Задача 1 *Да се построи минимален тотален краен детерминиран автомат $\mathcal{A}$ с език $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{a, b, c\}^* \circ \{ab, ba\} \circ \{a, b, c\}^*$.*

Обосновете, че вашият автомат има желаните свойства като:

- *(i) се позовете на подходящи места на изучавани алгоритми/конструкции. (не е необходимо да ги описвате формално)*
- **или** *(ii) дадете пълно и изчерпателно доказателство.*

Задача 2 *Да се построи минимален тотален краен детерминиран автомат $\mathcal{A}$ с език $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{01, 0\} \circ \{11\}^* \circ \{0\}$.*

Обосновете, че вашият автомат има желаните свойства като:

- *(i) се позовете на подходящи места на изучавани алгоритми/конструкции. (не е необходимо да ги описвате формално)*
- **или** *(ii) дадете пълно и изчерпателно доказателство.*

Задача 3 *Да се построи краен автомат с азбука $\Sigma = \{1, 2, 3\}$, разпознаващ езика $L = \Sigma^* \setminus (\{1, 2\}\Sigma^* \cap \Sigma^*\{3\}) \cup \{123\}^*$ като:*

- *се използват изучавани конструкции,*
- *или се докаже, че построеният автомат разпознава точно езика L.*

Задача 4 *Да се построи минимален тотален краен детерминиран автомат с азбука $\Sigma = \{a, b\}$ и език $L = \Sigma^*\{a^2b\} \cup \{aba\}\Sigma^*$ като:*

- *се използват изучавани конструкции,*
- *или се докаже, че построеният автомат има желаните свойства.*

Задача 5 *Да се докаже, че езикът $L = \{\ w0^n w^R \mid w \in \{0, 1\}^*,\ |w| > n\ \}$ не е регулярен.*

Задача 6 *За дума $\alpha \in \{a, b\}^*$ с $A(\alpha)$ бележим броя на буквите a в α. Да се докаже, че езикът $L = \{\ xy \in \{a, b\}^* \mid |x| > |y|,\ A(x) = A(y)\ \}$ не е регулярен.*

Задача 7 *Да се построи минимален краен тотален детерминиран автомат за езика* $L = \{\ \alpha \in \{0,1\}^* \mid \alpha$ *съдържа поне две срещания на* 010 *като поддума* $\}$.

Задача 8 *Да се построи минимален краен тотален детерминиран автомат за езика* $L = \{\ \alpha \in \{a,b,c\}^* \mid \alpha$ *съдържа всяка от буквите* a, b, c *поне веднъж и* $|\alpha| = 0(mod 3)\ \}$.

Задача 9 *За дума* $\alpha \in \{0,1\}^+$ *с* $\overline{\alpha}$ *означаваме числото в двоична бройна система, чийто запис е* α.

$$L(p,r) = \{\alpha \in \{0,1\}^+ \,|\, \overline{\alpha} \equiv r(\mod p)\}.$$

1. *Да се докаже, че* $L(p,r)$ *е регулярен за всяко* p.
2. *Нека* $L'(p,r) = \{\alpha \in L(p,r) \,|\, \alpha$ *не съдържа водещи нули*$\}$. *Регулярен ли е* $L'(p,r)$*?*
3. *Регулярен ли е езикът, който е съставен точно от думите* α, *за които* $\overline{\alpha}$ *се дели на* p, *но не се дели на* p^2 *за дадено просто число* p*?*

Задача 10 *Нека* Σ *е крайна непразна азбука. Докажете, че за всяка дума* $w \in \Sigma^*$ *минималният автомат с език* $\Sigma^* \cdot \{w\}$ *има поне* $|w|+1$ *състояния.*

Задача 11 *Нека* Σ *е крайна непразна азбука. Докажете, че за всяка дума* $w \in \Sigma^*$ *минималният автомат с език* $\Sigma^* \cdot \{w\}$ *има точно* $|w|+1$ *състояния.*

Задача 12 *Казваме, че език* $L \subseteq \{a,b,c\}^*$ *е* интересен, *ако има естествено число* $n \in \mathbb{N}$ *и крайни автомати* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *и* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *с азбука* $\{a,b,c\}$ *със следните три свойства:*

- $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{L}(P_i) = \{u \in \{a,b,c\}^* \,|\, u$ *е префикс на дума от* $L\}$
- $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{L}(S_i) = \{u \in \{a,b,c\}^* \,|\, u$ *е суфикс на дума от* $L\}$
- $L = \bigcup_{i=1}^n (\mathcal{L}(P_i) \circ \mathcal{L}(S_i))$.

