Филип Филчев Фн: 0MI0600041
Софтуерно инженерство, I група

① A, B, C са такива, че: $A \cup B = A \cup C$ и $A \cap B = A \cap C$.

Док, че $B = C$

$A \cup B = A \cup C$ и $A \cap B = A \cap C \iff B = C$

$\Rightarrow$ Доказваме, че ако $A \cup B = A \cup C$ и $A \cap B = A \cap C$, то $B = C$

⊆ 1) $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

2) $B \subseteq A \cup B$; $A \cup B = A \cup C$

от 1), 2) $\Rightarrow$ ~~x∈A и~~ $x \in A \cup C$

имаме, че $x \in A$ или $x \in C$

I сл. $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$, но $A \cap B = A \cap C \Rightarrow x \in C$ (*)

II сл. $x \in C \Rightarrow x \in A \cup C$ (*)

от 2те (*) $\Rightarrow B \subseteq C$

⊇ ② $x \in C \Rightarrow x \in A \cup C$, но $A \cup C = A \cup B \Rightarrow x \in A \cup B$

I сл. $x \in A$, но $x \in C \Rightarrow x \in A \cap C$, а $(A \cap C) = A \cap B \Rightarrow x \in B$ (·)

II сл. $x \in B$ (·)

от 2те (·) $\Rightarrow x \in B \Rightarrow C \subseteq B$

от ⊆ и ⊇ $\Rightarrow B = C$

$\Leftarrow$ Ще док, че ако $B = C$, то $A \cup B = A \cup C$ и $A \cap B = A \cap C$

$A \cup B$, но $B = C \Rightarrow A \cup B = A \cup C$

$A \cap B$, но $B = C \Rightarrow A \cap B = A \cap C$

От $\Rightarrow$ и $\Leftarrow$ условието е доказано

② Нека $A = \mathbb{N} \cup \{-1\}$, и $R \subseteq A \times A$ е релация, такава че

$$xRy \Leftrightarrow (x, y \in \mathbb{N} \,\&\, x \leq y) \vee (y = -1)$$

Част. наредба ли е?

I рефлексивност

Нека $x \in A$ => имаме $xRx \Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{(x \in \mathbb{N} \,\&\, x \leq x)}_{\text{вярно}} \vee (x = -1)}_{\text{вярно}}$

=> рефлексивна е

II антисиметричност

Нека $x, y \in A$, такива че xRy и yRx

$xRy \Leftrightarrow (x, y \in \mathbb{N} \,\&\, x \leq y) \vee (y = -1)$

$yRx \Leftrightarrow (x, y \in \mathbb{N} \,\&\, y \leq x) \vee (x = -1)$

1) сл. $x \leq y$ и $y \leq x$ => $x = y$ -> антисиметрична е

2) сл. $(x, y \in \mathbb{N}$ и $x \leq y)$ и $(x = -1)$, но $x \neq -1$, защото $x \in \mathbb{N}$ =>
=> izказът влече винаги

3) сл. $(y, x \in \mathbb{N}$ и $y \leq x)$ и $(y = -1)$, но $y \neq -1$, защото $y \in \mathbb{N}$ =>
=> izказът влече винаги

4) сл. $x = -1$ и $y = -1$, то $x = y$, откъдето е антисиметрична

От 1), 2), 3), 4) получаваме едни и същи резултати =>
=> релацията е антисиметрична.

