Филип Филчев ФН: 0MI0600041

Теория с доказателства

① Теорема ~~за~~ Пост за пълнота на мн-во от двоични функции

Нека $F \subseteq \mathcal{F}_2$. Мн-вото F е пълно $\Leftrightarrow$ F не е подмн-во на нито един от класовете T_0, T_1, L, M, S

<u>Док-во:</u> Нека F е пълно. Ще док., че $F \not\subseteq T_0, F \not\subseteq T_1, F \not\subseteq L, F \not\subseteq M, F \not\subseteq S$

F е пълно $\Leftrightarrow F \not\subseteq T_1, T_0, L, M, S$

($\Rightarrow$) Допускаме че $F \subseteq L \Rightarrow [F] \subseteq [L] \Rightarrow \mathcal{F}_2 \subseteq [L] \Rightarrow$

$\Rightarrow [L] = \mathcal{F}_2 \Rightarrow$ L е пълно (аналогично за T_0, T_1, M, S)

$\forall x, y \notin L = [L]$ имаме, че

$\bar{x} \notin M$, $\tilde{1} \in T_0$, $\tilde{0} \notin T_1$, $x \vee y \notin S \Rightarrow F \not\subseteq L, T_0, T_1, M, S$

($\Leftarrow$) Нека $F \not\subseteq T_0, T_1, L, M, S$ ~~⇒~~ Ще док., че F е пълно

Взимаме $F' \subseteq F$, такова, че $F' = \{f_0, f_1, f_L, f_S, f_M\}$, така, че

$f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_L \notin L$, $f_M \notin M$, $f_S \notin S$

Достатъчно е да покажем, че $\{\vee, \bar{\ }\}$ или $\{\wedge, \bar{\ }\}$ е съдържа в $[F']$

1) $f_0 \notin T_0 \Rightarrow f(0, 0, \dots, 0) = 1$

2) $f_1 \notin T_1 \Rightarrow f_1(1, \dots, 1) = 0$

Означаваме си $h_0(x) = f_0(x_1, \dots, x)$ и $h_1(x) = f_1(x_1, \dots, x)$

h_0 и $h_1 \in [F]$, защото се получават от суперпозиции на f_1 и f_0

$h_0(0) = 1$ $h_1(1) = 0$

I сл. $h_0(1)=0$, $h_1(0)=0 \Rightarrow h_0(x)=\bar{x}$, а $h_1(x)=\tilde{0}$

II $h_0(1)=0$, $h_1(0)=1 \Rightarrow h_0(x)=\bar{x}$, а $h_1(x)=\bar{x}$

III $h_0(1)=1$, $h_1(0)=1 \Rightarrow h_0(x)=\tilde{1}$, а $h_1(x)=\bar{x}$

IV $h_0(1)=1$, $h_1(0)=0 \Rightarrow h_0(x)=\tilde{1}$, а $h_1(x)=\tilde{0}$

От I $g_0(g_1(x))=\tilde{1}$

от III $g_1(g_0(x))=\tilde{0}$

$\Rightarrow$ ~~иам~~ $\{\tilde{0},\tilde{1}\}\subseteq F'$ т.е. $\{\tilde{0},\tilde{1}\}\in[F']$

В ~~IV~~ III сл. не може да получим $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ като суперпозиции на F

$f_S \notin S \Rightarrow \exists\, \alpha=(a_1,\dots,a_n) : f_S(\alpha)=f_S(\bar{\alpha})$

нека $h_S(x)=f_S(x^{a_1},\dots,x^{a_n})$, $x^{a_i}=x$ или $x^{a_i}=\bar{x}$, то $h_S\in[F']$

$h_S(0)=f_S(0^{a_1},\dots,0^{a_n})=f_S(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_n)=f_S(a_1,\dots,a_n)=$

$=f_S(1^{a_1},\dots,1^{a_n})=h_S(1)\Rightarrow h_S$ е const

Във IIа. имаме $\bar{x}$, ~~вес~~ суперпоз. може да получим ~~другите~~ $\Rightarrow \{\tilde{0};\tilde{1}\}\subseteq[F']$