Вярно ли е, че:

1. *всеки интересен език е регулярен?*

2. *всеки регулярен език над $\{a, b, c\}$ е интересен?*

Обосновете отговорите си!

Задача 13 *Нека $w \in \{0,1,2\}^*$ е дума с дължина n, L е език. Казваме, че L* покрива *срещането на дума $\alpha = w[i..j]$ на позиция $i \leq n$ в w ако думите $w[i+k..n]$ за $k = 0, 1, \ldots, j-i$ започват с дума от L.*

Нека L_1 и L_2 са езици над $\{0,1,2\}$, L' и L'' са езиците:

$$\begin{aligned} L' &= \{w \in \{0,1,2\}^* \mid \text{ има префикс на } w, \text{ който е от } L_1, \text{но } \textbf{не} \text{ се покрива от } L_2\} \\ L'' &= \{w \in \{0,1,2\}^* \mid \text{ всяко срещане на дума от } L_1 \text{ в } w \text{ е покрито от } L_2\}. \end{aligned}$$

Вярно ли е, че винаги когато L_1 и L_2 са регулярни:

1. *L' е регулярен?*

2. *L'' е регулярен?*

Обосновете отговорите си!

Задача 14 *Нека $\Sigma = \{0,1\}$ е азбука. Нека:*

$$\begin{aligned} L^{\leq} &= \{w\alpha w^{rev} \mid \alpha, w \in \Sigma^* \text{ и } |w| \leq |\alpha|\} \\ L^{\geq} &= \{w\alpha w^{rev} \mid \alpha, w \in \Sigma^* \text{ и } |w| \geq |\alpha|\} \end{aligned}$$

Вярно ли е, че:

1. *$L^{\leq}$ е регулярен?*

2. *$L^{\geq}$ е регулярен?*

Обосновете отговорите си!

Задача 15 *За естествени числа $d, n \in \mathbb{N}$ с $A_{d,n} \subseteq \{0,1\}^*$ означаваме езика:*

$$A_{d,n} = \{0^d 1 0^{2d} 1 \ldots 0^{kd} 1 \mid k \leq n\}$$

Нека $A_d = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{d,n}$. Вярно ли е, че:

1. *$A_{d,n}$ е регулярен за всеки избор на $d, n \in \mathbb{N}$?*

2. A_d *е регулярен за всеки избор на* $d \in \mathbb{N}$*?*

Обосновете отговорите си!

Задача 16 *Нека* $Var = \{x, y, z\}$ *е множество от променливи,* $\Sigma = Var \cup \{bind_v \mid v \in Var\} \cup \{unbind_v \mid v \in Var\}$*. Една променлива* $v \in Var$*, наричаме свързана при срещането ѝ на позиция* i *във* $f \in \Sigma^*$*, ако на някоя позиция* $j < i$ *се среща* $bind_v$ *така че на никоя позиция* k*,* $j < k < i$ *не се среща* $unbind_v$*.*

Ако $v_1, v_2 \in Var$*,* $f \in \Sigma^*$*, то субституцията на* v_1 *с* v_2 *във* f *бележим с* $f\langle v_1 \mapsto v_2\rangle$ *и наричаме думата, получена от* f *чрез непосредствената замяна на всяко несвързано срещане на* v_1 *във* f *с* v_2*.* $f\langle v_1 \mapsto v_2\rangle$ *наричаме коректна, ако не променя позициите на които* v_2 *се среща като свързана.*

Ако $w, u, v \in \Sigma^*$*,* $w[2k] = u[k]$*,* $w[2k+1] = v[k]$ *за* k *от* 0 *до* $|u|$*,* $|w| = 2|u| = 2|v|$*, то* $w = intersperse(u, v)$*.*

$$L = \{intersperse(f, f\langle v_1 \mapsto v_2\rangle) \mid f \in \Sigma^*, v_1, v_2 \in Var, \text{„}f\langle v_1 \mapsto v_2\rangle \text{ е коректна“}\}$$

L регулярен език ли е и защо?

