Задача 26.

Нека $G(V,E)$ е граф. Да се докаже, че броят на върховете от нечетна степен е четно число.

Док-во:

Формулата на Ойлер ни дава:

$2|E| = \sum_{u \in V} deg(u) = \sum_{u \in V_0^2} deg(u) + \sum_{u \in V_1^2} deg(u)$, където $\{V_k^m\}, k \leq m-1$ е множеството от върхове със степен даваща остатък k по модулно деление на m.

В нашия случай имаме, че $V_0^2 \cup V_1^2 = V$ и $V_0^2 \cap V_1^2 = \emptyset, V_0^2, V_1^2 \subseteq V$, следователно сме разбили V на две подмножества.

Но $\sum_{u \in V_0^2} deg(u)$ е сума от четни числа $\Rightarrow \sum_{u \in V_0^2} deg(u) \equiv 0 (mod\ 2)$. От друга страна $2|E|$ е четно число.

Следователно и $\sum_{u \in V_1^2} deg(u)$ е четно число, но в тази сума всяко събираемо е нечетно (от разбиването) от където следва, че броя им е четно число.

github.com/andy489