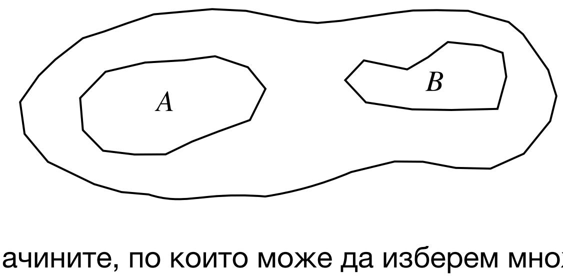
**Задача 39.** Нека $n \geq 3$ и $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Да се намери броя на елементите на множеството $T$, където $T$ е равно на:

github.com/andy489

a) $\{(A, B) | A, B \subseteq U,\ A, B \in \rho(U)\}$, където с $\rho(X)$ бележим степенното множество на множеството $X$;
b) $\{(A, B) | A, B \subseteq U,\ |A| = 1\}$;
c) $\{(A, B) | A, B \subseteq U,\ |A| = k, |B| = l; k, l \leq n\}$;
d) $\{(A, B) | A, B \subseteq U,\ A \cap B = \emptyset\}$;
e) $\{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U\}$;
f) $\{(A, B) | A \cup B = U\}$;
g) $\{(A, B) | A, B \subseteq U, A \cup B = U\ \&\ |A \cap B| \geq 2\}$;
h) $\{(A, B) | B \subseteq A \subseteq U\ \&\ |U \backslash (A \backslash B)| \geq 2\}$
i) $\{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U\ \&\ |A \cap B| \geq 2\}$;
j) $\{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U\ \&\ |B \backslash A| \geq 2\}$;
k) $\{(A, B) | A, B \subseteq U\ \&\ |A \cap B| \leq 2\}$.

*Решение:* ( $\wedge$ *- логическо И,* $\vee$ *- логическо ИЛИ*)

a) Тъй като броя на елементите на степенното множество на дадено изходно множество е равен на две на степен броя на елементите на изходното множество, то $|\rho(U)| = 2^n$. В случая ние избираме два елемента от $\rho(U)$ като редът има значение и са възможни повторения. $|T| = |\rho(U)| . |\rho(U)| = (2^n)^2 = 4^n$.
b) Начините, по които може да изберем $A$ са равни на броя на начините, по които може да изберем един елемент от $U$, което е $C_n^1 = \binom{n}{1} = n$. Начините, по които може да изберем множеството $B$ са $2^n$ (за всеки елемент от $U$ има два варианта - или е в $B$ или не е в $B$). Окончателно $|T| = C_n^1 2^n = n2^n$.
c) Начините, по които може да изберем множеството $A$ са $C_n^k = \binom{n}{k}$, а начините по които може да изберем множеството $B$ са $C_n^l = \binom{n}{l}$. Следователно $|T| = C_n^k C_n^l = \binom{n}{k}\binom{n}{l} = \dfrac{(n!)^2}{k!(n-k)!l!(n-l)!}$.
d) Множествата $A$ и $B$ са непресичащи се и са подмножества на $U$, както е показано на




картинката по-горе. Начините, по които може да изберем множеството $A$ са $C_k^n = \binom{n}{k}$, където $k \leq n$ са броя на елементите на множеството $A$, т.е. $|A| = k$. За множеството $B$ ще избираме от останалите $n - k$ елемента от множеството $U$, т.е. това са $|\rho(U \backslash A)| = 2^{n-k}$ начина, по които може да го изберем. Следователно ще имаме общо $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.1^k.2^{n-k}=(1+2)^n=3^n$ възможни избора. Тук използвахме бинома на Нютон: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ за $0\le k\le n,\ x=1,\ y=2.$

Окончателно, $|T|=3^n$.