Задача 17 *За дума* $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n \in \{0,1\}^*$ *с* $E(\alpha)$ *означаваме редицата от позиции* $i_1 < i_2 < \dots < i_m$*, за които* $a_{i_j} = 1$*. Вярно ли е, че езикът:*

$$L = \{\alpha \in \{0,1\}^* \mid E(\alpha) \text{ е аритметична прогресия}\}$$

е регулярен? Защо?

Задача 18 *За дума* $w = a_1 a_2 \dots a_n$ *с* $even(w)$ *означаваме думата:*

$$even(w) = a_2 a_4 \dots a_{2[\frac{n}{2}]}.$$

Нека L_1 *и* L_2 *са произволни регулярни езици над азбука* Σ *с поне два елемента. Винаги ли е вярно, че:*

1. *езикът* $\{even(w) \mid w \in L_1\}$ *е регулярен? Защо?*

2. *езикът* $\{w \mid even(w) \in L_2\}$ *е регулярен? Защо?*

3. *езикът от всички думи* $\alpha \in \Sigma^*$*, в които всяко срещане на дума* $v \in L_1$ *в* α *не е от вида* $v = even(w)$ *за никоя дума* $w \in L_2$*? Защо?*

Задача 19 *За думи* $w = w_1 \dots w_n$, α *и* β *казваме, че срещанията на* $\alpha = w_{i+1} \dots w_j$ *и* $\beta = w_{k+1} \dots w_l$ *се застъпват в* w *ако* $i < k < j < l$ *или* $k < i < l < j$.

Нека L_1 *и* L_2 *са регулярни езици над азбука* Σ *с поне два елемента. Винаги ли е вярно, че е регулярен:*

1. *езикът от точно онези думи* w*, които се записват като* $w = \alpha\beta\gamma$ *за някои непразни думи* α, β, γ *със свойството, че* $\alpha\beta \in L_1$ *и* $\beta\gamma \in L_2$*? Защо?*

2. *езикът от точно онези думи* w*, за които всяко срещане на дума от* L_1 *в* w *не се застъпва с никое срещане на дума от* L_2 *в* w*? Защо?*

Задача 20 *Нека* Σ *е азбука с поне два елемента. За език* $L \subseteq \Sigma^*$ *с* $Max(L)$ *и* $Min(L)$ *бележим езиците:*

$$\begin{aligned} Max(L) &= \{w \in L \,|\, \forall u \in \Sigma^+(wu \notin L)\} \\ Min(L) &= \{w \in L \,|\, \forall u \in L(w \notin u\Sigma^+)\}. \end{aligned}$$

Вярно ли е, че за всеки регулярен език L:

1. $Min(L)$ *е регулярен? Защо?*

2. $Max(L)$ *е регулярен? Защо?*

Задача 21 *Нека:*

$$\begin{aligned} L_1 &= \{uv \,|\, u, v \in \{0,1\}^*(|u| \geq |v|)\} \\ L_2 &= \{uv \,|\, u, v \in 1\{0,1\}^*(|u| \geq |v|)\}. \end{aligned}$$

Вярно ли е, че:

1. L_1 *е регулярен? Защо?*

2. L_2 *е регулярен? Защо?*

Задача 22 *Нека* $\Sigma = \{0,1\}$*. За език* $L \subseteq \Sigma^*$ *дефинираме:*

$$PS(L) = \{w \in \Sigma^* \,|\, w \quad \text{е префикс на някоя дума от } L \text{ и суфикс на някоя дума от } L\}$$

$$PS_{unique}(L) = \{w \in \Sigma^* \,|\, w \quad \text{е префикс и суфикс в една и съща дума от } L\}$$

$$PS_{distinct}(L) = \{w \in \Sigma^* \,|\, w \quad \text{е префикс в една и суфикс в друга дума от } L\}$$

Вярно ли е, че за всеки регулярен език L:

1. $PS(L)$ *е регулярен? Защо?*

2. $PS_{unique}(L)$ *е регулярен? Защо?*

3. $PS_{distinct}(L)$ *е регулярен? Защо?*

Задача 23 *Нека* Σ *е азбука с поне два елемента. За езици* $L_1 \subseteq \{1\}^*$ *и* $L_2 \subseteq \Sigma^*$ *казваме, че* $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ *е* (L_1, L_2)*-хубава, ако за всяко* $i \leq n$*, за което* $1^i \in L_1$ *е изпълнено, че някой от инфиксите на* w*, който започва на позиция* i *е в* L_2*.*

1. *Вярно ли е, че за всеки регулярен език* $L_1 \subseteq \{1\}^*$ *езикът:*

$$\{w \in \Sigma^* \mid 1^{|w|} \in L_1\}$$

   е регулярен? Защо?

