Задача 27.

Нека $G(V,E)$ е граф с n върха и повече от $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ребра. Да се докаже, че този граф е свързан.

Док-во:

Да допуснем, че G не е свързан. Тогава няма връх в G, който е от степен $n-1$. Да допуснем, че в G има поне един връх от степен $n-2$. Нека v_1 е един такъв връх и той е свързан чрез ребра с $v_2, v_3, \cdots, v_{n-1}$, ($n-2$ на брой върха) и между v_1и v_n няма ребро. Тогава понеже сме допуснали, че G не е свързан, то между v_n и никои от върховете $v_2, v_3, \cdots, v_{n-1}$ не може да има ребто. Следователно $deg(v_n) = 0$. Тогава

$2.\frac{(n-1)(n-2)}{2} < 2|E| = \sum_{u \in V} deg(u) \leq (n-1)(n-2) + 0$, защото

$\forall k < n, def(v_k) \leq n-2$ и $deg(v_n) = 0$. Следователно $(n-1)(n-2) < (n-1)(n-2)$, което е противоречие с това, че има връх от степен $n-2$. Следователно $\forall u \in V, deg(u) \leq n-3$. Тогава:

$2.\frac{(n-1)(n-2)}{2} < 2.|E| = \sum_{u \in V} deg(u) \leq n(n-3)$, т.е.

$n^2 - 3n + 2 < n^2 - 3n$, което вече е противоречие с допускането, че G не е свързан. Следователно G е свързан.

github.com/andy489