**За следващите подточки ще използваме следното фундаментално разбиване:**
На всяка наредена двойка $(A,B)$ съпоставяме думата $\alpha$.
$(A,B)\longmapsto \alpha=a_1a_2\dots a_n$. Конструираме следната азбука:
$\sum=\{XY, X\overline{Y}, \overline{X}Y, \overline{X}\,\overline{Y}\}$, където за всяка буква $a_k, k\le n$ имаме:

$$a_k=\begin{cases} XY,\ ako\ u_k\in A, u_k\in B,\\ X\overline{Y},\ ako\ u_k\in A, u_k\notin B,\\ \overline{X}Y,\ ako\ u_k\notin A, u_k\in B,\\ \overline{X}\,\overline{Y},\ ako\ u_k\notin A, u_k\notin B\end{cases}$$

Съществува биекция между множеството на думите $\alpha$ и множеството на наредените двойки $(A,B)$ (принцип на взаимното еднозначно съпоставяне). Всяка дума $\alpha$ ще е над азбуката $\sum$.

e) $T=\{(A,B)\,|\,A\subseteq B\subseteq U\}$.
$(A,B)\in T\Leftrightarrow A\subseteq B\subseteq U\Leftrightarrow(\forall_{k\le n})[u_k\in A\Rightarrow u_k\in B]$
$\Leftrightarrow(\forall_{k\le n})\neg[u_k\in A\wedge u_k\notin B]\Leftrightarrow(\forall_{k\le n})\neg[a_k=X\overline{Y}]$
$\Leftrightarrow X\overline{Y}$ не участва в думата $\alpha_{(A,B)}$, т.е. $\alpha_{(A,B)}$ е дума над азбука от три типа букви $\sum\setminus\{X\overline{Y}\}\Rightarrow|T|=3^n$.

Чрез същия подход може да се върнем на подточка d) и да направим следното:
$T=\{(A,B)\,|\,A,B\in U\wedge A\cup B=\emptyset\}$.
$(A,B)\in T\Rightarrow A,B\subseteq U\wedge A\cup B=\emptyset$
$\Leftrightarrow(\forall_{k\le n})[(u_k\in A\wedge u_k\notin B)\vee(u_k\notin A\wedge u_k\in B)\vee(u_k\notin A\wedge u_k\notin B)]$
$\Leftrightarrow(\forall_{k\le n})[a_k=X\overline{Y}\,|\,\overline{X}Y\,|\,\overline{X}\,\overline{Y}]$
$\Leftrightarrow(\forall_{k\le n})\neg[a_k=XY]$
$\Leftrightarrow XY$ не участва в думата $\alpha_{(A,B)}$, т.е. $\alpha_{(A,B)}$ е дума над азбука от три типа букви $\sum\setminus\{XY\}\Rightarrow|T|=3^n$. Именно за това този подход е фундаментален.

f) $T=\{(A,B)\,|\,A\cup B=U\}$
$(A,B)\in T\Leftrightarrow A\cup B=U\Leftrightarrow(\forall_{k\le n})[u_k\in A\vee u_k\in B]$
$\Leftrightarrow(\forall_{k\le n})\neq[u_k\notin A\wedge u_k\notin B]\Leftrightarrow(\forall_{k\le n})[a_k\neq\overline{X}\,\overline{Y}]$
$\Leftrightarrow$ в $\alpha_{(A,B)}$ не се среща буквата $\overline{X}\,\overline{Y}$ от азбуката $\sum$.
$|T|=|\{\alpha\,|\,\alpha$ е дума над $\sum$, в която не се среща $\overline{X}\,\overline{Y}\}|=|\{\alpha\,|\,\alpha$ е дума над азбука от три типа букви $\{XY, X\overline{Y}, \overline{X}Y\}\}|=3^n$.