2. *Вярно ли е, че за всеки два регулярни езика* $L_1 \subseteq \{1\}^*$ *и* $L_2 \subseteq \Sigma^*$ *езикът от точно* (L_1, L_2)*-хубавите думи е регулярен? Защо?*

Задача 24 *Нека* $\Sigma = \{0, 1, v, \langle, \rangle, ;, \{, \}\}$. Връх *наричаме всяка дума над* Σ*, която започва с* v *и е следвана от двоичен запис на число.* Ребро *е дума от езика от вида* $\langle \alpha; \beta \rangle$*, където* α *и* β *са върхове. Вярно ли е, че:*

1. *множеството от върхове е регулярен език над* Σ*?*

2. *множеството от ребра е регулярен език над* Σ*?*

Граф *е всяка дума над* Σ *от вида:*

$$G = \{u_1; u_2 \dots; u_n\}\{e_1; e_2; \dots; e_m\},$$

където u_i *е връх, а* e_j *е ребро за всяко* $i \leq n$*,* $j \leq m$*.*

1. *Вярно ли е, че множеството от графи е регулярен език над* Σ*?*

2. Истински граф *е граф* $G = \{u_1; u_2 \dots; u_n\}\{e_1; e_2; \dots; e_m\}$*, за който всяко ребро* $e_j = \langle u_{i_1}; u_{i_2} \rangle$ *за някои* $1 \leq i_1, i_2 \leq n$*. Вярно ли е, че множеството от истински графи е регулярен език над* Σ*?*

Упътване за задача 5:

1. Допуснете, че има краен детерминиран автомат A, който разпознава езика L.
2. Нека m е броят на състоянията на автомата A.
3. Разгледайте думите 1^0, 1^1,..., 1^m.
4. Тогава за някои $0 \leq i < j \leq m$ автоматът A, обработвайки 1^i и 1^j достига до едно и също състояние q.
5. Съобразете A разпознава $1^j 0^j 1^j$.
6. Аргументирайте, че A разпознава и $1^i 0^j 1^j$.
7. Покажете, че $1^i 0^j 1^j$ не е в езика L.

Упътване за задача 6:

1. Допуснете, че има краен детерминиран автомат A, който разпознава езика L.
2. Нека m е броят на състоянията на автомата A.
3. Разгледайте думите a^0, a^1,..., a^m.
4. Тогава за някои $0 \leq i < j \leq m$ автоматът A, обработвайки a^i и a^j достига до едно и също състояние q.
5. Съобразете A разпознава $a^i b^{j-i+1} a^i$.
6. Аргументирайте, че A разпознава и $a^j b^{j-i+1} a^i$.
7. Покажете, че ако $a^j b^{j-i+1} a^i = xy$ с $|x| > |y|$ то x има за представка $a^j b$, а y е суфикс на $b^{j-i} a^i$.
8. Заключете, че $a^j b^{j-i+1} a^i$ не е в L.

Упътване за задача 7:

1. Докажете, че $\{0,1\}^*\{010\}\{0,1\}^*\{010\}\{0,1\}^* \subseteq L$.
2. Забележете, че $\{0,1\}^*\{01010\}\{0,1\}^* \subseteq L$.

3. Докажете, че $L \subseteq \{0,1\}^*\{010\}\{0,1\}^*\{010\}\{0,1\}^* \cup \{0,1\}^*\{01010\}\{0,1\}^*$.

