

Задача 30.

Нека G е дърво с N върха, в което всеки връх е от степен 1 или 4. Намерете броя на върховете от степен 1 и докажете, че 3 дели $N+1$.

Решение:

Нека броя на върховете от степен 1 е x , а броя на върховете от степен 4 е $N-x$. От това, че G е дърво $\Rightarrow |E| = N-1$. От формулата на Ойлер имаме:

$$2|E| = \sum_{u \in V} \deg(u) = x \cdot 1 + (N-x) \cdot 4 \Rightarrow 2(N-1) = x \cdot 1 + (N-x) \cdot 4; \quad 3x = 2(N-1) \text{ и}$$

т.к. $(2,3) = 1$, то $3|N+1$, т.к. $x \in \mathbb{N}$ е естествено число и

$$x = \frac{3}{2}(N+1). \quad \left[(x,y) = \gcd(x,y), x,y \in \mathbb{N}. \right]$$

github.com/andy489