g) Нека $S = \{(A, B) \mid A, B \subseteq U,\ A \cup B = U\}$ и
$K = \{(A, B) \mid A, B \subseteq U,\ A \cup B = U \wedge |A \cap B| < 2\}$ .
Имаме, че $S = T \cup K;\ T, K \subseteq S$ и $T \cup K = \emptyset$. Следователно $T$ и $K$ са разбиване на $S$ и от принципа на събирането имаме, че $|S| = |T| + |K|$ или $|T| = |S| - |K|$.
$S$ : От f) знаем, че $|S| = 3^n$.
$K$ : $K = \underbrace{\{(A, B) \mid A \cup B = U \wedge |A \cap B| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A, B) \mid A \cup B = U \wedge |A \cap B| = 1\}}_{K_1}$.
Тъй като $K_0, K_1 \subseteq K,\ K_0 \cap K_1 = \emptyset$ и $K = K_0 \cup K_1$, то $K_0$ и $K_1$ са разбиване на
$\Rightarrow |K| = |K_0| + |K_1|$.
$K_0$ : $K_0 = \{(A, B) \mid A \cup B = U, A \cap B = \emptyset\} = \{(A, B) \mid B = U \backslash A\} =$
$= \{(A, U \backslash A) \mid A \subseteq U\} \Leftrightarrow$ в $\alpha_{(A,B)} = \alpha_{(A,U\backslash A)}$ не се срещат букви от типа $\overline{X}\overline{Y}$ и $XY$ от $\sum$. Следователно $|K_0| = 2^n$.
$K_1$ : $K_1 = \{(A, B) \mid A \cup B = U,\ |A \cap B| = 1\} \Rightarrow \overline{X}\overline{Y}$ не участва в $\alpha_{(A,B)}$ и $XY$ се среща точно веднъж в $\alpha_{(A,B)}$.

$$\underbrace{\boxed{\phantom{X}}\boxed{\phantom{X}}\boxed{\ \cdots\ }\boxed{\ XY\ }\boxed{\ \cdots\ }\boxed{\phantom{X}}}_{n} \qquad \alpha_{(A,B)}$$

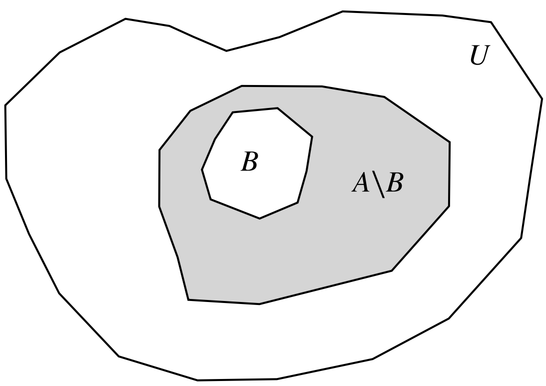
избираме позиция за буквата $XY$

$$|K_1| = \binom{n}{1} .2^{n-1} = n2^{n-1}.$$

запълваме останалите $n-1$ свободни позиции с букви от типа $\overline{X}Y$ и $\overline{X}Y$

Окончателно: $|T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 2^n - n2^{n-1}$.

h) Нека $S = \{(A, B) \mid B \subseteq A \subseteq U\}$ и $K = \{(A, B) \mid B \subseteq A \subseteq U$ и $|U \backslash (A \backslash B)| < 2\}$.
Имаме, че $T \cup K = S,\ T \cap K = \emptyset$ и $T, K \subseteq S$. Следователно $T$ и $K$ са разбиване на $S$ и от принципа на събирането следва, че $|S| = |T| + |K|$, т.е. $|T| = |S| - |K|$.
$S$ : Аналогично на g) $\alpha_{(A,B)}$ е дума над азбуката от три типа букви $\sum \backslash \overline{X}Y \Rightarrow |S| = 3^n$.
$K$ : $K = \underbrace{\{(A, B) \mid B \subseteq A \subseteq U \wedge |U \backslash (A \backslash B)| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A, B) \mid B \subseteq A \subseteq U \wedge |U \backslash (A \backslash B)| = 1\}}_{K_1}$
Тъй като $K_0 \cup K_1 = K,\ K_0, K_1 \subseteq K$ и $K_0 \cap K_1 = \emptyset$, то $K_0$ и $K_1$ са разбиване на
$K \Rightarrow |K| = |K_0| + |K_1|$.
$K_0$ : $K_0 = \{(A, B) \mid B \subseteq A \subseteq U \wedge\ U \backslash (A \backslash B) = \emptyset\}$.