4. Постройте минимален тотален краен детерминиран автомат за

$$\{0,1\}^*\{010\}\{0,1\}^*\{010\}\{0,1\}^* \cup \{0,1\}^*\{01010\}\{0,1\}^*.$$

Упътване за задача 8:

1. Постройте краен детерминиран автомат за езика $L_a = \{\alpha \in \{a,b,c\}^* \mid \alpha \text{ съдържа } a\}$.

2. Дефинирайте L_b и L_c аналогично на L_a.

3. Постройте краен детерминиран автомат за езика

$$L_3 = \{\alpha \in \{a,b,c\}^* \mid |\alpha| \equiv 0 (\mod 3)\}.$$

4. Докажете, че $L = L_a \cap L_b \cap L_c \cap L_3$.

5. Приложете конструкция за сечение на (детерминирани) крайни автомати и минимизирайте.

Упътване за задача 9:

1. (а) Докажете $\overline{\alpha 0} = 2\overline{\alpha}$.
   (б) Докажете $\overline{1\alpha} = 2^{|\alpha|} + \overline{\alpha}$.
   (в) Дефинирайте $L_i = L(p,i) = \{\alpha \in \{0,1\}^* \mid \overline{\alpha} \equiv i (\mod p)\}$ и използвайте първото наблюдение, за да установите какво следва от $\alpha \in L_i$ за думите $\alpha 0$ и $\alpha 1$.
   (г) Постройте детерминиран краен автомат за $L(p,r)$ със състояния, съответни на езиците $L(p,i)$,
   (д) Дефинирайте $\hat{L}_i = \{\alpha \in \{0,1\}^* \mid i2^{|\alpha|} + \overline{\alpha} \equiv r (\mod p)\}$. Какво може да кажете за езиците $0^{-1}\hat{L}_i$ и $1^{-1}\hat{L}_i$?
   (е) Постройте детерминиран краен автомат за $L(p,r)$ със състояния, съответни на езиците $\hat{L}_i$.

2. Забележете, че условието α да не съдържа водещи нули е еквивалентно на $\alpha \in \{0\} \cup \{1\}\{0,1\}^*$. Какво може да кажете за сечението на регулярни езици?

3. Може ли да изразите търсеното множество от думи чрез някои от езиците $L(q,r)$, съюза "и" и частицата "не"? Как?

Упътване за задача 10:

1. Разгледайте краен детерминиран автомат A с език $\Sigma^*\{w\}$ и за всяко $i \leq |w|$ нека α_i е представката с дължина i на w, а β_i е суфиксът с дължина $|w| - i$ на w. Колко префикса и кобко суфикса дефинирахте?

2. Докажете, че $w = \alpha_i\beta_i$ за всяко i.

3. Вярно ли е, че $\alpha_i\beta_j \in \Sigma^*\{w\}$ при $i < j$? Защо?

4. Заключете, че ако A достига до състояние q_i след обработката на α_i, то $q_i \neq q_j$ за $i \neq j$.

Упътване за задача 11:

1. Използвайте представянията на $w = \alpha_i\beta_i$ от предишната задача.

2. За всяко дума $x \in \Sigma^*$ покажете, че има префикс α_i на w, който е суфикс на x.

3. Нека $p(x)$ е най-дългият префикс α_i на w, който е суфикс на x.

4. Докажете, че $x^{-1}L = (p(x))^{-1}L$, където $L = \Sigma^*\{w\}$.

5. Аргументирайте с метода на Brzozowski, че има краен детерминиран автомат с $|w| + 1$ състояния и език $\Sigma^*\{w\}$.

Упътване за задача 12

1. Припомнете си дефиницията за регулярен език.

2. Припомнете си дефиницията за автоматен език и че класовете на автоматните и регулярните езици съвпадат.

3. Забележете, че ако $\mathcal{L}(P_i)$ и $\mathcal{L}(S_i)$ са регулярни, те L е крайно обединение от конкатенация на регулярни езици!

4. За обратната посока, разгледайте краен (детерминиран) автомат $A = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ с език L, в който всяко състояние е кодостижимо. Нека $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ и дефинирайте:

$$P_i = \langle \Sigma, Q, s, \delta, \{q_i\} \rangle \text{ и } S_i = \langle \Sigma, Q, q_i, \delta, F \rangle.$$

5. Проверете, че $P_1, P_2, \dots, P_n$ и $S_1, S_2, \dots, S_n$ имат желаните свойства.

