Задача 05.

Да се докаже, че $\forall A_0, A_1, \ldots, A_n$ е изпълнено: $P\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=0}^{\infty} P\left(A_i\right)$.

Док-во:

($\subseteq$) Нека $X \in P\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right)$. Тогава $X \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \Leftrightarrow \forall i, x \in A_i$, където $x \in X$, т.е. $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \subseteq A_k$ за $\forall k$. Но за всяко $k \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \subseteq A_k$, откъдето $X \in A_k$ за всяко $k \in \mathbb{N}$. Следователно за $\forall k \in \mathbb{N}$, $x \in P\left(A_k\right)$.

($\supseteq$) Нека $Y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} P\left(A_i\right) \Rightarrow Y \in P(A_0)\ \&\ Y \in P(A_1)\ \&\ \ldots$ за $\forall i \in \mathbb{N}$, $Y \in P(A_i)$, т.е. $Y \subseteq A_i$. Ще докажем, че $Y \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$. Нека $y \in Y$, но $\forall i,\ Y \subseteq A_i \Rightarrow y \in A_i, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \Rightarrow y \subseteq P\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right)$.

github.com/andy489