$$\begin{cases} A \backslash B \subseteq U \\ U \backslash (A \backslash B) = \emptyset \\ \Rightarrow A \backslash B = U \\ \Rightarrow A = U, A \backslash B = U, B \subseteq A \\ \Rightarrow B = \emptyset \end{cases}$$

$K_0 = \{(U, \emptyset)\}$, $K_0 = \binom{n}{0} = 1$.

$K_1: \ K_1 = \{(A,B) \,|\, B \subseteq A \subseteq U, \, |U \backslash (A \backslash B)| = 1\}$; $U \backslash (A \backslash B) = (U \backslash A) \cup B$

$1 = |U \backslash (A \backslash B)| = \underbrace{|(U \backslash A) \backslash B| = |U \backslash A| + |B|}_{=1 \ element} - |\underbrace{(U \backslash A) \cap B}_{=0}|$. Следователно има два случая за този елемент.

I сл.) единственият елемент е в $\{U \backslash A\}$, тогава $B = \emptyset$, т.е. $|U \backslash A| = 1$ и $|B| = 0$. Т.е. $A$ не съдържа този 1 елемент.

$XY$: 0 пъти

$X\overline{Y}$: $n-1$ пъти

$\overline{X}Y$: 0 пъти

$\overline{X}\,\overline{Y}$: 1 път

избираме позицията за $\overline{X}\,\overline{Y}$

$\binom{n}{1} .1^{n-1} = n$

запълваме останалите позиции с $X\overline{Y}$

II сл.) единственият елемент е в $\{B\}$, тогава $U \backslash A = \emptyset$, т.е. $|U \backslash A| = 0$ и $B = 1$. Т.е. $U = A \Rightarrow \overline{X}Y = 0, \overline{X}\,\overline{Y} = 0$.

$|B| = 1: \quad XY, \overline{X}Y$ - участват общо точно веднъж. $B \subsetneq A \Rightarrow \overline{X}Y = 0$.

$XY$: 1 път

$X\overline{Y}$: 0 пъти

$\overline{X}Y$: $n-1$ пъти

$\overline{X}\,\overline{Y}$: 0 пъти

избираме позицията за $XY$

$\binom{n}{1} .1^{n-1} = n$

запълваме останалите позиции с $\overline{X}Y$

Окончателно от I и II сл. :

$|T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 1 - n - n = 3^n - 2n - 1$.

i) Нека $S = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U\}$ и $K = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U$ и $|A \cap B| < 2\}$.
Имаме, че $S = T \cup K$, $T \cap K = \emptyset$ и $K, T \subseteq S$. Следователно $T$ и $K$ са разбиване на $S$ и от принципа на събирането имаме, че $|S| = |T| + |K|$ или $|T| = |S| - |K|$.

$S:$ от е) знаем, че $|S| = 3^n$.

$K: \ K = \underbrace{\{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 1\}}_{K_1}$

Тъй като $K_0, K_1 \subseteq K$, $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ и $K_0 \cup K_1 = K$, то $K_0$ и $K_1$ са разбиване на $K \Rightarrow |K| = |K_0| + |K_1|$.

$K_0: \ K_0 = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge A \cap B = \emptyset\} = \{(\emptyset, B) \,|\, B \subseteq U\}$

$\Rightarrow$ в думата $\alpha_{(A,B)}$ могат да участват само буквите $\overline{X}Y$ и $\overline{X}\,\overline{Y} \Rightarrow |K_0| = 2^n$.

