Задача 17. (от писмен изпит – 05.02.2016г.)

Дадена е рекурентната зависимост $a_{n+1} = -7a_n + n + 1$ и $a_0 = 0$. Намерете редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, която удовлетворява тази зависимост и началното условие.

Решение:

Първо ще трябва да намерим хомогенна зависимост еквивалентна на дадената. Заместваме в зависимостта с n и $n-1$:
$a_{n+1} + 7a_n = n + 1$ и $a_n + 7a_{n-1} = n$.

Изваждаме второто уравнение от първото:
$a_{n+1} + 6a_n - 7a_{n-1} = 1$, тогава
$a_n + 6a_{n-1} - 7a_{n-2} = 1$. Отново изваждаме второто от първото и получаваме: $a_{n+1} + 5a_n - 13a_{n-1} + 7a_{n-2} = 0$. За да намерим характеристичното уравнение извършваме полагане $a_n = x^n, x \neq 0$.
Получаваме: $x^{n+1} + 5x^n - 13x^{n-1} + 7x^{n-2} = 0 \Rightarrow x^3 + 5x^2 - 13x + 7 = 0$.
Прилагаме схема на Хорнер:

H	1	5	-13	7
1	1	6	-7	0
1	1	7	0	
-7	1	0		

Характеристичното уравнение има двоен корен равен на 1 и единичен корен равен на -7.

Общ вид: $a_n = (A\,.\,n + B).1^n + C\,.\,(-7)^n$.

Имаме само първи член на редицата, но ще ни трябват поне три. Нека ги пресметнем:

$a_1 = -7a_0 + 1 = 1$; $a_2 = -7a_1 + 1 = -6$. Сега, за да намерим явния вид ще използваме общия вид на първите три елемента от редицата.

$a_0 = (A.0 + B).1^0 + C(-7)^0 = 0$
$a_1 = (A + B).1^1 + c(-7)^1 = 1$
$a_2 = (2A + B).1^2 + C(-7)^2 = -6$.

Горното е изпълнено тогава и само тогава, когато

$B + C = 0$

$A + B - 7C = 1$

$2A + B + 49C = -6 \Leftrightarrow A = 0, b = \frac{1}{8}, C = -\frac{1}{8}$. Следователно $a_n = \frac{1 - (-7)^n}{8}$.

github.com/andy489