Упътване за задача 13

1. Използвайте предишната задача, за да представите езика $L_1 = \bigcup_{i=1}^{n}(P_i \cdot S_i)$ за регулярни езици $P_1, P_2, \dots, P_n$ и $S_1, S_2, \dots, S_n$.

2. Съобразете, че ако w има префикс $x \in L_1$, който не се покрива от L_2, то $x = p_i s_i z$, за които $p_i \in P_i$, $s_i \in S_i \setminus \{\varepsilon\}$ и $s_i z \notin L_2\Sigma^*$.

3. Докажате, че $L' = \bigcup_{i=1}^{n}(P_i \cdot (S_i \setminus \{\varepsilon\}\Sigma^* \cap L_2\Sigma^*)$.

4. Заключете, че L' е регулярен като използвате, че регулярните езици са затворени относно допълнение и сечение.

5. Забележете, че $w \in \Sigma^* \setminus L''$ точно когато w може да се представи като $w = x \cdot y$ и y започва с дума от L_1, която не се покрива от L_2.

6. Заключете, че $\Sigma^* \setminus L'' = \Sigma^* L'$ и след това довършете.

Упътване за задача 14

1. За $L^{\leq}$ обърнете внимание на това, че $|\varepsilon| \leq |\alpha|$ за всяка дума $\alpha \in \Sigma^*$.

2. Заключете, че $\Sigma^* \subseteq L^{\leq}$ и довършете.

3. За $L^{\geq}$ допуснете, че има краен детерминиран автомат A с n състояния.

4. Разгледайте думите $0^j 1$ за $j \leq n$.

5. Обосновете, че има $0 \leq i < j \leq n$, за които A достига до едно и също състояние q след обработката както на $0^j 1$, така и на $0^i 1$.

6. Докажете, че $0^j 1 0^{j+1} 1 0^j \in L^{\geq}$.

7. Обосновете, че A разпознава $0^i 1 0^{j+1} 1 0^j$.

8. Колко е дължината на най-дългата дума w, която хем е префикс на $0^i10^{j+1}10^j$, хем w^{rev} е суфикс наf, $0^i10^{j+1}10^j$?

9. Заключете, че $0^i10^{j+1}10^j \notin L^{\geq}$.

Упътване за задача 15

1. За фиксирани d и n езикът $A_{d,n}$ е краен!

2. Ако само d е фиксирано, расъждавайте за езика A_d по начин подобен на задача 14 $L^{\geq}$ и задачи 5, 6.

Упътване за задача 16:

1. Нека за $v_1, v_2 \in Var$,

$$L(v_1, v_2) = \{intersperse(f, f\langle v_1 \mapsto v_2\rangle) \mid f \in \Sigma^*\} \cap L.$$

2. Проверете, че $L = \bigcup_{v_1,v_2\in Var} L(v_1, v_2)$.

3. Покажете, че $L(v_1, v_2)$ е регулярен за всеки две $v_1, v_2 \in Var$.

4. За целта съобразете, че $w \notin L(v_1, v_2)$ точно когато: (1) w не е $intersperse(f, f\langle v_1 \mapsto v_2\rangle)$ или (2) $f\langle v_1 \mapsto v_2\rangle$ не е коректна замяната.

5. Разгледайте поотделно двете ситуации.

   (а) w не е $intersperse(f, f\langle v_1 \mapsto v_2\rangle)$ точно когато има четна позиция $2i$, за която: (1.1) $w[2i]$ не е свободно срещане на v_1 и $w[2i+1] \neq w[2i]$ или (1.2) $w[2i]$ е свободно срещане на v_1, но $w[2i+1] \neq v_2$.

   (б) Съборазете, че $w[2i]$ не е свободно срещане на v_1 в f точно когато:

   $$w[0..2i] \in (\Sigma^2)^*\{bind_{v_1}\}\Sigma(\Sigma\setminus\{unbind_{v_1}\}\cdot\Sigma)^+\{v_1\}\cup(\Sigma^2)^*(\Sigma\setminus\{v_1\})$$

   (в) Покажете, че множеството от думи w, които не са $intersperse(f, f\langle v_1 \mapsto v_2\rangle)$ за никое $f \in \Sigma^*$ образуват регулярен език.