$K_1: \ K_1 = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 1\} = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |A| = 1\}$

$(A, B) \in K_1 \Leftrightarrow \underbrace{A \subseteq B \subseteq U}_{X\overline{Y} \notin \alpha_{(A,B)}}$ и $\underbrace{|A| = 1}$  $X\overline{Y}$ и $XY$ участват точно веднъж в $\alpha_{(A,B)}$.

избираме позицията, на която участва $XY$

$$\binom{n}{1}.2^{n-1} = n2^{n-1}$$

останалите $n-1$ позиции след $XY$, в които може да слагаме $\overline{X}Y, X\overline{Y}$.

Окончателно: $|T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 2^n - n2^{n-1}$ .

j) Нека $S = \{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U\}$ и $K = \{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \backslash A| < 2\}$.
Имаме, че $S = T \cup K$, $T \cap K = \emptyset$ и $K, T \subseteq S$. Следователно $T$ и $K$ са разбиване на $S$ и от принципа на събирането имаме, че $|S| = |T| + |K|$ или $|T| = |S| - |K|$.
$S$ : от e) знаем, че $|S| = 3^n$.
$K: \; K = \underbrace{\{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \backslash A| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \backslash A| = 1\}}_{K_1}$
Тъй като $K_0 \cup K_1 = K$, $K_0, K_1 \subseteq K$ и $K_0 \cap K_1 = \emptyset$, то $K_0$ и $K_1$ са разбиване на $K$ и $|K| = |K_0| + |K_1|$.
$K_0: \; K_0 = \{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \backslash A| = 0\} = \{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge A = B\}$
$\Rightarrow$ в думата $\alpha_{(A,B)} = \alpha_{(A,A)}$ участват само буквите $XY$ и $\overline{X}\overline{Y}$, т.е. не могат да участват $X\overline{Y}$ и $\overline{X}Y$. Следователно $\alpha_{(A,A)}$ е дума над азбуката съставена от два типа букви
$\Rightarrow |K_0| = 2^n$.
$K_1: \; K_1 = \{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \backslash A| = 1\}$, следователно в $B$ ще има точно един елемент повече от $A$, т.е. в думата $\alpha_{(A,B)}$ ще има точно веднъж буква от типа $\overline{X}Y$, а останалите ще са от типа $XY$ и $\overline{X}\overline{Y}$.

разпределяме буквата от тип $\overline{X}Y$

$$\binom{n}{1}.2^{n-1} = n2^{n-1}$$

поставяме на останалите позиции букви от типа $XY$ и $\overline{X}\overline{Y}$

Окончателно: $|T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 2^n - n2^{n-1}$.

k) Нека $T_0 = \{(A, B) \,|\, A, B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 0\}$, $T_1 = \{(A, B) \,|\, A, B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 1\}$ и $T_2 = \{(A, B) \,|\, A, B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 2\}$.
Имаме, че $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2$ и $T_0 \cap T_1 = \emptyset$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $T_2 \cap T_0 = \emptyset$, $T_1, T_1, T_2 \subseteq T$, следователно $|T| = |T_0| + |T_1| + |T_2|$ .
$T_0: \; (A, B) \in T_0 \Leftrightarrow A, B \subseteq U$ и $A \cap B = \emptyset$, което е точно d) и от нея знаем че $|T_0| = 3^n$.
$T_1: \; (A, B)T_1 \Leftrightarrow A, B \subseteq U$ и $(A \cap B) = 1 \Leftrightarrow$ точно един елемент е едновременно и в $A$ и в $B$. $XY$ участва в $\alpha_{(A,B)}$ !1 (точно веднъж). $|T_1| = \binom{n}{1} 3^{n-1}$.
$T_2: \; XY$ участва два пъти в $\alpha_{(A,B)}$ : $|T_2| = \binom{n}{2} 3^{n-2}$.

Окончателно:

$$|T| = |T_0| + |T_1| + |T_2| = 3^n + \binom{n}{1} 3^{n-1} + \binom{n}{2} 3^{n-2} = \sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} 3^{n-i}.$$