УПРАЖНЕНИЕ ПО ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ 1
седмица 44

Задача .1 *За всеки x и y с $[x, y]$ означаваме множеството $[x, y] = \{x, \{y\}\}$. За всеки две множества A и B с $A + B$ означаваме множеството $A + B = \{[x, y] \mid x \in A \ \& \ y \in B\}$. Докажете, че съществуват множества A, B и C такива, че: $(A+B) \cap (A+C) \not\subseteq A + (B \cap C)$.*

Нека $A = \{\{0\}, \{1\}\}$, $B = \{0\}$ и $C = \{1\}$. Тогава $B \cap C = \emptyset$, откъдето: $A + (B \cap C) = \emptyset$. От друга страна $A + B = \{[x, y] \mid x \in A \ \& \ y \in B\} = \{[\{0\}, 0], \ [\{1\}, 0]\} = \{\{\{0\}, \{0\}\}, \ \{\{1\}, \{0\}\}\} = \{\{\{0\}\}, \ \{\{0\}, \{1\}\}\}$.

Напълно подобно (заменяйки 0 с 1) получаваме, че $A + C = \{\{\{1\}\}, \ \{\{0\}, \{1\}\}\}$. Следователно: $(A+B) \cap (A+C) = \{\{\{0\}, \{1\}\}\} = \{A\}$, което не е подмножество на $\emptyset = A + (B \cap C)$. $\dashv$

1 Бинарни Релации

Определение .2 *Казваме, че множеството R е (бинарна) релация, ако всеки негов елемент е наредена двойка:*

$$\forall u (u \in R \ \Rightarrow \exists x \exists y (u = (x, y))).$$

Примери:

0) $\emptyset$ е бинарна релация. Наистина, за всяко u е вярна импликацията: $u \in \emptyset \ \Rightarrow u$ е наредена двойка, защото предпоставката е Л.

1) Нека A е множество. Тогава $A \times A$ е релация, защото всеки нейн елемент е наредена двойка:

$$A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

2) Отношението $<$ в множеството на естествените числа $\mathbb{N}$ се представя от релацията $< = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \ \& \ a < b\} =$
$= \{(0,1), (0,2), \ldots, (0,100), \ldots$
$(1,2), (1,3), \ldots, (1,100), \ldots$
$\ldots$
$(100,101), (100,102), \ldots$
$\ldots\}$

По-нататък, наравно с $(x, y) \in R$, за да означим че x е в релация R с y ще използваме и записа xRy. Така, например, за да означим, че 3 е по-малко от 5 ще използваме записите: $(3, 5) \in <$ и $3 < 5$.

Определения

Нека R е бинарна релация и A е множество. Казваме, че

- R е над A, ако R сравнява единствено елементи на A, т.е. $R \subseteq A \times A$;
- R е рефлексивна над A, ако $\forall a (a \in A \Rightarrow (a, a) \in R)$ или $\forall a (a \in A \Rightarrow aRa)$
- R е симетрична, ако $\forall a \forall b ((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R)$ или $\forall a \forall b (aRb \Rightarrow bRa)$;
- R е антисиметрична, ако $\forall a \forall b ((a, b) \in R \& \ (b, a) \in R \Rightarrow a = b)$ или $\forall a \forall b (aRb \& \ bRa \Rightarrow a = b)$;
- R е транзитивна, ако $\forall a \forall b \forall c ((a, b) \in R \& (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R)$ или $\forall a \forall b \forall c (aRb \& bRc \Rightarrow aRc)$;
- R е релация на еквивалентност (Р.Е.) над A, ако R е релация над A, рефлексивна е над A, симетрична е и е транзитивна.