(г) За условие (2) съобразете, че v_2 на позиция $2i+1$ е свързано, ако:

$$w[0..2i+1] \in (\Sigma^2)^*\Sigma\{bind_{v_2}\}(\Sigma \cdot \Sigma \setminus \{undbind_{v_2}\})^*\Sigma\{v_2\}.$$

По подобен начин може да изразим, че v_2 на позиция $2i$ е свързано в f:

$$w[0..2i+1] \in (\Sigma^2)^*\{bind_{v_2}\}\Sigma(\Sigma \setminus \{undbind_{v_2}\}\Sigma)^*\{v_2\}\Sigma.$$

Сега v_2 е свързано на позиция i в $f\langle v_1 \mapsto v_2$, но v_2 не е свързано на позиция i в f точно когато $w[0..2i+1]$ е в първия, но не и във втория език.

(д) Покажете, че условието, че замяната не е правилна също може да се изрази като регулярен език.

Упътване за задача 17: Сравнете с втората част на задача 15.
Упътване за задача 18:

1. Разгледайте краен (детерминиран) автомат A за езика L.
2. За първата част помислете как да симулирате "прескачането"на всяка втора буква.
3. Това води дефиниция на преходите $\Delta' = \{\langle p, a, q\rangle \mid \exists b \in \Sigma(q = \delta(\delta(p, b), a))\}$.
4. Какво трябва да направим с финалните състояния?
5. За втората част разгледайте две непресичащи се множества от състояния $Q_{even} = \{p_1, \dots, p_n\}$ и $Q_{odd} = \{q_1, \dots, q_n\}$, където n е броят на състоянията на A.
6. Реализирайте следната идея. С думи с четна дължина да достигаме Q_{even}, а с нечетна – Q_{odd}.
7. Допълнително осигурете, че при преходи от Q_{odd} симулираме преход от оригиналния автомат A, а от Q_{even} – преход с произволна буква.
8. Кои трябва да са финалните състояния?

9. За третата част мислете за допълнението на езика L'.

10. Съобразете, че L' се състои от думи, които съдържат срещане на дума $\alpha \in L_1$, която е в $even(L_2)$.

11. Докажете, че $L' = \Sigma^*(L_1 \cap even(L_2))\Sigma^*$ и довършете.

Упътване за задача 19: За първата част използвайте задача 12. Сравенете със задача 13. За втората част отново използвайте идеята от предните задачи, така че да замените "всяко" с "има".

Упътване за задача 20:

1. За първата част може да съобразите, че $w \in Min(L)$ точно когато $w \in L$ и $w \notin L\Sigma^+$. Довършете.

2. За втората част разгледайте краен детерминиран автомат A за езика L.

3. Кога една дума от езика L се разпознава от A? Мислете си за условието като за път в A.

4. Кога не може да разширим една дума до дума от L? Как изглежда това условие в термините на пътища в A?

5. Получете краен автомат за езика $Max(L)$ като въз основа на горните разсъждения запазите само част от финалните състояния на A като финални.

Упътване за задача 21: Сравнете със задача 14.
Упътване за задача 22:

1. Разгледайте краен детерминиран автомат $A = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ за езика L.

2. Докажете, че $A_P = \langle \Sigma, Q, s, \delta, Q \rangle$ разпознава точно префиксите на L.

3. Докажете, че $A_S = \langle \Sigma, Q, Q, \delta, F \rangle$ разпознава точно суфиксите на L.

4. Завършете първата част на задачата.

5. Разгледайте езика $L = (\{0\}\{1\}^*\{0\})^3$. Разгледайте дума в езика $w \in PS_{unique(L)} \cap (\{2\}1^*\{0\})^2$.

6. Ако $w = 01^k001^l0$ и w е префикс и суфикс в думата $01^r001^s001^t0$ какво може да кажете за k, l, r, s и t.

7. Разсъждавайте като в задачи 5 и 6, за да докажете, че $PS_{unique(L)} \cap (\{2\}1^*\{0\})^2$ не е регулярен.

8. Заключете, че $PS_{unique}(L)$ не е регулярен.

Упътване за задача 23: За първата част използвайте идеята от конструкцията за сечение на автоматни езици. За втората част използвайте първата и идеите от задачи 13, 16 и 19.