$f\notin M$, $f_M\in F'$, $\exists\, \alpha$ и $\beta\in \tilde{J}_2^n : \alpha<\beta$, такива че $f_M(\alpha)>f_M(\beta)$

$\Rightarrow f_M(\alpha)=1$ $f_M(\beta)=0$

Нека $\alpha=(a_1,\dots,a_{i-1},0,a_{i+1},\dots a_n)$ и $\beta=(a_1,\dots,a_{i-1},0,a_{i+1},\dots a_n)$

Озн $h_M(x)$

$h_M(x)=f_M(\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_{i-1},x,\tilde{a}_{i+1},\dots,\tilde{a}_n)$

$h_M\in[F']$, защото $\tilde{a}_i\in[F']$ и $f_M\in[F']$

$h_M(0)=f_M(\alpha)=1$

$h_M(1)=f_M(\beta)=0$ $\Rightarrow h_M(x)=\bar{x}\Rightarrow \bar{x}\in[F']$

$x \notin L$, $f_L \in F'$

Разгл. полинома на Жегалкин, където

$xy\, r_1, \dots, r_k$ е най-късият член от по-висока степен (нелинеен)

$h_L(x,y) = f_L(x, y, \widehat{a_1}, \dots, \widehat{a_{n-2}})$, като $r_1 = \dots = r_k = \widehat{1}$

$\forall$ ост. пр. полинома да са $\widehat{0}$ (без x и y)

$h_L(x,y) = f_L(x, y, \dots, \widehat{a_1}, \widehat{a_{n-1}}) \Rightarrow h_1(x,y) = x\cancel{y}$
$a \oplus bx \oplus cy \oplus xy$

$h_L(u,v)$, от g_1 се получава като $x = u \oplus b$ и $y = v \oplus a$

$h_1 \in [F']$, получава се от h_1 чрез суперпоз. с const.

$u \oplus b = u$ или $\bar{u}$, зависи от $b \Rightarrow h_1 \in [F']$

$h_2(u,v) = (u \oplus v)(u \oplus a) \oplus a(u \oplus b) \oplus b(v \oplus a) = uv \oplus m$

$$\left.\begin{array}{l} h_1(u,v) = uv, \text{ ако } m = 0 \\ h_1(u,v) = \overline{uv}, \text{ ако } m = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \wedge \in [F']$$

$\Rightarrow \{\wedge, \neg\} \subseteq [F'] \Rightarrow F'$ е пълно

---

② Теорема за Хамилтонов граф. Първо определение за Хамилтонов граф

Един граф е Хамилтонов, ако има Хамилтонов цикъл

Хамилтонов цикъл е Хамилтонов път, чийто начало и край съвпадат

Хамилтонов път е такъв път, който включва $\forall$ връх точно веднъж

Разгл. графа $G(V,E)$, където $V = J_2^n = \{(a_1, \dots, a_n)\}$

$(a_1, \dots, a_n) = \alpha$ $\quad V = E_n :| \; f(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$, където

$E = \{(\alpha,\beta) \mid f(\alpha,\beta) = 1\}$ и

се нарича n-мерен куб

Нека този граф се казва

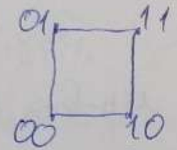
$B_n(J_2^n, E_n)$.

<u>Th.</u> за Хамилтонов граф:

Графът B_n е Хамилтонов

<u>Док.</u> Индукция по n, (броя върхове) B_n има 2^n върха

За $n=2$



01, 11, 10, 00 е Хамилтонов цикъл

Допускаме, че е вярно за $\forall$ n

Доказваме за $n+1$

Нека $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2^n-1}, \beta_0$ е Хамилтонов цикъл в B_n

$\Rightarrow$ $0\beta_0, 0\beta_1, \dots, 0\beta_{2^n-1}, 1\beta_{2^n-1}, 1\beta_{2^n-2}, \dots, 1\beta_0, 0\beta_0$ е Хамилтонов цикъл в B_{n+1}