Задача 10.

Нека $\trianglelefteq$ е релацията над $\mathbb{Z}$ определена чрез $x \trianglelefteq y \Leftrightarrow x = y \lor x + 1 < y$.
Проверете дали тази релация е частична наредба.

Проверка:

а) Рефлексивност (в $\mathbb{Z}$): Нека $x \in \mathbb{Z}$. Тогава $x = x$, откъдето $x = x \lor x + 1 < x$ е винаги истина. Следователно $x \trianglelefteq x$ и $\trianglelefteq$ е рефлексивна.

б) Антисиметричност (в $\mathbb{Z}$): Нека $x \trianglelefteq y$ и $y \trianglelefteq x$, т.е. ($x = y \lor x + 1 < y$) и ($y = x \lor y + 1 < x$). Ще докажем, че $x = y$. За целта ще допуснем противното, т.е. ($x \neq y$). Тогава $\neg(y = x)$. Следователно $x + 1 < y$ и $y + 1 < x \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow x = y$.

в) Транзитивност (в $\mathbb{Z}$): Нека $x \trianglelefteq y$ и $y \trianglelefteq z$. Тогава ($x = y \lor x + 1 < y$) и ($y = z \lor y + 1 < z$). Ще докажем, че $x \trianglelefteq z$, тоест, че ($x = z \lor x + 1 < z$)

- *(1)* $x = y, y = z$. Следователно $x = z$ и така $x \trianglelefteq z$;
- *(2)* $x = y, y + 1 < z$. Следователно $x + 1 < z$ и така $x \trianglelefteq z$;
- *(3)* $x + 1 < y, y = z$. Следователно $x + 1 < z$ и така $x \trianglelefteq z$;
- *(4)* $y + 1 < z, x + 1 < y$. Следователно $x + 1 < y < z - 1$ или това е еквивалентно на $x + 2 < z$, но $x + 1 < x + 2 < z \Rightarrow x + 1 < z$ и така $x \trianglelefteq z$.

Тъй като $\trianglelefteq$ е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна (във $\forall$ един от 4-те случая), то $\trianglelefteq$ е частична наредба.

github.com/andy489