Транзитивност:

Нека имаме $xRy \Leftrightarrow (x, y \in \mathbb{N}$ и $x \leq y) \vee (y = -1)$

$yRz \Leftrightarrow (y, z \in \mathbb{N}$ и $y \leq z) \vee (z = -1)$

Имаме 4 случая отново:

1сл. $y = -1$ и $z = -1$, от тук $y = z \Rightarrow xRz$

2сл. $(x, y \in \mathbb{N}$ и $x \leq y)$ и $(y, z \in \mathbb{N}$ и $y \leq z)$

$x \leq y$ и $y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow xRz$

3сл. $(x, y \in \mathbb{N}$ и $x \leq y)$ и $z = -1$,

~~Ако имаме xRz, то това и~~

xRz бихме имали, ако $(x, z \in \mathbb{N}$ и $x \leq z) \vee (z = -1)$

Второто условие е изпълнено от случая $\Rightarrow xRz$

4сл. $(y, z \in \mathbb{N}$ и $y \leq z)$ и $(y = -1)$, но $y \in \mathbb{N}$, а $y = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1вкса та вече валчно

от 1), 2), 3), 4) R е транзитивна

$\Rightarrow R$ е частична наредба.

③ $a_{n+2} = 8a_{n+1} - a_n + 6.7^n$ $\quad a_0 = 0$, $a_1 = 1$

3)

$F(n) = 6.7^n$ $\quad g(n)$ е от степен 0, съотв.

$\downarrow g(n) \quad \downarrow y_1$ $\quad$ кратността на $y = 0+1 = 1$

Хар. полином $a_{n+2} = 8a_{n+1} - a_n =$

$= x^2 - 8x + 1 = 0$

$D = 64 - 4 = 60 = (2\sqrt{15})^2 \to$

$x_1 = \frac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2}$ с кратност 1

$\Rightarrow$ получаваме $A.x_1^n + Bx_2^n + C7^n$

$a_0 = 0 = A + B + C \quad \to n = 0$

$a_1 = 1 = A(4+\sqrt{15}) + B.(4-\sqrt{15}) + C.7$

$a_2 = A.(31+8\sqrt{15}) + B.(31-8\sqrt{15}) + C.49 = 8a_1 - a_0 + F(0) = 14.$ $\quad n$

$A+B+C = 0 \to A = -B-C$

$4A + \sqrt{15}A + 4B - \sqrt{15}B + 7C = 1$

$31A + 8\sqrt{15}A + 31B - 8\sqrt{15}B + 49C = 14$

От тук намираме A, B и C

~~$A = -B-C$~~

2) ~~$-4B - 4C + \sqrt{15}B + \sqrt{15}C + 4B - \sqrt{15}B + 7C = 1$~~

~~$-31B - 31C + 8\sqrt{15}B + 8\sqrt{15}C + 31B - 8\sqrt{15}B + 49C = 14$~~

~~$(2) \Rightarrow 3C - \sqrt{15}C = 1 \quad C = \frac{1}{3-\sqrt{15}} = \frac{3+\sqrt{15}}{-6}$~~

$=4=$

$$\begin{cases} C = -A - B \\ (4+\sqrt{15})A + (4-\sqrt{15})B + 7\cdot(-A-B) = 1 \Rightarrow \sqrt{15}(A-B) = 1 + 3(A+B) \\ 31A + 8\sqrt{15}A + 31B - 8\sqrt{15}B - 49A - 49B = 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -18(A+B) + 8\sqrt{15}(A-B) = 14$$

$$-18A - 18B + 8 + 24A + 24B = 14$$

$$6A + 6B = 6 \Rightarrow A + B = 1 \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow A = 1 - B$$

$$\sqrt{15}\cancel{A} - \sqrt{15}B - \sqrt{15}B = 1 + 3$$

$$-2\sqrt{15}B = 4 - \sqrt{15}$$

$$B = \frac{4-\sqrt{15}}{-2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}-4}{2\sqrt{15}} \Rightarrow A = \frac{4+\sqrt{15}}{2\sqrt{15}}$$

$\Rightarrow$ a_n има вида $a_n = \left(\frac{\sqrt{15}+4}{2\sqrt{15}}\right)\cdot(4+\sqrt{15})^n + \left(\frac{\sqrt{15}-4}{2\sqrt{15}}\right)(4-\sqrt{15})^n - 7^n$

=5=