a \in \mathbb{N}$ и за $\forall A \subseteq \mathbb{N}$. Следователно R е рефлексивна.

2) *Симетричност.*
Нека имаме (a, A) и (b, B). Трябва да проверим дали за $\forall a, b, A, B$: ако $(a, A)R(b, B)$, то $(b, B)R(a, A)$, т.е. ако (a *дели* b *или* $B \subseteq A$), то (b *дели* a *или* $A \subseteq B$). Но това *не* винаги е изпълнено.Ще дадем *контрапримера* $a = 2$,$b = 4$,$A = \{1,2\}$, $B = \{1\}$. Следователно Rне е симетрична.

3) *Антисиметричност.*
Трябва да проверим дали, ако $(a, A)R(b, B)$ и

$$(2,\{1\})R(4,\{1,2\}), \text{ тъй като } \underbrace{\underbrace{2\mid 4}_{true} \vee \underbrace{\{1,2\} \subseteq \{1\}}_{false}}_{true}$$

$$\text{и } (4,\{1,2\})R(2,\{1\}), \text{ тъй като } \underbrace{\underbrace{4\mid 2}_{false} \vee \underbrace{\{1\} \subseteq 1,2}_{true}}_{true},$$

но $(2,\{1\}) \neq (4,\{1,2\})$. Следователно R не е и антисиметрична.

От *2)* и *3)* следва, че R не е нито релация на еквивалентност, нито частична наредба.

4) *Транзитивност.*

Трябва да проверим дали, ако $(a, A)R(b, B)$ и $(b, B)R(c, C)$, то $(a, A)R(c, C)$ за произволни $a, b, c \in \mathbb{N}$ и $A, B, C \subseteq P(\mathbb{N})$.

Тоест трябва да проверим дали, ако:

$(a \mid b) \vee (B \subseteq A)$ и $(b \mid c) \vee (C \subseteq B)$, то $(a \mid c) \vee (C \subseteq A)$.

Това не е изпълнено винаги и ще намерим *контрапример* за да докажем това твърдение. За контрапримера трябва

$a \nmid b$ и $B \subseteq A; b \mid c$ и $C \nsubseteq B$.

Нека $a = 3, b = 2, c = 4$

$A = \{1,2\}, B = \{1\}, C = \{4,5\}$.

$(3,\{1,2\})R(2,\{1\})$, тъй като $(\underbrace{(3 \mid 2)}_{false} \vee (\underbrace{\{1\} \subseteq \{1,2\}}_{true})$ е винаги истина и

$(2,\{1\})R(4,\{4,5\})$, тъй като

$(\underbrace{(2 \mid 4)}_{true} \vee (\underbrace{\{4,5\} \subseteq \{1,2\}}_{false})$ е винаги лъжа $\Rightarrow (a, A) \not R(c, C) \Rightarrow R$ не е и транзитивна.

github.com/andy489